

ISSN 0233-6723



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ

СОВРЕМЕННАЯ
МАТЕМАТИКА
И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Тематические
обзоры

Том 148



Москва 2018

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Главный редактор:

Р. В. Гамкрелидзе (Математический институт им. В. А. Стеклова РАН)

Заместители главного редактора:

А. В. Овчинников (МГУ им. М. В. Ломоносова, ВИНТИ РАН)

В. Л. Попов (Математический институт им. В. А. Стеклова РАН)

Члены редколлегии:

А. А. Аграчёв (Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, SISSA)

С. С. Акбаров (ВИНТИ РАН)

Е. С. Голод (МГУ им. М. В. Ломоносова)

А. Б. Жижченко (Отделение математических наук РАН)

Е. П. Кругова (ВИНТИ РАН)

А. В. Михалёв (МГУ им. М. В. Ломоносова)

Н. Х. Розов (МГУ им. М. В. Ломоносова)

М. В. Шамолин (Институт механики МГУ им. М. В. Ломоносова)

Редактор-составитель:

Е. Ю. Лискина (Рязанский государственный университет
им. С. А. Есенина)

Научный редактор:

А. В. Овчинников (МГУ им. М. В. Ломоносова, ВИНТИ РАН)

ISSN 0233–6723

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ВСЕРОССИЙСКИЙ ИНСТИТУТ
НАУЧНОЙ И ТЕХНИЧЕСКОЙ ИНФОРМАЦИИ
(ВИНИТИ РАН)

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ

СЕРИЯ
СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА
И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

ТЕМАТИЧЕСКИЕ ОБЗОРЫ

Том 148

МАТЕРИАЛЫ
МЕЖДУНАРОДНОЙ КОНФЕРЕНЦИИ
«ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ
В ТЕОРИИ УПРАВЛЕНИЯ
И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКЕ:
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ,
ИНТЕГРИРУЕМОСТЬ, КАЧЕСТВЕННАЯ ТЕОРИЯ»
РЯЗАНЬ, 15–18 СЕНТЯБРЯ 2016 г.



Москва 2018

СОДЕРЖАНИЕ

К задаче об устойчивости малого периодического решения (<i>В. В. Абрамов</i>)	3
Об одном методе регуляризации решения линейной некорректной задачи (<i>Е. А. Борисова</i>)	10
Решение уравнений одномерной задачи двухфазной фильтрации в пористой среде с учетом термодинамики при помощи геометрических методов (<i>И. А. Боронин, А. А. Шевляков</i>)	13
Геометрические связи в задаче о движении двухколесной роликовой доски рипстик (<i>М. М. Гаджиев, А. С. Кулешов, А. И. Буканов</i>)	20
Задача преследования маломаневренных объектов с терминальным множеством в форме кольца (<i>И. В. Измestьев, В. И. Ухоботов</i>)	25
Исследование динамической системы движения парашютиста (<i>И. Ю. Клочкова</i>)	32
Суперинтегрируемые бертрановы натуральные механические системы (<i>Е. А. Кудрявцева, Д. А. Федосеев</i>)	37
Локальные аттракторы в одной краевой задаче для уравнения Курамото—Сивашинского (<i>А. Н. Куликов, А. В. Секацкая</i>)	58
Бифуркации пространственно неоднородных решений в двух версиях нелокального уравнения эрозии (<i>А. М. Ковалева, Д. А. Куликов</i>)	66
Исследование трехфакторной динамической системы экономики региона, учитывающей конечное потребление и ограниченные ресурсы (<i>Е. Ю. Лискина</i>)	75
Циклы первого рода систем с цилиндрическим фазовым пространством (<i>С. С. Мамонов, А. О. Харламова</i>)	83
Ненулевые периодические решения специальной системы нелинейных дифференциальных уравнений (<i>М. Т. Терехин</i>)	93
Асинхронные режимы фазовых систем (<i>А. О. Харламова</i>)	101
Минимальное условие проективности гладкого отображения и проблема Гронуолла (<i>А. М. Шелехов</i>)	109
Джеты Ли и частичные связности высших порядков (<i>В. В. Шурыгин</i>)	122
Об эквивалентности уравнений Абеля первого порядка с коэффициентами, зависящими от управляющего параметра (<i>В. В. Шурыгин (мл.)</i>)	130



К ЗАДАЧЕ ОБ УСТОЙЧИВОСТИ МАЛОГО ПЕРИОДИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ

© 2018 г. В. В. АБРАМОВ

Аннотация. Рассматривается нормальная периодическая по времени система обыкновенных дифференциальных уравнений, правые части которых достаточно гладко зависят от фазовых переменных и малых параметров. Найдены условия ветвления малого периодического решения от нулевого решения системы. Установлены признаки устойчивости малого решения по Ляпунову, по параметру, по части переменных. В основе рассуждений лежит анализ первого нелинейного приближения оператора монодромии.

Ключевые слова: система обыкновенных дифференциальных уравнений, малый параметр, оператор монодромии, ветвление периодического решения, устойчивость.

AMS Subject Classification: 34C23, 34C25, 34D99

1. Введение. В задаче о бифуркации периодического решения неавтономной системы ведущим является подход, основанный на исследовании оператора сдвига (оператора монодромии; см. [5]). При этом свойство устойчивости периодического решения неавтономной системы обычно определяется по Ляпунову и оценивается по спектральному радиусу матрицы монодромии. Несмотря на большое количество работ, задача не решена полностью из-за разнообразия критических случаев. Поэтому актуальны проблемы исследования устойчивости малых периодических решений в критических случаях и исследования случаев неустойчивости по Ляпунову. В монографии [7] на основе комбинации методов усреднения и функций Ляпунова для нулевого решения системы с малым параметром установлены признаки устойчивости «по параметру». При этом характерна кольцевая область устойчивости, то есть в окрестности тривиального решения, которое может быть неустойчиво по Ляпунову, возмущенные решения ограничены и нормы возмущений бесконечно малы при стремлении параметра к нулю. Свойство устойчивости такого типа будем использовать в данной работе при решении задачи о ветвлении малого периодического решения. Для проведения рассуждений рассмотрим первое нелинейное приближение оператора монодромии согласно схеме, предложенной в [1–3].

Рассмотрим ω -периодическую по t систему

$$\dot{x} = f(t, x, \mu), \quad f(t, 0_n, \mu) \equiv 0_n, \quad (1)$$

в которой $f(t, x, \mu)$ достаточно гладко зависит от $x \in \mathbb{R}^n$ и от малого параметра $\mu \in \mathbb{R}^m$. Пусть $x(t, a, \mu)$ — решение с начальным значением $x(0, a, \mu) = a$ для системы (1).

Определение 1. Решение $x(t, a^*, \mu^*)$ системы вида (1) называется *малым*, если

$$a^* = a(\alpha) \neq 0_n, \quad \mu^* = \mu(\alpha), \quad 0 < \alpha < \Delta, \quad \lim_{\alpha \rightarrow 0} a^* = 0_n, \quad \lim_{\alpha \rightarrow 0} \mu^* = 0_m,$$

где Δ — некоторое число. При этом (a_0, μ_0) — направление ветвления малого решения, $a_0 = a'(0)$ и $\mu_0 = \mu'(0)$.

Определим устойчивость малого периодического решения. При этом предполагаем, что в системе (1) выбрано $\mu = \mu^*$, т.е. введен малый параметр α . Учитывая периодичность системы (1), свойства устойчивости, основанные на оценке нормы возмущения решения, можно сформулировать в терминах степеней приращения оператора монодромии (см. [4]).

Определение 2. Малое ω -периодическое решение $x(t, a^*, \mu^*)$ системы вида (1) называется α -устойчивым (устойчивым по параметру), если для любого $\varepsilon > 0$ существуют $\delta_1, \delta_2 > 0$, при которых из неравенств $\|u\| < \delta_1$, $0 < \alpha < \delta_2$ следует, что при всех $s \in \mathbb{N}$ определено значение $x(s\omega, a^* + u, \mu^*)$ и справедлива оценка

$$\|x(s\omega, a^* + u, \mu^*) - a^*\| < \varepsilon.$$

В определении 2 требование малости параметра α следует за выбором допустимого возмущения ε . Поэтому в условиях определения 2 решение может быть неустойчивым по Ляпунову. В то же время ясно, что из асимптотической устойчивости нулевого решения следует α -устойчивость малого решения (некритический случай устойчивости по параметру).

Сформулируем определение устойчивости по части переменных. Для этого зададим способ нормировки фазового пространства.

Рассмотрим разбиение $\mathbb{R}^n = \Pi_1 \oplus \Pi_2$, где Π_1 и Π_2 — линейные пространства с векторными нормами $\|\cdot\|^{(1)}$ и $\|\cdot\|^{(2)}$. Тогда для любого $x \in \mathbb{R}^n$ определим норму формулой

$$\|x\| = \max \left\{ \|x^{(1)}\|^{(1)}, \|x^{(2)}\|^{(2)} \right\},$$

где $x = x^{(1)} + x^{(2)}$, $x^{(i)} \in \Pi_i$, $i = 1, 2$. Определим норму $(n \times n)$ -матрицы $D = D_1 \oplus D_2$ формулой

$$\|D\| = \max \left\{ \|D_1\|^{(1)}, \|D_2\|^{(2)} \right\},$$

где $Dx = D_1x + D_2x$, $x \in \mathbb{R}^n$, $D_ix \in \Pi_i$, $\|\cdot\|^{(i)}$ — индуцированные операторные нормы в Π_i , $i = 1, 2$.

Определение 3. Малое ω -периодическое решение $x(t, a^*, \mu^*)$ называется *устойчивым по $x^{(1)}$* , если для сколь угодно малых $\alpha > 0$ и $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что из неравенства $\|u\| < \delta$ при всех $s \in \mathbb{N}$ следует оценка

$$\|x^{(1)}(s\omega, a^* + u, \mu^*) - a^{*(1)}\|^{(1)} < \varepsilon.$$

Если к тому же

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} \|x^{(1)}(s\omega, a^*, \mu^*) - a^{*(1)}\|^{(1)} = 0,$$

то $x(t, a^*, \mu^*)$ асимптотически устойчиво по $x^{(1)}$.

Аналогично можно сформулировать обобщение определения 2 на случай α -устойчивости по $x^{(1)}$.

Наша задача — найти условия, при которых система вида (1) имеет малое устойчивое ω -периодическое решение.

2. Основные результаты. Запишем систему (1) в виде

$$\dot{x} = A(t)x + \tilde{f}(t, x, \mu), \quad A(t) = f'_x(t, 0_n, 0_m), \quad \tilde{f}(t, x, \mu) = f(t, x, \mu) - A(t)x. \quad (2)$$

При этом $f'_x(t, 0_n, 0_m) \equiv 0_{nn}$. Решение системы (2) представим в виде

$$x(t, a, \mu) = X(t)a + y_1(t, a, \mu) + (y(t, a, \mu) - y_1(t, a, \mu)).$$

Здесь $X(t)$ — фундаментальная матрица системы

$$\dot{x} = A(t)x, \quad X(0) = E$$

и введены обозначения

$$y(t, a, \mu) = X(t) \int_0^t X^{-1}(\tau) \tilde{f}(\tau, x(\tau, a, \mu), \mu) d\tau, \quad y_1(t, a, \mu) = X(t) \int_0^t X^{-1}(\tau) \tilde{f}(\tau, X(\tau)a, \mu) d\tau.$$

В силу гладкости правой части системы (2) вектор-функция $y_1(\omega, a, \mu)$ допускает выделение главной однородной части от начального значения и параметра:

$$y_1(\omega, a, \mu) = p(a, \mu) + \tilde{p}(a, \mu),$$

где

$$p(\alpha a, \alpha \mu) = \alpha^k p(a, \mu), \quad \lim_{\alpha \rightarrow 0} \alpha^{-k} \|\tilde{p}(\alpha a, \alpha \mu)\| \equiv 0$$

(в смысле равномерной сходимости), $k \in \mathbb{N}$, $k > 1$. Ясно, что вектор-функция $\varphi(a, \mu) = y(\omega, a, \mu) - y_1(\omega, a, \mu)$ удовлетворяет условию

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \alpha^{-k} \|\varphi(\alpha a, \alpha \mu)\| \equiv 0.$$

Итак, решая задачу о ветвлении периодического решения, будем предполагать, что для системы (2) оператор монодромии имеет вид

$$x(\omega, a, \mu) = Xa + p(a, \mu) + \psi(a, \mu), \quad (3)$$

$X = X(\omega)$ — матрица монодромии системы $\dot{x} = A(t)x$, $\psi(a, \mu) = \tilde{p}(a, \mu) + \varphi(a, \mu)$. Далее установим признаки существования и устойчивости малого ω -периодического решения системы (2)–(3) по свойствам вектор-функции $p(a, \mu)$ — первого нелинейного приближения оператора монодромии.

Путем оценки нормы правой части бифуркационного уравнения

$$x(\omega, a, \mu) - a = 0_n \quad (4)$$

устанавливается необходимое условие существования малого периодического решения.

Теорема 1. Если система (2)–(3) имеет малое ω -периодическое решение с направлением ветвления (a_0, μ_0) , то выполняются условия

$$\det[X - E] = 0, \quad a_0 \in \ker[X - E] \setminus \{0_n\}, \quad \mu_0 \neq 0_m, \quad p(a_0, \mu_0) = 0_n. \quad (5)$$

Применив теорему о неявной функции к уравнению (4), можно установить следующие две теоремы.

Пусть K — фундаментальная матрица решений линейной алгебраической системы

$$[X - E]a = 0_n, \quad J = [p'_a(a_0, \mu_0)K p'_\mu(a_0, \mu_0)].$$

Теорема 2 (см. [3]). Если выполняются условия (5), $r = \dim(\ker[X - E]) \geq n - m$ и

$$\text{rang } J = n, \quad (6)$$

то система (2)–(3) имеет малое ω -периодическое решение вида $x(t, a^*, \mu^*)$, где

$$a^* = \alpha(a_0 + Kz(\alpha)), \quad \mu^* = \alpha(\mu_0 + \bar{\mu}(\alpha)), \quad \lim_{\alpha \rightarrow 0} \|z(\alpha)\| = 0, \quad \lim_{\alpha \rightarrow 0} \|\bar{\mu}(\alpha)\| = 0.$$

Допустим, условие (6) не выполняется и

$$\text{rang } J = l < n. \quad (7)$$

Подставим

$$a = a^* = \alpha(a_0 + Kz), \quad \mu = \mu^* = \alpha(\mu_0 + \lambda)$$

в уравнение (4). Учитывая, что

$$[X - E]a^* \equiv 0_n, \quad p(a_0, \mu_0) = 0_n,$$

получим

$$\alpha^k (J \cdot \text{colon}(z, \lambda) + \tilde{p}(z, \lambda) + \alpha^{-k} \psi(a^*, \mu^*)) = 0_n, \quad (8)$$

где

$$\tilde{p}(z, \lambda) = p(a_0 + Kz, \mu_0 + \lambda) - J \cdot \text{colon}(z, \lambda).$$

Пусть $c = \text{colon}(z, \lambda)$, $D = [D_1, D_2]$ — фундаментальная матрица решений системы $Jc = 0_n$. При условии (7) в равенстве (8) выберем $c = Dy$ или, что то же самое, $z = D_1 y_1$ и $\lambda = D_2 y_2$. Разделив (8) на α^k получим уравнение

$$\bar{p}(y) + \bar{\psi}(\alpha, y) = 0_n,$$

в котором $\bar{p}(y) = p(a_0 + KD_1 y_1, \mu_0 + D_2 y_2)$, функция $\bar{\psi}(\alpha, y) = \alpha^{-k} \psi(a^*, \mu^*)$ определена по непрерывности $\bar{\psi}(0, y) \equiv 0_n$.

Теорема 3. Если выполняются условия (5), (7) и существует значение $y = y_0$, при котором $\bar{p}(y_0) = 0_n$ и $\text{rang } \bar{p}'(y_0) = n$, то система (2)–(3) имеет малое ω -периодическое решение.

Всюду далее будем предполагать, что выполнены условия теорем 1, 2 или 1, 3, т.е. система (2)–(3) имеет малое периодическое решение $x(t, a^*, \mu^*)$. Кроме того, будем рассматривать критический случай устойчивости, когда $\rho(X) = 1$ ($\rho(\cdot)$ — операция вычисления спектрального радиуса матрицы).

В окрестности начального значения малого периодического решения приращение $d(\alpha, u)$ оператора монодромии (3) системы (2) имеет вид

$$\begin{aligned} d(\alpha, u) &= x(\omega, a^* + u, \mu^*) - a^* = \\ &= Xu + \left(p(a^* + u, \mu^*) - p(a^*, \mu^*) \right) + \left(\psi(a^* + u, \mu^*) - \psi(a^*, \mu^*) \right) = \\ &= Xu + \alpha^{k-1} P_1 u + \sum_{s=2}^k \alpha^{k-s} \bar{p}_s(u) + \tilde{\psi}(\alpha, u). \end{aligned} \quad (9)$$

где $P_1 = p'_\alpha(a_0, \mu_0)$, $\bar{p}_s(u)$ — вектор-форма порядка s ,

$$\tilde{\psi}(\alpha, u) = \left(p(a^* + u, \mu^*) - p(a_0 + u, \alpha \mu_0) \right) + \left(\psi(a^* + u, \mu^*) - \psi(a^*, \mu^*) \right).$$

Теорема 4. Если

$$\|X + \gamma P_1\| \leq 1 - \gamma b_1$$

для некоторого $b_1 > 0$ при всех малых $\gamma > 0$, то малое ω -периодическое решение $x(t, a^*, \mu^*)$ системы (2)–(3) асимптотически устойчиво по Ляпунову.

Очевидно, $X + \alpha^{k-1} P_1$ — первое приближение матрицы монодромии системы в вариациях, соответствующей малому периодическому решению при $\alpha \rightarrow 0$. В условиях теоремы 4

$$\rho(X + \alpha^{k-1} P_1) \leq \|X + \alpha^{k-1} P_1\| < 1$$

при малых α . Следовательно, все мультипликаторы лежат внутри единичного круга, т.е. в условиях теоремы 4 имеет место некритический случай устойчивости по Ляпунову.

При $\mu = 0_m$ в силу равенств (3) и (9) в окрестности нулевого решения оператор монодромии имеет вид

$$x(\omega, u, 0_m) = d(0, u) = Xu + p(u, 0_m) + \varphi(u, 0_m) = [X + P_k(u) + \Phi(u)]u, \quad (10)$$

где $P_k(u)$ — какая-либо $(n \times n)$ -матрица, для которой

$$P_k(u)u = \bar{p}_k(u) = p(u, 0_m), \quad P_k(\gamma u) = \gamma^k P_k(u), \quad \lim_{\gamma \rightarrow 0} \gamma^{1-k} \|\Phi(\gamma u)\| = 0.$$

Рассмотрим некритический случай α -устойчивости малого периодического решения.

Теорема 5. Если при некоторых $c > 0$, $b_k > 0$ для всех малых $\gamma > 0$ и всех λ , постоянных по модулю ($\|\lambda\| = c$) справедлива оценка

$$\|X + \gamma P_k(\lambda)\| \leq 1 - \gamma b_k, \quad (11)$$

то при $\mu = 0_m$ решение $x = 0_n$ системы (2) асимптотически устойчиво. При $\alpha > 0$ малое ω -периодическое решение $x(t, a^*, \mu^*)$ системы (2)–(3) является α -устойчивым.

Доказательство. Допустим что $\mu = 0_m$ в системе (2). В силу [5, лемма 9.2] и представления (9) задача об асимптотической устойчивости нулевого решения системы (2)–(3) сводится к задаче об асимптотической устойчивости нулевого решения системы в конечных разностях

$$u_{j+1} = [X + P_k(u_j) + \Phi(u_j)]u_j. \quad (12)$$

Так как

$$\lim_{\gamma \rightarrow 0} \gamma^{1-k} \|\Phi(\gamma u)\| = 0,$$

то существует такое $\delta_0 > 0$, что

$$\|\Phi(u)\| < \frac{1}{2}b_k\|u\|^{k-1}$$

при всех u , удовлетворяющих условию $\|u\| < \delta_0$. Тогда из равенства (12) по условию (11) получим оценку

$$\|u_{j+1}\| < \left(1 - \frac{1}{2}b_k\|u_j\|^{k-1}\right)\|u_j\| < \|u_j\|. \quad (13)$$

Выберем тождественную последовательность функций $V_j(u) \equiv \|u\|$. Для любого члена этой последовательности и для любых аргументов по свойствам нормы выполняются условия

$$\bar{a}(\|u\|) = \frac{\|u\|}{2} \leq V_j(u) \leq \bar{b}(\|u\|) = 2\|u\|, \quad |V_j(u) - V_j(\tilde{u})| \leq \|u - \tilde{u}\|.$$

Кроме того, из оценки (13) следует неравенство

$$\|u_{j+1}\| - \|u_j\| < -\frac{1}{2}b_k\|u_j\|^k < -\bar{c}(\|u_{j+1}\|) = -\frac{1}{2}b_k\|u_{j+1}\|^k.$$

Так как $\bar{a}(\cdot)$, $\bar{b}(\cdot)$, $\bar{c}(\cdot)$ — функции класса Хана, то в силу [6, предложение 2] нулевое решение системы (12) асимптотически устойчиво. Итак, первое утверждение теоремы 5 доказано.

Выберем $\mu = \mu^*$ в системе (2). Рассмотрим малое периодическое решение $x(t, a^*, \mu^*)$ при малых $\alpha > 0$. Приращение оператора монодромии представим в виде

$$d(\alpha, u) = [X + P_k(u) + G(\alpha, u) + V(\alpha, u)]u,$$

где

$$\lim_{\gamma \rightarrow 0} \gamma^{1-k} \|G(\alpha, \gamma u)\| \equiv 0, \quad V(0, u) \equiv 0_{nn}.$$

Возьмем $u = \gamma\lambda$, $\|\lambda\| = c$ и выберем $\delta_1 > 0$ так, чтобы при всех γ и α , удовлетворяющих условиям

$$\gamma < \frac{\delta_1}{c}, \quad \alpha < \delta_1$$

выполнялось неравенство

$$\|G(\alpha, \gamma\lambda)\| \leq \frac{\gamma^{k-1}b_k}{4}.$$

Существует такое δ_2 , $0 < \delta_2 \leq \delta_1$, для которого из условия $\alpha < \delta_2$ при всех γ , удовлетворяющих условию

$$\frac{\delta_1}{2c} \leq \gamma < \frac{\delta_1}{c}$$

следует оценка

$$\|V(\alpha, \gamma\lambda)\| \leq \frac{\gamma^{k-1}b_2}{4}.$$

Без ограничения общности можно предполагать, что

$$\|X + P_k(u) + G(\alpha, u) + V(\alpha, u)\| < 2.$$

Если

$$\alpha < \delta_2, \quad \gamma < \frac{\delta_1}{2c},$$

то

$$\|d(\alpha, u)\| < 2\|u\| < \delta_1.$$

Если же

$$\alpha < \delta_2, \quad \frac{\delta_1}{2c} \leq \gamma < \frac{\delta_1}{c},$$

то

$$\|d(\alpha, u)\| \leq \left(1 - \frac{\gamma^{k-1}b_2}{2}\right)\|u\| < \delta_1.$$

Итак, произвольно выбрав $\varepsilon > 0$, получим, что

$$\|d(\alpha, u)\| < \|u\| < \varepsilon$$

для всех таких u , что $\|u\| < \delta = \min\{\varepsilon, \delta_1\}$ и $\alpha < \delta_2$. Тогда по индукции при всех $s \in \mathbb{N}$ справедлива оценка

$$\|d_s(\alpha, u)\| < \varepsilon,$$

где

$$d_s(\alpha, u) = x(s\omega, a^* + u, \mu^*, \alpha) - a^*.$$

Следовательно, малое периодическое решение $x(t, a^*, \mu^*)$ системы (2) является α -устойчивым по определению 2. Теорема 5 доказана. $\square$

Учитывая условие (5), выберем какую-либо $(n \times n)$ -матрицу $P(u)$, удовлетворяющую равенству $P(u)u = p(a_0 + u, \mu_0)$.

Теорема 6 (см. [3]). *Если существуют $c > 0$, $b > 0$, для которых при всех λ , удовлетворяющих условию $\|\lambda\| = c$, и малых $\alpha > 0$ справедлива оценка*

$$\|X + \gamma P(\lambda)\| \leq 1 - \gamma b,$$

то малое ω -периодическое решение $x(t, a^, \mu^*)$ системы (2)–(3) является α -устойчивым.*

Перейдем к вопросу об устойчивости малого периодического решения по части переменных. При этом будем использовать локальное представление оператора монодромии по следующей схеме. Допустим, первое приближение приращения этого оператора в окрестности начального значения малого периодического решения обеспечивает локальное притяжение по $x^{(1)}$. Для соблюдения локальности требуется ограниченность возмущенных решений, которая имеет место при наличии устойчивости невозмущенного решения по параметру.

Далее, пусть $\mathbb{R}^n = \Pi_1 \oplus \Pi_2$. Предположим также, что приращение (9) оператора монодромии при всех достаточно малых u , α имеет разложение

$$d(\alpha, u) = d^{(1)}(\alpha, u) + d^{(2)}(\alpha, u),$$

в котором

$$\begin{aligned} d^{(1)}(\alpha, u) &= [X_1 + \alpha^{k-k_1} P_1(u) + G_1(\alpha, u)] u^{(1)} = D_1(\alpha, u) u^{(1)}, \\ d^{(2)}(\alpha, u) &= [X_2 + P_2(u) + G_2(\alpha, u)] u = D_2(\alpha, u) u, \end{aligned} \tag{14}$$

$P_i(\beta\alpha) \equiv \beta^{k_i} P_i(\alpha)$, $k_2 = k$, причем для всех λ , по модулю равных 1, и малых $\gamma > 0$ возможны оценки вида

$$\|X_i + \gamma P_i(\lambda)\|^{(i)} \leq 1 - \gamma b_i, \quad b_i > 0, \quad i = 1, 2, \tag{15}$$

а также

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} \beta^{-k_1} \|G_1(\alpha, \beta u)\|^{(1)} \equiv 0, \quad \lim_{\beta \rightarrow 0} \beta^{-k_2} \|G_2(\alpha, \beta u)\|^{(2)} \equiv 0.$$

Теорема 7. *Если выполняются условия (14) и (15), то малое периодическое решение $x(t, a^*, \mu^*)$ системы (2)–(3) является α -устойчивым и асимптотически устойчивым по $x^{(1)}$.*

Доказательство. Пусть система (2) имеет малое периодическое решение $x(t, a^*, \mu^*)$. В силу локальной непрерывной зависимости решений системы (2)–(3) от начального значения и параметра α при $\mu = \mu^*$ существует такое $\delta_0 > 0$, что при $\|u\| < \delta_0$ и $\alpha < \delta_0$ в силу условий (14) и (15) справедливы оценки

$$\|D_i(\alpha, u)\|^{(i)} < 2, \quad i = 1, 2.$$

Кроме того, при некотором $\delta_1 \in (0, \delta_0]$ имеют место оценки

$$\|d^{(1)}(\alpha, u)\|^{(1)} < \|u^{(1)}\|^{(1)} \leq \|u\|, \quad \|d^{(2)}(\alpha, u)\|^{(2)} < \|u\|,$$

где

$$\frac{\delta_1}{2} \leq \|u\| < \delta_1, \quad \frac{\delta_1}{2} \leq \alpha < \delta_1,$$

т.е.

$$\|d(\alpha, u)\| < \delta_1.$$

Очевидно, при $\|u\| < \delta_1/2$, $\alpha < \delta_1/2$ справедливы неравенства

$$\|d^{(i)}(\alpha, u)\|^{(i)} < 2\|u\| < \delta_1.$$

Далее, рассуждая по схеме доказательства теоремы 5, получим, что малое периодическое решение α -устойчиво. Итак, локально определена и ограничена любая последовательность

$$u(s) = d_s(\alpha, u) = x\left(s\omega, a^* + u, \mu^*\right) - a^*, \quad u(0) = u.$$

Из оценки (15) следует, что для любого фиксированного $\alpha \in (0, \delta_1)$ существует такое $\delta_2 \in (0, \delta_1]$, что при любом u , $\|u\| < \delta_2$, имеет место оценка

$$\|d^{(1)}(\alpha, u)\|^{(1)} \leq \left(1 - \frac{\|u\|^k b_1}{2}\right) \|u^{(1)}\|^{(1)}.$$

Отсюда по индукции получим неравенство

$$\|u^{(1)}(s+1)\|^{(1)} < \left(1 - \frac{\|u\|^k b_1}{2}\right) \|u^{(1)}(s)\|^{(1)} < \left(1 - \frac{\|u\|^k b_1}{2}\right)^s \|u^{(1)}(0)\|^{(1)}. \quad (16)$$

Для выбранного $\alpha \in (0, \delta_1)$ и произвольно заданного $\varepsilon > 0$ возьмем $\delta = \min\{\varepsilon, \delta_2\}$. Тогда при любых u , $\|u\| < \delta$, и $s \in \mathbb{N}$ в силу (16) справедливо неравенство

$$\|u^{(1)}(s)\|^{(1)} < \|u^{(1)}(0)\|^{(1)} \leq \|u\| < \delta \leq \varepsilon.$$

Более того, в силу оценки (16) при $s \rightarrow +\infty$ имеет место притяжение. Итак, по определению 3 малое периодическое решение системы (2)–(3) асимптотически устойчиво по $x^{(1)}$. Теорема 7 доказана. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Абрамов В. В. К вопросу об устойчивости по части переменных // Изв. РАЕН. Диффер. уравн. — 2011. — 16. — С. 5–8.
2. Абрамов В. В. Устойчивость малого периодического решения // Вестн. РАЕН. — 2013. 13, № 4. — С. 3–5.
3. Абрамов В. В. Двусторонняя устойчивость малого периодического решения // Вест. РАЕН. — 2014. — 14, № 5. — С. 6–9.
4. Абрамов В. В. Устойчивость нулевого решения периодической системы дифференциальных уравнений с малым параметром // Ж. Средневолж. мат. о-ва. — 2010. — 12, № 4. — С. 49–54.
5. Красносельский М. А. Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1966.
6. Халанай А., Векслер Д. Качественная теория импульсных систем. — М.: Мир, 1971.
7. Хапаев М. М. Усреднение в теории устойчивости. — М.: Наука, 1986.

В. В. Абрамов

Рязанский государственный университет им. С. А. Есенина

E-mail: v.abramov@rsu.edu.ru



ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ РЕГУЛЯРИЗАЦИИ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНОЙ НЕКОРРЕКТНОЙ ЗАДАЧИ

© 2018 г. Е. А. БОРИСОВА

Аннотация. Предложен метод регуляризации решения линейной некорректной задачи (уравнения Фредгольма первого рода), являющийся эффективным и простым в применении.

Ключевые слова: линейная некорректная задача, уравнения Фредгольма, регуляризация решения.

AMS Subject Classification: 47S99

Рассматривается задача регуляризации решения уравнения

$$Ay = f; \quad y, f \in H, \quad (1)$$

где A — линейный вполне непрерывный (или компактный) оператор в гильбертовом пространстве H .

Вместо точных A и f берутся такие их известные приближения $\hat{A}$ и $\hat{f}$, что

$$\|\hat{f} - f\|_H \leq \delta_1, \quad \|\hat{A} - A\|_H \leq \delta_2, \quad (2)$$

т.е. решается уравнение

$$\hat{A}y = \hat{f}, \quad y, \hat{f} \in H. \quad (3)$$

Исследованию методов регуляризации этой задачи посвящено множество работ (см., например, обзоры [1, 2]). Особенно интенсивно изучался случай, когда A — интегральный оператор в пространстве $H = L_2[a, b]$. Это вызвано, например, его применением к обработке спектрометрической информации.

В данной работе предложен эффективный метод регуляризации задачи (1)–(3), имеющий ряд отличий и преимуществ перед уже известными. Получаемое при этом регуляризованное решение близко по норме пространства H к решению, которое получается при известной регуляризации при помощи разложения решения по первым собственным векторам оператора A (метод Пикара, см. [2]). В отличие от упомянутого метода мы не находим первые собственные векторы, а достаточно просто вычисляем приближение C_m ортогонального оператора — проектора P_n пространства H на подпространство H_n , порожденное первыми n собственными векторами оператора A . Это позволяет значительно экономить вычислительные операции, сохраняя при этом одну из главных особенностей метода Пикара — простоту выбора параметра регуляризации (в методе Пикара это количество n первых собственных векторов).

Не теряя общности, будем предполагать, что оператор A является положительным и самосопряженным. В противном случае, как обычно, вместо уравнения (1) будем рассматривать уравнение $\hat{A}Ay = \hat{A}f$ с положительным оператором $\hat{A}A$. Как известно, справедливо разложение

$$Ay = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k(y, e_k) e_k \quad \text{для } y \in H, \quad (4)$$

где e_k — нормированные собственные векторы оператора A с соответствующими собственными значениями λ_k . Собственные значения нумеруются в порядке невозрастания, $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$.

Заметим, что можно не приводить к уравнению с самосопряженным оператором, а вместо (4) рассмотреть более общее известное разложение Гильберта—Шмидта для несамосопряженных операторов.

Теперь опишем основные этапы алгоритма.

1) Вычисляем итерационным методом норму оператора A :

$$\|A\| = \sup_{\forall y \neq 0} \frac{\|A_y\|}{\|y\|} = \lambda_1.$$

2) Полагаем $B = E - A/\|A\|$. В силу (4) справедливо

$$By = \sum_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda_k}{\lambda_1}\right) (y, e_k) e_k, \quad y \in H. \quad (5)$$

3) Пусть $\delta = 2(\delta_1 + \delta_2)$; возьмем целое число

$$m = \min \left\{ k, \left(1 - \frac{\delta}{\lambda_1}\right)^k < \frac{1}{2} \right\}.$$

Очевидно, что

$$m = \left\lfloor -\frac{1}{\log_2 \left(1 - \frac{\delta}{\lambda_1}\right)} \right\rfloor + 1 \quad \text{или} \quad m \sim \frac{\lambda_1 \ln 2}{\delta} \quad \text{при } \delta \rightarrow 0.$$

Далее вычисляем оператор $C_m = E - (B)^m$.

В силу (5) имеем

$$C_m y = \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ 1 - \left(1 - \frac{\lambda_k}{\lambda_1}\right)^m \right\} (y, e_k) e_k, \quad y \in H. \quad (6)$$

Нетрудно заметить, что для множителей в (4)

$$\left\{ 1 - \left(1 - \frac{\lambda_k}{\lambda_1}\right)^m \right\} \rightarrow 1 \quad \text{при } m \rightarrow \infty \quad (\lambda_k \neq 0). \quad (7)$$

Стремление к 1 в (7) монотонно при $m \rightarrow \infty$; более того, при фиксированном m чем больше λ_k , тем ближе величина $\left\{ 1 - \left(1 - \frac{\lambda_k}{\lambda_1}\right)^m \right\}$ к 1. Если же λ_k достаточно мало, то

$$\left\{ 1 - \left(1 - \frac{\lambda_k}{\lambda_1}\right)^m \right\} \sim m \frac{\lambda_k}{\lambda_1} \quad \text{при } \lambda_k \rightarrow 0. \quad (8)$$

Отсюда и из (6) следует, что оператор C_m есть приближение ортогонального проектора P_n пространства H на подпространство H_n , порожденное первыми собственными векторами $e_1, \dots, e_n$ оператора A , где n таково, что $\lambda_n > \delta \geq \lambda_{n+1}$.

Выберем произвольным образом номера n_1 и n_2 так, что $n_1 < n \leq n_2$.

Приведем здесь необходимые оценки полученного приближения, оценивая норму оператора $P_n - C_m$ на подпространствах $G_1 = H_{n_1}$ и ортогональном дополнении G_2 к пространству H_{n_2} .

Так как $P_n y = y$ для $y \in G_1$, принимая во внимание (6) и (8), имеем

$$\|P_n - C_m\|_{G_1} \leq 1 - \left\{ 1 - \left(1 - \frac{\lambda_{n_1}}{\lambda_1}\right)^m \right\} < \left(1 - \frac{\lambda_{n_1}}{\lambda_1}\right)^m.$$

Учитывая, что

$$\left(1 - \frac{\lambda_{n_1}}{\lambda_1}\right)^m < \left(1 - \frac{\delta}{\lambda_1}\right)^m < \frac{1}{2},$$

последнюю оценку можно сделать более наглядной. Пусть $\varepsilon = \lambda_{n_1} - \delta$. Тогда

$$\lambda_{n_1} = \delta + \varepsilon > \lambda_n > \delta \geq \lambda_{n+1} \geq \dots,$$

$$\|P_n - C_m\|_{G_1} < \left(\frac{1}{2}\right)^{1+\varepsilon/\delta}.$$

Аналогично, так как $P_n y = 0$ для $y \in G_2$, принимая во внимание (6) и (8), имеем

$$\|P_n - C_m\|_{G_2} \leq \left\{ 1 - \left(1 - \frac{\lambda_{n_1}}{\lambda_1} \right)^m \right\} < \frac{m\lambda_{n_1}}{\lambda_1}.$$

Из приведенных оценок следует, что чем меньше n и больше n_1 , тем лучше приближение проектора P_n оператором C_m на подпространствах G_1 и G_2 .

Использовать полученный оператор для нахождения искомого регуляризованного решения можно разными способами. Вычислительные эксперименты показали хорошую эффективность его применения совместно с итерационными методами. Наиболее просто это можно реализовать следующим образом. Рассмотрим обычную итерационную последовательность

$$y_0 = 0, \quad y_l = y_{l-1} + \nu(f - Ay_{l-1}), \quad l = 1, 2, \dots,$$

где $0 < \nu < 1/\|A\|$.

Выбирая ν достаточно большим, получаем более быстрое приближение y_l к точному решению уравнения $Ay = f$. Прделав достаточное количество итераций, получим нерегуляризованное решение y_l . В качестве регуляризованного решения необходимо взять $z = C_m^k y_l$, где $k = \min \left\{ i, \|C_m^i y_l - C_m^{i+1} y_l\| < \|f\| \right\}$. Обычно $k = 1$.

Заметим, что здесь в отличие от известных методов итеративной регуляризации путем выбора правила останова процесса итераций значительно экономится число вычислительных операций.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Верлань А. Ф., Сизиков В. С. Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы. — Киев: Наукова думка, 1986.
2. Иванов В. К., Васин В. В., Танана В. П. Теория линейных некорректных задач и ее приложения. — М.: Наука, 1978.

Е. А. Борисова

Академия труда и социальных отношений, Москва

E-mail: borisova.e.a@gmail.com



РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ОДНОМЕРНОЙ ЗАДАЧИ ДВУХФАЗНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ В ПОРИСТОЙ СРЕДЕ С УЧЕТОМ ТЕРМОДИНАМИКИ ПРИ ПОМОЩИ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ МЕТОДОВ

© 2018 г. И. А. БОРОНИН, А. А. ШЕВЛЯКОВ

Аннотация. Одномерная задача двухфазной фильтрации жидкостей (воды и нефти) в пористой среде определяется уравнениями Бакли—Левретта, законом Дарси и законом сохранения энергии при заданных начальных и граничных условиях. В данной статье предлагается асимптотический метод построения решения задачи и способы разрешения особенностей, связанных с ударными волнами, возникающими в процессе решения. Предложенный метод реализован численно в среде программирования Maple.

Ключевые слова: ударные волны, уравнения в частных производных, геометрические методы.

AMS Subject Classification: 65N06, 34K06, 34K10

1. Введение. Пористая среда представляет собой сеть пустот и связывающих их каналов в твердой среде. Под пористостью среды m понимается доля объема пор в объеме тела. Под водонасыщенностью $s_1 = \sigma$ понимается объем пор, занятых водой; под нефтенасыщенностью s_2 понимается, соответственно, доля пор, занятых нефтью; $s_2 = 1 - \sigma$.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений, описывающих двухфазную фильтрацию жидкостей, состоящую из уравнений законов сохранения массы, импульса и энергии.

Закон сохранения массы для каждой из двух фаз (вода и нефть):

$$m \frac{\partial \rho_i s_i}{\partial t} + \operatorname{div} \rho_i U_i = 0, \quad (1)$$

где ρ_i — плотности фаз, U_i — объемные скорости каждой из фаз.

Закон сохранения импульса для каждой фазы, или закон Дарси:

$$U_i = -\frac{k}{\mu_i} f_i(\sigma) (\operatorname{grad}_p - \rho_i g \operatorname{grad}_z), \quad (2)$$

где f_i — проницаемости фаз, p_i — давления, k — коэффициент проницаемости, μ_i — коэффициенты вязкости, g — ускорение свободного падения.

В данной статье мы пренебрежем капиллярными силами; тогда $p_1 = p_2 = p$, и закон Дарси примет вид

$$U_i = -\frac{k}{\mu_i} f_i(\sigma) (\operatorname{grad}_p - \rho_i g \operatorname{grad}_z). \quad (3)$$

Закон сохранения энергии с учетом отсутствия внешнего притока или оттока тепла записывается в форме

$$\frac{\partial}{\partial t}(cT) + \operatorname{div} (T\rho_1 c_1 U_1 + T\rho_2 c_2 U_2) = 0,$$

где T представляет собой отклонение от исходной температуры, c_i , $i = 0, 1, 2$, — удельные теплоемкости фаз и твердого скелета породы и

$$c = (1 - m)c_0\rho_0 + m\rho_1 c_1 \sigma + m\rho_2 c_2 (1 - \sigma).$$

Дополнительно предположим, что $\rho_i = \text{const}$, $k = \text{const}$, $c_i = \text{const}$ и вязкость зависит от температуры согласно закону Френкеля:

$$\mu_i = \mu_{i0} \exp(-\gamma_i T),$$

где γ_i — индексы вязкости. Также предполагается, что относительная проницаемость считается известной функцией от водо- и нефтенасыщенности.

Сложив два уравнения (1), получим $\text{div } U = 0$, и оставим второе уравнение (1):

$$m \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \text{div} (F(\sigma, \mu) U) = 0,$$

где

$$F(\sigma, \mu) = \frac{f_1(\sigma)}{f_1(\sigma) + \mu f_2(\sigma)}$$

— функция Бакли—Леверетта, и

$$\mu = \frac{\mu_1}{\mu_2} = \mu_0 \exp(-\gamma T), \quad \mu_0 = \frac{\mu_{10}}{\mu_{20}}, \quad \gamma = \gamma_1 - \gamma_2.$$

С учетом вида функции F получаем

$$U_1 = F(\sigma, \mu) U, \quad U_2 = (1 - F(\sigma, \mu)) U.$$

Сложив уравнения (2), получим закон Дарси для итоговой скорости:

$$U = -k \left(\frac{f_1(\sigma)}{\mu_1} + \frac{f_2(\sigma)}{\mu_2} \right) \text{grad}_p + kg \left(\frac{\rho_1}{\mu_1} f_1(\sigma) + \frac{\rho_2}{\mu_2} f_2(\sigma) \right) \text{grad}_z.$$

Тогда уравнение для баланса тепла (3) примет вид

$$\frac{\partial T}{\partial t} + G(\sigma, \mu) U(T) = 0,$$

где

$$G(\sigma, \mu) = \frac{\rho_1 c_1 F(\sigma, \mu) + \rho_2 c_2 (1 - F(\sigma, \mu))}{c}.$$

Результирующая система для описания двухфазной фильтрации принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} m \frac{\partial \sigma}{\partial t} + U(F(\sigma, \mu)) &= 0, \quad \frac{\partial T}{\partial t} + G(\sigma, \mu) U(T) = 0, \\ \text{div } U &= 0, \quad U = -f(\sigma, \mu_1, \mu_2) \text{grad}_p, \quad \mu = \mu_0 \exp(-\gamma T), \quad \mu_i = \mu_{i0} \exp(-\gamma_i T). \end{aligned} \quad (4)$$

Будем называть ее системой Бакли—Леверетта.

2. Решение. Исследуем асимптотическое разложение по индексу вязкости γ для рассматриваемых функций:

$$f \sim \sum f_n \frac{\gamma^n}{n!}.$$

Так, например,

$$\mu \sim \mu_0 + \mu_0(-T) \exp(-\gamma(0)T) \gamma + o(\gamma^2).$$

Тогда система уравнений Бакли—Леверетта для нулевого приближения примет вид

$$m \frac{\partial \sigma_0}{\partial t} + U_0(F(\sigma_0, \mu_0)) = 0, \quad \frac{\partial T_0}{\partial t} + G(\sigma_0, \mu_0) U_0(T_0) = 0, \quad \text{div } U_0 = 0, \quad (5)$$

а для первого приближения —

$$\begin{aligned} m \frac{\partial \sigma_1}{\partial t} + U_1(F(\sigma_0, \mu_0)) + U_0(F_\sigma(\sigma_0, \mu_0) \sigma_1 - F_\mu(\sigma_0, \mu_0) \mu_0 T_0) &= 0, \\ \frac{\partial T_1}{\partial t} + G(\sigma_0, \mu_0) U_0(T_1) + (G_\sigma(\sigma_0, \mu_0) \sigma_1 - G_\mu(\sigma_0, \mu_0) \mu_0 T_0) U_0(T_0) + G(\sigma_0, \mu_0) U_1(T_0) &= 0, \\ \text{div } U_1 &= 0. \end{aligned} \quad (6)$$

В одномерном случае $\sigma_i = \sigma_i(t, x)$, $i = 0, 1$; последнее уравнение систем (5) и (6) означает, что U_0 и U_1 имеют вид

$$U_0 = \lambda_0 \frac{\partial}{\partial x}, \quad U_1 = \lambda \frac{\partial}{\partial x}.$$

Рассмотрим первое уравнение системы (5):

$$m \frac{\partial \sigma_0}{\partial t} + \lambda_0 F_\sigma(\sigma_0, \mu_0) \frac{\partial \sigma_0}{\partial x} = 0. \quad (7)$$

Сделаем замену переменных $\tau = \tau(t)$, выбрав функцию $\tau(t)$ таким образом, чтобы

$$\tau' = \lambda_0, \quad \tau(0) = 0. \quad (8)$$

Введем обозначение $\sigma_0(t, x) = \alpha(\tau(t), x)$. Тогда мы получим следующее уравнение на α , не содержащее λ_0 :

$$m \frac{\partial \alpha}{\partial \tau} + F_\sigma(\alpha, \mu_0) \frac{\partial \alpha}{\partial x} = 0. \quad (9)$$

Это уравнение может быть решено методом характеристик (см. [1]), и его решение задается поверхностью

$$S = \left\{ (\tau, x, \alpha) \mid \alpha - \alpha_0(x - m^{-1} F_\sigma(\alpha, \mu_0) \tau) = 0 \in \mathbb{R}_{(\tau, x, \alpha)}^3 \right\}.$$

Согласно ранее полученным результатам (см. [2]), решение $\theta(\tau, x)$ второго уравнения системы (5) будет первым интегралом векторного поля

$$V = \frac{\partial}{\partial \tau} + G(\alpha, \mu_0) \frac{\partial}{\partial x}.$$

Поднятие векторного поля V на поверхность S решения (7) имеет вид

$$\bar{V} = \frac{\partial}{\partial \tau} + G(\alpha, \mu_0) \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\alpha'_0(x) (G(\alpha, \mu_0) - m^{-1} F_\sigma(\alpha, \mu_0))}{1 + m^{-1} F_{\sigma\sigma}(\alpha, \mu_0) \tau} \frac{\partial}{\partial \alpha},$$

а поднятие функции температуры θ на S будет первым интегралом векторного поля $\bar{V}$. Это векторное поле не определено в точках каустики Σ . Поэтому рассматривается другое векторное поле:

$$W = \left(1 + m^{-1} F_{\sigma\sigma}(\alpha, \mu_0) \tau \right) \left(\frac{\partial}{\partial \tau} + G(\alpha, \mu_0) \frac{\partial}{\partial x} \right) + \alpha'_0(x) (G(\alpha, \mu_0) - m^{-1} F_\sigma(\alpha, \mu_0)) \frac{\partial}{\partial \alpha},$$

которое будет определено и гладко на всей поверхности S , и температура θ будет первым интегралом векторного поля W .

Чтобы вычислить решение данного уравнения в точке (τ, x, α) , можно проинтегрировать векторное поле W в отрицательном направлении до тех пор, пока траектория не пересечется с плоскостью $\tau = 0$. Тогда значение начального распределения температуры в полученной точке равно значению температуры в точке (τ, x, α) .

Теперь рассмотрим систему уравнений (6):

$$m \frac{\partial \sigma_1}{\partial t} + \lambda_0 \left(F_\sigma(\sigma_0, \mu_0) \frac{\partial \sigma_1}{\partial x} + \left(\frac{\partial^2}{\partial \sigma^2} F(\sigma_0, \mu_0) \sigma_1 - \frac{\partial^2}{\partial \sigma \partial \mu} F(\sigma_0, \mu_0) \mu_0 T_0 \right) \frac{\partial \sigma_0}{\partial x} - F_\mu \mu_0 \frac{\partial T_0}{\partial x} \right) + \lambda F_\sigma \frac{\partial \sigma_0}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial T_1}{\partial t} + G(\sigma_0, \mu_0) \lambda_0 \frac{\partial}{\partial x} T_1 + \left(G_\sigma(\sigma_0, \mu_0) \sigma_1 - G_\mu(\sigma_0, \mu_0) \mu_0 T_0 \right) \lambda_0 \frac{\partial T_0}{\partial x} + G(\sigma_0, \mu_0) \lambda \frac{\partial T_0}{\partial x} = 0.$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_\sigma}{\partial x} &= \frac{\partial^2 F}{\partial \sigma^2} \frac{\partial \sigma}{\partial x} + \frac{\partial^2 F}{\partial \sigma \partial \mu} \frac{\partial \mu_0}{\partial x}, & \frac{\partial \mu_0}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial F_\mu}{\partial x} &= \frac{\partial^2 F}{\partial \sigma \partial \mu} \frac{\partial \sigma}{\partial x} + \frac{\partial^2 F}{\partial \mu^2} \frac{\partial \mu_0}{\partial x}, & \frac{\partial \mu_0}{\partial x} &= 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Аналогично (8) сделаем замену переменной $t \rightarrow \tau$. Запишем систему (6) с учетом (10) в более удобном для нас виде:

$$m \frac{\partial \alpha_1}{\partial \tau} + \frac{\partial \alpha_1}{\partial x} F_\alpha + \frac{\partial F_\alpha}{\partial x} \alpha_1 = \frac{\partial F_\mu}{\partial x} T_0 \mu_0 + \frac{\partial T_0}{\partial x} F_\mu \mu_0 - \hat{\lambda} \frac{\partial F}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha_0}{\partial x} = 0, \quad (11)$$

$$\frac{\partial T_1}{\partial \tau} + G \frac{\partial T_1}{\partial x} + (G_\alpha \alpha_1 - G_\mu \mu_0 T_0) \frac{\partial T_0}{\partial x} + \hat{\lambda} G \frac{\partial T_0}{\partial x} = 0, \quad (12)$$

где $\hat{\lambda} = \lambda/\lambda_0$. Для вычисления $\hat{\lambda}$ и α_1 рассмотрим уравнение (11) с граничными условиями

$$\alpha_1|_{\tau=0} = 0, \quad \alpha_1|_{x=0} = 0 \quad (13)$$

и сделаем следующие замены:

$$a = \frac{F_\alpha}{m}, \quad b = \frac{1}{m} \frac{\partial F_\alpha}{\partial x}, \quad f = \frac{1}{m} \left(\frac{\partial F_\mu}{\partial x} T_0 \mu_0 + \frac{\partial T_0}{\partial x} F_\mu \mu_0 \right), \quad g = \frac{1}{m} \frac{\partial F}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha_0}{\partial x}.$$

Тогда уравнение (11) примет вид

$$\frac{\partial \alpha_1}{\partial \tau} + a(x, \tau) \frac{\partial \alpha_1}{\partial x} + b(x, \tau) \alpha_1 = f(x, \tau) - \hat{\lambda} g(x, \tau). \quad (14)$$

Для решения уравнения (14) воспользуемся методом характеристик. Рассмотрим поверхность $z = \alpha_1(\tau, x)$ и запишем условие того, что векторное поле с координатами $(1, a, -b\alpha_1 + f - \hat{\lambda}g)$ является касательным к поверхности z :

$$\dot{\tau} = 1, \quad \dot{x} = a, \quad \dot{\alpha}_1 = -b\alpha_1 + f - \hat{\lambda}g. \quad (15)$$

Решение системы будет иметь вид $\tau = s$, $x = x(s)$, $\alpha_1 = \alpha_1(s)$.

Рассмотрим третье уравнение системы (15):

$$\dot{\alpha}_1 = -b\alpha_1 + f - g\hat{\lambda}. \quad (16)$$

Для решения уравнения (16) воспользуемся методом вариации постоянной. Рассмотрим однородное уравнение

$$\dot{\alpha}_1 = -b\alpha_1. \quad (17)$$

Решением уравнения (17) является функция

$$\alpha_1 = C(s) \exp \left(\int_0^s -b(s_1) ds_1 \right),$$

где $C(s)$ — произвольная функция от s .

Рассмотрим теперь решение неоднородного уравнения (16):

$$\dot{C}(s) \exp \left(\int_0^s -b(s_1) ds_1 \right) = f(s) + \hat{\lambda}g(s).$$

Введя обозначение

$$B(s) = \exp \left(\int_0^s b(s_1) ds_1 \right),$$

отсюда выразим $C(s)$:

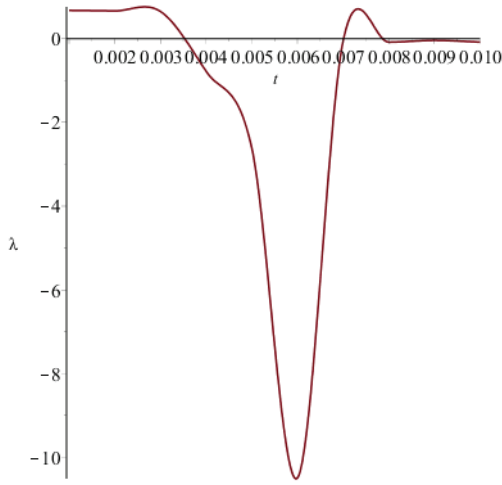
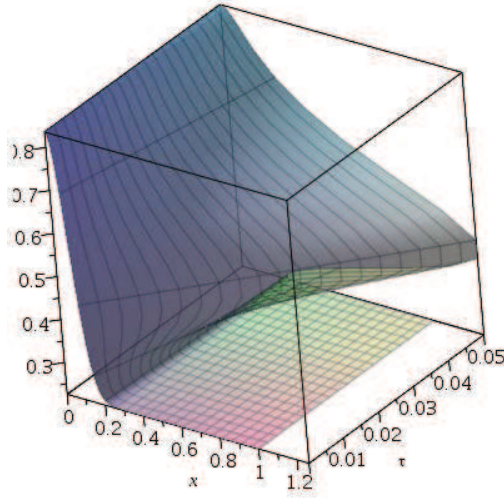
$$C(s) = C_0 + \int_0^s B(s) \left(f(s_1) + \hat{\lambda}g(s_1) \right) ds_1,$$

где $C_0 = \text{const}$. Воспользуемся граничными условиями (13) для нахождения C_0 и $\hat{\lambda}$:

$$\alpha_1|_{\tau=0} = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha_1|_{s=0} = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 = C_0 = 0.$$

Тогда

$$\alpha_1 = B^{-1}(s)C(s).$$

Рис. 1. Зависимость $\hat{\lambda}$ от t Рис. 2. График многозначного решения $s(t, x)$

Пусть кривая $x(s)$ является решением системы (15). Вообще говоря, она зависит от начального условия x_0 : $x = x(s, x_0)$. Для наших целей удобно будет параметризовать ее иным способом. Пусть s' — значение параметра s , при котором x обращается в 0, т.е. $x(s', x_0) = 0$. Тогда можно рассматривать параметризацию $x(s', s)$, которая неявным образом задает множество значений x_0 .

Таким образом, условие $x = 0$ задает целое семейство условий, зависящих от параметра s' :

$$\alpha_1 \Big|_{x=0} = 0, \quad C(s) = \int_0^{s'} B(x(s', s_2), s_2) \left(f(x(s', s_2), s_2) - \hat{\lambda}(s_2) g(x(s', s_2), s_2) \right) ds_2 = 0,$$

или

$$\int_0^{s'} B(x(s', s_2), s_2) (f(x(s', s_2), s_2)) ds_2 = \int_0^{s'} B(x(s', s_2), s_2) \hat{\lambda}(s_2) g(x(s', s_2), s_2) ds_2. \quad (18)$$

Таким образом, мы получили интегральное уравнение Вольтерра первого рода с одной неизвестной $\hat{\lambda}$. Для решения уравнения (18) был использован метод прямоугольников, который состоит в следующем.

На диапазоне s , в котором необходимо вычислить $\hat{\lambda}$, вводится сетка с узлами s_i . Для каждого узла сетки s_j составляется следующее уравнение:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^j B(x(s_j, s_i), s_i) \cdot f(x(s_j, s_i), s_i) \cdot (s_i - s_{i-1}) = \\ = \sum_{i=1}^j B(x(s_j, s_i), s_i) \cdot \hat{\lambda}(s_i) \cdot g(x(s_j, s_i), s_i) \cdot (s_i - s_{i-1}), \end{aligned}$$

где неизвестными являются значения $\hat{\lambda}$ в узлах сетки. Если записать подобные уравнения для каждого узла сетки, то получим треугольную систему линейных уравнений для определения $\hat{\lambda}(s_i)$. Решив ее, мы получим значения $\hat{\lambda}$ в узлах сетки. Чтобы вычислить $\hat{\lambda}$ для других значений s , будем использовать интерполяцию.

Тогда, зная $\hat{\lambda}(\tau)$, мы можем решить систему (15) и найти $\alpha_1(\tau, x)$.

Результаты вычислений представлены на рис. 1–3. На рис. 4 представлена эволюция по времени разницы нулевого и первого приближений σ в моменты времени от $t = 0,001$ до $t = 0,004$.

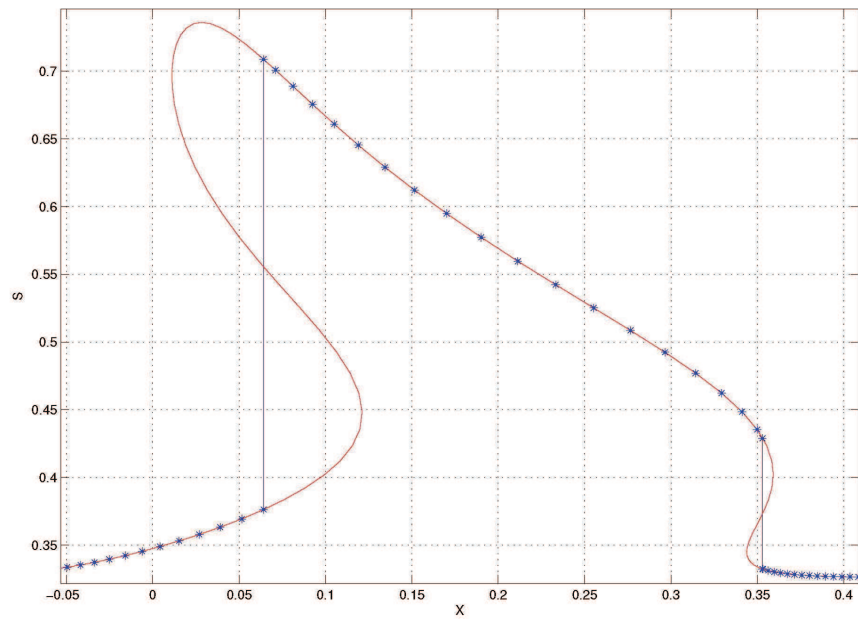


Рис. 3. Многозначное (красное) и разрывное (синее) решение $s(t, x)$

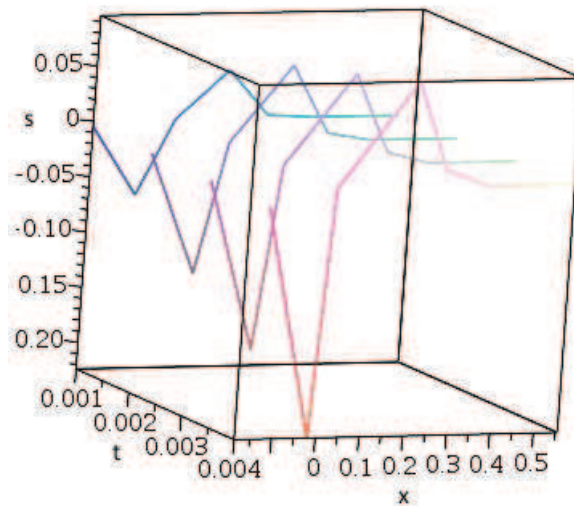


Рис. 4. Эволюция по времени разницы нулевого и первого приближения σ

3. Заключение. В работе предложен и численно реализован практический способ получения точных решений задачи (4) на основе асимптотического разложения неизвестных по параметру σ . Метод позволяет с заданной точностью определить водонасыщенность в нулевом и первом приближении по параметру γ . Этот метод не является сеточным и, следовательно, не требует решения крупномасштабных линейных систем или измельчения сетки вблизи ударной волны.

Кроме того, это позволяет вычислять значения решения независимо друг от друга при любых x и t .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Арнольд В. И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: Наука, 1984.
2. Akhmetzyanov A. V., Kushner A. G., Lychagin V. V. Mass and heat transport in the two-phase Buckley—Leverett model// J. Geom. Phys. — 2017. — 113. — С. 2–9.

И. А. Боронин

Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН, Москва

E-mail: boronin@ipu.ru

А. А. Шевляков

Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН, Москва

E-mail: aash29@gmail.com



ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ СВЯЗИ В ЗАДАЧЕ О ДВИЖЕНИИ ДВУХКОЛЕСНОЙ РОЛИКОВОЙ ДОСКИ РИПСТИК

© 2018 г. М. М. ГАДЖИЕВ, А. С. КУЛЕШОВ, А. И. БУКАНОВ

Аннотация. В работе изучается кинематика движения двухколесной роликовой доски, известной как эссборд или рипстик. При помощи теории конечных поворотов предлагается элементарный вывод формулы, связывающей угол наклона платформы рипстика с углом поворота колеса.

Ключевые слова: двухколесная роликовая доска рипстик, геометрические связи, конечные повороты.

AMS Subject Classification: 70B10, 70B15

1. Введение. В последние десятилетия во многих странах мира широкое развитие получили так называемые развлекательные виды спорта. Одним из наиболее ярких примеров развлекательного вида спорта является скейтбординг — искусство катания на роликовой доске (скейтборде). Со времени появления первого скейтборда количество разных типов досок для экстремального катания достигло нескольких десятков и продолжает расти. Появились и математические модели, служащие для описания движения таких досок; известна, например, математическая модель, описывающая движение обычного скейтборда (см. [2, 3, 6–8]); ряд работ посвящен динамике снейкборда (см. [1, 4, 9, 10]).

С середины 2000-х гг. популярность стал набирать двухколесный вариант скейтборда, известный как эссборд или рипстик. Типичный рипстик, изображенный на рис. 1, состоит из двух платформ, соединенных при помощи торсионного вала, позволяющего им совершать вращения друг относительно друга. На нижней стороне каждой из платформ имеется клинообразный выступ, на наклонной грани которого закреплено роульное колесо. Ось вращения соответствующего роульного колеса перпендикулярна наклонной плоскости клинообразного выступа, на котором она укреплена. Этим рипстик отличается от снейкборда, платформы которого могут поворачиваться только вокруг вертикальных осей. При катании на рипстике райдер (человек, катающийся на доске) координирует движения своих рук и тела и, наклоняя платформы, осуществляет продвижение рипстика вперед без касания земли, одновременно сохраняя равновесие и предотвращая падение с рипстика.

В настоящее время остается не изученной не только динамическая модель рипстика, но даже и точная кинематическая модель этой системы. Лишь в [11] содержится описание кинематических особенностей рипстика; в частности, получена формула, связывающая угол наклона платформы рипстика с углом поворота соответствующего колеса. При этом доказательство данной формулы опирается на сложные геометрические построения и оказывается весьма трудным для понимания. В настоящей работе предлагается другой способ получения данной формулы, использующий теорию конечных поворотов.

2. Постановка задачи. Основное утверждение. Типичный рипстик, изображенный на рис. 1, состоит из пяти частей: переднего и заднего роульного колеса, передней и задней платформы и торсионного вала. Торсионный вал соединяет переднюю и заднюю платформы, которые могут независимо поворачиваться относительно продольной оси рипстика.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 16-01-00338 и № 17-01-00123).

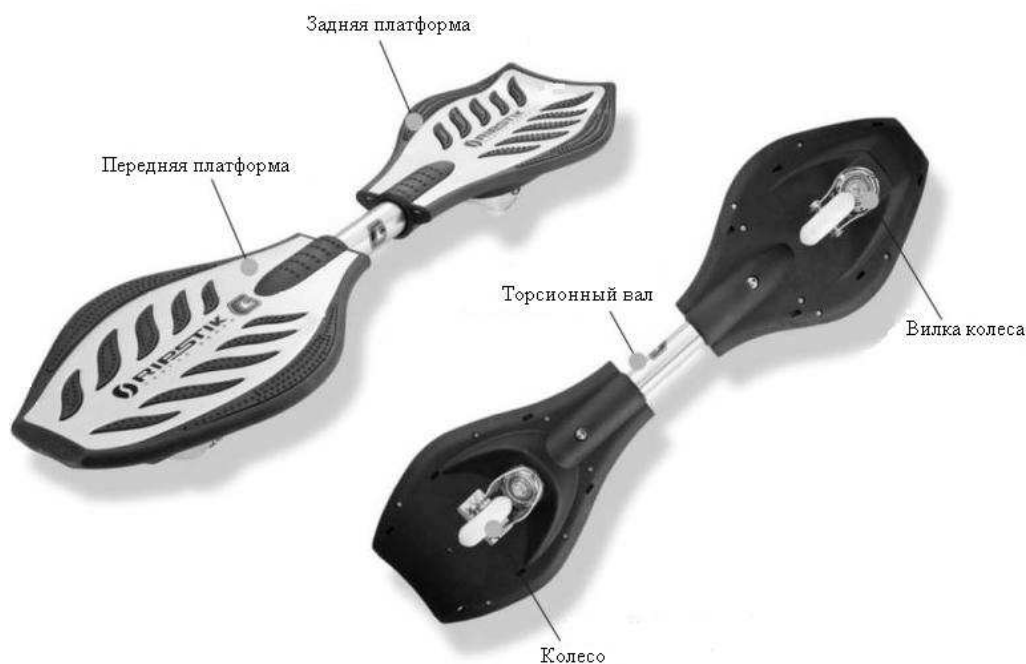


Рис. 1. Рипстик: общий вид.

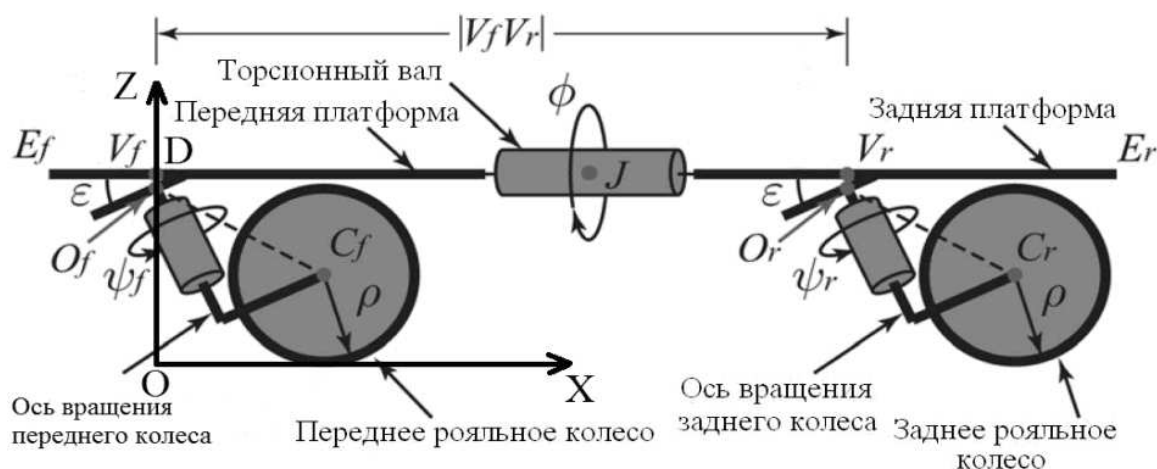


Рис. 2. Схема рипстика с обозначением основных его элементов.

При катании на рипстике райдер ставит свои ноги на соответствующие платформы. Под каждой платформой имеется клинообразный выступ, на наклонной плоскости которого укреплено рояльное колесо. Оси вращения l_f и l_r переднего и заднего рояльного колеса перпендикулярны наклонным плоскостям соответствующих клинообразных выступов и ориентированы в противоположную сторону по отношению к направлению движения рипстика. Продольная ось рипстика $E_f E_r$, проходящая через торсионный вал, коллинеарна продольным осям обеих платформ. Обозначим через O_f и O_r точки пересечения осей вращения l_f и l_r переднего и заднего рояльного колеса с наклонными плоскостями клинообразных выступов. Пусть V_f и V_r — основания перпендикуляров, опущенных из точек O_f и O_r на продольную ось рипстика $E_f E_r$. Постоянный угол наклона клинообразного выступа обозначим через ε (рис. 2).

Обозначим через Π , Λ и Σ соответственно опорную плоскость, по которой движется рипстик, наклонную плоскость клинообразного выступа и плоскость, проходящую через точку O_f параллельно плоскости платформы. Угол наклона передней платформы (т.е. угол между плоскостями Π и Σ) будем обозначать δ_f . Значениям $\delta_f > 0$ ($\delta_f < 0$) соответствует наклон передней платформы влево (вправо), если смотреть в направлении движения рипстика. Угол наклона задней платформы будем обозначать δ_r . Предположим, что рипстик движется по плоскости Π таким образом, что его продольная ось $E_f E_r$ остается параллельной плоскости Π во все время движения. Это возможно, если во все время движения углы δ_f и δ_r связаны соотношением

$$\delta_f = \pm \delta_r. \quad (1)$$

Обозначим через O'_f (O'_r) основание перпендикуляра, опущенного из точки O_f (соответственно, O_r) на плоскость Π . Основание перпендикуляра, опущенного из точки V_f (V_r) на ту же плоскость Π , обозначим V'_f (соответственно, V'_r). Поскольку мы предполагаем, что во все время движения продольная ось рипстика $E_f E_r$ остается параллельной плоскости Π , следовательно

$$V_f V_r \parallel V'_f V'_r, \quad |V_f V_r| = |V'_f V'_r|. \quad (2)$$

В силу конструктивных особенностей рипстика, если его платформы не наклонены, то колеса лежат в вертикальной плоскости, перпендикулярной плоскостям платформ и опорной плоскости Π . При наклоне платформы плоскость колеса поворачивается вокруг оси колеса l_f , сохраняя при этом вертикальное положение. Так как плоскость колеса содержит перпендикуляр l_f к плоскости Λ , то она также будет перпендикулярна плоскости Λ . Таким образом, при вращении плоскость колеса остается перпендикулярной плоскостям Π и Λ , а значит, и линии их пересечения. При этом продольная ось рипстика образует с плоскостью колеса некоторый ненулевой угол. Поскольку отрезок $V_f V_r$ является частью продольной оси $E_f E_r$ и справедливы условия (1) и (2), то будем определять угол поворота колеса как угол между прямой $V'_f V'_r$ и плоскостью колеса. Будем обозначать этот угол через τ_f . Тогда справедливо следующее утверждение, впервые доказанное в [11].

Теорема 1. Угол наклона платформы δ_f и угол поворота колеса τ_f связаны соотношением

$$\sin \delta_f = \operatorname{tg} \varepsilon \operatorname{tg} \tau_f. \quad (3)$$

При доказательстве формулы (3) в [11] использовались сложные геометрические построения, сильно затрудняющие понимание. Мы предлагаем здесь более простой вариант доказательства, основанный на теории конечных поворотов.

Рассмотрим переднюю платформу рипстика в положении, когда она не наклонена. Введем систему координат $OXYZ$ таким образом, что точка O — начало данной системы координат — принадлежит плоскости Π , ось OZ перпендикулярна плоскости Π и проходит через точку O_f , а ось OX направлена параллельно продольной оси рипстика $E_f E_r$. Единичные векторы введенной системы координат будем обозначать e_x , e_y , e_z (см. рис. 2). Пусть плоскость платформы рипстика расположена на высоте h над плоскостью Π . Точку пересечения продольной оси рипстика $E_f E_r$ с плоскостью Λ обозначим через D . Пусть расстояние $DO_f = a$. Тогда относительно введенной системы координат плоскость Π определяется уравнением $Z = 0$, а плоскость Σ определяется уравнением

$$Z = h - a \sin \varepsilon.$$

Относительно введенной системы координат вектор нормали к плоскости Λ имеет вид

$$\mathbf{n} = -\sin \varepsilon \mathbf{e}_x + \cos \varepsilon \mathbf{e}_z, \quad (4)$$

а сама плоскость проходит через точку O_f , радиус-вектор которой имеет вид

$$\mathbf{r}_{O_f} = (h - a \sin \varepsilon) \mathbf{e}_z. \quad (5)$$

Поэтому уравнение плоскости Λ записывается следующим образом:

$$-\sin \varepsilon X + \cos \varepsilon Z = \cos \varepsilon (h - a \sin \varepsilon).$$

Плоскости Π и Λ пересекаются по прямой, определяемой уравнениями

$$X = -\frac{\cos \varepsilon}{\sin \varepsilon} (h - a \sin \varepsilon), \quad Z = 0.$$

Данная прямая перпендикулярна вертикальной плоскости $Y = 0$ — плоскости, в которой располагается колесо. В силу конструктивных особенностей рипстика при наклоне платформы плоскость колеса, оставаясь перпендикулярной плоскости Π , поворачивается таким образом, что она будет перпендикулярна линии пересечения плоскостей Π и Λ . При этом вертикальная плоскость, содержащая продольную ось рипстика, образует с плоскостью колеса некоторый ненулевой угол. Именно этот угол и будем считать углом поворота колеса τ_f . Выразим его через угол наклона платформы δ_f .

Как известно из теории конечных поворотов (см., например, [5]), если некоторый вектор ρ повернуть на угол χ вокруг оси с единичным направляющим вектором e , то в результате поворота вектор ρ перейдет в такой вектор ρ' , что

$$\rho' = (e \cdot \rho) e + (\rho - (e \cdot \rho) e) \cos \chi + [e \times \rho] \sin \chi, \quad (6)$$

где $(e \cdot \rho)$ обозначает скалярное, а $[e \times \rho]$ — векторное произведение векторов e и ρ .

Предположим, что передняя платформа рипстика наклонилась вправо по отношению к направлению движения рипстика таким образом, что угол между плоскостью платформы и опорной плоскостью стал равным δ_f . Это равносильно тому, что передняя платформа повернулась на угол δ_f вокруг оси с направляющим вектором $e = -e_x$. Тогда по формуле (6) вектор нормали n к плоскости Λ , определяемый формулой (4), перейдет в вектор

$$n' = -\sin \varepsilon e_x + \cos \varepsilon \sin \delta_f e_y + \cos \varepsilon \cos \delta_f e_z. \quad (7)$$

Аналогично, радиус-вектор точки O_f , до наклона платформы определявшийся формулой (5), примет вид

$$r'_{O_f} = (h - a \sin \varepsilon) \sin \delta_f e_y + (h - a \sin \varepsilon) \cos \delta_f e_z.$$

Таким образом, после наклона платформы плоскость Λ занимает такое положение, при котором вектором нормали к ней является вектор n' , определяемый формулой (7), а точка O_f с радиусом вектором r_{O_f} принадлежит этой плоскости. Отсюда получаем уравнение плоскости Λ после наклона платформы:

$$-\frac{\sin \varepsilon}{\cos \varepsilon} X + \sin \delta_f Y + \cos \delta_f Z = h - a \sin \varepsilon.$$

Эта плоскость пересекается с плоскостью Π по прямой

$$-\frac{\sin \varepsilon}{\cos \varepsilon} X + \sin \delta_f Y = h - a \sin \varepsilon. \quad (8)$$

Направляющим вектором прямой (8) является вектор

$$s = -\frac{\cos \varepsilon}{\sin \varepsilon} e_x - \frac{1}{\sin \delta_f} e_y.$$

Уравнение плоскости, перпендикулярной вектору s и проходящей через текущее положение точки O_f имеет вид

$$\frac{\cos \varepsilon}{\sin \varepsilon} X + \frac{1}{\sin \delta_f} Y = h - a \sin \varepsilon. \quad (9)$$

В силу упоминавшихся выше конструктивных особенностей рипстика именно в этой плоскости будет лежать колесо после наклона платформы. Поэтому угол поворота колеса τ_f определяется в данном случае как угол между плоскостью $Y = 0$ и плоскостью, заданной формулой (9). Пользуясь стандартными формулами для угла между плоскостями, находим

$$\operatorname{tg} \tau_f = \frac{\cos \varepsilon}{\sin \varepsilon} \sin \delta_f,$$

откуда следует формула (3).

Заметим, что условия (1) и (2) играют существенную роль в проведенных рассуждениях. Если углы наклона платформ рипстика не связаны соотношением (1), то его продольная ось не будет параллельна плоскости Π , а будет образовывать с ней некоторый ненулевой угол ν , причем соотношения, связывающие углы наклона платформ с углами поворота колес, будут сложным образом зависеть от ν . В дальнейшем мы собираемся рассмотреть этот случай и представить самые общие зависимости между углами наклона платформ рипстика и углами поворота его колес.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Голубев Ю. Ф. Метод управления движением робота-снейкбордиста // Прикл. мат. мех. — 2006. — 70, № 3. — С. 355–370.
2. Кремнев А. В., Кулешов А. С. Нелинейная динамика и устойчивость движения простейшей модели скейтборда. — М.: Изд-во Центра прикладных исследований при механико-математическом факультете МГУ, 2007.
3. Кремнев А. В., Кулешов А. С. Математическая модель скейтборда с тремя степенями свободы. — М.: Изд-во Центра прикладных исследований при механико-математическом факультете МГУ, 2008.
4. Кулешов А. С. Математическая модель снейкборда // Мат. модел. — 2006. — 18, № 5. — С. 37–48.
5. Лурье А. И. Аналитическая механика. — М.: ГИФМЛ, 1961.
6. Hubbard M. Lateral dynamics and stability of the skateboard // J. Appl. Mech. — 1979. — 46. — С. 931–936.
7. Hubbard M. Human control of the skateboard // J. Biomech. — 1980. — 13. — С. 745–754.
8. Ispolov Yu. G. M., Smolnikov B. A. Skateboard dynamics // Comp. Meth. Appl. Mech. Eng. — 1996. — 131. — С. 327–333.
9. Kuleshov A. S. Further development of the mathematical model of a snakeboard // Regul. Chaot. Dynam. — 2007. — 12. — С. 321–334.
10. Lewis A. D., Ostrowski J. P., Murray R. M., Burdick J. W. Nonholonomic mechanics and locomotion: the snakeboard example // Proc. IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation. — 1994. — С. 2391–2400.
11. Tianmiao Wang, Baiquan Su, Shaolong Kuang, Junchen Wang On kinematic mechanism of a two-wheel skateboard: The essboard // J. Mech. Robot. — 2013. — 5. — С. 034503-1–034503-7.

М. М. Гаджиев

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

E-mail: maxim-gadzhiyev@yandex.ru

А. С. Кулешов

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

E-mail: kuleshov@mech.math.msu.su

А. И. Буканов

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

E-mail: dartra@yandex.ru



ЗАДАЧА ПРЕСЛЕДОВАНИЯ МАЛОМАНЕВРЕННЫХ ОБЪЕКТОВ С ТЕРМИНАЛЬНЫМ МНОЖЕСТВОМ В ФОРМЕ КОЛЬЦА

© 2018 г. И. В. ИЗМЕСТЬЕВ, В. И. УХОБОТОВ

Аннотация. Рассматривается задача преследования двух движущихся материальных объектов — перехватчика (преследователя) и цели (убегающего). Объекты движутся в одной плоскости под действием управляемых сил, направленных всегда перпендикулярно их скоростям. Законы изменения величин управляемых сил перехватчика и цели определяются контроллерами первого порядка. Поимка определяется условием принадлежности значения относительного расстояния отрезку с положительными концами. В рассматриваемой задаче построено управление преследователя, гарантирующее поимку.

Ключевые слова: задача преследования, управление, терминальное множество.

AMS Subject Classification: 49N75, 91A23

1. Введение. В работах [2, 5–10] рассматривались различные варианты игровой задачи преследования двух движущихся объектов — перехватчика (преследователя) и цели (убегающего), при следующих предположениях:

- (i) объекты движутся в некоторой плоскости;
- (ii) оба объекта имеют постоянные по величине скорости и ограниченные значения боковых ускорений;
- (iii) динамика каждого объекта описывается функцией преобразования первого порядка;
- (iv) траектории обоих объектов могут быть линеаризованы при данном геометрическом описании столкновения;
- (v) доступна полная информация о положении объектов в каждый момент времени;
- (vi) возможности объектов по изменению направления векторов их скоростей в процессе движения являются малыми (объекты являются маломаневренными).

Одно из решений такой задачи, полученное в [6, 7], основывалось на ее формализации в виде линейной дифференциальной игры преследования-уклонения с управлениями, принадлежащими компактам. Изначально игра формулировалась в четырехмерном пространстве со следующими координатами: относительное расстояние, относительная скорость и боковые ускорения игроков. Затем с помощью замены переменных игра редуцировалась в скалярную форму и решалась с использованием аппарата теории дифференциальных игр.

В [8, 9] рассматривались задачи преследования, где круговые вектограммы управлений были заменены эллиптическими вектограммами. Платой в таких задачах являлось расстояние наименьшего сближения, т.е. промах, который минимизируется преследователем и максимизируется убегающим.

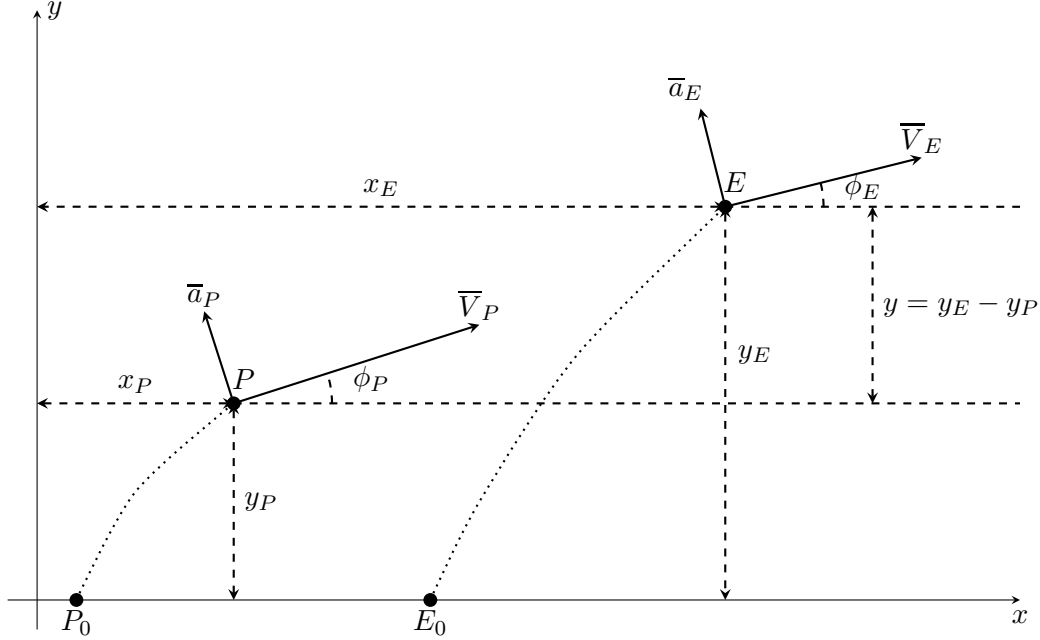
В [10] для задачи перехвата было построено непрерывное позиционное управление с максимальной зоной поимки.

В [2, 5] изучалась задача с двумя преследователями и одним убегающим.

В данной статье рассматривается модифицированный вариант оригинальной задачи преследования. Преследователь стремится сделать расстояние между собой и убегающим не меньше одного заданного числа, но не больше другого заданного числа. Терминальное множество, определяемое таким условием, в общем случае является невыпуклым, что затрудняет построение

множества начальных позиций, для которых существует управление преследователя, гарантирующее поимку.

2. Постановка задачи. Считаем, что оба материальных объекта (P — преследователь, E — убегающий) движутся в одной плоскости (см. рис.).



Выберем ось O_x так, чтобы она проходила через начальное положение P_0 и E_0 объектов P и E . На каждый объект $i = P, E$ действует управляющая сила $\bar{a}_i$ (предполагаем, что объекты имеют единичную массу), перпендикулярная скорости $\bar{V}_i$ объекта.

Целью преследователя является осуществление поимки убегающего. В рассматриваемой задаче это означает, что относительное расстояние должно стать не больше заданного числа $\varepsilon_2 \geq 0$, но не меньше такого заданного числа $\varepsilon_1 \geq 0$, что $\varepsilon_1 \leq \varepsilon_2$.

Запишем уравнения движения, учитывая, что все обозначения приведены на чертеже:

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= V_i \cos \phi_i, & \dot{y}_i &= V_i \sin \phi_i, \\ \ddot{x}_i &= \dot{V}_i \cos \phi_i - V_i \dot{\phi}_i \sin \phi_i = -a_i \sin \phi_i, & \ddot{y}_i &= \dot{V}_i \sin \phi_i + V_i \dot{\phi}_i \cos \phi_i = a_i \cos \phi_i, \end{aligned} \quad (1)$$

где $i = P, E$.

Умножая первое уравнение в (1) на $\cos \phi_i$, а второе — на $\sin \phi_i$ и складывая, получим $\dot{V}_i = 0$; следовательно, $V_i = \text{const}$.

Умножая первое уравнение в (1) на $-\sin \phi_i$, а второе — на $\cos \phi_i$ и складывая, находим

$$\dot{\phi}_i V_i = a_i. \quad (2)$$

Считаем, что в процессе движения объектов направления их скоростей мало отклоняются от оси O_x . Тогда $\cos \phi_i \approx 1$ и $\sin \phi_i \approx \phi_i$. Отсюда и из уравнений движения получим, что

$$\dot{x}_i = V_i, \quad \dot{y}_i = V_i \phi_i. \quad (3)$$

Дифференцируя второе уравнение в (3) и учитывая (2), имеем

$$\ddot{y}_i = a_i. \quad (4)$$

Решая первое уравнение в (3), получим

$$x_i(t) = x_i(0) + V_i t.$$

Отсюда при $x_E(0) > x_P(0)$ и $V_P > V_E$ следует, что координаты x_P и x_E совпадут в момент времени

$$T = \frac{x_E(0) - x_P(0)}{V_P - V_E}.$$

В этот момент времени T будет осуществлена поимка цели, если

$$\varepsilon_1 \leq |y_E(T) - y_P(T)| \leq \varepsilon_2. \quad (5)$$

3. Сведение задачи к однотипной дифференциальной игре. В [1] показано, что задача управления с одномерной целью и заданным моментом окончания с помощью линейной замены переменных может быть сведена к однотипной задаче, для которой в [3] построено управление, гарантирующее поимку.

Сделаем замену переменных

$$z = y_E - y_P + (T - t)(\dot{y}_E - \dot{y}_P) - \left(\frac{e^{-q_1(T-t)} + q_1(T-t) - 1}{q_1^2} \right) a_P + \left(\frac{e^{-q_2(T-t)} + q_2(T-t) - 1}{q_2^2} \right) a_E. \quad (6)$$

Тогда $z(T) = y_E(T) - y_P(T)$.

Считаем, что законы изменения величин управляемых сил описываются контроллерами первого порядка

$$\dot{a}_P = c_1 u - a_P q_1, \quad c_1 > 0, \quad q_1 > 0, \quad |u| \leq 1, \quad (7)$$

$$\dot{a}_E = c_2 v - a_E q_2, \quad c_2 > 0, \quad q_2 > 0, \quad |v| \leq 1. \quad (8)$$

Продифференцируем (6) и подставим в полученное соотношение формулы (4), (7) и (8):

$$\dot{z} = -c_1 \left(\frac{e^{-q_1(T-t)} + q_1(T-t) - 1}{q_1^2} \right) u + c_2 \left(\frac{e^{-q_2(T-t)} + q_2(T-t) - 1}{q_2^2} \right) v.$$

Таким образом, получили при $t \in [0, T]$ однотипную дифференциальную игру

$$\dot{z} = -a(t)u + b(t)v, \quad |u| \leq 1, \quad |v| \leq 1, \quad \varepsilon_1 \leq |z(T)| \leq \varepsilon_2; \quad (9)$$

$$a(t) = c_1 \left(\frac{e^{-q_1(T-t)} + q_1(T-t) - 1}{q_1^2} \right) \geq 0, \quad b(t) = c_2 \left(\frac{e^{-q_2(T-t)} + q_2(T-t) - 1}{q_2^2} \right) \geq 0.$$

Если в момент времени T выполнены неравенства $\varepsilon_1 \leq |z(T)| \leq \varepsilon_2$, то верно (5) и, следовательно, осуществлена поимка цели.

4. Управление преследователя, гарантирующее поимку. Для дифференциальных игр вида (9) в [3] была доказана теорема, которая для одномерного случая примет следующий вид.

Теорема 1 (см. [3]). Пусть начальное состояние $t_0, z(t_0)$ таково, что

$$t(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \leq t_0 \leq p, \quad f_1(t_0) \leq |z(t_0)| \leq f_2(t_0).$$

Тогда управление преследователя

$$u(t, z) = \begin{cases} \text{sign}(z) & \text{при } |z| \geq f_2(t), \\ -\text{sign}(z) & \text{при } |z| < f_2(t) \end{cases} \quad (10)$$

при любом допустимом управлении убегающего обеспечивает для любого реализовавшегося движения $z(t)$ выполнение неравенств $\varepsilon_1 \leq |z(p)| \leq \varepsilon_2$.

Здесь использованы следующие обозначения: t_0 — момент начала процесса преследования, p — момент окончания процесса преследования;

$$f_2(t) = \varepsilon_2 + g(t) \quad \text{при } t \leq p, \quad (11)$$

$$f_1(t) = \begin{cases} \varepsilon_1 - g(t) & \text{при } t(\varepsilon_1) \leq t \leq p, \\ 0 & \text{при } t \leq t(\varepsilon_1), \end{cases} \quad (12)$$

где

$$g(t) = \int_t^p (a(r) - b(r))dr, \quad t \leq p; \quad (13)$$

$$t(\varepsilon_1) = \begin{cases} -\infty, & \text{если } \varepsilon_1 > g(t) \text{ при всех } t \leq p, \\ \inf \{t \leq p : \varepsilon_1 > g(\tau) \text{ при всех } t < \tau \leq p\} & \text{в противном случае;} \end{cases} \quad (14)$$

$$t(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \begin{cases} -\infty, & \text{если } f_1(t) \leq f_2(t) \text{ при всех } t \leq p, \\ \inf \{t \leq p : f_1(\tau) \leq f_2(\tau) \text{ при всех } t < \tau \leq p\} & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (15)$$

Перепишем условие поимки, определяемое теоремой 1, для задачи, поставленной в данной работе, в более простом виде. Для этого необходимо найти промежутки знакопостоянства функции

$$\psi(t) = a(t) - b(t) = c_1 \left(\frac{e^{-q_1(T-t)} + q_1(T-t) - 1}{q_1^2} \right) - c_2 \left(\frac{e^{-q_2(T-t)} + q_2(T-t) - 1}{q_2^2} \right)$$

на отрезке $[0, T]$. Для удобства дальнейших рассуждений будем считать, что $\psi(t) = 0$ при $t < 0$.

Вычислим функцию $g(t)$ (см. (13)) для $t \leq T$ в рассматриваемой задаче:

$$g(t) = \int_t^T \psi(r)dr = c_1 \left(\frac{1 - e^{-q_1(T-t)}}{q_1^3} + \frac{q_1 T^2 - 2T + 2t + q_1 t^2 - 2q_1 tT}{2q_1^2} \right) - \\ - c_2 \left(\frac{1 - e^{-q_2(T-t)}}{q_2^3} + \frac{q_2 T^2 - 2T + 2t + q_2 t^2 - 2q_2 tT}{2q_2^2} \right)$$

при $t \in [0, T]$ и $g(t) = g(0)$ при $t < 0$.

Случай 1. Пусть $\psi(t) = 0$ при $t \in [0, T]$. Отметим, что это может быть лишь при $c_1 = c_2$ и $q_1 = q_2$. В этом случае $g(t) = 0$ при $t \leq T$, а, следовательно, согласно (11), (12), (14), (15), $t(\varepsilon_1) = -\infty$, $f_1(t) = \varepsilon_1$, $f_2(t) = \varepsilon_2$ при $t \leq T$ и $t(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = -\infty$. Тогда при выполнении неравенств $\varepsilon_1 \leq |z(0)| \leq \varepsilon_2$ управление преследователя (10) при любом допустимом управлении убегающего обеспечивает для любого реализовавшегося движения выполнение условия поимки (5).

Случай 2. Пусть $\psi(t) \neq 0$. Отметим, что такое возможно лишь в случае $c_1 \neq c_2$ и (или) $q_1 \neq q_2$. Исследуем уравнение $\psi(t) = 0$ при $t \in [0, T]$ на наличие корней. Сразу можно отметить, что $\psi(T) = 0$.

Лемма 1. Пусть $f(t)$ — непрерывная на $[a, b]$ и дифференцируемая на (a, b) функция и $\dot{f}(t) \neq 0$ при $t \in (a, b)$. Тогда существует не более одной такой точки $t^* \in [a, b]$, что $f(t^*) = 0$.

Доказательство проводится с помощью теоремы Ролля [4, с. 225].

Следствие 1. Пусть $f(t)$ — непрерывная на $[a, b]$ и дифференцируемая на (a, b) функция и существует единственная точка $t^* \in (a, b)$, для которой $\dot{f}(t^*) = 0$. Тогда существует не более двух таких различных точек $t_1^*, t_2^* \in [a, b]$, что $f(t_1^*) = f(t_2^*) = 0$.

Доказательство. Из определения точки t^* следует, что $\dot{f}(t) \neq 0$ при (a, t^*) и при (t^*, b) . Таким образом, выполнено условие леммы 1, из которой получим, что на каждом отрезке $[a, t^*]$ и $[t^*, b]$ существует не более одного корня уравнения $f(t) = 0$. $\square$

Лемма 2. При $c_1 \neq c_2$ и (или) $q_1 \neq q_2$ существует не более одной такой точки $t_* \in [0, T]$, что $\psi(t_*) = 0$.

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned}\dot{\psi}(t) &= c_1 \left(\frac{e^{-q_1(T-t)} - 1}{q_1} \right) - c_2 \left(\frac{e^{-q_2(T-t)} - 1}{q_2} \right), \\ \ddot{\psi}(t) &= c_1 e^{-q_1(T-t)} - c_2 e^{-q_2(T-t)};\end{aligned}$$

заметим, что уравнение $\ddot{\psi}(t) = 0$ имеет на отрезке $[0, T]$ не более одного корня. Рассмотрим возможные случаи.

Пусть $\ddot{\psi}(t) \neq 0$ при $t \in (0, T)$. Тогда, согласно лемме 1, существует не более одного решения уравнения $\dot{\psi}(t) = 0$ на $[0, T]$. Можно заметить, что этим решением является точка T . Следовательно, $\dot{\psi}(t) \neq 0$ при $t \in [0, T)$. Учитывая, кроме того, что $\psi(T) = 0$, получим $\psi(t) \neq 0$ при $t \in [0, T)$.

Пусть существует и единственна такая точка $t^* \in (0, T)$, что $\ddot{\psi}(t^*) = 0$. Тогда, согласно следствию 1, существует не более двух решений уравнения $\dot{\psi}(t) = 0$ на $[0, T]$. Можно заметить, что одним из этих решений является точка T . Однако случай, когда T является единственным решением уравнения $\dot{\psi}(t) = 0$ на $[0, T]$, был рассмотрен ранее. Поэтому предположим, что существуют ровно два решения, второе из которых обозначим $\tilde{t}$. В этом случае $\dot{\psi}(t) \neq 0$ при $t \in (\tilde{t}, T)$, поэтому, согласно лемме 1 и равенству $\psi(T) = 0$, получим, что $\psi(t) \neq 0$ при $t \in [\tilde{t}, T)$. Далее, $\dot{\psi}(t) \neq 0$ при $t \in (0, \tilde{t})$. Поэтому, согласно лемме 1, получим, что существует не более одной такой точки $t_* \in [0, \tilde{t}]$, что $\psi(t_*) = 0$. Лемма доказана. $\square$

Из леммы 2 вытекает, что возможны четыре случая.

Случай 2.1. Пусть $\psi(t) < 0$ при $t \in (0, T)$. В этом случае $g(t) < 0$ при $t < T$. Из (14) следует, что $t(\varepsilon_1) = -\infty$. Поэтому, согласно (12), $f_1(t) = \varepsilon_1 - g(t) > 0$ при $t \in [0, T]$.

Предположим, что

$$\varepsilon_1 - g(0) \leq |z(0)| \leq \varepsilon_2 + g(0). \quad (16)$$

Тогда $\varepsilon_1 - g(0) \leq \varepsilon_2 + g(0)$. Отсюда с учетом того, что функция $g(t)$ в рассматриваемом случае является неубывающей при $t \leq T$, следует выполнение неравенства $\varepsilon_1 - g(t) \leq \varepsilon_2 + g(t)$ при всех $t \in [0, T]$. Согласно (11), (12) и (15) это означает, что $t(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \leq 0$.

Отсюда и из теоремы 1 получим, что при выполнении неравенств (16) управление преследователя (10) при любом допустимом управлении убегающего обеспечивает для любого реализовавшегося движения выполнение условия поимки (5).

Случай 2.2. Пусть $\psi(t) > 0$ при $t \in (0, T)$. В этом случае

$$g(t) > 0 \quad \text{при } t < T. \quad (17)$$

Предположим, что $t(\varepsilon_1) < 0$; тогда, согласно формулам (12) и (14), $f_1(t) = \varepsilon_1 - g(t)$ при $t \in [0, T]$. Учитывая (11), (12) и (17), получим следующие неравенства:

$$f_1(t) = \varepsilon_1 - g(t) \leq \varepsilon_1 \leq \varepsilon_2 \leq f_2(t) = \varepsilon_2 + g(t) \quad \text{при } t \in [0, T]. \quad (18)$$

Отсюда, согласно (15), $t(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \leq 0$.

Предположим, что $0 \leq t(\varepsilon_1)$. Учитывая (11), (12) и (17), получим следующее неравенство:

$$f_1(t) = 0 \leq f_2(t) = \varepsilon_2 + g(t) \quad \text{при } t \in [0, t(\varepsilon_1)].$$

При $t(\varepsilon_1) < t$ выполнено неравенство (18), поэтому, согласно (15), $t(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \leq 0$.

Из формулы (14) следует равенство $\varepsilon_1 = g(t(\varepsilon_1))$. Поэтому, учитывая, что функция $g(t)$ в рассматриваемом случае является невозрастающей при $t \leq T$, получим неравенство

$$\varepsilon_1 - g(t) \leq 0 \quad \text{при } t \in [0, t(\varepsilon_1)].$$

Отсюда и из теоремы 1 следует, что при выполнении неравенств (16) управление преследователя (10) при любом допустимом управлении убегающего обеспечивает для любого реализовавшегося движения выполнение условия поимки (5).

Случай 2.3. Пусть существует такая точка $t_* \in (0, T)$, что

$$\psi(t) > 0 \quad \text{при } t \in (0, t_*) \quad (19)$$

и

$$\psi(t) < 0 \quad \text{при } t \in (t_*, T). \quad (20)$$

Из (20) получим, что $g(t) < 0$ при $t \in [t_*, T)$. Тогда из (14) следует, что $t(\varepsilon_1) < t_*$. Поэтому, согласно (12),

$$f_1(t_*) = \varepsilon_1 - g(t_*) > 0.$$

Предположим, что

$$\varepsilon_1 - g(t_*) \leq \varepsilon_2 + g(t_*). \quad (21)$$

Отсюда с учетом того, что функция $g(t)$, согласно (19), является неубывающей при $t \in [t_*, T]$, следует выполнение неравенства

$$\varepsilon_1 - g(t) \leq \varepsilon_2 + g(t)$$

при всех $t \in [t_*, T]$.

Далее, введем обозначения

$$\varepsilon_1^* = \varepsilon_1 - g(t_*), \quad \varepsilon_2^* = \varepsilon_2 + g(t_*)$$

и приняв t_* за момент окончания процесса преследования, воспользуемся (19), чтобы попасть в условие случая 2.2.

Таким образом, отсюда и из теоремы 1 получим, что при выполнении неравенств (16), (21) управление преследователя (10) при любом допустимом управлении убегающего обеспечивает для любого реализовавшегося движения выполнение условия поимки (5).

Случай 2.4. Пусть существует такая точка $t_* \in (0, T)$, что

$$\psi(t) < 0 \quad \text{при } t \in (0, t_*) \quad (22)$$

и

$$\psi(t) > 0 \quad \text{при } t \in (t_*, T). \quad (23)$$

Приняв t_* за начальный момент времени, воспользуемся (23), чтобы попасть в условие случая 2.2; отсюда следует, что

$$f_1(t) \leq f_2(t) \quad \text{при } t \in [t_*, T].$$

Пусть $f_1(t_*) = 0$. Это означает, что $\varepsilon_1 - g(t_*) \leq 0$. Тогда верны неравенства $0 < t_* \leq t(\varepsilon_1)$. Следовательно, $f_1(0) = 0$.

Пусть $f_1(t_*) = \varepsilon_1 - g(t_*) > 0$. Тогда, учитывая (13) и (22), получим

$$f_1(0) = \varepsilon_1 - g(0) = \varepsilon_1 - g(t_*) - \int_0^{t_*} \psi(r) dr > \varepsilon_1 - g(t_*) > 0.$$

Таким образом, получили формулу

$$f_1(0) = \begin{cases} 0 & \text{при } \varepsilon_1 \leq g(t_*), \\ \varepsilon_1 - g(0) & \text{при } \varepsilon_1 > g(t_*). \end{cases} \quad (24)$$

Предположим, что

$$f_1(0) \leq |z(0)| \leq \varepsilon_2 + g(0). \quad (25)$$

Тогда $f_1(0) \leq \varepsilon_2 + g(0)$. Кроме того, учтем, что функция $g(t)$, согласно (22), является неубывающей при $t \in [0, t_*]$. Пусть $f_1(0) = 0$; тогда, согласно (24), выполнено неравенство

$$f_1(t) = 0 \leq \varepsilon_2 + g(t) \quad \forall t \in [0, t_*].$$

Пусть $f_1(0) = \varepsilon_1 - g(0)$; тогда выполнено неравенство

$$\varepsilon_1 - g(t) \leq \varepsilon_2 + g(t) \quad \forall t \in [0, t_*].$$

Согласно (11), (12) и (15) это означает, что $t(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \leq 0$.

Таким образом, отсюда и из теоремы 1 получим, что при выполнении неравенств (25), где $f_1(0)$ определяется по формуле (24), управление преследователя (10) при любом допустимом управлении убегающего обеспечивает для любого реализовавшегося движения выполнение условия поимки (5).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Красовский Н. Н., Субботин А. И. Позиционные дифференциальные игры. — М.: Наука, 1974.
2. Кумков С. С., Ле Менек С., Пацко В. С. Множества разрешимости в задаче преследования с двумя догоняющими и одним убегающим // Тр. Ин-та мат. мех. УрО РАН. — 2014. — 20, № 3. — С. 148–165.
3. Ухоботов В. И., Измestьев И. В. Однотипные дифференциальные игры с терминальным множеством в форме кольца // Динамика систем и процессы управления (SDCP'2014) / Тр. междунар. науч. конф., Екатеринбург, 15–20 сентября 2014 г.). — Екатеринбург: ИММ УрО РАН, 2015. — С. 325–332.
4. Физтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 1. — М.: Физматлит, 2001.
5. Ganebny S. A., Kumkov S. S., Le Menec S., Patsko V. S. Model problem in a line with two pursuers and one evader // Dyn. Games Appl. — 2012. — 2, № 2. — С. 228–257.
6. Shima T., Shinar J. Time-varying linear pursuit-evasion game models with bounded controls // J. Guid. Control Dynam. — 2002. — 25, № 3. — С. 425–432.
7. Shinar J. Solution techniques for realistic pursuit-evasion games // Adv. Control Dynam. Systems. — 1981. — 17. — С. 63–124.
8. Shinar J., Medinah M., Biton M. Singular surface in a linear pursuit-evasion game with elliptical vectograms // J. Optim. Theory Appl. — 1984. — 43, № 3. — С. 431–456.
9. Shinar J., Zarkh M. Pursuit of a faster evader—a linear game with elliptical vectograms // Proc. 7th Int. Symp. on Dynamic Games, Yokosuka, Japan. — 1996. — С. 855–868.
10. Turetsky V., Glizer V. Y. Continuous feedback control strategy with maximal capture zone in a class of pursuit games // Int. Game Theory Rev. — 2005. — 7, № 1. — С. 1–24.

И. В. Измestьев

Челябинский государственный университет

E-mail: j748e8@gmail.com

В. И. Ухоботов

Челябинский государственный университет

E-mail: ukh@csu.ru



ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ДВИЖЕНИЯ ПАРАШЮТИСТА

© 2018 г. И. Ю. КЛОЧКОВА

Аннотация. Рассматривается система дифференциальных уравнений, описывающая свободное падение парашютиста, а также его снижение при раскрытом куполе парашюта. Системы дифференциальных уравнений исследуются качественно на наличие возможных состояний равновесия. Расчеты произведены на основе экспериментальных данных прыжка с самолета.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение, свободное падение, парашют, состояние равновесия.

AMS Subject Classification: 34A99, 34M35, 34N05

1. Введение. При построении динамической системы, описывающей движение парашютиста, приходится выбирать упрощенную математическую модель, вполне доступную для аналитического исследования и в то же время сохраняющую наиболее характерные черты исходного объекта. Для этого проводится анализ, определение, систематизация постоянных и временных параметров. Регулярных и достаточно обоснованных методов построения нелинейных математических моделей в настоящее время не существует. В большинстве случаев для этой цели применяют какие-либо эвристические процессы или используют метод проб и ошибок (см. [6]).

Процесс прыжка можно разбить на четыре этапа:

- 1) свободное падение парашютиста;
- 2) снижение на стабилизирующем парашюте;
- 3) наполнение купола основного парашюта;
- 4) снижение на раскрытом парашюте.

На основе измерений координат парашютиста в пространстве для каждого этапа составляются системы дифференциальных уравнений, описывающие движение парашютиста. В качестве базовых исследуются модели, предложенные в [4, 6]. Расчет параметров динамической системы проводится с помощью регрессионного анализа [1, 2]. Рассмотрим начальный этап движения парашютиста.

2. Этап свободного падения. Система дифференциальных уравнений, описывающая движение парашютиста в плоскости имеет вид

$$\begin{cases} \frac{dV^2}{dS} = 2g \sin \varphi - 2bV - 2aV^2, \\ V^2 \frac{d(\sin \varphi)}{dS} = g(1 - \sin^2 \varphi), \end{cases} \quad (1)$$

где V — результирующая скорость, S — пройденный путь, g — ускорение свободного падения, $\sin \varphi$ — синус угла, который образует касательная к траектории парашютиста с осью Ox , a, b — коэффициенты сопротивления, деленные на массу парашютиста. Для системы дифференциальных уравнений (1) ставится задача определения зависимости координат и скорости парашютиста от времени (см. [4, 6]).

После несложных преобразований получим систему дифференциальных уравнений, описывающую изменение скорости парашютиста в плоскости Oxz :

$$\begin{cases} \dot{V}_x = -bV_x - aV_x(V_x^2 + V_z^2)^{1/2}, \\ \dot{V}_z = -V_z(b + a(V_x^2 + V_z^2)^{1/2}) - g, \end{cases} \quad (2)$$

где V_x — скорость парашютиста по координате x , V_z — скорость парашютиста по координате z (см. [3, 5]).

Система дифференциальных уравнений, описывающая изменение скорости парашютиста в плоскости Oyz , будет выглядеть аналогично. Практическая значимость модели (2) заключается в том, что для нее удастся определить предельные значения скоростей V_x , V_z без использования численных методов.

В результате качественного исследования системы (2) определяется ее состояние равновесия $A(0, 1/2a(b + \sqrt{D}))$. Для состояния равновесия A справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. Пусть для системы дифференциальных уравнений (2) выполнены условия $a > 0$ и $b \geq 0$. Тогда система (2) имеет состояние равновесия, которое является устойчивым узлом.

На основании результатов приходим к выводу, что при падении парашютиста вниз в плоскости его скорость по оси Ox стремится к нулю, а скорость по оси Oz стремится к константе, т.е.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} V_z(t) = \frac{1}{2a}(b + \sqrt{D})$$

(см. [3]).

Замена переменных $V_x = \dot{x}(t) = p$, $V_z = \dot{z}(t) = w$ сводит систему (2) к системе четырех уравнений, численный анализ которой позволяет определить зависимости координат парашютиста от времени.

3. Этап снижения на раскрытом парашюте. Основываясь на рекомендациях, предложенных в [4, 5], а также на экспериментальных данных, полученных в результате прыжка, строим систему дифференциальных уравнений, описывающую изменение скорости парашютиста в плоскости Oxz :

$$\begin{cases} \dot{V}_x = c_1 + b_1V_x + a_1V_x(V_x^2 + V_z^2)^{1/2}, \\ \dot{V}_z = c_x + b_xV_z + a_xV_z(V_x^2 + V_z^2)^{1/2}, \end{cases} \quad (3)$$

где V_x — скорость парашютиста по координате x , V_z — скорость парашютиста по координате z , коэффициенты a_1 , a_x , b_1 , b_x , c_1 , c_x определяются этапом прыжка, характеристиками парашюта, начальными условиями движения парашютиста.

Аналогично строим систему дифференциальных уравнений, описывающую изменение скорости парашютиста в плоскости Oyz :

$$\begin{cases} \dot{V}_y = c_2 + b_2V_y + a_2V_y(V_y^2 + V_z^2)^{1/2}, \\ \dot{V}_z = c_y + b_yV_z + a_yV_z(V_y^2 + V_z^2)^{1/2}, \end{cases} \quad (4)$$

где V_y — скорость парашютиста по координате y , коэффициенты a_2 , a_y , b_2 , b_y , c_2 , c_y определяются этапом прыжка, характеристиками парашюта, начальными условиями движения парашютиста.

С учетом систем (3), (4) изменение скоростей в пространстве будет описываться системой дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{V}_x = c_1 + b_1V_x + a_1V_x(V_x^2 + V_z^2)^{1/2}, \\ \dot{V}_y = c_2 + b_2V_y + a_2V_y(V_y^2 + V_z^2)^{1/2}, \\ \dot{V}_z = c_3 + b_3V_z + V_z(m_3(V_y^2 + V_z^2)^{1/2} + k_3(V_x^2 + V_z^2)^{1/2}), \end{cases} \quad (5)$$

где

$$c_3 = \frac{1}{2}(c_x + c_y), \quad b_3 = \frac{1}{2}(b_x + b_y), \quad m_3 = \frac{1}{2}a_y, \quad k_3 = \frac{1}{2}a_x.$$

В общем случае определение состояний равновесия систем (3), (4), (5) сводится к нахождению корней многочлена шестой степени.

В результате регрессионного анализа результатов измерений для системы (5) получен случай, когда $c_2 = b_1 = m_3 = k_3 = 0$ (см. [1, 2]). Система (5) примет вид

$$\begin{cases} \dot{V}_x = c_1 + a_1 V_x (V_x^2 + V_z^2)^{1/2}, \\ \dot{V}_y = b_2 V_y + a_2 V_y (V_y^2 + V_z^2)^{1/2}, \\ \dot{V}_z = c_3 + b_3 V_z. \end{cases} \quad (6)$$

Для нахождения особых точек системы (6) рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} \dot{V}_x = P(V_x, V_y, V_z) = 0, \\ \dot{V}_y = Q(V_x, V_y, V_z) = 0, \\ \dot{V}_z = M(V_x, V_y, V_z) = 0 \end{cases} \quad (7)$$

или

$$\begin{cases} c_1 + a_1 V_x (V_x^2 + V_z^2)^{1/2} = 0, \\ b_2 V_y + a_2 V_y (V_y^2 + V_z^2)^{1/2} = 0, \\ V_z = -c_3/b_3 = -\gamma. \end{cases} \quad (8)$$

Пусть $V_y = 0$; тогда из системы (8) получим соотношение для V_x :

$$a_1 V_x (V_x^2 + \gamma^2)^{1/2} = -c_1. \quad (9)$$

Введя обозначение $V_x^2 = u > 0$, получим уравнение

$$a_1^2 u^2 + a_1^2 \gamma^2 u - c_1^2 = 0; \quad (10)$$

его дискриминант

$$D_x = a_1^4 \gamma^4 + 4a_1^2 c_1^2 > 0. \quad (11)$$

Найдем решения уравнения (10), для которых $V_x^2 = u > 0$:

$$V_x^2 = \frac{\sqrt{D_x} - a_1^2 \gamma^2}{2a_1^2}. \quad (12)$$

Используя (12), получим

$$V_x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{\gamma^4 + \frac{4c_1}{a_1^2}} - \gamma^2 \right)^{1/2} = \pm \alpha, \quad \alpha > 0. \quad (13)$$

Соотношение (13) определяет два решения для V_x . В зависимости от знаков a_1 , c_1 одно из решений является посторонним с учетом (9). Если $a_1 c_1 < 0$, то $V_x = \alpha > 0$; если же $a_1 c_1 > 0$, то $V_x = -\alpha < 0$. Таким образом, система (6) имеет состояние равновесия $A_1^+(\alpha, 0, -\gamma)$ при $a_1 c_1 < 0$ или $A_1^-(-\alpha, 0, -\gamma)$ при $a_1 c_1 > 0$.

Проанализируем полученное состояние равновесия на устойчивость. Найдем частные производные функций $P(V_x, V_y, V_z)$, $Q(V_x, V_y, V_z)$, $M(V_x, V_y, V_z)$:

$$\begin{aligned} P'_{V_x} &= \frac{a_1(2V_x^2 + V_z^2)}{(V_x^2 + V_z^2)^{1/2}}, & P'_{V_y} &= 0, & P'_{V_z} &= \frac{a_1 V_x^2 V_z^2}{(V_x^2 + V_z^2)^{1/2}}, \\ Q'_{V_x} &= 0, & Q'_{V_y} &= b_2 + \frac{a_2(2V_y^2 + V_z^2)}{(V_y^2 + V_z^2)^{1/2}}, & Q'_{V_z} &= \frac{a_2 V_y^2 V_z^2}{(V_y^2 + V_z^2)^{1/2}}, \\ M'_{V_x} &= 0, & M'_{V_y} &= 0, & M'_{V_z} &= b_3. \end{aligned} \quad (14)$$

Соотношения (14) определяют матрицу линейного приближения системы (6) в состоянии равновесия A_1^+ или A_1^- :

$$B_{A_1} = \begin{pmatrix} \frac{a_1(2\alpha^2 + \gamma^2)}{(\alpha^2 + \gamma^2)^{1/2}} & 0 & \pm \frac{a_1\alpha\gamma}{(\alpha^2 + \gamma^2)^{1/2}} \\ 0 & b_2 + \frac{a_2\gamma}{|\gamma|} & 0 \\ 0 & 0 & b_3 \end{pmatrix}.$$

Собственные значения матрицы B_{A_1} равны

$$\lambda_1^{A_1} = \frac{a_1(2\alpha^2 + \gamma^2)}{(\alpha^2 + \gamma^2)^{1/2}}, \quad \lambda_2^{A_1} = b_2 + a_2|\gamma|, \quad \lambda_3^{A_1} = b_3. \quad (15)$$

В силу (15) получим, что если выполняются неравенства

$$a_1 < 0, \quad b_2 + a_2|\gamma| < 0, \quad b_3 < 0, \quad (16)$$

то A_1^+ (или A_1^-) является устойчивым состоянием равновесия, в противном случае — неустойчивым.

Пусть выполняется неравенство $b_2a_2 < 0$; тогда из второго уравнения системы (8) находим

$$\sqrt{V_y^2 + V_z^2} = -\frac{b_2}{a_2}.$$

Система (8) примет вид

$$\begin{cases} a_1V_x(V_x^2 + \gamma^2)^{1/2} = -c_1, \\ V_y^2 + V_z^2 = \frac{b_2^2}{a_2^2}, \\ V_z = -\gamma \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} V_x = \pm\alpha, \\ V_y = \frac{b_2^4a_1^2 - c_1^2a_2^4}{a_2^2a_1^2b_2^2}, \\ V_z = -\gamma. \end{cases} \quad (17)$$

Из (17) получим, что если выполняются соотношения

$$b_2a_2 < 0, \quad b_2^4a_1^2 - c_1^2a_2^4 > 0, \quad \beta_2 = \sqrt{\frac{b_2^4a_1^2 - c_1^2a_2^4}{a_2^2a_1^2b_2^2}}, \quad (18)$$

то система (6) при $c_1a_1 > 0$ имеет состояния равновесия $A_2^+(\alpha, \beta_2, -\gamma)$ и $A_2^-(\alpha, -\beta_2, -\gamma)$; при $c_1a_1 < 0$ — состояния равновесия $A_3^+(-\alpha, \beta_2, -\gamma)$ и $A_3^-(-\alpha, -\beta_2, -\gamma)$. В силу (14) собственные значения матрицы линейного приближения системы (6) в состояниях равновесия A_2, A_3 определяются равенствами

$$\lambda_1^{A_{2,3}^\pm} = \frac{a_1(2\alpha^2 + \gamma^2)}{(\alpha^2 + \gamma^2)^{1/2}}, \quad \lambda_2^{A_{2,3}^\pm} = b_2 + \frac{a_2(2\beta_2^2 + \gamma^2)}{(\beta_2^2 + \gamma^2)^{1/2}}, \quad \lambda_3^{A_{2,3}^\pm} = b_3. \quad (19)$$

Для системы (6) справедливы следующие утверждения.

Теорема 2. Если для системы (6) выполняются неравенства

$$b_2a_2 < 0, \quad b_2^4a_1^2 - c_1^2a_2^4 > 0, \quad (20)$$

то она имеет три состояния равновесия $A_1^\pm, A_2^\pm, A_3^\pm$. Если $b_2a_2 > 0$, то система (6) имеет одно состояние равновесия $A_1^\pm$.

Теорема 3. Пусть для системы (6) выполнены неравенства (16). Тогда состояние равновесия $A_1^\pm$ является устойчивым узлом, в противном случае — неустойчивым.

Теорема 4. Если для системы (6) справедливы неравенства (20) и выполняются соотношения

$$a_1 < 0, \quad b_2 + \frac{a_2(2\beta_2^2 + \gamma^2)}{(\beta_2^2 + \gamma^2)^{1/2}} < 0, \quad b_3 < 0, \quad (21)$$

то состояния равновесия $A_2^\pm, A_3^\pm$ являются устойчивыми, в противном случае — неустойчивыми.

Пример. В результате регрессионного анализа экспериментальных данных динамики парашютиста получена система, для которой

$$c_1 = 0,3041, \quad a_1 = -0,0356, \quad b_2 = 0,2925, \quad a_2 = -0,0273, \quad c_3 = -3,9240, \quad b_3 = -1,0631.$$

Для рассмотренного случая $c_1 a_1 < 0$, $\alpha = 2,0292$, $\gamma = 3,6910$. Система (6) имеет состояние равновесия $A_1^+(\alpha, 0, -\gamma)$. Из неравенств (16) получим

$$a_1 < 0, \quad b_2 + a_2|\gamma| = 0,1918 > 0, \quad b_3 < 0.$$

Следовательно, A_1^+ является неустойчивым состоянием равновесия.

Для (6) выполняется неравенство $b_2 a_2 < 0$. Используя (18), найдем $\beta_2 = 10,6889$. Система (6) имеет состояния равновесия $A_2^+(\alpha, \beta_2, -\gamma)$, $A_3^+(\alpha, -\beta_2, -\gamma)$. Для неравенств (21) получим

$$a_1 < 0, \quad b_2 + \frac{a_2(2\beta_2^2 + \gamma^2)}{(\beta_2^2 + \gamma^2)^{1/2}} = -0,2918 < 0, \quad b_3 < 0.$$

Следовательно, A_2^+ , A_3^+ являются устойчивыми состояниями равновесия. Для скоростей V_x , V_y , V_z практически значимым является устойчивое состояние равновесия A_2^+ . Таким образом, при увеличении времени справедливы равенства

$$\lim_{t \rightarrow \infty} V_x(t) = \alpha = 2,0292 \frac{\text{м}}{\text{с}}, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} V_y(t) = \beta_2 = 10,6889 \frac{\text{м}}{\text{с}}, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} V_z(t) = -\gamma = 3,691 \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Боровков А. А. Математическая статистика. — СПб.: Лань, 2010.
2. Калиткин Н. Н. Численные методы. — М.: Наука, 1972.
3. Клочкова И. Ю. Математическая модель плоского движения тяжелой точки // Вестн. РАЕНю — 2016. — 16, № 3. — С. 28–33.
4. Лялин В. В., Морозов В. И., Пономарев А. Т. Парашютные системы. — М.: Физматлит, 2009.
5. Некрасов А. И. Курс теоретической механики. Т. II. Динамика. — М.: ГИТТЛ, 1958.
6. Усачев Ю. В., Курашин В. Н. Математическая модель движения парашютиста // Вестн. РГУ им. С. А. Есенина. — 2010. — 26, № 1. — С. 108–115.

И. Ю. Клочкова

Рязанское высшее воздушно-десантное командное училище им. В. Ф. Маргелова

E-mail: i-usacheva@mail.ru



СУПЕРИНТЕГРИРУЕМЫЕ БЕРТРАНОВЫ НАТУРАЛЬНЫЕ МЕХАНИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

© 2018 г. Е. А. КУДРЯВЦЕВА, Д. А. ФЕДОСЕЕВ

Аннотация. Задача поиска суперинтегрируемых систем (т.е. систем с замкнутыми траекториями в некоторой области) в классе натуральных механических систем, инвариантных относительно вращений, восходит к работам Бертрانا и Дарбу. Системы типа Бертрана при разных ограничениях были описаны Ж. Бертраном, Г. Дарбу, В. Перликом, А. Бессе, О. А. Загрядским, Е. А. Кудрявцевой и Д. А. Федосеевым. Однако в полной общности вопрос оставался открытым из-за так называемой проблемы экваторов. В оставшемся трудном случае с экваторами мы описываем все натуральные механические системы Бертрана, а также решаем вопрос о связи между разными классами систем типа Бертрана (самый широкий класс локально бертрановых систем, класс систем Бертрана, узкий класс сильно бертрановых систем и т. п.), которые совпадают в изученном ранее случае конфигурационных многообразий без экваторов. В частности, мы показываем, что сильно бертрановы системы образуют тощее подмножество в множестве систем Бертрана, а системы Бертрана — тощее подмножество в множестве локально бертрановых систем.

Ключевые слова: суперинтегрируемые системы Бертрана, конфигурационное многообразие вращения, экватор, поверхность Таннери, принцип Мопертюи.

AMS Subject Classification: 70H12, 70F15

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение	37
2. Точные определения и формулировки основных результатов	40
3. Вполне бертрановы системы и слабо таннериевы многообразия	43
4. Доказательство теоремы 2.3 о соотношении классов систем типа Бертрана	46
5. Бертрановы системы с экваторами	49
6. Чисто бертрановы системы	56
Список литературы	57

1. ВВЕДЕНИЕ

Задача поиска суперинтегрируемых систем (т.е. систем с замкнутыми траекториями в некоторой области) в классе натуральных механических систем, инвариантных относительно вращений, восходит к работам Г. Дарбу и Ж. Бертрана.

В 1873 г. Ж. Бертран в [5] сформулировал следующую задачу: *найти закон силы притяжения, если она зависит только от расстояния и заставляет частицу описывать замкнутую кривую, каковы бы ни были начальные условия, если только начальная скорость частицы меньше некоторого предела*. Другими словами, Ж. Бертран поставил вопрос о решении обратной задачи динамики (поиск закона сил по известным свойствам траекторий) на евклидовой плоскости при условии замкнутости некоторых орбит; это условие замыкания орбит в изначальной постановке Бертрана назовем *условием чистого замыкания* (определение 2.2(f)). В той же работе

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 17-11-01303).

Бертраном был решен аналогичный вопрос (хотя им утверждалось, что полученный ответ является решением поставленного вопроса), в котором вместо условия чистой замыкаемости орбит накладывалось условие сильной замыкаемости (определение 2.2(d)); оказалось, что подходящих законов притяжения существует всего два: закон притяжения Ньютона и закон Гука.

В последующие годы теорема Бертрана многократно обобщалась. Г. Либман (см. [8]) изучал аналогичный вопрос, но вместо евклидовой плоскости в качестве конфигурационного многообразия брал иные римановы многообразия вращения: проколотые полусферу, плоскость Лобачевского и их рациональные разветвленные накрытия. Г. Дарбу (см. [6]) обобщил задачу сильнее, позволив конфигурационному многообразию быть *произвольным* римановым многообразием вращения; тем самым, задача поиска потенциалов превратилась в задачу (называемую далее *задачей типа Бертрана*) поиска многообразий вращения и центральных потенциалов на них, удовлетворяющих какому-либо условию замыкаемости орбит (т.е. поиска соответствующих натуральных механических систем, называемых далее *системами типа Бертрана*). Под многообразием вращения здесь понимается двумерное некомпактное многообразие

$$S \simeq (a, b) \times S^1, \quad (1)$$

с римановой метрикой, которая в естественных «полярных» координатах (r, φ) может быть записана в виде

$$ds^2 = dr^2 + f^2(r)d\varphi^2, \quad (2)$$

где $f(r)$ — некоторая гладкая (или аналитическая) функция на (a, b) , не имеющая нулей на этом интервале.

Рассмотрим натуральную механическую систему с двумя степенями свободы с конфигурационным многообразием (S, ds^2) и потенциалом $V = V(r)$. Она задается системой уравнений Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}(x(t), \dot{x}(t)) \right) + \frac{\partial L}{\partial x^i}(x(t), \dot{x}(t)) = 0, \quad i = 1, 2,$$

с функцией Лагранжа

$$L = L(x, \dot{x}) = \frac{1}{2} (\dot{r}^2 + f^2(r)\dot{\varphi}^2) - V(r),$$

отвечающей метрике (2) и потенциалу V , где $x = (x^1, x^2) = (r, \varphi)$ — координаты на S , $\dot{x}(t) = dx(t)/dt$. Известно, что *энергия* $H = H(x, \dot{x}) = \frac{1}{2} (\dot{r}^2 + f^2(r)\dot{\varphi}^2) + V(r)$ и *кинетический момент* $K = K(x, \dot{x}) = f^2(r)\dot{\varphi}$ постоянны вдоль любой фазовой траектории $(x(t), \dot{x}(t))$ данной системы.

Г. Дарбу [6] и В. Перлик [9] классифицировали суперинтегрируемые натуральные механические системы (обобщающие задачу Кеплера) с конфигурационным многообразием вращения без «экваторов» (т.е. при $f'(r) \neq 0$). Точнее, Перлик обобщил теорему Бертрана, получив полное описание *сильно бертрановых* натуральных механических систем (хотя результат формулировался им для *слабо бертрановых* систем) при условии отсутствия экваторов (т.е. при условии $f'(r) \neq 0$), а Дарбу получил частичную классификацию таких систем при условии $f'(r)V'(r) \neq 0$. Динамические и геометрические свойства этих систем изучали многие ученые: В. Киллинг (W. Killing), Г. Либман (H. Liebmman), В. В. Козлов, А. О. Харин, А. В. Борисов, И. С. Мамаев, М. Santoprete, A. Ballesteros, A. Enciso, F. Herranz, O. Ragnisco (см. обзор в [1]). Кроме того, для конкретных многообразий вращения без экваторов (а также для любых римановых многообразий вращения без экваторов, см. [10]) доказано, что искомым потенциалов бывает не более двух (с точностью до аддитивной и мультипликативной констант), причем они всегда являются гравитационным (ньютоновым) и осцилляторным (гуковским), если их два, и осцилляторным, если потенциал один. А. Бессе в своей знаменитой книге [2] привел описание всех поверхностей Таннери с замкнутыми геодезическими (случай нулевого потенциала). Недавно О. А. Загрядским и авторами (см. [1]) было предложено несколько условий замыкаемости орбит и получено полное описание всех систем *типа Бертрана* (т.е. суперинтегрируемых натуральных механических систем, инвариантных относительно вращений и удовлетворяющих тому или иному условию замыкаемости) при условии отсутствия экваторов (в частности, обобщен результат Перлика на случай, когда не все, а лишь одно круговое решение предполагается орбитально устойчивым). Стоит отметить,

что анализ классических результатов (см. [1]) показал, что известные решения Бертрана, Дарбу, Перлика и других в действительности были получены при гораздо более сильных условиях замыкаемости орбит, нежели утверждалось в этих работах. А именно, в формулировках результатов накладывались условия *чистой замыкаемости* орбит (у Бертрана и его последователей), *слабой замыкаемости* (у Перлика и его последователей) и собственно *замыкаемости* (у Сантопрете), однако обоснования результатов являлись достаточно строгими лишь при выполнении более сильного условия *сильной замыкаемости*. Тем не менее, оказалось (см. [1]), что при отсутствии экваторов почти все задачи типа Бертрана (отвечающие разным условиям замыкаемости орбит, кроме условий полной замыкаемости Бессе и чистой замыкаемости Бертрана) имеют одно и то же решение, совпадающее с решением Перлика (см. [9]).

Однако в полной общности (без какого-либо предположения на метрику) задача описания всех таких систем оставалась открытой из-за так называемой *проблемы экваторов*, и одной из наших целей является точное описание систем указанного типа в оставшемся трудном случае — для конфигурационных многообразий с экваторами. В частности, в указанном трудном случае с экваторами до сих пор оставался открытым вопрос о связи между разными классами систем типа Бертрана (самый широкий класс *локально-бертрановых* систем, класс *бертрановых* систем, узкий класс *сильно бертрановых* систем и т. п.), которые совпадают (см. [1]) в изученном случае конфигурационных многообразий без экваторов.

Эти обстоятельства сделали задачу Бертрана и ее обобщение вновь крайне актуальными: во-первых, оказалось, что в оригинальной постановке Бертрана (с условием чистой замыкаемости орбит) она так и не была решена; во-вторых, задача оставалась нерешенной в трудном случае — для конфигурационных многообразий с экваторами; и, в-третьих, естественным вопросом стало рассмотрение различных задач «типа Бертрана», отвечающих разным условиям замыкаемости орбит, с целью получения нового спектра обобщений задачи Бертрана и ее решения в каждом случае.

Часть поставленной задачи успешно решена: авторами были полностью описаны (см. [3, 4]) все *вполне бертрановы* и все *устойчиво бертрановы*, а также *сильно* и *слабо бертрановы* системы, даже в трудном случае с экваторами. Иными словами, в [3, 4] было получено полное описание всех натуральных механических систем, удовлетворяющих условию полной замыкаемости орбит, а также систем, удовлетворяющих условию устойчивой, или сильной, или слабой замыкаемости орбит, причем эти результаты были получены без предположения об отсутствии экваторов (в отличие от результатов Бертрана, Дарбу и Перлика).

Следует отметить, что под суперинтегрируемостью часто понимается ситуация, когда гамильтонова система с n степенями свободы обладает $2n - 1$ явно заданными интегралами. Такие системы играют важную роль в математической физике (как в классическом, так и в квантовом случаях) и активно изучаются (Winternitz, Kalnins, Miller и др.). Задача Бертрана несколько отличается по своей постановке от этого случая. К ней близки два весьма интересных недавних результата о геодезических потоках. В. В. Шевчишин и П. П. Новичков (2014) получили локальную и глобальную (на сфере) классификации римановых метрик в размерности 2, допускающих два первых интеграла — линейный и 3-й или 4-й степени по скоростям, с использованием техники пуассоновых алгебр. Вторым является результат К. Киохары о существовании метрики с замкнутыми геодезическими на двумерной сфере, допускающей полиномиальный по скоростям интеграл произвольной степени.

В настоящей статье получено описание (т.е. строгая классификация) всех систем Бертрана — суперинтегрируемых натуральных механических систем на двумерных конфигурационных многообразиях вращения, удовлетворяющих условию замыкаемости орбит (определение 2.2(a)), в оставшемся трудном случае — для многообразий вращения с экваторами (теорема 2.4). Также в оставшемся трудном случае с экваторами мы полностью описываем (в теореме 2.3) связь между разными классами систем типа Бертрана, которые совпадают (см. [1]) в изученном случае многообразий вращения без экваторов. В частности, мы показываем, что вполне бертрановы и сильно бертрановы системы образуют тощие подмножества в множестве бертрановых систем, а бертрановы системы — тощее подмножество в множестве локально бертрановых систем (замечание 4.1).

Кроме того, мы устанавливаем некоторые свойства римановых метрик и потенциалов чисто бертрановых систем (см. леммы 5.2 и 5.6 и следствие 6.1). Остается открытым вопрос описания всех локально бертрановых и чисто бертрановых систем, и мы его планируем решить в будущем.

2. ТОЧНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ФОРМУЛИРОВКИ ОСНОВНЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

В дальнейшем под *траекторией* будем понимать решение $x(t) = (r(t), \varphi(t))$ уравнений движения, определенное на максимальном по включению интервале $(t_0, t_1) \subset \mathbb{R}^1$, под *орбитой* — образ $\{x(t) \mid t \in (t_0, t_1)\} \subset S$ этого отображения, под *фазовой траекторией* — функцию $(x(t), \dot{x}(t))$ со значениями в касательном расслоении TS , а под *фазовой орбитой* — ее образ $\{(x(t), \dot{x}(t)) \mid t \in (t_0, t_1)\} \subset TS$. Также будем отождествлять друг с другом касательное и кокасательное расслоения, TS и T^*S , при помощи канонического изоморфизма $TS \rightarrow T^*S$, $(r, \varphi, \dot{r}, \dot{\varphi}) \mapsto (r, \varphi, p_r = \dot{r}, p_\varphi = f^2(r)\dot{\varphi})$, отвечающего римановой метрике (2). При этом изоморфизме система уравнений Лагранжа преобразуется в систему уравнений Гамильтона

$$\dot{r}(t) = \frac{\partial H}{\partial p_r}, \quad \dot{\varphi}(t) = \frac{\partial H}{\partial p_\varphi}, \quad \dot{p}_r(t) = -\frac{\partial H}{\partial r}, \quad \dot{p}_\varphi(t) = -\frac{\partial H}{\partial \varphi}$$

с функцией Гамильтона

$$H = \frac{p_r^2}{2} + \frac{p_\varphi^2}{2f^2(r)} + V(r)$$

на четырехмерном фазовом пространстве T^*S .

Определение 2.1.

- (а) Орбита частицы, движущейся по поверхности S по закону сил, заданному центральным (т.е. зависящим только от r) потенциалом $V(r)$, называется *круговой*, если она совпадает с орбитой действия группы вращений. Траектория называется *круговой*, если соответствующая ей орбита является круговой.
- (б) Траектория называется *ограниченной*, если она определена на всей оси времени $t \in \mathbb{R}^1$, а ее образ содержится в некотором компакте $[r_1, r_2] \times S^1 \subset (a, b) \times S^1$. Орбита называется *ограниченной*, если соответствующая ей траектория ограничена.
- (с) Рассмотрим *редуцированную систему*, полученную фиксированием уровня кинетического момента K и факторизацией по действию S^1 (т.е. забыванием угловой переменной φ). Она является гамильтоновой системой с одной степенью свободы с функцией Гамильтона $p_r^2/2 + U_{\text{eff},K}(r)$, где функция

$$U_{\text{eff},K}(r) = V(r) + \frac{K^2}{2f^2(r)}$$

называется *эффективным потенциалом*. Круговую орбиту назовем *сильно устойчивой* (см. [1]), если на ней эффективный потенциал имеет невырожденный локальный минимум при некотором $K_0 \neq 0$ (это равносильно тому, что соответствующее решение редуцированной системы является невырожденным устойчивым положением равновесия).

- (d) Траекторию (и соответствующую орбиту) назовем *особой* (см. [10]), если значение интеграла кинетического момента K на этой траектории равно нулю, т.е. $\varphi = \text{const}$.
- (е) Замкнутую орбиту назовем *орбитально устойчивой*, если отвечающая ей фазовая траектория орбитально устойчива для ограничения системы на множество уровня кинетического момента, содержащее эту траекторию. Круговую орбиту назовем *почти устойчивой* (см. [3, 4]), если в любой ее окрестности содержится неособая ограниченная некруговая орбита (см. п. (b)).

В [1] были введены следующие определения обобщенно-замыкающих потенциалов и натуральных механических систем типа Бертрана.

Определение 2.2.

- (а) Пусть $V(r)$ — центральный потенциал на поверхности S с метрикой (2). Будем называть его *замыкающим* (ср. [10, теоремы 2 и 3]), если

- ($\exists$) существует неособая ограниченная некруговая орбита γ в S ;
 ($\forall$) всякая неособая ограниченная орбита в S замкнута.
- (b) Потенциал $V(r)$ будем называть *локально замыкающим*, если
 ($\exists$)^{loc} существует сильно устойчивая круговая орбита $\{r_0\} \times S^1$ в S ;
 ($\forall$)^{loc} для всякой сильно устойчивой круговой орбиты $\{r_0\} \times S^1$ в S существует такое число $\varepsilon > 0$, что всякая неособая ограниченная орбита, целиком лежащая в кольце $[r_0 - \varepsilon, r_0 + \varepsilon] \times S^1$ и имеющая уровень кинетического момента в интервале $(K_0 - \varepsilon, K_0 + \varepsilon)$, является замкнутой, где K_0 — значение кинетического момента на соответствующей круговой траектории.
- (c) Потенциал $V(r)$ будем называть *полулокально замыкающим*, если выполнены условия ($\exists$) и ($\forall$)^{loc}, а также следующее условие:
 ($\forall$)^{s-loc} любая неособая ограниченная орбита в кольце $U = [a', b'] \times S^1$ с уровнем кинетического момента $\hat{K}$ является замкнутой, где $a' := \inf r|_\gamma$, $b' := \sup r|_\gamma$, γ — некоторая ограниченная орбита из ($\exists$), $\hat{K}$ — значение кинетического момента на ней.
- (d) Потенциал $V(r)$ назовем *сильно* (соответственно, *слабо* или *устойчиво*) *замыкающим*, если выполнено условие ($\forall$)^{loc} (соответственно, его аналог для всякой орбитально устойчивой или почти устойчивой круговой орбиты), а также следующее условие: любая окружность $\{r\} \times S^1$ является сильно устойчивой (соответственно, орбитально или почти устойчивой, см. определение 2.1(c)) круговой орбитой.
- (e) Потенциал $V(r)$ будем называть *вполне замыкающим*, если все неособые орбиты замкнуты. Если все неособые геодезические замкнуты (т.е. постоянный потенциал $V_0 = \text{const}$ является вполне замыкающим), то риманову метрику вращения ds^2 на S назовем *метрикой Таннери*, а риманово многообразие (S, ds^2) — *многообразием Таннери* (см. [8, гл. 4, теорема 4.13]).
- (f) Потенциал $V(r)$ будем называть *чисто замыкающим* (ср. [5]), если для всякого $r \in (a, b)$ существует такое $\varepsilon > 0$, что всякая неособая фазовая траектория с уровнем энергии $E \in (V(r), V(r) + \varepsilon)$ и начальным положением на $\{r\} \times S^1$ является замкнутой.
- (g) Предположим, что потенциал $V(r)$ принадлежит одному из классов (a)–(f). В этом случае будем говорить, что риманово многообразие (S, ds^2) , тройка (S, ds^2, V) и соответствующая натуральная механическая система *имеют бертранов тип*. Более подробно, мы их будем называть *бертрановыми*, *локально бертрановыми*, *полулокально бертрановыми*, *сильно* (*слабо*, *устойчиво*) *бертрановыми*, *вполне бертрановыми* или *чисто бертрановыми*, если потенциал $V(r)$ является замыкающим, локально замыкающим, полулокально замыкающим, сильно (слабо, устойчиво) замыкающим, вполне замыкающим или чисто замыкающим соответственно.
- (h) Известно, что для натуральных механических систем, инвариантных относительно вращений, любая неособая некруговая замкнутая орбита является графиком некоторой периодической функции $r(\varphi)$, осциллирующей между своими минимумом и максимумом, причем период этой функции соизмерим с 2π , т.е. имеет вид $2\pi/\beta$, где $\beta \in \mathbb{Q}_{>0}$. Для систем типа Бертрана (см. п. (g)) число β локально постоянно и называется *постоянной Бертрана* данной системы.

Непосредственно из определения 2.2 может быть выведена следующая диаграмма нестрогих включений классов (a)–(e) систем типа Бертрана:

$$(b) \supseteq (c) \supseteq (a) \supseteq (e), \quad (c) \supseteq (d)^{\text{st}} \supseteq (d)^{\text{w}} \supseteq (d), \quad (3)$$

схематически изображенная на рис. 2 (см., например, [1, 3, 4] или начало доказательства теоремы 2.3 ниже). Здесь через (d), (d)^w и (d)st обозначены классы сильно, слабо и устойчиво бертрановых систем. Однако можно получить существенно более точную диаграмму включений:

$$(b) = (c) \supsetneq (a) \supsetneq (e), \quad (a) \supsetneq (d)^{\text{st}} = (d)^{\text{w}} = (d), \quad (4)$$

$$(a) \supsetneq (d) \cup (e), \quad (d) \cap (e) \notin \{\emptyset, (d), (e)\},$$

схематически изображенную на рис. 1. В настоящей работе доказывается справедливость этой (уточненной) диаграммы.

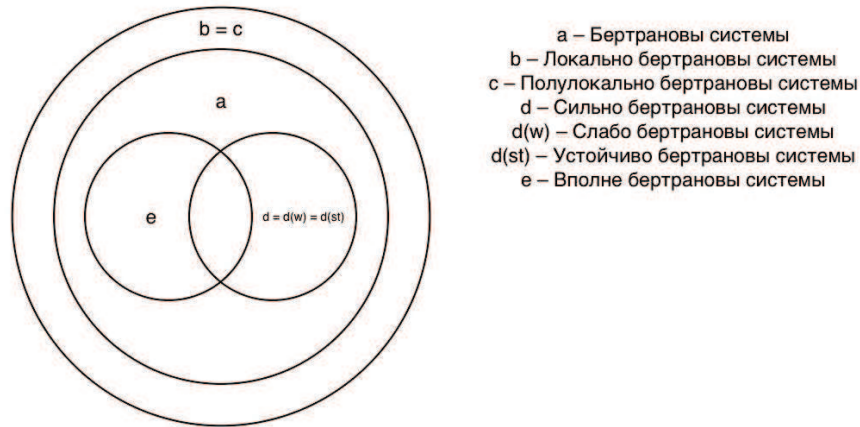


Рис. 1. Диаграмма включений классов суперинтегрируемых систем типа Бертрана

Теорема 2.3. Верна диаграмма (4)) равенств и строгих включений классов (a)–(e) суперинтегрируемых систем типа Бертрана, изображенная на рис. 1. Более точно, справедливы следующие утверждения:

- (1) классы локально и полулокально бертрановых систем совпадают;
- (2) классы сильно, слабо и устойчиво бертрановых систем совпадают, причем на конфигурационных многообразиях этих систем нет экваторов;
- (3) класс бертрановых систем содержится в классе локально бертрановых систем и не совпадает с ним;
- (4) класс вполне бертрановых систем содержится в классе бертрановых систем и не совпадает с ним; более того, существуют бертрановы системы, не являющиеся ни вполне бертрановыми, ни устойчиво бертрановыми;
- (5) класс устойчиво бертрановых систем содержится в классе бертрановых систем, имеет непустое пересечение с классом вполне бертрановых систем, не содержит этот класс и не содержится в нем.

Попутно мы описываем (см. раздел 3) все слабо таннериевы многообразия (определение 3.2 и теорема 3.5), т.е. многообразия вращения, для которых постоянный потенциал является замыкающим. Иными словами, описаны бертрановы системы с постоянным потенциалом.

Сформулируем наш основной результат: описание всех бертрановых систем в оставшемся трудном случае — для конфигурационных многообразий с экваторами (см. также замечание 4.1).

Введем обозначение $F(r) := 1/f^2(r)$. Будем говорить, что две тройки (S_i, ds_i^2, V_i) , $i = 1, 2$, имеют один вид (а также называть их сопряженными), если между ними существует S^1 -эквивариантный диффеоморфизм. Всюду в статье под монотонностью функции подразумевается нестрогая монотонность.

Теорема 2.4 (описание бертрановых систем с экваторами). Пусть (S, ds^2) — риманово многообразие вращения (1), (2), имеющее хотя бы один экватор, и пусть $V = V(r)$ — гладкая функция на S , инвариантная относительно вращений. Натуральная механическая система с потенциалом V на конфигурационном многообразии (S, ds^2) является бертрановой (определение 2.2(a)) тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:

- (a) Риманово многообразие (S, ds^2) является слабо таннериевым, т.е. имеет вид как в теореме 3.5: содержит такую (быть может, пустую) «перетяжку» $S_0 = (a_0, b_0) \times S^1 \subsetneq S$, что каждая связная компонента S_i риманова многообразия $(S \setminus \overline{S_0}, ds^2|_{S \setminus \overline{S_0}})$ является «поясом Таннери» (определение 3.4), $1 \leq i \leq k$, где $k \in \{1, 2\}$ — количество связных компонент.
- (b) Для каждого из указанных поясов Таннери S_i либо $V|_{S_i} = \text{const}$, либо тройка $(S_i, ds^2|_{S_i}, \eta V|_{S_i})$ для некоторого знака $\eta \in \{+, -\}$ имеет вид, как на поясе Таннери вполне бертрановой системы типа (i) или (iv) из теоремы 3.1. Знак η таков, что если перетяжка

S_0 непуста и тройка $(S, ds^2, \pm V)$ не имеет вид, как на содержащем экватор поясе вполне бертрановой системы типа (i) или (iv) из теоремы 3.1, то потенциал $V|_{S_i}$ на каждом поясе Таннери S_i не больше, чем на параллели между этим поясом и перетяжкой, $1 \leq i \leq k$. Потенциал $V|_{S_0}$ на перетяжке S_0 либо монотонен, либо достигает максимума в некоторой параллели и монотонен по любую сторону этой параллели. Если поясов Таннери два ($k = 2$), то постоянные Бертрана (определение 2.2(h)) ограничений системы на эти пояса не обязаны совпадать.

- (с) На перетяжке S_0 нет сильно устойчивых круговых орбит; это равносильно тому, что для любых $x, y \in (a_0, b_0)$ со свойствами $x < y$ и $F'(x) < 0 < V'(y)$ (соответственно, $V'(x) < 0 < F'(y)$) выполнено следующее: функции $F'|_{[x,y]}$ и $V'|_{[x,y]}$ имеют одно и то же множество корней $S_{x,y} \subset [x, y]$, а функция $-F'/V'|_{[x,y] \setminus S_{x,y}}$ монотонно не убывает (соответственно, не возрастает).

3. ВПОЛНЕ БЕРТРАНОВЫ СИСТЕМЫ И СЛАБО ТАННЕРИЕВЫ МНОГООБРАЗИЯ

Для доказательства теоремы 2.3 потребуются некоторые дополнительные соображения. Доказательство строгости включения будет проводиться конструктивно, т.е. при помощи предъявления конкретной динамической системы, принадлежащей большему, но не меньшему классу; для этого мы построим бертрановы римановы многообразия, на которых рассматриваемые классы потенциалов не совпадают. Как следует из результатов [1], на многообразиях без экваторов тако-го быть не может. Нам понадобится следующая теорема, доказанная в [3] и классифицирующая вполне бертрановы системы, без предположения об отсутствии экваторов.

Теорема 3.1 (описание вполне бертрановых систем, см. [3, 4]). *Вполне бертрановы многообразия вращения (S, ds^2) вида (1)), (2) вместе с вполне замыкающими центральными потенциалами V на S с точностью до сопряженности троек (S, ds^2, V) образуют пять семейств (i)–(v) из следующего списка:*

- (i) «рациональные» (т.е. имеющие соизмеримый с 2π полный угол в полюсе) сферичные (т.е. имеющие два полюса и один экватор) «сферообразные» (т.е. постоянной положительной кривизны) двумерные римановы многообразия вращения (образующие двухпараметрическое семейство, содержащее однопараметрическое семейство круглых сфер с выколотыми полюсами) с гравитационным потенциалом на них (см. [1];
- (ii) «рациональные» конусы с плоской метрикой (образующие однопараметрическое семейство, содержащее проколотую евклидову плоскость) с осцилляторным потенциалом на них (см. [1, следствие 1];
- (iii) «северные полусферы» многообразий из п. (i) с осцилляторным потенциалом на них (см. [1];
- (iv) «рациональные» грушевидные двумерные римановы многообразия вращения из [1] (образующие трехпараметрическое семейство) с осцилляторным потенциалом на них, где знак потенциала таков, что потенциал возрастает от «основного» полюса к «дополнительному», т.е. «основной» полюс является притягивающим, а «дополнительный» — отталкивающим (см. [1, формула (5)]);
- (v) все многообразия Таннери, классифицированные в [2, теорема 4.13], образующие «функционально-двухпараметрическое» семейство (параметры которого суть два положительных вещественных числа, одно из которых рационально, и нечетная гладкая функция $h : (-1, 1) \rightarrow (-1, 1)$ с точностью до замены $h \rightarrow -h$) и являющиеся сферичными сферообразными ($h \equiv 0$) или грушевидными ($h \not\equiv 0$) с постоянным потенциалом на них.

Любые две вполне бертрановы тройки (S, ds^2, V) , принадлежащие либо разным семействам, либо одному семейству с разными наборами параметров, не сопряжены. Римановы многообразия семейств (i) и (iv) составляют часть римановых многообразий семейства (v). Любые два римановых многообразия, принадлежащие либо разным семействам (ii), (iii), (v), либо одному семейству (i)–(v) с разными наборами параметров, неизометричны.

В доказательстве этой теоремы (см. [3, 4]) использовалась следующая идея: если взять вполне бертранову динамическую систему и применить принцип Мопертюи, получим однопараметрическое семейство римановых многообразий вращения, где параметр E — уровень энергии, причем все неособые геодезические останутся замкнутыми, поэтому каждое риманово многообразие полученного семейства будет многообразием Таннери, классификация которых известна (см. [2]).

Для доказательства теоремы 2.4 нам потребуются аналогичные рассуждения, но не для вполне бертрановых, а для бертрановых систем. Если же к бертрановой системе применить принцип Мопертюи, получим однопараметрическое семейство римановых метрик вращения $(E - V(r))ds^2$ на многообразиях $S_E := V^{-1}(\infty, E)$ с параметром $E \gg 1$, каждая из которых обладает следующим свойством «таннериевости в слабом смысле».

Определение 3.2. Если существует неособая ограниченная геодезическая в S , не являющаяся экватором, и все неособые ограниченные геодезические замкнуты (т.е. постоянный потенциал $V_0 = \text{const}$ является замыкающим), то риманову метрику вращения ds^2 на S назовем *метрикой Таннери в слабом смысле*, а риманово многообразие (S, ds^2) — *многообразием Таннери в слабом смысле* (или *слабо таннериевым многообразием*).

Опишем, как устроены слабо таннериевы многообразия. Прежде всего отметим, что всякое слабо таннериево многообразие имеет экватор, поскольку согласно классификации бертрановых систем без экваторов (см. [1]) постоянный потенциал не является замыкающим на таких многообразиях. Обратимся к условию замкнутости геодезических в форме Дарбу, используемому Бессе (см. [2]) в классификации многообразий Таннери.

Предложение 3.3 (Дарбу [7]; [2, теорема 4.11]). Пусть $S \simeq (\theta_1, \pi - \theta_1) \times S^1$ — многообразие вращения с римановой метрикой

$$ds^2 = R^2 \left([g(\cos \theta)]^2 d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2 \right), \quad (5)$$

где $R > 0$, $0 \leq \theta_1 \leq \pi/2$, $g : (-\cos \theta_1, \cos \theta_1) \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$. Пусть $\theta_1 \leq \theta_0 < \pi/2$. Тогда необходимым и достаточным условием того, что все геодезические, лежащие между параллелями $\{\theta_0\} \times S^1$ и $\{\pi - \theta_0\} \times S^1$, замкнуты, является условие

$$\int_{\tau}^{\pi-\tau} \frac{\sin \tau \cdot g(\cos \theta)}{\sin \theta (\sin^2 \theta - \sin^2 \tau)^{1/2}} d\theta = \frac{\pi}{\beta} \quad (6)$$

для всех $\tau \in (\theta_0, \pi/2)$ и некоторого $\beta \in \mathbb{Q}_{>0}$.

Определение 3.4. Пояс $S_1 = (a_1, b_1) \times S^1 \subset S$ многообразия вращения (S, ds^2) назовем *поясом Таннери*, если регулярной заменой $\theta = \theta(r)$ метрика $ds^2|_{S_1}$ приводится к виду (5), причем $g = (1 + h)/\beta$ для некоторых гладкой нечетной функции $h : (-\cos \theta_1, \cos \theta_1) \rightarrow (-1, 1)$ и числа $\beta \in \mathbb{Q}_{>0}$ (т.е. метрика приводится к виду, аналогичному виду метрик Таннери, [2, теорема 4.13], но обязательно $\theta_1 = 0$).

Пояс $S_0 = (a_0, b_0) \times S^1 \subset S$ многообразия вращения (S, ds^2) назовем *перетяжкой*, если существует такое $r_0 \in [a_0, b_0]$, что $f|_{(a_0, r_0)}$ монотонно не возрастает, а $f|_{(r_0, b_0)}$ монотонно не убывает.

Следующий результат обобщает теорему Бессе (см. [2, теорема 4.13]), описывающую все метрики Таннери.

Теорема 3.5 (описание слабо таннериевых многообразий). Риманово многообразие вращения (S, ds^2) является слабо таннериевым тогда и только тогда, когда оно содержит такую (быть может, пустую) перетяжку $S_0 = (a_0, b_0) \times S^1 \subsetneq S$, что каждая связная компонента риманова многообразия $(S \setminus S_0, ds^2|_{S \setminus S_0})$ является поясом Таннери (определение 3.4).

Доказательство. Аналогично [2, § 4.13] проверяется, что на любом поясе Таннери все неособые ограниченные геодезические замкнуты. Отсюда легко выводится, что любое риманово многообразие вращения (S, ds^2) указанного вида является слаботаннериевым.

Докажем обратное утверждение. Предположим, что риманово многообразие вращения (S, ds^2) является слабо таннериевым. Значит, существует неособая ограниченная геодезическая γ в S , не являющаяся экватором; поэтому γ замкнута. Положим $a' := \min r|_\gamma$ и $b' := \max r|_\gamma$. Рассмотрим редуцированную гамильтонову систему с гамильтонианом

$$H = \frac{p_r^2}{2} + \frac{K^2}{2f^2(r)},$$

где $K = 1$ без ограничения общности. Из [1, предложение 3] следует, что

$$f(a') = f(b') < f|_{(a', b')},$$

и в поясе $S' := (a', b') \times S^1$ метрика ds^2 приводится к виду (5) с константами $R = R_1 := \max f|_\gamma$ и $\theta'_1 \in [0, \pi/2)$, $f(a') = f(b') = R_1 \sin \theta'_1$. Согласно предложению 3.3 имеем (6) для любого $\tau \in (\theta'_1, \pi/2)$ и некоторого $\beta_1 \in \mathbb{Q}_{>0}$.

Дословным повторением рассуждений Бессе (см. [2, теорема 4.13, § 4.14] (проведенных для случая, когда все геодезические замкнуты, т.е. при $\theta_1 = \theta_0 = 0$) получаем, что в рассматриваемом поясе S' метрика приводится к нужному виду, т.е. S' является поясом Таннери. Рассмотрим объединение $S_1 = (a_1, b_1) \times S^1$ всех поясов Таннери, содержащих пояс S' ; S_1 открыто в S в силу [1, предложение 3]; $(S_1, ds^2|_{S_1})$ является поясом Таннери с константами $\theta_1 \in [0, \pi/2)$, $R_1 \in \mathbb{R}_{>0}$, $\beta_1 \in \mathbb{Q}_{>0}$ и некоторой нечетной функцией $h_1 : (-\cos \theta_1, \cos \theta_1) \rightarrow (-1, 1)$. Имеем неравенство $f(a_1) = f(b_1) \geq 0$. Если оно является равенством, т.е. $f(a_1) = f(b_1) = 0$, то $S_1 = S$ и метрика является таннериевой. Далее, пусть $f(a_1) = f(b_1) > 0$; тогда поясу S_1 отвечает незамкнутая геодезическая (так как в противном случае $[a_1, b_1] \times S^1 \subseteq S_1$), поэтому эта геодезическая неограничена, т.е. $a_1 = a$ или $b_1 = b$. Пусть для определенности $a_1 = a$.

Пусть $S_2 = (a_2, b) \times S^1$ — аналогичный пояс Таннери, примыкающий к другой граничной окружности поверхности S (если его не существует, положим $S_2 := \emptyset$, $a_2 := b$ и $\theta_2 := \frac{\pi}{2}$).

Мы показали, что любая неособая ограниченная геодезическая, не являющаяся экватором, содержится в одном из поясов Таннери S_1 или S_2 . Осталось показать, что пояс $S_0 := (b_1, a_2) \times S^1 = S \setminus (\overline{S_1} \cup \overline{S_2})$ является перетяжкой. Но, как показано выше, пояс S_0 не содержит неособой ограниченной геодезической, не являющейся экватором; поэтому не существует тройки таких точек $x, y, z \in (b_1, a_2)$, что $x < y < z$ и $f(x) < f(y) > f(z)$. Значит, пояс S_0 является перетяжкой в силу леммы 3.6 (см. ниже). Значит, S имеет строение $S = S_1 \cup \overline{S_0} \cup S_2$ с требуемыми свойствами. $\square$

Итак, осталось доказать следующую лемму.

Лемма 3.6. Пусть $W = W(r)$ — гладкая функция на интервале $(0, 1)$. Предположим, что для любых $x, y, z \in (0, 1)$, удовлетворяющих условию $x < y < z$, не выполнено $W(x) > W(y) < W(z)$. Тогда существует такое число $r_0 \in [0, 1]$, что $W|_{(0, r_0)}$ монотонно не убывает, а $W|_{(r_0, 1)}$ монотонно не возрастает.

Доказательство. Предположим, что функция W не является (нестрого) монотонной. Тогда ее производная меняет знак, т.е. существуют такие точки $x, y \in (0, 1)$, что $x < y$ и $W'(x)W'(y) < 0$. Из условия леммы следует, что случай $W'(x) < 0 < W'(y)$ невозможен; поэтому $W'(x) > 0 > W'(y)$. Значит, функция $W|_{[x, y]}$ достигает максимума в некоторой внутренней точке $r_0 \in (x, y)$, причем $f(x) < f(r_0) > f(y)$. Покажем, что $W'|_{(0, r_0)} \geq 0$. Предположим противное. Тогда найдется такая точка $z \in (0, r_0)$, что $W'(z) < 0$. Возможны два случая.

Случай 1: $z \in [x, r_0)$. Тогда $f(z) \leq f(r_0)$, поэтому для тройки точек $z, z + \varepsilon, r_0$ получаем противоречие с условием леммы, где $0 < \varepsilon \ll 1$.

Случай 2: для любой точки z с указанными свойствами (т.е. $z \in (0, r_0)$ и $W'(z) < 0$) выполнено неравенство $z < x$. Обозначим через $z_{\max}$ верхнюю грань точек z с указанными свойствами. Тогда $z_{\max} \leq x < r_0$ и $W'|_{[z_{\max}, r_0]} \geq 0$, поэтому $f(z_{\max}) \leq f(x) < f(r_0)$. Поэтому точку z можно выбрать так, чтобы $f(z) < f(r_0)$. Это приводит к противоречию аналогично случаю 1.

Полученное противоречие показывает, что $W'|_{(0, r_0)} \geq 0$. Аналогично имеем $W'|_{(r_0, 1)} \leq 0$. $\square$

Следующее свойство поясов Таннери понадобится нам в разделе 5 для доказательства теоремы 2.4.

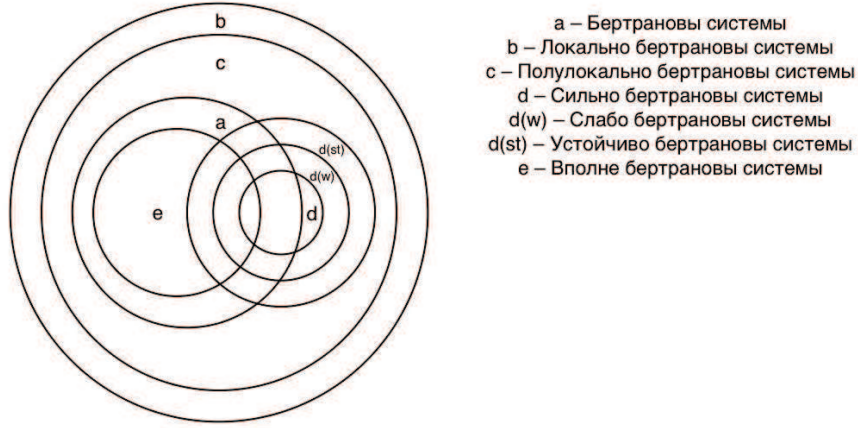


Рис. 2. Диаграмма нестрогих включений классов динамических систем типа Бертрانا

Лемма 3.7. *Предположим, что пояс $S_1 = (a_1, b_1) \times S^1 \subset S$ многообразия вращения (1), (2) является поясом Таннера (определение 3.4). Тогда граничные параллели $\{a_1\} \times S^1$ и $\{b_1\} \times S^1$ этого пояса не являются экваторами.*

Доказательство. Пусть $\{r_0\} \times S^1$ — экватор данной метрики, $r_1 = r_1(t)$ — функция, обратная к функции $f|_{(a_1, r_0]}$, $r_2 = r_2(t)$ — функция, обратная к функции $f|_{[r_0, b_1)}$, $t \in (R \sin \theta_1, R)$. Ввиду нечетности функции h имеем

$$r_2(t) - r_1(f) = \frac{R}{\beta} \left(\pi - 2 \arcsin \frac{t}{R} \right), \quad r'_1(t) > 0, \quad r'_2(t) < 0,$$

откуда

$$0 < r'_1(t) - r'_2(t) = \frac{2}{\beta \sqrt{1 - t^2/R^2}} = \frac{2R}{\beta \sqrt{R^2 - t^2}}.$$

Поэтому

$$0 < r'_1(t) < \frac{2R}{\beta \sqrt{R^2 - t^2}},$$

откуда

$$f'(a_1) = \frac{1}{r'_1(f(a_1))} > \frac{\beta \sqrt{R^2 - f^2(a_1)}}{2R} = \frac{\beta}{2} \cos \theta_1 > 0,$$

т.е. параллель $\{a_1\} \times S^1$ не является экватором. Аналогично, параллель $\{b_1\} \times S^1$ не является экватором. $\square$

4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.3 О СООТНОШЕНИИ КЛАССОВ СИСТЕМ ТИПА БЕРТРАНА

Теперь докажем теорему 2.3 о диаграмме (4) соотношений классов систем типа Бертрانا.

Доказательство теоремы 2.3. Непосредственно из определения 2.2 следует, что любой вполне замыкающий центральный потенциал $V(r)$ является замыкающим, а любой замыкающий — полулокально замыкающим; любой слабо замыкающий является устойчиво замыкающим, а любой устойчиво замыкающий — полулокально замыкающим. Нетрудно также показывается, что любой сильно замыкающий потенциал является слабо замыкающим, и любой полулокально замыкающий — локально замыкающим, причем (в силу [1, теорема 7(A)]) существует сильно устойчивая круговая орбита $\{r = r_0\}$, на которой значение интеграла кинетического момента K совпадает с $K|_\gamma$ для неособой ограниченной некруговой траектории γ из $(\exists)$. В частности, все потенциалы из определения 2.2 являются локально замыкающими (без предположения об отсутствии экваторов у многообразия вращения).

Таким образом, верна диаграмма (3) нестрогих включений классов, изображенная на рис. 2. Докажем теперь более точные включения (4), показанные на рис. 1.

(1) Пусть потенциал является локально замыкающим, т.е. верны условия $(\exists)^{\text{loc}}$ и $(\forall)^{\text{loc}}$ из определения 2.2). Докажем, что он является также полулокально замыкающим, т.е. верны условия $(\exists)$, $(\forall)^{\text{loc}}$ и $(\forall)^{\text{s-loc}}$ определения 2.2). Требуется доказать выполнение условий $(\exists)$ и $(\forall)^{\text{s-loc}}$.

Имеет место следующее свойство: из условия $(\exists)^{\text{loc}}$ следует условие $(\exists)$ для того же уровня кинетического момента K_0 , что и в определении сильно устойчивой круговой орбиты, в любом достаточно малом поясе, содержащем сильно устойчивую круговую орбиту $\{r_0\} \times S^1$. Но тогда и условие $(\forall)^{\text{s-loc}}$ автоматически выполнено, так как следует из $(\forall)^{\text{loc}}$ ввиду того, что по построению ограниченная орбита из $(\exists)$ (а потому и кольцо из $(\forall)^{\text{s-loc}}$) содержится в кольце из $(\forall)^{\text{loc}}$, а уровень кинетического момента из $(\exists)$ (а потому и из $(\forall)^{\text{s-loc}}$) равен K_0 и поэтому содержится в интервале $(K_0 - \varepsilon, K_0 + \varepsilon)$ из $(\forall)^{\text{loc}}$.

(2) Требуемое утверждение доказано в [3, теорема 2] и выведено из того, что конфигурационные многообразия вращения, допускающие существование устойчиво замыкающих потенциалов, не имеют экваторов. Но на многообразиях вращения без экваторов классы потенциалов, удовлетворяющих условиям (a)–(d) замыкаемости орбит из определения 2.2, совпадают согласно [1].

Осталось доказать пункты (3), (4), (5) в части несовпадения рассматриваемых классов и непустоты их пересечений. Докажем это, непосредственно приведя примеры многообразий вращения, на которых существуют соответствующие потенциалы.

(3) Для доказательства необходимо построить локально бертранову систему, не являющуюся бертрановой. Рассмотрим тройку (S, ds^2, V) типа (i) из перечня теоремы 3.1 вполне бертрановых систем. Соответствующая динамическая система в данном случае является как вполне бертрановой, так и локально бертрановой. Пусть $S = (a, b) \times S^1$; обозначим радиальную координату экватора многообразия (S, ds^2) через $\hat{r}$; без ограничения общности будем считать, что $V' > 0$, т.е. полюс $\{a\} \times S^1$ является притягивающим. Заметим, что все круговые орбиты в открытой полусфере $(a, \hat{r}) \times S^1$ являются сильно устойчивыми, а вне этой полусферы нет круговых орбит (так как $f'V' \leq 0$ и $V'(r) \neq 0$ вне этой полусферы).

Теперь изменим потенциал $V = V(r)$ в каком-либо компактном поясе полусферы $(\hat{r}, b) \times S^1 \subset S$ таким образом, что в этом поясе не возникнет круговых орбит (т.е. с сохранением условия $V'(r) \neq 0$). Обозначим полученный потенциал через $\tilde{V} = \tilde{V}(r)$. Полученная тройка $(S, ds^2, \tilde{V})$ остается локально бертрановой, так как новых круговых орбит не возникло, а в полусфере $(a, \hat{r}) \times S^1$, содержащей все круговые орбиты, метрика и потенциал не изменились.

Покажем, что потенциал $\tilde{V}$ не является замыкающим. Предположим противное. Поскольку потенциал V является вполне замыкающим, то у соответствующей вполне бертрановой системы нет неособых неограниченных орбит. Но отсутствие неособых неограниченных орбит равносильно тому, что при любом $K \neq 0$ выполнены соотношения

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow a} U_{\text{eff}, K}(r) = +\infty, \quad \overline{\lim}_{r \rightarrow b} U_{\text{eff}, K}(r) = +\infty$$

(см. [1, предложение 2]). Так как метрика и потенциал (а потому и эффективный потенциал) не изменились вне некоторого компакта, то у системы с потенциалом $\tilde{V}$ тоже нет неособых неограниченных орбит. Но потенциал $\tilde{V}$ предполагается замыкающим, поэтому он автоматически вполне замыкающий. Поэтому по теореме 3.1 потенциалы V и $\tilde{V}$ должны совпасть с точностью до множителя. Но на полусфере $(a, \hat{r}) \times S^1$ потенциал не был изменен, поэтому $V = \tilde{V}$ всюду. Однако потенциалы не могут совпадать, поскольку потенциал был изменен. Противоречие.

(4) В качестве примера бертрановой, но не вполне бертрановой системы возьмем собственный пояс многообразия из случая (i), (iv) или (v) из перечня в теореме 3.1, содержащий экватор. Соответствующий потенциал на нем является замыкающим, поскольку в нем содержится сильно устойчивая круговая орбита. Этот потенциал не является устойчиво замыкающим в силу теоремы 2 из [3] (об отсутствии экваторов у устойчиво бертрановых многообразий) и факта существования экватора у данного многообразия.

(5) Примерами потенциалов из пересечения классов сильно (а значит, и слабо, и устойчиво) замыкающих потенциалов и вполне замыкающих потенциалов могут служить пункты (ii) и (iii) из перечня в теореме 3.1.

Пункты (i), (iv), (v) этого перечня дают примеры вполне, но не устойчиво замыкающих потенциалов, так как соответствующие многообразия имеют экваторы. Собственные пояса многообразий из пунктов (ii) и (iii) перечня в теореме 3.1 (и соответствующие потенциалы) дают примеры устойчиво, но не вполне замыкающих потенциалов, в силу описания вполне замыкающих потенциалов в теореме 3.1.

Таким образом, теорема 2.3 доказана. $\square$

Из теоремы 2.3, с учетом теоремы 3.1 и результатов [1, теоремы 5 и 6] и [3, теорема 2], можно сделать следующие выводы.

Во-первых, на конфигурационных многообразиях *без экваторов* классы замыкающих, локально, полулокально, сильно, слабо и устойчиво замыкающих потенциалов совпадают (см. [1, теоремы 5 и 6]). Поэтому для таких конфигурационных многообразий ответ, полученный Перликом (см. [9]) в предположении того, что потенциал является сильно (или слабо, или устойчиво) замыкающим, справедлив и для задач поиска замыкающих и локально замыкающих потенциалов. А именно, при условии отсутствия экваторов классы бертрановых, локально, полулокально, сильно, слабо и устойчиво бертрановых систем совпадают и получаются из систем, описанных Перликом в [9], с помощью их ограничения на произвольные пояса конфигурационных многообразий.

Во-вторых, в общем случае (без требования отсутствия экваторов) эти классы существенно различаются (см. замечание 4.1 ниже). При этом полностью был описан лишь класс устойчиво бертрановых (а также сильно и слабо бертрановых) систем (см. [3, теорема 2]), равно как и класс вполне бертрановых систем (см. [3, теорема 1]), без условий на отсутствие экваторов у конфигурационного многообразия. А для классов бертрановых и локально бертрановых систем полного описания пока не было получено, как и для класса чисто бертрановых систем. Однако нам удалось описать (в оставшемся трудном случае с экваторами) все бертрановы системы (см. теорему 2.4 и ее доказательство в разделе 5).

Замечание 4.1. (а) Из полных описаний классов вполне бертрановых систем (в теореме 3.1), сильно бертрановых систем (в [3, теорема 2]) и бертрановых систем (с экваторами — в теореме 2.4, без экваторов — в [1, теоремы 5 и 6]) видно, что вполне бертрановы и сильно бертрановы системы образуют тощие подмножества (т.е. «подмногообразия» бесконечной коразмерности) в множестве бертрановых систем.

(б) Покажем, что бертрановы системы с экваторами образуют, в свою очередь, тощее подмножество в множестве локально бертрановых систем. Это можно сделать с помощью следующего видоизмененного (с использованием теорем 2.4, 3.1 и 3.5) доказательства п. (3) теоремы 2.3. Рассмотрим любую бертранову систему с экватором (т.е. любую систему из теоремы 2.4), состоящую из «перетяжки» и двух непустых «шапочек» со свойствами из теоремы 2.4. Обозначим через (S, ds^2, V) соответствующую бертранову тройку, т.е. риманову метрику и потенциал этой системы.

Согласно теореме 2.4, описывающей такие системы, риманово многообразие (S, ds^2) является слабо таннериевым (т.е. имеет вид, как в теореме 3.5). Более того, либо риманово многообразие (S, ds^2) является поясом Таннери (определение 3.4) и $V = \text{const}$, либо в многообразии (S, ds^2) существует пояс Таннери $S_1 \subseteq S$, примыкающий к одной из граничных окружностей многообразия S , и на этом поясе пара $(ds^2, \pm V)$ имеет вид, как на поясе Таннери некоторой вполне бертрановой системы с экватором (т.е. одной из систем типов (i), (iv) и (v) из теоремы 3.1). Отсюда следует, что по одну сторону экватора в поясе S_1 нет круговых орбит (так как $f'V' \leq 0$ и $f'(r) \neq 0$).

Теперь изменим метрику в каком-либо компактном поясе $S_1^c \subset S_1$, не содержащем экватор пояса S_1 и лежащем по указанную сторону этого экватора, таким образом, что в поясе S_1^c не возникнет круговых орбит (т.е. с сохранением условия $f'(r) \neq 0$). Обозначим полученную риманову метрику через $d\tilde{s}^2$. Полученная тройка $(S, d\tilde{s}^2, V)$ остается локально бертрановой, так как

новых круговых орбит не возникло, а метрика и потенциал не изменились в окрестности любой круговой орбиты.

Покажем, что тройка $(S, d\tilde{s}^2, V)$ не является бертрановой. Действительно, пояс S_1 перестал быть поясом Таннери (определение 3.4) для риманова многообразия $(S, d\tilde{s}^2)$, так как метрика в поясе S_1 была изменена лишь по одну сторону его экватора. Отсюда и из теоремы 3.5 нетрудно показать, что риманово многообразие $(S, d\tilde{s}^2)$ перестало являться слабо таннериевым. Значит, в силу теоремы 2.4 тройка $(S, d\tilde{s}^2, V)$ не является бертрановой.

5. БЕРТРАНОВЫ СИСТЕМЫ С ЭКВАТОРАМИ

Для доказательства теоремы 2.4 нужно установить требуемые свойства метрики и потенциала для любой системы Бертрана с экваторами. Вначале мы установим некоторые общие свойства метрик и потенциалов таких систем. Затем (в разделах 5.1 и 5.2) мы изучим строение бертрановых систем вблизи своих сильно устойчивых круговых орбит (определение 2.1(c)) в зависимости от типа таких орбит: (а) орбиты, являющиеся экваторами; (б) орбиты, не являющиеся экваторами.

Как в теореме 2.4, введем обозначение $F(r) := 1/f^2(r)$.

Лемма 5.1. *Предположим, что тройка (S, ds^2, V) является бертрановой и $F'(r_0) = 0 < F''(r_0)$. Тогда метрика является слабо таннериевой в любом поясе $(a', b') \times S^1$, содержащем экватор $\{r_0\} \times S^1$ и не содержащем других экваторов. Кроме того, ограничение соответствующей бертрановой системы на любой пояс, содержащий экватор $\{r_0\} \times S^1$, является бертрановой системой.*

Доказательство. Введем обозначения $\varkappa := 1/K^2$, $\varepsilon := E/K^2$. Фиксируем любое $\varepsilon \in (F(r_0)/2, \min\{F(a'), F(b')\}/2)$, и пусть $\varkappa > 0$ достаточно мало. Тогда условие замкнутости ограниченных траекторий в указанном поясе $(a', b') \times S^1$ имеет вид

$$\frac{2\pi}{\beta} = \Phi(E, K) := 2|K| \int_{\rho_-(\varepsilon, \varkappa)}^{\rho_+(\varepsilon, \varkappa)} \frac{F(r)dr}{\sqrt{2(E - U_{\text{eff}, K}(r))}} = 2 \int_{\rho_-(\varepsilon, \varkappa)}^{\rho_+(\varepsilon, \varkappa)} \frac{F(r)dr}{\sqrt{2\varepsilon - 2\varkappa V(r) - F(r)}},$$

где $\beta \in \mathbb{Q}_{>0}$ — постоянная Бертрана (определение 2.2(h)), $\rho_{\pm}(\varepsilon, \varkappa) \in (a', b')$ суть соседние корни уравнения $F(r) + 2\varkappa V(r) = 2\varepsilon$, между которыми $F(r) + 2\varkappa V(r) < 2\varepsilon$. Указанные числа $\rho_{\pm}(\varepsilon, \varkappa) \in (a', b')$ существуют, так как $F(r_0) < 2\varepsilon$, $F(a') > 2\varepsilon$, $F(b') > 2\varepsilon$ согласно условию на ε , и $\varkappa > 0$ достаточно мало. Из существования чисел $\rho_{\pm}(\varepsilon, \varkappa) \in (a', b')$ получаем существование такой ограниченной орбиты γ , что

$$\inf r|_{\gamma} = \rho_-(\varepsilon, \varkappa), \quad \sup r|_{\gamma} = \rho_+(\varepsilon, \varkappa);$$

поэтому орбита γ лежит в компактном поясе, содержащемся в рассматриваемом поясе. Итак, ограничение бертрановой системы на пояс $(a', b') \times S^1$ имеет ограниченную орбиту γ , а значит, тоже является бертрановой.

В пределе при $\varkappa \rightarrow 0$ получаем

$$\frac{2\pi}{\beta} = \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0, \\ \varkappa > 0}} \Phi\left(\frac{\varepsilon}{\varkappa}, \frac{1}{\sqrt{\varkappa}}\right) = \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0, \\ \varkappa > 0}} 2 \int_{\rho_-(\varepsilon, \varkappa)}^{\rho_+(\varepsilon, \varkappa)} \frac{F(r)dr}{\sqrt{2\varepsilon - 2\varkappa V(r) - F(r)}} = 2 \int_{\rho_-(\varepsilon, 0)}^{\rho_+(\varepsilon, 0)} \frac{F(r)dr}{\sqrt{2\varepsilon - F(r)}}.$$

Значит, выполнен аналог условия замыкаемости орбит в поясе $(a', b') \times S^1$ в случае нулевого потенциала, т.е. метрика в данном поясе является слабо таннериевой. $\square$

Лемма 5.2 (обобщение [3, лемма 1d] на случаи (чисто) бертрановых систем). *Предположим, что тройка (S, ds^2, V) является бертрановой или чисто бертрановой. Тогда для некоторого $\hat{r} \in [a, b]$ потенциал V монотонно не убывает на $(a, \hat{r})$ и монотонно не возрастает на $[\hat{r}, b]$ (в частности, V монотонен в случае $\hat{r} \in \{a, b\}$). В частности, если $V(r) \geq V(r_0)$ на (a, b) для некоторого $r_0 \in (a, b)$, то $V|_{(a, r_0]} \equiv V(r_0)$ или $V|_{[r_0, b)} \equiv V(r_0)$.*

Доказательство. Предположим противное. Тогда по лемме 3.6 для некоторых $x, y, z \in (a, b)$ выполнено $x < y < z$ и $V(x) > V(y) < V(z)$. Аналогично доказательству леммы 1d из [3] покажем, что это противоречит бертрановости (равно как и чистой бертрановости) системы.

Без ограничения общности будем считать, что $V(y) = \min V|_{[x,z]}$. Тогда при любых E и K из интервалов $V(y) < E < \min\{V(x), V(z)\}$ и $|K| < f(y)\sqrt{2E - 2V(y)}$ множество $U_{\text{eff},K}^{-1}(-\infty, E)$ открыто и содержит точку y , но не содержит точки x, z и близкие к ним точки; поэтому компонента связности точки y в этом множестве является непустым интервалом с концами $r_i(E, K) \in (x, z)$, $i = 1, 2$. Так как концы интервала лежат внутри интервала (a, b) , где функция $U_{\text{eff},K}(r)$ гладкая, то при всех таких (E, K) интеграл

$$\int_{r_1(E,K)}^{r_2(E,K)} \frac{dr}{f^2(r)\sqrt{2E - 2U_{\text{eff},K}(r)}} \in \mathbb{R}_{>0} \cup \{+\infty\}$$

непрерывно зависит от (E, K) , включая $K = 0$. Но в случае $K \neq 0$ в силу бертрановости (соответственно чистой бертрановости) системы этот интеграл равен

$$\frac{\Phi(E, K)}{2|K|} = \frac{\pi}{|K|\beta}$$

для некоторой константы $\beta \in \mathbb{Q}_{>0}$, поэтому при $K \rightarrow 0$ он стремится к $+\infty$. Поэтому при $K = 0$ он равен $+\infty$. Значит, $V'(r_1(E, 0)) = 0$ или $V'(r_2(E, 0)) = 0$ для любого E из рассматриваемого интервала. Но это легко приводится к противоречию с дифференцируемостью функции V . Лемма доказана. $\square$

5.1. Вид систем вблизи устойчивых круговых орбит, не являющихся экваторами. Изучим строение локально бертрановых систем вблизи сильно устойчивых круговых орбит типа (б), т.е. не являющихся экваторами.

Ясно, что такие круговые орбиты образуют пояса вида $(a_i, b_i) \times S^1 \subset S$, и ограничение системы на такой пояс является сильно бертрановой системой без экваторов (которые полностью описаны в [9] и [1, теоремы 5 и 6]). Согласно [1, теоремы 5 и 6] классы бертрановых, локально бертрановых и сильно бертрановых систем без экваторов совпадают, и такие системы получаются из систем, описанных Перликом (см. [9]), с помощью их ограничения на произвольные пояса конфигурационных многообразий.

Далее будем считать, что конфигурационное многообразие (S, ds^2) имеет экваторы, поскольку бертрановы и локально бертрановы системы без экваторов полностью описаны (см. [1, теоремы 5 и 6]). Покажем, что в этом случае одна из граничных окружностей указанного пояса $(a_i, b_i) \times S^1$ является экватором, а другая — граничной окружностью поверхности S .

Предложение 5.3. Пусть многообразие вращения (S, ds^2) имеет экватор. Предположим, что тройка (S, ds^2, V) является локально бертрановой, причем существует сильно устойчивая круговая орбита, не являющаяся экватором многообразия (S, ds^2) . Тогда экваторами многообразия (S, ds^2) эта тройка разбивается на части S_i , причем среди троек $(S_i, ds^2|_{S_i}, V|_{S_i})$ в этих частях не более двух бертрановых (описанных в [1]), а остальные части не содержат сильно устойчивых круговых орбит. Более того, конфигурационное многообразие такой бертрановой тройки $(S_i, ds^2|_{S_i}, V|_{S_i})$ изометрично поясу вполне бертранова многообразия вращения типа (i) или (iv) из теоремы 3.1, причем одна из граничных окружностей этой части является граничной окружностью поверхности S (т.е. часть является «шапочкой»), а другая — экватором $\overline{S_i} \setminus S_i$ многообразия (S, ds^2) ; потенциал $V|_{\overline{S_i}}$ совпадает с точностью до знака с ограничением соответствующего потенциала типа (i) или (iv) на соответствующий пояс, и достигает максимума на экваторе $\overline{S_i} \setminus S_i$.

Доказательство. Рассмотрим многообразие (S, ds^2) и удалим из него все экваторы $\{r_i\} \times S^1$. Таким образом, поверхность S разобьется на связные компоненты S_i . Рассмотрим тройки $(S_i, ds^2|_{S_i}, V|_{S_i})$ на этих компонентах, а также соответствующие динамические системы. Среди

них есть системы двух типов: содержащие хотя бы одну сильно устойчивую круговую орбиту и не содержащие таковых.

Рассмотрим тройку $(S_i, ds^2|_{S_i}, V|_{S_i})$, содержащую сильно устойчивую круговую орбиту γ . Поскольку тройка (S, ds^2, V) является локально бертрановой, то тройка $(S_i, ds^2|_{S_i}, V|_{S_i})$ также является локально бертрановой и не содержит экваторов, однако одна из ее граничных окружностей является экватором риманова многообразия (S, ds^2) , на котором существует конечный предел потенциала V . Следовательно, согласно общей теореме (см. [1, теоремы 5 и 6]) классификации систем типа Бертрана без экваторов, с учетом того, что одна из граничных окружностей компоненты S_i является экватором, получаем, что тройка $(S_i, ds^2|_{S_i}, V|_{S_i})$ также является бертрановой и является ограничением на пояс одной из (вполне бертрановых) систем с метрикой типов (i) и (iv), а потенциал совпадает с потенциалом случаев (i) и (iv) с точностью до знака, причем все параллели на S_i являются сильно устойчивыми круговыми орбитами.

Из явного описания этих типов следует, что лишь одна граничная параллель риманова многообразия $(S_i, ds^2|_{S_i})$ может являться экватором, т.е. одна из граничных окружностей S_i является граничной окружностью S , а другая — экватором (S, ds^2) ; следовательно, рассмотренное подмногообразие $(S_i, ds^2|_{S_i})$ является «шапочкой» многообразия (S, ds^2) . Следовательно, таковых подмногообразий может быть не более двух.

Все остальные тройки $(S_j, ds^2|_{S_j}, V|_{S_j})$ по построению не содержат сильно устойчивых круговых орбит. Предложение 5.3 доказано. $\square$

Следствие 5.4. *Предположим, что система является локально бертрановой и имеет экватор, а также существует сильно устойчивая круговая орбита типа (б), т.е. не являющаяся экватором. Тогда многообразие имеет вид «шапочка — экватор — черный ящик — экватор — шапочка», где указанные шапочки изометричны поясам систем типа (i) или (iv) из перечня теоремы 3.1, а потенциал в них (точнее, образ потенциала в такой шапочке при соответствующей изометрии) совпадает с соответствующим потенциалом с точностью до знака, причем знак потенциала определяется следующим условием: потенциал в шапочке меньше, чем на экваторе между этой шапочкой и черным ящиком. При этом одной из шапочек и соответствующего экватора может не быть, а в черном ящике все сильно устойчивые круговые орбиты имеют тип (а), т.е. являются экваторами.*

Итак, для любой локально бертрановой системы с экваторами все сильно устойчивые круговые орбиты типа (б) образуют одну или две такие шапочки S_i , что параллель $\overline{S_i} \setminus S_i$ является экватором.

5.2. Вид систем вблизи устойчивых круговых орбит, являющихся экваторами. Изучим теперь строение бертрановых систем вблизи сильно устойчивых круговых орбит типа (а), т.е. являющихся экваторами.

Итак, рассматриваем конфигурационное многообразие вращения S с метрикой $ds^2 = dr^2 + f^2(r)d\varphi^2$, у которого есть хотя бы один экватор, и центральный потенциал $V(r)$ на нем. Как в теореме 2.4 и лемме 5.1, введем обозначение $F(r) := 1/f^2(r)$.

Предположим, что экватор $\{r_0\} \times S^1 \subset S$ является сильно устойчивой круговой орбитой для некоторого значения кинетического момента $K = K_0 \neq 0$. Это условие равносильно системе

$$V'(r_0) + \frac{1}{2}F'(r_0)K_0^2 = 0, \quad V''(r_0) + \frac{1}{2}F''(r_0)K_0^2 > 0. \quad (7)$$

Первое условие этой системы, с учетом того, что $\{r_0\} \times S^1$ — экватор, означает, что $F'(r_0) = V'(r_0) = 0$, и в этом случае оно выполняется для любого значения кинетического момента $K_0 \neq 0$.

Второе условие распадается в совокупность:

$$\begin{aligned} 1a. \quad & V''(r_0) > 0, \quad F''(r_0) \geq 0; \\ 1b. \quad & V''(r_0) = 0, \quad F''(r_0) > 0; \\ 2. \quad & V''(r_0)F''(r_0) < 0, \quad K_0^2 > -\frac{2V''(r_0)}{F''(r_0)} \quad \text{в случае } F''(r_0) > 0, \\ & 0 < K_0^2 < -\frac{2V''(r_0)}{F''(r_0)} \quad \text{в случае } F''(r_0) < 0. \end{aligned}$$

Отметим, что в любом случае множество значений кинетического момента K , при которых экватор $\{r_0\} \times S^1$ является сильно устойчивой круговой орбитой, является непустым открытым подмножеством $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, которое будем обозначать через $\mathbb{K}_{r_0}$.

Лемма 5.5. *Предположим, что тройка (S, ds^2, V) является локально бертрановой (соответственно, чисто бертрановой). Тогда для любого экватора $\{r_0\} \times S^1 \subset S$, являющегося сильно устойчивой круговой орбитой, выполнены соотношения*

$$F'(r_0) = V'(r_0) = V''(r_0) = 0, \quad F''(r_0) > 0 \quad (8)$$

(соответственно $F'(r_0) = V'(r_0) = 0 \geq V''(r_0)$, $F''(r_0) > 0$) и постоянная Бертрана

$$\beta = \sqrt{-f(r_0)f''(r_0)} = \frac{\sqrt{F''(r_0)}}{\sqrt{2}F(r_0)} \in \mathbb{Q}_{>0}.$$

Доказательство. Предположим, что система является локально бертрановой. Поскольку по доказанному выше экватор $\{r_0\} \times S^1$ является сильно устойчивой круговой орбитой с любым значением кинетического момента $K_0 \in \mathbb{K}_{r_0}$ и уровнем энергии $E_{K_0} := U_{\text{eff},K_0}(r_0)$, то все траектории в его малой окрестности со значением кинетического момента K , близком к K_0 , и уровнем энергии $E > E_K$, близком к E_{K_0} , замкнуты. Условие замкнутости траекторий имеет вид

$$\Phi(E, K) := 2|K| \int_{r_-(E,K)}^{r_+(E,K)} \frac{F(r)dr}{\sqrt{2(E - U_{\text{eff},K}(r))}} = \frac{2\pi}{\beta}$$

при любых $K \in (K_0 - \varepsilon_0, K_0 + \varepsilon_0)$ и $E \in (E_K, E_K + \varepsilon_0)$. Здесь $U_{\text{eff},K}(r) = V(r) + F(r)K^2/2$ — эффективный потенциал, $\beta \in \mathbb{Q}_{>0}$ — константа Бертрана, $r_-(E, K)$ и $r_+(E, K)$ — такие соседние корни уравнения $U_{\text{eff},K}(r) = E$, что $r_-(E, K) < r_0 < r_+(E, K)$, а число $\varepsilon_0 > 0$ достаточно мало. Вычислим предел

$$\lim_{\substack{E \rightarrow E_K, \\ E > E_K}} \frac{\Phi(E, K)}{2|K|F(r_0)}.$$

Введем обозначение $a_K := U''_{\text{eff},K}(r_0)$. Тогда имеем $a_K > 0$ (см. (7)) и

$$\lim_{\substack{E \rightarrow E_K, \\ E > E_K}} \frac{\Phi(E, K)}{2|K|F(r_0)} = \lim_{\substack{E \rightarrow E_K, \\ E > E_K}} \int_{r_0 - \sqrt{2(E - E_K)/a_K}}^{r_0 + \sqrt{2(E - E_K)/a_K}} \frac{dr}{\sqrt{2(E - E_K) - a_K(r - r_0)^2}} = \frac{\pi}{\sqrt{a_K}}.$$

Однако функция $\Phi(E, K)$ постоянна и тождественно равна $2\pi/\beta$ на открытом множестве, состоящем из таких пар (E, K) , что

$$K \in (K_0 - \varepsilon_0, K_0 + \varepsilon_0), \quad E \in (E_K, E_K + \varepsilon_0),$$

откуда заключаем, что a_K пропорционально K^2 :

$$V''(r_0) + \frac{1}{2}F''(r_0)K^2 = U''_{\text{eff},K}(r_0) = a_K = K^2\beta^2F^2(r_0)$$

при любом $K \in (K_0 - \varepsilon_0, K_0 + \varepsilon_0)$. Отсюда заключаем, что $V''(r_0) = 0$ и $F''(r_0) = 2\beta^2F^2(r_0) > 0$.

В чисто бертрановом случае эти рассуждения применимы, если $0 \in \mathbb{K}_{r_0}$. Лемма доказана. $\square$

Таким образом, можно заключить, что для сильно устойчивых круговых орбит типа (а) выполнено условие 1b и никакое другое.

Лемма 5.6 (обобщение [3, лемма 1b] на случаи (чисто) бертрановых систем). *Предположим, что тройка (S, ds^2, V) является бертрановой (соответственно, чисто бертрановой), и для некоторого $r_0 \in (a, b)$ выполнено (8), так что экватор $\{r_0\} \times S^1$ является сильно устойчивой круговой орбитой с любым значением $K_0 \neq 0$. Предположим, что существует такое $r_1 \in (a, r_0)$, что $V(r_1) < V(r_0)$. Тогда $V|_{[r_0, b]} \equiv V(r_0)$ (соответственно, $\max V|_{[r_1, r_0]} > V(r_0)$).*

Доказательство. Пусть для определенности система бертранова. Фиксируем любое $r_2 \in (r_0, b)$ и предположим, что $V(r_2) \neq V(r_0)$.

Если $V(r_2) < V(r_0)$, то для всякого $K_0 \neq 0$, близкого к нулю, имеем

$$U_{\text{eff}, K_0}(r_1) < U_{\text{eff}, K_0}(r_0) > U_{\text{eff}, K_0}(r_2), \quad U''_{\text{eff}, K_0}(r_0) > 0.$$

Поэтому для уровня энергии

$$E_{K_0} := \min \left\{ \max U_{\text{eff}, K_0}|_{[r_1, r_0]}, \max U_{\text{eff}, K_0}|_{[r_0, r_2]} \right\}$$

существуют такие $a_{K_0} \in (r_1, r_0)$ и $b_{K_0} \in (r_0, r_2)$, что

$$U_{\text{eff}, K_0}|_{(a_{K_0}, b_{K_0})} < E_{K_0}, \quad U_{\text{eff}, K_0}|_{\{a_{K_0}, b_{K_0}\}} = E_{K_0}$$

и либо $U'_{\text{eff}, K_0}(a_{K_0}) = 0$, либо $U'_{\text{eff}, K_0}(b_{K_0}) = 0$. Но это противоречит условию периодичности соответствующего ограниченного решения.

Если $V(r_2) > V(r_0)$, то для уровня энергии

$$E_{K_0} := \max U_{\text{eff}, K_0}|_{[r_1, r_0]}$$

мы найдем такие a_{K_0} и b_{K_0} , что $U'_{\text{eff}, K_0}(a_{K_0}) = 0$, и так же придем к противоречию. Лемма доказана. $\square$

Следствие 5.7. *Пусть бертранова тройка (S, ds^2, V) имеет экватор $\{r_0\} \times S^1$, являющийся сильно устойчивой круговой орбитой. Тогда $F''(r_0) > 0$, и любой пояс $\hat{S} = (a', b') \times S^1 \subseteq S$, содержащий этот экватор и не содержащий других экваторов и такой, что $a', b' \in (a, b)$ и $F(a') = F(b')$, является поясом Таннери (определение 3.4), причем потенциал $V|_{\hat{S}}$ постоянен.*

Доказательство. По теореме 2.3 все бертрановы системы являются локально бертрановыми. Поэтому по лемме 5.5 имеем $F'(r_0) = V'(r_0) = V''(r_0) = 0$ и $F''(r_0) > 0$. В частности, в некоторой окрестности экватора $\{r_0\} \times S^1$ нет других экваторов, и существует пояс $\hat{S} = (a', b') \times S^1 \subseteq S$, содержащий этот экватор и не содержащий других экваторов и такой, что $a', b' \in (a, b)$ и $F(a') = F(b')$. В силу лемм 5.2 и 5.6 потенциал V постоянен по одну сторону этого экватора. Осталось показать, что потенциал $V|_{\hat{S}}$ постоянен также по другую сторону этого экватора и что пояс $\hat{S}$ является поясом Таннери.

Согласно лемме 5.1, в поясе $\hat{S}$ система является бертрановой, а метрика является слабо таннериевой (отсюда, с учетом описания слабо таннериевых метрик в теореме 3.5, пояс $\hat{S}$ является поясом Таннери). Поэтому постоянный потенциал является замыкающим в поясе $(\hat{S}, ds^2|_{\hat{S}})$. Таким образом, в поясе $(\hat{S}, ds^2|_{\hat{S}})$ имеем два замыкающих потенциала, $V|_{\hat{S}}$ и $V(r_0)$, совпадающие по одну сторону своего общего экватора $\{r_0\} \times S^1$. Следовательно, при любом $E \gg 1$ соответствующие им метрики $(E - V)ds^2|_{\hat{S}}$ и $(E - V(r_0))ds^2|_{\hat{S}}$ являются слабо таннериевыми (так как, согласно принципу Мопертюи, их геодезические совпадают с орбитами соответствующих бертрановых систем с уровнем энергии E) и совпадают по одну сторону своего общего экватора. Для любой точки $a'' \in (a', r_0)$ определим точку $b'' \in (r_0, b')$ условием $F(a'') = F(b'')$; для любого $E \gg 1$ определим вложение $m_E : [a'', b''] \rightarrow (a', b')$, близкое к отображению включения, условием

$$\frac{E - V(r_0)}{F(r)} = \frac{E - V(m_E(r))}{F(m_E(r))}.$$

Из теоремы 3.5, описывающей слабо таннериевы метрики, получаем, что при $E \gg 1$ вложение $m_E \times \text{id}_{S^1} : [a'', b''] \times S^1 \rightarrow \hat{S}$ переводит метрику

$$(E - V)ds^2 \Big|_{m_E \times \text{id}_{S^1}([a'', b''] \times S^1)}$$

в метрику

$$(E - V(r_0))ds^2 \Big|_{[a'', b''] \times S^1},$$

т.е. слабо таннериевы метрики $(E - V)ds^2|_{\hat{S}}$ и $(E - V(r_0))ds^2|_{\hat{S}}$ сопряжены в соответствующих поясах при $E \gg 1$. Согласно [3, лемма 3] имеем $V - V(r_0) = Cf'$ по другую сторону экватора $\{r_0\} \times S^1$ в $\hat{S}$, где $C = \text{const}$. Но из соотношений $V'(r_0) = 0$ и $f''(r_0) < 0$ получаем, что $C = 0$, откуда заключаем, что V и $V(r_0)$ совпадают всюду в поясе $\hat{S} \subseteq S$. $\square$

Следствие 5.8. *Предположим, что выполнены условия следствия 5.7 и пояс $\hat{S} = (a', b') \times S^1 \subseteq S$ является максимальным, т.е. не содержится ни в каком другом поясе такого вида. Тогда пояс $\hat{S}$ является шапочкой (ср. предложение 5.3), т.е. хотя бы одна из его граничных окружностей является граничной окружностью поверхности S . В частности, существует не более двух экваторов, являющихся сильно устойчивыми круговыми орбитами.*

Доказательство. Согласно следствию 5.7 метрика в поясе $\hat{S}$ является слабо таннериевой, поэтому по теореме 3.5 этот пояс является поясом Таннери. По лемме 3.7 обе параллели $\{a'\} \times S^1$ и $\{b'\} \times S^1$ не являются экваторами. Отсюда, с учетом предположения о максимальнойности пояса $\hat{S}$, получаем, что одна из граничных окружностей пояса $\hat{S}$ является граничной окружностью S . $\square$

5.3. Доказательство теоремы 2.4. *Шаг 1.* Так как по теореме 2.3 бертрановы системы являются локально бертрановыми, то существует сильно устойчивая круговая орбита.

Шаг 2. Согласно следствиям 5.7 и 5.8 количество сильно устойчивых круговых орбит типа (а) не больше двух, и каждая из них содержится в шапочке, которая является поясом Таннери и в которой потенциал V постоянен. Назовем такие шапочки *шапочками типа (а)*.

Шаг 3. Согласно следствию 5.4 сильно устойчивые круговые орбиты типа (б) образуют не более двух поясов $S_i \subset S$, причем каждый такой пояс является шапочкой, его граничная окружность $\overline{S_i} \setminus S_i =: \{r_i\} \times S^1$ является экватором конфигурационного многообразия (S, ds^2) , а тройка $(S_i, ds^2|_{S_i}, V|_{S_i})$ имеет специальный вид, указанный в этом следствии, причем знак потенциала таков, что $V(S_i) < V(r_i)$. Из явного вида метрики и потенциала в S_i следует, что на указанном экваторе $\{r_i\} \times S^1$ имеет место неравенство $f''(r_i) < 0$; поэтому к такому экватору применима лемма 5.1. Кроме того, существует окрестность $\hat{S}_i = (\hat{a}_i, \hat{b}_i) \times S^1$ шапочки S_i , не содержащая других экваторов кроме $\{r_i\} \times S^1$.

Пусть S'_i — объединение всех таких окрестностей $\hat{S}_i$. По лемме 5.1 метрика ds^2 является слабо таннериевой в поясе S'_i . Отсюда и из описания слабо таннериевых метрик в теореме 3.5 получаем, что существует пояс Таннери $S''_i \subseteq S'_i$, являющийся шапочкой в S'_i .

Но (согласно определению 3.4 пояса Таннери) в любом поясе Таннери метрика по одну сторону экватора полностью определяет метрику по другую сторону экватора; поэтому описанная выше метрика в поясе S_i полностью определяет метрику в поясе $S''_i \setminus \overline{S_i}$. Значит, пояс Таннери $(S''_i, ds^2|_{S''_i})$ изометричен поясу Таннери вполне бертрановой системы типа (i) или (iv), причем образ потенциала $V|_{S''_i}$ при этой изометрии совпадает с точностью до знака с соответствующим потенциалом типа (i) или (iv) по одну сторону экватора. Аналогично доказательству следствия 5.7 можно показать, что всюду на поясе Таннери S''_i тройка $(S''_i, ds^2|_{S''_i}, \pm V|_{S''_i})$ имеет указанный выше вид (для некоторого знака $\pm$).

Итак, шапочка S_i и пояс Таннери S''_i являются шапочками многообразия вращения $(S'_i, ds^2|_{S'_i})$, причем S''_i содержит экватор, а S'_i примыкает к этому экватору; поэтому $S_i \cap S''_i \neq \emptyset$. Кроме того, мы показали, что пояс $(S_i \cup S''_i, ds^2|_{S_i \cup S''_i})$ изометричен поясу вполне бертрановой системы

типа (i) или (iv), содержащему экватор, причем потенциал $V|_{S_i \cup S_i''}$ переходит при соответствующей изометрии в потенциал соответствующей вполне бертрановой системы с точностью до знака. Знак потенциала таков, что $V(S_i) < V(r_i)$. Возможны два случая.

Случай 1: $S_i \not\subset S_i''$. В этом случае шапочки S_i и S_i'' примыкают к разным граничным окружностям поверхности S_i' , поэтому $S_i \cup S_i'' = S_i'$. Без ограничения общности можно считать, что $S_i = (a, r_i) \times S^1$ и $S_i'' = (a'_i, b'_i)$, где $a < a'_i < r_i < b'_i$, откуда $S_i' = (a, b'_i)$ и $f(a) < f(a'_i) = f(b'_i)$.

Покажем, что $S_i' = S$, т.е. $b'_i = b$. В противном случае $\{b'_i\} \times S^1$ является экватором ввиду построения пояса S_i' . Но S_i'' — пояс Таннери, поэтому по лемме 3.7 его граничные окружности не являются экваторами, противоречие.

Итак, $S_i \cup S_i'' = S_i' = S$. Значит, система на S совпадает с описанной выше системой на $S_i \cup S_i''$. Поэтому в этом случае тройка (S, ds^2, V) имеет требуемый вид.

Случай 2: $S_i \subset S_i''$. Так как S_i является шапочкой поверхности S , то содержащий его пояс Таннери S_i'' тоже является шапочкой поверхности S ; назовем ее *шапочкой типа* (б). Как показано выше, тройка $(S_i'', ds^2|_{S_i''}, \pm V|_{S_i''})$ на шапочке S_i'' изоморфна аналогичной тройке на поясе вполне бертрановой системы типа (i) или (iv), содержащем экватор. Если шапочка S_i'' собственная, т.е. $S_i'' \subsetneq S$, то знак $\pm$ таков, что $V(S_i'') < V(\overline{S_i''} \setminus S_i'')$.

Шаг 4. Сначала предположим, что все сильно устойчивые круговые орбиты имеют тип (б), т.е. не являются экваторами, причем имеет место случай 1 из шага 3. Тогда согласно шагу 3 тройка (S, ds^2, V) имеет требуемый вид.

Теперь рассмотрим оставшийся случай, когда либо существует сильно устойчивая круговая орбита типа (а), либо все сильно устойчивые круговые орбиты имеют тип (б) и для каждого семейства таких орбит имеет место случай 2 из шага 3.

В этом случае, согласно шагам 2 и 3, общее количество всех шапочек типов (а) и (б) равно 1 или 2, причем вне этих шапочек не существует сильно устойчивых круговых орбит. Без ограничения общности можно считать, что одна из этих шапочек имеет вид $S_1 = (a, b_1) \times S^1$, а другая — вид $S_2 = (a_2, b) \times S^1$ (если второй шапочки нет, полагаем $a_2 := b$ и $S_2 := \emptyset$). Ясно, что если обе шапочки S_1 и S_2 непусты, то пояс $S_0 := (a, b) \setminus (\overline{S_1} \cup \overline{S_2})$ непуст.

Докажем требуемое свойство (а), т.е. слабую таннериевость риманова многообразия (S, ds^2) . Нужно показать, что пояс S_0 является перетяжкой. Из бертрановости системы и отсутствия сильно устойчивых круговых орбит в поясе $S_0 = (b_1, a_2) \times S^1$ получаем (см. [1, предложение 3]), что не существует таких чисел $K \neq 0$ и $x, y, z \in (b_1, a_2)$, что $x < y < z$ и $U_{\text{eff}, K}(x) > U_{\text{eff}, K}(y) < U_{\text{eff}, K}(z)$. Значит, согласно лемме 3.6 для любого $K > 0$ существует такое $r_K \in [b_1, a_2]$, что

$$U'_{\text{eff}, K}|_{(b_1, r_K)} \geq 0, \quad U'_{\text{eff}, K}|_{(r_K, a_2)} \leq 0. \quad (9)$$

Устремляя K к $+\infty$, получаем, что аналогичным свойством обладает и функция

$$F|_{(b_1, a_2)} = \lim_{K \rightarrow +\infty} \frac{2}{K^2} U_{\text{eff}, K}|_{(b_1, a_2)},$$

а именно, не существует таких чисел $x, y, z \in (b_1, a_2)$, что $x < y < z$ и $F(x) > F(y) < F(z)$. Поэтому, ввиду леммы 3.6, пояс $S_0 = (b_1, a_2) \times S^1$ является перетяжкой (определение 3.4).

Таким образом, конфигурационное многообразие (S, ds^2) состоит из (возможно, пустой) перетяжки и одного или двух поясов Таннери по разные стороны этой перетяжки, т.е. имеет строение, описанное в теореме 3.5; по этой теореме оно является слабо таннериевым.

Согласно лемме 5.2 потенциал $V = U_{\text{eff}, 0}$ обладает аналогичным свойством даже на всем многообразии S , а потому и на перетяжке S_0 . Значит, либо ограничение $V|_{(b_1, a_2)}$ монотонно, либо $V'|_{(b_1, \hat{r})} \geq 0$ и $V'|_{(\hat{r}, a_2)} \leq 0$ для некоторого $\hat{r} \in [b_1, a_2]$. Далее, согласно шагам 2 и 3 на каждой собственной шапочке типа (а) или (б) потенциал V монотонно не убывает от соответствующей граничной окружности до параллели между этой шапочкой и перетяжкой. Значит, верно свойство (b) потенциала V .

Шаг 5. Осталось доказать требуемое соотношение (с) между функциями V' и F' в перетяжке S_0 . Предположим, что существуют такие $x, y \in (b_1, a_2)$, что $x < y$ и $F'(x) < 0 < F'(y)$ (случай

$V'(x) < 0 < F'(y)$ рассматривается аналогично). Тогда $r_0 < x < y < \hat{r}$, откуда

$$F'|_{[x,y]} \leq 0 \leq V'|_{[x,y]}.$$

Покажем сначала, что функции $V'|_{[x,y]}$ и $F'|_{[x,y]}$ имеют одно и то же множество корней (которое затем обозначим через $S_{x,y}$). Пусть $z \in [x, y]$. Если $F'(z) = 0$ и $V'(z) \neq 0$, то $V'(z) > 0$ и $U'_{\text{эф},K}(z) > 0$ для любого $K \neq 0$; но $U'_{\text{эф},K}(x) < 0$ при $K \gg 1$; получаем противоречие с условием (9) ввиду неравенств $b_1 < x < z < a_2$.

Если $V'(z) = 0$ и $F'(z) \neq 0$, то $F'(z) < 0$ и $U'_{\text{эф},K}(z) < 0$ для любого $K \neq 0$; но $U'_{\text{эф},K}(y) > 0$ при $0 < K \ll 1$; получаем противоречие с условием (9) ввиду $b_1 < z < y < a_2$.

Теперь покажем, что функция $-F'/V'|_{[x,y] \setminus S_{x,y}}$ монотонно не убывает. Предположим противное. Тогда найдутся такие $\xi, \eta \in [x, y] \setminus S_{x,y}$, что

$$\xi < \eta, \quad 0 < -\frac{F'(\eta)}{V'(\eta)} < -\frac{F'(\xi)}{V'(\xi)},$$

откуда

$$0 < -\frac{V'(\xi)}{F'(\xi)} < -\frac{V'(\eta)}{F'(\eta)}.$$

Поэтому при любом

$$K \in \left(\sqrt{-2 \frac{V'(\xi)}{F'(\xi)}}, \sqrt{-2 \frac{V'(\eta)}{F'(\eta)}} \right)$$

имеем

$$U'_{\text{эф},K}(\xi) = \frac{1}{2} K^2 F'(\xi) + V'(\xi) < 0, \quad U'_{\text{эф},K}(\eta) = \frac{1}{2} K^2 F'(\eta) + V'(\eta) > 0,$$

что противоречит условию (9) ввиду неравенств $b_1 < \xi < \eta < a_2$.

Шаг 6. На предыдущих шагах мы доказали часть «только тогда» теоремы 2.4.

Осталось проверить часть «тогда», т.е. что для любой тройки (S, ds^2, V) указанного вида соответствующая натуральная механическая система является бертрановой, т.е. удовлетворяет условиям (Э) и (В) из определения 2.2(а). Условие (Э) следует из существования сильно устойчивой круговой орбиты (такая орбита существует в любой шапочке, являющейся поясом Таннери). Для доказательства условия (В) используется, во-первых, свойство (9)) эффективного потенциала в перетяжке при любом $K > 0$ и, во-вторых, следующее свойство систем на конфигурационных многообразиях типов (i) и (iv), потенциалы которых совпадают с точностью до знака с соответствующими вполне бертрановыми потенциалами указанных типов: потенциал в любом поясе Таннери такой системы возрастает от граничной окружности, к которой примыкает семейство сильно устойчивых круговых орбит, до другой граничной окружности. При этом свойство (9) доказывается от противного с помощью рассуждений на шаге 5, а указанное свойство потенциалов систем типов (i) и (iv) проверяется непосредственно.

Теорема 2.4 полностью доказана.

6. ЧИСТО БЕРТРАНОВЫ СИСТЕМЫ

Напомним, что в оригинальной работе Ж. Бертрана [5] задача была поставлена для несколько иного класса динамических систем, нежели в определении 2.2(а–е), а именно, для *чисто бертрановых* систем (см. определение 2.2(f)). Некоторые свойства таких систем (точнее, их потенциалов и сильно устойчивых круговых орбит типа (а)) мы установили в леммах 5.2, 5.5 и 5.6. Эти свойства допускают следующее усиление.

Следствие 6.1. *Для всякой чисто бертрановой системы потенциал V является нестрого монотонным. Для любого экватора $\{r_0\} \times S^1 \subset S$, являющегося сильно устойчивой круговой орбитой, выполнено (8) и $V \geq V(r_0)$; в частности, $V = V(r_0)$ по одну сторону этого экватора.*

Доказательство. Предположим, что потенциал V не является монотонным. Тогда в силу леммы 5.2 он монотонно не убывает на $(a, \hat{r}]$ и монотонно не возрастает на $[\hat{r}, b)$ для некоторого $\hat{r} \in (a, b)$. Значит, $V'(\hat{r}) = 0$ и V достигает максимума в $\hat{r}$. Согласно предположению существуют

такие числа $a' \in (a, \hat{r})$ и $b' \in (\hat{r}, b)$, что $V(a') < V(\hat{r}) > V(b')$. Фиксируем сколь угодно малое число $\varepsilon > 0$ и полагаем $E_0 := V(\hat{r}) + \varepsilon$. Фиксируем столь малое число $K_0 \in (0, \varepsilon)$, что

$$U_{\text{eff}, K_0}(a') < V(\hat{r}) > U_{\text{eff}, K_0}(b'), \quad U_{\text{eff}, K_0}(\hat{r}) < E_0.$$

Поэтому функция $U_{\text{eff}, K_0}|_{[a', b']}$ достигает максимума только во внутренних точках отрезка $[a', b]$. Рассмотрим уровень энергии $E := \max U_{\text{eff}, K_0}|_{[a', b]}$; тогда $E > V(\hat{r})$.

Так как по условию система является чисто бертрановой, то существуют такие $a_1, b_1 \in (a, b)$, что

$$a_1 < \hat{r} < b_1, \quad U_{\text{eff}, K_0}|_{(a_1, b_1)} < E, \quad U_{\text{eff}, K_0}|_{\{a_1, b_1\}} = E,$$

причем

$$U'_{\text{eff}, K_0}(a_1) < 0, \quad U'_{\text{eff}, K_0}(b_1) > 0.$$

Поэтому $a_1 \notin [a', b']$ и $b_1 \notin [a', b']$. Значит, $(a_1, b_1) \supset [a', b']$, поэтому $U_{\text{eff}, K_0}|_{[a', b]} < E$, что противоречит построению числа E . Значит, потенциал V монотонен.

Из монотонности V и леммы 5.5 получаем (8). Отсюда и из леммы 5.6 получаем $V \geq V(r_0)$. Следствие доказано. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Загрядский О. А., Кудрявцева Е. А., Федосеев Д. А. Обобщение теоремы Бертрانا на поверхности вращения // Мат. сб. — 2012. — 203, № 8. — С. 39–78.
2. Бессе А. Многообразия с замкнутыми геодезическими. — М.: Мир, 1981.
3. Кудрявцева Е. А., Федосеев Д. А. Механические системы с замкнутыми траекториями на многообразиях вращения // Мат. сб. — 2015. — 206, № 5. — С. 107–126.
4. Кудрявцева Е. А., Федосеев Д. А. О многообразиях Бертрана с экваторами // Вестн. МГУ. Сер. мат. мех. — 2016. — № 1. — С. 40–44.
5. Bertrand J. Théorème relatif au mouvement d'un point attiré vers un centre fixe // C. R. Acad. Sci. Paris. — 1873. — 77. — С. 849–853.
6. Darboux G. Étude d'une question relative au mouvement d'un point sur une surface de révolution // Bull. Soc. Math. France. — 1877. — 5. — С. 100–113.
7. Darboux G. Leçons sur la Théorie générale des Surfaces. T. 3. — Chelsea, 1972; First edition: Paris: Gauthier-Villars, Vols. 1–4 (1894–1915).
8. Liebmann H. Über die Zentralbewegung in der nichteuklidische Geometrie // Berichte der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaft. Math. Phys. Klasse. — 1903. — Bd. 55. — С. 146–153.
9. Perlick V. Bertrand spacetimes // Class. Quant. Grav. — 1992. — 9. — С. 1009–1021.
10. Santoprete M. Gravitational and harmonic oscillator potentials on surfaces of revolution // J. Math. Phys. — 2008. — 49, № 4. — С. 042903.

Е. А. Кудрявцева

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

E-mail: eakudr@mech.math.msu.su

Д. А. Федосеев

Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН, Москва

E-mail: denfedex@yandex.ru



ЛОКАЛЬНЫЕ АТТРАКТОРЫ В ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ КУРАМОТО—СИВАШИНСКОГО

© 2018 г. А. Н. КУЛИКОВ, А. В. СЕКАЦКАЯ

Аннотация. В работе рассмотрена краевая задача для обобщенного уравнения Курамото—Сивашинского с однородными краевыми условиями Неймана. Приведен анализ устойчивости пространственно однородных состояний равновесия, изучены локальные бифуркации при смене ими устойчивости. При решении задачи использован метод инвариантных многообразий в сочетании с аппаратом теории нормальных форм. Для бифурцирующих решений найдены асимптотические формулы.

Ключевые слова: краевые задачи, устойчивость, бифуркации, нормальные формы, инвариантные многообразия, асимптотические формулы.

AMS Subject Classification: 35B32, 35B41

1. Введение. Уравнение

$$u_t = -u_{xxxx} - bu_{xx} + a_1 u_x^2 + a_2 (u_x^3)_x, \quad (1)$$

где $u = u(t, x)$, $a_1, a_2, b \in \mathbb{R}$, появилось в [11, 13] в связи с приложениями к ряду физических задач. Справедливости ради следует отметить, что в монографии [11] данное уравнение было получено в случае, когда $a_2 = 0$; вариант с $a_2 \neq 0$ был получен в [13]. Более того, первоначальный вариант в [13] уравнения (1) был предложен в версии, когда $a_1 = 0$, $a_2 \neq 0$. В [11] данное уравнение появилось в связи с изучением химических колебаний как дифференциальное уравнение химической кинетики. В [13] уравнение (1) было получено как некоторое упрощение системы Навье—Стокса при некоторых дополнительных предположениях. Более того, в [13] рассматривался и иной вариант уравнения (1):

$$u_t = -u_{xxxx} - bu_{xx} - cu + a_1 u_x^2 + a_2 (u_x^3)_x, \quad (2)$$

где $c > 0$, но достаточно естественно считать, что величина c мала, если ориентироваться на физические приложения из [13].

В [3, 6] это уравнение использовалось в обобщенном виде

$$u_t = -u_{xxxx} - bu_{xx} - cu + a_1 u_x^2 + a_3 (u_x^2)_x + a_4 u_x^3 + a_2 (u_x^3)_x, \quad a_3, a_4 \in \mathbb{R}, \quad (3)$$

но уже в связи с иной областью приложений. Уравнение (3) было предложено в [6] в качестве математической модели процесса формирования неоднородного рельефа на поверхности полупроводниковых материалов. В настоящее время существует несколько обобщений для уравнения (3). К ним относится и вариант, когда u зависит от t, x, y , т.е. двух пространственных переменных (см., например, [3, 6]).

В этой работе мы ограничимся изучением уравнения (3), которое уместно назвать обобщенным уравнением Курамото—Сивашинского. Подчеркнем, что в большинстве работ уравнение (3) рассматривалось в «классическом» варианте при $a_3 = a_4 = a_2 = 0$ и $c = 0$.

Уравнение (3) принято рассматривать вместе с краевыми условиями трех следующих видов (после перенормировок; см. [7, 8, 12]):

$$u(t, x + 2\pi) = u(t, x), \quad (4)$$

т.е. с периодическими краевыми условиями, либо с краевыми условиями Неймана

$$u_x(t, 0) = u_x(t, \pi) = u_{xxx}(t, 0) = u_{xxx}(t, \pi) = 0, \quad (5)$$

либо с краевыми условиями Дирихле

$$u(t, 0) = u(t, \pi) = u_{xx}(t, 0) = u_{xx}(t, \pi) = 0. \quad (6)$$

В задачах, имеющих приложения в физике пограничных явлений, использовались краевые условия, которые отличаются от условий (4)–(6). В рамках данной статьи ограничимся изучением краевой задачи (3), (5). Напомним, что она изучалась в случае $c = a_2 = a_3 = a_4 = 0$ в [7, 8, 12], но в связи с иными математическими вопросами. В частности, в этих работах рассматривались задачи, касающиеся вопросов существования инерциальных многообразий, глобальных аттракторов и т. д. В данной работе будут рассмотрены бифуркационные задачи, которые возникают при изучении окрестности однородных состояний равновесия краевой задачи (3), (5).

2. Линеаризованный вариант краевой задачи. Рассмотрим линейную краевую задачу

$$u_t = Au, \quad (7)$$

$$u_x(t, 0) = u_x(t, \pi) = u_{xxx}(t, 0) = u_{xxx}(t, \pi) = 0, \quad (8)$$

где $A = A(b, c)$ — линейный дифференциальный оператор, определенный равенством

$$Av = -v^{(IV)} - bv'' - cv.$$

Будем считать, что функция $v(x)$ принадлежит области определения D_A линейного дифференциального оператора A , если она достаточно гладкая и удовлетворяет краевым условиям $v'(0) = v'(\pi) = v'''(0) = v'''(\pi) = 0$, т.е. краевым условиям (8).

Стандартно проверяется, что линейный дифференциальный оператор A имеет счетный набор собственных значений

$$\lambda_n = \lambda_n(b, c) = -n^4 + bn^2 - c, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

отвечающих собственным функциям $1, \cos x, \cos 2x, \dots$, образующих полную ортогональную систему функций в пространстве $L_2(0, \pi)$. Использование стандартного варианта метода Фурье приводит к тому, что решение смешанной задачи, т.е. задачи (7), (8), дополненной начальными условиями

$$u(0, x) = f(x), \quad (9)$$

может быть записано в виде

$$u(t, x) = \frac{f_0}{2} \exp(\lambda_0 t) + \sum_{n=1}^{\infty} f_n \exp(\lambda_n t) \cos(nx),$$

где $f_0, f_1, \dots$ — коэффициенты Фурье функции $f(x)$, т.е.

$$f(x) = \frac{f_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} f_n \cos(nx).$$

Подчеркнем также, что $\lambda_n \in \mathbb{R}$ при всех n . Кроме того,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = -\infty$$

при любом выборе коэффициентов линейного дифференциального оператора $A = A(b, c)$. Из этих замечаний вытекает справедливость следующего утверждения (см. также [3]).

Лемма 1 (см. [1]). *Линейный дифференциальный оператор $A = A(b, c)$ при всех b и c является производящим оператором аналитической полугруппы линейных ограниченных операторов.*

Далее ограничимся вариантом, когда $c \in [0, c_0]$, а $c_0 < 4$, т.е. вариантом, вполне естественным для физических приложений (см., например, [13], где $c \ll 1$).

Пусть $b_* = 1 + c$. Тогда, как нетрудно проверить, при $b < b_*$ для всех $n = 0, 1, 2, \dots$ выполнено неравенство $\lambda_n < 0$, если, конечно, $c > 0$. При $c = 0$ справедливы неравенства $\lambda_k < 0$, если $k = 1, 2, 3, \dots$, а $\lambda_0 = 0$. При выбранном b_* , очевидно, $\lambda_1 = 0$. Итак, если $c \in (0, c_0)$, то при $b = b_*$ получаем набор собственных значений

$$\lambda_0 = -c < 0, \quad \lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 < 0, \quad \lambda_3 < 0, \quad \dots$$

При $c = 0$ у линейного дифференциального оператора $A = A(1, 0)$ имеются собственные значения $\lambda_0 = 0$, $\lambda_1 = 0$, причем $\lambda_j < 0$ для остальных j .

Лемма 2. Пусть $b = b_* = 1 + c$, $c \in [0, c_0]$, $c_0 < 4$. Тогда справедливы следующие утверждения:

- 1) при $c \neq 0$ ($c \in (0, c_0]$) решения линейной краевой задачи (7), (8) асимптотически устойчивы, если $b < b_*$, и устойчивы, если $b = b_*$;
- 2) при $c = 0$ решения линейной краевой задачи (7), (8) устойчивы, если $b \leq b_*$;
- 3) при $b > b_*$ решения краевой задачи (7), (8) неустойчивы.

Замечание 1. При $c = 0$ решения линейной краевой задачи (7), (8) не могут быть асимптотически устойчивыми, так как в спектре устойчивости (спектре линейного дифференциального оператора A) всегда присутствует нулевое собственное значение. Этот вариант линейной краевой задачи всегда имеет семейство однородных состояний равновесия $u(t, x) = \text{const}$.

Вернемся к рассмотрению нелинейной краевой задачи (3), (5), которую дополним начальным условием (9). Если $f(x) \in \overset{\circ}{W}_2^4[0, \pi]$, то из результатов [5] вытекает, в частности, что смешанная задача (3), (5), (9) может быть интерпретирована как задача Коши для абстрактного параболического уравнения в гильбертовом пространстве $L_2(0, \pi)$, и поэтому смешанная задача (3), (5), (9) локально корректно разрешима. В частности, в фазовом пространстве (пространстве начальных условий, где $f(x) \in \overset{\circ}{W}_2^4[0, \pi]$) она порождает локальный полупоток (см. [4]). Напомним, что $f(x) \in \overset{\circ}{W}_2^4[0, \pi]$, если $f(x)$ принадлежит пространству Соболева $W_2^4[0, \pi]$ и удовлетворяет краевым условиям $f'(0) = f'(\pi) = f'''(0) = f'''(\pi) = 0$.

При $c \neq 0$ нелинейная краевая задача (3), (5) имеет нулевое состояние равновесия, которое асимптотически устойчиво, если $b < b_*$. Если же $c = 0$, то краевая задача (3), (5) имеет однопараметрическое семейство состояний равновесия $u(t, x) = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Данные состояния равновесия порождают одномерное инвариантное многообразие $u(t, x) = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$, и это инвариантное многообразие M_1 будет притягивающим (локальным аттрактором), если $b < b_*$.

Наконец, равенство $b = b_*$ ($b_* = 1$ при $c = 0$) выделяет критический случай в задаче об устойчивости состояний равновесия (нулевого состояния равновесия).

Замечание 2. При $c \in (0, c_0)$ нелинейная краевая задача (3), (5) имеет нулевое однородное состояние равновесия. При $c = 0$, как уже отмечалось, она имеет однопараметрическое семейство состояний равновесия $u(t, x) = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$. С другой стороны, при $c = 0$ нелинейная краевая задача (3), (5) инвариантна относительно замены $u(t, x) \rightarrow u(t, x) + \alpha$. Поэтому без потери общности можно считать, что далее изучается окрестность состояния равновесия $u = 0$ и в случае $c = 0$.

3. Бифуркационная задача в общем случае. В этом разделе рассмотрим нелинейную краевую задачу (3), (5) при $b = b_* + \gamma\varepsilon$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, $\varepsilon_0 \ll 1$, $\gamma = \pm 1$ (знак γ будет выбран далее). Одновременно будем считать, что $c > 0$; случай $c = 0$ следует разобрать отдельно.

Итак, при $c > 0$ ($c \in (0, c_0)$) линейный дифференциальный оператор $A(\varepsilon) = A(b_* + \gamma\varepsilon, c)$ имеет собственные значения

$$\lambda_0 = -c, \quad \lambda_1 = \gamma\varepsilon, \quad \lambda_k < 0, \quad k = 2, 3, \dots, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_k = -\infty.$$

Поэтому, в окрестности нулевого решения краевая задача (3), (5) имеет одномерное локально инвариантное многообразие $V_1(\varepsilon)$ (см. [2, 4]). Все решения этой краевой задачи с течением времени приближаются к $V_1(\varepsilon)$ со скоростью экспоненты, если $t \rightarrow \infty$. Следовательно, на $V_1(\varepsilon)$ анализ поведения решений краевой задачи (3), (5) в рамках сделанных допущений сводится к анализу одного скалярного обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка — нормальной формы

$$\dot{y}(t) = \varepsilon F(y(t), \varepsilon). \quad (10)$$

Основная трудность состоит в восстановлении вида нормальной формы (10).

Приступим к этой части построений. Отметим, что решения нелинейной краевой задачи (3), (5) можно записать в виде

$$\begin{aligned} u(t, x) &= u_0(t) + w(t, x), \\ u_0(t) &= M_0(u(t, x)) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi u(t, x) dx, \\ w(t, x) &= \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \cos(nx), \quad u_n(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi u(t, x) \cos(nx) dx. \end{aligned}$$

В частности, справедливо равенство $M_0(w) = 0$. Поэтому краевую задачу можно (и целесообразно) переписать в следующем виде:

$$\dot{u}_0 = -cu_0 + F_{02}(w) + F_{03}(w), \quad (11)$$

$$w_t = Aw + F_2(w) + F_3(w), \quad (12)$$

$$w_x(t, 0) = w_x(t, \pi) = w_{xxx}(t, 0) = w_{xxx}(t, \pi) = 0, \quad M_0(w) = 0. \quad (13)$$

В уравнениях (11), (12)

$$\begin{aligned} F_{02}(w) &= a_1 M_0(w_x^2), & F_{03}(w) &= a_4 M_0(w_x^3), \\ F_2(w) &= a_1 [w_x^2 - M_0(w_x^2)] + a_3 (w_x^2)_x, & F_3(w) &= a_4 [w_x^3 - M_0(w_x^3)] + a_2 (w_x^3)_x. \end{aligned}$$

При формировании правых частей уравнений (11), (12) учтено, что

$$1) \quad M_0((w_x^2)_x) = M_0((w_x^3)_x) = 0, \quad 2) \quad \frac{\partial}{\partial x}(w - M_0(w)) = w_x.$$

Итак, решения краевой задачи (12), (13) не зависят от $u_0(t)$: она представляет собой замкнутую краевую задачу, которая рассматривается в подпространстве $H \subset \overset{\circ}{W}_2^4[0, \pi]$, где $g(x) \in H$, если $g(x) \in \overset{\circ}{W}_2^4[0, \pi]$, и дополнительно $M_0(g(x)) = 0$. В этом подпространстве линейный дифференциальный оператор $A(\varepsilon)$ имеет собственные значения

$$\lambda_1(\varepsilon) = \gamma\varepsilon, \quad \lambda_k(\varepsilon) \leq -\gamma_0 < 0,$$

отвечающие собственным функциям $\cos x$ и $\cos kx$ соответственно ($k = 2, 3, \dots$).

Пусть $A_0 = A(0)$ и $H_1 \subset H$, где функция $h(x) \in H_1$, если $h(x) \in H$ и дополнительно

$$M_1(h(x)) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \cos x dx = 0.$$

Пусть сначала $a_3 \neq 0$ (вариант с $a_3 = 0$ будет рассмотрен отдельно). В данном случае решения, принадлежащие $V_1(\varepsilon)$, целесообразно искать в виде (см. [3])

$$w(t, x, \varepsilon) = \varepsilon w_1(x, y) + \varepsilon^2 w_2(x, y) + O(\varepsilon^3), \quad (14)$$

где $w_1(x, y) = y \cos x$, а $y = y(t)$ — решение нормальной формы (10). Подстановка суммы (14) в краевую задачу (12), (13) с последующим выделением слагаемых порядка ε^2 приводит к неоднородной краевой задаче

$$-A_0 w_2 = G(x, y), \quad (15)$$

$$w_{2x}(0, y) = w_{2x}(\pi, y) = w_{2xxx}(0, y) = w_{2xxx}(\pi, y) = 0, \quad M_0(w_2) = M_1(w_2) = 0, \quad (16)$$

где $y = y(t)$ — решение нормальной формы (10),

$$G(x, y) = -F(y, 0) \cos x + a_1 [w_{1x}^2 - M_0(w_{1x}^2)] + a_3 (w_{1x}^2)_x - \gamma w_{1xx}.$$

При анализе краевой задачи (15), (16) считаем y параметром. Данная краевая задача может иметь решения $w_2 = w_2(x, y)$, если

$$M_0(G(x, y)) = M_1(G(x, y)) = 0. \quad (17)$$

Первое из равенств (17) выполнено при любом выборе $F(y, 0)$; из второго вытекает, что

$$F(y, 0) = \gamma y + l_2 y^2, \quad l_2 = \frac{8}{3\pi} a_3.$$

Напомним, что в данный момент рассматривается случай, когда $a_3 \neq 0$. В результате нормальную форму можно записать в виде

$$\dot{y} = \varepsilon(\gamma y + l_2 y^2) + o(\varepsilon),$$

а укороченный вариант нормальной формы приобретает следующий вид:

$$\dot{y} = \varepsilon(\gamma y + l_2 y^2). \quad (18)$$

Уравнение (17) имеет два состояния равновесия

$$S_0: y = 0, \quad S_1: y = \xi = -\frac{3\pi\gamma}{8a_3}.$$

Лемма 3. *Состояние равновесия S_0 асимптотически устойчиво при $\gamma < 0$ ($\gamma = -1$) и неустойчиво при $\gamma > 0$ ($\gamma = 1$). Состояние равновесия S_1 асимптотически устойчиво при $\gamma > 0$ и неустойчиво при $\gamma < 0$.*

Негрубый случай $\gamma = 0$ при анализе нормальной формы пропускаем. Впрочем, если ограничиться рассмотрением «укороченного» варианта нормальной формы (т.е. уравнения (17)), то при $\gamma = 0$ нулевое решение неустойчиво.

Проверка утверждения стандартна и достаточно элементарна.

Из результатов [3] можно сделать заключение о справедливости утверждения.

Теорема 1. *Существует такое $\varepsilon_0 > 0$, что при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ краевая задача (15), (16) имеет неоднородное состояние равновесия S_N , соответствующее S_1 . Состояние равновесия S_N наследует устойчивость S_1 , т.е. S_N устойчиво при $\gamma > 0$ и неустойчиво при $\gamma < 0$.*

Неоднородное состояние равновесия S_N может быть представлено приближенным равенством

$$w_*(x, \varepsilon) = \varepsilon \xi \cos x + \varepsilon^2 \xi^2 \left(\frac{a_1}{6(c-4)} \cos 2x + \psi(x) \right) + o(\varepsilon).$$

Решение краевой задачи (3), (5) при $b = b_* + \gamma\varepsilon$, соответствующее решению $w_*(x, \varepsilon)$ вспомогательной краевой задачи (12), (13), имеет следующий вид:

$$u(t, x) = w_*(x, \varepsilon) + u_0(\varepsilon).$$

В двух последних формулах

$$u_0(\varepsilon) = \varepsilon^2 \xi^2 \frac{a_1}{2c} + o(\varepsilon^2), \quad \xi = -\frac{3\pi\gamma}{8a_3},$$

$$\psi(x) = -\frac{2a_3}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \psi_m \cos(2m+1)x, \quad \psi_m = \frac{1}{m(2m+3)(2m-1)(4m^3+8m^2+(5-c)m+1-c)}.$$

Замечание 3. Последняя формула для $\psi(x)$ была получена как решение вспомогательной краевой задачи

$$-A_0\psi = a_3(\sin 2x - l_2 \cos x),$$

$$\psi'(0) = \psi'(\pi) = \psi'''(0) = \psi'''(\pi) = 0, \quad M_0(\psi) = M_1(\psi) = 0.$$

В силу выбора l_2 она разрешима. Добавим, что для коэффициентов Фурье справедлива оценка

$$|\psi_m| \leq M_0 m^{-6}, \quad M_0 = \text{const} > 0.$$

Поэтому стандартным образом можно проверить, что функция $\psi(x)$ принадлежит классу $W_2^5[0, \pi]$ и, конечно, удовлетворяет краевым условиям.

Уместно отметить, что при $c \neq 0$ и $c \neq 1$ функцию $\psi(x)$ можно найти непосредственным интегрированием, и тогда

$$\psi(x) = a_3 \left(\alpha_1 \cos x + \alpha_2 \sin x + \alpha_3 \cos \sqrt{c}x + \alpha_4 \sin \sqrt{c}x + \alpha_5 \sin 2x + \alpha_6 x \sin x \right),$$

где

$$\alpha_1 = \frac{2}{\pi} \left[\frac{44 - 7c - c^2}{9(c-1)^2(4-c)} \right], \quad \alpha_2 = \frac{2}{3(c-1)}, \quad \alpha_3 = \frac{2}{\sqrt{c} \sin(\pi\sqrt{c})} \frac{1 - \cos \sqrt{c}\pi}{(c-1)(4-c)},$$

$$\alpha_4 = \frac{2}{\sqrt{c}(1-c)(4-c)}, \quad \alpha_5 = \frac{1}{3(4-c)}, \quad \alpha_6 = \frac{4}{3\pi(1-c)}.$$

4. Некоторые частные случаи в задаче о бифуркациях пространственно неоднородных решений. В этом разделе рассмотрим краевую задачу (3), (5) при $b = b_* + \gamma\varepsilon$, но в ситуации, когда $a_3 = 0$. Как и в п. 2, центральное место занимает анализ вспомогательной краевой задачи (12), (13) при $a_3 = 0$.

При таком варианте постановки задачи решения краевой задачи (12), (13) следует искать в виде суммы по степеням $\varepsilon^{1/2}$ (см., например, [3]):

$$w(t, x, \varepsilon) = \varepsilon^{1/2} w_1(x, y) + \varepsilon w_2(x, y) + \varepsilon^{3/2} w_3(x, y) + o(\varepsilon^{3/2}). \quad (19)$$

Подстановка суммы (19) в краевую задачу (12), (13) и разложение правой и левой частей по степеням $\varepsilon^{1/2}$ полученного равенства приводит к неоднородным краевым задачам для определения $w_2(x, y)$ и $w_3(x, y)$. Так, для $w_2(x, y)$ получим неоднородную краевую задачу

$$-A_0 w_2 = G_2(x, y), \quad (20)$$

$$w_{2x}(0, y) = w_{2x}(\pi, y) = w_{2xxx}(0, y) = w_{2xxx}(\pi, y) = 0, \quad M_0(w_2) = M_1(w_2) = 0, \quad (21)$$

где

$$G_2(x, y) = -\frac{a_1}{2} y^2 \cos(2x).$$

Нетрудно проверить, что $w_2(x, y) = \eta y^2 \cos 2x$ и $\eta = \frac{a_1}{6(c-4)}$.

На третьем шаге получаем аналогичную неоднородную краевую задачу для функции $w_3(x, y)$:

$$-A_0 w_3 = G_3(x, y), \quad (22)$$

$$w_{3x}(0, y) = w_{3x}(\pi, y) = w_{3xxx}(0, y) = w_{3xxx}(\pi, y) = 0, \quad M_0(w_3) = M_1(w_3) = 0, \quad (23)$$

где

$$G_3(x, y) = -F(y, 0) \cos x + 2a_1(w_{1x}w_{2x}) + a_4w_{1x}^3 + a_2(w_{1x}^3)_x.$$

Из условий её разрешимости вытекает, что «главная» часть нормальной формы (10) равна

$$F(y, 0) = \gamma y + l_3 y^3, \quad (24)$$

где

$$l_3 = -\frac{3}{4}a_2 + \frac{a_1^2}{3(c-4)}.$$

Легко убедиться, что величина l_3 (первая ляпуновская величина) может принимать значения любого знака, и даже возможна ситуация, когда $l_3 = 0$. Вариант $l_3 = 0$ исключим из рассмотрения. Итак, возможны два варианта $l_3 < 0$ (например, $a_2 = 0$) и $l_3 > 0$ (a_1 мало, $a_2 < 0$ — достаточно большая постоянная). Напомним, что $c - 4 < 0$.

Итак, нормальная форма (10) (см. также (24)), а точнее, ее «главная часть», приводит нас к анализу дифференциального уравнения

$$\dot{y} = \varepsilon(\gamma y + l_3 y^3), \quad (25)$$

у которого могут существовать ненулевые состояния равновесия.

Лемма 4. Пусть $\gamma l_3 < 0$; тогда у дифференциального уравнения (25) есть три состояния равновесия:

$$S_0: y = y_0 = 0, \quad S_1: y = y_1 = \sqrt{-\frac{\gamma}{l_3}}, \quad S_{-1}: y = y_{-1} = -\sqrt{-\frac{\gamma}{l_3}},$$

т.е. $y_{-1} = -y_1$. При $\gamma > 0$ состояние равновесия S_0 неустойчиво, а S_1 и S_{-1} устойчивы; при $\gamma < 0$ устойчиво S_0 , в то время как S_1 и S_{-1} неустойчивы.

Теорема 2. Существует такое $\varepsilon_0 > 0$, что при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ краевая задача (12), (13) (при $a_3 = 0$) имеет состояния равновесия, соответствующие состояниям равновесия S_0 , S_1 и S_{-1} .

Ненулевым состояниям равновесия S_1 , S_{-1} соответствуют состояния равновесия краевой задачи (12), (13), для которых справедливы асимптотические формулы

$$w_{\pm}(x, \varepsilon) = \varepsilon^{1/2}(\pm y_1) \cos x + \varepsilon \eta y_1^2 \cos(2x) + o(\varepsilon),$$

где $y_1 = \sqrt{-\gamma/l_3}$. Эти состояния равновесия краевой задачи (12), (13) наследуют устойчивость состояний равновесия S_1 , S_{-1} укороченного варианта нормальной формы (10), т.е. в данном случае обыкновенного дифференциального уравнения (25).

Замечание 4. Замена $x \rightarrow \pi - x$ переводит состояние равновесия $w_+(x)$ в $w_-(x)$.

Как и ранее, при $c \neq 0$ однозначно находится состояние равновесия вспомогательного уравнения, соответствующего $w_+(x)$ ($w_-(x)$):

$$u_+(x, \varepsilon) = u_0(\varepsilon) + w_+(x, \varepsilon),$$

где в данном случае $u_0(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{2} a_1 y_1^2 + o(\varepsilon)$. Аналогичная формула может быть выписана и для $u_-(x, \varepsilon)$. Подчеркнем, что состояния равновесия существуют, если $\gamma l_3 < 0$, и устойчивы при $\gamma > 0$, т.е. неоднородные устойчивые состояния равновесия появляются при потере устойчивости нулевым решением.

Наконец, исключительный вариант возникает, если $c = 0$. Пусть теперь найдено состояние равновесия $w(x, \varepsilon)$ вспомогательной краевой задачи (12), (13). Если при этом $a_3 \neq 0$, то

$$w = w_1(x, \varepsilon) = \varepsilon \xi \cos x + \varepsilon^2 \xi^2 \left(\frac{a_1}{6(c-4)} \cos 2x + \psi(x) \right) + o(\varepsilon^2),$$

где $\xi = -\frac{3\pi\gamma}{8a_3}$, а функция $\psi(x)$ была указана ранее (см. замечание 3).

Если $a_3 = 0$, то

$$w = w_2(x, \varepsilon) = \varepsilon^{1/2} \sqrt{-\frac{\gamma}{l_3}} \cos x + \varepsilon \left(-\frac{\gamma}{l_3} \right) \frac{a_1}{6(c-4)} \cos 2x + o(\varepsilon).$$

Следовательно,

$$u_0(t) = \beta t + \beta_0,$$

где $\beta_0 \in \mathbb{R}$, $\beta = \beta(\varepsilon) = a_1 M_0(w_{jx}^2) + a_4 M_0(w_{jx}^3)$. В результате получаем не состояние равновесия, а решения вида

$$u(t, x, \varepsilon) = \beta_j(\varepsilon)t + \beta_0 + w_j(x, \varepsilon), \quad j = 1, 2. \quad (26)$$

Индекс j соответствует варианту выбора коэффициентов уравнения (3). Если $a_3 \neq 0$, то в формуле (26) индекс j принимает значение, равное 1. При $a_3 = 0$ следует положить $j = 2$.

Если $j = 1$ ($a_3 \neq 0$), то для $\beta(\varepsilon)$ получаем асимптотическую формулу

$$\beta(\varepsilon) = \beta_1(\varepsilon) = \left[\frac{9\varepsilon^2 \pi^2}{128 a_3^2} a_1 + o(\varepsilon^2) \right], \quad \gamma^2 = 1.$$

При $j = 2$ ($a_3 = 0$) формула для $\beta(\varepsilon)$, конечно, изменится. Тогда

$$\beta(\varepsilon) = \beta_2(\varepsilon) = -\frac{\varepsilon \gamma}{2l_3} a_1 + o(\varepsilon).$$

5. Заключение. В работе были исследованы различные варианты краевой задачи (3), (5). Показано, что при $c \neq 0$ у нее возникают (точнее, могут появиться) пространственно неоднородные состояния равновесия, в том числе устойчивые. Они бифурцируют из нулевого состояния равновесия при смене им устойчивости. При $c = 0$ от состояний равновесия $u = \text{const}$ ответвляются пространственно неоднородные решения, которые линейно зависят от t . Их можно назвать «состояниями равновесия второго рода», так как они задаются таким решением $u(t, x)$ краевой задачи, что $\partial u / \partial x$ не зависит от t , а $\partial u / \partial t$ — от x . С точки зрения приложений к физике (например, нанoeлектронике) наибольший интерес для приложений представляют именно пространственно

неоднородные решения. Они описывают неоднородный рельеф на поверхности полупроводников под воздействием ионной бомбардировки.

Условия, при которых появляются пространственно неоднородные решения и, конечно, их структура зависит от выбора краевых условий. В [3,9,10] уравнение (3) было рассмотрено вместе с иными вариантами краевых условий. В [10] рассматривалась несколько иная модификация уравнения Курамото—Сивашинского вместе с периодическими краевыми условиями. В частности, в [10] была отмечена возможность появления двумерного локального аттрактора, заполненного периодическими решениями. При этом все эти периодические решения неустойчивы в смысле классического определения А. М. Ляпунова. Их период зависит от начальных условий.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Крейн С. Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. — М.: Наука, 1977.
2. Куликов А. Н. О гладких инвариантных многообразиях полугруппы нелинейных операторов в банаховом пространстве // Иссл. по устойчивости и теории колебаний. — Ярославль: ЯрГУ, 1976. — С. 114–129.
3. Куликов А. Н., Куликов Д. А. Формирование волнообразных наноструктур на поверхности плоских подложек при ионной бомбардировке // Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 2012. — 52, № 5. — С. 930–945.
4. Марсден Дж., Мак-Кракен М. Бифуркация рождения цикла и ее приложения. — М.: Наука, 1980.
5. Соболевский П. Е. Об уравнениях параболического типа в банаховом пространстве // Тр. Моск. мат. о-ва. — 1967. — 10. — С. 297–350.
6. Bradley R. M., Harper J. M. E. Theory of ripple topography induced by ion bombardment // J. Vac. Sci. Technol. A. — 1988. — 6, № 4. — С. 2390–2395.
7. Foias C., Nicolaenko B., Sell G. R., Temam R. Inertial manifolds for the Kuramoto–Sivashinsky equation and an estimate of their lowest dimension. // J. Math. Pures Appl. — 1988. — 67. — С. 197–226.
8. Foias C., Titi E. C. Determining nodes, finite difference schemes and inertial manifolds // Nonlinearity. — 1991. — 4, № 1. — С. 135–153.
9. Kulikov A. N., Kulikov D. A. Bifurcations in a boundary-value problem of nanoelectronics // J. Math. Sci. — 2015. — 208, № 2. — С. 211–221.
10. Kulikov A. N., Kulikov D. A. Bifurcations in Kuramoto–Sivashinsky equation // Pliska Stud. Math. — 2015. — 25. — С. 101–110.
11. Kuramoto Y. Chemical oscillations, waves and turbulence. — Berlin: Springer-Verlag, 1984.
12. Nicolaenko B., Scheurer B., Temam R. Some global dynamical properties of the Kuramoto–Sivashinsky equations: Nonlinear stability and attractors // Phys. D. — 1985. — 16, № 2. — С. 155–183.
13. Sivashinsky I. Weak turbulence in periodic flow // Phys. D. — 1985. — 17, № 2. — С. 243–255.

А. Н. Куликов

Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова

E-mail: anat_kulikov@mail.ru

А. В. Секацкая

Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова

E-mail: alinastart@mail.ru



БИФУРКАЦИИ ПРОСТРАНСТВЕННО НЕОДНОРОДНЫХ РЕШЕНИЙ В ДВУХ ВЕРСИЯХ НЕЛОКАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ЭРОЗИИ

© 2018 г. А. М. КОВАЛЕВА, Д. А. КУЛИКОВ

Аннотация. Рассмотрена периодическая краевая задача для двух версий нелокального уравнения эрозии. Это уравнение входит в класс дифференциальных уравнений с частными производными с отклоняющимся пространственным аргументом. Для периодической краевой задачи изучен вопрос о бифуркациях пространственно неоднородных решений. Для изучения поставленной задачи использованы метод интегральных многообразий и нормальных форм.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения с частными производными с отклоняющимся аргументом, периодическая краевая задача, устойчивость, бифуркации, асимптотические формулы.

AMS Subject Classification: 34K18, 34K19

1. Введение. В работе будут рассмотрены две версии нелокального уравнения эрозии (см. [8, 9]) в случае, когда пространственное отклонение достаточно мало. Основная версия такого уравнения имеет следующий вид:

$$u_t = du_{xx} + hcw_x + hb_1w_x^2 + hb_2w_x^3, \quad (1)$$

где $u = u(t, x)$, $w = u(t, x + h)$, $h, c, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$, $|h| \ll 1$. Будем считать, что $h \neq 0$, $b_1^2 + b_2^2 \neq 0$. Величина $d > 0$ имеет смысл коэффициента диффузии.

Уравнение (1) было предложено в качестве математической модели процесса формирования неоднородного рельефа на поверхности полупроводников под воздействием потока ионов. В настоящее время этот процесс обработки поверхностей достаточно актуален в связи с запросами нанoeлектроники. Уравнение (1) уже приведено в нормированном виде, т.е. d — нормированный коэффициент диффузии, c — нормированная энергия потока ионов, и в дальнейшем эти два коэффициента играют роль основных параметров задачи. Естественно, что «управляемым» параметром задачи можно считать c .

В настоящее время более известна иная математическая модель упомянутого выше технологического процесса, которая в качестве уравнения использует обобщенное уравнение Курамото—Сивашинского (см. [5, 11]). В нем используется слагаемое с четвертой производной по пространственной переменной, которое отвечает за «поверхностную» диффузию, что отличает от варианта уравнения (1), где учтена «объемная» диффузия. Применительно к рассматриваемой в этой работе модели это приводит к замене уравнения (1) на следующее:

$$u_t = -au_{xxxx} + hcw_x + hb_1w_x^2 + hb_2w_x^3, \quad (2)$$

где слагаемое $-au_{xxxx}$ отвечает именно за эффект пространственной диффузии ($a > 0$).

Оба уравнения будем рассматривать с периодическими краевыми условиями, которые с учетом нормировок можно записать в следующем виде:

$$u(t, x + 2\pi) = u(t, x). \quad (3)$$

Отметим некоторые общие свойства, характерные для краевых задач (1), (3) и (2), (3):

- 1) обе краевые задачи имеют семейство состояний равновесия $u(t, x) = \alpha$;
- 2) обе краевые задачи инвариантны относительно замен $u(t, x) \rightarrow u(t, x) + \alpha$.

Эти два замечания дают основание считать, что изучаемое однородное состояние равновесия может быть задано уравнением $u = 0$. В работе для обеих краевых задач будут изучены два следующих вопроса:

- 1) об устойчивости однородных состояний равновесия;
- 2) о возможных локальных бифуркациях в окрестности однородных состояний равновесия.

В частности, особое значение для приложений играет вопрос о бифуркациях пространственно неоднородных решений, т.е. тех решений, для которых $\partial u / \partial x \neq 0$.

Основной текст работы разделен на две части. В разделе 2 будет рассмотрена краевая задача (1), (3), а в разделе 3 — краевая задача (2), (3). Следует отметить, что краевая задача (1), (2) уже частично рассматривалась в [1, 6, 9].

2. Первый вариант краевой задачи. В этом разделе рассмотрим краевую задачу (1), (3). Подчеркнем, что она имеет одномерное инвариантное многообразие $M_1 : u(t, x) = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

2.1. Об устойчивости однородных состояний равновесия. В этом разделе и далее речь идет об устойчивости в смысле классического определения А. М. Ляпунова в норме фазового пространства решений соответствующей краевой задачи (пространства начальных условий в иной терминологии).

Пусть

$$u(0, x) = f(x) \in H_2^2, \quad (4)$$

где H_2^p — пространство 2π -периодических функций, у которых обобщенные производные до порядка p включительно интегрируемы с квадратом на отрезке длины периода: $f^{(k)}(x) \in L_2(0, 2\pi)$.

Из результатов работы [10] вытекает, что смешанная задача (1), (3), (4) локально корректно разрешима. Ее решения порождают гладкий локальный полупоток в фазовом пространстве H_2^2 .

Рассмотрим линеаризованную краевую задачу

$$u_t = Au, \quad (5)$$

$$u(t, x + 2\pi) = u(t, x). \quad (6)$$

Линейный дифференциальный оператор $A = A(a, c, h)$ определен на достаточно гладких функциях $v(x)$ ($v(x + 2\pi) = v(x)$) равенством

$$Av(x) = dv''(x) + hcv(x + h). \quad (7)$$

Оператор A имеет счетный набор собственных значений

$$\lambda_n = \tau_n + i\sigma_n, \quad \tau_n = -dn^2 - cnh \sin(nh), \quad \sigma_n = cnh \cos(nh);$$

соответствующие собственные функции суть $e_n(x) = \exp(inx)$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Отметим, что оператор A в пространстве H_2^0 (напомним, что функция $f(x)$ лежит в классе H_2^0 , если она периодическая и $f(x) \in L_2(0, 2\pi)$) порождает аналитическую полугруппу линейных ограниченных операторов (см. [2]), так как собственные функции данного оператора образуют полную ортогональную систему, спектр которой дискретен и, кроме того, для достаточно больших $|n|$ справедливо неравенства

$$-\frac{3d}{2}n^2 < \tau_n < -\frac{d}{2}n^2, \quad |\sigma_n| \leq M|n|, \quad M \in \mathbb{R}_+.$$

Элементарная проверка показывает, что $\lambda_0 = 0$ при любом выборе a, c, h . Поэтому в нашем случае решения линейной краевой задачи (5), (6) будут устойчивы, если $\operatorname{Re} \lambda_n \leq 0$. При наличии λ_k , для которого $\operatorname{Re} \lambda_k > 0$, решения краевой задачи (5), (6) неустойчивы. Подчеркнем, что при достаточно больших d справедливо неравенства $\tau_n \leq -\gamma < 0$ при всех $n \neq 0$, $\gamma \in \mathbb{R}_+$.

Приведем условия на выбор коэффициентов d, c, h , для которых неравенство $\tau_n \leq 0$ выполняется при всех $n \in \mathbb{N}$ и существует такое $m \in \mathbb{N}$, что $\tau_m = \tau_{-m} = 0$. Особый интерес, естественно, представляет выбор наибольшего d , при котором имеет место описанная ситуация. Найдем соответствующее значение $d_* = d(c, h, m) = d_*(m)$, т.е. такое m и соответствующее ему $d_* > 0$, при которых реализуется равенство

$$-dm^2 - cmh \sin(mh) = 0, \quad \text{но} \quad -dk^2 - ckh \sin(kh) \leq 0, \quad k \neq \pm m, \quad k \neq 0.$$

Следовательно, подходящим значением является

$$d_* = d_*(m) = h^2 c \max_{n \in N} \varphi_n, \quad \varphi_n = -\frac{\sin \kappa_n}{\kappa_n}, \quad \kappa_n = nh. \quad (8)$$

При нахождении $\max \varphi_n$ можно ограничиться натуральным n , так как $\varphi_{-n} = \varphi_n$.

Рассмотрим вспомогательную функцию $\varphi(y) = -\sin y/y$ при $y \geq 1$. Стандартный анализ показывает, что в этой области функция $\varphi(y)$ достигает наибольшего значения при $y = y_1$, где y_1 — первый положительный корень уравнения $\operatorname{tg} y = y$; отметим, что $y_1 \approx 4,49$. При малых h можно утверждать, что последовательность φ_n достигает наибольшего значения при номере m , который может быть выбран следующим образом:

$$m = m_1 = \left[\frac{y_1}{h} \right] \quad \text{или} \quad m = m_2 = \left[\frac{y_1}{h} \right] + 1, \\ d_* = -h^2 c \frac{\sin(mh)}{mh} \approx -h^2 c \frac{\sin y_1}{y_1} \approx 2,17 \cdot 10^{-1} h^2 c,$$

где скобки $[]$ обозначают целую часть числа.

Особый случай, когда $\varphi_{m_1} = \varphi_{m_2}$, далее рассматривать не будем. При дальнейших построениях номер m будем считать выбранным.

Итак, справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. При $d \geq d_*$ решения линейной краевой задачи (5), (6) устойчивы, при $0 < d < d_*$ — неустойчивы. При $d = d_*$ линейная краевая задача (5), (6) имеет два линейно независимых t периодических решений

$$q(t, x) = \exp(i\sigma_m t + imx), \quad \bar{q}(t, x) = \exp(-i\sigma_m t - imx),$$

где $\sigma_m = cmh \cos(mh)$.

2.2. Бифуркации пространственно неоднородных решений. В этом разделе покажем, что при $d = d_*(1 - \gamma\varepsilon)$, где $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ и $\gamma = \pm 1$, в окрестности нулевого состояния равновесия (в окрестности однородного состояния равновесия $u(t, x) = \alpha$, $\alpha = \text{const}$) могут появиться пространственно неоднородные решения, т.е. решения, для которых $\partial u / \partial x \neq 0$, которые устойчивы в смысле определения А. М. Ляпунова и, следовательно, физически реализуемы. Такие решения описывают пространственно неоднородный (волновой) рельеф.

При $d = d_*(1 - \gamma\varepsilon)$ три собственных значения оператора $A(\varepsilon)$ лежат вблизи мнимой оси:

$$\lambda_0 = 0, \quad \lambda_{m, -m}(\varepsilon) = \gamma d_* m^2 \varepsilon \pm i\sigma_m, \quad m \in N,$$

т.е. $\lambda_{m, -m}(0) = \pm i\sigma_m$. Остальные его собственные значения $\lambda_k(\varepsilon)$ при достаточно малых ε лежат в полуплоскости комплексной плоскости, выделяемой неравенством $\operatorname{Re} \lambda_k(\varepsilon) \leq -\gamma_0(h) < 0$, где постоянная $\gamma_0(h)$ зависит от выбора h , но не зависит от ε ($k \neq 0, \pm m$). При таком расположении собственных значений оператора $A(\varepsilon)u = d(1 - \gamma\varepsilon)u_{xx} + h c w_x$ в окрестности нулевого решения существует трехмерное инвариантное многообразие $M_3(\varepsilon)$ (см. [3, 4]). Из результатов работ [3, 4] вытекает, что на инвариантном многообразии $M_3(\varepsilon)$ решения краевой задачи (1), (3) при $d = d_*(1 - \gamma\varepsilon)$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, удовлетворяют трехмерной системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\psi' = F_0(\rho, \varphi, \varepsilon), \quad \rho' = F_1(\rho, \varphi, \varepsilon), \quad \varphi' = F_2(\rho, \varphi, \varepsilon), \quad (9)$$

которую принято называть *нормальной формой*. В системе (9) $\psi = \psi(s)$, $\rho = \rho(s)$, $\varphi = \varphi(s)$, $s = \varepsilon t$ — медленное время. Достаточно гладкие функции F_0, F_1, F_2 не зависят от ψ , что является следствием инвариантности изучаемой краевой задачи относительно преобразования $u(t, x) \rightarrow u(t, x) + \alpha$. Наконец, штрихом обозначена производная по s .

Эти замечания общего порядка следует дополнить построениями, реализация которых позволит определить конкретный вид правых частей нормальной формы (9).

Решения на инвариантном многообразии $M_3(\varepsilon)$ будем искать в виде (см. [1, 5, 6, 9])

$$u(t, x, \varepsilon) = \psi(s) + \varepsilon^{1/2} u_1(t, x, s) + \varepsilon u_2(t, x, s) + \varepsilon^{3/2} u_3(t, x, s) + O(\varepsilon^2), \quad (10)$$

где $s = \varepsilon t$, а достаточно гладкие по совокупности переменных функции $u_j(t, x, s)$, $j = 1, 2, 3$, дополнительно обладают следующими свойствами:

- 1) по переменной t они имеют период $2\pi/\sigma_m$;
- 2) при фиксированных t и s они как функции x принадлежат пространству H_2^2 ;
- 3) имеют место равенства

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u_j(t, x, s) dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u_j(t, x, s) \exp(\pm imx) dx = 0, \quad j = 2, 3.$$

Будем априори считать, что

$$u_1(t, x, s) = z(s) \exp(i\sigma_m t + imx) + \bar{z}(s) \exp(-i\sigma_m t - imx). \quad (11)$$

Возможность выбора уравнения на инвариантном многообразии $M_3(\varepsilon)$ в виде (10) обсуждалось во многих работах (см., например, [1, 5, 6]) и, в частности, базируется на предварительной гипотезе, что первая ляпуновская величина отлична от нуля. Более конкретные пояснения приведем после реализации алгоритма построения дифференциального уравнения на инвариантном многообразии, т.е. в иной терминологии нормальной формы.

Подставим сумму (10) в краевую задачу (1), (3) при $d = d_*(1 - \gamma\varepsilon)$ и приравняем члены полученного равенства при степенях $\varepsilon^{1/2}$, ε , $\varepsilon^{3/2}$. При $\varepsilon^{1/2}$ получаем однородное линейное уравнение

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = A_0 u_1, \quad A_0 u_1 = d_* u_{1xx} + h c w_{1x}, \quad (12)$$

которое имеет в качестве периодического решения по переменной x именно ранее выбранную функцию $u_1(t, x, s)$, т.е. (11). Через $\partial u_1 / \partial t$ обозначена частная производная функции $u_1(t, x, s)$ и, следовательно, здесь

$$u_t = \frac{\partial u_1}{\partial t} + \frac{\partial u_1}{\partial s} \varepsilon.$$

Для функций $u_2(t, x, s)$, $u_3(t, x, s)$ получаем уже неоднородные краевые задачи

$$\psi'(s) + \frac{\partial u_2}{\partial t} = A_0 u_2 + b_1 h(w_{1x})^2, \quad (13)$$

$$u_2(t, x + 2\pi, s) = u_2(t, x, s), \quad (14)$$

а также

$$z'(s) \exp(i\sigma_m t + imx) + \bar{z}'(s) \exp(-i\sigma_m t - imx) + \frac{\partial u_3}{\partial t} = A_0 u_3 + 2b_1 h w_{1x} w_{2x} + b_2 h(w_{1x})^3 - d_* \gamma u_{1xx}, \quad (15)$$

$$u_3(t, x + 2\pi, s) = u_3(t, x, s). \quad (16)$$

В равенствах (13)–(16) использовано обозначение $w_j(t, x, s) = u_j(t, x + h, s)$. При анализе краевых задач (13), (14) и (15), (16) считаем s и функции $z(s)$, $\psi(s)$ параметрами.

Напомним также, что неоднородная краевая задача

$$y_t = A_0 y + g(t, x), \quad y(t, x + 2\pi) = y(t, x),$$

где $g(t, x)$ — гладкая функция, для которой справедливы тождества

$$g(t, x + 2\pi) = g(t, x), \quad g\left(t + \frac{2\pi}{\sigma_m}, x\right) = g(t, x),$$

имеет периодическое решение $y(t, x)$ по переменной t с периодом $2\pi/\sigma_m$, если выполнены условия разрешимости

$$M_0(g) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi g(t, x) dx = 0, \quad M_{\pm m}(g) = \frac{\sigma_m}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi/\sigma_m} \int_0^{2\pi} g(t, x) \exp(\pm i\sigma_m t \pm imx) dx dt = 0.$$

Равенства $M_0(g) = M_{\pm m}(g) = 0$ выделяют одно подходящее решение.

Применение условий разрешимости к краевой задаче (13), (14) показывает, что должно быть выполнено равенство

$$\psi' = l_0 |z|^2, \quad (17)$$

где $l_0 = 2b_1 h m^2$. Сразу подчеркнем, что действительную постоянную l_0 можно записать иначе:

$$l_0 \approx \frac{2b_1 y_1^2}{h} \approx 40,32 \frac{b_1}{h}, \quad mh \approx y_1.$$

После такого выбора постоянной l_0 нетрудно выписать решение краевой задачи (13), (14) с необходимыми для него свойствами:

$$u_2(t, x, s) = \eta z^2 \exp(2i\sigma_m t + 2imx) + \overline{\eta} \overline{z}^2 \exp(-2i\sigma_m t - 2imx),$$

$$\eta = -\frac{b_1 m \exp(2imh)}{2c(p_1 + ip_2)}, \quad p_1 = \sin(2mh) - 2\sin(mh), \quad p_2 = \cos(mh) - \cos(2mh).$$

Если воспользоваться приближенным равенством $mh \approx y_1$, то формулы для η , p_1 , p_2 можно записать в приближенном виде:

$$p_1 = 2,38, \quad p_2 = 0,68, \quad \exp(2imh) = -0,9 + i0,43, \quad \eta = \frac{b_1}{hc}(0,68 - i0,6).$$

Подчеркнем также, что постоянные l_0 , η пропорциональны h^{-1} .

Применение условий разрешимости к краевой задаче (15), (16) приводит к дифференциальному уравнению для $z = z(s)$:

$$z' = \delta_m z + (l_1 + il_2)z|z|^2, \quad (18)$$

где $\delta_m = d_* \gamma m^2$,

$$l_1 = m^3 h \left[-3b_2 \sin(mh) - \frac{2b_1^2}{c(p_1^2 + p_2^2)} (p_1 \cos(3mh) + p_2 \sin(3mh)) \right],$$

$$l_2 = m^3 h \left[3b_2 \cos(mh) - \frac{2b_1^2}{c(p_1^2 + p_2^2)} (p_1 \sin(3mh) - p_2 \cos(3mh)) \right].$$

Для δ_m , l_1 и l_2 можно указать приближенные формулы ($y_1 \approx mh$)

$$\delta_m \approx 4,38c\gamma, \quad l_1 \approx \frac{1}{h^2} \left[264,87b_2 - 59,29 \frac{b_1^2}{c} \right], \quad l_2 \approx -\frac{1}{h^2} \left[59,89b_2 + 42,71 \frac{2b_1^2}{c} \right]. \quad (19)$$

Конкретный вид для l_1 позволяет заключить, что величина l_1 меняет знак. Например, если $b_2 \approx 0$, то первая ляпуновская величина $l_1 < 0$ и, напротив, при малых b_1 и положительных b_2 имеем неравенство $l_1 > 0$.

Преобразуем нормальную форму (17), (18), положив для этого $z(s) = \rho(s) \exp(i\varphi(s))$, $\rho(s) \geq 0$. В результате уравнение (18) для комплекснозначной функции $z(s)$ заменяется на два действительных уравнения

$$\psi' = l_0 \rho^2, \quad \varphi' = l_2 \rho^2, \quad (20)$$

$$\rho' = \delta_m \rho + l_1 \rho^3. \quad (21)$$

Особую роль при анализе нормальной формы (20), (21) играет уравнение (21) для амплитуды.

Лемма 1. Пусть $\gamma > 0$ и $l_1 < 0$. Тогда дифференциальное уравнение (21) имеет асимптотически устойчивое состояние равновесия $S_0 : \rho_0 = \sqrt{-\delta_m/l_1}$. Если $\gamma < 0$ и $l_1 > 0$, то состояние равновесия S_0 также существует, но оно неустойчиво.

Состоянию равновесия S_0 дифференциального уравнения (21) соответствует следующее решение S_0 системы дифференциальных уравнений (17), (18):

$$\psi(s) = (l_0 \rho_0^2) s + \psi_0, \quad \varphi(s) = (l_2 \rho_0^2) s + \varphi_0, \quad \rho = \rho_0 = \sqrt{-\delta_m/l_1}, \quad \varphi_0, \psi_0 \in \mathbb{R}. \quad (22)$$

Как и в [1, 5, 6] из результатов анализа нормальной формы вытекает справедливость следующего утверждения.

Теорема 2. *Существует такое $\varepsilon_0 > 0$, что при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ и $d = d_*(1 - \gamma\varepsilon)$ нелинейная краевая задача (1), (3) имеет двумерное инвариантное многообразие $M_2(\varepsilon)$ ($M_2(\varepsilon) \subset M_3(\varepsilon)$), соответствующее семейству решений (18) нормальной формы. Инвариантное многообразие будет притягивающим, если состояние равновесия S_0 асимптотически устойчиво; напротив, $M_2(\varepsilon)$ неустойчиво, если неустойчиво S_0 . Для решений на инвариантном многообразии $M_2(\varepsilon)$ справедлива асимптотическая формула*

$$u(t, x, \varepsilon) = \left[\omega_0 \varepsilon + o(\varepsilon) \right] t + v(t, x, \varepsilon) + \psi_0, \quad (23)$$

где, в свою очередь, $\omega_0 = l_0 \rho_0^2$,

$$v(t, x, \varepsilon) = \varepsilon^{1/2} \rho_0 (q + \bar{q}) + \varepsilon \rho_0^2 (\eta q^2 + \bar{\eta} \bar{q}^2) + o(\varepsilon), \quad q = \exp \left(i(\sigma_m + \varepsilon \omega_1) t + i m x + i \varphi_0 \right). \quad (24)$$

Здесь $\psi_0, \varphi_0 \in \mathbb{R}$, а остальные постоянные были указаны ранее ($\omega_1 = l_2 \rho_0^2$).

3. Нелокальное уравнение эрозии с учетом поверхностной диффузии. В этом разделе рассмотрим краевую задачу (2), (3). Для нее изучим тот же круг вопросов, которые были затронуты в разделе 2 для краевой задачи (1), (3). Краевые задачи (1), (3) и (2), (3) имеют много общего, и поэтому изложение здесь будет более сжатым. Основное внимание будет уделено тем моментам анализа устойчивости состояний равновесия и соответствующих бифуркационных задач, которые разнятся.

При рассмотрении краевой задачи (2), (3) фазовым пространством ее решений естественно и целесообразно считать H_2^4 . Добавим, что оператор A из раздела 2 здесь заменяется на линейный оператор четвертого порядка $Bv(x) = -av^{(IV)}(x) + hcv(x)$, $B = B(a, c, h)$. Аналогичная проверка показывает, что в пространстве 2π -периодических функций $v(x) \in L_2(0, 2\pi)$ он порождает аналитическую полугруппу линейных ограниченных операторов. Спектр оператора B состоит из счетного множества собственных значений

$$\lambda_n = \tau_n + i\sigma_n, \quad \tau_n = -an^4 - cnh \sin(nh), \quad \sigma_n = cnh \cos(nh), \quad (25)$$

которым отвечают собственные функции $e_n(x) = \exp(inx)$, $n = 0, \pm 1, \dots$. Как и ранее (см. раздел 2), при больших n справедливы неравенства

$$-\frac{3a}{2}n^4 < \tau_n < -\frac{a}{2}n^4, \quad |\sigma_n| \leq M|n|, \quad M \in \mathbb{R}_+. \quad (26)$$

3.1. Линеаризованная краевая задача. Рассмотрим линеаризованный вариант краевой задачи (2), (3), т.е.

$$u_t = Bu, \quad u(t, x + 2\pi) = u(t, x). \quad (27)$$

Анализ устойчивости ее решений приводит к необходимости изучения расположения спектра оператора B . При этом, как и ранее, $\lambda_0 = 0$, а остальные точки спектра этого оператора лежат в левой полуплоскости комплексной плоскости, если при $n \neq 0$ выполнены неравенства

$$\tau_n = -an^4 - cnh \sin(nh) < 0. \quad (28)$$

Критическое значение $a = a_*$, очевидно, следует выбирать аналогичным образом, как и в разделе 2:

$$a_* = ch^4 \max_{n \in N} \{g_n\}, \quad g_n = -\frac{\sin \kappa_n}{\kappa_n^3}, \quad \kappa_n \approx nh. \quad (29)$$

Последовательность g_n достигает наибольшего значения при $n = m$, где при достаточно малом h

$$m = \left[\frac{y_1}{h} \right] \quad \text{или} \quad m = \left[\frac{y_1}{h} \right] + 1.$$

В данном случае y_1 — точка максимума вспомогательной функции $g(y) = -\sin y/y^3$ при $y \geq 1$. Из анализа неравенства (28) вытекает, что y_1 следует искать как наименьший корень уравнения

$$3 \operatorname{tg} y = y, \quad y \geq 1; \quad (30)$$

его приближенное значение $y_1 \approx 4,08$. Подчеркнем, что, как и в разделе 2, величину m далее можно считать выбранной и при этом $m \in N$ — достаточно большое число, если величина h ,

в свою очередь, достаточно мала. В данном случае критическое значение $a_* \approx 1,18 \cdot 10^{-2} h^4 c$ определяется с использованием формул (29), где $mh \approx y_1$.

Замечание 1. Вопрос об устойчивости решений линейной краевой задачи (27) решается аналогичным образом, как и в разделе 2 для краевой задачи (5), (6). Отличие в формулировках состоит в замене d_* на a_* .

Пусть теперь $a = a_*(1 - \gamma\varepsilon)$. При таком выборе a у оператора

$$B(\varepsilon)v = -a_*(1 - \gamma\varepsilon)v^{(IV)}(x) + hcv'(x + h) \quad (31)$$

появятся три собственных значения, лежащих вблизи мнимой оси:

$$\lambda_0 = 0, \quad \lambda_{m,-m}(\varepsilon) = a_* m^4 \gamma \varepsilon \pm i\sigma_m,$$

которым соответствуют собственные функции 1 , $\exp(imx)$, $\exp(-imx)$. Остальные собственные значения $\lambda_k(\varepsilon) \neq \lambda_0$, $\lambda_{m,-m}(\varepsilon)$ лежат в полуплоскости, выделенной неравенством $\operatorname{Re} \lambda_k(\varepsilon) \leq -\gamma_0 < 0$, где γ_0 — положительная постоянная. Она не зависит от ε , но, безусловно, зависит от h .

В следующем разделе будем предполагать, что m и h выбрано так, что не реализуется равенство $\tau_m = \tau_{m+1}$, т.е.

$$(m+1) \sin(m+1)h \neq m \sin mh.$$

Тем самым предполагаем, что на мнимой оси нет при $\varepsilon = 0$ двух пар чисто мнимых собственных значений. Иными словами, при $\varepsilon = 0$ находятся только три собственных значения

$$\lambda_0 = 0, \quad \lambda_{m,-m} = \pm i\sigma_m.$$

3.2. Бифуркационная задача. Рассмотрим краевую задачу

$$u_t = -a_*(1 - \gamma\varepsilon)u_{xxxx} + chw_x + b_1hw_x^2 + b_2hw_x^3, \quad (32)$$

$$u(t, x + 2\pi) = u(t, x), \quad (33)$$

т.е. краевую задачу (2), (3) при $a = a_*(1 - \gamma\varepsilon)$.

Решения ее будем искать в виде суммы

$$u(t, x, \varepsilon) = \psi(s) + \varepsilon^{1/2}u_1(t, x, s) + \varepsilon u_2(t, x, s) + \varepsilon^{3/2}u_3(t, x, s) + O(\varepsilon^2), \quad (34)$$

т.е. в виде, аналогичном (10); свойства слагаемых этой суммы аналогичны свойствам слагаемых суммы (10). Например, функции $u_j(t, x, s)$, $j = 1, 2, 3$, гладко зависят от своих аргументов, $s = \varepsilon t$, и имеют период $2\pi/\sigma_m$ по переменной t . Пожалуй, единственное отличие состоит в том, что здесь априори при фиксированных t и s функции $u_j(t, x, s)$ как функции переменной x принадлежат классу H_2^4 , а не H_2^2 , как в разделе 2. Здесь также справедливы равенства

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u_j(t, x, s) dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u_j(t, x, s) \exp(\pm imx) dx = 0, \quad j = 2, 3.$$

Наконец, как и ранее в разделе 2

$$u_1(t, x, \varepsilon) = z(s)q + \bar{z}(s)\bar{q}, \quad q = q(t, x) = \exp(i\sigma_m t + imx).$$

В итоге для u_2 и u_3 получаем неоднородные краевые задачи

$$\psi'(s) + u_{2t} = B_0 u_2 + b_1 h (w_{1x})^2, \quad u_2(t, x + 2\pi, s) = u_2(t, x, s), \quad (35)$$

и

$$u_{3t} = B_0 u_3 + 2b_1 h w_{1x} w_{2x} + b_2 h (w_{1x})^3 + a_* \gamma u_{1xxxx} - u_1', \quad u_3(t, x + 2\pi, s) = u_3(t, x, s). \quad (36)$$

Здесь

$$w_j(t, x, s) = u_j(t, x + h, s), \quad j = 1, 2, 3, \quad B_0 u = a_* u_{xxxx} + h c w_x, \quad w = u(t, x + h).$$

Стандартные вычисления показывают, что

$$u_2(t, x, s) = \eta z^2 q^2 + \bar{\eta} \bar{z}^2 \bar{q}^2,$$

где в данном случае

$$\eta = -b_1 \frac{m \exp(2imh)}{2c(p_3 + ip_4)}, \quad p_3 = \sin(2mh) - 8 \sin(mh), \quad p_4 = \cos(mh) - \cos(2mh).$$

Такое решение краевая задача (35) будет иметь, если выполнено условие разрешимости

$$\psi' = g_0 |z|^2, \quad g_0 = 2m^2 b_1 h. \quad (37)$$

Условия разрешимости для неоднородной краевой задачи (35) в классе $2\pi/\sigma_m$ -периодических функций приводят еще к одному равенству:

$$z' = \beta_m z + (g_1 + ig_2)z|z|^2, \quad (38)$$

где $\beta_m = a_* \gamma m^4$,

$$\begin{aligned} g_1 &= hm^3 \left[-3b_2 \sin mh - \frac{2b_1^2}{c(p_3^2 + p_4^2)} (p_3 \cos(3mh) + p_4 \sin(3mh)) \right], \\ g_2 &= hm^3 \left[3b_2 \cos mh - \frac{2b_1^2}{c(p_3^2 + p_4^2)} (p_3 \sin(3mh) - p_4 \cos(3mh)) \right]. \end{aligned}$$

Как и в предыдущем разделе, достаточно просто привести приближенные формулы ($y_1 \approx mh$) для вычисления постоянных, фигурирующих в правых частях дифференциальных уравнений (37), (38), которые образуют систему уравнений — нормальную форму. Поэтому получаем нормальную форму в следующем виде:

$$\psi' = g_0 |z|^2, \quad z' = \beta_m z + (g_1 + ig_2)z|z|^2, \quad (39)$$

где для постоянных g_1, g_2, β_m справедливы равенства

$$g_0 \approx 33,29 \frac{b_1}{h}, \quad g_1 \approx \frac{1}{h^2} \left[164,35b_2 - 17,58 \frac{b_1^2}{c} \right], \quad \beta_m \approx 3,29c\gamma, \quad g_2 \approx \frac{1}{h^2} \left[-120,43b_2 + 5,19 \frac{b_1^2}{c} \right].$$

Из анализа нормальной формы (39) следует, что величина g_1 может менять знак в зависимости от выбора величин b_1, b_2, c . При $b_2 = 0$ имеем неравенство $g_1 < 0$; напротив, если $b_2 > 0$ и $b_1^2 \ll 1$, то $g_1 > 0$.

Для дальнейшего изучения нормальной формы (39) перейдем к полярным координатам. Положим $z = \rho \exp(i\varphi)$. Нормальная форма в новых переменных $\rho(s), \varphi(s)$ может быть переписана в виде

$$\psi' = g_0 \rho^2, \quad \varphi' = g_2 \rho^2, \quad \rho' = \beta_m \rho + g_1 \rho^3, \quad (40)$$

т.е. в виде системы (40), которая практически не отличается от аналогичной системы (20), (21) из раздела 2. Ее анализ можно повторить и для нормальной формы (40). В результате приходим к утверждению, аналогичному теореме 2.

Теорема 3. *Существует такое $\varepsilon_0 > 0$, что при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ краевая задача (2), (3) при $a = a_*(1 - \gamma\varepsilon)$ имеет двухпараметрическое семейство решений*

$$u(t, x, \varepsilon) = \left[\omega_0 \varepsilon + o(\varepsilon) \right] t + v(t, x, \varepsilon) + \psi_0, \quad (41)$$

где $\omega_0 = g_0 \rho_0^2$, а для $v(t, x, \varepsilon)$ справедлива асимптотическая формула

$$v(t, x, \varepsilon) = \varepsilon^{1/2} \rho_0 (q + \bar{q}) + \varepsilon \rho_0^2 \left(\eta q^2 + \bar{\eta} \bar{q}^2 \right) + o(\varepsilon), \quad q = \exp \left(i(\sigma_m + \varepsilon \omega_1) t + imx + i\varphi_0 \right), \quad (42)$$

если $\beta_m g_1 < 0$. При этом $\rho_0 = \sqrt{-\beta_m/g_1}$. Эти решения устойчивы, если $\beta_m > 0$ ($\gamma > 0$), и неустойчивы, если $\beta_m < 0$ ($\gamma < 0$). В формулах (41), (42) $\psi_0, \varphi_0 \in \mathbb{R}$, а остальные постоянные были указаны ранее. Наконец, в данном случае

$$\omega_1 = g_2 \rho_0^2 = -g_2 \frac{\beta_m}{g_1}.$$

4. Заключение. В работе рассмотрены две версии нелокального уравнения эрозии. Для первой модели диффузия учтена стандартным способом и считается «объемной», во второй использована поверхностная диффузия. Быть может, в задачах о взаимодействии потока ионов с поверхностью обработки второй вариант не менее естественен, так как данная задача относится к разделу математической физики пограничных явлений. Тем не менее, с математической точки зрения, задачи дали один и тот же результат на качественном уровне. Главный вывод одинаков в обеих моделях: механизм формирования неоднородного рельефа — это механизм самоорганизации, и причина возникновения неоднородного рельефа состоит в том, что однородные состояния равновесия теряют устойчивость.

Уместно подчеркнуть, что в обеих версиях задачи (т.е. краевых задачах (1), (3), и (2), (3)) номер m не зависит от периода по переменной x и определяется инвариантным образом как число, близкое к m_1 или m_2 . В первом случае $m = m_1$ или m_2 , где $m_1 = [y_1/h]$, $m_2 = 1 + m_1$, где y_1 определяется как корень уравнения $\operatorname{tg} y = y$. Во втором случае величина y_1 определяется после анализа уравнения $3 \operatorname{tg} y_1 = y_1$. Кроме того, в обоих случаях амплитуда решений пропорциональна $|h|$. Обычно величина отклонения $|h|$ достаточно мала, но $|h| \neq 0$. Иная ситуация имеет место, если h не мало. Как показано, например, в [7, 12], пространственно неоднородные решения бифурцируют на младших модах, а их номер зависит, как правило, от выбора h .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ковалева А. М., Куликов А. Н., Куликов Д. А. Устойчивость и бифуркации волнообразных решений для одного функционально-дифференциального уравнения // Изв. ин-та мат. информ. Удмурт. гос. ун-та. — 2015. — 2, № 46. — С. 60–68.
2. Крейн С. Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. — М.: Наука, 1977.
3. Куликов А. Н. О гладких инвариантных многообразиях полугруппы нелинейных операторов в банаховом пространстве // Иссл. по устойчивости и теории колебаний. — 1976. — Ярославль: ЯрГУ. — С. 114–129.
4. Куликов А. Н. Инерционные многообразия нелинейных автоколебаний дифференциальных уравнений в гильбертовом пространстве / Препринт № 85. — Ин-т прикл. мат. им. М. В. Келдыша АН СССР, 1991.
5. Куликов А. Н., Куликов Д. А. Формирование волнообразных наноструктур на поверхности плоских подложек при ионной бомбардировке // Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 2012. — 52, № 5. — С. 930–945.
6. Куликов А. Н., Куликов Д. А. Нелокальная модель формирования рельефа под воздействием потока ионов. Неоднородные наноструктуры // Мат. моделирование. — 2016. — 28, № 3. — С. 33–50.
7. Куликов Д. А. Механизм формирования волновых диссипативных структур в одной из задач нанотехнологий // Вестн. РАЕН. Диффер. уравн. — 2013. — 13, № 4. — С. 23–31.
8. Рудый А. С., Бачурин В. И. Пространственно нелокальная модель эрозии поверхности ионной бомбардировкой // Изв. РАН. Сер. физ. — 2008. — 72, № 5. — С. 586–591.
9. Рудый А. С., Куликов А. Н., Куликов Д. А., Метлицкая А. В. Высокомодовые волновые рельефы в рамках пространственно нелокальной модели эрозии // Микроэлектроника. — 2014. — 43, № 2. — С. 109–118.
10. Соболевский П. Е. Об уравнениях параболического типа в банаховом пространстве // Тр. Моск. мат. о-ва. — 1967. — 10. — С. 297–350.
11. Bradley R. M., Harper J. M. E. Theory of ripple topography induced by ion bombardment // J. Vac. Sci. Technol. A. — 1988. — 6, № 4. — С. 2390–2395.
12. Kulikov D. A. Spatially inhomogeneous dissipative structures in a periodic boundary-value problem for a nonlocal erosion equation // J. Math. Sci. — 2015. — 205, № 6. — С. 791–805.

А. М. Ковалева

Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова
E-mail: nyama55@yandex.ru

Д. А. Куликов

Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова
E-mail: kulikov_d_a@mail.ru



ИССЛЕДОВАНИЕ ТРЕХФАКТОРНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ЭКОНОМИКИ РЕГИОНА, УЧИТЫВАЮЩЕЙ КОНЕЧНОЕ ПОТРЕБЛЕНИЕ И ОГРАНИЧЕННЫЕ РЕСУРСЫ

© 2018 г. Е. Ю. ЛИСКИНА

Аннотация. Построена трехфакторная модификация модели Р. Солоу, учитывающая конечное потребление и ограниченные ресурсы. Динамика численности населения определяется уравнением П. Ферхюльста, конечное потребление зависит от численности населения. По данным Федеральной службы государственной статистики идентифицированы параметры модели для Рязанской области. Проведено аналитическое и численное исследование поведения решений полученной динамической системы.

Ключевые слова: динамическая система, экономико-математическая модель, модификация модели Солоу, поведение решений.

AMS Subject Classification: 37N40, 37N99

1. Введение. Односекторные макроэкономические модели являются удобным инструментом изучения механизмов самоорганизации и долгосрочного прогнозирования экономики. Поэтому им посвящено большое количество работ как в России, так и за рубежом (см. обзор в [2]), в которых представлены два основных направления исследований. Первому направлению принадлежат работы, в которых экономика представлена одним или несколькими агрегированными секторами, зависящими от двух факторов: труда и капитала, а математические модели являются модификациями модели Р. Солоу (см. [1, 3, 5, 6]). В работах второго направления экономика рассматривается как система субъектов, взаимодействующих по принципу «хищник-жертва» (см. [8, 10]). При этом достаточно мало отечественных работ посвящено изучению идентифицированных моделей (см. [6, 10]), хотя зарубежных работ на эту тему достаточно много (см. обзор в [2]). Поэтому исследование идентифицированных односекторных моделей представляется как перспективное и актуальное.

Построим модификацию классической модели Р. Солоу, учитывающую конечное потребление и конкуренцию за ограниченные ресурсы. По аналогии с [3] будем предполагать, что валовой региональный продукт X распределяется между капиталовложениями I и общим потреблением S в соответствии с балансовым уравнением

$$X = I + S. \quad (1)$$

Объем валового регионального продукта X определяется производственной функцией $X = F(K, L)$, где K — стоимость основных фондов экономики, L — среднегодовая численность населения, занятого в экономике. Динамика стоимости основных фондов экономики K описывается дифференциальным уравнением

$$\dot{K} = I + \mu K, \quad (2)$$

в котором μ — норма выбытия основных фондов. Предполагается, что, во-первых, инвестиции мгновенно влияют на $\dot{K}$ (инвестиционный лаг равен нулю), а во-вторых, экономическая система региона является замкнутой, т.е. чистый экспорт равен нулю, внешние инвестиции в основные фонды отсутствуют.

В отличие от [3] будем полагать, что общее потребление S делится на производственное потребление $aF(K, L)$ и конечное потребление $\bar{S}$ в соответствии с балансовым уравнением

$$S = aF(K, L) + \bar{S}, \quad (3)$$

где $a \in [0; 1]$ — склонность к потреблению, а конечное потребление $\bar{S}$ зависит от численности населения N , проживающего в регионе, $\bar{S} = \bar{S}(N)$. С учетом балансовых уравнений (1) и (3) уравнение динамики стоимости основных фондов (2) принимает вид

$$\dot{K} = -\mu K + (1 - a)F(K, L) - \bar{S}(N). \quad (4)$$

Пусть, как и в [3], динамика среднегодовой численности занятых в экономике описывается уравнением Т. Мальтуса

$$\dot{L} = \gamma L, \quad (5)$$

где γ — темп роста среднегодовой численности занятых в экономике. Дополнительно будем предполагать, что численность населения региона описывается уравнением П. Ферхюльста

$$\dot{N} = rN \left(1 - \frac{N}{M}\right), \quad (6)$$

в котором r — темп роста населения, M — максимально допустимая численность населения на данной территории. Дополняя уравнение (4) уравнениями динамики среднегодовой численности занятых в экономике (5) и динамики численности населения (6), получим следующую трехфакторную односекторную модель экономики региона:

$$\begin{cases} \dot{K} = -\mu K + (1 - a)F(K, L) - \bar{S}(N), \\ \dot{L} = \gamma L, \\ \dot{N} = rN \left(1 - \frac{N}{M}\right). \end{cases} \quad (7)$$

В [4] по данным Федеральной службы государственной статистики (см. [7, 9]) методами эконометрики на уровне значимости $\alpha = 0,05$ были идентифицированы коэффициенты μ , a , γ , r , M и функции $F(K, L)$ и $\bar{S}(N) = e^{(\sigma_1 + \sigma_2 N)}$ для Рязанской области. Наилучшими по статистическим характеристикам оказались линейная однородная производственная функция $F(K, L) = a_1 K + a_2 L$ и однофакторная степенная функция $F(K, L) = \alpha_0 K^{\alpha_1}$. Отсюда следуют два случая исследования системы (7).

Случай 1. Модель с линейной однородной производственной функцией

$$\begin{cases} \dot{K} = b_1 K + b_2 L - e^{(\sigma_1 + \sigma_2 N)}, \\ \dot{L} = \gamma L, \\ \dot{N} = rN \left(1 - \frac{N}{M}\right), \end{cases} \quad (8)$$

где

$$\begin{aligned} b_1 &= (1 - a)a_1 - \mu = 0,1229, & b_2 &= (1 - a)a_2 = -14,0926, \\ M &= 641718, & \gamma &= -0,0063, & r &= -0,0086, & \sigma_1 &= 57,2139, & \sigma_2 &= -0,0395. \end{aligned} \quad (9)$$

Случай 2. Модель с однофакторной степенной производственной функцией

$$\begin{cases} \dot{K} = -\mu K + (1 - a)\alpha_0 K^{\alpha_1} - e^{(\sigma_1 + \sigma_2 N)}, \\ \dot{L} = \gamma L, \\ \dot{N} = rN \left(1 - \frac{N}{M}\right), \end{cases} \quad (10)$$

в которой

$$\mu = 0,0075, \quad \alpha_0 = 0,01316, \quad \alpha_1 = 1,2451, \quad (1 - a) = 0,3356. \quad (11)$$

Так как идентификация параметров системы (7) была проведена с учетом структурных изменений экономики России за период с 1991 по 2013 г. (к ним относятся налоговая реформа 1999 г.

и финансовый кризис 2008 г.), то числовые значения коэффициентов $\gamma, \mu, \sigma_1, \sigma_2$ систем (8) и (10) приняли значения (9) и (11) при $t \geq 2009$ г.

Цель настоящей работы — исследование поведения траекторий систем (8) и (10) в положительном октанте (K, L, N) . Оно состоит в определении состояний равновесия и их типа устойчивости, а также в отыскании аналитического вида решений и изучении их свойств.

2. Основные результаты. Сформулируем основные результаты исследования системы (7) в каждом из случаев.

Случай 1. Для системы (8) непосредственными вычислениями установлено, что она имеет два состояния равновесия

$$(K_1, L_1, N_1) = \left(\frac{e^{\sigma_1}}{b_1}, 0, 0 \right), \quad (K_2, L_2, N_2) = \left(\frac{e^{(\sigma_1 + \sigma_2 M)}}{b_1}, 0, M \right),$$

или

$$(K_1; L_1; N_1) = (5,729 \cdot 10^{25}; 0; 0), \quad (K_2; L_2; N_2) = (0,2098 \cdot 10^{-10982}; 0; 641718).$$

Состояние равновесия (K_1, L_1, N_1) характеризует регион, в котором нет официально зарегистрированного населения и официально зарегистрированных наемных работников. Изменение стоимости основных фондов в регионе происходит за счет работ, проводимых вахтовым методом. После замены переменных $x = K - K_1, y = L - L_1, z = N - N_1$ и разложения функции $e^{(\sigma_1 + \sigma_2 z)}$ в ряд Маклорена система (8) может быть записана следующим образом:

$$\begin{cases} \dot{x} = b_1 x + b_2 y - e^{\sigma_1} \sigma_2 z - e^{\sigma_1} \sum_{m=2}^{+\infty} \frac{(\sigma_2 z)^m}{m!}, \\ \dot{y} = \gamma y, \\ \dot{z} = r z \left(1 - \frac{z}{M} \right). \end{cases}$$

Матрица соответствующей системы линейного приближения в окрестности точки (K_1, L_1, N_1) имеет вид

$$\begin{bmatrix} b_1 & b_2 & -\sigma_2 e^{\sigma_1} \\ 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & r \end{bmatrix}.$$

Ее собственные значения равны $\lambda_1 = b_1, \lambda_2 = \gamma, \lambda_3 = r$. Так как при идентификации параметров получилось, что $b_1 > 0, \gamma < 0, r < 0$, то состояние равновесия (K_1, L_1, N_1) является неустойчивым по Ляпунову.

Состояние равновесия (K_2, L_2, N_2) характеризует регион, в котором численность официально зарегистрированного населения максимальна для данной территории, а численность официально зарегистрированных наемных работников равна нулю. Изменение стоимости основных фондов в таком регионе происходит за счет работы нелегалов (полностью скрытая занятость). После замены переменных $x = K - K_2, y = L - L_2, z = N - N_2$ и разложения функции $e^{(\sigma_1 + \sigma_2 z)}$ в ряд Маклорена система (8) может быть записана следующим образом:

$$\begin{cases} \dot{x} = b_1 x + b_2 y - e^{(\sigma_1 + \sigma_2 M)} \sigma_2 z - e^{(\sigma_1 + \sigma_2 M)} \sum_{m=2}^{+\infty} \frac{(\sigma_2 z)^m}{m!}, \\ \dot{y} = \gamma y, \\ \dot{z} = -r z \left(1 - \frac{z}{M} \right). \end{cases}$$

Матрица соответствующей системы линейного приближения в окрестности точки (K_2, L_2, N_2) имеет вид

$$\begin{bmatrix} b_1 & b_2 & -\sigma_2 e^{\sigma_1 + \sigma_2 M} \\ 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & -r \end{bmatrix}.$$

Ее собственные значения равны $\lambda_1 = b_1$, $\lambda_2 = \gamma$, $\lambda_3 = -r$. Так как в данном случае $b_1 > 0$ и $(-r) > 0$, то состояние равновесия (K_2, L_2, N_2) также является неустойчивым по Ляпунову.

Далее непосредственными вычислениями получено решение задачи Коши (t_0, K_0, L_0, N_0) системы (8):

$$\begin{cases} K(t) = b_5 e^{b_1(t-t_0)} + b_4 e^{\gamma(t-t_0)} - e^{b_1(t-t_0)} \int_{t_0}^t \exp \left(\sigma_1 - b_1(\tau - t_0) + \frac{\sigma_2 M}{1 + b_3 \exp(-r(\tau - t_0))} \right) d\tau, \\ L(t) = L_0 e^{\gamma(t-t_0)}, \\ N(t) = \frac{M}{1 + b_3 \exp(-r(t - t_0))}, \end{cases} \quad (12)$$

в которой

$$b_3 = \frac{M}{N_0} - 1, \quad b_4 = \frac{b_2 L_0}{\gamma - b_1}, \quad b_5 = K_0 - b_4.$$

Для проверки адекватности модели (8) будем рассматривать решения (12) при начальных условиях $t_0 = 2013$ г., $K_0 = 671471$ млн. руб., $L_0 = 500,7$ тыс. чел., $N_0 = 1141$ тыс. чел. Тогда коэффициенты b_3 , b_4 , b_5 принимают следующие числовые значения:

$$b_3 = 561,4172, \quad b_4 = 55489,0674, \quad b_5 = 615981,9326.$$

Так как $\gamma < 0$, $r < 0$, то функции $L(t)$ и $N(t)$ являются убывающими на промежутке $(-\infty, +\infty)$. С использованием функций $L(t)$ и $N(t)$ из системы решений (12) были вычислены

$$L(2014) \approx 497,3 \text{ тыс. чел.}, \quad N(2014) \approx 1131,2 \text{ тыс. чел.}, \quad \ln \left(\frac{M}{N(2014)} - 1 \right) \approx -6,3393$$

(последняя величина использовалась при идентификации уравнения динамики численности населения (6)). Соответствующие доверительные интервалы приняли вид

$$L \in (481,7; 513,4), \quad N \in (110; 11433), \quad \ln \left(\frac{M}{N} - 1 \right) \in (-8,6689; -4,0096).$$

Наблюдаемые значения в 2014 г. оказались равными

$$L_{2014} = 494,1 \text{ тыс. чел.}, \quad N_{2014} = 1135 \text{ тыс. чел.}, \quad \ln \left(\frac{M}{N_{2014}} - 1 \right) \approx -6,3357.$$

Сравнение значений $L(2014)$ и $N(2014)$, вычисленных с использованием функций $L(t)$ и $N(t)$ из системы решений (12) при начальных условиях (t_0, L_0, N_0) , с наблюдаемыми значениями L_{2014} и N_{2014} показало, что функции $L(t)$ и $N(t)$ достаточно хорошо отражают изменение среднегодовой численности занятых в экономике и численности населения региона (наблюдаемые значения оказались внутри соответствующих 95% доверительных интервалов).

Исследуем поведение функции $K(t)$ системы решений (12) на промежутке $[2009, +\infty)$ с помощью ее первой производной, определенной первым уравнением системы (8). Подставив решения $K(t)$, $L(t)$ и $N(t)$ из системы (12) в первое уравнение системы (8), получим дифференциальное уравнение $\dot{K} = g(t)$, где

$$\begin{aligned} g(t) \equiv & b_1 b_5 e^{b_1(t-t_0)} + b_4 \gamma e^{\gamma(t-t_0)} - \exp \left(\sigma_1 + \frac{\sigma_2 M}{1 + b_3 \exp(-r(t - t_0))} \right) - \\ & - b_1 e^{b_1(t-t_0)} \int_{t_0}^t \exp \left(\sigma_1 - b_1(\tau - t_0) + \frac{\sigma_2 M}{1 + b_3 \exp(-r(\tau - t_0))} \right) d\tau. \end{aligned} \quad (13)$$

Функция $g(t)$ является непрерывной на промежутке $[2009, +\infty)$, а следовательно, и на отрезке $[2009, t_0]$. Ее значения $g(2009) \approx 41013,7257$ и

$$g(t_0) = g(2013) = b_1 b_5 + b_4 \gamma - \exp \left(\sigma_1 + \frac{\sigma_2 M}{1 + b_3} \right) \approx -57008,7475$$

на концах отрезка $[2009, t_0]$ имеют разные знаки. Тогда по теореме Больцано—Коши существует по крайней мере одна такая точка $\bar{t} \in (2009, 2013)$, что $g(\bar{t}) \equiv \dot{K}(\bar{t}) = 0$. Вычисление значений функции при $t = n$, $n = \overline{2010, 2012}$, позволило уточнить, что $\bar{t} \in (2011, 2012)$; других точек, удовлетворяющих условию $\dot{K}(t) \equiv g(t) = 0$, на отрезке $[2009, t_0]$ нет.

Рассмотрим функцию $g(t)$, заданную формулой (13), на промежутке $[t_0, +\infty)$, и вычислим ее предел при $t \rightarrow +\infty$. Поскольку $b_1 > 0$, имеем

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{b_1(t-t_0)} = +\infty;$$

так как $\gamma - b_1 < 0$, то

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{(\gamma - b_1)(t-t_0)} = 0;$$

так как $\sigma_1 > 0$, $\sigma_2 < 0$, $r < 0$, $M > 0$, $b_1 > 0$, $b_3 > 0$, то

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \exp \left(\sigma_1 - b_1(t - t_0) + \frac{\sigma_2 M}{1 + b_3 \exp(-r(t - t_0))} \right) = 0.$$

Оценим величину

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} I(t),$$

где

$$I(t) = \int_{t_0}^t \exp \left(\sigma_1 - b_1(\tau - t_0) + \frac{\sigma_2 M}{1 + b_3 \exp(-r(\tau - t_0))} \right) d\tau.$$

Так как $r < 0$, $b_3 > 0$, то

$$1 + b_3 e^{(-r(t-t_0))} > 1.$$

Следовательно, при $\sigma_2 < 0$, $M > 0$, $t > t_0$ в силу монотонности экспоненты и интеграла с переменным верхним пределом равносильны следующие неравенства:

$$\sigma_2 M < \frac{\sigma_2 M}{1 + b_3 \exp(-r(t - t_0))} < 0,$$

$$\sigma_1 + \sigma_2 M < \sigma_1 + \frac{\sigma_2 M}{1 + b_3 \exp(-r(t - t_0))} < \sigma_1,$$

$$\sigma_1 + \sigma_2 M - b_1(t - t_0) < \sigma_1 + \frac{\sigma_2 M}{1 + b_3 \exp(-r(t - t_0))} - b_1(t - t_0) < \sigma_1 - b_1(t - t_0),$$

$$\exp(\sigma_1 + \sigma_2 M - b_1(t - t_0)) < \exp\left(\sigma_1 + \frac{\sigma_2 M}{1 + b_3 \exp(-r(t - t_0))} - b_1(t - t_0)\right) < \exp(\sigma_1 - b_1(t - t_0)),$$

$$\int_{t_0}^t \exp(\sigma_1 + \sigma_2 M - b_1(\tau - t_0)) d\tau < I(t) < \int_{t_0}^t \exp(\sigma_1 - b_1(\tau - t_0)) d\tau,$$

$$\exp(\sigma_1 + \sigma_2 M - b_1(t - t_0)) - \exp(\sigma_1 + \sigma_2 M) > -b_1 I(t) > \exp(\sigma_1 - b_1(t - t_0)) - \exp \sigma_1.$$

Вычисляя пределы от крайних членов последнего двойного неравенства, получаем

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \exp(\sigma_1 + \sigma_2 M - b_1(t - t_0)) - \exp(\sigma_1 + \sigma_2 M) = 0,$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \exp(\sigma_1 - b_1(t - t_0)) - \exp \sigma_1 = 0;$$

следовательно, в силу теоремы о пределе промежуточной функции

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} I(t) = 0.$$

Тогда из формулы (13) и проведенных рассуждений следует, что

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} g(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \exp(b_1(t - t_0)) (b_1 b_5 + b_4 \gamma g_1(t) - g_2(t) - b_1 I(t)) = +\infty,$$

где

$$g_1(t) \equiv \exp((\gamma - b_1)(t - t_0)), \quad g_2(t) \equiv \exp\left(\sigma_1 - b_1(t - t_0) + \frac{\sigma_2 M}{1 + b_3 \exp(-r(t - t_0))}\right).$$

Следовательно, по теореме Больцано—Коши существует по крайней мере одна точка $\bar{t} \in [t_0, +\infty)$, в которой $\dot{K}(\bar{t}) \equiv g(\bar{t}) = 0$. Вычисление значений функции $g(t)$ при $t = n$, $n = \overline{2013, 2025}$ позволило уточнить, что $\bar{t}$ не принадлежит отрезку $[t_0, 2025]$. Значит, при всех $t \in [t_0, 2025]$ выполняется неравенство $\dot{K}(t) < 0$, а функция $K(t)$ монотонно убывает.

Заметим, что идентифицированные модели вида (7) чувствительны к изменению экономической ситуации в регионе и требуют пересчета значений коэффициентов $b_1, b_2, \sigma_1, \sigma_2, r, \gamma$ в среднесрочном периоде (каждые три года), поэтому достаточно рассматривать поведение функции $K(t)$ не позднее, чем три года, начиная от начальной точки t_0 ; в данном случае (при $t_0 = 2013$) — на отрезке $[2009, 2016]$.

Итак, функция $K(t)$ системы решений (12) монотонно убывает на отрезке $[\bar{t}, 2016]$. При этом исследование динамического ряда наблюдаемых значений K_t показало, что на уровне значимости $\alpha = 0,05$ он имеет возрастающую линейную тенденцию вида

$$K_t = -90211742,77 + 45158,07t$$

со следующими статистическими характеристиками: коэффициент корреляции $R^2 = 0,9798$, средняя ошибка аппроксимации $A = 0,08$, доверительный интервал прогнозируемого значения $K_{2014} \in (660753,02; 812475,68)$. Следовательно, функция $K(t)$ системы решений (12) неудовлетворительно описывает динамику стоимости основных фондов экономики.

Предположительно этот результат может быть обусловлен следующими причинами:

- 1) в наблюдаемые значения стоимости основных фондов входят внешние инвестиции и дотации из Федерального бюджета, не учтенные в модели (7), но неизбежные в силу существующей налоговой системы. При этом ежегодные финансовые поступления в бюджет изменяют значения коэффициентов b_3, b_4, b_5 ;
- 2) Рязанская область, по данным которой проводилась идентификация модели (8), является регионом-должником;
- 3) функция $\bar{S}(N) = e^{(\sigma_1 + \sigma_2 N)}$ характеризует зависимость фактического конечного потребления на душу населения от численности населения. При этом денежными ресурсами для конечного потребления служат не только официально начисленные заработные платы и пособия, но и скрытые доходы населения, обусловленные «серыми» зарплатами, кредитами и другими незаявленными источниками доходов.

В силу сказанного модель (8) не может быть использована для прогнозирования стоимости основных фондов экономики и величины валового регионального продукта.

Случай 2. Рассмотрим систему (10). Так же, как и в первом случае, непосредственными вычислениями установлено, что она имеет два состояния равновесия (K_1, L_1, N_1) и (K_2, L_2, N_2) , где $L_1 = 0, N_1 = 0, L_2 = 0, N_2 = M, K_1$ является корнем уравнения

$$-\mu K + (1 - a)\alpha_0 K_1^\alpha - e^{\sigma_1} = 0, \quad (14)$$

а K_2 — корнем уравнения

$$-\mu K + (1 - a)\alpha_0 K_1^\alpha - e^{\sigma_1 + \sigma_2 M} = 0. \quad (15)$$

Численное решение уравнений (14) и (15) показало, что при указанных выше значениях параметров оба состояния равновесия существуют, $K_1 \approx 0,7068 \cdot 10^{22}$, $K_2 \approx 8,839382601$. Экономическая интерпретация состояний равновесия аналогична первому случаю.

Исследуем устойчивость состояния равновесия (K_1, L_1, N_1) . После замены переменных

$$x = K - K_1, \quad y = L - L_1, \quad z = N - N_1$$

и разложения функций $(1 + x/K_1)^{\alpha_1}$ и $e^{\sigma_1 + \sigma_2 z}$ в ряд Маклорена система (10) принимает вид

$$\begin{cases} \dot{x} = (\beta_1 - \mu)x + \sum_{m=2}^{+\infty} \beta_m x^m - e^{\sigma_1} \sigma_2 z - e^{\sigma_1} \sum_{m=2}^{+\infty} \frac{(\sigma_2 z)^m}{m!}, \\ \dot{y} = \gamma y, \\ \dot{z} = rz \left(1 - \frac{z}{M}\right), \end{cases}$$

где $\beta_1 = (1-a)\alpha_0\alpha_1 K_1^{(\alpha_1-1)}$, β_m , $m = 2, 3, \dots$, — коэффициенты разложения функции $(1 + x/K_1)^{\alpha_1}$ в ряд Маклорена. Матрица соответствующей системы линейного приближения в окрестности точки (K_1, L_1, N_1) имеет вид

$$\begin{bmatrix} \beta_1 - \mu & 0 & -\sigma_2 e^{\sigma_1} \\ 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & r \end{bmatrix};$$

ее собственные значения $\lambda_1 = \beta_1 - \mu \approx 1240,4056 > 0$, $\lambda_2 = \gamma < 0$, $\lambda_3 = r < 0$. Следовательно, состояние равновесия (K_1, L_1, N_1) неустойчиво по Ляпунову.

Исследуем устойчивость состояния равновесия (K_2, L_2, N_2) . После замены переменных

$$x = K - K_2, \quad y = L - L_2, \quad z = N - N_2$$

и разложения функций $(1 + x/K_2)^{\alpha_1}$ и $e^{\sigma_1 + \sigma_2 z}$ в ряд Маклорена система (10) может быть записана следующим образом:

$$\begin{cases} \dot{x} = (\eta_1 - \mu)x + \sum_{m=2}^{+\infty} \eta_m x^m - e^{\sigma_1 + \sigma_2 M} \sigma_2 z - e^{\sigma_1 + \sigma_2 M} \sum_{m=2}^{+\infty} \frac{(\sigma_2 z)^m}{m!}, \\ \dot{y} = \gamma y, \\ \dot{z} = -rz \left(1 - \frac{z}{M}\right), \end{cases}$$

где $\eta_1 = (1-a)\alpha_0\alpha_1 K_2^{(\alpha_1-1)}$, η_m , $m = 2, 3, \dots$, — коэффициенты разложения функции $(1 + x/K_2)^{\alpha_1}$ в ряд Маклорена. Матрица соответствующей системы линейного приближения в окрестности точки (K_2, L_2, N_2) имеет вид

$$\begin{bmatrix} \eta_1 - \mu & 0 & -\sigma_2 e^{\sigma_1 + \sigma_2 M} \\ 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & -r \end{bmatrix};$$

ее собственные значения $\lambda_1 = \eta_1 - \mu \approx 0,0018 > 0$, $\lambda_2 = \gamma < 0$, $\lambda_3 = -r > 0$. Следовательно, состояние равновесия (K_2, L_2, N_2) является неустойчивым по Ляпунову.

Решение задачи Коши (t_0, K_0) первого уравнения системы (10) может быть представлено в виде ряда Тейлора в окрестности точки t_0 ; тогда решение задачи Коши (t_0, K_0, L_0, N_0) системы (10) примет вид

$$\begin{cases} K(t) = K_0 + \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{K^m(t_0)}{m!} (t - t_0)^m, \\ L(t) = L_0 e^{\gamma_1(t-t_0)}, \\ N(t) = \frac{M}{1 + b_3 \exp(-r(t - t_0))}, \end{cases} \quad (16)$$

где $b_3 = M/N_0 - 1$.

Для проверки адекватности модели (10) так же, как и в первом случае, будем рассматривать решения (16) при начальных условиях $t_0 = 2013$ г., $K_0 = 671471$ млн. руб., $L_0 = 500,7$ тыс. чел., $N_0 = 1141$ тыс. чел. Тогда $b_3 = 561,4172$.

Так как функции $L(t)$ и $N(t)$ системы решений (16) такие же, как в системе (12), то для проверки адекватности модели (10) достаточно исследовать поведение решения $K(t)$ системы решений (16) на промежутке $[2009, +\infty)$ с помощью первой производной $\dot{K}$.

Из первого уравнения системы (10) при $\sigma_2 < 0$ следует, что $\dot{K} > 0$ при одновременном выполнении неравенств

$$\begin{cases} K > K_3, \\ N > \frac{1}{\sigma_2} \left(\ln((1-a)\alpha_0 K^{\alpha_1} - \mu K) - \sigma_1 \right), \end{cases} \quad (17)$$

где

$$K_3 = \left(\frac{\mu}{(1-a)\alpha_0} \right)^{1/(\alpha_1-1)} \approx 8,839382599, \quad K_3 < K_2.$$

Численное моделирование показало, что при любых наблюдаемых начальных условиях $t_0 \in [2010; 2014]$, $K_0 \in [525645; 748636]$, $L_0 \in [494,1; 502,8]$, $N_0 \in [1135; 1152]$ второе неравенство условия (17) не выполняется. Но так как функция $N(t)$ убывает на промежутке $t \in [t_0; +\infty)$, второе неравенство условия (17) не может быть выполнено при всяком $N < N_0$. Поэтому при всех $t \in [t_0; 2014]$ решение $K(t)$ задачи Коши (t_0, L_0, N_0) первого уравнения системы (10) является строго убывающей функцией, а, следовательно, неудовлетворительно описывает динамику стоимости основных фондов. В силу сказанного модель (10) также не может быть использована для прогнозирования стоимости основных фондов экономики и величины валового регионального продукта.

Таким образом, на основе исследования систем (8) и (10) можно сделать вывод о том, что модель (7) неудовлетворительно описывает экономику региона. В дальнейшем для усовершенствования модели предполагается изменить подход к моделированию функции конечного потребления $\bar{S}$, а также включить в модель дотации из Федерального бюджета и привлеченные извне инвестиции.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Абрамов В. В.* Качественное исследование односекторной экономики // Изв. РАЕН. Диффер. уравн. — 2007. — 12. — С. 11–15.
2. *Волкова А. В.* О применении модели Солоу к анализу практических проблем экономической политики в исследованиях зарубежных и российских авторов // Анализ, моделирование и прогнозирование экономических процессов / Мат. II Междунар. науч.-практ. интернет-конф., Волгоград. гос. ун-т, Воронеж. гос. ун-т, 15.12.2010–15.02.2011. — Воронеж: ЦНТИ, 2010. — С. 17–27; <http://new.volsu.ru/forum/forum36/topic136/>
3. *Колемаев В. А.* Математическая экономика — М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2005.
4. *Лазарева И. А., Лискина Е. Ю.* Построение и идентификация односекторной модели экономики региона, учитывающей конечное потребление и конкуренцию за ограниченные ресурсы // Вестн. РАЕН. — 2016. — 16, № 3. — С. 36–40.
5. *Маевский В. И., Малков С. Ю., Рубинштейн А. А.* Особенности и проблемы моделирования перекрывающегося воспроизводства // Эконом. мат. методы. — 2015. — 51, № 10. — С. 26–44.
6. *Прасолов А. В.* Математические методы экономической динамики. — СПб.: Лань, 2008.
7. Регионы России. Социально-экономические показатели: статистический сборник. — Федеральная служба государственной статистики. <http://www.gks.ru>
8. *Романовский М. Ю., Романовский Ю. М.* Введение в экономфизику. Статистические и динамические модели. — М., 2007.
9. Российский статистический ежегодник: статистический сборник. — Федеральная служба государственной статистики. <http://www.gks.ru>
10. *Andreev V. V.* On the validity of use of physical equations and principles in the socio-economic field and on the predictability of socio-economic system dynamics // Nonlinear Analysis: Modelling and Control. — 2015. — 20, № 1. — С. 82–98; <http://dx.doi.org/10.15388/NA.2015.1.6>

Е. Ю. Лискина

Рязанский государственный университет им. С. А. Есенина

E-mail: katelis@yandex.ru



ЦИКЛЫ ПЕРВОГО РОДА СИСТЕМ С ЦИЛИНДРИЧЕСКИМ ФАЗОВЫМ ПРОСТРАНСТВОМ

© 2018 г. С. С. МАМОНОВ, А. О. ХАРЛАМОВА

Аннотация. В работе рассматривается система дифференциальных уравнений с цилиндрическим фазовым пространством, являющаяся математической моделью системы частотно-фазовой автоподстройки. Получены условия существования предельного цикла первого рода.

Ключевые слова: предельный цикл первого рода, цилиндрическое фазовое пространство, положительно инвариантное множество, тороидальное множество.

AMS Subject Classification: 34K05, 34K13, 34K60

1. Введение. В работе рассматривается система дифференциальных уравнений, являющаяся математической моделью системы частотно-фазовой автоподстройки (ЧФАП) (см. [1–8]). Базовая математическая модель системы ЧФАП приводится к системе дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = Ax + b\varphi(\sigma) + d \frac{2kc^T x}{1 + \tau^2(c^T x)^2}, \quad \dot{\sigma} = c^T x, \quad (1)$$

где $x, b, c, d \in \mathbb{R}^2$, $k, \tau \in \mathbb{R}$, $\varphi(\sigma)$ — Δ -периодическая непрерывно дифференцируемая функция. Для системы (1) решается задача поиска предельных циклов первого рода. Условия реализации колебательных режимов для системы ЧФАП являются мало изученными. Установление в системе ЧФАП квазисинхронного режима (см. [8]) связано с нарушением устойчивости состояния равновесия, соответствующего режиму синхронизации и образованию устойчивого предельного цикла вокруг этого состояния равновесия. При исследовании системы (1) в работе используются результаты, полученные в [2–7].

2. Основные результаты. Сформулируем основные результаты работы.

Теорема 1. Пусть для системы (1) выполнены следующие условия:

- (i) $c^T b = -\Gamma$, $c^T A = l^T$, $l^T b = \nu > 0$, $c^T d = \xi_2 > 0$, $l^T d = -\xi_1 < 0$, $\text{rang} \|c, l\| = 2$, $l^T A = -\alpha_1 l^T - \beta_1 c^T$, $c^T A^{-1} b \neq 0$, $\alpha_1 > 0$, $\beta_1 > 0$, $k > 0$;
- (ii) $\varphi(\sigma)$ — Δ -периодическая функция, имеющая два нуля на периоде, т.е. $\varphi(\sigma_1) = \varphi(\sigma_2) = 0$, $0 < \sigma_1 < \sigma_2 < \Delta$, для $\tilde{\sigma} = \sigma - \sigma_1$ справедливы соотношения

$$\varphi(\sigma) = a_2 \tilde{\sigma} + \tilde{\sigma}^2 \varphi_2(\tilde{\sigma}), \quad |\varphi_2(\tilde{\sigma})| \leq \tau_1 + \tau_2 |\tilde{\sigma}|, \quad \varphi(\sigma) = \varphi(\tilde{\sigma} + \sigma_1) = \varphi_0(\tilde{\sigma}),$$

$$\dot{\varphi}_0(0) > 0, \quad \tilde{\sigma}_2 = \sigma_2 - \sigma_1, \quad \dot{\varphi}_0(\tilde{\sigma}_2) < 0, \quad \text{функция } \dot{\varphi}(\tilde{\sigma}) \text{ ограничена на сегменте } [0; \Delta], \quad \tau_1 \geq 0, \quad \tau_2 \geq 0;$$

- (iii) существуют числа $h_1, \lambda_1 \in \mathbb{R}$, удовлетворяющие неравенствам

$$2k\xi_2 - h_1 - \nu\Gamma^{-1} > 0, \quad (2)$$

$$h_2^2 = a_2\Gamma - h_1(2k\xi_2 - h_1 - \nu\Gamma^{-1}) > 0, \quad (3)$$

$$(h_2^2 + h_1^2)(2k\xi_2 - h_1 - \nu\Gamma^{-1}) - h_1 a_2 \Gamma \leq 0, \quad (4)$$

$$2\lambda_1 - \nu\Gamma^{-1} \geq 0, \quad (5)$$

$$\lambda_2^2 = a_2\Gamma + \lambda_1(\lambda_1 - \nu\Gamma^{-1}) > 0, \quad (6)$$

$$\lambda_1 < \nu\Gamma^{-1}; \quad (7)$$

(iv) пусть

$$\delta_1 = \nu\Gamma^{-1}(\nu\Gamma^{-1} - \alpha_1) + \beta_1, \quad \delta_2 = \nu\Gamma^{-1}\xi_2 - \xi_1, \quad \nu\Gamma^{-1} - \alpha_1 < 0$$

и существуют такие числа $R, r, r_1, r_2 \in \mathbb{R}$, что

$$g(R) = \frac{R\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}}{\lambda_2(\alpha_1 - \nu\Gamma^{-1})} (|\delta_1| + 2k|\delta_2|);$$

тогда выполняются следующие соотношения

$$r_1 > g(R), \quad r_2 > g(R), \quad r^* = \max\{r_1, r_2\}, \quad (8)$$

$$r^*R + (\lambda_1 - \nu\Gamma^{-1})R^2 + \frac{\Gamma}{\lambda_2^2} \left(\tau_1 + \frac{\tau_2}{\lambda_2} R \right) R^3 + k\xi_2 \frac{1}{\tau} R < 0, \quad (9)$$

$$-r^* + r(2k\xi_2 - h_1 - \nu\Gamma^{-1}) - \frac{\Gamma\tau_1}{h_2^2} r^2 - \frac{\Gamma\tau_2}{h_2^3} r^3 - 2k\xi_2 \tau^2 \left(\frac{h_1^2 + h_2^2}{h_2^2} \right)^{3/2} r^3 > 0, \quad (10)$$

$$R < \tilde{\sigma}_2 \sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}; \quad (11)$$

(v) для функции $U^\pm(\tilde{\sigma}) = \tilde{\sigma}h_1 \pm \sqrt{r^2 - \tilde{\sigma}^2 h_2^2}$ справедливо неравенство

$$\left(U^\pm(\tilde{\sigma}) + \tilde{\sigma}\lambda_1 \right)^2 + \tilde{\sigma}^2 \lambda_2^2 - R^2 < 0,$$

где $\tilde{\sigma} \in [-r/h_2, r/h_2]$.

Тогда система (1) имеет предельный цикл первого рода.

Доказательство теоремы 1 проводится по следующей схеме. В системе (1) выполним замену переменных $\sigma = \tilde{\sigma} + \sigma_1$; тогда в силу условия (ii) теоремы 1 система (1) примет вид

$$\dot{x} = Ax + a_2 \tilde{\sigma} b + \tilde{\sigma}^2 \varphi_2(\tilde{\sigma}) b + d \frac{2kc^T x}{1 + \tau^2 (c^T x)^2}, \quad \dot{\tilde{\sigma}} = c^T x. \quad (12)$$

Рассмотрим функции

$$\begin{aligned} W_1(z) &= l^T x + \nu\Gamma^{-1} c^T x - r_1, & W_2(z) &= l^T x + \nu\Gamma^{-1} c^T x + r_2, \\ V_1(z) &= (c^T x - \tilde{\sigma}h_1)^2 + \tilde{\sigma}^2 h_2^2 - r^2, & V_2(z) &= (c^T x + \tilde{\sigma}\lambda_1)^2 + \tilde{\sigma}^2 \lambda_2^2 - R^2, \end{aligned}$$

где $z = (x, \sigma)^T$, $r_1 > g(R)$, $r_2 > g(R)$, r и R удовлетворяют условию (iv) теоремы 1. Пусть

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= \{z : W_1(z) \leq 0\}, & \Omega_2 &= \{z : W_2(z) \geq 0\}, & \Omega_3 &= \{z : V_1(z) \geq 0\}, & \Omega_4 &= \{z : V_2(z) \leq 0\}, \\ \Omega &= \Omega_1 \cap \Omega_2 \cap \Omega_3 \cap \Omega_4. \end{aligned}$$

Граница множества Ω имеет вид

$$\partial\Omega = \partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2 \cup \partial\Omega_3 \cup \partial\Omega_4,$$

где

$$\begin{aligned} \partial\Omega_1 &= \{z : W_1(z) = 0, V_1(z) \geq 0, V_2(z) \leq 0\}, \\ \partial\Omega_2 &= \{z : W_2(z) = 0, V_1(z) \geq 0, V_2(z) \leq 0\}, \\ \partial\Omega_3 &= \{z : V_1(z) = 0, W_1(z) \leq 0, W_2(z) \geq 0\}, \\ \partial\Omega_4 &= \{z : V_2(z) = 0, W_1(z) \leq 0, W_2(z) \geq 0\}, \end{aligned}$$

причем из условия (v) теоремы 1 пересечение множеств $\partial\Omega_3$ и $\partial\Omega_4$ является пустым. Множество Ω представляет собой две вложенные непересекающиеся цилиндрические поверхности, ограниченные двумя плоскостями. Показывается, что в силу условий теоремы 1 множество Ω является тороидальным и положительно инвариантным, содержащим цикл первого рода.

Теорема 2. Пусть для системы (1) выполнены условия (i), (ii), (v) теоремы 1 и существуют такие $h_1, h_2, \lambda_1, \lambda_2, r_1, r_2, r, R$, для которых выполняются соотношения

$$\psi_1(u_1) = u_1(\nu\Gamma^{-1}\alpha_1 - \nu^2\Gamma^{-2} - \beta_1) + r_1(\nu\Gamma^{-1} - \alpha_1) + \frac{2ku_1}{1 + \tau^2 u_1^2}(\nu\Gamma^{-1}\xi_2 - \xi_1) < 0, \quad (13)$$

$$\psi_2(u_2) = u_2(\nu\Gamma^{-1}\alpha_1 - \nu^2\Gamma^{-2} - \beta_1) - r_2(\nu\Gamma^{-1} - \alpha_1) + \frac{2ku_2}{1 + \tau^2 u_2^2}(\nu\Gamma^{-1}\xi_2 - \xi_1) > 0, \quad (14)$$

для

$$u_1, u_2 \in \left[-\frac{R}{\lambda_2} \sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}, \frac{R}{\lambda_2} \sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2} \right];$$

для функций

$$U_3^+(\tilde{\sigma}) = c^T x = \tilde{\sigma} h_1 + \sqrt{r^2 - \tilde{\sigma}^2 h_2^2}, \quad U_3^-(\tilde{\sigma}) = c^T x = \tilde{\sigma} h_1 - \sqrt{r^2 - \tilde{\sigma}^2 h_2^2}, \quad \tilde{\sigma} \in \left[-\frac{r}{h_2}, \frac{r}{h_2} \right],$$

где $r^* = \max\{r_1, r_2\}$, выполняются неравенства

$$G_1^+(\tilde{\sigma}) = - \left| \sqrt{r^2 - \tilde{\sigma}^2 h_2^2} \right| \left(r^* + \nu\Gamma^{-1} |U_3^+(\tilde{\sigma})| \right) + \tilde{\sigma} U_3^+(\tilde{\sigma}) h_2^2 + \sqrt{r^2 - \tilde{\sigma}^2 h_2^2} \times \\ \times \left(-a_2 \Gamma \tilde{\sigma} + 2k\xi_2 U_3^+(\tilde{\sigma}) - U_3^+(\tilde{\sigma}) h_1 - \Gamma \tilde{\sigma}^2 \varphi_2(\tilde{\sigma}) - 2k\tau^2 \xi_2 \frac{(U_3^+(\tilde{\sigma}))^3}{1 + \tau^2 (U_3^+(\tilde{\sigma}))^2} \right) > 0, \quad (15)$$

$$G_1^-(\tilde{\sigma}) = - \left| \sqrt{r^2 - \tilde{\sigma}^2 h_2^2} \right| \left(r^* + \nu\Gamma^{-1} |U_3^-(\tilde{\sigma})| \right) + \tilde{\sigma} U_3^-(\tilde{\sigma}) h_2^2 - \sqrt{r^2 - \tilde{\sigma}^2 h_2^2} \times \\ \times \left(-a_2 \Gamma \tilde{\sigma} + 2k\xi_2 U_3^-(\tilde{\sigma}) - U_3^-(\tilde{\sigma}) h_1 - \Gamma \tilde{\sigma}^2 \varphi_2(\tilde{\sigma}) - 2k\tau^2 \xi_2 \frac{(U_3^-(\tilde{\sigma}))^3}{1 + \tau^2 (U_3^-(\tilde{\sigma}))^2} \right) > 0; \quad (16)$$

для функций

$$U_4^+(\tilde{\sigma}) = c^T x = -\tilde{\sigma} \lambda_1 + \sqrt{R^2 - \tilde{\sigma}^2 \lambda_2^2}, \quad U_4^-(\tilde{\sigma}) = c^T x = -\tilde{\sigma} \lambda_1 - \sqrt{R^2 - \tilde{\sigma}^2 \lambda_2^2}, \quad \tilde{\sigma} \in \left[-\frac{R}{\lambda_2}, \frac{R}{\lambda_2} \right],$$

где $r^* = \max\{r_1, r_2\}$, справедливы соотношения

$$G_2^+(\tilde{\sigma}) = \left| \sqrt{R^2 - \tilde{\sigma}^2 \lambda_2^2} \right| r^* + (\lambda_1 - \nu\Gamma^{-1}) R^2 - \tilde{\sigma}^2 (2\lambda_1 - \nu\Gamma^{-1}) \lambda_2^2 - \\ - \Gamma \tilde{\sigma}^2 \varphi_2(\tilde{\sigma}) \sqrt{R^2 - \tilde{\sigma}^2 \lambda_2^2} + 2k\xi_2 \sqrt{R^2 - \tilde{\sigma}^2 \lambda_2^2} \frac{U_4^+(\tilde{\sigma})}{1 + \tau^2 (U_4^+(\tilde{\sigma}))^2} < 0, \quad (17)$$

$$G_2^-(\tilde{\sigma}) = \left| \sqrt{R^2 - \tilde{\sigma}^2 \lambda_2^2} \right| r^* + (\lambda_1 - \nu\Gamma^{-1}) R^2 - \tilde{\sigma}^2 (2\lambda_1 - \nu\Gamma^{-1}) \lambda_2^2 + \\ + \Gamma \tilde{\sigma}^2 \varphi_2(\tilde{\sigma}) \sqrt{R^2 - \tilde{\sigma}^2 \lambda_2^2} - 2k\xi_2 \sqrt{R^2 - \tilde{\sigma}^2 \lambda_2^2} \frac{U_4^-(\tilde{\sigma})}{1 + \tau^2 (U_4^-(\tilde{\sigma}))^2} < 0. \quad (18)$$

Тогда система (1) имеет предельный цикл первого рода.

При доказательстве теоремы 2 используется теорема 1. Характеристики вложенных цилиндров определяются соотношениями (13)–(18), которые, с одной стороны, приводят к улучшению условий теоремы 1, а с другой стороны — к анализу функций $G_1^+(\tilde{\sigma})$, $G_1^-(\tilde{\sigma})$, $G_2^+(\tilde{\sigma})$, $G_2^-(\tilde{\sigma})$ на знакоопределённость.

Теорема 3. Пусть для системы (1) выполняется условие (i) теоремы 1 и справедливы утверждения:

- (i) $\varphi(\sigma)$ является Δ -периодической функцией, имеющей два нуля на периоде: $\varphi(\sigma_1) = \varphi(\sigma_2) = 0$, $0 = \sigma_1 < \sigma_2 < \Delta$, $\dot{\varphi}_0(0) > 0$, $\dot{\varphi}_0(\sigma_2) < 0$, $\dot{\varphi}(\sigma)$ ограничена на сегменте $[0; \Delta]$;

(ii) существует такое $r_1 > 0$, что система дифференциальных уравнений второго порядка

$$\dot{y} = -\frac{\nu y}{\Gamma\sqrt{\Gamma}} - \varphi(\sigma) + \mu + \xi_2 \frac{2ky}{\sqrt{\Gamma}(1 + \tau^2\Gamma y^2)}, \quad \dot{\sigma} = y \quad (19)$$

при $\mu = \mu_1 > r_1\Gamma^{-1}$ имеет решение, определяющее функцию $f_1^-(\sigma)$, обладающую свойствами

$$f_1^-(-\bar{\sigma}_3) = f_1^-(\bar{\sigma}_2) = 0, \quad -\bar{\sigma}_3 < 0, \quad \bar{\sigma}_2 > 0, \\ f_1^-(\sigma) < 0 \quad \forall \sigma \in (-\bar{\sigma}_3, \bar{\sigma}_2);$$

(iii) система (19) при $\mu = \mu_1 > r_1\Gamma^{-1}$ имеет решение, определяющее функцию $f_2^+(\sigma)$, обладающую свойствами

$$f_2^+(-\bar{\sigma}_5) = f_2^+(\bar{\sigma}_4) = 0, \quad -\Delta + \sigma_2 < -\bar{\sigma}_5 < -\bar{\sigma}_3 < 0, \quad \bar{\sigma}_4 > \bar{\sigma}_2 > 0, \\ f_2^+(\sigma) > 0 \quad \forall \sigma \in (-\bar{\sigma}_5, \bar{\sigma}_4);$$

(iv) существует такое $r_2 > 0$, что система (19) при $\mu = -\mu_2 < -r_2\Gamma^{-1}$ имеет решение, определяющее функцию $f_1^+(\sigma)$, обладающую свойствами

$$f_1^+(-\bar{\sigma}_1) = f_1^+(\bar{\sigma}_2), \quad -\bar{\sigma}_3 < -\bar{\sigma}_1 < 0, \\ f_1^+(\sigma) > 0 \quad \forall \sigma \in (-\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2);$$

(v) система (19) при $\mu = -\mu_2 < -r_2\Gamma^{-1}$ имеет решение, определяющее функцию $f_2^-(\sigma)$, обладающую свойствами

$$f_2^-(-\bar{\sigma}_5) = f_2^-(\bar{\sigma}_6) = 0, \quad \bar{\sigma}_4 < \bar{\sigma}_6 < \sigma_2, \\ f_2^-(\sigma) < 0 \quad \forall \sigma \in (-\bar{\sigma}_5, \bar{\sigma}_6);$$

(vi) функции $f_1^+(\sigma)$, $f_2^+(\sigma)$, $f_1^-(\sigma)$, $f_2^-(\sigma)$ удовлетворяют неравенствам

$$f_1^+(\sigma) < f_2^+(\sigma), \quad \sigma \in (-\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2), \\ f_2^-(\sigma) < f_1^-(\sigma), \quad \sigma \in (-\bar{\sigma}_3, \bar{\sigma}_2);$$

(vii) для любого $\sigma \in [-\bar{\sigma}_3, -\bar{\sigma}_1]$ справедливо неравенство

$$-r_2 - \Gamma\varphi(\sigma) > 0;$$

(viii) для любого $\sigma \in [\bar{\sigma}_4, \bar{\sigma}_6]$ справедливо неравенство

$$r_1 - \Gamma\varphi(\sigma) < 0;$$

(ix) для функции

$$\psi_1(u) = u\left(\nu\Gamma^{-1}(\alpha_1 - \nu\Gamma^{-1}) - \beta_1\right) + r_1(\nu\Gamma^{-1} - \alpha_1) + \frac{2ku}{1 + \tau^2u^2}(\nu\Gamma^{-1}\xi_2 - \xi_1)$$

при $u \in [-u_1, u_2]$ выполняется неравенство $\psi_1(u) < 0$, где

$$\min_{\sigma \in [-\bar{\sigma}_5, \bar{\sigma}_6]} \sqrt{\Gamma}f_2^-(\sigma) = -u_1, \quad \max_{\sigma \in [-\bar{\sigma}_5, \bar{\sigma}_4]} \sqrt{\Gamma}f_2^+(\sigma) = u_2;$$

(x) для любого $u \in [-u_1, u_2]$ функция

$$\psi_2(u) = u\left(\nu\Gamma^{-1}(\alpha_1 - \nu\Gamma^{-1}) - \beta_1\right) - r_2(\nu\Gamma^{-1} - \alpha_1) + \frac{2ku}{1 + \tau^2u^2}(\nu\Gamma^{-1}\xi_2 - \xi_1)$$

удовлетворяет соотношению $\psi_2(u) > 0$.

Тогда система (1) имеет предельный цикл первого рода.

В теореме 3 с использованием результатов работ [1–7] предложен подход определения условий существования циклов первого рода многомерных систем с использованием систем дифференциальных уравнений второго порядка. При этом анализ многомерных систем сводится к изучению систем дифференциальных уравнений второго порядка. Рассматривается конструкция, состоящая из двух цилиндрических поверхностей, радиусы которых являются функциями, зависящими от σ и двух плоскостей, ограничивающих эти поверхности. В силу условий теоремы 3 доказывается, что полученное множество является тороидальным, положительно инвариантным и содержит предельный цикл. Рассмотрен пример системы (1) с функцией $\varphi(\sigma) = \sin \sigma - \gamma$, $\gamma > 0$, для которой выполняются условия теорем 1–3. Проведен сравнительный анализ полученных результатов.

Теорема 4. Пусть для системы (1) выполнены следующие условия:

- (i) $c^T b = -\Gamma$, $c^T A = l^T$, $l^T b = \nu > 0$, $c^T d = \xi_2 > 0$, $l^T d = -\xi_1 < 0$, $\text{rang} \|c, l\| = 2$, $l^T A = -\alpha_1 l^T - \beta_1 c^T$, $c^T A^{-1} b \neq 0$, $\alpha_1 > 0$, $\beta_1 > 0$, $k > 0$;
- (ii) $\varphi(\sigma)$ является Δ -периодической функцией, имеющей два нуля на периоде, $\varphi(\sigma_1) = \varphi(\sigma_2) = 0$, $0 < \sigma_1 < \sigma_2 < \Delta$, для $\tilde{\sigma} = \sigma - \sigma_1$ справедливы соотношения

$$\varphi(\sigma) = a_2 \tilde{\sigma} + \tilde{\sigma}^2 \varphi_2(\tilde{\sigma}), \quad |\varphi_2(\tilde{\sigma})| \leq \tau_1 + \tau_2 |\tilde{\sigma}|, \quad \varphi(\sigma) = \varphi(\tilde{\sigma} + \sigma_1) = \varphi_0(\tilde{\sigma}),$$

$$\dot{\varphi}_0(0) > 0, \quad \tilde{\sigma}_2 = \sigma_2 - \sigma_1, \quad \dot{\varphi}_0(\tilde{\sigma}_2) < 0,$$

функция $\dot{\varphi}(\tilde{\sigma})$ ограничена на сегменте $[0, \Delta]$, $\tau_1 \geq 0$, $\tau_2 \geq 0$;

- (iii) система матричных уравнений относительно матриц H , L_2 , M_2

$$A^T H + H A = -L_2 - 2\tilde{\lambda}_1 H, \quad (20)$$

$$(A + 2kdc^T)^T H + H (A + 2kdc^T) = -M_2 + 2m_2 cc^T - 2\tilde{\lambda}_1 H, \quad (21)$$

$$Hb = -c \quad (22)$$

при $\tilde{\lambda}_1 > 0$, $m_2 > 0$ имеет решение $H = H^T \geq 0$, $L_2 = L_2^T \geq 0$, $M_2 = M_2^T \geq 0$, матрица H имеет действительные собственные значения;

- (iv) матрицы H , L_2 , M_2 удовлетворяют соотношениям

$$H = \bar{\gamma}_1 cc^T + \bar{\gamma}_2 (l + \nu \Gamma^{-1} c) (l + \nu \Gamma^{-1} c)^T, \quad (23)$$

$$L_2 = 2\bar{\eta}_1 (l + \bar{\eta}_2 c) (l + \bar{\eta}_2 c)^T, \quad (24)$$

$$M_2 = 2\bar{\nu}_1 (l + \bar{\nu}_2 c) (l + \bar{\nu}_2 c)^T, \quad (25)$$

где $\bar{\gamma}_1, \bar{\gamma}_2, \bar{\eta}_1, \bar{\nu}_1 \in \mathbb{R}^+$;

- (v) существуют $\lambda_1, \lambda_2, \tilde{\lambda}_1 \in \mathbb{R}$, удовлетворяющие неравенствам

$$\lambda_2^2 = a_2 + \sqrt{\bar{\gamma}_1} \lambda_1 (\nu \Gamma^{-1} - 2\tilde{\lambda}_1) + \lambda_1^2, \quad (26)$$

$$\tilde{\lambda}_1 (\lambda_1^2 + \lambda_2^2) - \sqrt{\bar{\gamma}_1} \lambda_1 a_2 \Gamma - \bar{\gamma}_1^{-1/2} \lambda_1 \lambda_2^2 - \bar{\gamma}_1^{-1/2} \lambda_1^3 \leq 0; \quad (27)$$

- (vi) существует такое $R \in \mathbb{R}$, что

$$\left(\frac{\lambda_1}{\sqrt{\bar{\gamma}_1}} - \tilde{\lambda}_1 \right) R^2 + \frac{\sqrt{\bar{\gamma}_1} \lambda_1}{\sqrt{\bar{\gamma}_2} \lambda_2} R^2 + \left(\frac{\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}}{\sqrt{\bar{\gamma}_1} \lambda_2^3} \tau_1 + \frac{\sqrt{\bar{\gamma}_1} \Gamma \lambda_1}{\lambda_2^3} \tau_1 \right) R^3 +$$

$$+ \left(\frac{\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}}{\sqrt{\bar{\gamma}_1} \lambda_2^4} \tau_2 + \frac{\sqrt{\bar{\gamma}_1} \Gamma \lambda_1}{\lambda_2^4} \tau_2 \right) R^4 + \frac{m_2}{2\tau \sqrt{\bar{\gamma}_1}} R + \left| 2k \sqrt{\bar{\gamma}_1} \xi_2 \lambda_1 - \frac{m_2 \lambda_1}{\sqrt{\bar{\gamma}_1}} \right| \frac{R}{2\tau \lambda_2} < 0; \quad (28)$$

- (vii) существует такое $R > 0$, что система дифференциальных уравнений второго порядка

$$\dot{y} = -\frac{\nu y}{\Gamma \sqrt{\Gamma}} - \varphi(\sigma) + \mu + \xi_2 \frac{2ky}{\sqrt{\Gamma} (1 + \tau^2 \Gamma y^2)}, \quad \dot{\sigma} = y \quad (29)$$

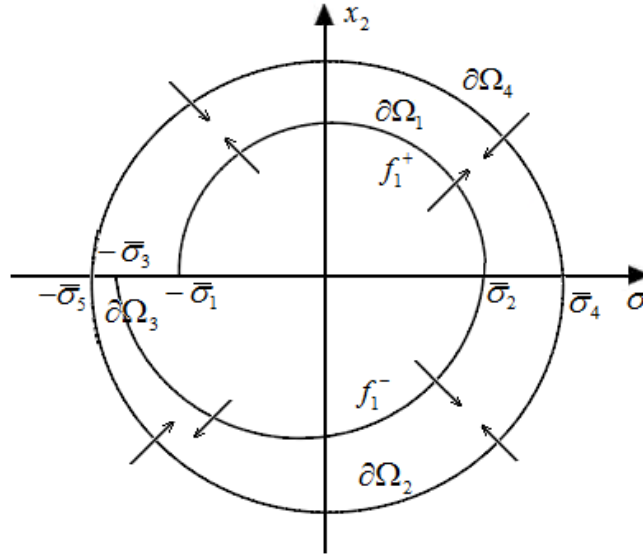


Рис. 1

при $\mu = \mu_1 > R/(\Gamma\sqrt{\gamma_2})$ имеет решение, определяющее функцию $f_1^-(\sigma)$, обладающую свойствами

$$f_1^-(-\bar{\sigma}_3) = f_1^-(\bar{\sigma}_2) = 0, \quad -\bar{\sigma}_3 < 0, \quad \bar{\sigma}_2 > 0, \\ f_1^-(\sigma) < 0 \quad \forall \sigma \in (-\bar{\sigma}_3, \bar{\sigma}_2);$$

(viii) существует такое $R > 0$, что система (29) при $\mu = -\mu_2 < -R/(\Gamma\sqrt{\gamma_2})$ имеет решение, определяющее функцию $f_1^+(\sigma)$, обладающую свойствами

$$f_1^+(-\bar{\sigma}_1) = f_1^+(\bar{\sigma}_2), \quad -\bar{\sigma}_3 < -\bar{\sigma}_1 < 0, \quad f_1^+(\sigma) > 0 \quad \forall \sigma \in (-\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2);$$

(ix) для любого $\sigma \in [-\bar{\sigma}_3, -\bar{\sigma}_1]$ выполняется соотношение

$$-\frac{R}{\sqrt{\gamma_2}} - \Gamma\varphi(\sigma) > 0;$$

(x) функции

$$g_1^\pm(\sigma) = \left(\sqrt{\gamma_1} \sqrt{\Gamma} f_1^\pm(\sigma) + \tilde{\sigma} \lambda_1 \right)^2 + \tilde{\gamma}_2 \nu^2 \Gamma^{-1} (f_1^\pm(\sigma))^2 + \tilde{\sigma}^2 \lambda_2^2 - R^2;$$

на промежутке $[-\bar{\sigma}_5, \bar{\sigma}_4]$ удовлетворяют неравенствам

$$g_1^-(\sigma) < f_1^-(\sigma), \quad g_1^+(\sigma) > f_1^+(\sigma).$$

Тогда система (1) имеет предельный цикл первого рода.

Рассмотрим функции

$$V_1(z) = x^T H x + 2\sqrt{\gamma_1} c^T x \tilde{\sigma} \lambda_1 + \tilde{\sigma}^2 \lambda_1^2 + \tilde{\sigma}^2 \lambda_2^2 - R^2, \\ V_1^+(z) = c^T x - \sqrt{\Gamma} f_1^+(\sigma), \quad V_1^-(z) = c^T x - \sqrt{\Gamma} f_1^-(\sigma), \quad W(z) = c^T x,$$

где $z = (x, \sigma)^T$, $f_1^+(\sigma)$ и $f_1^-(\sigma)$ удовлетворяют условиям (vii) и (viii) теоремы 4. Пусть

$$D = \left\{ z : V_1(z) = x^T H x + 2\sqrt{\gamma_1} c^T x \tilde{\sigma} \lambda_1 + \tilde{\sigma}^2 \lambda_1^2 + \tilde{\sigma}^2 \lambda_2^2 - R^2 \leq 0 \right\}, \quad \partial D = \left\{ z : V_1(z) = 0 \right\}.$$

Множество D представляет собой эллипсоид.

Пусть

$$\begin{aligned}\partial Q_1 &= \left\{ z : V_1^+(z) = c^T x - \sqrt{\Gamma} f_1^+(\sigma) = 0, \sigma \in [-\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2] \right\}, \\ \partial Q_2 &= \left\{ z : V_1^-(z) = c^T x - \sqrt{\Gamma} f_1^-(\sigma) = 0, \sigma \in [-\bar{\sigma}_3, \bar{\sigma}_2] \right\}, \\ \partial Q_3 &= \left\{ z : W(z) = c^T x = 0, \sigma \in [-\bar{\sigma}_3, -\bar{\sigma}_1] \right\}, \\ \partial Q &= \partial Q_1 \cup \partial Q_2 \cup \partial Q_3;\end{aligned}$$

тогда ∂Q является цилиндрической поверхностью. Обозначим внешность цилиндрической поверхности вместе с поверхностью ∂Q символом Q .

Множество $\Omega = Q \cap D$ является тороидальным; его сечение плоскостью $l^T x = 0$ изображено на рис. 1, а граница этого множества определяется равенством

$$\partial \Omega = \partial \Omega_1 \cup \partial \Omega_2 \cup \partial \Omega_3 \cup \partial \Omega_4,$$

где

$$\partial \Omega_1 = \partial Q_1 \cap D, \quad \partial \Omega_2 = \partial Q_2 \cap D, \quad \partial \Omega_3 = \partial Q_3 \cap D, \quad \partial \Omega_4 = Q \cap \partial D.$$

Аналогично теоремам 1–3 доказывается, что множество Ω является положительно инвариантным, содержащим предельный цикл первого рода.

Условия существования решения системы матричных уравнений (20)–(22) для теоремы 4 сформулированы в следующей лемме.

Лемма. Пусть для системы матричных уравнений (20)–(22) выполнены соотношения

$$A = \begin{pmatrix} -\tilde{\lambda}_1 & 0 \\ 0 & -\tilde{\lambda}_2 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}, \quad d = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix},$$

$$c_1 b_1^{-1} < 0, \quad c_2 b_2^{-1} < 0, \quad c^T b = -\Gamma, \quad c^T A b = \nu > 0, \quad \varepsilon_0 = \nu \Gamma^{-1}, \quad \alpha = \tilde{\lambda}_2 - \tilde{\lambda}_1, \quad \text{rang} \|c, l\| = 2.$$

Тогда матричные уравнения (20)–(22) имеют решение

$$H = H^T \geq 0, \quad L_2 = L_2^T \geq 0, \quad M_2 = M_2^T \geq 0,$$

матрицы H , L_2 , M_2 удовлетворяют соотношениям (23)–(25), где

$$\bar{\gamma}_1 = \Gamma^{-1}, \quad \bar{\gamma}_2 = \left(\Gamma(\tilde{\lambda}_2 - \varepsilon_0)(\varepsilon_0 - \tilde{\lambda}_1) \right)^{-1}, \quad (30)$$

$$\bar{\eta}_1 = \left(\Gamma(\varepsilon_0 - \tilde{\lambda}_1) \right)^{-1}, \quad \bar{\eta}_2 = \tilde{\lambda}_1, \quad (31)$$

$$m_2 = -\alpha^{-1} k^2 c_2 b_2 (d_1 b_1^{-1} - d_2 b_2^{-1})^2 - 2k d_1 b_1^{-1}, \quad (32)$$

$$\bar{\nu}_1 = -(a b c_2)^{-1}, \quad \bar{\nu}_2 = \tilde{\lambda}_1 + k c_2 b_2 (d_1 b_1^{-1} - d_2 b_2^{-1}). \quad (33)$$

Пример. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\dot{\tilde{x}} = \tilde{A} \tilde{x} + \tilde{b} \varphi(\sigma) + \tilde{d} \frac{2k \tilde{c}^T \tilde{x}}{1 + \tau^2 (\tilde{c}^T \tilde{x})^2}, \quad \dot{\sigma} = \tilde{c}^T \tilde{x}, \quad (34)$$

где

$$\begin{aligned}\tilde{A} &= \begin{pmatrix} -\alpha_1 & -\beta_1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{b} = \begin{pmatrix} \nu \\ -\Gamma \end{pmatrix}, \quad \tilde{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{d} = \begin{pmatrix} -\xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}, \\ \varphi(\sigma) &= \sin(\sigma) - \gamma, \quad D = \alpha_1^2 - 4\beta_1 > 0.\end{aligned}$$

Матрица $\tilde{A}$ имеет действительные собственные значения $-\tilde{\lambda}_1, -\tilde{\lambda}_2$:

$$\tilde{\lambda}_1 = \frac{\alpha_1 - \sqrt{D}}{2}, \quad \tilde{\lambda}_2 = \frac{\alpha_1 + \sqrt{D}}{2}, \quad \tilde{\lambda}_1 \tilde{\lambda}_2 = \beta_1, \quad \tilde{\lambda}_1 + \tilde{\lambda}_2 = \alpha_1, \quad \tilde{\lambda}_2 - \tilde{\lambda}_1 = \sqrt{D} = \alpha.$$

Сделав в системе (34) замену переменных $\tilde{x} = Sx$, получим систему (1), где

$$A = S^{-1} \tilde{A} S, \quad b = S^{-1} \tilde{b}, \quad c^T = \tilde{c}^T S, \quad d = S^{-1} \tilde{d}.$$

Пусть

$$S = \begin{pmatrix} \widetilde{\beta_1} & -\widetilde{\lambda_2} \\ -\widetilde{\lambda_2} & 1 \end{pmatrix};$$

тогда

$$\begin{aligned} \det S = \Delta_s = -\widetilde{\lambda_2}\sqrt{D} < 0, \quad S^{-1} = \Delta_s^{-1} \begin{pmatrix} 1 & \widetilde{\lambda_2} \\ \widetilde{\lambda_2} & \beta_1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} -\widetilde{\lambda_1} & 0 \\ 0 & -\widetilde{\lambda_2} \end{pmatrix}, \\ b = \Delta_s^{-1} \begin{pmatrix} \nu - \widetilde{\lambda_2}\Gamma \\ \widetilde{\lambda_2}\nu - \Gamma\beta_1 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} -\widetilde{\lambda_2} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad d = \Delta_s^{-1} \begin{pmatrix} -\xi_1 + \widetilde{\lambda_2}\xi_2 \\ -\widetilde{\lambda_2}\xi_1 + \beta_1\xi_2 \end{pmatrix}, \quad l = A^T c = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ -\lambda_2 \end{pmatrix}, \\ l^T A = -\alpha_1 l^T - \beta_1 c^T, \quad l^T b = \nu, \quad \det \|c, l\| = -\Delta_s \neq 0, \quad \text{rang } \|c, l\| = 2. \end{aligned}$$

Для системы (1) выполняется условие (i) теоремы 4. Рассмотрим случай

$$\begin{aligned} \alpha_1 = 1,25, \quad \beta_1 = 0,0519, \quad \xi_1 = 0,0344, \quad \xi_2 = 0,8, \\ \Gamma = 1, \quad \nu = 0,043, \quad \tau = 55,9, \quad k = 0,0374, \quad \varphi(\sigma) = \sin \sigma - \gamma, \quad \gamma = 0,36. \end{aligned}$$

Функция $\varphi(\sigma)$ является Δ -периодической с периодом $\Delta = 2\pi$. Уравнение $\varphi(\sigma) = 0$ на сегменте $[0, \Delta]$ имеет два корня σ_1 и σ_2 , $0 < \sigma_1 < \sigma_2 < \Delta$:

$$\sigma_1 = \arcsin \gamma \approx 0,368, \quad \sigma_2 = \pi - 2 \arcsin \gamma \approx 2,41.$$

Положим $\tilde{\sigma} = \sigma - \sigma_1$; тогда $\sigma = \tilde{\sigma} + \sigma_1$. Функцию $\varphi(\sigma)$ представим в виде

$$\varphi(\sigma) = a_2 \tilde{\sigma} + \tilde{\sigma}^2 \varphi_2(\tilde{\sigma});$$

для этого найдем производные функции

$$\varphi_0(\tilde{\sigma}) = -\gamma + \sin(\tilde{\sigma} + \sigma_1)$$

в нуле, получим разложение функции $\varphi_0(\tilde{\sigma})$ в ряд:

$$\varphi_0(\tilde{\sigma}) = \cos \sigma_1 \tilde{\sigma} - \frac{\sin \sigma_1}{2!} \tilde{\sigma}^2 - \frac{\cos \sigma_1}{3!} \tilde{\sigma}^3 + \frac{\sin \sigma_1}{4!} \tilde{\sigma}^4 + \dots;$$

отсюда

$$a_2 = \cos \sigma_1 = \sqrt{1 - \gamma^2} = 0,933.$$

Найдем разложение в ряд функции

$$\varphi_2(\tilde{\sigma}) = \left(-\frac{\gamma}{2!} + \frac{\gamma}{4!} \tilde{\sigma}^2 - \frac{\gamma}{6!} \tilde{\sigma}^4 + \dots \right) + \tilde{\sigma} \cos \sigma_1 \left(-\frac{1}{3!} + \frac{\tilde{\sigma}^2}{5!} - \frac{\tilde{\sigma}^4}{7!} + \dots \right) = \varphi_{21} + \tilde{\sigma} \varphi_{22}.$$

Ряды φ_{21} и φ_{22} сходятся, так что

$$|-\varphi_2| \leq |-\varphi_{21}| + |\tilde{\sigma}| |-\varphi_{22}| \leq 2^{-1}\gamma + 6^{-1}a_2|\tilde{\sigma}|.$$

Получили, что $\varphi_2(\tilde{\sigma})$ — знакопередающийся ряд, $0 < s < a_1$, где $a_1 > 0$. Таким образом,

$$|\varphi_2(\tilde{\sigma})| \leq \tau_1 + \tau_2 |\tilde{\sigma}|,$$

где

$$\tau_1 = 2^{-1}\gamma = 0,18, \quad \tau_2 = 6^{-1}\sqrt{1 - \gamma^2} = 0,155.$$

Имеем

$$\dot{\varphi}_0(0) = \cos 0 = 1 > 0, \quad \dot{\varphi}_0(\tilde{\sigma}_2) = \cos \sigma_2 = \cos 2,41 = -0,737 < 0,$$

$\dot{\varphi}(\tilde{\sigma}) = \cos \tilde{\sigma}$ — ограниченная функция на сегменте $[0, \Delta]$. Для системы (1) выполнено условие (ii) теоремы 4.

Используя соотношения (30)–(33) леммы, найдем

$$\begin{aligned} \bar{\gamma}_1 = 1, \quad \varepsilon_0 = 0,043, \quad \alpha = 1,164, \quad \bar{\gamma}_2 = 10^6, \quad m_2 = 0,0598, \\ \bar{\eta}_1 = 1,16 \cdot 10^6, \quad \bar{\eta}_2 = 0,043, \quad \bar{\nu}_1 = 1,16 \cdot 10^6, \quad \bar{\nu}_2 = 0,043, \\ h_{11} = -c_1 b_1^{-1} = 1,457, \quad h_{22} = -c_2 b_2^{-1} = 1,355 \cdot 10^6. \end{aligned}$$

Так как $h_{11} > 0$, $h_{22} > 0$, $\bar{\eta}_1 > 0$, $\bar{\nu}_2 > 0$, то матрица H имеет действительные собственные значения, $\det H \geq 0$, L_1 и L_2 удовлетворяют неравенствам $L_1 \geq 0$ и $L_2 \geq 0$. Для системы (1) выполнены условия (iii), (iv) теоремы 4.

Решая неравенства (26)–(27) относительно λ_1 и учитывая, что $\widetilde{\lambda}_1 = 0,043$, получим, что $\lambda_1 \in [0,0215; +\infty)$. Для системы (1) выполнено условие (v) теоремы 4.

Возьмём $\lambda_1 = 0,0215$ и по формуле (26) определим $\lambda_2 = 0,966$. Решение неравенства (28) определяется корнями многочлена четвертой степени. Численно доказываем, что условие (vi) теоремы 4 выполнено, если $R \in [0,0407, 0,06107]$.

Возьмём $R/\sqrt{\gamma_2} = 4,404 \cdot 10^{-5} > 0$; тогда система второго порядка (29) при

$$\mu = -\mu_2 = -4,414 \cdot 10^{-5} < -4,404 \cdot 10^{-5}$$

имеет решение, определяющее такую функцию $f_1^+(\sigma)$, что $f_1^+(0) = 0,008$, и имеем

$$f_1^+(\sigma) > 0, \quad f_1^+(-0,00826) = f_1^+(0,0083) = 0$$

для любого $\sigma \in (-0,00826, 0,0083)$. Условие (viii) теоремы 4 выполняется. Аналогично проверяется условие (vii).

Численно доказываем, что при $\sigma \in [-0,00832, -0,00826]$ выполняется соотношение

$$-4,404 \cdot 10^{-5} - \varphi(\sigma) > 0.$$

В теореме 4 выполнено условие (ix).

Наконец, можно показать, что при $\sigma \in [-0,0365, 0,0365]$ для функций $f_1^+(\sigma)$, $f_1^-(\sigma)$, $g_1^+(\sigma)$, $g_1^-(\sigma)$ выполняются неравенства из условия (x).

Итак, для системы (1) выполнены все условия теоремы 4; тогда система (1) имеет предельный цикл первого рода. Условия теоремы 4 позволяют определить область начальных условий цикла первого рода системы (1). Для рассматриваемого примера найдём $M = \Omega \cap \{z : \tilde{\sigma} = 0\}$. Для границы множества Ω возьмём $f_1^+(0) = f_1^-(0) = 0,008$. Множество M определяется линиями

$$L_1 : \quad x^T H x + 2\sqrt{\gamma_1} c^T x \tilde{\sigma} \lambda_1 + \tilde{\sigma}^2 \lambda_1^2 + \tilde{\sigma}^2 \lambda_2^2 = R^2 \quad \Leftrightarrow$$

$$\tilde{x}^T (S^{-1})^T H S^{-1} \tilde{x} = R^2 \quad \Leftrightarrow$$

$$10^6 \tilde{x}_1^2 + 2 \cdot 43 \cdot 10^3 \tilde{x}_1 \tilde{x}_2 + 1850 \tilde{x}_2^2 = 0,044041,$$

$$L_2 : \quad c^T x = \sqrt{\Gamma} f_1^+(0) \quad \Leftrightarrow \quad x_2 = 0,008,$$

$$L_3 : \quad c^T x = \sqrt{\Gamma} f_1^-(0) \quad \Leftrightarrow \quad x_2 = -0,008.$$

Численными методами показывается, что цикл первого рода определяется начальными условиями $x_1 = -0,00057$, $x_2 = 0,0132568713$, $\sigma = 0,368$.

Практическая значимость полученных результатов заключается в том, что они позволяют для системы частотно-фазовой автоподстройки частоты определить условия существования квази-синхронных режимов и их частотно-амплитудные характеристики.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Леонов Г. А., Буркин И. М., Шепелявый А. И. Частотные методы в теории колебаний. — СПб.: Изд-во СПбГУ, 1992.
2. Мамонов С. С. Динамика системы частотно-фазовой автоподстройки частоты с фильтрами первого порядка // Вестн. Новосиб. гос. ун-та. Сер. мат. мех. информ. — 2011. — 11, № 1. — С. 70–81.
3. Мамонов С. С., Ионова И. В. Применение вращения векторного поля для определения циклов второго рода // Вестн. РАЕН. Диффер. уравн. — 2014. — 14, № 5. — С. 46–54.
4. Мамонов С. С., Харламова А. О. Влияние частотного кольца системы фазовой автоподстройки на условия существования циклов второго рода // Вестн. РАЕН. Диффер. уравн. — 2014. — 14, № 5. — С. 55–60.
5. Мамонов С. С., Харламова А. О. Отделение циклов второго рода системы частотно-фазовой автоподстройки частоты // Вестн. РАЕН. Диффер. уравн. — 2015. — 15, № 3. — С. 97–102.

6. *Мамонов С. С., Харламова А. О.* Квазисинхронные режимы фазовой системы// Вестн. Рязан. гос. радиотехн. ун-та. — 2016. — 56. — С. 45–51.
7. *Мамонов С. С., Харламова А. О.* Предельные циклы первого рода фазовых систем// Вестн. РАЕН. Диффер. уравн. — 2016. — 16, № 3. — С. 68–74.
8. *Шалфеев В. Д., Матросов В. В.* Нелинейная динамика систем фазовой синхронизации. — Н. Новгород.: Изд-во ННГУ, 2013.

С. С. Мамонов

Рязанский государственный университет им. С. А. Есенина

E-mail: s.mamonov@rsu.edu.ru

А. О. Харламова

Рязанский государственный университет им. С. А. Есенина

E-mail: a.harlamova@rsu.edu.ru



НЕНУЛЕВЫЕ ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ СПЕЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

© 2018 г. М. Т. ТЕРЕХИН

Аннотация. Методом неподвижной точки нелинейного оператора, заданного на произведении двух компактных множеств, доказывается теорема о существовании ненулевого периодического решения системы дифференциальных уравнений.

Ключевые слова: ненулевое периодическое решение, нелинейный оператор, метод неподвижной точки, вектор-функция, вектор-параметр, фундаментальная матрица решений, минор, ранг матрицы, условия Липшица, вектор-форма, матрица Якоби.

AMS Subject Classification: 34C25, 34C99

1. Введение. Исследуется неавтономная система дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = (A + B(t, \lambda) + X(t, \varphi, x, \varepsilon, \lambda))x, \quad (1)$$

$$\dot{\varphi} = \mu(t, \varepsilon) + \Phi(t, \varphi, x, \varepsilon, \lambda), \quad (2)$$

в которой x и φ — соответственно n -мерный и p -мерный векторы, ε и λ — l -мерный и k -мерный векторы-параметры, A , $B(t, \lambda)$, $X(t, \varphi, x, \varepsilon, \lambda)$ — $(n \times n)$ -матрицы, $\mu(t, \varepsilon)$, $\Phi(t, \varphi, x, \varepsilon, \lambda)$ — p -мерные вектор-функции.

Введем следующие обозначения: z — вектор, $D(t)$ — матрица, $\mathbf{E}_s$ — s -мерное векторное пространство, $T > 0$, $\delta_0 > 0$ — некоторые числа,

$$|z| = \max_i \{|z_i|\}, \quad \|D(t)\| = \max_{|z| \leq 1} \{ |D(t)z| \}, \quad \|D\| = \sup_{[0, T]} \{ \|D(t)\| \},$$

$$\mathbf{E}(\delta_0) = \{ \varepsilon \in \mathbf{E}_l : |\varepsilon| \leq \delta_0 \}, \quad \Lambda(\delta_0) = \{ \lambda \in \mathbf{E}_k : |\lambda| \leq \delta_0 \},$$

$$M(\delta_0) = [0, T] \times M_0(\delta) \times \mathbf{E}_n \times \mathbf{E}(\delta_0) \times \Lambda(\delta_0), \quad M_0(\delta_0) = \{ \varphi \in \mathbf{E}_p : |\varphi| \leq \delta_0 \}.$$

Всюду далее будем предполагать, что на множестве $M(\delta_0)$ определены и непрерывны вектор-функции $\mu(t, \varepsilon)$, $\Phi(t, \varphi, x, \varepsilon, \lambda)$, матрицы $B(t, \lambda)$, $X(t, \varphi, x, \varepsilon, \lambda)$, и выполнены условия

$$\| \Phi(t, \varphi', x, \varepsilon', \lambda') - \Phi(t, \varphi'', x, \varepsilon'', \lambda'') \| \leq c_1(\delta) |\varphi' - \varphi''| + c_2(\delta) |\varepsilon' - \varepsilon''| + c_3(\delta) |\lambda' - \lambda''|,$$

$$\| B(t, \lambda') - B(t, \lambda'') \| \leq a |\lambda' - \lambda''|, \quad 0 < \delta \leq \delta_0,$$

$$|\mu(t, \varepsilon') - \mu(t, \varepsilon'')| \leq |\varepsilon' - \varepsilon''|,$$

a, b — некоторые положительные числа. При любом $i = \overline{1, 3}$ предполагаем, что $c_i(\delta) \rightarrow 0$, $l_i(\delta) \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0$ равномерно относительно t, x на множестве $[0, T] \times R$, где R — произвольное, но

фиксированное замкнутое и ограниченное множество пространства $\mathbf{E}_n$,

$$\begin{aligned} X(t, \varphi, 0, \varepsilon, \lambda) &= 0, \quad \Phi(t, \varphi, 0, \varepsilon, \lambda) = 0, \quad B(t, 0) = 0, \quad \mu(t, 0) = 0, \\ \lim_{\lambda \rightarrow 0} B(t, \lambda) &= 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0} X(t, \varphi, x, \varepsilon, \lambda) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \Phi(t, \varphi, x, \varepsilon, \lambda) = 0; \\ \int_0^T \mu(t, \varepsilon) dt &= G\varepsilon + \Theta(\varepsilon), \end{aligned}$$

где G — матрица,

$$|\Theta(\varepsilon') - \Theta(\varepsilon'')| \leq \tau(\delta) |\varepsilon' - \varepsilon''|,$$

$\tau(\delta) \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0$. Будем считать, что вектор-функции $\mu(t, \varepsilon)$, $\Phi(t, \varphi, x, \varepsilon, \lambda)$, матрицы $B(t, \lambda)$, $X(t, \varphi, x, \varepsilon, \lambda)$ являются T -периодическими по t в области определения.

Рассмотрим задачу об определении условий существования ненулевого T -периодического решения системы (1), (2).

Проблема существования периодического решения системы (1)-(2) рассматривалась в [1-3]; одним из основных требований в указанных работах являлось предположение о том, что все собственные числа матрицы A имеют ненулевые действительные части. В данной статье предложен способ построения преобразования периодической функции в периодическую, при этом матрица A может иметь как нулевые, так и чисто мнимые собственные числа.

Следует отметить, что к системе (1), (2) посредством введения полярных координат может быть преобразована система вида

$$\dot{y} = S(v)y + f(t, y, v),$$

где y, f — n -мерные векторы, $S(v)$ — матрица, v — вектор-параметр.

2. Основные результаты. Символом $C(d, k)$ обозначим множество T -периодических вектор-функций $F(t)$, удовлетворяющих условиям

$$|F(t)| \leq d, \quad |F(t') - F(t'')| \leq k|t' - t''| \quad \forall [t', t''] \in [0, T],$$

где d, k — некоторые положительные числа.

Определение 1. Пусть $F(t) \in C(d, k)$. Решением системы (2) при $x = F(t)$, $\varepsilon \in \mathbf{E}(\delta_0)$, $\lambda \in \Lambda(\delta_0)$ будем называть определенную и непрерывно дифференцируемую на сегменте $[a, b]$ вектор-функцию $\varphi(t)$, удовлетворяющую системе (2) при любом $t \in [a, b]$.

Решение $\varphi(t)$ системы

$$\dot{\varphi} = \mu(t, \varepsilon) + \Phi(t, \varphi, F(t), \varepsilon, \lambda), \quad (3)$$

удовлетворяющее начальным условиям $\varphi(0) = \varphi_0$, обозначим символом $\varphi(t, \varphi_0, F, \varepsilon, \lambda)$, $\varphi_0 \in \mathbf{E}_p$.

Пусть $\varphi^* \in \mathbf{E}_p$ — произвольный, но фиксированный вектор. Из принятых предположений следует, что при $x = 0$, $\varepsilon = 0$ решением системы уравнений (2) является вектор-функция $\varphi(t) \equiv \varphi^*$. Тогда на основании теоремы о единственности и непрерывной зависимости решения от начальных данных и параметра существуют такие числа d^* и $\delta^* \in (0, \delta_0]$, что при любых φ_0 , $|\varphi_0 - \varphi^*| \leq \delta^*$, $F(t) \in C(d^*, k)$, $\varepsilon \in \mathbf{E}(\delta^*)$, $\lambda \in \Lambda(\delta^*)$ система (2) имеет решение $\varphi(t, \varphi^* + \varphi_0, F, \varepsilon, \lambda)$, $\varphi(0, \varphi^* + \varphi_0, F, \varepsilon, \lambda) = \varphi^* + \varphi_0$, определенное на сегменте $[0, T]$, непрерывное на множестве $[0, T] \times \{x : |x| \leq d^*\} \times \mathbf{E}(\delta^*) \times \Lambda(\delta^*)$ и удовлетворяющее неравенству

$$|\varphi(t, \varphi^* + \varphi_0, F, \varepsilon, \lambda) - \varphi^*| \leq \delta_0$$

при любом $t \in [0, T]$.

Для простоты записей положим $\varphi^* = 0$, $\varphi_t = \varphi(t, \varphi_0, F, \varepsilon, \lambda)$.

Для системы (2) найдем условия существования T -периодического решения.

Лемма 1. Решение $\varphi_t = \varphi(t, \varphi_0, F, \varepsilon, \lambda)$ системы (2) удовлетворяет условию Липшица по переменным ε, λ .

Доказательство. Пусть $\varphi'_t = \varphi(t, \varphi_0, F, \varepsilon', \lambda')$, $\varphi''_t = \varphi(t, \varphi_0, F, \varepsilon, \lambda'')$. Тогда, учитывая, что

$$\varphi_t = \varphi_0 + \int_0^t \left(\mu(\xi, \varepsilon) + \Phi(\xi, \varphi_\xi, F(\xi), \varepsilon, \lambda) \right) d\xi,$$

получим, что для любых $\varepsilon', \varepsilon'' \in \mathbf{E}(\delta)$, $\lambda', \lambda'' \in \Lambda(\delta)$, $F(t) \in C(d, k)$, $d \in (0, d^*]$, $t \in [0, T]$ справедлива оценка

$$\begin{aligned} |\varphi'_t - \varphi''_t| &\leq \int_0^t (c_1(\delta)|\varphi'_\xi - \varphi''_\xi| + c_2(\delta)|\varepsilon' - \varepsilon''| + c_3(\delta)|\lambda' - \lambda''| + b|\varepsilon' - \varepsilon''|) d\xi \leq \\ &\leq T((c_2(\delta) + b)|\varepsilon' - \varepsilon''| + c_3(\delta)|\lambda' - \lambda''|) + \int_0^t c_1(\delta)|\varphi'_\xi - \varphi''_\xi| d\xi. \end{aligned}$$

Согласно лемме Гронуолла—Беллмана (см. [3, с. 108]) получим

$$|\varphi'_t - \varphi''_t| \leq T((c_2(\delta) + b)|\varepsilon' - \varepsilon''| + c_3(\delta)|\lambda' - \lambda''|) \exp(c_1(\delta)T).$$

Полагая

$$\gamma_1(\delta) = T(c_2(\delta) + b) \exp(c_1(\delta)T), \quad \gamma_2(\delta) = Tc_3(\delta) \exp(c_1(\delta)T),$$

получим справедливость неравенства

$$|\varphi'_t - \varphi''_t| \leq \gamma_1(\delta)|\varepsilon' - \varepsilon''| + \gamma_2(\delta)|\lambda' - \lambda''|. \quad (4)$$

Лемма доказана. $\square$

Непосредственно из определения периодического решения следует, что $\varphi_t = \varphi(t, \varphi_0, F, \varepsilon, \lambda)$ является T -периодическим решением системы (2) тогда и только тогда, когда выполняется неравенство

$$G\varepsilon + \Theta(\varepsilon) + \int_0^T \Phi(t, \varphi_t, F(t), \varepsilon, \lambda) dt = 0. \quad (5)$$

Теорема 1. Если $\text{rang } G = p$, то существуют такие числа $\delta_1 \in (0, \delta^*]$ и $d \in (0, d^*]$, что для любой вектор-функции $F(t) \in C(d, k)$ и любого фиксированного вектора $\lambda \in \Lambda(\delta^*)$ существует значение параметра $\varepsilon \in \mathbf{E}(\delta_1)$, при котором решение $\varphi_t = \varphi(t, \varphi_0, F, \varepsilon, \lambda)$ системы (2) является T -периодическим.

Доказательство. Как было отмечено выше, при любых вектор-функции $F(t) \in C(d, k)$ и векторах $\varepsilon \in \mathbf{E}(\delta^*)$, $\lambda \in \Lambda(\delta^*)$ система (2) имеет решение $\varphi_t = \varphi(t, \varphi_0, F, \varepsilon, \lambda)$, определенное и ограниченное на сегменте $[0, T]$.

Убедимся, что существуют такие числа $\delta_1 \in (0, \delta^*]$ и $d \in (0, d^*]$, что для любой вектор-функции $F(t) \in C(d, k)$ и любого вектора $\lambda \in \Lambda(\delta^*)$ существует вектор $\varepsilon \in \mathbf{E}(\delta_1)$, удовлетворяющий равенству (5).

Для простоты рассуждений положим, что минор порядка p , отличный от нуля, расположен на первых p столбцах матрицы G . Тогда систему (5) можно записать так:

$$\varepsilon_1 = -G_1^{-1} \left(G_2 \varepsilon_2 + \int_0^T \Phi(t, \varphi_t, F(t), \varepsilon, \lambda) dt + \Theta(\varepsilon) \right). \quad (6)$$

Оператор Γ определим правой частью равенства (6). Пусть $\nu \in (0, 1)$ — некоторое число. Учитывая свойства величин $c_1(\delta)$, $\gamma_1(\delta)$, $c_2(\delta)$, $\tau(\delta)$, выберем число $\delta_1 \in (0, \delta^*]$ так, чтобы при любом $\delta \in (0, \delta_1]$ выполнялось неравенство

$$\|G_1^{-1}\|T(c_1(\delta)\gamma_1(\delta) + c_2(\delta) + \tau(\delta)) < \nu.$$

Тогда для любых $\varepsilon'_1, \varepsilon''_1$, удовлетворяющих условиям $(\varepsilon'_1, \varepsilon_2) \in \mathbf{E}(\delta_1)$ и $(\varepsilon''_1, \varepsilon_2) \in \mathbf{E}(\delta_1)$, справедлива оценка

$$\begin{aligned} |\Gamma \varepsilon'_1 - \Gamma \varepsilon''_1| &\leq \|G_1^{-1}\| T \left(c_1(\delta) |\varphi'_t - \varphi''_t| + c_2(\delta) |\varepsilon'_1 - \varepsilon''_1| + \tau(\delta) |\varepsilon'_1 - \varepsilon''_1| \right) \leq \\ &\leq \|G_1^{-1}\| T \left(c_1(\delta) \gamma_1(\delta) + c_2(\delta) + \tau(\delta) \right) |\varepsilon'_1 - \varepsilon''_1| \leq \nu |\varepsilon'_1 - \varepsilon''_1|, \end{aligned}$$

т.е. оператор Γ на множестве $\mathbf{E}^*(\delta_1) = \{\varepsilon_1 : |\varepsilon_1| \leq 1\}$ является оператором сжатия. Кроме того, числа $d, \bar{\delta} \in (0, \delta_1]$ выберем так, что для любых вектор-функций $F(t) \in C(d, k)$, вектора ε_2 ($|\varepsilon_2| \leq \bar{\delta}$), и вектора $\lambda \in \Lambda(\delta^*)$, $\varepsilon_1 = 0$, будет выполнено неравенство

$$|\Gamma_0| \leq \|G_1^{-1}\| \left(|G_2 \varepsilon_2| + \int_0^T |\Phi(t, \varphi_t, F(t), \varepsilon, \lambda)| dt + |\Theta(\varepsilon)| \right) \leq (1 - \nu) \delta_1.$$

Следовательно,

$$|\Gamma \varepsilon_1| \leq |\Gamma \varepsilon_1 - \Gamma_0| + |\Gamma_0| < \delta_1.$$

Отсюда по теореме Банаха следует, что при любых фиксированных векторах $|\varepsilon_2| \leq \bar{\delta}$, $\lambda \in \Lambda(\delta^*)$ и вектор-функции $F(t) \in C(d, k)$ оператор Γ на множестве $\mathbf{E}^*(\delta_1)$ имеет единственную неподвижную точку. Следовательно, при зафиксированном $|\varepsilon_2^*| \leq \bar{\delta}$ получим, что вектор $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2^*) \in \mathbf{E}(\delta_1)$ является единственным решением системы (5). Это значит, что для любых вектор-функций $F(t) \in C(d, k)$ и вектора $\lambda \in \Lambda(\delta^*)$ существует единственный вектор $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2^*) \in \mathbf{E}(\delta_1)$, при котором система (2) имеет решение φ_t , удовлетворяющее равенству (5), и это решение является T -периодическим. Теорема доказана. $\square$

Далее будем предполагать, что числа d и δ_1 выбраны согласно теореме 1. В основе доказательства теоремы о существовании ненулевого периодического периодического решения системы (1)-(2) лежит следующая теорема.

Теорема 2 (см. [4]). Пусть выполнены следующие условия:

- 1) $\mathbf{K}$ и Λ — замкнутые компактные множества в линейных нормированных пространствах, причем $\mathbf{K}$ — выпуклое множество;
- 2) на подмножестве множества $\mathbf{K} \times \Lambda$ определен такой оператор T_λ , что для любого $x \in \mathbf{K}$ существует единственное $\lambda \in \Lambda$, удовлетворяющее включению $T_\lambda x \in \mathbf{K}$;
- 3) из того, что $x_n \rightarrow x_0$, $\lambda_n \rightarrow \lambda_0$, $y_n = T_{\lambda_n} x_n$, $y_n \rightarrow y_0$, следует, что $y_0 = T_{\lambda_0} x_0$.

Тогда существуют такие $x^* \in \mathbf{K}$ и $\lambda^* \in \Lambda$, что $y^* = T_{\lambda^*} x^*$.

Пусть вектор-функция $F(t) \in C(d, k)$ и $\lambda \in \Lambda(\delta^*)$. Тогда на основании теоремы 1 заключаем, что существует единственный вектор $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2^*) \in \mathbf{E}(\delta_1)$, при котором $\varphi_t = \varphi(t, \varphi_0, F, \varepsilon, \lambda)$ — T -периодическое решение системы (2).

Одновременно с системой (1) рассмотрим систему

$$\dot{y} = \left(A + B(t, \lambda) + X(t, \varphi_t, F(t), \varepsilon, \lambda) \right) y. \quad (7)$$

Пусть $Y(t, \varphi_t, F, \varepsilon, \lambda)$ — фундаментальная матрица системы (7), $Y(0, \varphi_t, F, \varepsilon, \lambda) = E$, E — единичная матрица. Тогда решение $y(t, \varphi_t, F, \varepsilon, \lambda)$, $y(0, \varphi_t, F, \varepsilon, \lambda) = \alpha$, системы (7) определяется равенством

$$y(t, \varphi_t, F, \varepsilon, \lambda) = Y(t, \varphi_t, F, \varepsilon, \lambda) \alpha, \quad (8)$$

где α — некоторый постоянный вектор. Для того, чтобы решение $y(t, \varphi_t, F, \varepsilon, \lambda)$ было T -периодическим, необходимо и достаточно выполнения равенства

$$\left(Y(T, \varphi_T, F, \varepsilon, \lambda) - E \right) \alpha = 0.$$

Следует отметить, что равенство (8) при любом фиксированном $\lambda \in \Lambda(\delta^*)$ на множестве $C(d, k)$ определяет оператор $L(\lambda) : F(t) \rightarrow y(t, \varphi_t, F, \varepsilon, \lambda)$, который любой вектор-функции $F(t) \in C(d, k)$ ставит в соответствие вектор-функцию $y(t, \varphi_t, F, \varepsilon, \lambda)$.

Теорема 3 (см. [4]). *Неподвижные точки оператора $L(\lambda)$ являются T -периодическими решениями системы (1).*

Фундаментальную матрицу решений системы (7) представим равенством

$$Y(t, \varphi_t, F, \varepsilon, \lambda) = \overline{X}(t) + H(t, \varphi_t, F, \varepsilon, \lambda), \quad (9)$$

в котором $\overline{X}(t)$ — фундаментальная матрица решений системы $\dot{x} = Ax$, $\overline{X}(0) = E$; матрица $H(t, \varphi_t, F, \varepsilon, \lambda)$, $H(0, \varphi_t, F, \varepsilon, \lambda) = 0$, является решением матричного дифференциального уравнения

$$\dot{D} = \left(A + B(t, \lambda) + X(t, \varphi_t, F(t), \varepsilon, \lambda) \right) D + \left(B(t, \lambda) + X(t, \varphi_t, F(t), \varepsilon, \lambda) \right) \overline{X}(t)$$

и, следовательно, определяется равенством

$$H(t, \varphi_t, F, \varepsilon, \lambda) = Y(t, \varphi_t, F, \varepsilon, \lambda) \int_0^t Y^{-1}(\tau, \varphi_\tau, F(\tau), \varepsilon, \lambda) \left(B(\tau, \lambda) + X(\tau, \varphi_\tau, F(\tau), \varepsilon, \lambda) \right) \overline{X}(\tau) d\tau. \quad (10)$$

Тогда $H(t, \varphi_t, F, \varepsilon, \lambda) = O(|\lambda|) + O(d)$ в силу непрерывности матриц $Y(t, \varphi_t, F, \varepsilon, \lambda)$, $Y^{-1}(t, \varphi_t, F, \varepsilon, \lambda)$ в области определения.

Убедимся, что решение системы (7) удовлетворяет условию Липшица по переменным ε , λ . Действительно, учитывая, что при любом $t \in [0, T]$

$$\dot{y} = \left(A + B(t, \lambda) + X(t, \varphi_t, F(t), \varepsilon, \lambda) \right) y(t, \varphi_t, F(t), \varepsilon, \lambda),$$

получим,

$$y(t, \varphi_t, F(t), \varepsilon, \lambda) = \alpha + \int_0^t \left(A + B(\xi, \lambda) + X(\xi, \varphi_\xi, F(\xi), \varepsilon, \lambda) \right) y(\xi, \varphi_\xi, F, \varepsilon, \lambda) d\xi.$$

Следовательно,

$$\left| y(t, \varphi_t, F(t), \varepsilon, \lambda) \right| \leq |\alpha| + \int_0^t \left(\|A\| + \|B(\xi, \lambda)\| + \|X(\xi, \varphi_\xi, F(\xi), \varepsilon, \lambda)\| \right) \left| y(\xi, \varphi_\xi, F, \varepsilon, \lambda) \right| d\xi.$$

По лемме Гронуолла—Беллмана

$$\left| y(t, \varphi_t, F(t), \varepsilon, \lambda) \right| \leq |\alpha| \exp((\|A\| + R^* + L)T), \quad (11)$$

где $\|B(\xi, \lambda)\| \leq R^*$, $\|X(t, \varphi_t, F(t), \varepsilon, \lambda)\| \leq L$ на множестве $M_0(\delta^*)$ при любой вектор-функции $F(t) \in C(d_0, k)$, R^* , L — некоторые числа. Тогда на множестве $[0, T] \times \mathbf{E}(\delta^*) \times \Lambda(\delta^*)$

$$\begin{aligned} & \left| y(t, \varphi'_t, F(t), \varepsilon', \lambda') - y(t, \varphi''_t, F(t), \varepsilon'', \lambda'') \right| \leq \\ & \leq \int_0^t \left| \left(A + B(\xi, \lambda') + X(\xi, \varphi'_\xi, F(\xi), \varepsilon', \lambda') \right) \left(y(\xi, \varphi'_\xi, F, \varepsilon', \lambda') - y(\xi, \varphi''_\xi, F, \varepsilon'', \lambda'') \right) + \right. \\ & + \left. \left[\left(B(\xi, \lambda') + X(\xi, \varphi'_\xi, F(\xi), \varepsilon', \lambda') \right) - \left(B(\xi, \lambda'') + X(\xi, \varphi''_\xi, F(\xi), \varepsilon'', \lambda'') \right) \right] y(\xi, \varphi''_\xi, F, \varepsilon'', \lambda'') \right| d\xi \leq \\ & \leq (\|A\| + R^* + L) \int_0^t \left| y(\xi, \varphi'_\xi, F, \varepsilon', \lambda') - y(\xi, \varphi''_\xi, F, \varepsilon'', \lambda'') \right| d\xi + \\ & + |\alpha| \exp((\|A\| + R^* + L)T) \left(a|\lambda' - \lambda''| + l_1(\delta)|\varphi'_t - \varphi''_t| + l_2(\delta)|\varepsilon' - \varepsilon''| + l_3(\delta)|\lambda' - \lambda''| \right). \end{aligned}$$

На основании леммы Гронуолла—Беллмана и неравенства (4) получим

$$\begin{aligned} \left| y(t, \varphi'_t, F(t), \varepsilon', \lambda') - y(t, \varphi''_t, F(t), \varepsilon'', \lambda'') \right| &\leq \\ &\leq T \left(N_1(\delta) |\varepsilon' - \varepsilon''| + N_2(\delta) |\lambda' - \lambda''| \right) \exp((\|A\| + R^* + L)T). \end{aligned}$$

Это значит, что на множестве $\mathbf{E}(\delta) \times \Lambda(\delta)$, $\delta \in (0, \delta^*]$ решение системы (7), а следовательно, элементы матрицы $Y(t, \varphi_t, F, \varepsilon, \lambda)$ и согласно равенству (10) элементы матрицы $H(t, \varphi_t, F, \varepsilon, \lambda)$ удовлетворяют условию Липшица по переменным ε, λ .

Докажем справедливость представления

$$H(t, \varphi_t, F, \varepsilon, \lambda) = \overline{X}(t) \int_0^t \overline{X}^{-1}(\xi) B(\xi, \lambda) \overline{X}(\xi) d\xi + o(|\lambda|) + O(d). \quad (12)$$

Действительно, непосредственно из равенства

$$\overline{X}(t) = Y(t, \varphi_t, F, \varepsilon, \lambda) - H(t, \varphi_t, F, \varepsilon, \lambda)$$

следует, что

$$Y^{-1}(t, \varphi_t, F, \varepsilon, \lambda) = \overline{X}^{-1}(t) - \overline{X}^{-1}(t) H(t, \varphi_t, F, \varepsilon, \lambda).$$

Тогда на основании равенства (10) после необходимых преобразований получим

$$H(t, \varphi_t, F, \varepsilon, \lambda) = \overline{X}(t) \int_0^t \overline{X}^{-1}(\xi) B(\xi, \lambda) \overline{X}(\xi) d\xi + \Psi_1(t, \varphi_t, F, \varepsilon, \lambda) + \Psi_2(t, \varphi_t, F, \varepsilon, \lambda),$$

при любом $i \in \{1, 2\}$ матрица $\Psi_i(t, \varphi_t, F, \varepsilon, \lambda)$ на множестве $\mathbf{E}(\delta^*) \times \Lambda(\delta^*)$ удовлетворяет условию Липшица по переменным ε, λ с постоянной $\gamma_{ij} \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0$, $j \in \{1, 2\}$. Матрица $\Psi_1(t, \varphi_t, F, \varepsilon, \lambda)$ представляет сумму слагаемых, каждое из которых в качестве множителя содержит произведение матриц $H(t, \varphi_t, F, \varepsilon, \lambda)$, $B(t, \lambda)$; $\Psi_2(t, \varphi_t, F, \varepsilon, \lambda)$ — сумму слагаемых, каждое из которых в качестве множителя содержит матрицу $X(t, \varphi_t, F, \varepsilon, \lambda)$. Тогда, учитывая принятые предположения относительно матриц $B(t, \lambda)$, $X(t, \varphi_t, F, \varepsilon, \lambda)$, приходим к выводу о том, что

$$\Psi_1(t, \varphi_t, F, \varepsilon, \lambda) = o(|\lambda|) + O(d), \quad \Psi_2(t, \varphi_t, F, \varepsilon, \lambda) = O(d)$$

равномерно на множествах

$$[0, T] \times \{\varphi : |\varphi| \leq \delta_0\} \times \{d : 0 \leq d \leq d^*\} \times \mathbf{E}(\delta^*), \quad [0, T] \times \{\varphi : |\varphi| \leq \delta_0\} \times \mathbf{E}(\delta^*) \times \Lambda(\delta^*),$$

т.е. равенство (12) справедливо.

Таким образом, решение $y(t, \varphi_t, F, \varepsilon, \lambda)$ системы (7) можно представить равенством

$$y(t, \varphi_t, F, \varepsilon, \lambda) = \left(\overline{X}(t) + \overline{X}(t) \int_0^t \overline{X}^{-1}(\xi) B(\xi, \lambda) \overline{X}(\xi) d\xi + o(|\lambda|) + O(d) \right) \alpha.$$

Система уравнений для определения условий существования T -периодического решения системы (7) примет вид

$$\left(\overline{X}(T) - E + B^*(\lambda) + o(|\lambda|) + O(d) \right) \alpha = 0, \quad (13)$$

где

$$B^*(\lambda) = \overline{X}(T) \int_0^T \overline{X}^{-1}(t) B(t, \lambda) \overline{X}(t) dt.$$

Можно убедиться, что если $\det(\overline{X}(T) - E) \neq 0$, то существуют такие числа δ и d , что для любой вектор-функции $F(t) \in C(d, k)$ и любых $\varepsilon \in \mathbf{E}(\delta)$ и $\lambda \in \Lambda(\delta)$ равенство (13) не будет выполнено. Поэтому далее будем предполагать, что $\det(\overline{X}(T) - E) = 0$.

Пусть $r = \text{rang}(\overline{X}(T) - E)$, $0 \leq r < n$. Заменой переменных $\alpha = S\beta$, в которой

$$S = (s_1, s_2, \dots, s_{n-r}),$$

$s_1, s_2, \dots, s_{n-r}$ — линейно независимые решения системы $(\overline{X}(T) - E)S = 0$, систему (13) сведем к системе

$$M(\varphi_t, F, \varepsilon, \lambda)\beta = 0, \quad (14)$$

матрица $M(\varphi_t, F, \varepsilon, \lambda)$ определяется равенством

$$\begin{aligned} M(\varphi_t, F, \varepsilon, \lambda) &= \overline{B}(\lambda) + o(|\lambda|) + O(d), \\ \overline{B}(\lambda) &= B^*(\lambda)S, \quad \overline{B}(\lambda) = (\overline{b}(\lambda))_{1,1}^{n,n-r}. \end{aligned}$$

Последний столбец матрицы $M(\varphi_t, F, \varepsilon, \lambda)$ запишем в виде

$$m_{n-r}(\varphi_t, F, \varepsilon, \lambda) = \overline{b}_{n-r}(\lambda) + o(|\lambda|) + O(d),$$

$\overline{b}_{n-r}(\lambda)$ — последний столбец матрицы $\overline{B}(\lambda)$.

Определим условия существования таких чисел δ и d , что для любого $\lambda \in \Lambda(\delta)$ и любой вектор-функции $F(t) \in C(d, k)$ найдется вектор $\varepsilon \in \mathbf{E}(\delta)$, удовлетворяющий равенству

$$m_{n-r}(\varphi_t, F, \varepsilon, \lambda) = 0. \quad (15)$$

Предположим, что $\overline{b}_{n-r}(\lambda)$ может быть представлен равенством

$$\overline{b}_{n-r}(\lambda) = w_s(\lambda) + o(|\lambda|^s), \quad (16)$$

в котором $w_s(\lambda)$ — вектор-форма порядка s относительно λ . Система (15) с учетом равенства (16) примет вид

$$w_s(\lambda) + o(|\lambda|) + O(d) = 0. \quad (17)$$

Заменой переменных $\lambda = \rho e$, $\rho > 0$, система (17) преобразуется в систему

$$w_s(e) + O(\rho|e|) + \frac{1}{\rho^s}O(d) = 0. \quad (18)$$

Пусть $Q = \{e : |e| = 1\}$. Если при любом $e \in Q$ выполняется неравенство $w_s(e) \neq 0$, то существуют такие числа $\rho^* > 0$ и $d > 0$, что при любых $\rho \in (0, \rho^*)$, $\varepsilon \in \mathbf{E}(\delta^*)$, $F(t) \in C(d, k)$, $e \in Q$ равенство (18) не выполняется. Поэтому далее предполагаем, что существует вектор $e^* \in Q$, удовлетворяющий равенству $w_s(e^*) = 0$. Тогда, представляя вектор-форму $w_s(e)$ по формуле Тейлора в окрестности точки e^* , систему (18) можно записать в виде

$$D(e^*)\tau + \sum_{k=2}^s p_k(e^*, \tau) + O(\rho|e|) + \frac{1}{\rho^s}O(d) = 0, \quad (19)$$

где $D(e^*)$ — значение матрицы Якоби вектор-формы $w_s(e)$ в точке e^* ; $p_k(e^*, \tau)$ при любом $k = \overline{2, s}$ является вектор-формой порядка k относительно τ ; $e = e^* + \tau$, $|\tau| \leq \Delta$, $\Delta \in (0, 1)$ — некоторое число.

Теорема 4. Пусть выполнены следующие условия:

- 1) $n \leq q$, $\text{rang } D(e^*) = n$;
- 2) $p \leq l$, $\text{rang } G = p$.

Тогда система (1)-(2) имеет ненулевое T -периодическое решение.

Доказательство теоремы 5 проводится методом неподвижной точки.

Предположим, что $\Theta(\varepsilon) = f_m(\varepsilon) + o(|\varepsilon|)^m$, где $f_m(\varepsilon)$ — вектор-форма порядка m относительно ε . Из свойств вектор-функции $\Theta(\varepsilon)$ следует, что $o(|\varepsilon|^m)$ удовлетворяет условию Липшица с постоянной, стремящейся к нулю при $\delta \rightarrow 0$. Тогда систему (5) можно записать так:

$$G\varepsilon + f_m(\varepsilon) + \int_0^T \Phi(t, \varphi_t, F(t), \varepsilon, \lambda) dt + o(|\varepsilon|^m) = 0. \quad (20)$$

Пусть $\text{rang } G = w$, $0 \leq w < p$. Элементарными преобразованиями и заменой переменных $\varepsilon = \sigma v$, $\sigma > 0$, система (20) преобразуется в систему

$$N(v) + O(\sigma|v|) + h(\sigma, \varphi_t, F, \varepsilon, \lambda) = 0, \quad (21)$$

в которой $N(v) = \text{colon}(G^*v, f_m^*(v))$, $f_m^*(v)$ — вектор-форма порядка m относительно v , G^* — матрица, $\text{rang } G^* = w$,

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} O(\sigma|v|) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0} h(\sigma, \varphi_t, F, \varepsilon, \lambda) = 0$$

равномерно относительно $|v| \leq \eta$, $|\varphi_t| \leq \delta^*$, $\varepsilon \in \mathbf{E}(\delta^*)$, $\lambda \in \Lambda(\delta^*)$, $\eta > 0$ — некоторое число.

Теорема 5. Если при любом $|v| = 1$ выполняется неравенство $N(v) \neq 0$, то существует такое число $d > 0$, что для любой вектор-функции $F(t) \in C(d, k)$ и любого $\lambda \in \Lambda(\delta^*)$ в произвольной окрестности точки $\varepsilon = 0$ существует множество, для любой окрестности точки ε которой решение $\varphi_t = \varphi(t, \varphi_0, F, \varepsilon, \lambda)$ системы (2) не будет T -периодическим.

Предположим, что существует такой вектор v^* ($|v^*| = 1$), что $N(v^*) = 0$. Тогда, представляя вектор-форму $f_m^*(v)$ по формуле Тейлора в окрестности точки v^* и вводя замену переменных $v - v^* = z$, $|z| \leq \Delta$, $\Delta \in (0, 1)$, систему (21) можно записать в виде

$$S^*z + \sum_{k=2}^m p_k^*(v^*, z) + O(\sigma|v|) + h(\sigma, \varphi_t, F, \varepsilon, \lambda) = 0,$$

в котором $S^* = \text{colon}(G^*, G^{**}(v))$ — матрица, $G^{**}(v)$ — значение матрицы Якоби вектор-формы $f_m^*(v)$ в точке v^* , $p_k^*(v^*, z)$ — вектор-форма порядка k относительно z .

Теорема 6. Если $\text{rang } D(e^*) = n$ и $\text{rang } S^* = p$, то система (1)-(2) имеет ненулевое T -периодическое решение.

Доказательство теоремы (6) проводится методом неподвижной точки.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бибииков Ю. Н. Многочастотные нелинейные колебания и их бифуркации. — Л.: Изд-во ЛГУ, 1991.
2. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. — М.: Физматгиз, 1955.
3. Демидович Б. П. Лекции по математической теории устойчивости. — М.: Наука, 1967.
4. Терехин М. Т. Бифуркации периодических решений функционально-дифференциальных уравнений // Изв. вузов. Сер. мат. — 1999. — 10. — С. 37–42.

М. Т. Терехин

Рязанский государственный университет им. С. А. Есенина

E-mail: m.terehin@rsu.edu.ru



АСИНХРОННЫЕ РЕЖИМЫ ФАЗОВЫХ СИСТЕМ

© 2018 г. А. О. ХАРЛАМОВА

Аннотация. Рассматривается система частотно-фазовой автоподстройки частоты, математическая модель которой описывается системой дифференциальных уравнений. В работе получены условия существования асинхронных режимов фазовой системы.

Ключевые слова: система дифференциальных уравнений, частотное кольцо, цикл второго рода, система матричных уравнений, вращение векторного поля, оператор сдвига по траекториям, неподвижная точка.

AMS Subject Classification: 34K05, 34K13, 34K60

1. Введение. В работе рассматривается математическая модель системы частотно-фазовой автоподстройки (ЧФАП). Базовая математическая модель системы ЧФАП приводится к системе дифференциальных уравнений (см. [2, 3, 5–7])

$$\dot{x} = Ax + b\varphi(\sigma) + d \frac{2kc^T x}{1 + \tau^2(c^T x)^2}, \quad \dot{\sigma} = c^T x, \quad (1)$$

где $x, b, c, d \in \mathbb{R}^n$, $k, \tau \in \mathbb{R}$, $\varphi(\sigma)$ — Δ -периодическая непрерывно дифференцируемая функция. Для систем ЧФАП решается задача определения асинхронных режимов, среди которых выделяют вращательный режим, соответствующий предельному циклу второго рода. Вращательный режим представляет интерес, так как он предшествует режиму синхронизации. При добавлении частотного кольца в систему фазовой автоподстройки увеличивается область параметров системы для режимов синхронизации (см. [2, 3, 6, 7]). При исследовании системы (1) используются результаты, полученные в [4–6]. В работе показано, что применение вращения векторного поля позволяет увеличить область параметров системы (1) для циклов второго рода. Практическая значимость полученных результатов позволяет использовать систему ЧФАП как генератор модулированных по фазовой переменной нелинейных колебаний.

2. Основные результаты. Сформулируем основные результаты работы.

Теорема 1. Пусть для системы (1) выполнены следующие условия.

(i) Система матричных уравнений

$$A^T H + H A = Q_1 + 2q_1 c c^T - 2\alpha H, \quad (2)$$

$$(A + 2k d c^T)^T H + H (A + 2k d c^T) = Q_2 + 2q_2 c c^T - 2\alpha H, \quad (3)$$

$$H b = r, \quad (4)$$

где

$$q_1 = \varepsilon_1 > 0, \quad q_2 = \varepsilon_2, \quad \alpha > 0, \quad c^T b = -\Gamma, \quad r = c,$$

имеет решение

$$H = H_1 = H_1^T, \quad Q_1 = L_1 < 0, \quad Q_2 = L_2 < 0,$$

причем $\varepsilon_0 = \varepsilon_2 - \varepsilon_1 > 0$, матрица H_1 имеет одно отрицательное и $n - 1$ положительных собственных значений;

(ii) система матричных уравнений (2)–(4) при $q_1 = m_1$, $q_2 = m_2$, $r = -c$ имеет решение

$$H = H_2 = H_2^T, \quad Q_1 = M_1 < 0, \quad Q_2 = M_2 < 0,$$

причем $-m_0 = m_2 - m_1 < 0$, матрица H_2 является положительно определенной ($H_2 > 0$);

(iii) система уравнений

$$\dot{y} = -\lambda y - \varphi(\sigma) - \frac{2s\lambda\nu y}{1 + (\lambda\nu)^2 y^2}, \quad \dot{\sigma} = y \quad (5)$$

при

$$\lambda = \lambda_1 = \frac{\varepsilon_1 \Gamma + \alpha}{\sqrt{\Gamma}}, \quad s = s_1 = \frac{\varepsilon_0}{2\tau}, \quad \nu = \nu_1 = \frac{\tau\sqrt{\Gamma}}{\lambda_1}$$

имеет предельный цикл второго рода $F_1(\sigma) > 0$ для любого $\sigma \in (-\infty, +\infty)$;

(iv) система уравнений (5) при

$$\lambda = \lambda_2 = \frac{\alpha - m_1 \Gamma}{\sqrt{\Gamma}}, \quad s = s_2 = \frac{m_0}{2\tau}, \quad \nu = \nu_2 = \frac{\tau\sqrt{\Gamma}}{\lambda_2}$$

имеет предельный цикл второго рода $F_2(\sigma)$ ($F_2(\sigma) > F_1(\sigma)$) для любого $\sigma \in (-\infty, +\infty)$;

(v) для любого $\sigma \in (-\infty, +\infty)$ выполняется неравенство

$$F_2(\sigma) \leq \frac{\alpha F_1(\sigma)}{\Gamma g_1(\sigma)},$$

где

$$g_1(\sigma) = \varepsilon_1 + \frac{\varepsilon_0}{1 + \tau^2 \Gamma F_1^2(\sigma)};$$

(vi) для любого $\sigma \in (-\infty, +\infty)$ справедливо соотношение

$$g_2(\sigma) = m_1 - \frac{m_0}{1 + \tau^2 \Gamma F_2^2(\sigma)} \geq 0.$$

Тогда система (1) имеет предельный цикл второго рода.

Для доказательства теоремы 1 рассмотрим функции

$$V_1(z) = x^T H_1 x + F_1^2(\sigma), \quad V_2(z) = x^T H_2 x - F_2^2(\sigma),$$

где $z = (x, \sigma)^T$, функции $F_1(\sigma)$, $F_2(\sigma)$ удовлетворяют условиям (iii), (iv) теоремы. Пусть

$$\Omega_1 = \{z : V_1(z) \leq 0, \quad c^T x \geq 0\}, \quad \Omega_2 = \{z : V_2(z) \leq 0\}.$$

Множество $\Omega = \Omega_1 \cap \Omega_2$ содержит внутренние точки и $\Omega \cap \{z : \sigma = \sigma_0\} \neq \emptyset$ для любого $\sigma_0 \in (-\infty, +\infty)$. Граница множества Ω имеет вид $\partial\Omega = \partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2$, где

$$\partial\Omega_1 = \{z : V_1(z) = 0, \quad c^T x > 0, \quad V_2(z) \leq 0\}, \quad \partial\Omega_2 = \{z : V_2(z) = 0, \quad c^T x > 0, \quad V_1(z) \leq 0\}.$$

При доказательстве теоремы 1 используется метод нелокального сведения, предложенный в [2]. В указанном методе используются частотные условия существования решения системы матричных неравенств, обладающего определенными свойствами. Для системы (1) с матрицей A , имеющей собственные значения с мнимой частью, находятся решения системы трех матричных уравнений (2)–(4), два из которых — модифицированные уравнения Ляпунова, третье — уравнение линейной связи. Условия существования решений системы матричных уравнений (2)–(4) для теоремы 1 сформулированы в следующих леммах.

Лемма 1. Пусть для системы матричных уравнений (2)–(4) выполняются условия

$$A = \begin{pmatrix} -\alpha & \beta \\ -\beta & -\alpha \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}, \quad d = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix},$$

$$c^T b = -\Gamma < 0, \quad c^T d = -\xi, \quad \Delta_b = b^T b, \quad \tau_c = c^T J b = c_2 b_1 - c_1 b_2, \quad \Delta_c = c^T c, \quad \bar{h}_2 = c_1 b_2 + c_2 b_1,$$

$$w_c = c^T J d = c_2 d_1 - c_1 d_2, \quad w_b = b^T J d = b_2 d_1 - b_1 d_2, \quad \alpha > 0, \quad \beta > 0, \quad r = c$$

и справедливы неравенства

$$\varepsilon_1 > -\frac{\beta}{c_1^2 \Delta_b} (c_1 b_2 + c_2 b_1), \quad \varepsilon_1 \tau_c > \beta, \quad (6)$$

$$\beta \bar{h}_2 + 2k w_c c_1 b_2 + 2k \xi c_1 b_1 + \varepsilon_2 \Delta_b c_1^2 > 0, \quad (7)$$

$$k^2 \Delta_c w_b^2 + 2k \beta w_c w_b \Delta_b + \beta^2 \Delta_b - \varepsilon_2 \Delta_b \tau_c \beta < 0. \quad (8)$$

Тогда матричные уравнения (2)–(4) имеют решение

$$H = H_1 = H_1^T, \quad Q_1 = L_1 < 0, \quad Q_2 = L_2 < 0,$$

$q_1 = \varepsilon_1$, $q_2 = \varepsilon_2$, где

$$H_1 = (\Delta_b)^{-1} (cb^T + Jcb^T J), \quad (9)$$

$$L_1 = 2\beta (\Delta_b)^{-1} (Jcb^T + cb^T J^T) - 2\varepsilon_1 cc^T < 0, \quad (10)$$

$$L_2 = 2(\Delta_b)^{-1} \left(\beta (Jcb^T + cb^T J^T) + k w_c (cb^T J^T + Jbc^T) - k \xi (cb^T + bc^T) \right) - 2\varepsilon_2 cc^T < 0, \quad (11)$$

матрица H_1 имеет одно отрицательное и одно положительное собственное значение.

Лемма 2. Если для системы матричных уравнений (2)–(4) выполнены соотношения

$$r = -c, \quad \mu_1 = -\Gamma^{-1} \tau_c (c_1 b_1 - c_2 b_2), \quad \delta_1 = 2c_1 \Gamma^{-1} (\Delta_c b_2 w_b - \Delta_b c_1 \xi),$$

справедливы неравенства

$$m_1 > -\frac{\beta \tau_c}{c_1^2 \Delta_b \Gamma} (c_1 b_1 - c_2 b_2), \quad m_1 > \frac{\beta \tau_c}{\Gamma^2} > 0, \quad \tau_c > 0, \quad (12)$$

$$\beta \mu_1 + k \delta_1 - m_2 \Delta_b c_1^2 < 0, \quad (13)$$

$$\Gamma^{-2} \beta^2 \Delta_b \tau_c^2 + k^2 \Delta_c w_b^2 - 2k \beta \Gamma^{-1} \tau_c \xi \Delta_b - m_2 \Delta_b \tau_c \beta < 0, \quad (14)$$

то матричные уравнения (2)–(4) имеют решение

$$H = H_2 = H_2^T, \quad Q_1 = M_1 < 0, \quad Q_2 = M_2 < 0,$$

причем $q_1 = m_1$, $q_2 = m_2$, где

$$H_2 = -(\Delta_b)^{-1} (cb^T + Jcb^T J) + 2\Delta_c \Gamma^{-1} (E - \Delta_b^{-1} bb^T), \quad (15)$$

$$M_1 = -2\beta (\Delta_b)^{-1} (Jcb^T + cb^T J^T) + 2\beta \Delta_c \Gamma^{-1} (J - 2\Delta_b^{-1} Jbb^T) - 2m_1 cc^T < 0, \quad (16)$$

$$M_2 = (M_1 + 2m_1 cc^T) + 2k (cd^T H_2 + H_2 dc^T) - 2m_2 cc^T < 0, \quad (17)$$

матрица H_2 является положительно определенной.

Используя результаты лемм 1 и 2 и метод нелокального сведения, можно показать, что множество Ω является положительно инвариантным, а множество $\Omega \cap \{z : \sigma = \sigma_0\}$ — выпуклым, замкнутым и ограниченным. В силу соотношения (8) и теоремы Брауэра множество Ω содержит предельный цикл второго рода.

За счёт уменьшения размерности пространства и добавления линейной границы к рассматриваемому множеству Ω можно добиться улучшения результатов теоремы 1.

Теорема 2. Пусть для системы (1) выполнены следующие условия.

- (i) имеют место соотношения $c^T b = -\Gamma$, $c^T A = l^T$, $l^T b = \nu > 0$, $c^T d = \xi > 0$, $l^T d = -r < 0$, $\text{rang} \|c, l\| = 2$, $l^T A = -\alpha_1 l^T - \beta_1 c^T$, $\alpha_1 > 0$, $\beta_1 > 0$, $k < 0$;
- (ii) система матричных уравнений относительно матриц H , L_1 , L_2

$$A^T H + H A = -L_1 + 2\varepsilon_1 cc^T - 2\alpha H, \quad (18)$$

$$(A + 2kdc^T)^T H + H(A + 2kdc^T) = -L_2 + 2\varepsilon_2 cc^T - 2\alpha H, \quad (19)$$

$$Hb = c \quad (20)$$

при $\varepsilon_1 > 0$, $\alpha > 0$ имеет решение $H = H^T$, $L_1 = L_1^T \geq 0$, $L_2 = L_2^T \geq 0$, матрица H имеет одно отрицательное и $n - 1$ положительных собственных значений;

(iii) матрицы H , L_1 , L_2 удовлетворяют соотношениям

$$H = -\gamma_1 c c^T + \gamma_2 (l + \nu \Gamma^{-1} c) (l + \nu \Gamma^{-1} c)^T, \quad (21)$$

$$L_1 = 2\eta_1 (l + \eta_2 c) (l + \eta_2 c)^T, \quad (22)$$

$$L_2 = 2\nu_1 (l + \nu_2 c) (l + \nu_2 c)^T, \quad (23)$$

где $\gamma_1, \gamma_2, \eta_1, \eta_2, \nu_1, \nu_2 \in \mathbb{R}^+$;

(iv) система уравнений

$$\dot{y} = -\mu y - \varphi(\sigma) - \frac{2k\xi y}{\sqrt{\Gamma}(1 + \tau^2 \Gamma y^2)}, \quad \dot{\sigma} = y \quad (24)$$

при $\mu = \mu_2 = \nu \Gamma^{-3/2}$ имеет предельный цикл второго рода $F_2(\sigma) > 0$ для любого $\sigma \in (-\infty, +\infty)$;

(v) система уравнений (24) при $\mu = \mu_1$ имеет предельный цикл второго рода $F_1(\sigma)$ ($0 < F_1(\sigma) < F_2(\sigma)$) для любого $\sigma \in (-\infty, +\infty)$,

$$M_1 = \max_{\sigma} F_1(\sigma), \quad m_1 = \min_{\sigma} F_1(\sigma), \quad u_F = \max_{\sigma} (F_1(\sigma) F_2^{-1}(\sigma));$$

(vi) если

$$\delta = \nu \Gamma^{-1} (\nu \Gamma^{-1} - \alpha_1) + \beta_1 > 0, \quad D = \delta + 2kr - 2k\xi \nu \Gamma^{-1},$$

то для $\sigma \in (-\infty, +\infty)$ выполняется неравенство

$$D + \delta \tau^2 \Gamma F_1^2(\sigma) > 0; \quad (25)$$

(vii) справедливы соотношения

$$\varepsilon_2 - \varepsilon_1 = -\varepsilon_0 < 0, \quad (26)$$

$$q_1 = -\frac{2k\xi}{\sqrt{\Gamma}(1 + \tau^2 \Gamma M_1^2)} > 0; \quad (27)$$

(viii) для функций

$$f_1(u) = \tau^2 \Gamma \eta_1 u^2 \left((\eta_2 \sqrt{\Gamma} - \nu \Gamma^{-1/2}) u - \gamma_2^{-1/2} (\gamma_1 \Gamma u^2 - 1)^{1/2} \right)^2, \quad (28)$$

$$f_2(u) = \nu_1 \left((\nu_2 \sqrt{\Gamma} - \nu \Gamma^{-1/2}) u - \gamma_2^{-1/2} (\gamma_1 \Gamma u^2 - 1)^{1/2} \right)^2, \quad (29)$$

$$f_3(u) = \varepsilon_1 \Gamma u^2 - \mu_1 \sqrt{\Gamma} u - q_1 \sqrt{\Gamma} u + \alpha \quad (30)$$

при $u \in [1, u_F]$ выполняется неравенство

$$f(u) = m_1^2 f_1(u) + f_2(u) - f_3(u) (1 + \tau^2 \Gamma M_1^2 u^2) + \varepsilon_0 \Gamma u^2 > 0. \quad (31)$$

Тогда система (1) имеет предельный цикл второго рода.

Для доказательства теоремы 2 рассмотрим функции

$$V_1(z) = x^T H x + F_1^2(\sigma), \quad V_2(z) = c^T x - \sqrt{\Gamma} F_2(\sigma), \quad W_1(z) = l^T x + \nu \Gamma^{-1} c^T x,$$

где $z = (x, \sigma)^T$, функции $F_1(\sigma)$ и $F_2(\sigma)$ удовлетворяют условиям (iv), (v) теоремы 2. Пусть

$$\Omega_1 = \{z : V_1(z) \leq 0, c^T x \geq 0\}, \quad \Omega_2 = \{z : V_2(z) \leq 0\}, \quad \Omega_3 = \{z : W_1(z) \leq 0\}.$$

Граница множества $\Omega = \Omega_1 \cap \Omega_2 \cap \Omega_3$ имеет вид $\partial\Omega = \partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2 \cup \partial\Omega_3$, где

$$\partial\Omega_1 = \{z : V_1(z) = 0, c^T x > 0, W_1(z) \leq 0, V_2(z) \leq 0\},$$

$$\partial\Omega_2 = \{z : V_2(z) = 0, V_1(z) \leq 0, W_1(z) \leq 0\},$$

$$\partial\Omega_3 = \{z : W_1(z) = 0, V_1(z) \leq 0, V_2(z) \leq 0, c^T x \geq 0\}.$$

Сформулируем условия существования решения системы матричных уравнений (18)–(20) для теоремы 2.

Лемма 3. Пусть для системы матричных уравнений (18)–(20) выполнены соотношения

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} -\alpha & \beta \\ -\beta & -\alpha \end{pmatrix}, \quad \alpha > 0, \quad \beta > 0, \quad c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}, \quad d = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}, \\ c^T A &= l^T, \quad c^T b = -\Gamma < 0, \quad l^T b = \nu > 0, \quad \tau_c = c_2 b_1 - c_1 b_2, \\ \Delta_b &= b^T b, \quad \Delta_c = c^T c, \quad w_c = c_2 d_1 - c_1 d_2, \quad w_b = b_2 d_1 - b_1 d_2. \end{aligned}$$

Тогда матричные уравнения (18)–(20) имеют решение

$$H = H^T, \quad L_1 = L_1^T, \quad L_2 = L_2^T,$$

матрицы H , L_1 , L_2 удовлетворяют соотношениям (21)–(23), где

$$\gamma_1 = \Gamma^{-1}, \quad \gamma_2 = \frac{\Gamma}{\beta^2 \Delta_b \Delta_c}, \quad \varepsilon_1 = \frac{\beta}{\tau_c}, \quad (32)$$

$$\eta_1 = \frac{\beta(\Delta_b \Delta_c - \Gamma^2)^2}{\tau_c \Delta_b \Delta_c (\nu - \alpha \Gamma)^2}, \quad \eta_2 = \frac{\alpha \Delta_b \Delta_c - \nu \Gamma}{\Delta_b \Delta_c - \Gamma^2}, \quad (33)$$

$$\varepsilon_2 = \frac{k^2 \Delta_c w_b^2 + 2k\beta w_c \Delta_b + \beta^2 \Delta_b}{\Delta_b \tau_c \beta}, \quad (34)$$

$$\nu_1 = \frac{\beta(\Delta_b \Delta_c - \Gamma^2)^2}{\tau_c \Delta_b \Delta_c (\nu - \alpha \Gamma)^2}, \quad \nu_2 = \frac{\beta(\alpha \Delta_b \Delta_c - \nu \Gamma) + k w_b \Delta_c (\nu - \alpha \Gamma)}{\beta(\Delta_b \Delta_c - \Gamma^2)}, \quad (35)$$

матрица H имеет одно отрицательное и одно положительное собственное значение.

Аналогично теореме 1 можно показать, что множество Ω является положительно инвариантным, содержащим предельный цикл второго рода.

Пример. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\dot{\tilde{x}} = \tilde{A}\tilde{x} + \tilde{b}\varphi(\sigma) + \tilde{d} \frac{2k\tilde{c}^T \tilde{x}}{1 + \tau^2 (\tilde{c}^T \tilde{x})^2}, \quad \dot{\sigma} = \tilde{c}^T \tilde{x}, \quad (36)$$

где

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} -\alpha_1 & -\beta_1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{b} = \begin{pmatrix} \nu \\ -\Gamma \end{pmatrix}, \quad \tilde{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{d} = \begin{pmatrix} -r \\ \xi \end{pmatrix}, \quad \varphi(\sigma) = \sin(\sigma) - \gamma.$$

Матрица $\tilde{A}$ имеет собственные значения

$$\lambda_{1,2} = -2^{-1}\alpha_1 \pm 2^{-1}\sqrt{\alpha_1^2 - 4\beta_1}.$$

Если $4\beta_1 - \alpha_1^2 > 0$, то матрица $\tilde{A}$ имеет собственные значения с мнимой частью. Выполнив в системе (36) замену переменных $\tilde{x} = Sx$, получим систему (1), где

$$A = S^{-1}\tilde{A}S, \quad b = S^{-1}\tilde{b}, \quad c^T = \tilde{c}^T S, \quad d = S^{-1}\tilde{d}.$$

Пусть

$$\alpha = \frac{\alpha_1}{2}, \quad 4\beta_1 - \alpha_1^2 > 0, \quad \beta = 2^{-1}\sqrt{4\beta_1 - \alpha_1^2}, \quad S = \begin{pmatrix} \beta - \beta_1 & \alpha \\ \alpha & \beta - 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \det S &= \Delta_s = -\beta \Delta_c \neq 0, \quad \Delta_c = cc^T, \\ S^{-1} &= \Delta_s^{-1} \begin{pmatrix} \beta - 1 & -\alpha \\ -\alpha & \beta - \beta_1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} -\alpha & \beta \\ -\beta & -\alpha \end{pmatrix}, \quad b = \Delta_s^{-1} \begin{pmatrix} \nu(\beta - 1) + \alpha \Gamma \\ -\nu \alpha - \Gamma(\beta - \beta_1) \end{pmatrix}, \\ c &= \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta - 1 \end{pmatrix}, \quad d = \Delta_s^{-1} \begin{pmatrix} r(1 - \beta) - \alpha \xi \\ r\alpha + \xi(\beta - \beta_1) \end{pmatrix}, \quad l = A^T c = \begin{pmatrix} \beta - \beta_1 \\ \alpha \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Для системы (1) выполняется условие (i) теоремы 2.
Рассмотрим случай

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= 1,25, \quad \nu = 0,3125, \quad \Gamma = 1,25, \quad r = 1,14, \quad \xi = 0,8, \\ \tau &= 0,014, \quad k = -0,144, \quad \varphi(\sigma) = \sin \sigma - \gamma, \quad \gamma = 0,8.\end{aligned}$$

При проверке условий (ii)–(viii) теоремы 2 целесообразно использовать следующий алгоритм.

Алгоритм проверки условий теоремы 2. 1. Для значения $\beta = 0,4348$, используя соотношения (32)–(35) из леммы 3, найдем значения

$$\begin{aligned}\gamma_1 &= 0,8, \quad \gamma_2 = 2,427, \quad \varepsilon_1 = 0,403, \quad \varepsilon_2 = 0,129, \\ \eta_1 &= 0,91, \quad \eta_2 = 1,13, \quad \nu_1 = 0,91, \quad \nu_2 = 0,768.\end{aligned}$$

Так как $\eta_1 > 0$, $\nu_1 > 0$, то матрицы L_1 , L_2 удовлетворяют неравенствам $L_1 \geq 0$, $L_2 \geq 0$. Для системы (1) выполнены условия (ii), (iii) теоремы 2.

2. Определим начальные условия предельного цикла второго рода $F_2(\sigma)$ системы (24) при

$$\mu = \mu_2 = \nu\Gamma^{-3/2} - 10^{-8} = 0,2236, \quad \varphi(\sigma) = \sin \sigma - \gamma, \quad \gamma = 0,8.$$

При помощи численных методов можно найти начальные условия

$$y_2(0) = 2,349, \quad \sigma(0) = 0.$$

3. Найдем начальные условия предельного цикла второго рода $F_1(\sigma)$ системы (24) при

$$\mu = \mu_1 = 0,385, \quad \varphi(\sigma) = \sin \sigma - \gamma, \quad \gamma = 0,8.$$

При помощи численных методов определяются начальные условия

$$y_1(0) = 1,944, \quad \sigma(0) = 0$$

и значения

$$M_1 = \max_{\sigma} F_1(\sigma) = 1,77, \quad m_1 = \min_{\sigma} F_1(\sigma) = 0,528, \quad u_F = \max_{\sigma} (F_1(\sigma)F_2^{-1}(\sigma)) = 2,504.$$

4. Определим

$$\delta = \nu\Gamma^{-1}(\nu\Gamma^{-1} - \alpha_1) + \beta_1 = 0,33, \quad D = \delta + 2kr - 2k\xi\nu\Gamma^{-1} = 0,059.$$

Так как $D > 0$, $\delta > 0$, то выполняется неравенство (25).

5. Используя (26), (27), найдём

$$\varepsilon_0 = 0,275, \quad q_1 = 0,206.$$

6. При помощи численных методов находим определим

$$\min_{u \in [1, u_F]} f(u) = 0,0014.$$

Для системы (1) выполнены условия теоремы 2; системы (1) и (36) имеют цикл второго рода.

Результаты теоремы 2 позволяют определить в фазовом пространстве системы (36) область, содержащую начальные условия предельного цикла системы (36). Используя (21), найдем матрицу

$$M = S^{-1}HS^{-1} = \begin{pmatrix} m_1 & m_2 \\ m_2 & m_3 \end{pmatrix}.$$

Для рассматриваемого примера получим

$$m_1 = 2,427, \quad m_2 = 0,607, \quad m_3 = -0,648.$$

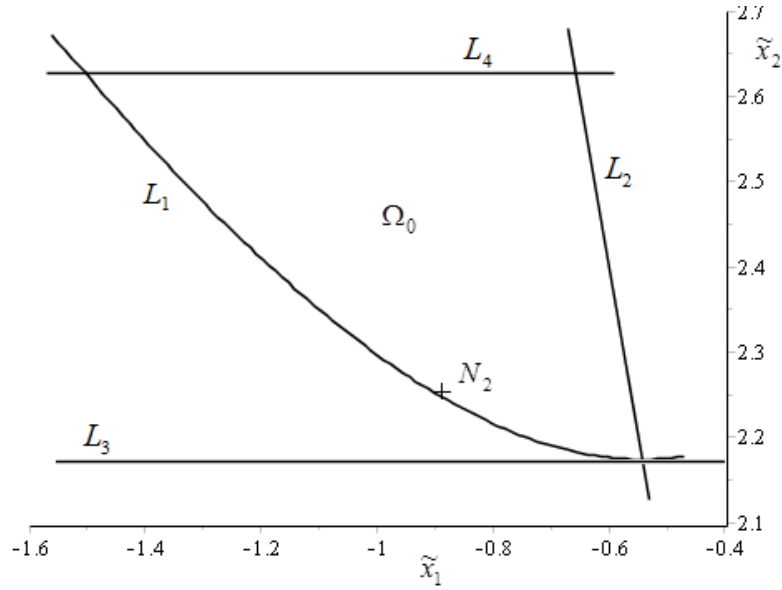


Рис. 1

В плоскости $\sigma = 0$ рассмотрим линии

$$\begin{aligned}
 L_1: \quad x^T H x &= -F_1^2(0) \Leftrightarrow \tilde{x}^T (S^{-1})^T H S^{-1} \tilde{x} = -F_1^2(0) \Leftrightarrow \\
 &2,427\tilde{x}_1^2 + 2 \cdot 0,607\tilde{x}_1\tilde{x}_2 - 0,648\tilde{x}_2^2 = -1,944^2, \\
 L_2: \quad l^T x + \nu \Gamma^{-1} c^T x &= 0 \Leftrightarrow \tilde{c}^T \tilde{A} \tilde{x} + \nu \Gamma^{-1} \tilde{c}^T \tilde{x} = 0 \Leftrightarrow \tilde{x}_1 + 0,25\tilde{x}_2 = 0, \\
 L_3: \quad c^T x &= \sqrt{\Gamma} F_1(0) \Leftrightarrow \tilde{x}_2 = 1,944\sqrt{1,25}, \\
 L_4: \quad c^T x &= \sqrt{\Gamma} F_2(0) \Leftrightarrow \tilde{x}_2 = 2,349\sqrt{1,25}.
 \end{aligned}$$

На рис. 1 изображена область Ω_0 , ограниченная линиями L_1, L_2, L_3, L_4 . Область Ω_0 содержит начальные условия предельного цикла системы (36).

Использование структуры множества Ω_0 позволяет произвести расширение области параметров системы (36), при которых она имеет цикл второго рода. Для этого рассмотрим оператор $U = T_2 \circ T_1$, где T_1 — оператор сдвига по траекториям системы (36), $T_2(x, \sigma)^T = (x, \sigma - \Delta)^T$ — параллельный перенос. При помощи численных методов нетрудно найти множество $U(\Omega_0) \subset \Omega_0$. Оставив положительно инвариантное множество Ω без изменений, будем увеличивать значение β_1 системы (36) и обозначим через U_{β_1} оператор, определяемый значением β_1 . При увеличении β_1 множество Ω перестает быть положительно инвариантным, но множество $U_{\beta_1}(\Omega_0)$ содержится во множестве Ω_0 . При помощи численных методов доказываем, что $U_{\beta_1}(\Omega_0) \subset \Omega_0$ при увеличении значения β_1 ; дальнейшее увеличение значения β_1 приводит к тому, что множество $U_{\beta_1}(\Omega_0)$ перестает быть частью множества Ω_0 , $U_{\beta_1}(\Omega_0) \not\subset \Omega_0$, $U_{\beta_1}(\Omega_0) \cap \Omega_0 = \emptyset$. В этом случае не выполняются условия теоремы Брауэра о неподвижной точке (см. [1]). Для анализа неподвижных точек оператора U_{β_1} определим непрерывное векторное поле $Q(x) = x - U_{\beta_1}(x)$. Если вращение векторного поля $Q(x)$ на границе $\partial\Omega_0$ отлично от нуля $\gamma(Q, \partial\Omega_0) \neq 0$, то согласно [1, теорема 5.15] оператор U_{β_1} имеет неподвижную точку. Пусть $\beta_1 = \beta_{11} = 0,569$; можно показать, что вращение векторного поля Q на границе $\partial\Omega_0$ отлично от нуля, $\gamma(Q, \partial\Omega_0) = 1$. Оператор U_{β_1} имеет неподвижную точку, определяющую начальные условия цикла второго рода системы (36). Таким образом, использование вращения векторного поля позволило увеличить значение β_1 от $\beta_1 = 0,4348$ до $\beta_1 = \beta_{11} = 0,569$.

Далее находим наибольшее значение $\beta_1^* = 0,645$, при котором система (36) имеет цикл второго рода (абсолютная погрешность для β_1 уменьшилась на 64%). Численно доказываем, что

система (36) при $\beta_1 = 0,569$ имеет цикл второго рода с начальными условиями

$$\tilde{x}_1(0) = -0,8925, \quad \tilde{x}_2(0) = 2,2504, \quad \sigma(0) = 0.$$

Начальные условия цикла определяют точку $N_2(-0,8925; 2,2504)$, которая изображена на рис. 1.

Таким образом, использование вращения векторного поля позволило увеличить область параметров системы (36) для циклов второго рода и приблизить значение параметра β_1 до точного значения $\beta_1^* = 0,645$, при котором у системы (36) существует цикл второго рода, и определить область начальных условий для циклов второго рода.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Красносельский М. А. Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1966.
2. Леонов Г. А., Буркин И. М., Шепелявый А. И. Частотные методы в теории колебаний. — СПб.: Изд-во СПбГУ, 1992.
3. Мамонов С. С. Динамика системы частотно-фазовой автоподстройки частоты с фильтрами первого порядка// Вестн. Новосиб. гос. ун-та. Сер. мат. мех. информ. — 2011. — 11, № 1. — С. 70–81.
4. Мамонов С. С., Ионова И. В. Применение вращения векторного поля для определения циклов второго рода// Вестн. РАЕН. Диффер. уравн. — 2014. — 14, № 5. — С. 46–54.
5. Мамонов С. С., Харламова А. О. Условия существования предельных циклов второго рода для модели системы частотно-фазовой автоподстройки частоты// Вестн. РАЕН. Диффер. уравн. — 2013. 13, № 34. — С. 51–57.
6. Мамонов С. С., Харламова А. О. Влияние частотного кольца системы фазовой автоподстройки на условия существования циклов второго рода// Вестн. РАЕН. Диффер. уравн. — 2014. — 14, № 5. — С. 55–60.
7. Шалфеев В. Д., Матросов В. В. Нелинейная динамика систем фазовой синхронизации. — Н. Новгород.: Изд-во ННГУ, 2013.

А. О. Харламова

Рязанский государственный университет им. С. А. Есенина

E-mail: a.harlamova@rsu.edu.ru



МИНИМАЛЬНОЕ УСЛОВИЕ ПРОЕКТИВНОСТИ ГЛАДКОГО ОТОБРАЖЕНИЯ И ПРОБЛЕМА ГРОНУОЛЛА

© 2018 г. А. М. ШЕЛЕХОВ

Аннотация. Доказано следующее утверждение: пусть GW и $\widetilde{GW}$ — грассмановы три-ткани, заданные соответственно в областях D и $\tilde{D}$ грассманова многообразия прямых проективного пространства P^{r+1} ; $\Phi : D \rightarrow \tilde{D}$ — локальный диффеоморфизм, переводящий слоения ткани GW в слоения три-ткани $\widetilde{GW}$. Тогда Φ переводит связки прямых в связки прямых, т.е. индуцирует точечное преобразование, которое является проективным преобразованием. В случае $r = 1$ доказательство существенно сложнее, чем в многомерном случае. В случае $r = 1$ двойственная теорема формулируется следующим образом: пусть LW — прямолинейная три-ткань на плоскости, т.е. три семейства прямых общего положения, и пусть эта ткань не является регулярной, т.е. не является локально диффеоморфной три-ткани, образованной тремя семействами параллельных прямых. Тогда всякий локальный диффеоморфизм, переводящий три-ткань LW в другую прямолинейную три-ткань $\widetilde{LW}$, является проективным преобразованием. Как следствие, отсюда получается положительное решение проблемы Гронуолла (Gronwall, 1912): если W — линеаризуемая нерегулярная три-ткань, θ и $\tilde{\theta}$ — локальные диффеоморфизмы, отображающие три-ткань W на некоторые прямолинейные три-ткани, то $\tilde{\theta} = \pi \circ \theta$, где π — проективное преобразование.

Ключевые слова: три-ткань, прямолинейная три-ткань, грассманова три-ткань, проблема Гронуолла.

AMS Subject Classification: 53A60

Введение. Известно, что гладкое отображение плоскости на себя является проективным преобразованием

$$x' = \frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_0x + b_0y + c_0}, \quad y' = \frac{a_2x + b_2y + c_2}{a_0x + b_0y + c_0} \quad (1)$$

тогда и только тогда, когда оно переводит прямые в прямые. Это утверждение можно существенно усилить. Как будет показано ниже (теорема 2), для того, чтобы гладкое преобразование было проективным, достаточно, чтобы оно только три семейства прямых переводило в три семейства прямых.

Прежде чем дать точную формулировку, приведем необходимые определения. *Многомерной три-тканью* называется совокупность трех слоений коразмерности r общего положения на гладком многообразии размерности $2r$. Следуя В. Бляшке, мы рассматриваем ткань с точностью до локальных диффеоморфизмов, т.е. до наиболее широкого отношения эквивалентности. Локальные диффеоморфизмы сохраняют трансверсальность слоев ткани, замкнутость или незамкнутость конфигураций, образованных слоями ткани. Три-ткань, эквивалентная (локально диффеоморфная) параллельной три-ткани, образованной тремя семействами параллельных плоскостей в аффинном пространстве, называется *регулярной* (*параллелизуемой*).

Три-ткань на плоскости ($r = 1$) образована тремя семействами гладких кривых. При этом областью определения ткани считается максимальная область, в которой семейства образуют трансверсальные слоения, т.е. в каждой точке области определения проходящие через нее слои ткани попарно трансверсальны. Три-ткань, образованная тремя семействами прямых, называется *прямолинейной*. Три-ткань, эквивалентная (локально диффеоморфная) прямолинейной три-ткани, называется *спрямляемой*.

Грассманова три-ткань определяется следующим образом. Пусть X_α , $\alpha = 1, 2, 3$, — три гладкие гиперповерхности в проективном пространстве P^{r+1} , p — некоторая прямая, пересекающая их (но не касающаяся) в точках x , y и z соответственно. На грассмановом многообразии $G(1, r+1)$ прямых проективного пространства P^{r+1} в окрестности прямой p возникает три-ткань, слоями которой служат связки прямых с вершинами, лежащими на поверхностях X_α . Такая три-ткань называется *грассмановой* и обозначается GW . Грассманова три-ткань определена существенно локально, так как только достаточно близкие к p прямые трансверсальны поверхностям X_α .

На двумерной плоскости грассманова три-ткань GW порождается тройкой кривых ℓ_α , $\alpha = 1, 2, 3$, и является двойственным образом некоторой прямолинейной три-ткани LW . В самом деле, чтобы получить три-ткань, двойственную прямолинейной, следует, согласно принципу двойственности, термин «точка» заменить термином «прямая» и наоборот, сохраняя при этом инцидентность точек и прямых. Тогда семейства λ_α прямых прямолинейной три-ткани LW перейдут в три кривые ℓ_α ; прямые семейств (т.е. линейные семейства точек) перейдут в пучки (линейные семейства) прямых с вершинами на кривых ℓ_α ; три линии m_α ткани LW , $m_\alpha \in \lambda_\alpha$, проходящие через одну точку P , перейдут в три точки M_α , $M_\alpha \in \ell_\alpha$, лежащие на прямой p — образе точки P . В результате три-ткань LW перейдет в грассманову три-ткань GW на грассмановом многообразии прямых проективной плоскости. При этом обе три-ткани — LW и GW — определяются одним и тем же уравнением. Действительно, по определению, уравнение ткани связывает параметры трех линий разных семейств, проходящих через одну точку. В случае ткани LW уравнение ткани связывает тангенциальные координаты прямых m_α ; в случае ткани GW эти же координаты являются координатами вершин соответствующих пучков, т.е. координатами текущих точек M_α линий ℓ_α .

В этой статье доказана следующая теорема.

Теорема 1. Пусть грассмановы ткани GW и $\widetilde{GW}$, заданные соответственно в областях D и $\tilde{D}$ грассманова многообразия $G(1, r+1)$, $r > 1$, эквивалентны, т.е. существует локальный диффеоморфизм $\Phi : D \rightarrow \tilde{D}$, переводящий слои ткани GW в слои ткани $\widetilde{GW}$. Тогда Φ переводит связки прямых в связки прямых, т.е. индуцирует точечное преобразование π , которое является проективным.

Как мы увидим, доказательство теоремы 1 при $r > 1$ вытекает из общих свойств грассмановых тканей. При $r = 1$ оно оказывается существенно более сложным, и доказывается в предположении, что ткани GW и $\widetilde{GW}$ не являются регулярными.

Важную для дальнейшего двойственную формулировку теоремы 1 в случае $r = 1$ приведем в виде самостоятельного утверждения.

Теорема 2. Пусть LW и $\widetilde{LW}$ — две эквивалентные нерегулярные прямолинейные три-ткани, заданные соответственно в областях D и $\tilde{D}$ проективной плоскости; $\pi : D \rightarrow \tilde{D}$ — локальный диффеоморфизм, переводящий три-ткань LW в три-ткань $\widetilde{LW}$. Тогда π — проективное преобразование.

В 1912 г. Ф. Гронуолл (F. H. Gronwall) высказал следующую гипотезу (см. [12]; см. также [1, с. 62]): если нерегулярная криволинейная три-ткань W спрямляема, то локальный диффеоморфизм, переводящий ткань W в прямолинейную ткань, определен с точностью до проективного преобразования. Как писал В. Бляшке, имея в виду данную проблему (см. [1, с. 63]), «проблемы номографии являются примерами вопросов, которые теоретически не сложны, но фактическому решению которых препятствуют вычислительные трудности». Вследствие указанных трудностей проблема не была решена полностью до настоящего времени (ближе всех подойти к ее полному решению удалось в [5]). Из теоремы 2 вытекает следующее утверждение.

Теорема 3. Гипотеза Гронуолла верна.

В самом деле, пусть локальный диффеоморфизм θ переводит спрямляемую три-ткань W в прямолинейную три-ткань LW , а локальный диффеоморфизм $\tilde{\theta}$ переводит три-ткань W в прямолинейную три-ткань $\widetilde{LW}$. Тогда ткани LW и $\widetilde{LW}$ эквивалентны, и по теореме 2 существует

проективное преобразование π , которое переводит LW в $\widetilde{LW}$. Но тогда $\tilde{\theta} = \pi \circ \theta$, т.е. θ и $\tilde{\theta}$ отличаются на проективное преобразование.

Аналогично, из теоремы 1 вытекает многомерный вариант теоремы 3.

Три-ткань, эквивалентная грассмановой, называется *грассманизуемой*.

Теорема 4. Пусть многомерная ($r > 1$) три-ткань W *грассманизуема*. Тогда локальные диффеоморфизмы, переводящие три-ткань W в грассмановы три-ткани, отличаются на проективное преобразование.

Основные результаты.

1. Пусть W — три-ткань, образованная тремя r -мерными слоениями λ_α на гладком многообразии X размерности $2r$, $r > 1$, и пусть $F_\alpha, \bar{F}_\alpha \in \lambda_\alpha$, — слои ткани W , проходящие через произвольную точку p многообразия X . Тогда в касательном пространстве T_p точки p возникает конус Сегре C_p , образованный $(r - 1)$ -параметрическим семейством двумерных подпространств, трансверсальных касательным пространствам T_α к слоям F_α в точке p (см. [9, с. 11]). Конус Сегре C_p несет также однопараметрическое семейство r -мерных образующих (подпространств), изоклинных по отношению к тройке подпространств T_α .

Дифференциально-геометрическая структура, определяемая на многообразии полем конусов Сегре, называется *почти грассмановой структурой* и обозначается $AG(1, r + 1)$ (см. [9, с. 123]). Таким образом, на многообразии три-ткани естественным образом возникает почти грассманова структура, обозначаемая AGW .

Предложение 1. При локальных диффеоморфизмах почти грассманова структура переходит в почти грассманову структуру.

Доказательство. Действительно, если $\Phi : X \rightarrow \tilde{X}$ — локальный диффеоморфизм, то $d\Phi|_p : T_p \rightarrow \tilde{T}_p$ — биекция. Следовательно, $d\Phi|_p$ сохраняет размерность пересечения подпространств касательного пространства, и поэтому конусы Сегре переводит в конусы Сегре. $\square$

Следствие 1. Пусть ткани W и $\tilde{W}$, заданные соответственно в областях D и $\tilde{D}$, эквивалентны, т.е. существует локальный диффеоморфизм $\Phi : D \rightarrow \tilde{D}$, переводящий слои ткани W в слои ткани $\tilde{W}$. Тогда Φ сохраняет почти грассманову структуру AGW , т.е. поле конусов Сегре переводит в соответствующее поле конусов Сегре.

Доказательство. Действительно, $d\Phi|_p$ переводит касательные пространства к слоям ткани W в точке p в касательные пространства к соответствующим слоям ткани $\tilde{W}$ в точке $\Phi(p)$. Поэтому конус Сегре C_p , определяемый грассмановой структурой AGW , перейдет в конус Сегре $C_{\tilde{p}}$, $\tilde{p} = \Phi(p)$, определяемый грассмановой структурой $AG\tilde{W}$. $\square$

Напомним некоторые определения. Почти грассманова структура, заданная на многообразии X , называется *r -полуинтегрируемой*, если на X существует $(r + 1)$ -параметрическое семейство r -мерных подмногообразий V^r , которые в каждой своей точке касаются r -мерных образующих конуса Сегре, причем каждая такая образующая касается одного и только одного подмногообразия V^r (см. [9, с. 123]). Аналогичным образом определяется 2-полуинтегрируемость почти грассмановой структуры и соответствующие интегральные подмногообразия V^2 . Если почти грассманова структура $AG(1, r + 1)$ является одновременно r - и 2-полуинтегрируемой, то она называется *интегрируемой*.

Три-ткань W называется *изоклинной*, если определяемая ею почти грассманова структура AGW является r -полуинтегрируемой. Соответствующие интегральные подмногообразия V^r этой структуры называются *изоклинными поверхностями* три-ткани. В частности, изоклинными поверхностями являются слоения три-ткани.

Три-ткань называется *трансверсально-геодезической*, если определяемая ею почти грассманова структура AGW является 2-полуинтегрируемой. Соответствующие интегральные двумерные поверхности V^2 называются *трансверсально-геодезическими поверхностями* этой три-ткани.

Предложение 2. При локальных диффеоморфизмах r -полуинтегрируемая и 2-полуинтегрируемая почти грассмановы структуры переходят соответственно в r -полуинтегрируемую и 2-полуинтегрируемую почти грассмановы структуры.

Доказательство. Действительно, локальные диффеоморфизмы переводят поверхности, касающиеся конуса Сегре в точке p , в поверхности, касающиеся соответствующего конуса Сегре в соответствующей точке $\tilde{p}$. $\square$

Отсюда вытекает следующее утверждение.

Следствие 2. При локальном диффеоморфизме

- (а) изоклинная три-ткань переходит в изоклинную, причем ее изоклинные поверхности переходят в изоклинные поверхности;
- (б) трансверсально-геодезическая три-ткань переходит в трансверсально-геодезическую, причем ее трансверсально-геодезические поверхности переходят в трансверсально-геодезические поверхности.

Грассманова три-ткань GW является изоклинной и трансверсально-геодезической. Ее трансверсально-геодезические поверхности, проходящие через точку p , представляют собой плоские поля прямых, содержащие прямую p . Изоклинные поверхности ткани GW , проходящие через точку p , представляют собой связки прямых с вершинами на прямой p .

Предложение 3 (см. [9, с. 124]). Для того, чтобы три-ткань W была грассманизуемой, необходимо и достаточно, чтобы она была одновременно изоклинной и трансверсально-геодезической.

Пусть теперь GW и $\widetilde{GW}$ — две эквивалентные грассмановы три-ткани, определенные на грассмановых многообразиях $G(1, n+1)$ и $\tilde{G}(1, n+1)$ прямых проективных пространств P^{n+1} и $\tilde{P}^{n+1}$ соответственно¹. Пусть $\Phi : G(1, n+1) \rightarrow \tilde{G}(1, n+1)$ — локальный диффеоморфизм, переводящий слои ткани GW в слои ткани $\widetilde{GW}$. Тогда, согласно следствию 2, Φ переводит изоклинные поверхности первой ткани в изоклинные поверхности второй, т.е. связки прямых пространства P^{n+1} переводит в связки прямых пространства $\tilde{P}^{n+1}$.

Отсюда следует, что Φ порождает точечное отображение $P^{n+1} \rightarrow \tilde{P}^{n+1}$; обозначим его φ .

Предложение 4. Отображение φ является проективным.

Доказательство. Действительно, пусть p — произвольная прямая в P^{n+1} . Рассмотрим семейство связок прямых, вершины которых лежат на p . Чтобы найти образы точек прямой p при отображении φ , надо найти образы соответствующих связок при отображении Φ . Но последнее переведет связки в связки, а прямую p , как общий элемент всех связок, переведет также в общий элемент всех связок, т.е. в некоторую прямую $\tilde{p}$. Таким образом, вершины всех связок-образов окажутся на одной прямой. Следовательно, φ переводит прямые в прямые, т.е. является проективным преобразованием. $\square$

Очевидно, вместо отображения Φ можно рассматривать отображение φ , поскольку на многообразии прямых оно действует как Φ . Теорема 1 доказана.

2. Пусть теперь $r = 1$, т.е. GW — грассманова три-ткань на проективной плоскости P^2 , заданная кривыми ℓ_α , $\alpha = 1, 2, 3$. В этом случае конус Сегре вырождается в плоскость P^2 , так что предыдущий способ рассуждений неприменим.

Следуя [9, с. 118], найдем структурные уравнения три-ткани GW . Рассмотрим на проективной плоскости P^2 подвижной репер $\{A_u\}$ ($u, v, w = 0, 1, 2$), дифференциальные уравнения которого записывают в виде

$$dA_u = \Theta_u^v A_v, \quad (2)$$

причем формы Θ_u^v удовлетворяют уравнениям структуры проективного пространства:

$$d\Theta_u^v = \Theta_u^w \wedge \Theta_w^v. \quad (3)$$

¹Можно считать, что $P^{n+1} \equiv \tilde{P}^{n+1}$.

Совместим точки A_0 и A_2 подвижного репера с текущими точками M_1 и M_2 кривых ℓ_1 и ℓ_2 соответственно, а точку A_1 поместим в пересечение касательных к кривым ℓ_1 и ℓ_2 в точках A_0 и A_2 . Тогда уравнения кривых ℓ_1 и ℓ_2 запишутся соответственно в виде

$$\Theta_0^2 = 0, \quad \Theta_2^0 = 0, \quad (4)$$

а формы Θ_0^1 , Θ_2^1 будут базисными формами грассмана многообразия $G(1, 2)$ прямых плоскости P^2 .

Найдем уравнение кривой ℓ_3 , описываемой точкой M_3 . Так как эта точка лежит на прямой A_0A_2 и не совпадает ни с одной из точек A_0 , A_2 , то репер можно нормировать условием $M_3 \equiv A_0 + A_2$. Дифференцируя это соотношение с помощью (2), придем к равенству

$$dM_3 = \Theta_0^0 A_0 + \Theta_2^2 A_2 + (\Theta_0^1 + \Theta_2^1) A_1. \quad (5)$$

Исключив отсюда точку A_2 , получим

$$dM_3 = \Theta_2^2 M_3 + (\Theta_0^0 - \Theta_2^2) A_0 + (\Theta_0^1 + \Theta_2^1) A_1. \quad (6)$$

Так как точка M_3 описывает кривую, то форма $\Theta_0^0 - \Theta_2^2$ должна выражаться через форму $\Theta_0^1 + \Theta_2^1$:

$$\Theta_0^0 - \Theta_2^2 = a(\Theta_0^1 + \Theta_2^1). \quad (7)$$

Это и есть уравнение кривой ℓ_3 в рассматриваемом репере.

Пучки прямых, образующих три-ткань GW на грассмановом многообразии $G(1, 2)$, в построенном репере выделяются уравнениями

$$\Theta_0^1 = 0, \quad \Theta_2^1 = 0, \quad \Theta_0^1 + \Theta_2^1 = 0. \quad (8)$$

Найдем структурные уравнения три-ткани GW . Из уравнений (3) с учетом (4) находим:

$$d\Theta_0^1 = \Theta_0^0 \wedge \Theta_0^1 + \Theta_0^1 \wedge \Theta_1^1, \quad d\Theta_2^1 = \Theta_2^2 \wedge \Theta_2^1 + \Theta_2^1 \wedge \Theta_1^1. \quad (9)$$

Как видно из уравнения (7), формы Θ_0^0 и Θ_2^2 могут быть представлены в виде

$$\Theta_0^0 = \Theta + a\Theta_0^1, \quad \Theta_2^2 = \Theta - a\Theta_2^1, \quad (10)$$

где Θ — некоторая форма Пфаффа. Внося эти выражения в (5), получим

$$d\Theta_0^1 = \Theta_0^1 \wedge \omega, \quad d\Theta_2^1 = \Theta_2^1 \wedge \omega, \quad (11)$$

где введено обозначение

$$\omega = \Theta_1^1 - \Theta. \quad (12)$$

Уравнения (11) в точности совпадают по форме с первой серией структурных уравнений произвольной криволинейной три-ткани, заданной на многообразии с базисными формами Θ_0^1 , Θ_2^1 (см. [8, с. 64]).

Дифференцируя внешним образом уравнения (4), из полученных квадратичных уравнений выразим формы Θ_1^2 и Θ_1^0 через базисные формы Θ_0^1 , Θ_2^1 :

$$\Theta_1^2 = b^1 \Theta_0^1, \quad \Theta_1^0 = -b^2 \Theta_2^1. \quad (13)$$

Дифференцируя внешним образом уравнение (7), придем к уравнению

$$\nabla a + \Theta_1^0 - \Theta_1^2 = -b^3(\Theta_0^1 + \Theta_2^1), \quad (14)$$

где обозначено $\nabla a = da - a\omega$. С учетом (13) последнее равенство запишется так:

$$\nabla a = (b^1 - b^3)\Theta_0^1 + (b^2 - b^3)\Theta_2^1. \quad (15)$$

Как видно из уравнения (15), величина a является относительным инвариантом рассматриваемой три-ткани. Ее геометрический смысл следует из уравнения

$$dM_3 = \Theta_2^2 M_3 + (\Theta_0^1 + \Theta_2^1)(aA_0 + A_1), \quad (16)$$

которое получается в силу (7). Таким образом, касательная к кривой ℓ_3 в текущей точке $M_3 = A_0 + A_2$ пересекает касательную к кривой ℓ_1 в текущей точке A_0 в точке $aA_0 + A_1$.

Дифференцируя какое-либо из равенств (10), придем к уравнению

$$d\Theta = -b^3 \Theta_0^1 \wedge \Theta_2^1, \quad (17)$$

а дифференцируя форму ω , определенную равенством (12), получим уравнение

$$d\omega = \Theta_1^0 \wedge \Theta_0^1 + \Theta_1^2 \wedge \Theta_2^1 - d\Theta. \quad (18)$$

Отсюда, используя (13) и предыдущее равенство, находим

$$d\omega = b\Theta_0^1 \wedge \Theta_2^1, \quad (19)$$

где введено обозначение

$$b = b^1 + b^2 + b^3. \quad (20)$$

Уравнение (19) есть в точности второе структурное уравнение произвольной криволинейной три-ткани (см. [9, с. 18]); следовательно, b есть кривизна грассмановой три-ткани GW .

3. Дифференцируя внешним образом уравнения (13) и (14), получим квадратичные уравнения

$$\begin{aligned} (db^1 - 2b^1\omega - ab^1\Theta_2^1) \wedge \Theta_0^1 &= 0, \\ (db^2 - 2b^2\omega + ab^2\Theta_0^1) \wedge \Theta_2^1 &= 0, \\ (db^3 - 2b^3\omega - ab^3\Theta_0^1) \wedge (\Theta_0^1 + \Theta_2^1) &= 0. \end{aligned} \quad (21)$$

Отсюда

$$\begin{aligned} db^1 - 2b^1\omega &= c_1\Theta_0^1 + ab^1\Theta_2^1, \\ db^2 - 2b^2\omega &= -ab^2\Theta_0^1 + c_2\Theta_2^1, \\ db^3 - 2b^3\omega &= ab^3\Theta_0^1 + c_3(\Theta_0^1 + \Theta_2^1). \end{aligned} \quad (22)$$

Продолжая подобным образом уравнения (22), придем к уравнениям

$$\begin{aligned} dc_1 - 3c_1\omega &= c_{11}\Theta_0^1 + (ac_1 + 3(b^1)^2 + 2b^1b^2 + b^1b^3)\Theta_2^1, \\ dc_2 - 3c_2\omega &= -(ac_2 + 2b^1b^2 + 3(b^2)^2 + b^2b^3)\Theta_0^1 + c_{22}\Theta_2^1, \\ dc_3 - 3c_3\omega &= (ac_3 - 2b^1b^3 - b^2b^3 - 3(b^3)^2)\Theta_0^1 + c_{32}(\Theta_0^1 + \Theta_2^1). \end{aligned} \quad (23)$$

Продолжая уравнения (23), получим уравнения

$$\begin{aligned} dc_{11} - 4c_{11}\omega &= c_{111}\Theta_0^1 + (ac_{11} + ab^1b^3 - 2ab^1b^2 + 10b^1c_1 + 5b^2c_1 + 3b^3c_1 + b^1c_3)\Theta_2^1, \\ dc_{22} - 4c_{22}\omega &= -(ac_{22} + 2ab^1b^2 + 5b^1c_2 + 10b^2c_2 + 3b^3c_2 + b^2c_3)\Theta_0^1 + c_{222}\Theta_2^1, \\ dc_{32} - 4c_{32}\omega &= (ac_{32} - 2ab^1b^3 - 5b^1c^3 - 3b^2c_3 - 10b^3c_3 - b^3c_2)\Theta_0^1 + c_{322}(\Theta_0^1 + \Theta_2^1). \end{aligned} \quad (24)$$

4. С произвольной криволинейной три-тканью связаны относительные инварианты: кривизна b и ее ковариантные производные, определяемые уравнениями

$$db - 2b\omega = b_1\omega_1 + b_2\omega_2, \quad (25)$$

$$db_1 - 3b_1\omega = b_{11}\omega_1 + b_{12}\omega_2, \quad db_2 - 3b_2\omega = b_{21}\omega_1 + b_{22}\omega_2, \quad (26)$$

$$\begin{aligned} db_{11} - 4b_{11}\omega &= b_{111}\omega_1 + b_{112}\omega_2, \\ db_{12} - 4b_{12}\omega &= b_{121}\omega_1 + b_{122}\omega_2, \\ db_{21} - 4b_{21}\omega &= b_{211}\omega_1 + b_{212}\omega_2, \\ db_{22} - 4b_{22}\omega &= b_{221}\omega_1 + b_{222}\omega_2, \end{aligned} \quad (27)$$

и т. д. (см. [8, с. 66]). Эти инварианты связаны соотношениями вида

$$b_{\alpha 12\beta} - b_{\alpha 21\beta} = (|\alpha| + 2)bb_{\alpha}, \quad (28)$$

где α, β — мультииндексы из чисел 1 и 2, а $|\alpha|$ — длина мультииндекса α . В частности, из (28) получаем:

$$b_{12} - b_{21} = 2b^2. \quad (29)$$

Независимых ковариантных производных в дифференциальной окрестности порядка k всего $k - 2$ (см. [8, с. 68]).

С другой стороны, грассманова три-ткань GW задается тройкой кривых ℓ_α , которые определяют относительные инварианты $a, b^1, b^2, b^3, c_1, c_2, c_3, c_{11}, \dots$ веса 1, 2, 3, 4 и т. д. соответственно (см. уравнения (22)–(24)). Эти системы правильно продолжаемы, и в каждой дифференциальной окрестности дают 3 новых относительных инварианта. Итак, у нас имеется 2 геометрических объекта: относительные инварианты ткани и относительные инварианты тройки кривых. Первые можно выразить через вторые: один объект охватывает другой по терминологии Г. Ф. Лаптева. Чтобы получить соответствующие уравнения охвата, надо продифференцировать уравнение (20) и заменить полученные дифференциалы с помощью (22) и (25). Сравнивая в полученных соотношениях коэффициенты при независимых базисных формах, получим равенства:

$$b_1 = c_1 + c_3 - ab^2 + ab^3, \quad b_2 = c_2 + c_3 + ab^1. \quad (30)$$

Дифференцируя далее (30) и пользуясь уравнениями (23) и (26), придем к соотношениям

$$\begin{aligned} b_{11} &= c_{11} + c_{32} + 2ac_3 + (a)^2(b^2 + b^3) - b^1(b^2 + b^3) - 4(b^3)^2, \\ b_{12} &= c_{32} + ac_1 - ac_2 + ac_3 + 3(b^1)^2 - (b^2)^2 - (b^3)^2 + 2b^1b^2 + b^1b^3 + 2b^2b^3, \\ b_{21} &= c_{32} + ac_1 - ac_2 + ac_3 + (b^1)^2 - 3(b^2)^2 - 3(b^3)^2 - 2b^1b^2 - 3b^1b^3 - 2b^2b^3, \\ b_{22} &= c_{22} + c_{32} + (a)^2b^1 + b^1(b^2 - b^3). \end{aligned} \quad (31)$$

Продифференцировав первое и последнее уравнения (31), с помощью уравнений (24) и (27) получим, в частности:

$$\begin{aligned} b_{112} &= c_{322} + ac_{11} + 2ac_{32} + (a)^2(c^2 + c^3) + c_1(10b^1 + 5b^2 + 3b^3) - b^1c_2 + \\ &\quad + c_3(2b^2 - 10b^3) + a(-3b^1b^2 + 2(b^2)^2 - 2(b^3)^2), \\ b_{221} &= c_{322} - ac_{22} + ac_{32} + (a)^2c_1 + c_1(b^2 - b^3) - c_2(5b^1 + 10b^2 + 4b^3) - \\ &\quad - c_3(6b^1 + 4b^2 + 10b^3) + a(2(b^1)^2 - 3b^1b^2 - 5b^1b^3). \end{aligned} \quad (32)$$

Вычитая второе уравнение из первого, найдем с учетом (31) и (30):

$$b_{112} - b_{221} = a(b_{11} + b_{22} - b_{21}) - (a)^3b - 8bc_3 - ab(5b - 8b^2). \quad (33)$$

Отсюда

$$8bc_3 = -b_{112} + b_{221} + a(b_{11} + b_{22} - b_{21}) - (a)^3b - ab(5b - 8b^2). \quad (34)$$

5. Пусть теперь $\widetilde{GW}$ — еще одна грассманова три-ткань, заданная на проективной плоскости $\tilde{P}^2$ кривыми $\tilde{\ell}_\alpha$, $\alpha = 1, 2, 3$. Соответствующие ей формы и функции обозначим теми же символами, что для ткани GW , но с тильдой. Тогда для этих форм будут выполняться все написанные выше соотношения (4)–(34).

Предложение 5. Пусть три-ткани GW и $\widetilde{GW}$ эквивалентны. Тогда соответствие между реперами можно установить так, что кривизны и соответствующие ковариантные производные кривизн этих тканей будут совпадать.

Доказательство. Предположим, что ткани GW и $\widetilde{GW}$ эквивалентны; тогда соответствующий локальный диффеоморфизм Φ , переводящий слоения

$$\Theta_0^1 = 0, \quad \Theta_2^1 = 0, \quad \Theta_0^1 + \Theta_2^1 = 0$$

три-ткани GW в соответствующие слоения

$$\tilde{\Theta}_0^1 = 0, \quad \tilde{\Theta}_2^1 = 0, \quad \tilde{\Theta}_0^1 + \tilde{\Theta}_2^1 = 0$$

три-ткани $\widetilde{GW}$, задается уравнениями

$$\tilde{\Theta}_0^1 = p\Theta_0^1, \quad \tilde{\Theta}_2^1 = p\Theta_2^1. \quad (35)$$

С другой стороны, уравнения (35) задают некоторое отображение грассманова многообразия прямых $G(1, 2)$ плоскости P^2 на грассманово многообразие прямых $\tilde{G}(1, 2)$ плоскости $\tilde{P}^2$.

Напомним (см. [9, с. 66]), что базисные формы три-ткани допускают замены вида

$$\hat{\Theta}_0^1 = A\Theta_0^1, \quad \hat{\Theta}_2^1 = A\Theta_2^1, \quad (36)$$

не меняющие вида структурных уравнений (11) и (19). Полагая $A = p$, приведем уравнения (35) к виду

$$\tilde{\Theta}_0^1 = \Theta_0^1, \quad \tilde{\Theta}_2^1 = \Theta_2^1. \quad (37)$$

Дифференцируя уравнения (37) внешним образом, пользуясь структурными уравнениями (3) и аналогичными уравнениями с тильдой, придем к равенствам

$$\begin{aligned} \Theta_0^0 - \Theta_1^1 - \tilde{\Theta}_0^0 + \tilde{\Theta}_1^1 &= p_1\Theta_0^1, \\ \Theta_2^2 - \Theta_1^1 - \tilde{\Theta}_2^2 + \tilde{\Theta}_1^1 &= p_2\Theta_2^1. \end{aligned} \quad (38)$$

Вычитая из первого уравнения второе и пользуясь соотношениями (7) и аналогичными соотношениями с тильдой, получим

$$(a - \tilde{a})(\Theta_0^1 + \Theta_2^1) = p_1\Theta_0^1 - p_2\Theta_2^1. \quad (39)$$

Отсюда, в силу независимости базисных форм, получаем $p_1 = -p_2 = pa - p^2\tilde{a}$; в результате из двух уравнений (38) остается одно независимое, которое можно переписать в виде

$$\Theta_0^0 - \Theta_1^1 - \tilde{\Theta}_0^0 + \tilde{\Theta}_1^1 = (a - \tilde{a})\Theta_0^1. \quad (40)$$

Рассмотрим теперь уравнения (11) и им аналогичные для ткани $\widetilde{GW}$. В силу (37) из них получаем

$$\Theta_0^1 \wedge (\omega - \tilde{\omega}) = 0, \quad \Theta_2^1 \wedge (\omega - \tilde{\omega}) = 0,$$

откуда

$$\omega = \tilde{\omega}. \quad (41)$$

Дифференцируя это равенство в силу (19) и аналогичных уравнений для ткани $\widetilde{GW}$, получим

$$b = \tilde{b}. \quad (42)$$

Дифференцирование последнего равенства с учетом (25), (37) и (42) даст

$$b_1 = \tilde{b}_1, \quad b_2 = \tilde{b}_2, \quad (43)$$

и т. д. □

Непосредственным вычислением с использованием структурных уравнений тканей GW , $\widetilde{GW}$ и уравнения (41) доказывается следующее утверждение.

Предложение 6. Уравнение (40) вполне интегрируемо, т.е. его внешнее дифференцирование приводит к тождеству.

Теорема 5. Пусть GW — нерегулярная грассманова три-ткань на проективной плоскости. Тогда эквивалентная ей грассманова три-ткань $\widetilde{GW}$ вместе с соответствующим локальным диффеоморфизмом Φ существует с произволом 8 постоянных.

Будем считать, что три-ткань GW задана, а эквивалентную ей три-ткань $\widetilde{GW}$ вместе с соответствующим диффеоморфизмом требуется найти. Тогда формы Θ_u^v , кривизну b ткани GW , ее ковариантные производные функции a , b^1 , b^2 , b^3 и т. д. надо считать известными. В силу предложения 5 кривизна ткани $\widetilde{GW}$ и ее ковариантные производные также будут известными величинами, а формы $\tilde{\Theta}_u^v$ и функции $\tilde{a}$, $\tilde{b}^1$, $\tilde{b}^2$, $\tilde{b}^3$ и т. д., входящие в уравнения ткани $\widetilde{GW}$, аналогичные уравнениям (7), (13), (15) и т. д., подлежат определению.

Заметим, что частное решение поставленной задачи всегда существует — всякое проективное преобразование вида (1) (зависящее от восьми существенных постоянных) переводит заданную три-ткань GW в три-ткань, ей эквивалентную. Мы же хотим доказать, что других преобразований, кроме проективных, не существует.

Формы $\tilde{\Theta}_u^v$ удовлетворяют уравнениям (37) и уравнениям, аналогичным уравнениям (4), (7) и т. д.:

$$\tilde{\Theta}_0^2 = 0, \quad \tilde{\Theta}_2^0 = 0, \quad (44)$$

$$\tilde{\Theta}_0^0 - \tilde{\Theta}_2^2 = \tilde{a}(\Theta_0^1 + \Theta_2^1), \quad (45)$$

$$\tilde{\Theta}_1^2 = \tilde{b}^1 \Theta_0^1, \quad \tilde{\Theta}_1^0 = -\tilde{b}^2 \Theta_2^1, \quad (46)$$

$$\nabla \tilde{a} = (\tilde{b}^1 - \tilde{b}^3) \Theta_0^1 + (\tilde{b}^2 - \tilde{b}^3) \Theta_2^1, \quad (47)$$

а также уравнению (40).

Для ткани $\widetilde{GW}$ будут иметь место уравнения, аналогичные уравнениям (22), которые в силу (37) и (41) имеют вид

$$\begin{aligned} d\tilde{b}^1 - 2\tilde{b}^1\omega &= \tilde{c}_1 \Theta_0^1 + \tilde{a}\tilde{b}^1 \Theta_2^1, \\ d\tilde{b}^2 - 2\tilde{b}^2\omega &= -\tilde{a}\tilde{b}^2 \Theta_0^1 + \tilde{c}_2 \Theta_2^1, \\ d\tilde{b}^3 - 2\tilde{b}^3\omega &= \tilde{a}\tilde{b}^3 \Theta_0^1 + \tilde{c}_3 (\Theta_0^1 + \Theta_2^1). \end{aligned} \quad (48)$$

Функции $\tilde{b}^1$, $\tilde{b}^2$ и $\tilde{b}^3$ связаны соотношением

$$\tilde{b}^1 + \tilde{b}^2 + \tilde{b}^3 = b, \quad (49)$$

которое получается из условия (42). Если отсюда выразить $\tilde{b}^3$ и подставить в третье уравнение (48), то оно будет выполнено тождественно. Таким образом, в системе (48) остается два независимых уравнения.

Далее заметим, что функции $\tilde{c}_1$, $\tilde{c}_2$ и $\tilde{c}_3$ связаны соотношениями, аналогичными соотношениям (30). В силу (43) они запишутся так:

$$b_1 = \tilde{c}_1 + \tilde{c}_3 - \tilde{a}\tilde{b}^2 + \tilde{a}\tilde{b}^3, \quad b_2 = \tilde{c}_2 + \tilde{c}_3 + \tilde{a}\tilde{b}^1. \quad (50)$$

Выразив отсюда $\tilde{c}_1$ и $\tilde{c}_2$ через $\tilde{c}_3$, подставим в первые два уравнения (48) и продифференцируем их внешним образом. Разрешив полученные квадратичные уравнения по лемме Картана, после некоторых преобразований придем к уравнению

$$\begin{aligned} d\tilde{c}_3 - 3\tilde{c}_3\omega &= \left[b_{21} + (\tilde{a})^2(b - 2\tilde{b}^1 - 2\tilde{b}^2) + b(\tilde{b}^1 + \tilde{b}^2) + \right. \\ &\quad \left. + \tilde{a}(b_2 - b_1) - 2(\tilde{b}^1)^2 + 2(\tilde{b}^2)^2 \right] \Theta_0^1 + \left[b_{12} - \tilde{a}\tilde{c}_3 + (b)^2 + (\tilde{a})^2(b - 2\tilde{b}^1 - 2\tilde{b}^2) - \right. \\ &\quad \left. - b(3\tilde{b}^1 + 4\tilde{b}^2) + \tilde{a}(b_2 - b_1) - (\tilde{b}^1)^2 + 3\tilde{b}^1\tilde{b}^2 + 4(\tilde{b}^2)^2 \right] \Theta_2^1. \end{aligned} \quad (51)$$

Непосредственным вычислением доказывается следующее утверждение.

Предложение 7. При внешнем дифференцировании уравнения (51) получается тождество.

Доказательство использует само уравнение (51), уравнения (25)–(29), (34), (47), (48), (49), (50). Таким образом, для определения неизвестных форм и функций мы получили систему Σ из двенадцати пфаффовых уравнений: (37), (44), (45), (46), (47), (40), первые два уравнения (48) и уравнение (51); эта система замкнута относительно операции внешнего дифференцирования и, следовательно, вполне интегрируема; ее решение существует с произволом не более 12 постоянных (см. [4, с. 96]).

Найдем произвол существования решения. Рассмотрим уравнение, аналогичное (34), для ткани $\widetilde{GW}$:

$$8b\tilde{c}_3 = -b_{112} + b_{221} + \tilde{a}(b_{11} + b_{22} - b_{21}) - (\tilde{a})^3b - \tilde{a}b(5b - 8\tilde{b}^2). \quad (52)$$

Так как ткань GW по условию не является регулярной, то $b \neq 0$, и функция $\tilde{c}_3$ в уравнении (52) присутствует. Продифференцируем (52) и заменим $d\tilde{c}_3$ по формуле (51). Приравнявая в полученном равенстве коэффициенты при базисных формах, получим следующие два соотношения:

$$\begin{aligned} 8b_1\tilde{c}_3 + 8b \left[b_{21} + \tilde{a}^2(b - 2\tilde{b}^1 - 2\tilde{b}^2) + b(\tilde{b}^1 + \tilde{b}^2) + \tilde{a}(b_2 - b_1) - 2(\tilde{b}^1)^2 + 2(\tilde{b}^2)^2 \right] = \\ = -b_{1121} + b_{2211} + (\tilde{b}^1 - \tilde{b}^3)(b_{11} + b_{22} - b_{21}) + \tilde{a}(b_{111} + b_{221} - b_{211}) - 3\tilde{a}^2b(\tilde{b}^1 - \tilde{b}^3) - \\ - \tilde{a}^3b_1 - 5(b)^2(\tilde{b}^1 - \tilde{b}^3) - 10\tilde{a}bb_1 + 8(\tilde{b}^1 - \tilde{b}^3)b\tilde{b}^2 + 8\tilde{a}b_1\tilde{b}^2 - 8\tilde{a}^2b\tilde{b}^2, \quad (53) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 8b_2\tilde{c}_3 + 8b \left[b_{12} - \tilde{a}\tilde{c}_3 + (b)^2 + \tilde{a}^2(b - 2\tilde{b}^1 - 2\tilde{b}^2) - b(3\tilde{b}^1 + 4\tilde{b}^2) + \tilde{a}(b_2 - b_1) - (\tilde{b}^1)^2 + 3\tilde{b}^1\tilde{b}^2 + 4(\tilde{b}^2)^2 \right] = \\ = -b_{1122} + b_{2212} + (\tilde{b}^2 - \tilde{b}^3)(b_{11} + b_{22} - b_{21}) + \tilde{a}(b_{112} + b_{222} - b_{212}) - 3\tilde{a}^2b(\tilde{b}^2 - \tilde{b}^3) - \\ - \tilde{a}^3b_2 - 5(b)^2(\tilde{b}^2 - \tilde{b}^3) - 10\tilde{a}bb_2 + 8(\tilde{b}^2 - \tilde{b}^3)b\tilde{b}^2 + 8\tilde{a}b_2\tilde{b}^2 + 8\tilde{a}b\tilde{c}_2. \quad (54) \end{aligned}$$

Умножим эти уравнения на b и заменим $8b\tilde{c}_3$ с помощью (52). Кроме того, в уравнении (54) сумму $\tilde{c}_2 + \tilde{c}_3$ заменим с помощью (50). После простых преобразований, использующих формулу (49), придем к соотношениям

$$8(b)^2 \left[-2(\tilde{b}^1)^2 - 2\tilde{b}^1\tilde{b}^2 + (\tilde{b}^2)^2 \right] + 3(b)^3(6\tilde{b}^1 + 7\tilde{b}^2) - (5\tilde{a}^2(b)^2 + \delta)(\tilde{b}^1 - \tilde{b}^3) + \tilde{a}\gamma_1 + \Phi_1 = 0, \quad (55)$$

$$8(b)^2 \left[-(\tilde{b}^1)^2 + 2\tilde{b}^1\tilde{b}^2 + 2(\tilde{b}^2)^2 \right] - (b)^3(19\tilde{b}^1 + 14\tilde{b}^2) - (5\tilde{a}^2(b)^2 + \delta)(\tilde{b}^2 - \tilde{b}^3) + \tilde{a}\gamma_2 + \Phi_2 = 0, \quad (56)$$

где введены обозначения

$$\begin{aligned} \delta &= b(b_{11} + b_{22} - b_{21}), \\ \gamma_1 &= b_1(b_{11} + b_{22} - b_{21}) + (b)^2(8b_2 - 3b_1) - b(b_{111} + b_{221} - b_{211}), \\ \gamma_2 &= b_2(b_{11} + b_{22} - b_{21}) + (b)^2(-8b_1 + 5b_2) - b(b_{112} + b_{222} - b_{212}), \\ \Phi_1 &= b_1(-b_{112} + b_{221}) + 8(b)^2b_{21} + b(b_{1121} - b_{2211}) - 5(b)^4, \\ \Phi_2 &= b_2(-b_{112} + b_{221}) + 8(b)^2b_{12} + b(b_{1122} - b_{2212}) + 3(b)^4. \end{aligned} \quad (57)$$

В соотношения (55) и (56) входят неизвестные функции $\tilde{b}^1$, $\tilde{b}^2$ и $\tilde{a}$. Из них выразим $\tilde{b}^1$ и $\tilde{b}^2$ через $\tilde{a}$ и, подставив найденные значения в (52) и (50), выразим через $\tilde{a}$ функции $\tilde{c}_1$, $\tilde{c}_2$ и $\tilde{c}_3$.

Далее продифференцируем соотношения (55) и (56) и заменим в полученных равенствах дифференциалы $d\tilde{b}^1$ и $d\tilde{b}^2$ с помощью (48), а затем заменим величины $\tilde{b}^1$, $\tilde{b}^2$, $\tilde{c}_1$, $\tilde{c}_2$ и $\tilde{c}_3$ с помощью полученных соотношений. В результате придем к уравнениям, содержащим только одну неизвестную функцию $\tilde{a}$. Так как решение исследуемой системы существует, то из этих соотношений можно найти $\tilde{a}$. В результате в системе Σ останется восемь уравнений: (37), (44), (45), (46) и (47). Следовательно, произвол существования — 8 постоянных (см. [4, с. 96]). $\square$

Замечание 1. Как уже было отмечено, произвольное проективное преобразование плоскости переводит грассманову ткань в грассманову и зависит от восьми постоянных. Следовательно, в силу единственности решения системы Σ , других преобразований, кроме проективных, не существует. Отсюда вытекает теорема 1 при $r = 1$, а, значит, двойственная ей теорема 2 и теорема 3.

Замечание 2. Теорему 2 можно сформулировать так: существует единственное преобразование (с точностью до проективного преобразования), переводящее заданную линеаризуемую три-ткань в прямолинейную. Этим утверждением мы подводим итог многолетней деятельности по оценке числа проективно неэквивалентных отображений такого рода (см. библиографию в [11]).

Замечание 3. Уравнения (55) и (56) содержат ковариантные производные четвертого порядка от кривизны ткани; следовательно, они выражаются через производные седьмого порядка от функции ткани. При дифференцировании этих уравнений (что необходимо для нахождения величины a) мы получим уравнения с производными восьмого порядка от функции ткани.

5.1. Рассмотрим вопрос о единственности отображения π из теорем 1 и 3. Предположим, что существует два проективных отображения π_1 и π_2 прямолинейной три-ткани LW на прямолинейную три-ткань $\widetilde{LW}$. Тогда $\pi = \pi_1^{-1} \circ \pi_2$ — проективный автоморфизм ткани LW . Таким образом, отображение π определено с точностью до проективных автоморфизмов ткани LW .

Вообще говоря, криволинейная три-ткань не допускает автоморфизмов. Три-ткани с автоморфизмами исследовались в [2–4, 6, 7, 10, 11, 13, 14] (см. также [9, гл. 6] и [8, с. 82]). Согласно теореме 1, автоморфизмом грассмановой три-ткани может быть только проективное преобразование, сохраняющее поверхности X_α , порождающие эту ткань (см. введение). Примеры таких тканей см. в [9, с. 221].

6. В [10] доказано следующее утверждение: *если некоторый локальный гомеоморфизм φ переводит гладкую нерегулярную криволинейную три-ткань W в гладкую нерегулярную криволинейную три-ткань $\widetilde{W}$, то φ — гладкое преобразование*. Следовательно, теореме 2 можно усилить.

Теорема 6. *Пусть LW и $\widetilde{LW}$ — две эквивалентные нерегулярные прямолинейные три-ткани на плоскости, π — локальный гомеоморфизм, переводящий слоения ткани LW в слоения ткани $\widetilde{LW}$. Тогда π — проективное преобразование.*

7. Рассмотрим исключенный случай, когда три-ткань GW является регулярной. Тогда $b = \tilde{b} = 0$ (см. [8, с. 65]), и уравнение (52) тождественно обращается в нуль. В этом случае в системе Σ останется 12 независимых уравнений; следовательно, решение существует с произволом в 12 постоянных. Последние имеют следующий геометрический смысл. Согласно теореме Графа—Зауэра (см. [8, с. 43]) регулярная грассманова ткань определяется тройкой кривых, принадлежащих одной кубической кривой. Чтобы задать ткань $\widetilde{GW}$, эквивалентную ткани GW , надо задать произвольную кубическую кривую K — это 9 параметров (неоднородные коэффициенты уравнения кривой K). Кроме того, согласно [7], всякая регулярная три-ткань допускает трехпараметрическую группу автоморфизмов. Итого получаем $9 + 3 = 12$ параметров.

8. Найдём совместные инварианты эквивалентных три-тканей GW и $\widetilde{GW}$.

Как было сказано выше, тройка кривых ℓ_α , определяющая три-ткань W на проективной плоскости, имеет относительные проективные инварианты $a, b^1, b^2, b^3, c_1, c_2, c_3, c_{11}, \dots$ веса 1, 2, 3, 4 и т. д. соответственно. Из них можно построить абсолютные инварианты

$$i^\alpha = b^\alpha a^{-2}, \quad j^\alpha = c_\alpha a^{-3}, \quad \alpha = 1, 2, 3, \dots$$

Аналогичные инварианты (с тильдами) можно построить и для эквивалентной три-ткани $\widetilde{W}$.

Рассмотрим, например, величину $I = a\tilde{a}^{-1}$. Пользуясь уравнениями (15), (47) и (41), найдём, что дифференциал dI выражается только через главные формы Θ_0^1 и Θ_2^1 :

$$dI = \left((i^1 - i^3)I - (\tilde{i}^1 - \tilde{i}^3) \right) a\Theta_0^1 + \left((i^2 - i^3)I - (\tilde{i}^2 - \tilde{i}^3) \right) a\Theta_2^1. \quad (58)$$

Это и означает, что величина I является абсолютным инвариантом.

Рассмотрим формы $a\Theta_0^i$, $i = 1, 2$, входящие в уравнение (58). Так как величина a является относительным инвариантом веса 1, то при допустимой замене базиса форм $(\Theta_0^i)' = p\Theta_0^i$ формы $a\Theta_0^i$ не меняются: $a'(\Theta_0^i)' = a\Theta_0^i$. Поэтому величины

$$I_1 = (i^1 - i^3)I - (\tilde{i}^1 - \tilde{i}^3), \quad I_2 = (i^2 - i^3)I - (\tilde{i}^2 - \tilde{i}^3) \quad (59)$$

можно назвать инвариантными производными от инварианта I относительно инвариантных форм $a\Theta_0^i$ (ср. с аналогичным определением в [8, с. 102]). Как видно, эти инварианты выражаются через инвариант I и инварианты i^α и $\tilde{i}^\alpha$. Дифференцируя далее инварианты I_1 и I_2 , найдём, что их инвариантные производные выражаются через инварианты $I, i^\alpha, j^\alpha, \tilde{i}^\alpha, \tilde{j}^\alpha$ и т. д.

Пусть теперь три-ткани GW и $\widetilde{GW}$ являются регулярными; тогда $b = \tilde{b} = 0$, и из уравнений (25)–(27) находим, что ковариантные производные всех порядков от b также обращаются в нуль. Далее из (20) выражаем b^3 через b^1 и b^2 , из (30) выражаем c_1 и c_2 через c_3 , и из (31) выражаем c_{11}, c_{22} и c_{32} через b^1, b^2 и c_3 . В результате в системе (22) остаются первые два уравнения, в

системе (23) — одно третье, причем правая часть этого уравнения будет содержать только функции a , b^1 , b^2 и c_3 . Таким образом, дифференциально-геометрическая структура, определяемая три-тканью GW ($\widetilde{GW}$), будет замкнутой. Это вполне естественно, поскольку, напомним, в силу теоремы Графа—Зауэра кривые ℓ_α , задающие прямолинейную регулярную три-ткань, принадлежат некоторой кубической кривой.

В регулярном случае производные инварианты I_1 и I_2 принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} I_1 &= (2i^1 + i^2)I - (2\tilde{i}^1 + \tilde{i}^2) = 2(i^1I - \tilde{i}^1) + (i^2I - \tilde{i}^2), \\ I_2 &= (2i^2 + i^1)I - (2\tilde{i}^2 + \tilde{i}^1) = 2(i^2I - \tilde{i}^2) + (i^1I - \tilde{i}^1). \end{aligned} \quad (60)$$

Из них строятся линейные комбинации $I^1 = i^1I - \tilde{i}^1$ и $I^2 = i^2I - \tilde{i}^2$. Дифференцируя, например, I^1 , найдем соответствующие инвариантные производные. В частности, первая из них имеет вид:

$$\begin{aligned} I_1^1 &= -Ij^3 + I^{-1}\tilde{j}^3 + I\{2i^2 + i^1 - i^1(2i^1 + i^2)\} - i^1(2\tilde{i}^1 + \tilde{i}^2) - \\ &\quad - I^{-1}\{(2\tilde{i}^2 + \tilde{i}^1) - 2\tilde{i}^1(2\tilde{i}^1 + \tilde{i}^2)\}. \end{aligned} \quad (61)$$

Допустим, три-ткань GW и инвариант I заданы. Тогда можно найти относительные инварианты ткани a , b^1 , b^2 , c_3 , производные от I инварианты I_1 и I_2 , их линейные комбинации $I^1 = i^1I - \tilde{i}^1$ и $I^2 = i^2I - \tilde{i}^2$, инвариант I_1^1 . Затем находим абсолютные и относительные инварианты ткани $\widetilde{GW}$:

$$\tilde{a} = aI^{-1}, \quad \tilde{i}^1 = i^1I - I^1, \quad \tilde{i}^2 = i^2I - I^2, \quad \tilde{b}^\alpha = \tilde{i}^\alpha \tilde{a}^2, \quad \tilde{c}_3 = \tilde{j}^3 \tilde{a}^3,$$

а инвариант $\tilde{j}^3$ находим из равенства (61). Далее, подставляя найденные функции $\tilde{a}$, $\tilde{b}^1$, $\tilde{b}^2$, $\tilde{c}_3$ в структурные уравнения уравнения ткани $\widetilde{GW}$, найдем дифференциальные формы $\tilde{\theta}_\beta^\alpha$. Таким образом, можно сказать, что задание абсолютного инварианта I полностью определяет регулярную прямолинейную ткань $\widetilde{GW}$, эквивалентную заданной регулярной прямолинейной три-ткани GW .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бляшке В. Введение в геометрию тканей. — М.: Физматгиз, 1959.
2. Гвоздович Н. В. Инфинитезимальные автоморфизмы три-тканей Боля и Муфанг // В сб.: Ткани и квазигруппы. — Калинин, 1981. — С. 83–91.
3. Гвоздович Н. В. Об инфинитезимальных автоморфизмах многомерных три-тканей // Изв. вузов. Сер. мат. — 1982. — 5. — С. 73–75.
4. Картан Э. Внешние дифференциальные системы и их геометрические приложения. — М.: Изд-во МГУ, 1962.
5. Смирнов С. В. Единственность номограммы из выровненных точек с одной прямолинейной шкалой // Сиб. мат. ж. — 1964. — 5, № 4. — С. 910–922.
6. Шелехов А. М. Автотопия три-тканей и геометрические три-ткани // Изв. вузов. Сер. мат. — 1990. — 5. — С. 75–77.
7. Шелехов А. М. Криволинейные три-ткани, допускающие однопараметрическое семейство автоморфизмов // Изв. вузов. Сер. мат. — 2005. — 5. — С. 68–70.
8. Шелехов А. М., Лазарева В. Б., Уткин А. А. Криволинейные три-ткани. — Тверь: Изд-во ТГУ, 2013.
9. Akivis M. A., Shelekhov A. M. Geometry and Algebra of Multidimensional Three-Webs. — Dordrecht–Boston–London: Kluwer Academic Publishers, 1992.
10. Dufour J. P., Jean P. Rigidity of webs and families of hypersurfaces // В кн.: Singularities and Dynamical Systems. — North-Holland Math. Stud. — Amsterdam–New York: North-Holland, 1985. — 103. — С. 271–283.
11. Goldberg V. V., Lychagin V. V. On the Blaschke conjecture for 3-webs // J. Geom. Anal. — 2006. — 16, № 1. — С. 69–115.
12. Gronwall F. H. Sur les équations entre trois variables représentables par des nomogrammes à points alignés // J. Math. Pures Appl. — 1912. — 8, № 1. — С. 59–93.
13. Shelekhov A. M. On the theory of G -webs and G -loops // Lect. Notes Math. — Berlin: Springer-Verlag, 1991. — 1481. — С. 265–270.

14. *Shelekhov A. M.* Regular automorphisms of 3-webs and kernels of loops// В сб.: Webs and Quasigroups. — Tver, 1992. — С. 106–116.

А. М. Шелехов

Московский педагогический государственный университет

E-mail: amshlekhov@yandex.ru



ДЖЕТЫ ЛИ И ЧАСТИЧНЫЕ СВЯЗНОСТИ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

© 2018 г. В. В. ШУРЫГИН

Аннотация. Изучаются частичные связности высшего порядка. Найдены условия, при которых джет Ли поля геометрического объекта ξ в направлении поля $\mathbb{A}$ -скоростей Вейля Y совпадает с ковариантной производной $\nabla_Y \xi$ этого поля по отношению к некоторой частичной связности высшего порядка.

Ключевые слова: алгебра Вейля, расслоение Вейля, частичная связность, связность высшего порядка, производная Ли, джет Ли.

AMS Subject Classification: 53C15, 58A20, 58A32

Введение. Джет Ли поля геометрических объектов на гладком многообразии в направлении поля $\mathbb{A}$ -скоростей является обобщением производной Ли поля геометрических объектов в направлении векторного поля. Если $P^r M_n$ — расслоение реперов порядка r на гладком многообразии M_n , а F — многообразие, на котором задано гладкое правое действие дифференциальной группы G_n^r , то поле геометрических объектов типа $(P^r M_n, F)$ представляет собой гладкое эквивариантное отображение $\xi : P^r M_n \rightarrow F$ (см. [3]). Производная Ли поля ξ в направлении векторного поля v на M_n является полем геометрических объектов типа $(P^r M_n, TF)$, определенным эквивариантным отображением

$$\mathcal{L}_v \xi : P^r M_n \ni X \mapsto (T\xi \circ v^c)(X) \in TF,$$

где v^c — естественный лифт векторного поля v на расслоение $P^r M_n$ (см. [3]). Если в определении производной Ли поля ξ заменить векторное поле v на сечение $Y : M_n \rightarrow T^{\mathbb{A}} M_n$ расслоения $\mathbb{A}$ -скоростей ($\mathbb{A}$ -близких точек) Вейля (см. [14]), определяемое локальной алгеброй $\mathbb{A}$ в смысле Вейля, а касательный функтор T заменить на функтор Вейля $T^{\mathbb{A}}$, получится поле

$$\mathcal{L}_Y \xi : P^r M_n \ni X \mapsto (T^{\mathbb{A}} \xi \circ Y^c)(X) \in TF$$

геометрических объектов типа $(P^r M_n, T^{\mathbb{A}} F)$, называемое *джетом Ли* поля ξ в направлении поля $\mathbb{A}$ -скоростей Y (см. [13]).

Расслоение Вейля $T^{\mathbb{A}} M_n$ несет на себе структуру гладкого многообразия над алгеброй $\mathbb{A}$ (см. [4, 12]), и обращение в нуль джета Ли $\mathcal{L}_Y \xi$ является необходимым и достаточным условием для того, чтобы $\mathbb{A}$ -диффеоморфизм расслоения $T^{\mathbb{A}} M_n$ на себя, порождаемый сечением Y , являлся симметрией поля геометрического объекта $T^{\mathbb{A}} \xi$ (см. [13]).

В. В. Вагнер рассматривал движение геометрического объекта на многообразии под действием однопараметрической группы преобразований, порождаемой векторным полем, как параллельное перенесение этого объекта по отношению к специального типа связности, определенной вдоль траекторий векторного поля, названной им *связностью Ли* (см. [2]). В этой связи с джетами Ли можно ассоциировать частичные связности высших порядков в смысле Эресмана (см. [6]), определенные вдоль сечений расслоений контактных элементов высших порядков. Плоские частичные связности вдоль слоев слоения на M_n естественно возникают в так называемых слоеных главных расслоениях над M_n (см. [7, 10]).

Работа посвящена нахождению условий, при которых джет Ли $\mathcal{L}_Y \xi$ поля геометрических объектов ξ в направлении поля $\mathbb{A}$ -скоростей Y совпадает с ковариантной производной $\nabla_Y \xi$ этого поля по отношению к некоторой частичной связности высшего порядка.

В п. 1 определяется частичная связность порядка q в главном расслоении P и рассматриваются некоторые отображения, ассоциированные с частичной связностью порядка q . В п. 2 рассматриваются частичные связности в расслоении реперов $P^r M_n$, определяется связность, сопряженная с частичной связностью порядка q в расслоении $P^r M_n$. Основным результатом работы является теорема, утверждающая, что джет Ли $\mathcal{L}_Y \xi$ совпадает с ковариантной производной $\nabla_Y \xi$ для любого поля геометрического объекта ξ тогда и только тогда, когда обращается в нуль ковариантная производная поля $\mathbb{A}$ -скоростей Y по отношению к сопряженной связности.

1. Связность в главном расслоении вдоль распределения высшего порядка. Расслоение $T^{(m,q)} M_n$ (m, q) -скоростей Эресмана (см. [5]) на гладком n -мерном многообразии M_n образовано q -джетами $j^q \tau$ гладких ростков $\tau : (\mathbb{R}^m, 0) \rightarrow M_n$. Поскольку q -джет ростка $f : (\mathbb{R}^m, 0) \rightarrow \mathbb{R}$ можно отождествить с многочленом Тейлора степени q ростка f , то на расслоении (m, q) -скоростей $T^{(m,q)} \mathbb{R}$ над полем вещественных чисел $\mathbb{R}$ возникает естественная структура алгебры над $\mathbb{R}$, изоморфной алгебре $\mathbb{R}(m, q) = \mathbb{R}[t^1, \dots, t^m; q]$ срезанных многочленов степени $\leq q$ от m переменных. Пусть $p^q : T^{(m,q)} M_n \rightarrow M_n$ — каноническая проекция. Локальные координаты $\{x^i\}$ на области $U \subset M_n$ индуцируют $\mathbb{R}(m, q)$ -значные координаты $\{X^i\}$ на $(p^q)^{-1}(U)$, в результате чего на расслоении Эресмана $T^{(m,q)} M_n$ возникает структура гладкого многообразия над алгеброй $\mathbb{R}(m, q)$ (см. [12]).

Локальной алгеброй в смысле А. Вейля (*алгеброй Вейля*; см. [8, 14]) называется конечномерная коммутативная ассоциативная алгебра $\mathbb{A}$ с единицей над $\mathbb{R}$, обладающая единственным максимальным идеалом $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}(\mathbb{A})$, и такая, что факторалгебра $\mathbb{A}/\mathfrak{m}$ изоморфна $\mathbb{R}$. Размерность t факторалгебры $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ называется *шириной* алгебры $\mathbb{A}$. Натуральное число q , определяемое соотношениями $\mathfrak{m}^q \neq 0$, $\mathfrak{m}^{q+1} = 0$, называется *порядком*, или *высотой* алгебры $\mathbb{A}$. Соответствие, относящее переменным $t^1, \dots, t^m$ элементы $\tilde{t}^1, \dots, \tilde{t}^m$ идеала $\mathfrak{m}$, порождающие базис факторалгебры $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$, индуцирует эпиморфизм алгебр $\varphi : \mathbb{R}(m, q) \rightarrow \mathbb{A}$, поэтому алгебра Вейля $\mathbb{A}$ ширины m и высоты q изоморфна факторалгебре $\mathbb{R}(m, q)/\mathbb{I}$, где $\mathbb{I} = \ker \varphi$.

Факторизация координат $\mathbb{R}(m, q)$ -значных координат $\{X^i\}$ на $T^{(m,q)} M_n$ по идеалу $\mathbb{I}$ алгебры $\mathbb{R}(m, q)$ расслаивает $T^{(m,q)} M_n$ над многообразием $T^{\mathbb{A}} M_n$, называемым *расслоением $\mathbb{A}$ -скоростей Вейля* (см. [8, 12, 14]). $\mathbb{A}$ -Скорость на M_n , определяемая ростком $f : (\mathbb{R}^m, 0) \rightarrow M_n$, обозначается $j^{\mathbb{A}} f$.

Всякое гладкое отображение $\psi : M_n \rightarrow W_k$ продолжается до отображения

$$T^{\mathbb{A}} \psi : T^{\mathbb{A}} M_n \rightarrow T^{\mathbb{A}} W_k, \quad j^{\mathbb{A}} f \mapsto j^{\mathbb{A}}(\psi \circ f),$$

и соответствие $M_n \mapsto T^{\mathbb{A}} M_n$, $\psi \mapsto T^{\mathbb{A}} \psi$ представляет собой функтор, называемый *функтором Вейля* (см. [8, 12]). Расслоение Вейля $T^{\mathbb{A}} M_n$ несет на себе естественную структуру гладкого многообразия над алгеброй $\mathbb{A}$ (см. [12]).

Отметим, что расслоение Эресмана $T^{(m,q)} M_n$ естественно эквивалентно расслоению Вейля $T^{\mathbb{R}(m,q)} M_n$, определяемому алгеброй $\mathbb{R}(m, q)$ срезанных многочленов степени $\leq q$ от m переменных.

Обозначим символом $T_{\text{reg}}^{(m,q)} M_n$ подрасслоение в $T^{(m,q)} M_n$, образованное q -джетами ростков иммерсий $\tau : (\mathbb{R}^m, 0) \rightarrow M_n$. При рассмотрении расслоения $T_{\text{reg}}^{(m,q)} M_n$ предполагаем, что $m < n$. На $T_{\text{reg}}^{(m,q)} M_n$ действует справа дифференциальная группа G_m^q q -джетов ростков диффеоморфизмов $(\mathbb{R}^m, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^m, 0)$. Фактор-многообразие $J^{(m,q)} M_n$ расслоения $T_{\text{reg}}^{(m,q)} M_n$ по действию дифференциальной группы G_m^q является расслоенным многообразием m -мерных контактных элементов порядка q на M_n или q -джетов ростков m -мерных подмногообразий на M_n (см. [1]). Для обозначения q -джета ростка m -мерных подмногообразий на M_n , определяемого q -джетом ростка $\tau : (\mathbb{R}^m, 0) \rightarrow M_n$, будем использовать символ $[j^q \tau]$. В [9] расслоение $J^{(m,q)} M_n$ изучалось под названием *m -грассманово продолжение порядка q многообразия M_n* . Каноническая проекция $p^q : T^{(m,q)} M_n \rightarrow M_n$ индуцирует проекцию

$$p^q : J^{(m,q)} M_n \rightarrow M_n, \tag{1}$$

для обозначения которой сохраним символ p^q .

Сечение $D : M_n \rightarrow J^{(m,q)} M_n$ расслоения (1), т.е. поле q -джетов ростков m -мерных подмногообразий на M_n можно рассматривать как распределение порядка q на многообразии M_n .

Проекция

$$p_J : T_{\text{reg}}^{(m,q)} M_n \ni j^q \tau \mapsto [j^q \tau] \in J^{(m,q)} M_n \quad (2)$$

задает на многообразии $T_{\text{reg}}^{(m,q)} M_n$ структуру главного расслоенного пространства над $J^{(m,q)} M_n$ со структурной группой G_m^q .

Рассмотрим теперь главное расслоение $P(M_n, G, \pi)$ над M_n со структурной группой Ли G и проекцией π . Пусть $T_{\text{hor}}^{(m,q)} P$ — подрасслоение в $T_{\text{reg}}^{(m,q)} P$, образованное q -джетами горизонтальных ростков иммерсий $\sigma : (\mathbb{R}^m, 0) \rightarrow P$, т.е. иммерсий, композиции которых с проекцией π также являются иммерсиями $\pi \circ \sigma : (\mathbb{R}^m, 0) \rightarrow M_n$. Проекция

$$\pi^q : T_{\text{hor}}^{(m,q)} P \ni j^q \sigma \mapsto j^q(\pi \circ \sigma) \in T_{\text{reg}}^{(m,q)} M_n \quad (3)$$

расслаивает $T_{\text{hor}}^{(m,q)} P$ над $T_{\text{reg}}^{(m,q)} M_n$. Действие группы G на P индуцирует действие G на $T_{\text{hor}}^{(m,q)} P$ по закону

$$R_g(j^q \sigma) = j^q(R_g \circ \sigma).$$

Обозначим символом $J_{\text{hor}}^{(m,q)} P$ фактор-многообразие расслоения $T_{\text{hor}}^{(m,q)} P$ по действию группы G_m^q . Многообразие $J_{\text{hor}}^{(m,q)} P$ расслоено над P ; его можно также рассматривать как многообразие q -джетов m -мерных подмногообразий расслоения P , трансверсальных слоям расслоения P . Правое действие группы G на $T_{\text{hor}}^{(m,q)} P$ перестановочно с действием группы G_m^q и поэтому индуцирует правое действие G на $J_{\text{hor}}^{(m,q)} P$.

Проекция (3) индуцирует проекцию (для которой сохраняем обозначение π^q)

$$\pi^q : J_{\text{hor}}^{(m,q)} P \ni [j^q \sigma] \mapsto [j^q(\pi \circ \sigma)] \in J^{(m,q)} M_n. \quad (4)$$

В дальнейшем предполагается, что рассматриваемое многообразие M_n допускает сечения расслоения (1).

Определение 1. *Связностью порядка q в главном расслоении $P(M_n, G, \pi)$ вдоль сечения $D : M_n \rightarrow J^{(m,q)} M_n$ будем называть правоинвариантное сечение*

$$\Gamma_D : P \rightarrow J_{\text{hor}}^{(m,q)} P, \quad (5)$$

удовлетворяющее условию $\pi^q \circ \Gamma_D(X) = D(\pi(X))$, $X \in P$.

Таким образом, связность порядка q вдоль распределения D представляет собой правоинвариантное распределение m -мерных контактных элементов порядка q на главном расслоенном пространстве P , проектирующихся в распределение D на многообразии M_n . Связность (5) будем называть также *частичной связностью порядка q* .

Обозначим символом

$$p_D^q : P_D^q M_n \rightarrow M_n \quad (6)$$

обратный образ (pull-back) расслоения p_J (см. (2)) относительно сечения $D : M_n \rightarrow J^{(m,q)} M_n$. Расслоение (6) является главным расслоением со структурной группой G_m^q . Элементы расслоения $P_D^q M_n$ представляют собой q -джеты $j^q \tau$, классы эквивалентности которых образуют контактные элементы $D(x)$, $x \in M_n$. q -Джет $j^q \tau$ будем называть *q -репером*, принадлежащим $D(x) = [j^q \tau]$.

Пусть, далее,

$$\pi_D^q : P_D^q P \rightarrow P_D^q M_n$$

— обратный образ расслоения π^q (см. (3)) относительно вложения $P_D^q M_n \rightarrow T_{\text{reg}}^{(m,q)} M_n$ и

$$\pi_P^q : P_D^q P \rightarrow P$$

— ограничение на $P_D^q P$ канонической проекции

$$T_{\text{hor}}^{(m,q)} P \rightarrow P.$$

На многообразии $P_D^q P$ имеются правые действия группы Ли G и дифференциальной группы G_m^q , являющиеся ограничениями действий этих групп на $T_{\text{hor}}^{(m,q)} P$. Частичная связность Γ_D определяет отображение

$$\check{\Gamma}_D : P_D^q M_n \times_M P \rightarrow P_D^q P, \quad (7)$$

относящее q -реперу $j_x^q \tau$, принадлежащему $D(x) = [j_x^q \tau]$, и точке $X \in P$ горизонтальный лифт $j_X^q \sigma$ q -репера $j_x^q \tau$ на расслоении P в точке X . Отображение (7) эквивариантно относительно действия групп G и G_m^q , и имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} P & \xleftarrow{\pi_P^q} & P_D^q P \\ \uparrow pr_2 & \nearrow \check{\Gamma}_D & \downarrow \pi_D^q \\ P_D^q M_n \times_M P & \xrightarrow{pr_1} & P_D^q M_n \end{array} \quad (8)$$

где символами pr_1 и pr_2 обозначены проекции расслоенного произведения $P_D^q M_n \times_M P$ на сомножители. Таким образом, отображение $\check{\Gamma}_D$ является сечением расслоения

$$\pi_D^q \times \pi_P^q : P_D^q P \rightarrow P_D^q M_n \times_M P. \quad (9)$$

Сечение (7) расслоения (9), эквивариантное относительно действия групп G и G_n^q , определяет такую связность Γ_D порядка q в главном расслоении P , что

$$\Gamma_D(X) = [\check{\Gamma}_D(j^q \tau, X)], \quad \text{где} \quad D(\pi(X)) = [j^q \tau].$$

Пусть $D(x) = [j^q \tau]$. Будем говорить, что $\mathbb{A}$ -скорость $j_x^{\mathbb{A}} \alpha$ на M_n , где $\alpha : (\mathbb{R}^k, 0) \rightarrow (M, x)$, принадлежит q -джету $[j^q \tau] = D(x)$, $j_x^{\mathbb{A}} \alpha \in [j^q \tau]$, если существует такая $\mathbb{A}$ -скорость $j^{\mathbb{A}} \alpha'$, где $\alpha' : (\mathbb{R}^k, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^m, 0)$, что

$$j^{\mathbb{A}} \alpha = j^q \tau \circ j^{\mathbb{A}} \alpha'.$$

Естественно считать, что $k \leq m$, однако это требование не является обязательным.

Предположим теперь, что в главном расслоении P задана некоторая частичная связность Γ_D порядка q и $\Gamma_D(X) = [j^q \sigma]$, где $\sigma : (\mathbb{R}^m, 0) \rightarrow (P, X)$. $\mathbb{A}$ -Скорость $j_X^{\mathbb{A}} \beta$ на P , принадлежащую $\Gamma_D(X)$, будем называть *горизонтальным лифтом* $\mathbb{A}$ -скорости $j_x^{\mathbb{A}} \alpha$, принадлежащей $D(x)$, $x = \pi(X)$, если $j_x^{\mathbb{A}} \alpha = j_x^{\mathbb{A}} (\pi \circ \beta)$. В соответствии с этим определением $\mathbb{A}$ -скорость $j^{\mathbb{A}} \beta$ ростка $\beta : (\mathbb{R}^k, 0) \rightarrow (P, X)$ будем называть *горизонтальной* относительно связности Γ_D , если она является горизонтальным лифтом $\mathbb{A}$ -скорости $j^{\mathbb{A}} (\pi \circ \beta)$.

Будем говорить, что поле $\mathbb{A}$ -скорости $Y : M_n \rightarrow T^{\mathbb{A}} M_n$ на многообразии M_n принадлежит сечению D , если $Y(x)$ принадлежит $D(x)$ для любого $x \in M_n$. Если на многообразии M_n задано поле $\mathbb{A}$ -скорости Y , принадлежащее сечению D , то можно построить поле $\mathbb{A}$ -скорости $Y^h : P \rightarrow T^{\mathbb{A}} P$ на P — горизонтальный лифт поля Y относительно связности Γ_D , относя каждой точке $X \in P$ горизонтальную $\mathbb{A}$ -скорость, являющуюся горизонтальным лифтом $\mathbb{A}$ -скорости $Y(\pi(X))$ относительно связности Γ_D .

Обозначим символом $T_D^{\mathbb{A}} M_n$ подрасслоение в $T^{\mathbb{A}} M_n$, состоящее из $\mathbb{A}$ -скоростей на M_n , принадлежащих сечению D , а символом $T_D^{\mathbb{A}} P$ подрасслоение в расслоении Вейля $T^{\mathbb{A}} P$, состоящее из таких $\mathbb{A}$ -скоростей $j_X^{\mathbb{A}} \beta$ на P , что $j_{\pi(X)}^{\mathbb{A}} (\pi \circ \beta)$ принадлежит $D(\pi(X))$. Отображение

$$\pi_D^{\mathbb{A}} : T_D^{\mathbb{A}} P \ni j_X^{\mathbb{A}} \beta \mapsto j_{\pi(X)}^{\mathbb{A}} (\pi \circ \beta) \in T_D^{\mathbb{A}} M_n$$

является локально тривиальным расслоением. Отображение, осуществляющее горизонтальный лифт $\mathbb{A}$ -скоростей, принадлежащих сечению D , на расслоение P относительно связности Γ_D , аналогично (7) задается сечением

$$\check{\Gamma}_D^{\mathbb{A}} : T_D^{\mathbb{A}} M_n \times_M P \rightarrow T_D^{\mathbb{A}} P. \quad (10)$$

Если F — многообразие с заданным на нем правым действием

$$F \times G \ni (z, a) \mapsto R_a(z) \in F \quad (11)$$

группы Ли G , то поле геометрического объекта типа (P, F) на многообразии M_n (см. [3]) задается G -эквивариантным отображением $\xi : P \rightarrow F$. Действие (11) индуцирует правое действие группы Ли G на расслоении Вейля $T^{\mathbb{A}}F$, определяемое формулой $R_a(j^{\mathbb{A}}\gamma) = j^{\mathbb{A}}(R_a \circ \gamma)$ для $\gamma : (\mathbb{R}^k, 0) \rightarrow F$.

Определение 2. Пусть в главном расслоении $P(M_n, G)$ задана связность Γ_D вдоль сечения $D : M_n \rightarrow J^{(m,q)}M_n$ и пусть $Y : M_n \rightarrow T_D^{\mathbb{A}}M_n$ — поле $\mathbb{A}$ -скоростей на M_n , принадлежащее сечению D . Ковариантной производной поля геометрического объекта ξ по отношению к полю $\mathbb{A}$ -скоростей Y на многообразии M_n называется поле геометрического объекта типа $(P, T^{\mathbb{A}}F)$ на M_n , определяемое формулой

$$\nabla_Y^D \xi : T^{\mathbb{A}}M_n \times_M P \ni (Y_x, X) \mapsto j_x^{\mathbb{A}} \xi \circ \check{\Gamma}_D^{\mathbb{A}}(Y_x, X) \in T^{\mathbb{A}}F. \quad (12)$$

Формула (12) остается справедливой, если $\mathbb{A}$ -скорость $Y_x = j_x^{\mathbb{A}}\alpha$ задана только в одной точке x многообразия M_n . Используя функтор Вейля $T^{\mathbb{A}}$, ковариантную производную (12) можно представить в виде

$$\nabla_Y^D \xi = T^{\mathbb{A}}\xi \circ Y_P^h. \quad (13)$$

Поскольку q -реперы, принадлежащие распределению D , могут рассматриваться как $\mathbb{R}(m, q)$ -скорости, то тем самым определены ковариантные производные и по отношению к таким q -реперам.

2. Связности в расслоениях реперов и джеты Ли. В качестве главного расслоения P в рассуждениях предыдущего раздела можно использовать расслоение r -реперов $P^r M_n$ на многообразии M_n . Расслоение $P^r M_n$ образовано r -джетами $j_x^r \gamma$ ростков диффеоморфизмов $\gamma : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (M_n, x)$ и совпадает с подрасслоением $T_{\text{reg}}^{(n,r)} M_n$ в расслоении Эресмана $T^{(n,r)} M_n$.

Изоморфизм алгебр Вейля

$$\mathbb{R}(m, q) \otimes \mathbb{R}(n, r) \cong \mathbb{R}(n, r) \otimes \mathbb{R}(m, q)$$

индуцирует естественную эквивалентность расслоений Вейля (см. [8, 12])

$$\Phi : T^{(m,q)}(T^{(n,r)} M_n) \cong T^{(n,r)}(T^{(m,q)} M_n). \quad (14)$$

Ограничиваясь в (14) рассмотрением только джетов ростков, проектирующихся на M_n в ростки иммерсий, получим эквивалентность расслоений

$$\Phi : T_{\text{hor}}^{(m,q)}(T_{\text{reg}}^{(n,r)} M_n) \cong T_{\text{hor}}^{(n,r)}(T_{\text{reg}}^{(m,q)} M_n). \quad (15)$$

Ограничение эквивалентных расслоений

$$T_{\text{hor}}^{(m,q)}(T_{\text{reg}}^{(n,r)} M_n), \quad T_{\text{hor}}^{(n,r)}(T_{\text{reg}}^{(m,q)} M_n)$$

в (15) на полные прообразы распределения D при проекции на $J_{\text{reg}}^{(m,q)} M_n$ приводит к эквивалентности расслоений

$$P_D^q(P^r M_n) \cong P_{\text{hor}}^r(P_D^q M_n), \quad (16)$$

где $P_{\text{hor}}^r(P_D^q M_n)$ — расслоение r -джетов ростков $(\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow P_D^q M_n$, которые в композиции с проекцией $p_D^q : P_D^q M_n \rightarrow M_n$ дают ростки диффеоморфизмов.

Частичная связность Γ_D порядка q в расслоении реперов $P^r M_n$ определяет отображение (см. (7))

$$\check{\Gamma}_D : P_D^q M_n \times_M P^r M_n \rightarrow P_D^q(P^r M_n), \quad (17)$$

осуществляющее горизонтальные лифты q -реперов, принадлежащих распределению D , на расслоение $P^r M_n$. Отображение (17) эквивариантно относительно действия групп G_n^r и G_m^q , и из его эквивариантности следует, что оно определяет частичную связность в расслоении $P^r M_n$.

Заменяя расслоение $P_D^q(P^r M_n)$ в диаграмме (8) для $P = P^r M_n$ и сечения (17) на расслоение $P_{\text{hor}}^r(P_D^q M_n)$, получим диаграмму

$$\begin{array}{ccc} P_D^q M_n & \xleftarrow{p^r} & P_{\text{hor}}^r(P_D^q M_n) \\ \uparrow p^{r_2} & \nearrow \check{\Gamma}_D^* & \downarrow (p_D^q)^r \\ P^r M_n \times_M P_D^q M_n & \xrightarrow{pr_1} & P^r M_n \end{array} \quad (18)$$

в которой сечение

$$\check{\Gamma}_D^* : P^r M_n \times_M P_D^q M_n \rightarrow P_{\text{hor}}^r(P_D^q M_n) \quad (19)$$

осуществляет горизонтальные лифты r -реперов с многообразия M_n на расслоение $P_D^q M_n$.

Определение 3. Связность Γ_D^* порядка r в расслоении $P_D^q M_n$, определяемую сечением (19), будем называть *связностью, сопряженной частичной связности* Γ_D порядка q в расслоении реперов $P^r M_n$.

Поскольку поля $\mathbb{A}$ -скоростей порядка q , принадлежащие распределению D , являются полями геометрических объектов, ассоциированных с расслоением $P_D^q M_n$, то определены ковариантные производные таких полей $\mathbb{A}$ -скоростей порядка q по отношению к связности Γ_D^* .

Пусть теперь F — многообразие с заданным на нем правым действием дифференциальной группы G_n^r и $\xi : P^r M_n \rightarrow F$ — поле геометрического объекта на многообразии M_n , ассоциированное с расслоением реперов $P^r M_n$, т.е. поле объекта типа $(P^r M_n, F)$ (см. [3]). Производной Ли поля геометрических объектов ξ по отношению к векторному полю v на M_n называется отображение (см. [3, 13])

$$\mathcal{L}_v \xi : P^r M_n \ni X \mapsto (T\xi \circ v^{\mathbb{R}(n,r)})(X) \in TF, \quad (20)$$

где $v^{\mathbb{R}(n,r)}$ — естественный лифт векторного поля v на расслоение $P^r M_n$. Лифт $v^{\mathbb{R}(n,r)}$ может быть получен применением к полю v функтора Вейля $T^{\mathbb{R}(n,r)}$ с последующим использованием естественной эквивалентности функторов $T^{\mathbb{R}(n,r)} \otimes T \cong T \otimes T^{\mathbb{R}(n,r)}$ (см. [8, 12]), где T — касательный функтор. Касательный функтор T естественно эквивалентен функтору Вейля $T^{\mathbb{D}}$ для алгебры дуальных чисел $\mathbb{D}$. Заменим в формуле (20) касательный функтор T на функтор Вейля $T^{\mathbb{A}}$, определяемый алгеброй Вейля $\mathbb{A}$, а $\mathbb{R}(n,r)$ -продолжение векторного поля на $\mathbb{R}(n,r)$ -продолжение поля $\mathbb{A}$ -скорости Y и воспользуемся естественной эквивалентностью функторов $T^{\mathbb{R}(n,r)} \otimes T^{\mathbb{A}} \cong T^{\mathbb{A}} \otimes T^{\mathbb{R}(n,r)}$. Поскольку коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} P^r M_n & \xrightarrow{T^{\mathbb{R}(n,r)} Y} & T^{\mathbb{R}(n,r)} T^{\mathbb{A}} M_n \\ R_g \downarrow & & \downarrow T^{\mathbb{A}} R_g \\ P^r M_n & \xrightarrow{T^{\mathbb{R}(n,r)} Y} & T^{\mathbb{R}(n,r)} T^{\mathbb{A}} M_n \end{array} \quad (21)$$

в которой R_g — правый сдвиг расслоения r -реперов $\mathbb{R}(n,r)$ при действии элемента $g \in G_n^r$, то отображение $T^{\mathbb{R}(n,r)} Y$ эквивариантно по отношению к действию группы Ли G_n^r , и формула

$$\mathcal{L}_Y \xi = T^{\mathbb{A}} \xi \circ Y^{\mathbb{R}(n,r)} : P^r M_n \rightarrow T^{\mathbb{A}} F, \quad (22)$$

где $Y^{\mathbb{R}(n,r)} : P^r M_n \rightarrow T^{\mathbb{A}} P^r(n,r)$ — естественный лифт ($\mathbb{R}(n,r)$ -продолжение) поля $\mathbb{A}$ -скорости Y на расслоение r -реперов, определяет поле геометрических объектов на M_n , называемое *джетом Ли* поля ξ по отношению к полю $\mathbb{A}$ -скоростей Y (см. [4, 13]).

Из коммутативности диаграммы (21) также следует, что естественный лифт $Y^{\mathbb{R}(n,r)}$ поля $\mathbb{A}$ -скорости Y правоинвариантен относительно действия группы Ли G_n^r на расслоении r -реперов. Поэтому джет Ли $\mathcal{L}_Y \xi$ представляет собой поле геометрического объекта на многообразии M_n того же типа, что и ковариантная производная $\nabla_Y \xi$, определяемая формулой (13).

Пусть Γ_D — связность в расслоении r -реперов $P^r M_n$ вдоль сечения $D : M_n \rightarrow J^{(m,q)} M_n$ и Y — поле $\mathbb{A}$ -скорости на многообразии M_n , принадлежащее сечению D . Установим, при каких условиях для всякого поля геометрических объектов ξ имеет место совпадение джета Ли $\mathcal{L}_Y \xi$ с

ковариантной производной $\nabla_Y^D \xi$. Поскольку при определении ковариантной производной и джета Ли можно рассматривать локально заданные поля геометрических объектов, то в качестве поля геометрических объектов ξ можно взять поле r -реперов на M_n . При этом совпадение отображений (22) и (13) для $P = P^r M_n$ повлечет совпадение естественного лифта $Y^{\mathbb{R}(n,r)}$ поля $\mathbb{A}$ -скорости Y на расслоение $P^r M_n$ с его горизонтальным лифтом Y^h , а это эквивалентно тому, что поле $\mathbb{A}$ -скорости Y ковариантно постоянно отношению к сопряженной связности (см. [4, теорема 8.2]). Поле $\mathbb{A}$ -скорости Y является полем геометрического объекта типа $(P^q M_n, T_0^{\mathbb{A}} \mathbb{R}^n)$, а ковариантная производная поля Y по отношению к сопряженной связности Γ_D^* представляет собой поле геометрического объекта типа $(P^q M_n, T^{\mathbb{R}(n,r)} T_0^{\mathbb{A}} \mathbb{R}^n)$, т.е. эквивариантное отображение $\nabla^* Y : P^q M_n \rightarrow T^{\mathbb{R}(n,r)}(T_0^{\mathbb{A}} \mathbb{R}^n)$, и включает в себя поле Y . То, что поле Y ковариантно постоянно, означает, что значения отображения $\nabla^* Y$ являются нулевыми $\mathbb{R}(n,r)$ -скоростями. Будем говорить, что в этом случае ковариантная производная поля Y равна нулю: $\nabla^* Y = 0$.

Как результат выше приведенных рассуждений получаем следующую теорему.

Теорема 1. Пусть на многообразии M_n задана связность Γ_D порядка q в расслоении r -реперов $P^r M_n$ вдоль распределения $D : M_n \rightarrow J^{(m,q)} P^q M_n$, и пусть поле $\mathbb{A}$ -скорости Y принадлежит распределению D . Тогда для совпадения производной Ли $\mathcal{L}_Y \xi$ и ковариантной производной $\nabla_Y \xi$ для всякого поля геометрического объекта $\xi : P^r M_n \rightarrow F$ на M_n необходимо и достаточно, чтобы обращалась в нуль ковариантная производная $\nabla^* Y$ поля $\mathbb{A}$ -скорости Y по отношению к сопряженной связности Γ_D^* .

Замечание 1. $\mathbb{A}$ -Скорость $j^{\mathbb{A}} f$, определяемая ростком иммерсии $f : (\mathbb{R}^m, 0) \rightarrow M_n$, называется *регулярной*. Множество регулярных $\mathbb{A}$ -скоростей образует открытое подмногообразие $T_{\text{reg}}^{\mathbb{A}} M_n$ в расслоении $T^{\mathbb{A}} M_n$. На $T_{\text{reg}}^{\mathbb{A}} M_n$ действует справа группа $\text{Aut}(\mathbb{A})$ автоморфизмов алгебры $\mathbb{A}$. Фактор-многообразие $J^{\mathbb{A}} M_n$ расслоения $T_{\text{reg}}^{\mathbb{A}} M_n$ по действию группы $\text{Aut}(\mathbb{A})$ является расслоенным многообразием. В [11] элементы расслоения $J^{\mathbb{A}} M_n$ назывались $\mathbb{A}$ -джетами.

Частичные связности Γ_D в главном расслоении P можно определить для сечений $D : M_n \rightarrow J^{\mathbb{A}} M_n$. Расслоение $J^{(m,q)} M_n$ при этом естественно эквивалентно расслоению $J^{\mathbb{R}(m,q)} M_n$, определяемому алгеброй срезанных многочленов $\mathbb{R}(m,q)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алексеевский Д. В., Виноградов А. М., Лычагин В. В. Основные идеи и понятия дифференциальной геометрии // Геометрия-1/ Итоги науки и техн. Сер. Совр. пробл. мат. Фундам. направл. — М.: ВИНТИ, 1988. — 28. — С. 5–289.
2. Вагнер В. В. Теория составного многообразия // Тр. семин. по вект. и тенз. анализу. — 1950. — 8. — С. 11–72.
3. Евтушик Л. Е., Лумисте Ю. Г., Остиану Н. М., Широков А. П. Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях // Итоги науки и техники. Сер. Пробл. геом. — М.: ВИНТИ, 1979. 9. — С. 5–246.
4. Шурыгин В. В. Многообразия над алгебрами и их применение в геометрии расслоений струй // Усп. мат. наук. — 1993. — 48, № 2 (290). — С. 75–106.
5. Ehresmann C. Les prolongements d'une variété différentiable. I. Calcul des jets, prolongement principal // C. R. Acad. Sci. — 1951. — 233, № 11. — С. 598–600.
6. Ehresmann C. Sur les connexions d'ordre supérieur // Atti del V Congr. Unione Math. Ital. — Roma, 1955. — С. 326–328.
7. Kamber F. W., Tondeur Ph. Foliated bundles and characteristic classes/ Lect. Notes Math. — Springer-Verlag, 1975. — 493.
8. Kolář I., Michor P. W., Slovák J. Natural operations in differential geometry. — Berlin: Springer-Verlag, 1993.
9. Krupka D., Krupka M. Jets and contact elements // Proc. Semin. Differ. Geom. (Krupka D., ed.)/ Math. Publ. — Opava: Silesian Univ. in Opava, 2000. — 2. — С. 39–85.
10. Molino P. Riemannian foliations. — Basel: Birkhäuser, 1988.
11. Muñoz J., Rodríguez J., Muriel F. J. Weil bundles and jet spaces // Czech. Math. J. — 2000. — 16 (125). — С. 721–748.

12. *Shurygin V. V.* Smooth manifolds over local algebras and Weil bundles// J. Math. Sci. — 2002. — 108, № 2. — С. 249–294.
13. *Shurygin V. V.* Lie jets and symmetries of geometric objects// J. Math. Sci. — 2011. — 177, № 5. — С. 758–771.
14. *Weil A.* Théorie des points proches sur les variétés différentiables// Coll. Int. Centre Nat. Rech. Sci. — Strasbourg, 1953. — 52. — С. 111–117.

В. В. Шурыгин

Казанский (Приволжский) федеральный университет

E-mail: Vadim.Shurygin@kpfu.ru



ОБ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ УРАВНЕНИЙ АБЕЛЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА С КОЭФФИЦИЕНТАМИ, ЗАВИСЯЩИМИ ОТ УПРАВЛЯЮЩЕГО ПАРАМЕТРА

© 2018 г. В. В. ШУРЫГИН (мл.)

Аннотация. В работе найдены необходимые и достаточные условия, при которых два уравнения Абеля с коэффициентами, зависящими от управляющего параметра, локально эквивалентны относительно одной псевдогруппы преобразований обратной связи. Эти условия сформулированы в терминах дифференциальных инвариантов.

Ключевые слова: уравнения Абеля, дифференциальные инварианты, преобразования обратной связи, управляющий параметр.

AMS Subject Classification: 53A55, 34C14

1. Введение. Проблема эквивалентности некоторых дифференциальных уравнений или систем уравнений относительно преобразований обратной связи рассматривалась в ряде работ. Существует несколько подходов к ее решению. В настоящей работе мы применяем подход, основанный на геометрии пространств джетов и теории дифференциальных инвариантов псевдогрупп Ли, ранее использованной в работах В. В. Лычагина [8, 9], А. Г. Кушнера и В. В. Лычагина [3], П. В. Бибикова [1], Д. С. Гриценко и О. М. Кирюхина [6].

Напомним, что уравнение Абеля — это дифференциальное уравнение первого порядка вида

$$y' = a(x)y^3 + b(x)y^2 + c(x)y + d(x).$$

Легко видеть, что псевдогруппа точечных преобразований вида

$$x \mapsto f(x), \quad y \mapsto g(x) \cdot y + h(x), \quad f, g, h \in C^\infty(\mathbb{R}),$$

сохраняет класс таких уравнений (и, вообще, уравнений вида $y' = P(x, y)$, где P — многочлен от y). Проблема эквивалентности уравнений Абеля относительно действия этой псевдогруппы рассматривалась в ряде работ. Например, в работе П. Аппеля [5] были найдены инварианты этого действия.

В настоящей работе мы рассматриваем вопрос о локальной эквивалентности уравнений Абеля первого порядка

$$y' = a(x, u)y^3 + b(x, u)y^2 + c(x, u)y + d(x, u), \quad (1)$$

коэффициенты которых зависят от одномерного управляющего параметра u , относительно действия псевдогруппы G преобразований вида

$$x \mapsto f(x), \quad u \mapsto w(x, u), \quad y \mapsto g(x) \cdot y + h(x).$$

Здесь функции f, g, h, w предполагаются бесконечно дифференцируемыми. Также будем предполагать, что коэффициент $a(x, u)$ зависит от u , т.е. что производная a_u не равна нулю тождественно. Преобразования уравнений Абеля (1), определяемые действием псевдогруппы G , будем называть преобразованиями обратной связи.

Действие псевдогруппы G продолжается до действия на пространстве джетов расслоения $\pi : \mathbb{R}^6 \rightarrow \mathbb{R}^2$, где $\pi : (x, u, a, b, c, d) \mapsto (x, u)$. Каждое уравнение Абеля $\mathcal{E}$ можно рассматривать как

сечение такого расслоения. Алгебра Ли $\mathfrak{g}$ псевдогруппы G состоит из векторных полей вида

$$X = \xi(x) \frac{\partial}{\partial x} + \omega(x, u) \frac{\partial}{\partial u} + (\eta(x) \cdot y + \zeta(x)) \frac{\partial}{\partial y}.$$

Представление алгебры Ли $\mathfrak{g}$ в алгебре Ли векторных полей на расслоении π имеет вид

$$\begin{aligned} \hat{X} = & \xi \frac{\partial}{\partial x} + \omega \frac{\partial}{\partial u} - (2\eta + \xi') a \frac{\partial}{\partial a} - (\xi' b + 3\zeta a + \eta b) \frac{\partial}{\partial b} + \\ & + (\eta' - \xi' c - 2\zeta b) \frac{\partial}{\partial c} + (\zeta' - \zeta c + \eta d - \xi' d) \frac{\partial}{\partial d}. \end{aligned}$$

Здесь и далее штрих обозначает производную функций ξ, η, ζ по x .

Пусть $J^k(\pi)$ — пространство k -джетов сечений расслоения π . Канонические координаты на этом пространстве будем обозначать $(x, u, a, b, c, d, a_x, a_u, b_x, b_u, \dots)$. Действие псевдогруппы G на пространстве 0-джетов $J^0(\pi)$ поднимается до действия на всех пространствах $J^k(\pi)$.

Определение 1. Дифференциальным инвариантом порядка $\leq k$ будем называть функцию $I \in C^\infty(J^k \pi)$, рациональную относительно аргументов $a_x, a_u, \dots, a_{xx}, a_{xu}, a_{uu}, \dots$ и постоянную вдоль орбит действия продолженной псевдогруппы G .

Дифференциальные инварианты удовлетворяют равенству

$$\hat{X}^{(k)}(I) = 0$$

для всех $X \in \mathfrak{g}$. Здесь $\hat{X}^{(k)}$ обозначает k -е продолжение поля $\hat{X}$ на $J^k(\pi)$. Множество всех дифференциальных инвариантов образует алгебру.

Будем обозначать символами $d/dx, d/du$ операторы полной производной по соответствующей переменной (см. [2]).

Определение 2. Инвариантным дифференцированием будем называть комбинацию полных производных

$$\nabla = A \frac{d}{dx} + B \frac{d}{du}, \quad A, B \in C^\infty(J^\infty(\pi)),$$

инвариантную по отношению к действию продолженной псевдогруппы G , т.е. удовлетворяющую равенству

$$[\nabla, \hat{X}] = 0$$

для всех $X \in \mathfrak{g}$.

Для любого дифференциального инварианта I функция $\nabla(I)$ также является дифференциальным инвариантом. Это обстоятельство позволяет получать новые инварианты из уже имеющихся путем применения инвариантных дифференцирований. Коэффициенты A, B удовлетворяют следующей системе дифференциальных уравнений (см. [9]):

$$\hat{X}(A) - \xi' A = 0, \quad \hat{X}(B) - \frac{\partial w}{\partial x} A - \frac{\partial w}{\partial u} B = 0. \quad (2)$$

Вычисления дифференциальных инвариантов и инвариантных дифференцирований выполнены в системе компьютерной алгебры **Maple** с использованием пакетов **DifferentialGeometry** и **JetCalculus** (автор Я. Андерсон).

2. Регулярный случай. Заметим, что множество $\{ab_u - ba_u = 0\}$ является сингулярной орбитой действия G на $J^1(\pi)$. Назовем точку $x \in J^k(\pi)$ *регулярной*, если в этой точке $ab_u - ba_u \neq 0$. В этом разделе рассмотрим орбиты регулярных точек.

Теорема 1. Алгебра дифференциальных инвариантов действия псевдогруппы G в окрестности регулярной орбиты порождена двумя инвариантами первого порядка

$$I_1 = \frac{a^2(3a_u c_u - b_u^2)}{(ab_u - ba_u)^2}, \quad I_2 = \frac{(2b_u^3 - 9a_u b_u c_u + 27a_u^2 d_u) a^3}{(ab_u - ba_u)^3},$$

двумя инвариантами второго порядка

$$J_1 = \frac{a^2(a_u b_{uu} - b_u a_{uu})}{a_u^2(ab_u - ba_u)^2}, \quad J_2 = \frac{a_u M_2}{(ab_u - ba_u)^4},$$

где

$$M_2 = a^2(9ab_x - 9ba_x + 27a^2d - 9abc + 2b^3)(a_u b_{uu} - b_u a_{uu}) + 9a^2(b_u a - a_u b)(b_u a_{xu} - a_u b_{xu}) - \\ - a_u(b_u a - a_u b)(-9a^2cb_u + 27a^2da_u + 3ab^2b_u - b^3a_u),$$

и двумя инвариантными дифференцированиями

$$\nabla_1 = \frac{9aa_u^2}{(ab_u - ba_u)^2} \frac{d}{dx} - \frac{aa_u^2(9ab_x - 9ba_x + 27a^2d - 9abc + 2b^3)}{(ab_u - ba_u)^3} \frac{d}{du}, \quad \nabla_2 = \frac{a}{a_u} \frac{d}{du}.$$

Эта алгебра разделяет регулярные орбиты.

Доказательство. Из формулы для продолжения векторного поля (см., например, [2, 4]), следует, что k -е продолжение поля $\hat{X}$ зависит от джетов порядка $(k+1)$ функций $\xi(x)$, $\eta(x)$, $\zeta(x)$ и от джетов порядка k функции $\omega(x, u)$. Обозначим символами Ξ_i^k , H_i^k , Z_i^k , Ω_{ij}^k компоненты разложения

$$\hat{X}^{(k)} = \sum_{i=0}^{k+1} \left(\xi^{(i)}(x) \Xi_i^k + \eta^{(i)}(x) H_i^k + \zeta^{(i)}(x) Z_i^k \right) + \sum_{i+j=0}^k \frac{\partial^{i+j} \omega(x, u)}{\partial x^i \partial u^j} \Omega_{ij}^k.$$

Векторные поля Ξ_i^k , H_i^k , Z_i^k , $i = 0, \dots, k+1$, и Ω_{ij}^k , $0 \leq i+j \leq k$, порождают вполне интегрируемое распределение на пространстве $J^k(\pi)$. Интегральные подмногообразия этого распределения являются орбитами действия группы G .

Заметим, что $\dim J^k(\pi) = 2k^2 + 6k + 6$. Обозначим символом $\mathcal{O}_k$ орбиту действия группы G в пространстве $J^k(\pi)$. Проекция

$$\mathcal{O}_{k-1} = \pi_{k,k-1}(\mathcal{O}_k) \subset J^{k-1}(\pi)$$

является орбитой в $J^{k-1}(\pi)$. Рассмотрим такую точку $z_{k-1} \in J^{k-1}(\pi)$, что $\hat{X}^{(k-1)} = 0$ в этой точке. Тогда поле $\hat{X}^{(k)}$ является вертикальным относительно проекции $\pi_{k,k-1}$ над этой точкой. Старшие производные, от которых зависят компоненты этого поля $\hat{X}^{(k)}$, — это $\xi^{(k+1)}$, $\eta^{(k+1)}$, $\zeta^{(k+1)}$ и $\partial^{i+j} \omega / \partial x^i \partial u^j$, где $i+j = k$. Отсюда следует, что слои расслоения $\pi_{k,k-1} : \mathcal{O}_k \rightarrow \mathcal{O}_{k-1}$ имеют размерность $k+4$ при $k \geq 2$.

Орбиты в пространстве 1-джетов находятся интегрированием 12-мерного вполне интегрируемого распределения, натянутого на поля Ξ_i^k , H_i^k , Z_i^k , $i = 0, 1, 2$, и Ω_{ij}^k , $0 \leq i+j \leq 1$. Поэтому первые инварианты появляются в пространстве $J^1(\pi)$, и их должно быть два: это I_1 и I_2 . Кроме того, это означает, что

$$\dim \mathcal{O}_k = 12 + \sum_{i=2}^k (i+4) = \frac{1}{2}(k^2 + 9k) + 7.$$

В [7] доказано, что размерность алгебры дифференциальных инвариантов порядка не более k равна коразмерности орбиты общего положения (регулярной орбиты). Это означает, что при $k \geq 2$ имеется $\frac{1}{2}(3k^2 + 3k - 2)$ независимых инвариантов порядка не выше k (из них $3k$ инвариантов порядка ровно k).

Решая систему (2), находим два дифференцирования ∇_1 и ∇_2 . Инварианты второго порядка $\nabla_i I_k$, $i, k = 1, 2$, независимы, следовательно, в пространстве $J^2(\pi)$ есть еще два инварианта: это J_1 и J_2 .

Отметим, что все полученные 6 инвариантов второго порядка линейны по вторым производным, а компоненты дифференцирований ∇_1 , ∇_2 зависят только от координат в $J^1(\pi)$. Это означает, что все инварианты, получаемые дифференцированиями из уже найденных, будут линейны по старшим производным. В пространстве 3-джетов имеется 9 инвариантов порядка 3. Применяя дифференцирования ∇_1 и ∇_2 к шести инвариантам порядка 2, получим 12 инвариантов порядка 3. Следовательно, между этими инвариантами существует 3 сизигии.

Чтобы получить все инварианты порядка k , достаточно применить дифференцирования ∇_1 и ∇_2 ко всем уже найденным инвариантам порядка $k - 1$. Тот факт, что алгебра дифференциальных инвариантов разделяет регулярные орбиты, также следует из [7]. $\square$

Замечание 1. Инвариантные дифференцирования удовлетворяют коммутационному соотношению

$$[\nabla_1, \nabla_2] = (2J_1 - 1)\nabla_1 + (9J_2 + I_2 + 3I_1 + 1)\nabla_2. \quad (3)$$

Две из трех сизигий среди инвариантов порядка 3 получаются из формулы (3). Третья имеет вид

$$9\nabla_2(J_2) - \nabla_1(J_1) + 9J_2(3J_1 - 2) + J_1(I_2 + 3I_1 + 1) - I_2 + 2 = 0.$$

Рассмотрим пространства $\mathbb{R}^2$ с координатами (x, u) и $\mathbb{R}^{17}$ с координатами

$$(i_1, i_2, j_1, j_2, i_{11}, i_{12}, i_{21}, i_{22}, i_{111}, i_{121}, i_{122}, i_{211}, i_{221}, i_{222}, j_{11}, j_{12}, j_{21}).$$

Каждое уравнение Абеля $\mathcal{E}$ определяет отображение $\sigma_{\mathcal{E}} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^{17}$ по формулам

$$i_k = I_k^{\mathcal{E}}, \quad j_k = J_k^{\mathcal{E}}, \quad i_{k\ell} = \nabla_{\ell} I_k^{\mathcal{E}}, \quad j_{k\ell} = \nabla_{\ell} J_k^{\mathcal{E}}, \quad i_{k\ell m} = \nabla_{\ell} \nabla_m I_k^{\mathcal{E}},$$

где верхний индекс $\mathcal{E}$ означает, что дифференциальные инварианты вычисляются для коэффициентов уравнения $\mathcal{E}$. Образ $\Sigma_{\mathcal{E}} = \text{im } \sigma_{\mathcal{E}} \subset \mathbb{R}^{17}$ зависит только от класса эквивалентности уравнения $\mathcal{E}$ относительно действия G .

Определение 3. Будем говорить, что уравнение $\mathcal{E}$ *регулярно* в области $D \subset \mathbb{R}^2$, если

- 1) 3-джеты коэффициентов уравнения $\mathcal{E}$ принадлежат регулярным орбитам;
- 2) $\sigma_{\mathcal{E}}(D)$ — гладкое двумерное подмногообразие в $\mathbb{R}^{17}$;
- 3) какие-либо две из функций $i_1, i_2, j_1, j_2, i_{11}, i_{12}, i_{21}, i_{22}$ могут быть выбраны в качестве локальных координат на $\Sigma_{\mathcal{E}}$.

Теорема 2. Два регулярных уравнения Абеля $\mathcal{E}$ и $\mathcal{E}'$ эквивалентны относительно действия псевдогруппы G тогда и только тогда, когда $\Sigma_{\mathcal{E}} = \Sigma_{\mathcal{E}'}$.

Доказательство. Ясно, что если уравнения эквивалентны, то $\Sigma_{\mathcal{E}} = \Sigma_{\mathcal{E}'}$.

Наоборот, пусть $\Sigma_{\mathcal{E}} = \Sigma_{\mathcal{E}'}$. Пусть, например, функции i_1 и i_2 задают координаты на $\Sigma_{\mathcal{E}}$. Заметим, что

$$\nabla_i = C_{i1} \frac{d}{dI_1} + C_{i2} \frac{d}{dI_2},$$

где $d/dI_1, d/dI_2$ — производные Трессе по инвариантам I_k (см. [7, 8]), а $C_{ij}, i, j = 1, 2$, — инварианты 2 порядка. Условие совпадения многообразий $\Sigma_{\mathcal{E}}$ означает, что ограничения инвариантов вплоть до 3 порядка на это многообразие совпадают. Все производные этих инвариантов по i_1, i_2 определяют ограничения инвариантов всех порядков. Это означает, что совпадают также ограничения на $\Sigma_{\mathcal{E}}$ всех дифференциальных инвариантов. Поскольку алгебра инвариантов разделяет регулярные орбиты, отсюда следует, что уравнения $\mathcal{E}$ и $\mathcal{E}'$ эквивалентны. $\square$

3. Сингулярные случаи. Рассмотрим уравнения (1), для которых $ab_u - ba_u = 0$. Легко видеть, что это равенство равносильно условию

$$\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{b}{a} \right) = 0,$$

т.е., $b(x, u) = k(x) \cdot a(x, u)$. Таким образом, сингулярная орбита состоит из уравнений вида

$$y' = a(x, u)y^2(y + k(x)) + c(x, u)y + d(x, u). \quad (4)$$

В ней, в свою очередь уравнением $k^2 a_u - 3c_u = 0$ выделяется еще одна сингулярная орбита.

Будем говорить, что уравнения (4), для которых $k^2 a_u - 3c_u \neq 0$, образуют первую сингулярную орбиту.

Теорема 3. Алгебра дифференциальных инвариантов действия псевдогруппы G в окрестности первой сингулярной орбиты порождена двумя инвариантами первого порядка

$$K_1 = \frac{a_u(2k^3a_u - 9kc_u + 27d_u)^2}{(k^2a_u - 3c_u)^3}, \quad K_2 = \frac{a_u^3(2ak^3 + 9k_x + 27d - 9kc)^2}{a^2(k^2a_u - 3c_u)^3}.$$

и двумя инвариантами дифференцированиями

$$\begin{aligned} \nabla'_1 &= \frac{a_uc_{uu} - a_{uu}c_u}{a_u(k^2a_u - 3c_u)^2} \frac{d}{dx} + \frac{9c_ua_{xu} - 9a_uc_{xu} + 2ka_u^2(k^3a - 3kc + 3k_x) + 6a_uc_u(3c - k^2a)}{9a_u(k^2a_u - 3c_u)^2} \frac{d}{du}, \\ \nabla'_2 &= \frac{a}{a_u} \frac{d}{du}. \end{aligned}$$

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 1. Всего при каждом $k \geq 1$ имеется $k^2 + k$ независимых инвариантов порядка не выше k , из них $2k$ инвариантов порядка ровно k .

Теорема эквивалентности таких уравнений формулируется аналогично теореме 2, только отображение

$$\sigma_{\mathcal{E}} : \mathbb{R}^2(x, u) \rightarrow \mathbb{R}^6(k_1, k_2, k_{11}, k_{12}, k_{21}, k_{22})$$

строится по формулам

$$k_i = K_i^{\mathcal{E}}, \quad k_{j\ell} = \nabla'_{\ell} K_j^{\mathcal{E}}.$$

Замечание 2. Инвариант второго порядка, выражающийся простой формулой

$$J = \frac{a(a_uc_{uu} - a_{uu}c_u)}{a_u^2(k^2a_u - 3c_u)},$$

удовлетворяет равенству

$$\nabla'_2 K_2 - 9K_2 J + 2K_2 - 2\sqrt{|K_1 K_2|} = 0.$$

Равенство $k^2a_u - 3c_u = 0$ означает, что

$$\frac{\partial}{\partial u}(3c - k^2a) = 0, \quad \text{т.е.} \quad c(x, u) = \frac{1}{3}k^2(x) \cdot a(x, u) + \ell(x).$$

Этим условием выделяется вторая сингулярная орбита. Она состоит из уравнений вида

$$y' = a(x, u)y\left(y^2 + k(x)y + \frac{1}{3}k^2(x)\right) + \ell(x)y + d(x, u),$$

для которых $k^3a_u - 27d_u \neq 0$.

Теорема 4. Алгебра дифференциальных инвариантов действия псевдогруппы G в окрестности второй сингулярной орбиты порождена одним инвариантом первого порядка

$$M = \frac{(k_x + 3d - k\ell)a_u - 3ad_u}{a(k^3a_u - 27d_u)}$$

и двумя инвариантами дифференцированиями

$$\begin{aligned} \nabla''_1 &= \frac{a_ud_{uu} - d_ua_{uu}}{a_u^{4/3}(k^3a_u - 27d_u)^{5/3}} \frac{d}{dx} + \frac{k^2a_u^2(k_x - k\ell) + 27\ell a_ud_u + 9d_ua_{xu} - 9a_ud_{xu}}{9a_u^{4/3}(k^3a_u - 27d_u)^{5/3}} \frac{d}{du}, \\ \nabla''_2 &= \frac{a}{a_u} \frac{d}{du}. \end{aligned}$$

При каждом $k \geq 1$ имеется $\frac{1}{2}(k^2 + k)$ независимых инвариантов порядка не выше k , из них k инвариантов порядка ровно k . Отображение

$$\sigma_{\mathcal{E}} : \mathbb{R}^2(x, u) \rightarrow \mathbb{R}^3(m, m_1, m_2)$$

в теореме эквивалентности строится по формулам

$$m = M^{\mathcal{E}}, \quad m_{\ell} = \nabla''_{\ell} M^{\mathcal{E}}.$$

Наконец, условие $k^3 a_u - 27 d_u = 0$ равносильно тому, что

$$d(x, u) = \frac{1}{27} k(x)^3 \cdot a(x, u) + m(x).$$

Уравнения вида

$$y' = a(x, u) \left(y + \frac{1}{3} k(x) \right)^3 + \ell(x) y + m(x)$$

образуют третью сингулярную орбиту. На ней нет ни одного инварианта, все уравнения эквивалентны друг другу.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бибииков П. В., Классификация управляемых ансамблей проективных точек// Изв. вузов. Сер. мат. — 2015. — 3. — С. 28–34.
2. Виноградов А. М., Красильщик И. С., Лычагин В. В. Введение в геометрию нелинейных дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1986.
3. Кушнер А. Г., Лычагин В. В. Инварианты Петрова гамильтоновых систем с управляющим параметром// Автомат. телемех. — 2013. — 3. — С. 83–102.
4. Олвер П. Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям. — М.: Мир, 1989.
5. Appell P. Sur les invariants de quelques équations différentielles// J. Math. — 1889. — 5. — С. 361–423.
6. Gritsenko D. S., Kiriukhin O. M. Differential invariants of feedback transformations for quasi-harmonic oscillation equations// J. Geom. Phys. — 2017. — 113. — С. 65–72.
7. Kruglikov B. S., Lychagin V. V., Global Lie–Tresse theorem/ Preprint [arXiv:1111.5480v1](https://arxiv.org/abs/1111.5480v1) [math.DG]. — Cornell Univ. Library, 2011.
8. Lychagin V. Feedback equivalence of 1-dimensional control systems of the first order// В сб.: «Geometry, Topology, and Their Applications»/ Proc. Inst. Math. NAS Ukraine, — 2009. — 6, № 2. — С. 288–302.
9. Lychagin V. Feedback differential invariants// Acta Appl. Math. — 2010. — 109, №. 1. — С. 211–222.

В. В. Шурыгин (мл.)

Казанский (Приволжский) федеральный университет

E-mail: vshjr@yandex.ru, 1vshuryg@kpfu.ru