ISSN 0233-6723

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ

СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Тематические обзоры

Том 147

Москва 2018

ISSN 0233–6723

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

ВСЕРОССИЙСКИЙ ИНСТИТУТ
НАУЧНОЙ И ТЕХНИЧЕСКОЙ ИНФОРМАЦИИ
(ВИНИТИ РАН)

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ

СЕРИЯ
СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА
И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

ТЕМАТИЧЕСКИЕ ОБЗОРЫ

Том 147

ТРУДЫ СЕМИНАРА
ПО АЛГЕБРЕ И ГЕОМЕТРИИ
САМАРСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

Москва 2018

СОДЕРЖАНИЕ

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 147 (2018). С. 3–50

УДК 512.745.4, 512.815, 512.554.32, 514.765

ИНД-МНОГООБРАЗИЯ ОБОБЩЕННЫХ ФЛАГОВ: ОБЗОР РЕЗУЛЬТАТОВ

© 2018 г. **М. В. ИГНАТЬЕВ, И. ПЕНКОВ**

Аннотация. Работа представляет собой обзор результатов, касающихся структуры однородных инд-многообразий G/P инд-групп $G = \mathrm{GL}_\infty(\mathbb{C})$, $\mathrm{SL}_\infty(\mathbb{C})$, $\mathrm{SO}_\infty(\mathbb{C})$, $\mathrm{Sp}_\infty(\mathbb{C})$, подчиненных тому условию, что G/P является индуктивным пределом компактных однородных пространств G_n/P_n. В этом случае подгруппа $P \subset G$ является разложимой параболической подгруппой группы G, а инд-многообразие G/P допускает «флаговую реализацию». Вместо обычных флагов здесь нужно рассматривать обобщенные флаги — бесконечные, вообще говоря, цепи $\mathcal{C}$ подпространств естественного представления V группы G, удовлетворяющие некоторому условию: грубо говоря, для каждого ненулевого вектора v из V должны найтись наибольшее пространство в $\mathcal{C}$, не содержащее v, и наименьшее подпространство в $\mathcal{C}$, содержащее v. Мы начинаем с обзора конструкции инд-многообразий обобщенных флагов, а затем показываем, что эти инд-многообразия являются однородными инд-пространствами вида G/P для расщепляющая параболических инд-подгрупп $P \subset G$. Мы также кратко описываем характеризацию более общих, т.е. нерасщепляющих, параболических инд-подгрупп в терминах обобщенных флагов. В частном случае инд-грассманиана X мы приводим чисто алгеброгеометрическое построение инд-многообразия X. Кроме того, обсуждаются такие темы, как теорема Ботта—Бореля—Вейля для инд-многообразий обобщенных флагов, конечномерные векторные расслоения на инд-многообразиях обобщенных флагов, разложение Шуберта инд-многообразия G/P для произвольной расщепляющей параболической инд-подгруппы $P \subset G$, а также орбиты вещественных форм на G/P для $G = \mathrm{SL}_\infty(\mathbb{C})$.

***Ключевые слова*:** инд-многообразие, инд-группа, обобщенный флаг, разложение Шуберта, вещественная форма.

***AMS Subject Classification*:** 22E65, 17B65, 14M15.

СОДЕРЖАНИЕ

Работа М. В. Игнатьева выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 14–01–97017 и 16–01–00154), а также Министерства образования и науки Российской федерации (проект 204). М. В. Игнатьев выражает благодарность за гостеприимство Университету Якобса в Бремене, где была выполнена часть работы. Работа обоих авторов была частично поддержана Немецким научно-исследовательским обществом DFG (грант PE 980/6-1).

ISSN 0233–6723

1. Введение

Многообразия флагов играют фундаментальную роль в геометрии. Проективные пространства и грассманианы восходят к началам современной геометрии и возникают почти в любом аспекте изучения глобальных геометрических структур. Многообразия полных (максимальных) флагов также играют выдающуюся роль в геометрии в целом, однако они чаще ассоциируются с геометрической теорией представлений. Причина этого в том, что они являются универсальными компактными однородными пространствами группы $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, поэтому практически любая ветвь теории представлений любой алгебраической группы G содержит глубокие результаты, связанные с геометрией флагового многообразия G/B. Основной пример здесь — теорема Ботта—Бореля—Вейля. Другой пример — теорема локализации Бейлинсона—Бернштейна, и можно еще долго перечислять яркие результаты в этом направлении. Если задуматься о том, чем могли бы быть «бесконечномерные многообразия флагов», то становится ясно, что к этому вопросу есть много разных подходов. Один из них — изучать однородные инд-пространства G/B групп Каца—Муди G. Эти инд-многообразия играют существенную роль в теории представлений и геометрии с 1980-х гг. (см., например, [4, 30–32]). Есть и другой подход, которому мы следуем в этой работе. Ее главная тема — однородные инд-пространства локально линейных инд-групп $\mathrm{GL}_\infty(\mathbb{C})$, $\mathrm{SL}_\infty(\mathbb{C})$, $\mathrm{SO}_\infty(\mathbb{C})$ и $\mathrm{Sp}_\infty(\mathbb{C})$. Эти «бесконечномерные многообразия флагов» суть гладкие локально проективные инд-многообразия (в частности, инд-схемы), точки на которых соответствуют некоторым цепям подпространств в данном счетномерном комплексном векторном пространстве $V \cong \mathbb{C}^\infty$. Более того, наши «бесконечномерные многообразия флагов» исчерпываются обычными конечномерными флаговыми многообразиями. Заранее непонятно, какие цепи подпространств в V надо рассматривать, чтобы получилась биекция между этими цепями и борелевскими (или, более общо, параболическими) подгруппами группы $\mathrm{GL}_\infty(\mathbb{C})$. Ответ на этот вопрос, полученный в [16], приводит к определению обобщенного флага. Обобщенный флаг — это цепь подпространств $\mathcal{F}$, удовлетворяющая тому условию, что каждый вектор $v \in V$ однозначно определяет такую пару $F'_v \subset F''_v$ подпространств из $\mathcal{F}$, что F'_v — это непосредственный предшественник F''_v и $v \in F''_v \setminus F'_v$ (точное определение см. в п. 2.2). Важно, что не требуется, чтобы каждое подпространство $F \in \mathcal{F}$ обладало непосредственным предшественником *и* непосредственным последователем, т.е. подпространством, непосредственно следующим за F; вместо этого лишь предполагается, что существует непосредственный предшественник *или* непосредственный потомок. Появление таких относительно сложных линейных порядков на цепях $\mathcal{F}$ связано, разумеется, с тем, что борелевские подгруппы в $\mathrm{GL}_\infty(\mathbb{C})$, содержащие данный расщепляющий максимальный тор, находятся во взаимно однозначном соответствии с линейными порядками на счетном множестве (см. [18]). Другой способ увидеть, как возникают обобщенные флаги, — попытаться расширить на бесконечность конечный флаг в конечномерном пространстве с помощью следующей бесконечной процедуры:

на каждом шаге новый флаг добавляется к части флага, полученного на предыдущем шаге, причем каждый раз длина флага возрастает как максимум на один. Множество способов выбрать место, где конечный флаг будет удлинен, влечет за собой то, что на выходе этой процедуры мы получим обобщенный флаг; точная математическая формулировка «процедуры удлинения» дается формулой (4) в п. 2.2. В результате приходим к достаточно хорошей характеризации инд-многообразий обобщенных флагов как инд-многообразий, допускающих исчерпание обычными флаговыми многообразиями. Необходимо также обратить внимание на вопрос о соизмеримости обобщенных флагов: две точки на одном и том же инд-многообразии обобщенных флагов соответствуют обобщенным флагам, которые «близки друг к другу», т.е., в строгих терминах, E-соизмеримы (см. п. 2.2). Идея соизмеримости восходит к Э. Прессли и Г. Сигалу. Мы полагаем, что взаимосвязь между инд-многообразиями обобщенных флагов и теорией представлений инд-групп $\mathrm{GL}_\infty(\mathbb{C})$, $\mathrm{SL}_\infty(\mathbb{C})$, $\mathrm{SO}_\infty(\mathbb{C})$, $\mathrm{Sp}_\infty(\mathbb{C})$ окажется по крайней мере настолько же богата, как в конечномерном случае. Степень завершенности обоих подходов, однако, далека от той, которая присуща конечномерной теории, так что большая часть работы еще впереди. Наша цель скромна: дать первый обзор результатов, который должен служить приглашением к дальнейшим исследованиям. Краткое содержание статьи таково. В разделе 2 даны определения инд-многообразий и инд-групп и рассмотрены главные примеры инд-групп. Определены обобщенные флаги (а также изотропные обобщенные флаги) и показано, что обобщенные флаги, E-соизмеримые с данным обобщенным флагом $\mathcal{F}$, образуют инд-многообразие. В разделе 3 показано, что инд-грассманианы могут быть определены в чисто алгебро-геометрических терминах как индуктивные пределы линейных вложений конечномерных грассманианов. В разделе 4 обсуждаются картановские, борелевские и параболические подгруппы классических инд-групп и доказано, что инд-многообразия обобщенных флагов являются однородными пространствами G/P, где $G = \mathrm{GL}_\infty(\mathbb{C})$, $\mathrm{SL}_\infty(\mathbb{C})$ (или $G = \mathrm{SO}_\infty(\mathbb{C})$, $\mathrm{Sp}_\infty(\mathbb{C})$ в случае изотропных обобщенных флагов), а P — расщепляющая параболическая инд-подгруппа. Также кратко обсуждаются общие, т.е. нерасщепляющие, борелевские и параболические подгруппы. В разделе 5 построено разложение Брюа классической инд-группы, а также разложение Шуберта ее инд-многообразий обобщенных флагов. В частности, дан критерий гладкости подмногообразия Шуберта. Раздел 6 посвящен переносу теорем Ботта—Бореля—Вейля и Барта—Ван де Вена—Тюрина—Сато на случай обобщенных флагов. Наконец, в разделе 7 некоторые из известных результатов Дж. А. Вольфа об орбитах вещественных форм полупростых групп Ли переносятся на инд-многообразия обобщенных флагов для $G = \mathrm{SL}_\infty(\mathbb{C})$.

2. Определения и примеры

В этом разделе приведены точные определения и основные примеры, используемые в дальнейшем, и доказаны некоторые начальные свойства обобщенных флагов. Этот материал взят из [16, 21].

2.1. Инд-многообразия и инд-группы.

Все алгебраические многообразия и группы рассматриваются над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$.

Определение 2.1. *Инд-многообразием* называется индуктивный предел $X = \varinjlim X_n$ цепи морфизмов алгебраических многообразий

$$X_1 \xrightarrow{\varphi_1} X_2 \xrightarrow{\varphi_2} \ldots \xrightarrow{\varphi_{n-1}} X_n \xrightarrow{\varphi_n} X_{n+1} \xrightarrow{\varphi_{n+1}} \ldots. \tag{1}$$

Очевидно, индуктивный предел (1) не изменится, если заменить последовательность $\{X_n\}_{n\geqslant 1}$ подпоследовательностью $\{X_{i_n}\}_{n\geqslant 1}$, а морфизмы φ_n — композициями

$$\widetilde{\varphi}_{i_n} = \varphi_{i_{n+1}-1} \circ \ldots \circ \varphi_{i_n+1} \circ \varphi_{i_n}.$$

Пусть Y — другое инд-многообразие, представленное как индуктивный предел цепи

$$Y_1 \xrightarrow{\psi_1} Y_2 \xrightarrow{\psi_2} \ldots \xrightarrow{\psi_{n-1}} Y_n \xrightarrow{\psi_n} Y_{n+1} \xrightarrow{\psi_{n+1}} \ldots.$$

Морфизм инд-многообразий $f : X \to Y$ — это отображение из $\varinjlim X_n$ в $\varinjlim Y_n$, индуцированное набором таких морфизмов алгебраических многообразий

$$\{f_n : X_n \to Y_{i_n}\}_{n\geqslant 1},$$

что

$$\widetilde{\psi}_{i_n} \circ f_n = f_{n+1} \circ \varphi_n$$

для любого $n \geqslant 1$. *Тождественный морфизм* id_X — это морфизм, индуцированный тождественным отображением $X \to X$. Как обычно, морфизм $f : X \to Y$ называется *изоморфизмом*, если существует морфизм $g : Y \to X$, для которого

$$f \circ g = \mathrm{id}_Y,\ g \circ f = \mathrm{id}_X .$$

Инд-многообразие X снабжается топологией следующим образом: подмножество $U \subset X$ объявляется *открытым*, если его прообраз относительно естественного отображения

$$X_m \to \varinjlim X_n$$

открыт для любого m. Ясно, что любое открытое (а также замкнутое или локально замкнутое) подмножество Z в X несет структуру инд-многообразия, индуцированную структурой инд-многообразия на X. Будем называть такое Z *инд-подмногообразием* в X. В дальнейшем рассматриваются только такие цепи (1), где морфизмы φ_n являются вложениями, поэтому

$$X = \bigcup_{n\geqslant 1} X_n.$$

В этом случае последовательность $\{X_n\}_{n\geqslant 1}$ называется *исчерпанием* инд-многообразия X.

Далее, введем понятие гладкой точки инд-многообразия. Пусть $x \in X$; тогда $x \in X_n$ для достаточно больших n. Пусть $\mathfrak{m}_{n,x} \subset \mathcal{O}_{X_n,x}$ — максимальный идеал локализации кольца $\mathcal{O}_{X_n}$ в точке x. Для каждого $k \geqslant 1$ существует эпиморфизм

$$\alpha_{n,k} : S^k(\mathfrak{m}_{n,x}/\mathfrak{m}_{n,x}^2) \to \mathfrak{m}_{n,x}^k/\mathfrak{m}_{n,x}^{k+1}.$$

Заметим, что x — гладкая точка многообразия X_n тогда и только тогда, когда $\alpha_{n,k}$ является изоморфизмом для любого k. Переходя к проективному пределу, получаем отображение

$$\widehat{\alpha}_k = \varprojlim \alpha_{n,k} : \varprojlim S^k(\mathfrak{m}_{n,x}/\mathfrak{m}_{n,x}^2) \to \varprojlim \mathfrak{m}_{n,x}^k/\mathfrak{m}_{n,x}^{k+1},$$

которое является эпиморфизмом для всех k. Будем говорить, что x — *гладкая точка* инд-многообразия X, если $\widehat{\alpha}_k$ является изоморфизмом для любого k. В противном случае x называют *особой точкой*. Понятие гладкости точки не зависит от выбора исчерпания $\{X_n\}_{n\geqslant 1}$ для X. Инд-многообразие X называется *гладким*, если каждая точка $x \in X$ — гладкая.

Пример 2.2. (i) Предположим, что каждое многообразие X_n в цепи (1) — это аффинное пространство, а каждый образ $\varphi_n(X_n)$ — аффинное подпространство в X_{n+1}, причем

$$\lim_{n\to\infty} \dim X_n = \infty.$$

Тогда, с точностью до изоморфизма, $X = \varinjlim X_n$ не зависит от выбора цепи $\{X_n, \varphi_n\}_{n\geqslant 1}$ с такими свойствами. Будем писать $X = \mathbb{A}^\infty$ и называть его *бесконечномерным аффинным пространством.* В частности, $\mathbb{A}^\infty$ допускает исчерпание

$$\mathbb{A}^\infty = \bigcup_{n\geqslant 1} \mathbb{A}^n,$$

где $\mathbb{A}^n$ обозначает n-мерное аффинное пространство. Ясно, что $\mathbb{A}^\infty$ — гладкое инд-многообразие.

(ii) Пусть теперь каждое X_n — проективное пространство, а каждый образ $\varphi_n(X_n)$ — проективное подпространство в X_{n+1}, причем

$$\lim_{n\to\infty} \dim X_n = \infty.$$

Тогда $X = \varinjlim X_n$ не зависит от выбора цепи $\{X_n, \varphi_n\}_{n\geqslant 1}$ с такими свойствами. Будем писать

$$X = \mathbb{P}^\infty = \bigcup_{n\geqslant 1} \mathbb{P}^n$$

и называть его *бесконечномерным проективным пространством.* Оно тоже является гладким инд-многообразием.

Вообще говоря, инд-группой называется групповой объект в категории инд-многообразий. В этой работе, однако, рассматриваются только локально линейные алгебраические инд-группы.

Определение 2.3. *Локально линейной алгебраической инд-группой* называется такое инд-многообразие $G = \bigcup G_n$, что все G_n являются линейными алгебраическими группами, а все вложения — гомоморфизмами групп. В дальнейшем для краткости будем говорить просто *инд-группа.* Понятно, что G является группой. Под *инд-подгруппой* в G будем понимать замкнутую подгруппу в G. *Морфизм инд-групп* $f : G \to H$ — это гомоморфизм групп, который также является морфизмом инд-многообразий.

Теперь введем некоторые инд-группы, которые играют центральную роль в этом обзоре. Обозначения из следующего примера будут использоваться на протяжении всей статьи.

Пример 2.4. (i) Обозначим через V счетномерное комплексное векторное пространство с данным базисом E. Фиксируем порядок на E с помощью упорядоченного множества $\mathbb{Z}_{>0}$, т.е. $E = \{e_1, e_2, \ldots\}$. Пусть V_* — линейная оболочка дуальной системы $E^* = \{e_1^*,\ e_2^*,\ \ldots\}$. По определению, *финитарной полной линейной группой* $\mathrm{GL}(V, E)$ называется группа обратимых $\mathbb{C}$-линейных преобразований пространства V, которые оставляют на месте все элементы E, кроме конечного числа. Нетрудно (но важно) проверить, что $\mathrm{GL}(V, E)$ зависит только от пары (V, V_*), но не от E. Базис E' пространства V будем называть *G-подходящим*, если $\mathrm{GL}(V, E) = \mathrm{GL}(V, E')$. Далее, ясно, что у каждого оператора из $\mathrm{GL}(V, E)$ есть корректно определенный определитель. Через $\mathrm{SL}(V, E)$ обозначим подгруппу в $\mathrm{GL}(V, E)$, состоящую из всех операторов с определителем 1. Эта подгруппа называется *финитарной специальной линейной группой.* Представим базис E как объединение $E = \bigcup E_n$ его вложенных конечных подмножеств. Тогда V исчерпывается своими конечномерными подпространствами $V_n = \langle E_n\rangle_{\mathbb{C}}$, где $\langle\cdot\rangle_{\mathbb{C}}$ означает $\mathbb{C}$-линейную оболочку; эквивалентная запись: $V = \varinjlim V_n$. Каждому линейному оператору $\varphi : V_n \to V_n$ можно поставить в соответствие такой оператор

$$\widehat{\varphi} : V_{n+1} \to V_{n+1}, \quad \widehat{\varphi}(x) = \varphi(x) \text{ для } x \in V_n, \quad \widehat{\varphi}(e) = e \text{ при } e \in E \setminus E_n.$$

Это задает вложения

$$\mathrm{GL}(V_n) \hookrightarrow \mathrm{GL}(V_{n+1}), \quad \mathrm{SL}(V_n) \hookrightarrow \mathrm{SL}(V_{n+1}),$$

так что $\mathrm{GL}(V, E) = \varinjlim \mathrm{GL}(V_n)$ и $\mathrm{SL}(V, E) = \varinjlim \mathrm{SL}(V_n)$ являются инд-группами. Иногда будеv писать $\mathrm{GL}_\infty(\mathbb{C})$ и $\mathrm{SL}_\infty(\mathbb{C})$ вместо $\mathrm{GL}(V, E)$ и $\mathrm{SL}(V, E)$ соответственно, тогда нужно иметь в виду указанное выше исчерпание пространства V его конечномерными подпространствами V_n.

(ii) Предположим теперь, что V снабжено невырожденной симметрической или кососимметрической формой β. Будем предполагать, что ограничение β_n формы β на V_n невырожденно при всех n и что $\beta(e, V_n) = 0$ при $e \in E \setminus E_n$. *Финитарная ортогональная группа* $\mathrm{O}(V, E, \beta)$ и *финитарная симплектическая группа* $\mathrm{Sp}(V, E, \beta)$ — это подгруппы в $\mathrm{GL}(V, E)$, состоящие из всех обратимых операторов, сохраняющих форму β в случае, когда β симметрична или кососимметрична соответственно. Положим также

$$\mathrm{SO}(V, E, \beta) = \mathrm{O}(V, E, \beta) \cap \mathrm{SL}(V, E).$$

Если линейный оператор φ на V_n сохраняет форму β_n, то линейный оператор $\widehat{\varphi}$ на V_{n+1} будет сохранять форму β_{n+1}. Значит, можно представить указанные группы как индуктивные пределы:

$$\mathrm{O}(V, E, \beta) = \varinjlim \mathrm{O}(V_n, \beta_n), \quad \mathrm{SO}(V, E, \beta) = \varinjlim \mathrm{SO}(V_n, \beta_n), \quad \mathrm{Sp}(V, E, \beta) = \varinjlim \mathrm{Sp}(V_n, \beta).$$

Таким образом, они являются инд-группами. Вновь, когда будем писать $\mathrm{O}_\infty(\mathbb{C})$, $\mathrm{SO}_\infty(\mathbb{C})$ или $\mathrm{Sp}_\infty(\mathbb{C})$, нужно иметь в виде данное исчерпание пространства V конечномерными β-невырожденными подпространствами.

В разделах 2–5 через G будем обозначать одну из инд-групп $\mathrm{GL}_\infty(\mathbb{C})$, $\mathrm{SL}_\infty(\mathbb{C})$, $\mathrm{SO}_\infty(\mathbb{C})$, $\mathrm{Sp}_\infty(\mathbb{C})$. Пусть, например, $G = \mathrm{SL}_\infty(\mathbb{C})$. Пусть H — подгруппа, состоящая из всех элементов $g \in G = \mathrm{SL}_\infty(\mathbb{C})$, которые диагональны в базисе E. Тогда H — это инд-подгруппа в G, называемая *расщепляющей подгруппой Картана*. Инд-подгруппа $B \subset G$, содержащая H, называется *расщепляющей борелевской подгруппой*, если она локально разрешима (т.е. если каждая конечномерная инд-подгруппа в B разрешима) и максимальна с таким свойством. Инд-подгруппа, содержащая расщепляющую борелевскую подгруппу B, называется *расщепляющей параболической подгруппой*. Эквивалентное определение: инд-подгруппа P в G, содержащая H, называется расщепляющей параболической подгруппой в G, если $P \cap G_n$ является параболической подгруппой в G_n для всех $n \geqslant 1$, где $G = \bigcup_{n\geqslant 1} G_n$ — естественное исчерпание группы G, описанное выше. Факторпространство

$$G/P = \bigcup_{n\geqslant 1} G_n/(P \cap G_n)$$

является *локально проективным* инд-многообразием (т.е. допускает исчерпание проективными многообразиями); заметим, однако, что, вообще говоря, G/P не будет *проективным* инд-многообразием, т.е. G/P не изоморфно замкнутому инд-подмногообразию в $\mathbb{P}^\infty$ (см. теорему 6.4 ниже). Картановские, борелевские и параболические подгруппы произвольной классической инд-группы G более детально обсуждаются в разделе 4, где G/P характеризуется также как инд-многообразие обобщенных флагов.

2.2. Обобщенные флаги. В этом разделе вводится ключевое понятие обобщенного флага. Очевидное понятие бесконечного флага (возможного, бесконечного в одну или в обе стороны, см. определение ниже) недостаточно, чтобы описать локально проективные однородные инд-пространства классических инд-групп. Это понятие должно быть заменено несколько более замысловатым понятием обобщенного флага, приводимым ниже.

Напомним, что через V обозначается счетномерное комплексное векторное пространство. *Цепь* подпространств в V — это множество $\mathcal{C}$ таких различных подпространств пространства V, что если $F,\ F' \in \mathcal{C}$, то либо $F \subset F'$, либо $F' \subset F$. Если $\mathcal{C}$ — цепь подпространств в V, то будем обозначать через $\mathcal{C}'$ (соответственно, $\mathcal{C}''$) подцепь в $\mathcal{C}$, состоящую из всех $F \in \mathcal{C}$, у которых есть непосредственный потомок (соответственно, непосредственный предшественник). Также будем писать $\mathcal{C}^\dagger$, имея в виду множество всех пар $(F',\ F'')$, где $F'' \in \mathcal{C}''$ — непосредственный потомок пространства $F' \in \mathcal{C}'$.

Определение 2.5. *Обобщенный флаг* — это цепь $\mathcal{F}$ подпространств пространства V, обладающая свойствами $\mathcal{F} = \mathcal{F}' \cup \mathcal{F}''$ и

$$V \setminus \{0\} = \bigcup_{(F',F'')\in\mathcal{F}^\dagger} F'' \setminus F'.$$

Отметим, что каждый ненулевой вектор $v \in V$ однозначно определяет такую пару $(F'_v, F''_v) \in \mathcal{F}^\dagger$, что $v \in F''_v \setminus F'_v$. Если $\mathcal{F}$ — обобщенный флаг, то каждая из цепей $\mathcal{F}'$ и $\mathcal{F}''$ его однозначно определяет. В самом деле, если $(F', F'') \in \mathcal{F}^\dagger$, то

$$F' = \bigcup_{\substack{G''\in\mathcal{F}''\\ G''\subsetneq F''}} G'', \quad F'' = \bigcap_{\substack{G'\in\mathcal{F}'\\ G'\supsetneq F'}} G'$$

(см. [16, Proposition 3.2]). Обобщенный флаг $\mathcal{F}$ называется *максимальным*, если он не содержится строго в другом обобщенном флаге. Это равносильно условию $\dim F''_v = \dim F'_v + 1$ для всех ненулевых векторов $v \in V$. Максимальный обобщенный флаг не обязательно является максимальной цепью подпространств в V (см. пример 2.7(v) ниже). Каждый обобщенный флаг содержится в некотором максимальном обобщенном флаге. По определению, обобщенный флаг $\mathcal{F}$ является *флагом*, если $\mathcal{F}$ изоморфен как линейно упорядоченное множество подмножеству в $\mathbb{Z}$ (с естественным порядком). Выберем обобщенный флаг $\mathcal{F}$ и зафиксируем такие линейно упорядоченное множество $(\mathcal{A}, \preceq)$ и изоморфизм упорядоченных множеств

$$\mathcal{A} \to \mathcal{F}^\dagger, \quad \alpha \mapsto (F'_\alpha, F''_\alpha),$$

что $\mathcal{F}$ может быть записан в виде

$$\mathcal{F} = \{F'_\alpha,\ F''_\alpha,\ \alpha \in \mathcal{A}\}.$$

Будем писать $\alpha \prec \beta$, если $\alpha \preceq \beta$ и $\alpha \neq \beta$ при $\alpha, \beta \in \mathcal{A}$. Как и выше, фиксируем базис E пространства V. Мы назовем обобщенный флаг $\mathcal{F}$ *совместимым* с базисом E, если существует (автоматически сюръективное) отображение $\sigma : E \to \mathcal{A}$, для которого каждая пара $(F'_\alpha, F''_\alpha) \in \mathcal{F}^\dagger$ имеет вид

$$F'_\alpha = \langle e \in E \mid \sigma(e) \prec \alpha\rangle_\mathbb{C}, \quad F''_\alpha = \langle e \in E \mid \sigma(e) \preceq \alpha\rangle_\mathbb{C}, \tag{2}$$

Согласно [16, Proposition 4.1], каждый обобщенный флаг обладает совместимым с ним базисом. Ниже мы приводим доказательство этого факта.

Предложение 2.6. *Каждый обобщенный флаг $\mathcal{F}$ в V обладает совместимым базисом.*

Доказательство. Рассмотрим сначала случай, когда $\mathcal{F}$ максимален. Пусть $D = \{d_1, d_2, \ldots\}$ — любой базис пространства V. Мы используем индукцию, чтобы построить такой базис $L = \{l_1, l_2, \ldots\}$, что

$$\langle l_1, \ldots, l_n\rangle_\mathbb{C} = \langle d_1, \ldots, d_n\rangle_\mathbb{C}$$

для всех n и подпространства F'_{l_n} попарно различны. Пусть $l_1 = d_1$. Предположим, что векторы $l_1, \ldots, l_n$ уже построены. Обозначим через W аффинное подпространство в V вида

$$d_{n+1} + \langle l_1, \ldots, l_n\rangle_\mathbb{C}.$$

Мы утверждаем, что найдется вектор $l \in W$, для которого подпространство F'_l не совпадает ни с одним их подпространств $F'_{l_1}, \ldots, F'_{l_n}$. Действительно, предположим противное. Тогда W содержится в объединении $\bigcup\limits_{i=1}^{n} F''_{l_i}$, поэтому $W \subset F''_{l_k}$ для какого-либо k. Если $i_1, \ldots, i_n$ — такая перестановка чисел $1, \ldots, n$, что $F'_{l_{i_1}} \subsetneq \ldots \subsetneq F'_{l_{i_n}}$, то $F''_{l_{i_1}} \subsetneq \ldots \subsetneq F''_{l_{i_n}}$ и $W \subset F''_{l_{i_n}}$. Поскольку $\mathcal{F}$ максимален,

$$\dim F'_{l_{i_n}} \cap \langle d_{n+1}, l_{i_n}\rangle_\mathbb{C} \geqslant 1,$$

но $l_{i_n} \notin F'_{l_{i_n}}$, так что $W \cap F'_{l_{i_n}} \neq \varnothing$. Более того, $\dim W \cap F'_{l_{i_n}} \geqslant n-1$, потому что $l_{i_1}, \ldots, l_{i_{n-1}} \in F'_{l_{i_n}}$. С другой стороны, $l_{i_n} \notin W \cap F'_{l_{i_n}}$, поэтому $\dim W \cap F'_{l_{i_n}} = n-1$.

Точнее говоря,

$$W \cap F'_{l_{i_n}} = d_{n+1} + \langle l_{i_1}, \ldots, l_{i_{n-1}}\rangle_\mathbb{C}.$$

Согласно нашему предположению, для любого $l \in W \cap F'_{l_{i_n}}$ подпространство F'_l совпадает с одним из подпространств $F'_{l_{i_1}}, \ldots, F'_{l_{i_{n-1}}}$, так как $F'_l \neq F'_{l_{i_n}}$. Рассуждая подобным образом, мы получаем, что для каждого $2 \leqslant k \leqslant n$

$$W \cap F'_{l_{i_k}} = d_{n+1} + \langle l_{i_1}, \ldots, l_{i_{k-1}}\rangle_\mathbb{C},$$

и, каким бы ни был $l \in W \cap F'_{l_{i_k}}$, подпространство F'_l совпадает с одним из подпространств $F'_{l_{i_1}}, \ldots, F'_{l_{i_{k-1}}}$. В частности,

$$W \cap F'_{l_{i_2}} = d_{n+1} + \langle l_{i_1}\rangle_\mathbb{C}$$

и $F'_{d_{n+1}+cl_{i_1}} = F'_{l_{i_1}}$ для всех $c \in \mathbb{C}$. Это означает, что $\langle d_{n+1}, e_{l_1}\rangle_\mathbb{C} \subset F''_{l_{i_1}}$. Поскольку обобщенный флаг $\mathcal{F}$ максимален,

$$\dim F'_{l_{i_1}} \cap \langle d_{n+1}, l_{i_1}\rangle_\mathbb{C} \geqslant 1.$$

Однако $l_{i_1} \notin F'_{l_{i_1}}$, а значит, $W \cap F'_{l_{i_1}} \neq \varnothing$. Выбирая любой $l \in W \cap F'_{l_{i_1}}$, мы видим, что подпространства $F'_{l_1}, \ldots, F'_{l_n}, F'_l$ попарно различны, что противоречит нашему предположению о том, что F'_l совпадает с одним из подпространств $F'_{l_1}, \ldots, F'_{l_n}$. Положим теперь $l_{n+1} = l$, где l — любой вектор из W, для которого подпространства $F'_{l_1}, \ldots, F'_{l_n}, F'_l$ попарно различны. Мы заключаем, что требуемый базис L построен. Легко видеть, что для любого $F' \in \mathcal{F}'$ множество $F'' \setminus F'$ состоит содержит ровно один вектор из L. Более того, $\mathcal{F}$ совместим с базисом L, потому что, полагая $\sigma(l) = \alpha$ для $l \in L$, где $l \in F''_\alpha \setminus F'_\alpha$, получим сюръекцию $\sigma : L \to \mathcal{A}$, удовлетворяющую условию (2). Если $\mathcal{F}$ — не обязательно максимальный обобщенный флаг, достаточно взять любой базис, совместимый с каким-либо максимальным обобщенным флагом $\mathcal{G}$, содержащим $\mathcal{F}$. Такой базис автоматически будет совместимым с $\mathcal{F}$. □

Далее, назовем обобщенный флаг $\mathcal{F}$ *слабо совместимым* с базисом E, если $\mathcal{F}$ совместим с каким-нибудь базисом L пространства V, для которого множество $E \setminus (E \cap L)$ конечно. Два обобщенных флага $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ называются *E-соизмеримыми*, если оба они слабо совместимы с базисом E и существуют такие изоморфизм упорядоченных множеств $\phi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ и конечномерное подпространство $U \subset V$, что

i) $\phi(F) + U = F + U$ для всех $F \in \mathcal{F}$;
ii) $\dim \phi(F) \cap U = \dim F \cap U$ для всех $F \in \mathcal{F}$.

Если $\mathcal{F}$ — обобщенный флаг, совместимый с E, то через $\mathcal{F}\ell\mathcal{F}, E)$ будем обозначать множество всех обобщенных флагов в V, E-соизмеримых с $\mathcal{F}$. Чтобы ввести на $\mathcal{F}\ell(\mathcal{F}, E)$ структуру инд-многообразия, введем обозначение

$$\mathcal{F}_n = \{F \cap V_n,\ F \in \mathcal{F}\}.$$

Для любого $\alpha \in \mathcal{A}$ положим

$$d'_{\alpha,n} = \dim F'_\alpha \cap V_n = |\{e \in E_n \mid \sigma(e) \prec \alpha\}|,$$
$$d''_{\alpha,n} = \dim F''_\alpha \cap V_n = |\{e \in E_n \mid \sigma(e) \preceq \alpha\}|.$$

Пусть $\mathcal{F}\ell_n$ — проективное многообразие флагов в V_n вида $\{U'_\alpha,\ U''_\alpha,\ \alpha \in \mathcal{A}\}$, где U'_α, U''_α — подпространства в V_n размерностей $d'_{\alpha,n}$, $d''_{\alpha,n}$ соответственно, $U'_\alpha \subset U''_\alpha$ для всех $\alpha \in \mathcal{A}$ и $U''_\alpha \subset U'_\beta$ для любых $\alpha \prec \beta$. (Конечно, если $\mathcal{A}$ бесконечно, найдется бесконечно много таких α, $\beta \in \mathcal{A}$, что $U''_\alpha = U'_\beta$.) Определим вложение

$$\iota_n : \mathcal{F}\ell_n \to \mathcal{F}\ell_{n+1}, \quad \{U''_\alpha,\ U''_\alpha,\ \alpha \in \mathcal{A}\} \mapsto \{W''_\alpha,\ W''_\alpha,\ \alpha \in \mathcal{A}\}$$

правилом

$$\begin{aligned} W'_\alpha &= U'_\alpha \oplus \langle e \in E_{n+1} \setminus E_n \mid \sigma(e) \prec \alpha \rangle_{\mathbb{C}}, \\ W''_\alpha &= U''_\alpha \oplus \langle e \in E_{n+1} \setminus E_n \mid \sigma(e) \preceq \alpha \rangle_{\mathbb{C}}. \end{aligned} \tag{3}$$

Тогда ι_n — это вложение гладких алгебраических многообразий, причем существует биекция между $\mathcal{F}\ell(\mathcal{F}, E)$ и индуктивным пределом этой цепи вложений (см. [16, Proposition 5.2] или [21, Sec. 3.3]). Более того, эта структура инд-многообразия на $\mathcal{F}\ell(\mathcal{F}, E)$ не зависит от выбора исчерпания $\{E_n\}$ базиса E. Есть другой способ описать вложения ι_n, который иногда более удобен. Для начала для всех $n \geqslant 1$ положим $\mathcal{V}_n = \langle e_1,\ \ldots,\ e_n \rangle_{\mathbb{C}}$. Для каждого $\mathcal{G} \in \mathcal{F}\ell(\mathcal{F}, E)$ выберем целое неотрицательное число $n_\mathcal{G}$, для которого $\mathcal{G}$ совместим с базисом, содержащим $\{e_n,\ n > n_\mathcal{G}\}$, и $\mathcal{V}_{n_\mathcal{G}}$ содержит подпространство, делающее эти обобщенные флаги E-соизмеримыми; очевидно, мы можем положить $n_\mathcal{F} = 0$. При $n \geqslant n_\mathcal{G}$ положим также

$$\mathcal{G}(n) = \{W \cap \mathcal{V}_n,\ W \in \mathcal{G}\}.$$

Для любого $n \geqslant 1$ размерности пространств флага $\mathcal{F}(n)$ образуют последовательность целых чисел

$$0 = d_{n,0} < d_{n,1} < \ldots < d_{n,d_{n,s_n-1}} < d_{n,s_n} = n = \dim \mathcal{V}_n.$$

Пусть $\mathcal{F}\ell(d_n, \mathcal{V}_n)$ — многообразие флагов типа $d_n = (d_{n,1}, \ldots, d_{n,s_n-1})$ в пространстве $\mathcal{V}_n$. Поскольку либо $s_{n+1} = s_n$, либо $s_{n+1} = s_n + 1$, существует единственное j_n, для которого $d_{n+1,i} = d_{n,i} + 1$ при $0 \leqslant i < j_n$ и $d_{n+1,j_n} > d_{n,j_n}$. Тогда для $j_n \leqslant i < s_n$ имеем $d_{n+1,i} = d_{n,i} + 1$ в случае $s_{n+1} = s_n$ и

$d_{n+1,i} = d_{n,i-1}+1$ в случае $s_{n+1} = s_n+1$. Другими словами, $j_n \leqslant s_n$ — это минимальное ненулевое целое число, для которого найдется такой $\alpha \in \mathcal{A}$, что

$$\dim F''_\alpha \cap \mathcal{V}_{n+1} = \dim F''_\alpha \cap \mathcal{V}_n + 1.$$

Для каждого n определяем вложение

$$\xi_n : \mathcal{F}\ell(d_n, \mathcal{V}_n) \hookrightarrow \mathcal{F}\ell(d_{n+1}, \mathcal{V}_{n+1})$$

следующим образом: флаг

$$\mathcal{G}_n = \{\{0\} = G^n_0 \subset G^n_1 \subset \ldots \subset G^n_{s_n} = \mathcal{V}_n\} \in \mathcal{F}\ell(d_n, \mathcal{V}_n)$$

будет переводиться в

$$\xi_n(\mathcal{G}_n) = \mathcal{G}_{n+1} = \{\{0\} = G^{n+1}_0 \subset G^{n+1}_1 \subset \ldots \subset G^{n+1}_{s_{n+1}} = \mathcal{V}_{n+1}\} \in \mathcal{F}\ell(d_{n+1}, \mathcal{V}_{n+1}),$$

где

$$G^{n+1}_i = \begin{cases} G^n_i, & \text{если } 0 \leqslant i < j_n, \\ G^n_i \oplus \mathbb{C}e_{n+1}, & \text{если } j_n \leqslant i \leqslant s_{n+1} \text{ и } s_{n+1} = s_n, \\ G^n_{i-1} \oplus \mathbb{C}e_{n+1}, & \text{если } j_n \leqslant i \leqslant s_{n+1} \text{ и } s_{n+1} = s_n + 1. \end{cases} \tag{4}$$

Заметим, что $\xi_n(\mathcal{G}(n)) = \mathcal{G}(n+1)$ для всех $\mathcal{G} \in \mathcal{F}\ell(\mathcal{F}, E)$ и $n \geqslant n_{\mathcal{G}}$. Напомним теперь, что у нас имеется исчерпание базиса E его конечными подмножествами $\{E_n\}$. Обозначим $m_n = |E_n| = \dim V_n$. Тогда, согласно (3),

$$\iota_n = \xi_{m_{n+1}-1} \circ \xi_{m_{n+1}-2} \circ \ldots \circ \xi_{m_n}.$$

Упоминавшаяся выше биекция

$$\mathcal{F}\ell(\mathcal{F}, E) \to \varinjlim \mathcal{F}\ell(d_{m_n}, V_n)$$

имеет теперь вид $\mathcal{G} \mapsto \varinjlim \mathcal{G}(n)$. Допуская некоторую вольность, в дальнейшем мы будем обозначать канонические вложения

$$\mathcal{F}\ell(d_{m_n}, V_n) \hookrightarrow \mathcal{F}\ell(\mathcal{F}, E)$$

той же самой буквой ι_n.

Завершим этот раздел некоторыми основными примерами инд-многообразий обобщенных флагов, которые будем использовать на протяжении всей статьи.

Пример 2.7.

(i) Первый пример обобщенных флагов дает флаг

$$\mathcal{F} = \{\{0\} \subset F \subset V\},$$

где F — собственное подпространство пространства V. Здесь $\mathcal{F}' = \{\{0\} \subset F\}$, $\mathcal{F}'' = \{F \subset V\}$. Если $\mathcal{F}$ совместим с E, то $E \cap F$ является базисом F, т.е. $F = \langle\sigma\rangle_{\mathbb{C}}$ для некоторого подмножества σ в E. Инд-многообразие $\mathcal{F}\ell(\mathcal{F}, E)$ называется *инд-грассманианом* и обозначается $\mathrm{Gr}(F, E)$. Если $k = \dim F$ конечно, то флаг $\{\{0\} \subset F' \subset V\}$ будет E-соизмеримым с $\mathcal{F}$ тогда и только тогда, когда $\dim F = k$, поэтому $\mathrm{Gr}(F, E)$ зависит только от k; обозначим его $\mathrm{Gr}(k) = \mathrm{Gr}(k, V)$. Аналогично, если $k = \operatorname{codim}_V F$ конечно, то $\mathrm{Gr}(F, E)$ зависит только от E и k (но не от F) и изоморфен $\mathrm{Gr}(k, V_*)$: изоморфизм

$$\mathrm{Gr}(F, E) \to \{F \subset V_* \mid \dim F = k\} = \mathrm{Gr}(k, V_*)$$

индуцирован отображением

$$\mathrm{Gr}(F, E) \ni U \mapsto U^{\#} = \{\phi \in V_* \mid \phi(x) = 0 \text{ для всех } x \in U\}.$$

Наконец, если и размерность, и коразмерность пространства F бесконечны, то $\mathrm{Gr}(F, E)$ зависит от F и E, но все такие инд-многообразия изоморфны и будут обозначаться через $\mathrm{Gr}(\infty)$ (детали см. в [34] или [21, Sec. 4.5]).

(ii) Второй пример — это обобщенный флаг

$$\mathcal{F} = \{\{0\} = F_0 \subset F_1 \subset \ldots\},$$

где $F_i = \langle e_1, \ldots, e_i\rangle_{\mathbb{C}}$ для всех $i \geqslant 1$. Очевидно, что это флаг. Флаг

$$\widetilde{\mathcal{F}} = \{\{0\} = \widetilde{F}_0 \subset \widetilde{F}_1 \subset \ldots\}$$

будет E-соизмеримым с $\mathcal{F}$ в том и только том случае, когда $\dim F_i = \dim \widetilde{F}_i$ для всех i и $F_i = \widetilde{F}_i$ для достаточно больших i. Флаг $\mathcal{F}$ максимален, причем $\mathcal{F}' = \mathcal{F}$, $\mathcal{F}'' = \mathcal{F} \setminus \{0\}$.

(iii) Далее, положим

$$\mathcal{F} = \{\{0\} = F_0 \subset F_1 \subset F_2 \subset \ldots \subset F_{-2} \subset F_{-1} \subset V\},$$

где

$$F_i = \langle e_1,\ e_3,\ \ldots,\ e_{2i-1}\rangle_{\mathbb{C}}, \quad F_{-i} = \langle\{e_j,\ j \text{ нечетно}\} \cup \{e_{2j},\ j > i\}\rangle_{\mathbb{C}}$$

при $i \geqslant 1$. Этот обобщенный флаг максимален и, конечно, не является флагом. Здесь $\mathcal{F}' = \mathcal{F} \setminus V$, $\mathcal{F}'' = \mathcal{F} \setminus \{0\}$. Отметим также, что из условия $\widetilde{\mathcal{F}} \in X = \mathcal{F}\ell(\mathcal{F}, E)$ не вытекает, что $\widetilde{F}_i = F_i$ для всех достаточно больших i. Например, пусть

$$\widetilde{F}_1 = \mathbb{C}e_2, \quad \widetilde{F}_i = \langle e_2,\ e_3,\ e_5,\ e_7,\ \ldots,\ e_{2i-1}\rangle_{\mathbb{C}} \text{ при } i > 1,$$
$$\widetilde{F}_{-i} = \langle\{e_j,\ j \text{ нечетно},\ j \geqslant 3\} \cup \{e_2\} \cup \{e_{2j},\ j > i\}\rangle_{\mathbb{C}}, \quad i \geqslant 1;$$

тогда $\widetilde{\mathcal{F}} \in \mathcal{F}\ell(\mathcal{F}, E)$, но $\widetilde{F}_i \neq F_i$ для всех i.

(iv) Пусть теперь

$$\mathcal{F} = \{\{0\} = F_0 \subset F_1 \subset F_2 \subset \ldots \subset F \subset F_{-1} \subset F_{-2} \subset \ldots\},$$

где

$$F_i = \langle e_1,\ e_3,\ \ldots,\ e_{2i-1}\rangle_{\mathbb{C}}, \quad F = \langle e_j,\ j \text{ нечетно}\rangle_{\mathbb{C}}, \quad F_{-i} = \langle\{e_J,\ j \text{ нечетно}\} \cup \{e_{2j}, \quad 1 \leqslant j \leqslant i\}\rangle_{\mathbb{C}}.$$

Цепь $\mathcal{F}$ является максимальным обобщенным флагом, но не флагом. Обратим внимание, что у пространства F нет непосредственного предшественника. Здесь $\mathcal{F}' = \mathcal{F}$, $\mathcal{F}'' = \mathcal{F} \setminus (\{0\} \cup F)$.

(v) Наконец, пусть $\mathbb{Q}$ — поле рациональных чисел. Зафиксируем биекцию $\sigma : E \to \mathbb{Q}$ и для каждого $\alpha \in \mathbb{Q}$ положим

$$F'_\alpha = \langle e \in E,\ \sigma(e) < \alpha\rangle_{\mathbb{C}}, \quad F''_\alpha = \langle e \in E,\ \sigma(e) \leqslant \alpha\rangle_{\mathbb{C}}.$$

Подпространства $\{F'_\alpha,\ F''_\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{Q}}$ образуют максимальный обобщенный флаг $\mathcal{F}$ с $\mathcal{A} = \mathbb{Q}$. Разумеется, $\mathcal{F}$ не будет флагом. Ни одно из подпространств F'_α не обладает непосредственным предшественником, и ни одно из подпространств F''_α не обладает непосредственным потомком, так что

$$\mathcal{F}' = \{F'_\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{Q}}, \quad \mathcal{F}'' = \{F''_\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{Q}}.$$

Более того, обратим внимание, что цепь $\mathcal{F}$ не максимальна среди всех цепей подпространств пространства V. Действительно, для любого $\gamma \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ положим $C_\gamma = \langle e \in E,\ \sigma(e) < \gamma\rangle_{\mathbb{C}}$. Подпространства $\{F'_\alpha,\ F''_\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{Q}} \sqcup \{C_\gamma\}_{\gamma\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}$ образуют максимальную цепь $\mathcal{C}$ подпространств в V, и ясно, что $\mathcal{F}$ — собственная подцепь в $\mathcal{C}$. Цепь $\mathcal{C}$ параметризована «симметрическими сечениями Дедекинда поля $\mathbb{Q}$»: точка из $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ соответствует одному сечению, а точка из $\mathbb{Q}$ — двум сечениям, в одном из которых есть максимум, а в другом — минимум.

2.3. Изотропные обобщенные флаги. В этом разделе мы будем предполагать, что пространство V снабжено невырожденной симметрической или кососимметрической билинейной формой β, для которой $\beta(e, V_n) = 0$ при $e \in E \setminus E_n$, как в примере 2.4(ii). Если $U \subset V$, то мы пишем $U^\perp = \{x \in V \mid \beta(x, y) = 0 \text{ для всех } y \in U\}$, т.е. $U^\perp$ — это наибольшее подпространство в V, ортогональное к U относительно формы β. Мы будем полагать, что базис E является *β-изотропным* (или, что равносильно, *изотропным*), т.е. что существует инволюция $i_{:} \to E$, у которой не больше одной неподвижной точки, удовлетворяющая условию $\beta(e, e') = 0$ при всех $e, e' \in E$, для которых $e' \neq i_E(e)$ (здесь e и e' могут совпадать).

Определение 2.8. Обобщенный флаг $\mathcal{F}$ называется *β-изотропным* (или просто *изотропным*), если $F^\perp \in \mathcal{F}$ для каждого $F \in \mathcal{F}$, причем отображение $i_{\mathcal{F}} : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$, $F \mapsto F^\perp$, является инволютивным антиавтоморфизмом упорядоченного множества $\mathcal{F}$, т.е. биекцией, обращающей порядок включений. Отметим, что эта инволюция на $\mathcal{F}$ задает инволюцию

$$i_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \to \mathcal{A}, \quad \big(F'_\alpha, F''_\alpha\big) \mapsto \big((F''_\alpha)^\perp, (F'_\alpha)^\perp\big).$$

Предположим, что обобщенный флаг $\mathcal{F}$ является β-изотропным. Из определения вытекает, что каждый β-изотропный флаг имеет вид $\mathcal{G} \cup \mathcal{G}^\perp$, где $\mathcal{G}$ состоит из изотропных подпространств в V, а $\mathcal{G}^\perp$ — из ортогональных к ним подпространств. Обозначим через U объединение всех подпространств из $\mathcal{F}$, принадлежащих $\mathcal{G}$. Тогда U — изотропное подпространство в V, $\mathcal{G}$ — обобщенный флаг в U (возможно, содержащий U как элемент) и $\mathcal{F}$ однозначно восстанавливается по его пересечению $\mathcal{G} = \mathcal{F} \cap U$ с подпространством U. Более того, U будет максимальным изотропным подпространством в V тогда и только тогда, когда обобщенный флаг $\mathcal{F}$ максимален. Рассуждая, как в доказательстве предложения 2.6, можно показать, что каждый β-изотропный обобщенный флаг обладает совместимым β-изотропным базисом. До конца раздела будем предполагать, что $\mathcal{F}$ является β-изотропным и совместимым с данным β-изотропным базисом E. Допустим теперь, что обобщенный флаг $\widetilde{\mathcal{F}}$ тоже β-изотропен и E-соизмерим с $\mathcal{F}$. В частности, множество $\widetilde{\mathcal{F}}^\dagger$ ближайших друг к другу подпространств из $\widetilde{\mathcal{F}}$ изоморфно $\mathcal{A}$, и инволюция $i_{\widetilde{\mathcal{F}}}$ индуцирует ту же инволюцию $i_{\mathcal{A}}$ на упорядоченном множестве $\mathcal{A}$, что и $i_{\mathcal{F}}$. Следующая лемма доказана в [21, Sec. 3.1, Lemma1].

Лемма 2.9.

(i) *Существует такой β-изотропный базис L, что множество $E \setminus (E \cap L)$ конечно и $\widetilde{\mathcal{F}}$ совместим с L.*

(ii) *Если $\widetilde{\mathcal{F}}$ совместим с β-изотропным базисом L с помощью сюръективного отображения $\sigma : L \to \mathcal{A}$, то*

$$\sigma \circ i_L = i_{\mathcal{A}} \circ \sigma.$$

Доказательство. (i) Обозначим через L' базис V, для которого множество $E \setminus (E \cap L')$ конечно и $\widetilde{\mathcal{F}}$ совместим с L'. Выберем инвариантное относительно инволюции i_E подмножество $E' \subset E$, не содержащее неподвижных относительно i_E точек, для которого $E \setminus E'$ конечно и $E' \subset E \cap L'$. Тогда подпространство $V'' = \langle E \setminus E' \rangle_{\mathbb{C}}$ конечномерно, а ограничение β на V'' невырождено. Пересечение $\{\widetilde{F} \cap V'',\ \widetilde{F} \in \widetilde{\mathcal{F}}\}$ является изотропным флагом в V''. Поскольку V'' конечномерно, существует β-изотропный базис E'' в V'', с которым этот изотропный флаг будет совместим. Тогда $L = E' \cup E''$ — нужный нам базис.

(ii) По определению совместимости, $e \in \widetilde{F}''_{\sigma(e)} \setminus \widetilde{F}'_{\sigma(e)}$ для всех $e \in L$, поэтому

$$i_L(e) \in (\widetilde{F}'_{\sigma(e)})^\perp \setminus (\widetilde{F}''_{\sigma(e)})^\perp.$$

Это завершает доказательство. □

Обозначим теперь через $\mathcal{F}\ell(\mathcal{F}, \beta, E)$ множество всех β-изотропных флагов в V, E-соизмеримых с $\mathcal{F}$. Чтобы ввести на $\mathcal{F}\ell(\mathcal{F}, \beta, E)$ структуру инд-многообразия, предположим, что в исчерпании $\{E_n\}$ базиса E все подмножества E_n инвариантны относительно i_E. Напомним, что в предыдущем разделе было дано определение $\mathcal{F}\ell_n$. Пусть $U^{\perp, V_n} \subset V_n$ — подпространство в V_n, ортогональное пространству $U \subset V_n$ относительно формы β_n. Пусть $\mathcal{F}\ell_n^\beta$ — замкнутое подмногообразие в $\mathcal{F}\ell_n$, состоящее из всех флагов $\{U'_\alpha,\ U''_\alpha,\ \alpha \in \mathcal{A}\}$ многообразия $\mathcal{F}\ell_n$, для которых

$$\Big(\big(U''_\alpha\big)^{\perp, V_n},\ \big(U'_\alpha\big)^{\perp, V_n}\Big) = \Big(U'_{i_{\mathcal{A}}(\alpha)},\ U''_{i_{\mathcal{A}}(\alpha)}\Big) \quad \text{для всех } \alpha \in \mathcal{A}.$$

Тогда вложение $\iota_n : \mathcal{F}\ell_n \hookrightarrow \mathcal{F}\ell_{n+1}$, определенное формулой (3), ограничивается до вложения

$$\iota_n^\beta : \mathcal{F}\ell_n^\beta \hookrightarrow \mathcal{F}\ell_{n+1}^\beta.$$

Значит, мы получаем цепь вложений проективных многообразий

$$\mathcal{F}\ell_1^\beta \overset{\iota_1^\beta}{\hookrightarrow} \mathcal{F}\ell_2^\beta \overset{\iota_2^\beta}{\hookrightarrow} \ldots \overset{\iota_{n-1}^\beta}{\hookrightarrow} \mathcal{F}\ell_n^\beta \overset{\iota_n^\beta}{\hookrightarrow} \mathcal{F}\ell_{n+1}^\beta \overset{\iota_{n+1}^\beta}{\hookrightarrow} \ldots.$$

Существует биекция между $\mathcal{F}\ell(\mathcal{F}, \beta, E)$ и индуктивным пределом $\varinjlim \mathcal{F}\ell_n^\beta$ этой цепи вложений. Итак, $\mathcal{F}\ell(\mathcal{F}, \beta, E)$ снабжено структурой инд-многообразия, не зависящей от выбора исчерпания E. Более того, $\mathcal{F}\ell(\mathcal{F}, \beta, E)$ — замкнутое инд-подмногообразие в $\mathcal{F}\ell(\mathcal{F}, E)$ (см. [16, 21]).

Пример 2.10. (i) Пусть F — изотропное подпространство пространства V, а U — максимальное изотропное подпространство в V, содержащее F. Отметим, что U всегда бесконечномерно. Положим $\mathcal{F} = \{\{0\} \subset F \subset F^\perp \subset V\}$. Тогда $\mathcal{F}$ — β-изотропный флаг в V. Пусть E — β-изотропный базис V, совместимый с флагом $\mathcal{F}$. Если $\dim F = k < \infty$, то соответствующее инд-многообразие $\mathcal{F}\ell(\mathcal{F}, \beta, E)$ будем обозначать через $\mathrm{Gr}^\beta(k) = \mathrm{Gr}^\beta(k, V)$. В общем случае мы обозначаем соответствующее инд-многообразие через $\mathrm{Gr}^\beta(F, E)$ и называем его *изотропным инд-грассманианом.* Обратим внимание, что если, к примеру, $F = U$, то существуют максимальные изотропные подпространства пространства V, не содержащиеся в $\mathrm{Gr}^\beta(U, E)$.

(ii) Пусть $\mathcal{F} = \{\ldots \subset F_{-2} \subset F_{-1} \subset F_1 \subset F_2 \subset \ldots \subset F \subset F'_1 \subset F'_2 \subset \ldots\}$ где при $i > 0$

$$\begin{aligned} F_{-i} &= \langle e_{3j},\ j \geqslant i\rangle_{\mathbb{C}},\\ F_i &= \langle \{e_{3j},\ j \in \mathbb{Z}_{>0}\} \cup \{e_{3j-1},\ 1 \leqslant j \leqslant i\}\rangle_{\mathbb{C}},\\ F &= \langle e_{3j},\ e_{3j-1},\ j \in \mathbb{Z}_{>0}\rangle_{\mathbb{C}},\\ F'_i &= \langle \{e_{3j},\ e_{3j-1},\ j \in \mathbb{Z}_{>0}\} \cup \{e_{3j-2},\ 1 \leqslant j \leqslant i\}\rangle_{\mathbb{C}}. \end{aligned}$$

Здесь $\mathcal{F}' = \mathcal{F}$, $\mathcal{F}'' = \mathcal{F} \setminus \{F\}$ и не существует невырожденной симметрической или кососимметрической билинейной формы β на V, относительно которой $\mathcal{F}$ был бы изотропным. В самом деле, ясно, что на $\mathcal{F}$ не существует инволютивного антиавтоморфизма, потому что ровно у одного подпространства из $\mathcal{F}$ нет непосредственного предшественника, в то время как все подпространства из $\mathcal{F}$ обладают непосредственными потомками.

3. Линейные инд-грассманианы

В этом разделе обсуждается более общий подход к определению инд-грассманиана, основанный на понятии линейного вложения конечномерных грассманианов. Приведенная ниже теорема 3.8 гласит, что каждое инд-многообразие, полученное как индуктивный предел линейных вложений грассманианов, изоморфно одному из стандартных инд-грассманианов, определенных в примерах 2.7(i) и 2.10(i). Этот материал взят из [34].

3.1. Определение линейных инд-грассманианов. Обозначим через $\mathrm{Pic}\ X$ группу Пикара алгебраического многообразия X, т.е. группу классов изоморфизма линейных расслоений. Групповая операция здесь — тензорное произведение. Если многообразие X проективно и его группа Пикара изоморфна группе $\mathbb{Z}$, то договоримся через $\mathcal{O}_X(1)$ обозначать обильную образующую группы Пикара и писать $\mathcal{O}_X(n) = \mathcal{O}_X(1)^{\otimes n}$ для любого $n \in \mathbb{Z}$. Отметим, что каждый морфизм алгебраических многообразий $\varphi : X \to Y$ индуцирует гомоморфизм групп $\varphi^* : \mathrm{Pic}\ Y \to \mathrm{Pic}\ X$. Если X — инд-многообразие, получающееся как индуктивный предел цепи морфизмов алгебраических многообразий

$$X_1 \xrightarrow{\varphi_1} X_2 \xrightarrow{\varphi_2} \ldots \xrightarrow{\varphi_{n-1}} X_n \xrightarrow{\varphi_n} X_{n+1} \xrightarrow{\varphi_{n+1}} \ldots,$$

то, по определению, *группой Пикара* инд-многообразия X называется прективный предел

$$\mathrm{Pic}\ X = \varprojlim \mathrm{Pic}\ X_n$$

цепи гомоморфизмов групп

$$\mathrm{Pic}\ X_1 \xleftarrow{\varphi_1^*} \mathrm{Pic}\ X_2 \xleftarrow{\varphi_2^*} \ldots \xleftarrow{\varphi_{n-1}^*} \mathrm{Pic}\ X_n \xleftarrow{\varphi_n^*} \mathrm{Pic}\ X_{n+1} \xleftarrow{\varphi_{n+1}^*} \ldots.$$

Ясно, что каждый морфизм инд-многообразий индуцирует гомоморфизм их групп Пикара $\varphi^* :$ $\mathrm{Pic}\ Y \to \mathrm{Pic}\ X$.

Определение 3.1. Морфизм алгебраических многообразий $\varphi : X \to Y$ называется *линейным*, если φ^* является эпиморфизмом.

Пусть, к примеру, $X = \mathrm{Gr}(k, W)$ — грассманиан k-мерных подпространств n-мерного векторного пространства W. Тогда Pic $X \cong \mathbb{Z}$ и $\mathcal{O}_X(1) \cong \bigwedge^k S_X^*$, где S_X — тавтологическое расслоение на X. Если Y — тоже грассманиан, то морфизм $\varphi : X \to Y$ линеен тогда и только тогда, когда $\varphi^*\mathcal{O}_Y(1) = \mathcal{O}_X(1)$. В дальнейшем мы также будем рассматривать ортогональные и симплектические грассманианы. Предположим, что конечномерное векторное пространство W снабжено невырожденной симметрической или кососимметрической билинейной формой β. Для любого $k \leqslant [\dim W/2]$ назовем *изотропным грассманианом* $\mathrm{Gr}^\beta(k, W)$ подмногообразие в $\mathrm{Gr}(k, W)$, состоящее из всех k-мерных изотропных подпространств пространства W. Если β симметрична (соответственно, кососимметрична), то $\mathrm{Gr}^\beta(k, W)$ называется *ортогональным* (соответственно, *симплектическим*). До конца раздела мы будем считать, что если форма β симметрична, то $\dim W \geqslant 7$ и $k \neq (\dim W)/2$, $k \neq (\dim W)/2 - 1$. Хорошо известно, что многообразие $\mathrm{Gr}^\beta(k, W)$ гладко и

$$\dim \mathrm{Gr}^\beta(k, W) = \begin{cases} k \dim W - k(3k+1)/2, & \text{если } \beta \text{ симметрична,} \\ k \dim W - k(3k-1)/2, & \text{если } \beta \text{ кососимметрична.} \end{cases}$$

Более того, Pic $\mathrm{Gr}^\beta(k, W) = \mathbb{Z}\mathcal{O}_{\mathrm{Gr}^\beta(k,W)}(1)$, где $\mathcal{O}_{\mathrm{Gr}^\beta(k,W)}(1)$ удовлетворяет следующему условию: если $\tau : \mathrm{Gr}^\beta(k, W) \hookrightarrow \mathrm{Gr}(k, W)$ — тавтологическое расслоение, то

$$\tau^*\mathcal{O}_{\mathrm{Gr}(k,W)}(1) = \begin{cases} \mathcal{O}_{\mathrm{Gr}^\beta(k,W)}(2), & \text{если } \beta \text{ симметрична и } k = [\dim W/2], \\ \mathcal{O}_{\mathrm{Gr}^\beta(k,W)}(1) & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Заметим, что морфизм ортогональных или симплектических грассманианов $\varphi : X \to Y$ линеен в том и только том случае, когда $\varphi^*\mathcal{O}_Y(1) = \mathcal{O}_X(1)$.

Определение 3.2. *Линейным инд-грассманианом* называется инд-многообразие X, которое может быть получено как индуктивный предел $\varinjlim X_n$ цепи вложений

$$X_1 \overset{\varphi_1}{\hookrightarrow} X_2 \overset{\varphi_2}{\hookrightarrow} \ldots \overset{\varphi_{n-1}}{\hookrightarrow} X_n \overset{\varphi_n}{\hookrightarrow} X_{n+1} \overset{\varphi_{n+1}}{\hookrightarrow} \ldots,$$

где каждое X_n — обычный или изотропный грассманиан с условием Pic $X \cong \mathbb{Z}$, $\lim\limits_{n\to\infty} \dim X_n = \infty$, а все вложения φ_n линейны. Обратим внимание, что мы допускаем смесь всех трех типов грассманианов (обычных, ортогональных и симплектических).

Пример 3.3. Пусть V и E — такие же, как выше, а F — такое подпространство в V, что флаг $\mathcal{F} = \{\{0\} \subset F \subset V\}$ совместим с E. Положим $\mathrm{Gr}(F, E) = \mathcal{F}\ell(\mathcal{F}, E)$, как в примере 2.7(i). Тогда $\mathrm{Gr}(F, E) \cap V_n = \mathrm{Gr}(d_n, V_n)$, где $d_n = \dim F \cap V_n$, и вложение $\iota_n : \mathrm{Gr}(d_n, V_n) \hookrightarrow \mathrm{Gr}(d_{n+1}, V_{n+1})$ имеет простой вид:

$$\iota_n(A) = A \oplus U_{n+1},\ A \in \mathrm{Gr}(d_n, V_n),$$

где U_{n+1} — подпространство V_{n+1}, натянутое на какие-либо базисные векторы из $E_{n+1} \setminus E_n$ (см. (4)). Все такие вложения ι_n, очевидно, линейны, поэтому инд-многообразие $\mathrm{Gr}(F, E)$ является линейным инд-грассманианом.

3.2. Стандартные расширения. Ключевая идея в описании линейных инд-грассманианов заключается в том, что каждый из них изоморфен индуктивному пределу цепи некоторых стандартных вложений.

Определение 3.4. Пусть X, X' — обычные грассманианы. Вложение $\widetilde{\varphi} : X \to X'$ называется *стандартным расширением*, если существуют такие изоморфизмы

$$j_X : X \to \mathrm{Gr}(k, W), \quad j_{X'} : X' \to \mathrm{Gr}(k', W')$$

и вложение $\varphi : \mathrm{Gr}(k, W) \to \mathrm{Gr}(k', W')$, $\dim W' \geqslant \dim W$, $k' \geqslant k$, что диаграмма

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, hook, "\widetilde{\varphi}"] \arrow[d, "j_X"] & X' \arrow[d, "j_{X'}"] \\ \mathrm{Gr}(k, W) \arrow[r, hook, "\varphi"] & \mathrm{Gr}(k', W') \end{tikzcd}$$

коммутативна, причем φ задается формулой

$$\varphi(A) = A \oplus U,\ A \in \mathrm{Gr}(k, W), \tag{5}$$

для какого-либо фиксированного изоморфизма $W' \cong W \oplus U'$ и фиксированного подпространства $U \subset U'$ размерности $k' - k$. Отметим, что

$$\dim W' - \dim W = \dim U' \geqslant \dim U = k' - k,$$

поэтому $\dim W' - k' \geqslant \dim W - k$.

Например, все вложения, рассматриваемые в примере 3.3, являются стандартными расширениями. Понятно, что композиция двух стандартных расширений сама будет стандартным расширением. Далее будем говорить, что стандартное расширение $\varphi : \mathrm{Gr}(k, W) \to \mathrm{Gr}(k', W')$ является *строгим*, если $j_{\mathrm{Gr}(k,W)}$ и $j_{\mathrm{Gr}(k',W')}$ — автоморфизмы. Если $\varphi : \mathrm{Gr}(k, W) \to \mathrm{Gr}(k', W')$ — строгое стандартное расширение, то изоморфизм $W' \cong W \oplus U'$ всегда может быть выбран так, чтобы φ задавалось просто формулой (5). Очевидно, композиция двух строгих стандартных расширений сама является строгим стандартным расширением. Заметим, что если $\varphi : \mathrm{Gr}(k, W) \to \mathrm{Gr}(k', W')$ — строгое стандартное расширение, то U восстанавливается по формуле

$$U = \bigcap_{A \in \mathrm{Gr}(k,V)} \varphi(A).$$

Положим также

$$U^\sharp = \langle \varphi(A),\ A \in \mathrm{Gr}(k, W)\rangle_{\mathbb{C}}\,;$$

тогда φ определяется как сюръективное линейное отображение $\varphi^\sharp : U^\sharp \to W$с ядром U, для которого $\left(\varphi^\sharp\right)^{-1}(A) = \varphi(A)$ при всех $A \in \mathrm{Gr}(k, V)$. Легко проверить, что задание стандартного расширения φ — это то же самое, что задание тройки $(U, U^\sharp, \varphi^\sharp)$. Предположим теперь, что конечномерные пространства W и W' снабжены невырожденными билинейными формами β и β' соответственно, причем формы β и β' обе симметричны или обе кососимметричны. Вложение $\varphi : \mathrm{Gr}^\beta(k, W) \hookrightarrow \mathrm{Gr}^\beta(k', W')$ называется *стандартным расширением*, если φ задается формулой (5), где $W' \cong W \oplus U'$ является изометрией, а U — изотропное подпространство в U'. Как и в обычном случае, стандартное расширение изотропных грассманианов может быть определено следующими линейно-алгебраическими данными. Выберем флаг $\{U \subset U^\sharp\}$ в W' с изотропным U, для которого найдется сюръективное линейное отображение $\varphi^\sharp : U^\sharp \to W$ с ядром U такое, что билинейная форма $\left(\varphi^\sharp\right)^* \beta$ совпадает с ограничением формы β' на $U^\sharp$. Эти данные определяют вложение $\varphi : \mathrm{Gr}^\beta(k, W) \hookrightarrow \mathrm{Gr}^\beta(k', W')$ по формуле

$$\varphi(A) = \left(\varphi^\sharp\right)^{-1}(A) \subset U^\sharp \subset W',\ A \in \mathrm{Gr}^\beta(k, W).$$

Более того,

$$U = \bigcap_{A \in \mathrm{Gr}^\beta(k,W)} \varphi(A),$$

$$U^\sharp = \langle \varphi(A),\ A \in \mathrm{Gr}^\beta(k, W)\rangle_{\mathbb{C}}.$$

Чтобы сформулировать первый основной результат этого раздела, нам потребуется еще несколько определений. Пусть $\widetilde{W}$ — изотропное подпространство пространства W. Для любого $k \leqslant \dim \widetilde{W}$ будем называть естественные вложения

$$\mathrm{Gr}(k, \widetilde{W}) \hookrightarrow \mathrm{Gr}^\beta(k, W), \quad \mathrm{Gr}(\dim \widetilde{W} - k, \widetilde{W}^*) \hookrightarrow \mathrm{Gr}^\beta(k, W)$$

изотропными расширениями. По определению, *комбинация изотропных и стандартных расширений* — это вложение вида

$$\mathrm{Gr}^\beta(k, W) \overset{\tau}{\hookrightarrow} \mathrm{Gr}(k, W) \overset{\varphi}{\hookrightarrow} \mathrm{Gr}(k'', \widetilde{W}'') \overset{b}{\hookrightarrow} \mathrm{Gr}^\beta(k'', W'') \overset{\psi}{\hookrightarrow} \mathrm{Gr}^\beta(k', W'),$$

где $\widetilde{W}''$ — какое-либо изотропное подпространство в W'', τ — тавтологическое вложение, φ и ψ — стандартные расширения, а b — изотропное расширение. Легко проверить, что композиция комбинаций изотропных и стандартных расширений сама будет комбинацией изотропных и стандартных расширений. Под *проективным пространством в* (или *на*) многообразии (или инд-многообразии) X мы понимаем линейно вложенное подмногообразие X, изоморфное проективному пространству. Аналогично, под *квадрикой на* X размерности $m \geqslant 3$ мы будем понимать линейно вложенное подмногообразие X, изоморфное гладкой m-мерной квадрике. (Для квадрик на X размерностей 1 и 2 определение несколько отличается; детали см. в [34, Sec. 2.2].)

Предположим теперь, что X и Y — обычные (соответственно, ортогональные или симплектические) грассманианы. В случае ортогональных грассманианов вида $\mathrm{Gr}^{\beta}(k, W)$ и $\mathrm{Gr}^{\beta}(k', W')$ соответственно будем дополнительно предполагать, что либо

$$k \leqslant [(\dim W)/2] - 3,\ k' \leqslant [(\dim W')/2] - 3,$$

либо обе размерности $\dim W$, $\dim W'$ нечетны и

$$[(\dim W')/2] - k' \leqslant [(\dim W)/2] - k \leqslant 2.$$

Непосредственно из определений вытекает, что стандартные расширения и комбинации изотропных и стандартных расширений являются линейными морфизмами. Следующая теорема — центральный результат в классификации линейных инд-грассманианов (см. п. 3.3). Авторы приглашают читателя ознакомиться с доказательством теоремы 3.5 по оригинальной статье [34, Theorem 1].

Теорема 3.5. *Пусть $\varphi : X \to Y$ — линейный морфизм. Тогда верно одно из следующих утверждений*:

(a) *φ — стандартное расширение*;

(b) *X и Y — изотропные грассманианы, а φ — комбинация изотропных и стандартных расширений*;

(c) *φ пропускается через проективное пространство в Y или, в случае ортогональных грассманианов, через максимальную квадрику на Y.*

В частности, если φ не пропускается через проективное пространство в Y (или, в случае ортогональных грассманианов, через максимальную квадрику на Y), то он обязательно является вложением.

3.3. Классификация линейных инд-грассманианов. В этом разделе объясняется, почему каждый линейный (возможно, изотропный) инд-грассманиан изоморфен одному из стандартных (возможно, изотропных) инд-грассманианов, определенных ниже. Пусть V — счетномерное пространств, E — базис V, $E = \bigcup E_n$ — его исчерпание конечными подмножествами, $V = \bigcup V_n$ — соответствующее исчерпание пространства V конечномерными подпространствами $V_n = \langle E_n \rangle_{\mathbb{C}}$. Обозначим через $\mathrm{Gr}(k)$ индуктивный предел последовательности

$$\mathrm{Gr}(k, V_1) \overset{\varphi_1}{\hookrightarrow} \mathrm{Gr}(k, V_2) \overset{\varphi_2}{\hookrightarrow} \ldots \overset{\varphi_{n-1}}{\hookrightarrow} \mathrm{Gr}(k, V_n) \overset{\varphi_n}{\hookrightarrow} \mathrm{Gr}(k, V_{n+1}) \overset{\varphi_{n+1}}{\hookrightarrow} \ldots,$$

где $k \geqslant 1$ — целое число, а все φ_n — канонические вложения грассманианов. Обозначим также через $\mathrm{Gr}(\infty)$ индуктивный предел последовательности

$$\mathrm{Gr}(k_1, V_1) \overset{\varphi_1}{\hookrightarrow} \mathrm{Gr}(k_2, V_2) \overset{\varphi_2}{\hookrightarrow} \ldots \overset{\varphi_{n-1}}{\hookrightarrow} \mathrm{Gr}(k_n, V_n) \overset{\varphi_n}{\hookrightarrow} \mathrm{Gr}(k_{n+1}, V_{n+1}) \overset{\varphi_{n+1}}{\hookrightarrow} \ldots,$$

где $1 \leqslant k_1 < k_2 < \ldots$ — целые числа, удовлетворяющие условию

$$\lim_{n\to\infty} (\dim V_n - k_n) = \infty,$$

а все φ_n — стандартные расширения. В ортогональном (симплектическом) случае предположим, что V снабжено невырожденной симметрической (соответственно, кососимметрической) формой β так, что ограничение β на V_n невырождено для всех n. Здесь мы не предполагаем, что векторы e ортогональны подпространству V_n при $e \in E \setminus E_n$. Зафиксируем целое число

$$1 \leqslant k \leqslant [(\dim V_1)/2].$$

Обозначим через $\mathrm{Gr}^{\beta}(k,\infty)$ индуктивный предел цепи

$$\mathrm{Gr}^{\beta_1}(k,V_1)\overset{\varphi_1}{\hookrightarrow}\mathrm{Gr}^{\beta_2}(k,V_2)\overset{\varphi_2}{\hookrightarrow}\ldots\overset{\varphi_{n-1}}{\hookrightarrow}\mathrm{Gr}^{\beta_n}(k,V_n)\overset{\varphi_n}{\hookrightarrow}\mathrm{Gr}^{\beta_{n+1}}(k,V_{n+1})\overset{\varphi_{n+1}}{\hookrightarrow}\ldots,$$

где β_n обозначает ограничение формы β на V_n, а все морфизмы φ_n — канонические вложения изотропных грассманианов. Выберем произвольную последовательность целых чисел

$$1\leqslant k_1<k_2<\ldots,$$

для которой $k_n<[(\dim V_n)/2]$ при всех n (и, следовательно, $\lim_{n\to\infty}(\dim V_n-k_n)=\infty$), и обозначим через $\mathrm{Gr}^{\beta}(\infty,\infty)$ индуктивный предел цепи

$$\mathrm{Gr}^{\beta_1}(k_1,V_1)\overset{\varphi_1}{\hookrightarrow}\mathrm{Gr}^{\beta_2}(k_2,V_2)\overset{\varphi_2}{\hookrightarrow}\ldots\overset{\varphi_{n-1}}{\hookrightarrow}\mathrm{Gr}^{\beta_n}(k_n,V_n)\overset{\varphi_n}{\hookrightarrow}\mathrm{Gr}^{\beta_{n+1}}(k_{n+1},V_{n+1})\overset{\varphi_{n+1}}{\hookrightarrow}\ldots \tag{6}$$

стандартных вложений изотропных грассманианов. Далее, в симплектическом случае выберем произвольный набор целых чисел

$$1\leqslant k_1<k_2<\ldots,$$

удовлетворяющий условиям $k_n<\dim V_n/2$ и

$$\lim_{n\to\infty}(\dim V_n-k_n)=k\geqslant 0,$$

и обозначим через $\mathrm{Gr}^{\beta}(\infty,k)$ индуктивный предел (6) цепи стандартных вложений. В ортогональном случае предположим сначала, что $\dim V_n$ четны для всех n, и тогда определим $\mathrm{Gr}^{\beta}_0(\infty,k)$ как индуктивный предел цепи (6), где $k_n<(\dim V_n)/2$ и

$$\lim_{n\to\infty}(\dim V_n-k_n)=k\geqslant 2.$$

Наконец, если $\dim V_n$ нечетны для всех n в ортогональном случае, то обозначим через $\mathrm{Gr}^{\beta}_1(\infty,k)$ индуктивный предел цепи (6) с условиями $k_n<[(\dim V_n)/2]$ и

$$\lim_{n\to\infty}(\dim V_n-k_n)=k\geqslant 0.$$

Определение 3.6. Описанные выше инд-многообразия называются *стандартными инд-грассманианами.*

Лемма 3.7. *Все стандартные грассманианы корректно определены, т.е. не зависят* с *точностью до изоморфизма инд-многообразий) от выбора цепи в их определении.*

Доказательство. Рассмотрим $\mathrm{Gr}(\infty)$ (остальные случаи рассматриваются аналогично). Предположим, что имеются две цепи стандартных расширений

$$\mathrm{Gr}(k_1,V_1)\overset{\varphi_1}{\hookrightarrow}\mathrm{Gr}(k_2,V_2)\overset{\varphi_2}{\hookrightarrow}\ldots\overset{\varphi_{n-1}}{\hookrightarrow}\mathrm{Gr}(k_n,V_n)\overset{\varphi_n}{\hookrightarrow}\mathrm{Gr}(k_{n+1},V_{n+1})\overset{\varphi_{n+1}}{\hookrightarrow}\ldots,$$

$$\mathrm{Gr}(k_1',V_1')\overset{\varphi_1'}{\hookrightarrow}\mathrm{Gr}(k_2,V_2')\overset{\varphi_2'}{\hookrightarrow}\ldots\overset{\varphi_{n-1}}{\hookrightarrow}\mathrm{Gr}(k_n,V_n')\overset{\varphi_n'}{\hookrightarrow}\mathrm{Gr}(k_{n+1},V_{n+1}')\overset{\varphi_{n+1}'}{\hookrightarrow}\ldots,$$

где $E=\bigcup E_n'$ — исчерпание базиса E его конечными подмножествами, $V_n'=\langle E_n'\rangle_{\mathbb{C}}$ и

$$\lim_{n\to\infty}k_n=\lim_{n\to\infty}k_n'=\lim_{n\to\infty}(\dim V_n-k_n)=\lim_{n\to\infty}(\dim V_n'-k_n')=\infty.$$

Мы должны показать, что индуктивные пределы $\mathrm{Gr}(\infty)$ и $\mathrm{Gr}'(\infty)$ этих двух цепей совпадают. Выберем для этого такое n, что

$$\dim V_n'\geqslant\dim V_1,\ k_n'\geqslant k_n,\quad \dim V_n'-k_n\geqslant\dim V_1-k_1,$$

и рассмотрим произвольное строгое стандартное расширение

$$f:\mathrm{Gr}(k_1,V_1)\hookrightarrow\mathrm{Gr}(k_n',V_n').$$

Пусть m таково, что

$$k_m\geqslant k_n',\quad \dim V_m\geqslant\dim V_n',\quad \dim V_m-k_m\geqslant\dim V_n'-k_n'.$$

Введем обозначение

$$\varphi=\varphi_{m-1}\circ\ldots\varphi_1:\mathrm{Gr}(k_1,V_1)\hookrightarrow\mathrm{Gr}(k_m,V_m).$$

Достаточно построить такое строгое стандартное расширение
$$g:\mathrm{Gr}(k'_n,V'_n)\hookrightarrow\mathrm{Gr}(k_m,V_n),$$
что $g\circ f=\varphi$. (Повторяя эту процедуру, мы сможем построить два взаимно обратных морфизма инд-многообразий $\mathrm{Gr}(\infty)$ и $\mathrm{Gr}'(\infty)$.)

Как было замечено выше, строгие стандартные расширения f и φ задаются тройками $(U_f,U_f^\sharp,f^\sharp)$ и $(U_\varphi,U_\varphi^\sharp,\varphi^\sharp)$ соответственно, где $\{U_f\subset U_f^\sharp\}$ и $\{U_\varphi\subset U_\varphi^\sharp\}$ — флаги в пространствах V'_n и V_m соответственно, $f^\sharp:U_f^\sharp\to V_1$ и $\varphi^\sharp:U_\varphi^\sharp\to V_1$ — линейные сюръекции и тройки
$$0\to U_f\hookrightarrow U_f^\sharp\overset{f^\sharp}{\twoheadrightarrow}V_1\to 0,$$
$$0\to U_\varphi\hookrightarrow U_\varphi^\sharp\overset{\varphi^\sharp}{\twoheadrightarrow}V_1\to 0$$
точны. Поскольку $k_m>k'_n$, имеем
$$\begin{aligned}\dim U_\varphi^\sharp&=\dim V_1+\dim U_\varphi=\dim V_1+(k_m-k_1)>\dim V_1+(k'_n-k_1)\\&=\dim V_1+\dim U_f=\dim U_f^\sharp.\end{aligned}$$
Поскольку отображения $f^\sharp$ и $\varphi^\sharp$ сюръективны, существует линейная сюръекция
$$\varepsilon:U_\varphi^\sharp\twoheadrightarrow U_f^\sharp,$$
удовлетворяющая условию $\varphi^\sharp=f^\sharp\circ\varepsilon$. Тогда ограничение ε на подпространство U_φ будет корректно определенной линейной сюръекцией $U_\varphi\twoheadrightarrow U_f$. Положим $U_g=\mathrm{Ker}\,\varepsilon$; тогда тройка
$$0\to U_g\hookrightarrow U_\varphi^\sharp\overset{\varepsilon}{\twoheadrightarrow}U_f^\sharp\to 0$$
точна. Положим теперь $\widetilde{U}_g^\sharp=U_g\oplus V'_n$ и обозначим через
$$\pi:\widetilde{U}_g^\sharp\to V'_n$$
проекцию на V'_n вдоль подпространства U_g. Рассмотрим вложения $j:U_\varphi^\sharp\hookrightarrow\widetilde{U}_g^\sharp$ и $i:\widetilde{U}_g^\sharp\hookrightarrow V_m$, для которых
$$(i\circ j)|_{U_\varphi^\sharp}=\mathrm{id}_{U_\varphi^\sharp},\quad \pi\circ j=\varepsilon|_{U_\varphi^\sharp}.$$
Такие вложения существуют. В самом деле,
$$\begin{aligned}\dim\widetilde{U}_g^\sharp&=\dim U_g+\dim V'_n=(\dim U_\varphi^\sharp-\dim U_f^\sharp)+\dim V'_n=\\&=(k_m-k'_n)+\dim V'_n=k_m+(\dim V'_n-k'_n)\leqslant\\&\leqslant k_m+\dim V_m-k_m=\dim V_m.\end{aligned}$$
Пусть теперь Z — такое подпространство в $U_\varphi^\sharp$, что $\widetilde{U}_\varphi^\sharp=U_g\oplus Z$; тогда $\varepsilon|_Z$ — линейный изоморфизм между Z и $U_f^\sharp$. Отметим, что
$$\varepsilon(Z)=\varepsilon(U_\varphi^\sharp)=U_f^\sharp.$$
Если $u\in U_g$, $z\in Z$, то положим $j(u+z)=u+\varepsilon(z)$; тогда $\pi\circ j=\varepsilon|_{U_\varphi^\sharp}$. Далее, пусть T — подпространство в V'_n, удовлетворяющее условию $V'_n=U_f^\sharp\oplus T$; тогда для произвольных $u\in U_g$, $\varepsilon(z)\in U_f^\sharp$, $t\in T$ положим $i(u+\varepsilon(z)+t)=u+z+\alpha(t)$, где $\alpha:T\hookrightarrow V_m$ — любое вложение, для которого $U_\varphi^\sharp\cap\alpha(T)=0$. Ясно, что
$$(i\circ j)|_{U_\varphi^\sharp}=\mathrm{id}_{U_\varphi^\sharp},$$
как и требовалось. Таким образом, если $U_g^\sharp=i(\widetilde{U}_g^\sharp)\subset V_m$, то $\{U_g\subset U_g^\sharp\}$ будет флагом в V_m, снабженным изоморфизмом $U_g^\sharp/U_g\cong V'_n$. Этот изоморфизм индуцирует сюръекцию $g^\sharp:U_g^\sharp\twoheadrightarrow V'_n$ с ядром U_g. Строгое стандартное расширение $g:\mathrm{Gr}(k'_n,V'_n)\hookrightarrow\mathrm{Gr}(k_m,V_m)$, соответствующее тройке $(U_g,U_g^\sharp,g^\sharp)$, удовлетворяют условию $g\circ f=\varphi$, как нам и нужно. $\square$

Обратим внимание, что инд-многообразия $\mathrm{Gr}(k)$ и $\mathrm{Gr}(\infty)$ из примера 2.7(i), — это в точности стандартные неизотропные инд-грассманианы в смысле определения выше, поэтому двусмысленности в обозначениях не возникает. Аналогично, все стандартные изотропные инд-грассманианы представляют классы изоморфизма инд-многообразий $\mathrm{Gr}^{\beta}(\mathcal{F}, E)$ из примера 2.10(i). Теперь все готово, чтобы классифицировать все линейные инд-грассманианы. Второй основной результат этого раздела таков (см. [34, Theorem 2]).

Теорема 3.8. *Каждый линейный инд-грассманиан изоморфен как инд-многообразие одному из стандартных инд-грассманианов* $\mathrm{Gr}(k)$, $\mathrm{Gr}(\infty)$, $\mathrm{Gr}^{\beta}(k,\infty)$, $\mathrm{Gr}^{\beta}(\infty,\infty)$, $\mathrm{Gr}^{\beta}(\infty,k)$, $\mathrm{Gr}_0^{\beta}(\infty,k)$, $\mathrm{Gr}_1^{\beta}(\infty,k)$, *которые попарно неизоморфны между собой.*

Доказательство. Пусть X — линейный инд-грассманиан, являющийся индуктивным пределом цепи вложений

$$X_1 \overset{\varphi_1}{\hookrightarrow} X_2 \overset{\varphi_2}{\hookrightarrow} \ldots \overset{\varphi_{n-1}}{\hookrightarrow} X_n \overset{\varphi_n}{\hookrightarrow} X_{n+1} \overset{\varphi_{n+1}}{\hookrightarrow} \ldots,$$

где все X_n — это (возможно, ортогональные или симплектические) грассманианы и $\lim\limits_{n\to\infty} \dim X_n = \infty$. Тогда для бесконечно многих n многообразие X_n является либо грассманианом, либо ортогональным грассманианом, либо симплектическим грассманианом. Значит, можно считать без ограничения общности, что все X_n относятся к одному из этих трех типов. Рассмотрим случай, когда все X_n — обычные грассманианы. (Два остальных случая рассматриваются аналогично с некоторыми особенностями в ортогональном случае.)

Есть две различные возможности: либо для бесконечного числа значений n вложение $\varphi_n : X_n \hookrightarrow X_{n+1}$ пропускается через проективное пространство в X_{n+1}, либо нет. Во первом случае, очевидно, $X \cong \mathrm{Gr}(1) \cong \mathbb{P}^{\infty}$. Во втором случае, удаляя несколько первых вложений, мы можем считать, что никакое из вложений φ_n не пропускается через проективное пространство в X_{n+1}. Тогда, по теореме 3.5, все φ_m являются стандартными расширениями, а значит, X изоморфен $\mathrm{Gr}(k)$ или $\mathrm{Gr}(\infty)$. Доказательство того, что стандартные инд-грассманианы попарно неизоморфны, см. в [34, Lemmas 5.1, 5.2, and 5.4]. □

Изотропные инд-грассманианы, которые не рассматриваются в теореме 3.8, имеют вид $\mathrm{Gr}^{\beta}(F,E)$, где β — симметрическая форма, а F — максимальное изотропное подпространство, для которого $F = F^{\perp}$, или же F — изотропное подпространство коразмерности 2 или 4 в $F^{\perp}$. Инд-грассманиан $\mathrm{Gr}^{\beta}(F,E)$ с $\mathrm{codim}_{F^{\perp}} F = 4$ является линейным инд-грассманианом в смысле определения 3.2. В [34, Theorem 2] не доказано, что любой инд-грассманиан $X = \varinjlim X_n$, у которого X_n изоморфно грассманиану $\mathrm{Gr}^{\beta}(l_n - 2, V_n)$ с $m_n = \dim V_n = 2l_n$, будет изоморфен $\mathrm{Gr}^{\beta}(F,E)$ с $\mathrm{codim}_{F^{\perp}} F = 4$. Мы, тем не менее, полагаем, что это будет верным. Случаи $F = F^{\perp}$ и $\mathrm{codim}_{F^{\perp}} F = 2$ не подходят под определение 3.2, поскольку не выполняется требование $\mathrm{Pic}\, X_n \cong \mathbb{Z}$. Эти случаи требуют специального рассмотрения. В завершение этого раздела отметим, что идея чисто геометрической характеризации инд-грассманианов $\mathrm{Gr}(F,E)$ (или их изотропных аналогов), без ссылок на действие инд-группы $\mathrm{GL}_{\infty}(\mathbb{C})$ на $\mathrm{Gr}(F,E)$, должна переноситься на случай произвольных инд-многообразий обобщенных флагов. Для этого требуется определить строго линейное вложение произвольных обычных флаговых многообразий $X \hookrightarrow Y$ в чисто геометрических терминах (т.е. усилить определение 3.1), а затем доказать, что строго линейные вложения — это в точности стандартные расширения (определение стандартного расширения допускает очевидное обобщение на случай произвольных многообразий флагов). Из этого будет следовать, что любое линейное флаговое инд-многообразие — это инд-многообразие обобщенных флагов.

4. Инд-многообразия обобщенных флагов как однородные инд-пространства

В этом разделе доказано, что каждое инд-многообразие обобщенных флагов (возможно, изотропных) является однородным пространством одной из классических инд-групп $\mathrm{GL}_{\infty}(\mathbb{C})$, $\mathrm{SL}_{\infty}(\mathbb{C})$, $\mathrm{Sp}_{\infty}(\mathbb{C})$ и $\mathrm{SO}_{\infty}(\mathbb{C})$, определенных в разделе 2. Наше изложение следует статьям [11–13, 16, 17, 33].

4.1. Классические инд-группы и их подгруппы Картана. Напомним, что классические инд-группы

$$\mathrm{SL}_\infty(\mathbb{C}) = \mathrm{SL}(V, E), \quad \mathrm{SO}_\infty(\mathbb{C}) = \mathrm{SO}(V, E, \beta), \quad \mathrm{Sp}_\infty(\mathbb{C}) = \mathrm{Sp}(V, E, \beta)$$

были определены в примере 2.4. Пусть G — одна из этих групп. Отметим, что в каждом случае имеется исчерпание группы G ее конечномерными подгруппами соответствующего типа, описанное в примере 2.4; будем обозначать это исчерпание через $G = \bigcup G_n$. К примеру, если $G = \mathrm{SL}_\infty(\mathbb{C})$, то $G_n = \mathrm{SL}(V_n) \cong \mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ и т. д. Цель этого раздела — описать структуру картановских подгрупп группы G более детально. Иногда более удобно работать с алгебрами Ли вместо групп. Пусть $\mathfrak{g}_n \subset \mathfrak{gl}(V_n)$ — алгебра Ли группы G_n. По каждому линейному оператору φ на V_n можно построить линейный оператор φ' на V_{n+1}, полагая

$$\varphi'(x) = x \text{ для } x \in V_n \text{ и } \varphi'(e) = 0 \text{ при } e \in E \setminus E_n$$

(ср. с определением оператора $\widehat{\varphi}$ из примера 2.4). Это задает вложение

$$\mathfrak{g}_n \hookrightarrow \mathfrak{g}_{n+1}, \ \varphi \mapsto \varphi'$$

для каждого $n \geqslant 1$. Обозначим индуктивный предел $\varinjlim \mathfrak{g}_n$ через $\mathfrak{g}$ и назовем его *алгеброй Ли* группы G. Если $G = \mathrm{GL}_\infty(\mathbb{C})$, $\mathrm{SL}_\infty(\mathbb{C})$, $\mathrm{SO}_\infty(\mathbb{C})$ или $\mathrm{Sp}_\infty(\mathbb{C})$, то пишем $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_\infty(\mathbb{C})$, $\mathfrak{sl}_\infty(\mathbb{C})$, $\mathfrak{so}_\infty(\mathbb{C})$ или $\mathfrak{sp}_\infty(\mathbb{C})$ соответственно. Если $H = \bigcup H_n$ — инд-подгруппа в G, где $H_n = H \cap G_n$, а $\mathfrak{h}_n$ — алгебра Ли группы H_n, то отображение $\varphi \mapsto \varphi'$ определяет вложение

$$\mathfrak{h}_n \hookrightarrow \mathfrak{h}_{n+1}, \ \varphi \mapsto \varphi',$$

и мы называем индуктивный предел $\mathfrak{h} = \varinjlim \mathfrak{h}_n$ *алгеброй Ли* подгруппы H. В конечномерной ситуации существует несколько эквивалентных определений подалгебры Картана полупростой алгебры Ли. Например, можно сказать, что это максимальная торическая подалгебра, или же нильпотентная самонормализуемая подалгебра. Кроме того, все картановские подалгебры любой конечномерной алгебры Ли сопряжены. Для $\mathfrak{g}$ ситуация несколько более деликатна. Один из новых эффектов заключается в том, что существуют максимальные торические подалгебры в $\mathfrak{g}$, которые не задают корневого разложения алгебры $\mathfrak{g}$. Другой эффект состоит в том, что существуют несопряженные максимальные торические подалгебры и, следовательно, различные корневые системы одной и той же алгебры Ли. Как известно, для конечномерной полупростой алгебры Ли есть понятие разложения Жордана и, в частности, понятия полупростых и нильпотентных элементов. Поскольку вложения $\mathfrak{g}_n \hookrightarrow \mathfrak{g}_{n+1}$ сохраняют их определения, мы можем говорить о разложении Жордана элемента алгебры $\mathfrak{g}$. Подалгебра $\mathfrak{t}$ в $\mathfrak{g}$ называется *торической*, если каждый элемент алгебры $\mathfrak{t}$ полупрост. Каждая торическая подалгебра является абелевой. Будем через $\mathfrak{h}_{ss}$ обозначать множество полупростых компонент элементов данной подалгебры $\mathfrak{h}$ в $\mathfrak{g}$. К примеру, если $\mathfrak{t}$ — торическая подалгебра, то $\mathfrak{t}_{ss} = \mathfrak{t}$. Подалгебра $\mathfrak{h}$ в $\mathfrak{g}$ называется *локально нильпотентной*, если она локально нильпотентна как $\mathfrak{h}$-модуль, т.е. если для любых x, $y \in \mathfrak{h}$ найдется такое $m \in \mathbb{Z}_{>0}$, что $\mathrm{ad}_x^m(y) = 0$. Это эквивалентно тому, что $\mathfrak{h}$ является объединением вложенных конечномерных нильпотентных алгебр Ли. Торическая подалгебра $\mathfrak{t}$ называется *расщепляющей*, если $\mathfrak{g}$ является весовым $\mathfrak{t}$-модулем, т.е. если

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{\lambda \in \mathfrak{h}^*} \mathfrak{g}^\lambda,$$

где

$$\mathfrak{g}^\lambda = \{x \in \mathfrak{g} \mid \mathrm{ad}_y(x) = \lambda(y)x \text{ для всех } y \in \mathfrak{h}\}.$$

Пример 4.1. (i) Напомним, что в разделе 2 было дано определение пространства V_*. Алгебра Ли $\mathfrak{gl}_\infty(\mathbb{C})$ изоморфна алгебре Ли $\mathfrak{gl}(V, V_*) = V \otimes V_*$ с коммутатором, индуцированным произведением

$$(v_1 \otimes \alpha_1)(v_2 \otimes \alpha_2) = \alpha_2(v_1) v_2 \otimes \alpha_1.$$

Изоморфизм $\eta : \mathfrak{gl}(V, V_*) \to \mathfrak{gl}_\infty(\mathbb{C}) = \mathfrak{gl}(V)$ задается обычной формулой

$$\eta(v \otimes \alpha)(w) = \alpha(w)v, \ v, \ w \in V, \ \alpha \in V_*.$$

Тогда

$$\mathfrak{t} = \bigoplus_{n\geqslant 0} \mathbb{C}e_n \otimes \mathbb{C}e_n^*$$

будет расщепляющей максимальной торической подалгебра в $\mathfrak{gl}_\infty(\mathbb{C})$. На самом деле $\mathfrak{t}$ состоит из всех линейных операторов из $\mathfrak{gl}_\infty(\mathbb{C})$, диагональных в базисе E.

(ii) Положим

$$\mathfrak{t} = \bigoplus_{n\geqslant 3} \mathbb{C}(e_n - e_1) \otimes \mathbb{C}(e_n^* - e_2^*);$$

тогда $\mathfrak{t}$ — это максимальная торическая подалгебра в $\mathfrak{gl}_\infty(\mathbb{C})$, причем она будет нерасщепляющей.

Если $A \subset \mathfrak{g}$ — любое подмножество, а $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ — любая подалгебра, то *централизатором* подмножества A в $\mathfrak{h}$ называется подпространство

$$\mathfrak{z}_{\mathfrak{h}}(A) = \{x \in \mathfrak{h} \mid [x, y] = 0 \text{ для всех } y \in A\} \subset \mathfrak{h}.$$

Определение 4.2. Подалгебра $\mathfrak{h}$ и $\mathfrak{g}$ называется *подалгеброй Картана*, если она локально нильпотентна и $\mathfrak{h} = \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}_{ss})$. Инд-подгруппа H в G называется *подгруппой Картана*, если алгебра Ли группы H является подалгеброй Картана в $\mathfrak{g}$.

Лемма 4.3. *Пусть $\mathfrak{h}$ — локально нильпотентная подалгебра в $\mathfrak{g}$. Тогда верны следующие утверждения*:

(i) $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}_{ss})$;
(ii) $\mathfrak{h}_{ss}$ — *торическая подалгебра в* $\mathfrak{g}$;
(iii) $\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}_{ss})$ — *самонормализуемая подалгебра в* $\mathfrak{g}$.

Доказательство. (i) Выберем два произвольных элемента x, $y \in \mathfrak{h}$. Поскольку $\mathfrak{h}$ локально нильпотентна, $\mathrm{ad}_x^m(y) = 0$ для некоторого m. Будем через обозначать через z_{ss} полупростую часть произвольного элемента $z \in \mathfrak{g}$. Хорошо известно, что $\mathrm{ad}_{x_{ss}}$ — многочлен от ad_x без свободного члена, поэтому

$$\mathrm{ad}_{x_{ss}}(\mathrm{ad}_x^{m-1}(y)) = 0.$$

Каждый элемент коммутирует со своей полупростой частью, так что

$$\mathrm{ad}_x^{m-1}(\mathrm{ad}_{x_{ss}}(y)) = 0,$$

и по индукции получаем, что $\mathrm{ad}_{x_{ss}}^m(y) = 0$. Таким образом, $\mathrm{ad}_{x_{ss}}(y) = 0$ и, следовательно, $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}_{ss})$.

(ii) Аналогично, из $\mathrm{ad}_y(x_{ss}) = 0$ следует, что $\mathrm{ad}_{y_{ss}}(x_{ss}) = 0$. Значит, любые два элемента $\mathfrak{h}_{ss}$ коммутируют. Поскольку сумма любых двух коммутирующих полупростых элементов полупроста, $\mathfrak{h}_{ss}$ является подалгеброй.

(iii) Предположим, что $z \in \mathfrak{g}$ принадлежит нормализатору $\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}_{ss})$; тогда $[x, y] \in \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}_{ss})$ для любого $y \in \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}_{ss})$, в частности, для любого $y \in \mathfrak{h}_{ss}$. Значит, если $y \in \mathfrak{h}_{ss}$, то $[[x, y], y] = 0$, а раз y полупрост, то $[x, y] = 0$. Итак, $x \in \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}_{ss})$, а потому $\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}_{ss})$ самонормализуема. □

Следующая теорема — это основной общий результат статьи [13], характеризующий подалгебры Картана алгебры $\mathfrak{g}$ (в [13] она доказана в более общем контексте локально редуктивных алгебр Ли).

Теорема 4.4. *Пусть $\mathfrak{h}$ — подалгебра в $\mathfrak{g}$. Следующие условия на $\mathfrak{h}$ эквивалентны*:

(i) $\mathfrak{h}$ — *подалегбра Картана*;
(ii) $\mathfrak{h} = \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}_{ss})$ *и* $\mathfrak{h}_{ss}$ *является подалгеброй*;
(iii) $\mathfrak{h} = \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{t})$ *для какой-либо максимальной торической подалгебры* $\mathfrak{t}$ *в* $\mathfrak{g}$, *причем* $\mathfrak{t} = \mathfrak{h}_{ss}$.

Кроме того, если $\mathfrak{h}$ — подалгебра Картана, то $\mathfrak{h}$ самонормализуема, причем и полупростая, и нильпотентная части в разложении Жордана любого элемента из $\mathfrak{h}$ лежат в $\mathfrak{h}$.

Существует единообразное описание картановских подалгебр в $\mathfrak{g}$ в терминах так называемых самодвойственных систем (детали см. в [13, Corollary 4.11]). Все подалгебры Картана в алгебрах Ли $\mathfrak{gl}_\infty(\mathbb{C})$, $\mathfrak{sl}_\infty(\mathbb{C}_\infty)$ и $\mathfrak{sp}_\infty(\mathbb{C})$ абелевы, в то время как в $\mathfrak{so}_\infty(\mathbb{C})$ есть и неабелевы картановские подалгебры (пример см. в [13, Sec. 4.2]). Подалгебра Картана $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ называется *расщепляющей*, если $\mathfrak{h}_{ss}$ — расщепляющая торическая подалгебра в $\mathfrak{g}$. В этом случае $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_{ss}$. Подгруппа Картана H в G называется *расщепляющей*, если ее алгебра Ли — расщепляющая подалгебра Картана. Вообще говоря, подгруппа Картана (соответственно, подалгебра Картана) в G (соответственно, в $\mathfrak{g}$) является расщепляющей тогда и только тогда, когда она является индуктивным пределом подгрупп Картана в G'_n (соответственно, подалгебр Картана в $\mathfrak{g}'_n$), где $G = \bigcup G'_n$ — какое-либо исчерпание группы G ее конечномерными классическими подгруппами нужного типа, а $\mathfrak{g} = \bigcup \mathfrak{g}'_n$ — соответствующее исчерпание алгебры $\mathfrak{g}$ ее конечномерными классическими подалгебрами.

Пример 4.5 (расщепляющие максимальные торические подалгебры)**.** (i) Пусть $G = \mathrm{GL}_\infty(\mathbb{C})$ или $\mathrm{SL}_\infty(\mathbb{C})$ (соответственно, $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_\infty(\mathbb{C})$ или $\mathfrak{sl}_\infty(\mathbb{C})$). Множество H (соответственно, $\mathfrak{h}$) всех линейных операторов из G (соответственно, из $\mathfrak{g}$), диагональных в базисе E, образует расщепляющую картановскую подгруппу (соответственно, расщепляющую картановскую подалгебру), причем $\mathfrak{h} = \mathrm{Lie}\, H$.

(ii) Положим $m_n = \dim V_n$ при $n \geqslant 1$. Если β кососимметрична, то будем предполагать, что каждое $m_n = 2l_n$ четно (и тогда $\mathfrak{g}_n \cong \mathfrak{sp}_{2l_n}(\mathbb{C})$). Если β симметрична, то предположим, что либо каждое $m_n = 2l_n$ четно (и тогда $\mathfrak{g}_n \cong \mathfrak{so}_{2l_n}(\mathbb{C})$), либо каждое $m_n = 2l_n + 1$ нечетно (и тогда $\mathfrak{g}_n \cong \mathfrak{so}_{2l_n+1}(\mathbb{C})$). Если каждое m_n четно, перенумеруем базис E, полагая

$$E = \{e_i,\ e_{-i}\}_{i \in \mathbb{Z}_{>0}}, \quad E_n = \{e_i,\ e_{-i}\}_{i=1}^{l_n},$$

а если каждое m_n нечетно, то перенумеруем E, полагая

$$E = \{e_0\} \cup \{e_i,\ e_{-i}\}_{i \in \mathbb{Z}_{>0}}, \quad E_n = \{e_0\} \cup \{e_i,\ e_{-i}\}_{i=1}^{l_n}.$$

Без ограничения общности можно считать, что

$$\beta(u,v) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^{l_n}(u_i v_{-i} + u_{-i} v_i) & \text{для } \mathfrak{so}_{2l_n}(\mathbb{C}), \\ \displaystyle u_0 v_0 + \sum_{i=1}^{l_n}(u_i v_{-i} + u_{-i} v_i) & \text{для } \mathfrak{so}_{2l_n+1}(\mathbb{C}), \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{l_n}(u_i v_{-i} - u_{-i} v_i) & \text{для } \mathfrak{sp}_{2l_n}(\mathbb{C}). \end{cases}$$

Здесь $u, v \in V_n$, а x_i обозначает координату вектора x, соответствующую вектору e_i. Тогда множество H (соответственно, $\mathfrak{h}$) всех линейных операторов из G (соответственно, из $\mathfrak{g}$), диагональных в базисе E, образует расщепляющую картановскую подгруппу (соответственно, расщепляющую картановскую подалгебру), причем $\mathfrak{h} = \mathrm{Lie}\, H$.

Приведем основной результат о расщепляющих картановских подалгебрах.

Предложение 4.6 (см. [13])**.**

(i) *Если $\mathfrak{t}$ — максимальная расщепляющая торическая подалгебра в $\mathfrak{g}$, то $\mathfrak{t} = \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{t})$ — расщепляющая картановская подалгебра в $\mathfrak{g}$.*

(ii) *Если $\mathfrak{h}$ — расщепляющая картановская подалгебра в $\mathfrak{g}$, то $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_{ss}$.*

(iii) *Если $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_\infty(\mathbb{C})$, $\mathfrak{sl}_\infty(\mathbb{C})$ или $\mathfrak{sp}_\infty(\mathbb{C})$, то все картановские подалгебры сопряжены с помощью группы* $\mathrm{Aut}\,\mathfrak{g}$. *Если $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}_\infty(\mathbb{C})$, то существует ровно два класса* $\mathrm{Aut}\,\mathfrak{g}$*-сопряженности расщепляющих картановских подалгебр, отвечающих описанным выше исчерпаниям $\mathfrak{g} = \varinjlim \mathfrak{so}_{2l_n}(\mathbb{C})$ и $\mathfrak{g} = \varinjlim \mathfrak{so}_{2l_n+1}(\mathbb{C})$.*

Отметим также, что $G \subsetneq \mathrm{Aut}\,\mathfrak{g}$. В самом деле, $G = \mathrm{SL}(V, E)$ состоит из автоморфизмов пространства V с определителем 1, которые переводят в себя все элементы базиса E, кроме конечного числа, в то время как $\operatorname{Aut}\mathfrak{sl}_\infty(\mathbb{C})$ в этом случае содержит группу всех автоморфизмом пространства V, которые индуцируют автоморфизм пространства V_*.

4.2. Расщепляющие борелевские и параболические подгруппы классических инд-групп. В этом разделе обсуждаются борелевские и параболические подгруппы и подалгебры классических инд-групп и их алгебр Ли соответственно. В частности, проведена классификация всех расщепляющих борелевских подгрупп в терминах их корней. В конечномерном случае борелевской подалгеброй полупростой алгебры Ли называется максимальная разрешимая подалгебра, а параболической подалгеброй — подалгебра, содержащая какую-либо борелевскую подалгебру. Будем говорить, что подалгебра $\mathfrak{b}$ в $\mathfrak{g}$ *локально разрешима*, если каждое конечное подмножество $\mathfrak{b}$ содержится в конечномерной разрешимой подалгебре, т.е. если $\mathfrak{b}$ есть объединение конечномерных разрешимых подалгебр.

Определение 4.7. *Борелевская подалгебра* $\mathfrak{b}$ в $\mathfrak{g}$ — это максимальная локально разрешимая подалгебра $\mathfrak{g}$. Борелевская подалгебра $\mathfrak{b}$ в $\mathfrak{g}$ называется *расщепляющей*, если она содержит расщепляющую картановскую подалгебру алгебры $\mathfrak{g}$. *Борелевская подгруппа* в G — это инд-подгруппа B, алгебра Ли $\mathfrak{b} = \operatorname{Lie} B$ которой является борелевской подалгеброй в $\mathfrak{g}$. Борелевская подгруппа B называется *расщепляющей*, если ее алгебра Ли является расщепляющей борелевской подалгеброй, или, эквивалентно, если B содержит расщепляющую картановскую подгруппу группы G.

Вообще говоря, свойства борелевских подалгебр могут быть очень необычными с конечномерной точки зрения. К примеру, существует борелевская подалгебра в $\mathfrak{gl}_\infty(\mathbb{C})$ (см. пример 4.13 ниже), не содержащая ни одного ненулевого полупростого элемента и, следовательно, ни одной нетривиальной торической подалгебры!

Напротив, расщепляющие борелевские подалгебры допускают очень хорошее описание, приведенное ниже. Заметим, что борелевская подалгебра в $\mathfrak{g}$ (соответственно, борелевская подгруппа в G) является расщепляющей в том и только в том случае, если она является индуктивным пределом борелевских подгрупп в G'_n (соответственно, борелевских подалгебр в $\mathfrak{g}'_n$), где $G = \bigcup G'_n$ — какое-либо исчерпание инд-группы G ее конечномерными классическими подгруппами нужного типа, а $\mathfrak{g} = \bigcup \mathfrak{g}'_n$ — соответствующее исчерпание алгебры $\mathfrak{g}$ ее конечномерными классическими подалгебрами. Пусть $\mathfrak{h}$ — подалгебра Картана в $\mathfrak{g}$, описанная в примерах 4.5(i) и (ii). Любая расщепляющая борелевская подалгебра сопряжена относительно $\operatorname{Aut}\mathfrak{g}$ расщепляющей борелевской подалгебре, содержащей $\mathfrak{h}$. Таким образом, в дальнейшем мы ограничимся рассмотрением только тех борелевских подалгебр $\mathfrak{b}$, которые содержат $\mathfrak{h}$. Имеется корневое разложение

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha\in\Phi} \mathfrak{g}^\alpha,$$

где Φ — *система корней* алгебры $\mathfrak{g}$ относительно $\mathfrak{h}$, а $\mathfrak{g}^\alpha$ — *корневые подпространства.* Систем корней Φ — это просто объединение систем корней подалгебр $\mathfrak{g}_n$, и она совпадает с одной из следующих бесконечных систем корней:

$$\begin{aligned}
A_\infty &= \pm\Big\{\varepsilon_i - \varepsilon_j,\ i,j \in \mathbb{Z}_{>0},\ i<j\Big\},\\
B_\infty &= \pm\Big\{\varepsilon_i - \varepsilon_j,\ i,j \in \mathbb{Z}_{>0},\ i<j\Big\} \cup \pm\Big\{\varepsilon_i + \varepsilon_j,\ i,j \in \mathbb{Z}_{>0},\ i<j\Big\} \cup \pm\Big\{\varepsilon_i,\ i \in \mathbb{Z}_{>0}\Big\},\\
C_\infty &= \pm\Big\{\varepsilon_i - \varepsilon_j,\ i,j \in \mathbb{Z}_{>0},\ i<j\Big\} \cup \pm\Big\{\varepsilon_i + \varepsilon_j,\ i,j \in \mathbb{Z}_{>0},\ i<j\Big\} \cup \pm\Big\{2\varepsilon_i,\ i \in \mathbb{Z}_{>0}\Big\},\\
D_\infty &= \pm\Big\{\varepsilon_i - \varepsilon_j,\ i,j \in \mathbb{Z}_{>0},\ i<j\Big\} \cup \pm\Big\{\varepsilon_i + \varepsilon_j,\ i,j \in \mathbb{Z}_{>0},\ i<j\Big\}.
\end{aligned}$$

Линейные функции $\varepsilon_i - \varepsilon_j$, $\varepsilon_i + \varepsilon_j$, ε_i, $2\varepsilon_i$ на $\mathfrak{h}$ определяются так: если $h \in \mathfrak{h}$, то

$$\begin{aligned}
(\varepsilon_i - \varepsilon_j)(h) &= \begin{cases} h_{i,i} - h_{j,j} & \text{в случае } A_\infty, \\ h_{i,i} - h_{-i,-i} - h_{j,j} + h_{-j,-j} & \text{в противном случае,} \end{cases} \\
(\varepsilon_i + \varepsilon_j)(h) &= h_{i,i} - h_{-i,-i} + h_{j,j} - h_{-j,-j}, \\
\varepsilon_i(h) &= 2(h_{i,i} - h_{-i,-i}), \\
2\varepsilon_i(h) &= h_{i,i} - h_{-i,-i}.
\end{aligned}$$

Здесь в ортогональном и симплектическом случаях мы нумеруем базисные векторы из E так, как в примере 4.5, и через $x_{i,j}$ обозначаем (i,j)-й элемент матрицы x. Напомним (см. [18]), что линейный порядок на $\{0\} \cup \{\pm\varepsilon_i\}$ называется $\mathbb{Z}_2$-*линейным*, если умножение на -1 обращает порядок. Согласно [18, Proposition 3], существует биекция между расщепляющими борелевскими подалгебрами в $\mathfrak{g}$, содержащими $\mathfrak{h}$, и следующими линейно упорядоченными множествами:

для A_∞: линейные порядки на $\{\varepsilon_i\}$;

для B_∞ и C_∞: $\mathbb{Z}_2$-линейные порядки на $\{0\} \cup \{\pm\varepsilon_i\}$;

для D_∞: $\mathbb{Z}_2$-линейные порядки на $\{0\} \cup \{\pm\varepsilon_i\}$ с тем свойством, что минимальный положительный элемент (если он существует) принадлежит $\{\varepsilon_i\}$.

В дальнейшем мы обозначаем такие порядки через $\prec$. Чтобы описать нужную биекцию, обозначим $\vartheta_i = \varepsilon_i$, если $\varepsilon_i \succ 0$, и $\vartheta_i = -\varepsilon_i$, если $\varepsilon_i \prec 0$ (для A_∞ при всех i положим $\vartheta_i = \varepsilon_i$). Теперь полагаем $\mathfrak{b} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}$, где

$$\mathfrak{n} = \bigoplus_{\alpha \in \Phi^+} \mathfrak{g}^\alpha$$

и, по определению,

$$\begin{aligned}
A_\infty^+ &= \Big\{\vartheta_i - \vartheta_j,\ i,j \in \mathbb{Z}_{>0},\ \vartheta_i \succ \vartheta_j\Big\}, \\
B_\infty^+ &= \Big\{\vartheta_i - \vartheta_j,\ i,j \in \mathbb{Z}_{>0},\ \vartheta_i \succ \vartheta_j\Big\} \cup \Big\{\vartheta_i + \vartheta_j,\ i,j \in \mathbb{Z}_{>0},\ \vartheta_i \succ \vartheta_j\Big\} \cup \Big\{\vartheta_i,\ i \in \mathbb{Z}_{>0}\Big\}, \\
C_\infty^+ &= \Big\{\vartheta_i - \vartheta_j,\ i,j \in \mathbb{Z}_{>0},\ \vartheta_i \succ \vartheta_j\Big\} \cup \Big\{\vartheta_i + \vartheta_j,\ i,j \in \mathbb{Z}_{>0},\ \vartheta_i \succ \vartheta_j\Big\} \cup \Big\{2\vartheta_i,\ i \in \mathbb{Z}_{>0}\Big\}, \\
D_\infty^+ &= \Big\{\vartheta_i - \vartheta_j,\ i,j \in \mathbb{Z}_{>0},\ \vartheta_i \succ \vartheta_j\Big\} \cup \Big\{\vartheta_i + \vartheta_j,\ i,j \in \mathbb{Z}_{>0},\ \vartheta_i \succ \vartheta_j\Big\}.
\end{aligned}$$

Подалгебра $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{g}$ называется *параболической* (соответственно, *расщепляющей параболической*), если она содержит борелевскую (соответственно, расщепляющую борелевскую) подалгебру алгебры $\mathfrak{g}$. Инд-подгруппа $P \subset G$ называется *параболической* (соответственно, *расщепляющей параболической*) *подгруппой*, если она содержит борелевскую (соответственно, расщепляющую борелевскую) подгруппу группы G, или, что равносильно, если алгебра Ли $\mathfrak{p} = \operatorname{Lie} P$ является параболической (соответственно, расщепляющей параболической) подалгеброй в $\mathfrak{g}$. Обратим внимание, что параболическая подалгебра в $\mathfrak{g}$ (соответственно, параболическая подгруппа в G) является расщепляющей тогда и только тогда, когда она является индуктивным пределом параболических подгрупп в G'_n (соответственно, параболических подалгебр в $\mathfrak{g}'_n$), где $G = \bigcup G'_n$ — какое-либо исчерпание инд-группы G ее конечномерными классическими подгруппами нужного типа, а $\mathfrak{g} = \bigcup \mathfrak{g}'_n$ — соответствующее исчерпание алгебры $\mathfrak{g}$ ее конечномерными классическими подалгебрами.

4.3. Однородные инд-пространства. Основной результат этого раздела гласит, что каждая расщепляющая параболическая подгруппа является стабилизатором обобщенного флага и, обратно, каждое инд-многообразие (изотропных) обобщенных флагов есть однородное инд-пространство группы G. Пусть H и $\mathfrak{h}$ такие же, как в примере 4.5; в изотропном случае будем использовать обозначения из примера 4.5(ii). Заметим, что в этом случае E является β-изотропным базисом относительно инволюции

$$i_E : e_i \mapsto e_{-i}, \quad e_i \in E.$$

Каждая расщепляющая параболическая подалгебра $\mathfrak{p}$ в $\mathfrak{g}$ сопряжена относительно $\operatorname{Aut}\mathfrak{g}$ какой-либо расщепляющей параболической подалгебре в $\mathfrak{g}$, содержащей $\mathfrak{h}$, поэтому мы можем считать без ограничения общности, что $\mathfrak{p}$ содержит подалгебру $\mathfrak{h}$ (и, следовательно, что соответствующая параболическая подгруппа P в G содержит подгруппу H). Пусть $\mathcal{F}$ — обобщенный флаг в V, совместимый с базисом E (и β-изотропный, если E является β-изотропным). Инд-группа G естественно действует на инд-многообразии $\mathcal{F}\ell(\mathcal{F}, E)$ (и на $\mathcal{F}\ell(\mathcal{F}, \beta, E)$ в изотропном случае). Обозначим через $P_{\mathcal{F}}$ стабилизатор $\mathcal{F}$ в G.

Теорема 4.8.

1) *Подгруппа $P_{\mathcal{F}}$ является расщепляющей параболической подгруппой в G, содержащей H.*
2) *Отображение $\mathcal{F} \mapsto P_{\mathcal{F}}$ является биекцией между множеством обобщенных флагов в V, совместимых с базисом E, и множеством расщепляющих параболических подгрупп в G, содержащих H.*

Доказательство. (i) Включение $H \subset P_{\mathcal{F}}$ сразу следует из определения H и совместимости $\mathcal{F}$ и E. Поскольку каждая $P_n = P \cap G_n$ является стабилизатором флага $\mathcal{F} \cap V_n$, P_n — параболическая подгруппа в G_n. Следовательно, $P = \varinjlim P_n$ — расщепляющая параболическая подгруппа инд-группы G.

(ii) Обратно, пусть $P = \varinjlim P_n$ — параболическая подгруппа в G, содержащая H, где P_n — параболическая подгруппа в G_n для всех $n \geqslant 1$. Обозначим через $\mathcal{F}(n)$ флаг в V_n, стабилизатор которого совпадает с P_n. Тогда $\iota_n(\mathcal{F}(n)) = \mathcal{F}(n+1)$ (и $\iota_n^{\beta}(\mathcal{F}(n)) = \mathcal{F}(n+1)$ в изотропном случае). Индуктивный предел $\varinjlim \mathcal{F}(n)$ определяет обобщенный флаг $\mathcal{F}$ в V, и прямая проверка показывает, что $P = P_{\mathcal{F}}$. □

Отметим, что максимальные обобщенные флаги в V, совместимые с E, соответствуют при этой биекции расщепляющим борелевским подгруппам в G, содержащим H. Поскольку $G/P_{\mathcal{F}} = \bigcup G_n/P_n$, где $P_n = P_{\mathcal{F}} \cap G_n$, мы заключаем, что $G/P_{\mathcal{F}}$ — это локально проективное инд-многообразие, как мы уже отмечали в разделе 2. Теперь мы в состоянии определить на $\mathcal{F}\ell(\mathcal{F}, E)$ и $\mathcal{F}\ell(\mathcal{F}, \beta, E)$ соответствующие структуры однородных инд-пространств.

Теорема 4.9. *Существует изоморфизм инд-многообразий $\mathcal{F}\ell(\mathcal{F}, E) \cong G/P_{\mathcal{F}}$ (и инд-многообразий $\mathcal{F}\ell(\mathcal{F}, \beta, E) \cong G/P_{\mathcal{F}}$ в изотропном случае).*

Доказательство. Пусть $\mathcal{G} \in \mathcal{F}\ell(\mathcal{F}, E)$ или $\mathcal{G} \in \mathcal{F}\ell(\mathcal{F}, \beta, E)$. Обозначим через U конечномерное подпространство в V, существование которого гарантируется E-соизмеримостью обобщенных флагов $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$. Мы можем предполагать без ограничения общности, что $U = V_n$ для некоторого $n \geqslant 1$. Тогда $\mathcal{F}(n) = \mathcal{F} \cap V_n$ и $\mathcal{G}(n) = \mathcal{G} \cap V_n$ — флаги одинакового типа в конечномерном векторном пространстве V_n, а значит, найдется такой $g_n \in G_n$, что $g_n(\mathcal{F}(n)) = \mathcal{G}(n)$. Мы можем продолжить g_n до элемента $g_{n+1} = \widehat{g}_n$, полагая $\widehat{g}_n(e) = e$ при $e \in E \setminus E_n$, и так далее. Обозначим через g соответствующий элемент группы G. Тогда отображение

$$\eta : \mathcal{F}\ell(\mathcal{F}, E) \to G/P_{\mathcal{F}} \quad (\text{или } \eta : \mathcal{F}\ell(\mathcal{F}, \beta, E) \to G/P_{\mathcal{F}}), \quad \mathcal{G} \mapsto gP,$$

корректно определено. Легко проверяется, что η — изоморфизм инд-многообразий. □

4.4. Борелевские и параболические подалгебры: общий случай. В этом разделе кратко описаны (возможно нерасщепляющие) борелевские и параболические подалгебры в $\mathfrak{g}$ (или, что равносильно, борелевские и параболические подгруппы в G) в терминах так называемых замкнутых обобщенных флагов и тугих пар полузамкнутых обобщенных флагов. Этот материал взят из [11, 12]. Если параболическая подгруппа группы G (или, эквивалентно, параболическая подалгебра алгебры $\mathfrak{g}$) является нерасщепляющей, то она не может быть стабилизатором обобщенного флага, совместимого с базисом E или с любым другим G-предпочтительным базисом E' пространства V. Значит, чтобы связать общие нерасщепляющие параболические подгруппы и подалгебры с обобщенными флагами, мы должны рассматривать обобщенные флаги, которые не совместимы ни с каким G-предпочтительным базисом. Напомним, что в примере 4.1 мы установили отождествление

$$\mathfrak{gl}(V, V_*) \cong \mathfrak{gl}_\infty(\mathbb{C}) = \mathfrak{gl}(V).$$

При этом изоморфизме $\mathfrak{sl}_\infty(\mathbb{C})$ отождествляется с коммутантом $\mathfrak{sl}(V, V_*)$ алгебры $\mathfrak{gl}(V, V_*)$. Заметим, что если U — счетномерное комплексное векторное пространство, а

$$\langle\cdot,\cdot\rangle : V \times U \to \mathbb{C}$$

— невырожденное спаривание, то мы можем определить алгебру Ли $\mathfrak{gl}(V, U) \cong \mathfrak{gl}_\infty(\mathbb{C})$ как векторное пространство $V \otimes U$ со скобкой, индуцированной произведением

$$(v_1 \otimes u_1)(v_2 \otimes u_2) = \langle v_1, u_2\rangle v_2 \otimes u_1.$$

Тогда $\mathfrak{gl}(V, V_*)$ является конкретной реализацией этой конструкции, где невырожденное спаривание $V \times V_* \to \mathbb{C}$ задается правилом $\langle v, \alpha\rangle = \alpha(v)$. Далее, если β — симметрическая (соответственно, кососимметрическая) невырожденная билинейная форма на V, то β определяет невырожденное спаривание $V \times V \to \mathbb{C}$, и мы можем отождествить $\mathfrak{so}_\infty(\mathbb{C})$ (соответственно, $\mathfrak{sp}_\infty(\mathbb{C})$) с подалгеброй Ли $\mathfrak{so}(V, V) = \bigwedge^2 V$ (соответственно, с подалгеброй Ли $\mathfrak{sp}(V, V) = \mathrm{Sym}^2 V$) алгебры Ли $\mathfrak{gl}(V, V)$. Выбрав невырожденное спаривание $\langle\cdot,\cdot\rangle : V \times U \to \mathbb{C}$ и подпространство F в V или в U, мы можем определить $F^\perp$ как $\langle\cdot,\cdot\rangle$-ортогональное дополнение к F в U или V. (Если спаривание задается невырожденной симметрической или кососимметрической билинейной формой β, это определение совпадает с определением $F^\perp$, данным в разделе 2.) С каждой цепью $\mathcal{C}$ подпространств в V можно связать цепь $\mathcal{C}^\perp = \{F^\perp,\ F \in \mathcal{C}\}$ подпространств U, и наоборот. Подпространство $F \subset V$ называется *замкнутым* (в топологии Макки на V), если $F = \overline{F}$, где $\overline{F} = F^{\perp\perp}$ — *замыкание* пространства F. Обобщенный флаг $\mathfrak{F} = \{F'_\alpha,\ F''_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ в V называется *полузамкнутым*, если

$$\overline{F'_\alpha} \in \{F'_\alpha,\ F''_\alpha\}$$

для любого $\alpha \in \mathcal{A}$. Полузамкнутый обобщенный флаг $\mathfrak{F}$ называется *замкнутым*, если, кроме того, $\overline{F''_\alpha} = F''_\alpha$ для всех $\alpha \in \mathcal{A}$. Отметим, что если обобщенный флаг $\mathfrak{F}$ в V слабо совместим с базисом E, определяющим V_*, то $\mathfrak{F}$ автоматически замкнут. Заметим, что каждое из пространств V и U является $\mathfrak{gl}(V, U)$-модулем. Значит, $\mathfrak{gl}(V, U)$ естественно действует на V и U, и стабилизатор $\mathrm{Stab}\,\mathfrak{F}$ обобщенного флага $\mathfrak{F}$ в V относительно $\mathfrak{gl}(V, U)$ задается формулой

$$\mathrm{Stab}\,\mathfrak{F} = \sum_{\alpha\in\mathcal{A}} F''_\alpha \otimes (F'_\alpha)^\perp.$$

Если $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(V, V)$ или $\mathfrak{sp}(V, V)$, то мы пишем $\mathrm{St}^{\mathfrak{g}}_{\mathfrak{F}} = \mathrm{Stab}\,\mathfrak{F} \cap \mathfrak{g}$. Следующий результат описывает борелевские подалгебры классических бесконечномерных простых алгебр Ли (или, что равносильно, борелевские подгруппы классических инд-групп; см. [11, Theorems 4.3, 4.10, 4.16]).

Теорема 4.10.

(i) *Пусть $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(V, V_*)$ (соответственно, $\mathfrak{sp}(V, V)$ или $\mathfrak{so}(V, V)$). Подалгебра $\mathfrak{b}$ в $\mathfrak{g}$ будет борелевской тогда и только тогда, когда она является стабилизатором некоторого максимального замкнутого (соответственно, максимального замкнутого изотропного) обобщенного флага в V.*

(ii) *При $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(V, V_*)$ (соответственно, $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}(V, V)$) отображение $\mathfrak{F} \mapsto \mathrm{Stab}\,\mathfrak{F}$ (соответственно, $\mathfrak{F}\ell \mapsto \mathrm{St}^{\mathfrak{g}}_{\mathfrak{F}}$) из множества максимальных замкнутых (соответственно, из множества максимальных замкнутых изотропных) обобщенных флагов в пространстве V в множество борелевских подалгебр алгебры $\mathfrak{g}$ биективно. При $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(V, V)$ слой отображения $\mathfrak{F} \mapsto \mathrm{St}^{\mathfrak{g}}_{\mathfrak{F}}$ из множества максимальных замкнутых изотропных обобщенных флагов в пространстве V в множество борелевских подалгебр алгебры $\mathfrak{g}$ состоит не более, чем из двух элементов.*

(Явное описание слоев последнего отображения дано в [11, Sec. 4.2].)

Определение 4.11. Будем говорить, что два полузамкнутых обобщенных флага $\mathfrak{F}$ и $\mathcal{G}$ в пространствах V и U соответственно образуют *тугую пару*, если цепь $\mathfrak{F}^\perp$ (соответственно, $\mathcal{G}^\perp$) инвариантна относительно $\mathrm{Stab}\,\mathcal{G}$ (соответственно, относительно $\mathrm{Stab}\,\mathfrak{F}$). Если на V задана невырожденная симметрическая или кососимметрическая форма β, то полузамкнутый обобщенный флаг $\mathfrak{F}$ называется *тугим*, если $\mathfrak{F}^\perp$ инвариантна относительно стабилизатора $\mathfrak{F}$ в $\mathfrak{gl}(V, V)$ (т.е. если обобщенный флаг $\mathfrak{F}$ образует тугую пару сам с собой).

Каждой тугой паре $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ соответствует подалгебра

$$\mathrm{St}_{\mathcal{F},\mathcal{G}} = \mathrm{Stab}\ \mathcal{F} \cap \mathrm{Stab}\ \mathcal{G},$$

а также некоторая подалгебра $(\mathrm{St}_{\mathcal{F},\mathcal{G}})_-$, определенная в [12, p. 23]. Если $\mathcal{F}$ — тугой обобщенный флаг в V, а $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(V,V)$ или $\mathfrak{sp}(V,V)$, то пишем

$$(\mathrm{St}^{\mathfrak{g}}_{\mathcal{F}})_- = (\mathrm{St}_{\mathcal{F},\mathcal{F}})_- \cap \mathfrak{g}.$$

Следующий результат описывает параболические подалгебры классических бесконечномерных простых алгебр Ли (или, что равносильно, параболические подгруппы классических инд-групп; см. [12, Theorems 5.6, 6.6].

Теорема 4.12.

(i) *Пусть* $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(V,V_*)$ *или* $\mathfrak{sl}(V,V_*)$, *а* $\mathfrak{p}$ — *подпространство в* $\mathfrak{g}$. *Тогда* $\mathfrak{p}$ *является параболической подалгеброй в* $\mathfrak{g}$ *тогда и только тогда, когда существует* (*единственная*) *тугая пара* $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$, *удовлетворяющая условию*

$$(\mathrm{St}_{\mathcal{F},\mathcal{G}})_- \subset \mathfrak{p} \subset \mathrm{St}_{\mathcal{F},\mathcal{G}}\,.$$

(ii) *Пусть* $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(V,V)$ *или* $\mathfrak{sp}(V,V)$, *а* $\mathfrak{p}$ — *подпространство в* $\mathfrak{g}$. *Подалгебра* $\mathfrak{p}$ *является параболической в* $\mathfrak{g}$ *тогда и только тогда, когда существует такой* (*единственный*) *тугой флаг* $\mathcal{F}$ *в* V, *что*

$$(\mathrm{St}^{\mathfrak{g}}_{\mathcal{F}})_- \subset \mathfrak{p} \subset \mathrm{St}^{\mathfrak{g}}_{\mathcal{F}}\,.$$

Пример 4.13. Пусть $V = \langle e_\alpha,\ \alpha \in \mathbb{Q}\rangle_{\mathbb{C}}$, $U = \langle f_\beta,\ \beta \in \mathbb{Q}\rangle_{\mathbb{C}}$ и

$$\langle e_\alpha, f_\beta\rangle = \begin{cases} 1, & \text{если } \alpha > \beta, \\ 0, & \text{если } \alpha \leqslant \beta. \end{cases}$$

Тогда $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — невырожденное спаривание, поэтому

$$\mathfrak{gl}(V,U) \cong \mathfrak{gl}_\infty(\mathbb{C}).$$

Для любого $\alpha \in \mathbb{Q}$ положим

$$F'_\alpha = \langle e_\gamma,\ \gamma < \alpha\rangle_{\mathbb{C}},\ F''_\alpha = \langle e_\gamma,\ \gamma \leqslant \alpha\rangle_{\mathbb{C}}.$$

Тогда $\mathcal{F} = \{F'_\alpha,\ F''_\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{Q}}$ — максимальный замкнутый обобщенный флаг в V. Его стабилизатор $\mathfrak{b}$ в $\mathfrak{gl}(V,U)$ является борелевской подалгеброй алгебры $\mathfrak{gl}(V,U)$, в которой нет ни одного полупростого элемента и, следовательно, ни одной торической подалгебры.

Отметим, что если P — нерасщепляющая параболическая подгруппа группы G, то на G/P также можно ввести структуру инд-многообразия. Эти инд-многообразия до сих пор не изучались. Основное отличие от расщепляющего случая заключается в том, что $P \cap G_n$ не обязательно будет параболической подгруппой группы G_n, поэтому у нас нет исчерпания G/P компактными многообразиями. Роль произвольных нерасщепляющих борелевских подгрупп и подалгебр в теории представлений также остается неясной.

5. Разложение Шуберта

В конечномерном случае разложение Шуберта играет важную роль в изучении геометрии многообразий флагов. Напомним, что в разделе 2 мы определили группы G_n. Зафиксируем максимальный тор H_n в группе G_n, борелевскую подгруппу B_n в G_n, содержащую H_n, и параболическую подгруппу P_n в G_n, содержащую B_n. Тогда G_n/P_n — соответствующее флаговое многообразие. Пусть $N_{G_n}(H_n)$ — нормализатор тора H_n в G_n. Тогда

$$W_n = N_{G_n}(H_n)/H_n$$

— *группа Вейля* группы G_n. Поскольку H_n и B_n фиксированы, возникает множество *простых образующих* группы W_n и, следовательно, *функция длины* ℓ_n и *порядок Брюа* $\leqslant_n$ на W_n. Подробности см., к примеру, в [1, 9].

Для произвольного $w \in W_n$ обозначим через $\dot{w}$ любого представителя w в $N_{G_n}(H_n)$. Пусть $\mathcal{F}_n \in G_n/P_n$ — флаг в V, стабилизатор $\mathrm{Stab}\,_{G_n}\mathcal{F}_n$ которого в G_n совпадает с P_n. Обозначим через W_{P_n} параболическую подгруппу W_n, соответствующую подгруппе P_n, а через W^{P_n} — полную систему представителей минимальной длины правых смежных классов $W_{P_n}\backslash W_n$ (W^{P_n} находится во взаимно однозначном соответствии с $W_{P_n}\backslash W_n$). Тогда W_n-действие на G_n/P_n имеет вид

$$w\mathcal{G} = \dot{w}(\mathcal{G}), \quad \mathcal{G} \in G_n/P_n.$$

В дальнейшем будем писать

$$\mathcal{F}_w = w\mathcal{F}_n, \quad w \in W_n.$$

Описание B_n-орбит на G_n/P_n дается *разложением Шуберта*:

$$G_n/P_n = \bigsqcup_{w \in W^{P_n}} B_n\mathcal{F}_w.$$

Более того, каждая *клетка Шуберта* $X_w^\circ = B_n\mathcal{F}_w$ изоморфна аффинному пространству $\mathbb{A}^{\ell_n(w)}$, и если σ, $\tau \in W_n$, то клетка Шуберта X_σ° содержится в *подмногообразии Шуберта* X_τ (по определению, X_τ — это замыкание X_τ° в G_n/P_n) тогда и только тогда, когда $\sigma \leqslant_n \tau$. *Разложение Брюа* группы G_n имеет вид

$$G_n = \bigsqcup_{w \in W^{P_n}} B_n\dot{w}P_n.$$

В этом разделе показано, как эти классические результаты переносятся на случай инд-многообразий обобщенных флагов. Материал взят из [21].

5.1. Аналоги группы Вейля. В этом разделе представлены некоторые комбинаторные результаты, аналогичные комбинаторике группы Вейля в обычном исчислении Шуберта. Обозначим через $W = W(E)$ группу перестановок базиса E, которые оставляют неподвижными все элементы E, кроме конечного числа. В изотропном случае мы дополнительно предполагаем, что каждая перестановка $w \in W$ коммутирует с инволюцией i_E. Обратим внимание, что

$$W = \varinjlim W_n,$$

где H — расщепляющая подгруппа Картана в G, состоящая из всех диагональных в базисе E операторов из G, $H_n = H \cap G_n$, а вложение $W_n \hookrightarrow W_n$ индуцировано вложением $H_n \hookrightarrow H_{n+1}$. Отметим также, что

$$W \cong N_G(H)/H,$$

где $N_G(H)$ — нормализатор тора H в инд-группе G. Далее, пусть B и P — расщепляющие борелевская и параболическая подгруппы в G соответственно, содержащие H. (Мы не предполагаем, что B сопряжена какой-либо подгруппе в P!) Для краткости, обозначим через $\mathcal{F}\ell$ инд-многообразие обобщенных флагов $\mathcal{F}\ell(\mathcal{F}, E)$ (или $\mathcal{F}\ell(\mathcal{F}, \beta, E)$ в изотропном случае). Как известно (см. теорему 4.8), существует единственный обобщенный флаг $\mathcal{G} \in \mathcal{F}\ell$, обладающий свойством

$$P = P_\mathcal{G} = \mathrm{Stab}\,_G\mathcal{G}.$$

Можно считать без ограничения общности, что $\mathcal{G} = \mathcal{F}$, т.е. что $P = P_\mathcal{F}$. Напомним, что в разделе 2 было определено линейно упорядоченное множество $\mathcal{A}$. Обозначим через $\mathcal{S}$ множество $\mathcal{S}(E, \mathcal{A})$ (соответственно, $\mathcal{S}(E, \beta, \mathcal{A})$) всех сюръекций из E в $\mathcal{A}$ (соответственно, всех сюръекций σ из E в $\mathcal{A}$, удовлетворяющих условию $\sigma \circ i_E = i_\mathcal{A} \circ \sigma$). Произвольной сюръекции $\sigma \in \mathcal{S}$ соответствует обобщенный флаг

$$\mathcal{F}_\sigma = \{\mathcal{F}'_{\sigma,\alpha},\ \mathcal{F}''_{\sigma,\alpha},\ \alpha \in \mathcal{A}\},$$

где

$$\mathcal{F}'_{\sigma,\alpha} = \langle e \in E,\ \sigma(e) < \alpha\rangle_\mathbb{C},\ \mathcal{F}''_{\sigma,\alpha} = \langle e \in E,\ \sigma(e) \leqslant \alpha\rangle_\mathbb{C}.$$

При таком подходе $\{\mathcal{F}_\sigma,\ \sigma \in \mathcal{S}\}$ — это все обобщенные флаги из $\mathcal{F}\ell$, совместимые с базисом E. (Чтобы проверить это в изотропном случае, нужно применить лемму 2.9.)

Пусть σ_0 — сюръекция из $\mathcal{S}$, для которой $\mathcal{F} = \mathcal{F}_{\sigma_0}$. Сюръекция σ_0 определяет частичный порядок $\leqslant_P$ на базисе E по следующему правилу:

$$e \leqslant_P e',\ \text{если } \sigma_0(e) \leqslant \sigma_0(e').$$

Этот частичный порядок обладает тем свойством, что отношение «$e = e'$ или e не сравним с e'» — это отношение эквивалентности на E. На самом деле, выбор расщепляющей параболической подгруппы в G, содержащей тор H, — это то же самое, что выбор частичного порядка $\leqslant_P$ на E с таким свойством. Более того, P будет расщепляющей борелевской подгруппой тогда и только тогда, когда порядок $\leqslant_P$ будет линейным. Будем говорить, что пара $(e, e') \in E \times E$ является *инверсией* для сюръекции $\sigma \in \mathcal{S}$, если $e <_B e'$ и $\sigma(e) > \sigma(e')$. (В изотропном случае предполагается дополнительно, что $e <_B i_E(e')$ и $e' \neq i_E(e')$.) Заметим, что группа W действует на $\mathcal{S}$ по правилу

$$w \cdot \sigma = \sigma \circ w^{-1},$$

причем если σ лежит на W-орбите σ_0, то условие $\sigma(e) > \sigma(e')$ эквивалентно условию $w(e) >_P w(e')$, где $\sigma = w^{-1} \cdot \sigma_0$. *Число инверсий* в $\sigma \in \mathcal{S}$ определяется как

$$n(\sigma) = n_B^P(\sigma) = \#\{(e, e') \in E \times E \mid (e, e') \text{ — инверсия для } \sigma\}.$$

Конечно, $n(\sigma)$ может быть бесконечным. Число инверсий нельзя буквально трактовать как длину Брюа, потому что мы не предполагаем, что B сопряжена какой-либо подгруппе в P. Тем не менее, положим

$$\widehat{E} = \{(e, e') \in E' \times E' \mid e \neq e'\},$$

где, по определению,

$$E' = \begin{cases} E & \text{для } \mathrm{GL}_\infty(\mathbb{C}) \text{ и } \mathrm{SL}_\infty(\mathbb{C}), \\ \{e \in E \mid e \neq i_E(e)\} & \text{для } \mathrm{SO}_\infty(\mathbb{C}) \text{ и } \mathrm{Sp}_\infty(\mathbb{C}). \end{cases}$$

Пусть $t_{e,e'}$ — такая перестановка базиса E, что

$$t_{e,e'}(e) = e',\ t_{e,e'}(e') = e$$

и $t_{e,e'}(e'') = e''$ для всех остальных $e'' \in E$. Обозначим

$$s_{e,e'} = \begin{cases} t_{e,e'} \circ t_{i_E(e), i_E(e')}, & \text{если } e' \neq i_E(e) \text{ в изотропном случае}, \\ t_{e,e'} & \text{в противном случае}. \end{cases}$$

Ясно, что $\{s_{e,e'},\ (e, e') \in \widehat{E}\}$ — это набор образующих в W. Введем обозначение

$$S_B = \{s_{e,e'} \mid\ e,\, e' \text{ — ближайшие элементы частично упорядоченного множества } (E', \leqslant_B)\}.$$

Вообще говоря, S_B не порождает W. Для любого $w \in W$ пусть

$$\ell(w) = \ell_B(w) = \begin{cases} \min\{l \geqslant 0 \mid w = s_1 \dots s_l \text{ для каких-либо } s_1, \dots, s_l \in S_B\}, & \text{если } l \text{ существует}, \\ \infty & \text{в противном случае}. \end{cases}$$

Обратим внимание, что W_n можно рассматривать как подгруппу в W, порожденную подмножеством

$$S_B^n = \{s_{e,e'} \mid\ e,\, e' \text{ — ближайшие элементы в } (E_n \cap E', \leqslant_B)\},$$

являющимся набором простых образующих в W_n. Пусть ℓ_n — соответствующая фнукция длины на W_n.

Предложение 5.1. *Пусть $w \in W$.*

(i) $\ell(w) = \lim_{n \to \infty} \ell_n(w)$;
(ii) $\ell(w) = n_B^B(w^{-1} \cdot \sigma_0)$;
(iii) $\ell(w) = \infty$ *тогда и только тогда, когда существует такой $e \in E$, что множество $\{e' \in E \mid e <_B e' <_B w(e)\}$ бесконечно.*

Доказательство этого предложения см. в [21, Proposition 8].

Следствие 5.2. *Следующие условия эквивалентны*:

1) *множество S_B порождает группу W*;
2) *$\ell(w) < \infty$ для всех $w \in W$*;
3) *$(E, \leqslant_B)$ изоморфно как частично упорядоченное множество подмножеству в $\mathbb{Z}$.*

Доказательство. Эквивалентность (i)$\Leftrightarrow$(ii) очевидна. Отметим, что условие (iii) равносильно тому, что для всех $e, e' \in E$ интервал $\{e'' \in E \mid e \leqslant_B e'' \leqslant_B e'\}$ конечен. Значит, импликация (iii)$\Rightarrow$(ii) вытекает из предложения 5.1(iii). Обратно, если выполняется (ii), то $\ell(s_{e,e'}) < \infty$ для всех $(e, e') \in \widehat{E}$, а потому, вновь из предложения 5.1(iii), множество $\{e'' \in E \mid e \leqslant_B e'' \leqslant_B e'\}$ конечно. Это влечет условие (iii). $\square$

Обозначим через $\dot{w}$ произвольного представителя элемента w в $N_G(H)$.

Предложение 5.3. *Пусть $w \in W$.*

1) $B \subset \dot{w}P\dot{w}^{-1}$ тогда и только тогда, когда $n_B^P(w \cdot \sigma_0) = 0$;
2) существует такая $w \in W$, что $B \subset \dot{w}P\dot{w}^{-1}$, тогда и только тогда, когда существует $w \in W$ такая, что $n_B^P(w^{-1} \cdot \sigma_0) < \infty$.

Доказательство. (i) По определению обобщенного флага $\mathcal{F}_{\sigma_0}$, условие $B \subset P$ равносильно тому, что линейный порядок $\leqslant_B$ на E слабее частичного порядка $\leqslant_P$ на E, т.е. тому, что из $e \leqslant_P e'$ вытекает $e \leqslant_B e'$ для любых e, $e' \in E$. Последнее условие эквивалентно тому, что отображение σ_0 является неубывающим, т.е. тому, что $e \leqslant_B e'$ влечет $\sigma_0(e) \leqslant \sigma_0(e')$ для всех e, $e' \in E$. Поскольку

$$\dot{w}P\dot{w}^{-1} = \mathrm{Stab}\,{}_G\mathcal{F}_{w\cdot\sigma_0},$$

утверждение (i) доказано.

(ii) Из утверждения (i) следует, что если $B \subset \dot{w}P\dot{w}^{-1}$, то $n_B^P(w^{-1} \cdot \sigma_0) < \infty$. Обратная импликация доказана в [21, Proposition 9]. $\square$

5.2. Разложение Шуберта. Обозначим через W_P подгруппу в W, состоящую из тех $\sigma \in W$, для которых $w \cdot \sigma_0 = \sigma_0$. Прямая проверка показывает, что отображение $w \mapsto \mathcal{F}_{w\cdot\sigma_0}$ индуцирует биекцию между множеством левых смежных классов W/W_P и множеством совместимых с E обобщенных флагов из $\mathcal{F}\ell$. Определим теперь частичный порядок на $\mathcal{S}$, аналогичный порядку Брюа. Выберем любые σ, $\tau \in \mathcal{S}$. Мы будем писать $\sigma \to \tau$, если существует такая пара $(e, e') \in \widehat{E}$, что

$$e <_B e', \quad \sigma(e) < \sigma(e')$$

и $\tau = \sigma \circ s_{e,e'}$. Положим $\sigma < \tau$, если существуют $k \geqslant 1$ и элементы $\tau_1, \ldots, \tau_k \in \mathcal{S}$ такие, что

$$\sigma \to \tau_1 \to \ldots \to \tau_k = \tau.$$

Для произвольного обобщенного флага

$$\mathcal{G} = \{G'_\alpha,\ G''_\alpha,\ \alpha \in \mathcal{A}\} \in \mathcal{F}\ell$$

определим отображение $\sigma_\mathcal{G} : E \to \mathcal{A}$, измеряющее положение $\mathcal{G}$ относительно максимального обобщенного флага $\mathcal{F}_0$, где $B = \mathrm{Stab}\,{}_G\mathcal{F}_0$. А именно, для $e \in E$ положим

$$\sigma_\mathcal{G}(e) = \min\{\alpha \in \mathcal{A} \mid G''_\alpha \cap F''_{0,e} \neq G''_\alpha \cap F'_{0,e}\}.$$

Здесь $\mathcal{F}_0 = \{F'_{0,e},\ F''_{0,e},\ e \in E\}$ и

$$F'_{0,e} = \langle e' \in E \mid e' <_B e\rangle_\mathbb{C},\ F''_{0,e} = \langle e' \in E \mid e' \leqslant_B e\rangle_\mathbb{C}.$$

Непосредственно проверяется, что $\sigma_\mathcal{G}$ лежит в $\mathcal{S}$; более того, $\sigma \in W\sigma_0$, где $W\sigma_0 = \{w \cdot \sigma_0,\ w \in W\}$ обозначает W-орбиту сюръекции σ_0. Теперь мы в состоянии сформулировать основной результат этого раздела. Обозначим через $B\mathcal{G}$ орбиту обобщенного флага $\mathcal{G} \in \mathcal{F}\ell$ относительно естественного действия группы B на $\mathcal{F}\ell$. Пусть W^P — какая-либо полная система представителей левых смежных классов W/W_P.

Теорема 5.4. *Пусть $P = P_\mathcal{F}$, а B — произвольная расщепляющая борелевская подгруппа в G, содержащая H. Тогда*

(i) $G/P = \mathcal{F}\ell = \bigsqcup_{\sigma\in W\sigma_0} B\mathcal{F}_\sigma = \bigsqcup_{w\in W^P} B\mathcal{F}_{w\cdot\sigma_0}$;
(ii) *если $\sigma \in W\sigma_0$, то обобщенный флаг $\mathcal{G} \in \mathcal{F}\ell$ лежит на орбите $B\mathcal{F}_\sigma$ тогда и только тогда, когда $\sigma_\mathcal{G} = \sigma$;*

(iii) *если $\sigma \in W\sigma_0$, то орбита $B\mathcal{F}_\sigma$ — локально замкнутое инд-подмногообразие в $\mathcal{F}\ell$, изоморфное аффинному пространству $\mathbb{A}^{n_P^B(\sigma)}$;*
(iv) *если $\sigma, \tau \in W\sigma_0$, то $B\mathcal{F}_\sigma \subset \overline{B\mathcal{F}_\tau}$ тогда и только тогда, когда $\sigma \leqslant \tau$.*

Доказательство. Рассмотрим случай $\mathcal{F}\ell(\mathcal{F}, E)$; случай $\mathcal{F}\ell(\mathcal{F}, \beta, E)$ рассматривается аналогично.

(i) Утверждение вытекает из конечномерного разложения Шуберта для $\mathcal{F}\ell_n = \mathcal{F}\ell(d_n, V_n)$, где d_n — тип флага $\mathcal{F}(n) = \mathcal{F} \cap V_n = \{F \cap V_n,\ F \in \mathcal{F}\}$. Действительно, если n достаточно велико и флаг $\mathcal{G}(n) = \mathcal{G} \cap V_n$ лежит в $\mathcal{F}\ell_n$, то B_n-орбита $\mathcal{G}(n)$ содержит единственный элемент вида $\mathcal{F}_{w\cdot\sigma_0} \cap V_n$, $w \in W_n$.

(ii) Пусть $\mathcal{G} \in \mathcal{F}\ell$. Согласно утверждению (i), существует единственная $\sigma \in W\sigma_0$ такая, что $\mathcal{G} \in B\mathcal{F}_\sigma$; пусть, к примеру, $\mathcal{G} = b(\mathcal{F}_\sigma)$ для какого-либо $b \in B$. Тогда

$$G''_\alpha \cap F'_{0,e} = b(F''_{\sigma,\alpha} \cap F'_{0,e}) \quad \text{и} \quad G''_\alpha \cap F''_{0,e} = b(F''_{\sigma,\alpha} \cap F''_{0,e}) \quad \text{для всех } e \in E,\ \alpha \in \mathcal{A},$$

так как b оставляет на месте $F'_{0,e}$ и $F''_{0,e}$. Отсюда следует, что $\sigma_\mathcal{G} = \sigma_{\mathcal{F}_\sigma}$. Более того, из определения $\mathcal{F}_\sigma$ видно, что $F''_{\sigma,\alpha} \cap F''_{0,e} \neq F''_{\sigma,\alpha} \cap F'_{0,e}$ в том и только том случае, когда $\sigma(e) \leqslant \alpha$. Значит,

$$\sigma(e) = \min\{\alpha \in \mathcal{A} \mid F''_{\sigma,\alpha} \cap F''_{0,e} \neq F''_{\sigma,\alpha} \cap F'_{0,e}\} = \sigma_{\mathcal{F}_\sigma}(e) \text{ для всех } e \in E.$$

Таким образом, $\sigma_\mathcal{G} = \sigma$. Равенство $\sigma_\mathcal{G} = \sigma$ гарантирует, в частности, что $\sigma_\mathcal{G} \in \mathcal{S}$.

(iii) Утверждение опять вытекает из конечномерного случая. Заметим, что при $w \in W_n$ образ клетки Шуберта $B_n(\mathcal{F}_{w\cdot\sigma_0} \cap V_n)$ при вложении ι_n будет аффинным подпространством клетки Шуберта $B_{n+1}(\mathcal{F}_{w\cdot\sigma_0} \cap V_{n+1})$.

(iv) Выберем произвольные $\sigma, \tau \in W\sigma_0$, $\sigma \leqslant \tau$, и число $n \geqslant 1$, для которого $\mathcal{F}_\sigma(n)$ и $\mathcal{F}_\tau(n)$ содержатся в $\mathcal{F}\ell_n$. Можно считать без ограничения общности, что $\sigma \to \tau$, т.е. что $\tau = \sigma \circ s_{e,e'}$ для каждой пары $(e, e') \in E \times E$, для которой

$$e <_B e', \quad \sigma(e) < \sigma(e').$$

Увеличивая n, если потребуется, мы можем считать, что $e, e' \in E_n$. Тогда из конечномерной теории получаем, что

$$B_n\mathcal{F}_\sigma(n) \subset \overline{B_n\mathcal{F}_\tau(n)}.$$

Таким образом, $B\mathcal{F}_\sigma \subset \overline{B\mathcal{F}_\tau}$. Обратно, предположим, что $\mathcal{F}_\sigma \in \overline{B\mathcal{F}_\tau}$. Тогда

$$\mathcal{F}_\sigma(n) \in \overline{B_n\mathcal{F}_\tau(n)}$$

для достаточно большого $n \geqslant 1$. Применяя опять конечномерный результат, получаем, что $\sigma \leqslant \tau$. Это завершает доказательство. □

В дальнейшем будем называть $X^\circ_\sigma = B\mathcal{F}_\sigma$ и $X_\sigma = \overline{X^\circ_\sigma}$ *клеткой Шуберта* и *подмногообразием Шуберта* в $\mathcal{F}\ell$, отвечающими $\sigma \in \mathcal{S}$, соответственно. Приведенное ниже следствие (разложение Брюа инд-группы G) сразу вытекает из разложения Шуберта инд-многообразия $\mathcal{F}\ell$, доказанного в теореме выше. Отметим, что, вообще говоря, B не сопряжена никакой подгруппе группы P, потому на самом деле существует много разных разложений Брюа группы G, зависящих от выбора подгрупп B и P.

Следствие 5.5 (разложение Брюа инд-группы G). *Пусть G — одна из инд-групп $\mathrm{GL}_\infty(\mathbb{C})$, $\mathrm{SL}_\infty(\mathbb{C})$, $\mathrm{SO}_\infty(\mathbb{C})$ или $\mathrm{Sp}_\infty(\mathbb{C})$, а P и B — ее расщепляющие борелевская и параболическая подгруппы соответственно, содержащие тор H. Тогда имеется разложение*

$$G = \bigsqcup_{w \in W^P} B\dot{w}P.$$

Вообще говоря, B-орбиты в теореме 5.4 бесконечномерны. Два следующих результата определяют ситуации, в которых возникают конечномерные орбиты.

Теорема 5.6. *Пусть G — одна из инд-групп $\mathrm{GL}_\infty(\mathbb{C})$, $\mathrm{SL}_\infty(\mathbb{C})$, $\mathrm{SO}_\infty(\mathbb{C})$ или $\mathrm{Sp}_\infty(\mathbb{C})$, а P и B — ее расщепляющие борелевская и параболическая подгруппы, содержащие тор H, соответственно. Следующие условия эквивалентны*:

1) B сопряжена относительно G подгруппе в P;

2) хотя бы одна B-орбита на G/P кончномерна;
3) некоторая B-орбита G/P является точкой (такая орбита всегда единственна).

Доказательство. Условие (i) означает, что найдется такой элемент $g \in G$, что $B \subset gPg^{-1}$, или, что равносильно, такой, что $gP \in G/P$ остается на месте под действием B, т.е. что на G/P есть B-орбита, являющаяся точкой. Мы доказали эквивалентность (i)$\Leftrightarrow$(iii). Импликация (iii)$\Rightarrow$(ii) очевидна, а импликация (ii)$\Rightarrow$(i) следует из предложения 5.3 и теоремы 5.4. $\square$

Следствие 5.7. *Предположим, что $P \neq G$. Следующие условия эквивалентны:*

1) B сопряжена относительно G какой-либо подгруппе в P, и $\mathcal{F}_0$ является флагом;
2) каждая B-орбита на G/P конечномерна.

Доказательство. Импликация (i)$\Rightarrow$(ii) следует из теоремы 5.6, следствия 5.2, теоремы 5.4 и следующего факта: если найдется $w_0 \in W$, для которого $n_B^P(w_0 \cdot \sigma_0) = 0$, то для всех $w \in W$

$$n_B^P(w^{-1} \cdot \sigma_0) = \inf_{w' \in W_P} l(w_0 w' w).$$

(Этот факт доказан в [21, Proposition 10].)

Предположим теперь, что выполнено условие (ii). По теореме 5.6, существует $g \in G$, для которого $B \subset gPg^{-1}$, так что мы можем полагать без ограничения общности, что $B \subset P$. Будем доказывать от противного: допустим, что $\mathcal{F}_0$ — не флаг, т.е. что $(E, \leqslant_B)$ не изоморфно подмножеству в $\mathbb{Z}$. Тогда найдутся такие $e, e' \in E$, что множество

$$\{e'' \in E \mid e <_B e'' <_B e'\}$$

бесконечно. Поскольку сюръекция $\sigma_0 \in \mathcal{S}$, отвечающая подгруппе P, является неубывающим (см. предложение 5.3) и непостоянным (так как $P \neq G$) отображением, существуют $\widehat{e}$, $\widehat{e}'$, для которых $\widehat{e} \leqslant_B e <_B e' \leqslant_B \widehat{e}'$ и $\sigma_0(\widehat{e}) < \sigma_0(\widehat{e}')$. Значит, $\dim B\mathcal{F}_{w \cdot \sigma_0} = \infty$ для $w = s_{\widehat{e}, \widehat{e}'}^{-1}$ по теореме 5.4 — противоречие. $\square$

Пример 5.8 (разложение Шуберта инд-грассманианов)**.** Пусть $G = \mathrm{GL}_\infty(\mathbb{C})$ или $\mathrm{SL}_\infty(\mathbb{C})$. Рассмотрим случай $\mathrm{Gr}(F, E)$, т.е. будем считать, что

$$\mathcal{F} = \{\{0\} \subset F \subset V\}.$$

Здесь $\mathcal{A} = \{1, 2\}$, и если $\mathcal{F}$ совместим с базисом E, то сюръекция $\sigma_0 : E \to \mathcal{A}$, для которой $F = \langle e \in E \mid \sigma_0(e) = 1 \rangle_{\mathbb{C}}$, может рассматриваться просто как такое подмножество $\sigma_0 \subset E$, что $F = \langle \sigma_0 \rangle_{\mathbb{C}}$. Тем самым отождествляем $\mathcal{S}$ с множеством $\mathcal{S}(E)$ подмножеств базиса E с естественным действием группы W. Отметим, что

$$W\sigma_0 = \Big\{\sigma \in \mathcal{S}(E) \;\Big|\; |\sigma \setminus \sigma_0| = |\sigma_0 \setminus \sigma| < \infty\Big\}.$$

Будем писать $F_\sigma = \langle \sigma \rangle_{\mathbb{C}}$ для любого $\sigma \in \mathcal{S}(E)$.

(i) Предположим сначала, что $\dim F = k < \infty$. Тогда $\mathrm{Gr}(F, E) \cong \mathrm{Gr}(k)$. Обозначим через $\mathcal{S}_k(E)$ множество всех подмножеств базиса E мощности k. Согласно теореме 5.4,

$$\mathrm{Gr}(F, E) = \bigsqcup_{\sigma \in \mathcal{S}_k(E)} B\mathcal{F}_\sigma.$$

Клетка $X_\sigma^\circ = B\mathcal{F}_\sigma$ конечномерна тогда и только тогда, когда σ содержится в конечном идеале упорядоченного множества $(E, \leqslant_B)$. Отсюда следует, что на $\mathrm{Gr}(F, E)$ есть конечномерные B-орбиты в том и только том случае, когда максимальный флаг $\mathcal{F}_0$, отвечающий подгруппе B, содержит какое-либо k-мерное подпространство. По теореме 5.6, в этом случае B сопряжена какой-либо подгруппе в $\mathrm{Stab}_G \mathcal{F}$. Более того, все клетки X_σ° конечномерны тогда и только тогда, когда $(E, \leqslant_B)$ изоморфно $\mathbb{Z}_{>0}$ как частично упорядоченное множество, т.е. тогда и только тогда, когда $\mathcal{F}$ имеет вид

$$\mathcal{F}_0 = \{F_{0,0} \subset F_{0,1} \subset \ldots\},$$

где $\dim F_{0,i} = i$. ii) Далее, предположим, что $\mathrm{codim}_V F = k < \infty$. Как и раньше, $\mathrm{Gr}(F,E) \cong \mathrm{Gr}(k)$. Если, как выше,

$$\mathcal{F}_0 = \{F_{0,0} \subset F_{0,1} \subset \ldots\},$$

где $\dim F_{0,i} = i$ для всех i, а $B = \mathrm{Stab}\,_G\mathcal{F}_0$, то теорема 5.6 показывает, что все B-орбиты на $\mathrm{Gr}(F,E)$ бесконечномерны. Если, однако, B' — это стабилизатор какого-либо максимального обобщенного флага, содержащего произвольное подпространство F', для которого флаг $\{\{0\} \subset F' \subset V\}$ будет E-соизмерим с флагом $\mathcal{F}$, то на $\mathrm{Gr}(F,E)$ есть конечномерные B'-орбиты. Более того, не существует борелевской подгруппы, которая на обоих инд-грассманианах из (i) и (ii) имела бы только конечномерные орбиты.

(iii) Наконец, предположим, что и $\dim F$, и $\mathrm{codim}_V F$ бесконечны; тогда $\mathrm{Gr}(F,E) \cong \mathrm{Gr}(\infty)$. Предположим, что базис E занумерован множеством $\mathbb{Z}$. Рассмотрим борелевскую подгруппу $B \subset G$, отвечающую обычному порядку на $\mathbb{Z}$. Если $F = \langle e_i,\ i \leqslant 0\rangle_{\mathbb{C}}$, то $B \subset \mathrm{Stab}\,_G\mathcal{F}$, поэтому каждая B-орбита на $\mathrm{Gr}(F,E)$ конечномерна. С другой стороны, если $F = \langle e_{2i},\ i \in \mathbb{Z}\rangle_{\mathbb{C}}$, то размерность любой B-орбиты на $\mathrm{Gr}(F,E)$ бесконечна.

5.3. Гладкость подмногообразий Шуберта. В этом разделе изучается гладкость подмногообразий Шуберта $X_\sigma = \overline{B\mathcal{F}_\sigma}$ инд-многообразия $\mathcal{F}\ell$, где $\mathcal{F}\ell = \mathcal{F}\ell(\mathcal{F},E)$ или $\mathcal{F}\ell = \mathcal{F}\ell(\mathcal{F},\beta,E)$. Общий принцип прозрачен: X_σ гладко тогда и только тогда, когда его пересечения с подходящими конечномерными флаговыми многообразиями $\mathcal{F}\ell$ гладки. Для классических конечномерных групп есть замечательная характеризация гладких подмногообразий Шуберта флаговых многообразий в терминах недопустимых паттернов (pattern avoidance) (см., к примеру, [8, Chap. 8]). Например, если $G_n = \mathrm{SL}(V_n)$ (здесь группа Вейля W_n изоморфна симметрической группе S_n), то подмногообразие Шуберта X_σ многообразия флагов G_n/B_n, отвечающее элементу $\sigma \in W_n$, будет гладким тогда и только тогда, когда σ *не допускает паттернов* 3412 *и* 4231, т.е. не существует таких i, j, k, l, $1 \leqslant i < j < k < l \leqslant \dim V_n$, что

$$\sigma(k) < \sigma(l) < \sigma(i) < \sigma(j) \quad \text{или} \quad \sigma(l) < \sigma(j) < \sigma(k) < \sigma(i).$$

Определение гладкой точки инд-многообразия дано в п. 2.1. Известно (см. [30]), что если X — инд-многообразие с исчерпанием $\bigcup\limits_{n\geqslant 1} X_n$ конечномерными подмногообразиями, $x \in X$ и существует такая подпоследовательность $\{X_{n_k}\}_{k\geqslant 1}$, что x — гладкая точка многообразия X_{n_k} для каждого $k \geqslant 1$, то x будет гладкой точкой на X. К примеру, $\mathbb{A}^\infty$ и $\mathbb{P}^\infty$ — гладкие инд-многообразия. Обратное утверждение очевидно неверно. Например, зафиксируем для каждого n вложение $\mathbb{A}^n \hookrightarrow \mathbb{A}^{n+1}$. Выберем произвольную точку $x \in \mathbb{A}^1$ и для всех $n \geqslant 1$ определим $X'_n \subset \mathbb{A}^{n+1}$ как n-мерное подпространство $\mathbb{A}^{n+1}$, содержащее точку x и отличное от $\mathbb{A}^n$. Положим теперь $X_n = X'_n \cup \mathbb{A}^n$; тогда подмногообразия X_n исчерпывают гладкое инд-многообразие $\mathbb{A}^\infty$, но x — особая точка на каждом из X_n. Тем не менее, сформулированное выше утверждение можно обратить частично: если каждое вложение $X_n \hookrightarrow X_{n+1}$ обладает левым обратным в категории алгебраических многообразий и $x \in X$ — особая точка на X_n при всех $n \geqslant 1$, то x — особая точка инд-многообразия X (см. [21, Lemma 6]). В приведенном ниже критерии особости на B и $\mathcal{F}_\sigma$ наложены некоторые технические ограничения. Мы предполагаем, что выполняется хотя бы одно из двух условий: $\mathcal{F}_0$ — это флаг, или $\mathcal{F}_\sigma$ — это флаг и $\dim F''_{\sigma,\alpha}/F'_{\sigma,\alpha} < \infty$ всякий раз, когда

$$\{0\} \neq F'_{\sigma,\alpha} \subset F''_{\sigma\alpha} \neq V.$$

Например, эти условия выполняются для инд-грассманианов. Напомним, что в разделе 2 были определены $\mathcal{F}\ell_n$ и $\mathcal{F}\ell_n^\beta$; пересечение $X_{\sigma,n} = X_\sigma \cap \mathcal{F}\ell_n$ (соответственно, $X_{\sigma,n} = X_\sigma \cap \mathcal{F}\ell_n^\beta$) является подмногообразием Шуберта в $\mathcal{F}\ell_n$ (соответственно, в $\mathcal{F}\ell_n^\beta$) в обычном смысле. Через $\mathrm{Sing}(X)$ мы обозначаем множество особых точек инд-многообразия X.

Теорема 5.9. *Пусть G — одна из инд-групп $\mathrm{GL}_\infty(\mathbb{C})$, $\mathrm{SL}_\infty(\mathbb{C})$, $\mathrm{SO}_\infty(\mathbb{C})$ или $\mathrm{Sp}_\infty(\mathbb{C})$, B, $\mathcal{F}_\sigma$, $\mathcal{F}_0$ удовлетворяют условиям, сформулированным выше. Тогда верно ровно одно из двух утверждений*:

(i) *многообразие $X_{\sigma,n}$ гладко для всех n, тогда и X_σ тоже гладко*;

(ii) *существует такое* $n_0 \geqslant 1$, *что* $X_{\sigma,n}$ *особо для всех* $n \geqslant n_0$, *тогда и* X_σ *тоже особо, причем* $\mathrm{Sing}(X_\sigma) = \bigcup\limits_{n \geqslant n_0} X_{\sigma,n}$.

Доказательство см. в [21, Theorem 4]. Заметим, что мы не знаем, верна ли теорема 5.9 в общем случае (без ограничений на $\mathcal{F}_0$ и $\mathcal{F}_\sigma$).

Пример 5.10. Видим, что в критерии гладкости подмногообразий Шуберта конечномерных многообразий флагов в терминах недопустимых паттернов можно перейти к пределу на бесконечности. К примеру, пусть $\mathcal{F} = \mathcal{F}_\sigma$ — максимальный обобщенный флаг, совместимый с базисом E. В этом случае на E имеется два линейных порядка: первый порядок $\leqslant_B$ отвечает расщепляющей борелевской подгруппе B, а второй порядок $\leqslant_P$ — расщепляющей параболической подгруппе $P = P_{\mathcal{F}}$, т.е.

$$F'_e = \langle e' \in E \mid e' <_P e\rangle_{\mathbb{C}},\ F''_e = \langle e' \in E \mid e' \leqslant_P e\rangle_{\mathbb{C}}.$$

Из теоремы 5.4 известно, что инд-подмногообразия Шуберта X_σ в $\mathcal{F}\ell(\mathcal{F}, E)$ нумеруются элементами $W\sigma_0$, где $\sigma_0 : E \to \mathcal{A}$ — сюръекция, соответствующая обобщенному флагу $\mathcal{F} = \mathcal{F}_{\sigma_0}$. Поскольку здесь $\mathcal{F}$ максимален, $\mathcal{A} = E$ и σ_0 является биекцией, так что если $\sigma \in W\sigma_0$, то $\sigma \in W$. Мы знаем также, что для $\sigma \in W$

$$\dim X_\sigma = n_B^P(\sigma) = \#\{(e, e') \in E \mid e <_B e',\ \sigma(e) >_P \sigma(e')\}.$$

Из теоремы 5.9 и из конечномерного критерия вытекает, что если $\mathcal{F}_0$ является флагом или $\mathcal{F}$ является флагом с условием $\dim F''_{\sigma,\alpha}/F'_{\sigma,\alpha} < \infty$ для $\{0\} \neq F'_{\sigma,\alpha} \subset F''_{\sigma_\alpha} \neq V$, то инд-подмногообразие Шуберта X_σ особо тогда и только тогда, когда существуют e_1, e_2, e_3, $e_4 \in E$, для которых $e_1 <_B e_2 <_B e_3 <_B e_4$ и

$$\sigma(e_3) <_P \sigma(e_4) <_P \sigma(e_1) <_P \sigma(e_2) \quad \text{или} \quad \sigma(e_4) <_P \sigma(e_2) <_P \sigma(e_3) <_P \sigma(e_1).$$

В частности, если базис E допускает бесконечно много таких попарно непересекающихся четверок e_1, e_2, e_3, $e_4 \in E$, что $e_1 <_B e_2 <_B e_3 <_B e_4$ и, к примеру, $\sigma(e_3) <_P \sigma(e_4) <_P \sigma(e_1) <_P \sigma(e_2)$, то для всех σ инд-подмногообразия Шуберта X_σ будут особы. Следовательно, существуют пары $(B, \mathcal{F})$, для которых все инд-подмногообразия Шуберта соответствующего инд-многообразия обобщенных флагов особы.

5.4. Заключительные замечания. Главное отличие от конечномерного случая заключается в том, что инд-многообразие обобщенных флагов G/P допускает много несопряженных разложений Шуберта. Это является следствием того факта, что подгруппы Бореля B, орбиты которой на G/P задают разложение Шуберта, не сопряжены относительно группы автоморфизмов группы G. В частности, у бесконечномерного проективного пространства есть как разложение Шуберта у которого все клетки бесконечномерны, так и разложение Шуберта, у которого все клетки конечномерны. Отметим, что в конечномерном случае, помимо теоретико-групповой точки зрения на разложения Шуберта, который мы здесь придерживаемся, существует чисто геометрический подход, при котором фиксируется максимальный флаг и изучается, насколько данный флаг (иначе говоря, точка на G_n/P_n) от него отличается. Это подход применим и рассматриваемом нами случае: нужно выбрать максимальный флаг, неподвижный относительно действия группы B (возможно, содержащий G/P как подцепь). Построенная таким образом теория будет эквивалентна изложенной выше.

6. Векторные расслоения конечного ранга

В этом разделе рассматриваются две связанные темы. Сначала обсуждается бесконечномерный аналог теоремы Ботта—Бореля—Вейля. Также приведен критерий проективности для G/P: инд-многообразие G/P проективно в том и только том случае, когда $P = P_{\mathcal{F}}$, где $\mathcal{F}$ — это флаг. Далее, теорема Барта—Ван де Вена—Тюрина—Сато гласит, что любое векторное расслоение конечного ранга на $\mathbb{P}^\infty$ изоморфно прямой сумме линейных расслоений. Приведено обобщение этого результата для широкого класса инд-многообразий, в частности, для инд-грассманиана $\mathrm{Gr}(\infty)$. Материал этого раздела взят из [2, 19].

6.1. Теорема Ботта—Бореля—Вейля. Напомним сначала классическую теорему Ботта—Бореля—Вейля. Здесь будем предполагать, что G_n — связная односвязная простая алгебраическая группа, B_n — ее борелевская подгруппа и P_n — параболическая подгруппа, содержащая B_n. Более точно, $G_n = \mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$, $\mathrm{Spin}_n(\mathbb{C})$ или $\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{C})$. (Группа $\mathrm{Spin}_n(\mathbb{C})$ — это универсальное накрытие группы $\mathrm{SO}_n(\mathbb{C})$, и в этом разделе вместо $\mathrm{SO}_n(\mathbb{C})$ будем использовать $\mathrm{Spin}_n(\mathbb{C})$.) Хорошо известно, что группа Пикара $\mathrm{Pic}\ G_n/B_n$ отождествляется с решеткой целочисленных весов алгебры $\mathfrak{g}_n$ с помощью соответствия $\lambda \mapsto \mathcal{O}(\lambda)$, где $\mathcal{O}(\lambda)$ — линейное расслоение, индуцированное характером группы B_n, ограничение которого на алгебру Ли $\mathfrak{h}_n$ максимального тора H_n, содержащегося в B_n, совпадает с λ. В частности, каждое линейное расслоение на G_n/B_n допускает каноническую G_n-линеаризацию. Пусть $\lambda \in \mathfrak{h}_n^*$ — целочисленный вес; рассмотрим тогда вес $\lambda+\rho$, где ρ — полусумма положительных корней группы G_n относительно B_n. Если $\lambda+\rho$ регулярен, то найдется такой единственный элемент w_λ группы Вейля W_n группы G_n, что $w_\lambda(\lambda+\rho)$ доминантен. Следующая теорема вычисляет группы когомологий $H^q(G_n/B_n, \mathcal{O}(-\lambda))$ для всех целочисленных весов λ (в изоморфизме (7) ниже удобнее рассматривать $\mathcal{O}(-\lambda)$ вместо $\mathcal{O}(\lambda)$).

Теорема 6.1 (теорема Ботта—Бореля—Вейля)**.** *Пусть λ — целочисленный вес. Если $\lambda+\rho$ не регулярен, то*
$$H^q(G_n/B_n, \mathcal{O}(-\lambda)) = 0 \quad \text{при } q = 0, \ldots, \dim G_n/B_n,$$
т.е. пучок, соответствующий линейному расслоению $\mathcal{O}(\lambda)$, ацикличен. Если $\lambda+\rho$ регулярен, то
$$H^q(G_n/B_n, \mathcal{O}(-\lambda)) = 0 \quad \text{при } q \neq l(w_\lambda),$$
где $l(w_\lambda)$ — длина элемента w_λ относительно простых корней группы B_n. Если же $q = l(w_\lambda)$, то существует канонический G_n-изоморфизм
$$H^q(G_n/B_n, \mathcal{O}(-\lambda)) \cong V(\mu)^*, \tag{7}$$
где $\mu = w(\lambda+\rho)-\rho$ и $V(\mu)$ — простой G_n-модуль старшего веса μ.

Эта теорема позволяет также вычислять когомологии произвольного векторного расслоения конечного ранга на G_n/P_n, которое просто как линеаризованное векторное G_n-расслоение, т.е. индуцировано с простого конечномерного P_n-модуля. Отметим, что любое такое расслоение имеет вид $p_*\mathcal{O}(\lambda)$ для подходящего веса λ, где
$$p\colon G_n/B_n \to G_n/P_n$$
— канонический эпиморфизм.

Теорема 6.2. *Для любого λ такого, что $p_*\mathcal{O}(-\lambda) \neq 0$, существует канонический изоморфизм G_n-модулей*
$$H^q(G_n/B_n, \mathcal{O}(-\lambda)) \cong H^q(G_n/P_n, p_*\mathcal{O}(-\lambda))$$
при всех $q \geqslant 0$.

Теорема 6.1 была доказана Р. Боттом в [10] (доказательство в случае $q=0$ принадлежит А. Борелю и А. Вейлю). Альтернативное доказательство (которое мы горячо рекомендуем читателю) было дано М. Демазюром в [14] и затем упрощено им в [15]. Заметим, что группа Пикара инд-многообразия G/P естественно изоморфна проективному пределу $\varprojlim \mathrm{Pic}\ G_n/P_n$ соответствующих групп Пикара. Более того, группы $\mathrm{Pic}\ \mathcal{F}\ell(\mathcal{F}, E)$ и $\mathrm{Pic}\ \mathcal{F}\ell(\mathcal{F}, \beta, E)$ естественно изоморфны соответствующим группам целочисленных весов алгебры Ли инд-группы $P = P_{\mathcal{F}}$. В самом деле, хорошо известно, что
$$\mathrm{Pic}\,(G_n/P_n) \cong \mathrm{Hom}(P_n, \mathbb{C}^\times),$$
где $\mathrm{Hom}(P_n, \mathbb{C}^\times)$ обозначает группу морфизмов из $P_{\mathcal{F}}$ в мультипликативную группу поля $\mathbb{C}$. Непосредственная проверка показывает, что диаграмма
$$\begin{tikzcd} \mathrm{Pic}\,(G_{n+1}/P_{n+1}) \arrow[r, "\cong"] \arrow[d] & \mathrm{Hom}(P_{n+1}, \mathbb{C}^\times) \arrow[d] \\ \mathrm{Pic}\,(G_n/P_n) \arrow[r, "\cong"] & \mathrm{Hom}(P_n, \mathbb{C}^\times) \end{tikzcd}$$

коммутативна. Таким образом,

$$\operatorname{Pic} \mathcal{F}\ell(\mathcal{F}, E) = \varprojlim \operatorname{Pic} G_n/P_n = \varprojlim \operatorname{Hom}(P_n, \mathbb{C}^\times) = \operatorname{Hom}(P_\mathcal{F}, \mathbb{C}^\times),$$

а последняя группа есть не что иное, как группа целочисленных весов алгебры Ли группы $P_\mathcal{F}$. (Детали см. в [16, Proposition 7.2] и [19, Proposition 15.1].)

Обратимся теперь к специальному случаю $P = B$ для произвольной расщепляющей борелевской подгруппы B в G, содержащей фиксированную подгруппу Картана $H = \varinjlim H_n$, где H_n — подгруппа Картана в G_n для каждого $n \geqslant 1$. Пусть $\mathfrak{h}$ — алгебра Ли группы H. Вес $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ называется *целочисленным*, если для каждого $n \geqslant 1$ его ограничение $\lambda|_{\mathfrak{h}_n}$ является целочисленным весом алгебры $\mathfrak{g}_n$, где $\mathfrak{h}_n$ — алгебра группы H_n. Целочисленный вес $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ называется *регулярным*, если его ограничения $\lambda|_{\mathfrak{h}_n}$ регулярны для всех n.

Пусть λ — целочисленный вес алгебры $\mathfrak{g}$. Тогда, используя наше описание группы Пикара G/B, видим, что линейные расслоения $\mathcal{O}(\lambda|_{\mathfrak{h}_n})$ образуют корректно определенную проективную систему. Ее проективный предел будем обозначать через $\mathcal{O}(\lambda)$. Обратимся теперь к группам когомологий $H^q(G/B, \mathcal{O}(-\lambda))$. Первый естественный вопрос таков: будет ли группа $H^q(G/B, \mathcal{O}(-\lambda))$ проективным пределом групп $H^q(G_n/B_n, \mathcal{O}(-\lambda|_{\mathfrak{h}_n}))$? Утвердительный ответ на этот вопрос можно получить, используя сформулированное ниже условие Миттаг-Леффлера. Пусть $X = \varinjlim X_n$ — инд-многообразие и

$$\ldots \overset{\zeta_{n+1}}{\to} \mathcal{F}_n \overset{\zeta_n}{\to} \mathcal{F}_{n-1} \overset{\zeta_{n-1}}{\to} \ldots \overset{\zeta_2}{\to} \mathcal{F}_1 \to 0$$

является проективной системой таких пучков $\mathcal{O}_X$-модулей, что носитель $\mathcal{F}_n$ содержится в X_n. Предположим, что для некоторого $q \geqslant 0$ проективная система векторных пространств

$$\ldots \overset{\zeta^q_{n+1}}{\to} H^q(X, \mathcal{F}_n) \overset{\zeta^q_n}{\to} H^q(X, \mathcal{F}_{n-1}) \overset{\zeta_{n-1}}{\to} \ldots \to 0$$

удовлетворяет тому условию, что для каждого n фильтрация векторного пространства $H^q(X, \mathcal{F}_n)$ подпространствами $\zeta_m \circ \ldots \circ \zeta_{n+1}(H^q(X, \mathcal{F}_m))$ с какого-либо момента стабилизируется (условие Миттаг-Леффлера). Тогда существует канонический изоморфизм

$$H^q(X, \varprojlim \mathcal{F}_n) \cong \varprojlim H^q(X, \mathcal{F}_n). \tag{8}$$

Более того, предположим, что инд-группа $G' = \varinjlim G'_n$ действует на X (в категории инд-многообразий) так, что G'_n действует на X_n. Если пучки $\mathcal{F}_n$ — это G'_n-пучки, а морфизмы ζ_n — это морфизмы G'_n-пучков, то изоморфизм (8) является изоморфизмом G'-модулей. Стандартная ссылка для условия Миттаг-Леффлера — [23] (см. также [19]). В нашем случае условие Миттаг-Леффлера выполняется по очевидным причинам, поскольку инд-многообразия $X_n = G_n/B_n$ компактны и, следовательно, векторные пространства $H^q(G_n/B_n, \mathcal{O}(-\lambda|_{\mathfrak{h}_n}))$ конечномерны. Следующий естественный вопрос таков: для каких λ и q группы когомологий $H^q(G/B, \mathcal{O}(-\lambda))$ будут ненулевыми? Ответ дается следующий теоремой. Пусть $W = \varinjlim W_n$ — группа, определенная в п. 5.1, где также для любого $w \in W$ была определена $\ell_B(w)$. Будем говорить, что целочисленный вес ν *B-доминантен*, если его ограничения $\nu|_{\mathfrak{h}_n}$ B_n-доминантны для всех n. Если ν — доминантный целочисленный вес, то конечномерные G_n-модули $V(\nu|_{H_n})$ образуют индуктивную систему, и G-модуль, равный соответствующему индуктивному пределу $\varinjlim V(\nu|_{\mathfrak{h}_n})$, обозначается через $V(\nu)$.

Теорема 6.3. *Группа $H^q(G/B, \mathcal{O}(-\lambda))$ отлична от нуля тогда и только тогда, когда существует такой $w \in W$ длины $\ell_B(w) = q$, что $\mu = w(\lambda) - \sum_{\substack{\alpha\in\Phi^+,\\ w(\alpha)\notin\Phi^+}} \alpha$ является доминантным целочисленным весом. В этом случае*

$$H^q(G/B, \mathcal{O}(-\lambda)) \cong V(\mu)^*.$$

Заметим, что в конечномерном случае

$$w(\lambda) - \sum_{\substack{\alpha\in\Phi^+,\\ w(\alpha)\notin\Phi^+}} \alpha = w(\lambda + \rho) - \rho,$$

так что это условие на μ полностью аналогично конечномерному условию. Также легко видеть, что если такая пара (w, q) существует, то ровно одна, поэтому у $\mathcal{O}(-\lambda)$ есть не более одной ненулевой группы когомологий. Неформально можно сказать, что $\mathcal{O}(-\lambda)$ ацикличен, если только вес λ не является почти доминантным, т.е. если не существует доминантного веса μ вида

$$\mu = w(\lambda) - \sum_{\substack{\alpha\in\Phi^+,\\ w(\alpha)\notin\Phi^+}} \alpha$$

для некоторого $w \in W$. С этой точки зрения «большинство» пучков вида $\mathcal{O}(-\lambda)$ ациклично. Теорема 6.3 следует из более общего результата, доказанного в [19]. Более того, теорема 6.3 — это непосредственное следствие [19, Proposition 14.1]. Отметим, что в [19] рассматриваются более общие G-линейные расслоения на G/P. Эти расслоения индуцированы с (возможно, бесконечномерных) про-рациональных P-модулей, которые могут быть, а могут и не быть двойственны P-модулям старшего веса. Как следствие, теория, построенная в [19], аналогична изучению расслоений вида $p_*\mathcal{O}(-\lambda)$, как в теореме 6.2. Отметим, что в недавней статье [24] изучены когомологии эквивариантных векторных расслоений конечного ранга на G/P. В конечномерном случае каждое линейное расслоение $\mathcal{O}(-\lambda)$ на G_n/P_n, для которого

$$H^0(G_n/P_n, \mathcal{O}(-\lambda)) \neq 0,$$

индуцирует морфизм из G_n/P_n в проективное пространство $\mathbb{P}(V(\lambda))$. Этот морфизм является вложением, если вес λ регулярен. Аналогичное утверждение верно для G/P, а именно, если выполняется условие

$$H^0(G/P, \mathcal{O}(-\lambda)) \neq 0,$$

то $\mathcal{O}(\lambda)$ индуцирует морфизм j_λ из G/P в проективное инд-пространство $\mathbb{P}(V(\lambda))$. Однако, не для всех P существует такое линейное расслоение $\mathcal{O}(-\lambda)$, что λ регулярен и B-доминантен хоть для какой-нибудь борелевской подгруппы B, содержащейся в P. Точный результат в этом направлении дается следующей теоремой (см. [19, Sec. 15]).

Теорема 6.4. *Морфизм j_λ является вложением тогда и только тогда, когда λ — регулярный доминантный вес для некоторой борелевской подгруппы $B \subset P$. Такой вес λ существует в том и только том случае, когда $P = P_{\mathcal{F}}$ для некоторого E-совместимого флага $\mathcal{F}$ в V. Инд-многообразие G/P проективно тогда и только тогда, когда $P = P_{\mathcal{F}}$, где $\mathcal{F}$ — такой же, как выше.*

Как следствие, большинство инд-многообразий $\mathcal{F}\ell(\mathcal{F}, E)$ не проективны, так как условие «быть флагом» на $\mathcal{F}$ весьма ограничительно.

6.2. Векторные расслоения. Классический результат Г. Биркгофа и А. Гротендика гласит, что каждое векторное расслоение (конечного ранга) на $\mathbb{P}^1$ изоморфно прямой сумме линейных расслоений $\mathcal{O}(n)$, $n \in \mathbb{Z}$. При $n \geqslant 2$ классификация векторных расслоений конечного ранга на $\mathbb{P}^n$ остается незавершенной. С другой стороны, замечательная теорема Барта—Ван де Вена—Тюрина—Сато утверждает, что каждое расслоение конечного ранга на инд-многообразии $\mathbb{P}^\infty$ изоморфно прямой сумме линейных расслоений. Это было установлено В. Бартом и А. Ван де Веном для расслоений ранга 2 в [7] и доказано А. Н. Тюриным в [5] и Е. Сато в [35] для всех расслоений конечного ранга. Здесь мы приводим результаты из [2], которые дают достаточные условия на локально полное линейное инд-многообразие X, гарантирующие выполнения теоремы Барта—Ван де Вена—Тюрина—Сато на X. Затем мы предъявляем класс инд-многообразий обобщенных флагов, удовлетворяющих этим достаточным условиям. Пусть инд-многообразие X является индуктивным пределом цепи вложений

$$X_1 \overset{\varphi_1}{\hookrightarrow} X_2 \overset{\varphi_2}{\hookrightarrow} \ldots \overset{\varphi_{n-1}}{\to} X_n \overset{\varphi_n}{\hookrightarrow} X_{n+1} \overset{\varphi_{n+1}}{\hookrightarrow} \ldots$$

полных алгебраических многообразий (такие инд-многообразия называют *локально полными*). Через

$$\mathcal{O}_X = \varprojlim \mathcal{O}_{X_n}$$

обозначаем *структурный пучок* инд-многообразия X.

Определение 6.5. *Векторное расслоение Q ранга $r \in \mathbb{Z}_{>0}$ на X* — это проективный предел $Q = \varprojlim Q_n$ проективной системы векторных расслоений Q_n ранга r на X_n, т.е. системы векторных расслоений Q_n вместе с фиксированными изоморфизмами

$$\psi_n : Q_n \to \varphi_n^* Q_{n+1}.$$

(Мы рассматриваем только векторные расслоения конечного ранга.) Здесь и ниже φ^* обозначает обратный образ векторного расслоения при морфизме φ.

Инд-многообразие X называют *линейным* (ср. п. 3.1), если для достаточно большого n индуцированные гомоморфизмы групп Пикара

$$\varphi_n^* : \mathrm{Pic}\ X_{n+1} \to \mathrm{Pic}\ X_n$$

являются эпиморфизмами. Любое инд-многообразие обобщенных флагов линейно. Чтобы сформулировать основной результат этого раздела, потребуются три следующих технических условия. Пусть сначала $X = \varinjlim X_n$ — линейное инд-многообразие, у которого $\mathrm{Pic}\ X_n$ — свободная абелева группа для всех n. Предположим, что существуют такие конечное или счетное множество Θ_X и семейство

$$\{L_i = \varprojlim L_{i,n}\}_{i \in \Theta_X}$$

нетривиальных линейных расслоений на X, что для каждого n имеем $L_{i,n} \cong \mathcal{O}_{X_n}$ для всех индексов, кроме конечного числа $i_1(n), \dots, i_{j(n)}(n)$, причем образы $L_{i_1(n),n}, \dots, L_{i_{j(n)}(n),n}$ в $\mathrm{Pic}\ X_n$ образуют базис группы $\mathrm{Pic}\ X_n$. В этом случае $\mathrm{Pic}\ X$ изоморфна прямому произведению бесконечных циклических групп, образующие которых — образы L_i. Обозначим через $\bigotimes\limits_{i \in \Theta_X} L_i^{\otimes a_i}$ линейное расслоение на X, ограничение которого на X_n равно

$$\bigotimes_{i \in \Theta_X} L_{i,n}^{\otimes a_i} = \bigotimes_{k=1}^{j(n)} L_{i_k(n),n}^{\otimes a_{i_k(n)}}.$$

Будем говорить, что X *удовлетворяет условию* L, если, помимо указанных выше условий,

$$H^1(X_n, \bigotimes_{i \in \Theta_X} L_{i,n}^{\otimes a_i}) = 0$$

для любого $n \geqslant 1$, если какое-либо a_i отрицательно.

Предположим, что X удовлетворяет условию L. Пусть $i \in \Theta_X$; тогда гладкая рациональная кривая $C \cong \mathbb{P}^1$ на X называется *проективной прямой i-го семейства на X* (или просто *прямой i-го семейства*), если

$$L_j|_C \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(\delta_{i,j}) \quad \text{для всех } j \in \Theta_X,$$

где $\delta_{i,j}$ — обычная дельта Кронекера. Через B_i мы обозначаем множество всех проективных прямых i-го семейства на X. Оно имеет естественную структуру инд-многообразия: $B_i = \varinjlim B_{i,n}$, где

$$B_{i,n} = \{C \in B_i \mid C \subset X_n\}.$$

Для каждой точки $x \in X$ подмножество

$$B_i(x) = \{C \in B_i \mid C \ni x\}$$

несет индуцированную структуру инд-многообразия. Предположим также, что для любого $i \in \Theta_X$ существует инд-многообразие Π_i, являющееся индуктивным пределом цепи вложений

$$\Pi_{i,1} \overset{\pi_{i,1}}{\hookrightarrow} \Pi_{i,2} \overset{\pi_{i,2}}{\hookrightarrow} \dots \overset{\pi_{i,n-1}}{\hookrightarrow} \Pi_{i,n} \overset{\pi_{i,n}}{\hookrightarrow} \Pi_{i,n+1} \overset{\pi_{i,n+1}}{\hookrightarrow} \dots,$$

где точки $\Pi_{i,n}$ — это проективные подпространства $\mathbb{P}^{m_n}$ в $B_{i,n}$, вместе с линейными вложениями

$$\mathbb{P}^{m_n} \hookrightarrow \mathbb{P}^{m_{n+1}} = \pi_{i,n}(\mathbb{P}^{m_n}),$$

индуцированными вложениями $B_{i,n} \hookrightarrow B_{i,n+1}$, так что каждая точка Π_i рассматривается как проективное инд-подпространство $\mathbb{P}^\infty = \varinjlim \mathbb{P}^{m_n}$ в B_i. Для любой $x \in X$ рассмотрим следующие условия:

(A.i) для каждого такого $n \geqslant 1$, что $x \in X_n$, любой нетривиальный пучок $L_{i,n}$ определяет морфизм $\psi_{i,n} : X_n \to \mathbb{P}^{r_{i,n}} = \mathbb{P}(H^0(X_n, L_{i,n})^*)$, который изоморфно отображает семейство прямых $B_{i,n}(x)$ на подсемейство прямых в $\mathbb{P}^{r_{i,n}}$, проходящих через точку $\psi_{i,n}(x)$;

(A.ii) многообразие $\Pi_{i,n}(x) = \{\mathbb{P}^{m_n} \in \Pi_{i,n} \mid \mathbb{P}^{m_n} \subset B_{i,n}(x)\}$ связно для любого $n \geqslant 1$;

(A.iii) проективные инд-подпространства $\mathbb{P}^\infty \in \Pi_i(x) = \varinjlim \Pi_{i,n}(x)$ заполняют все $B_i(x)$;

(A.iv) для любого $d \in \mathbb{Z}_{>0}$ существует такое $n_0(d) \in \mathbb{Z}_{>0}$ такое, что для любого d-мерного многообразия Y и любого $n \geqslant n_0(d)$ всякий морфизм $\Pi_{i,n}(x) \to Y$ постоянен.

В частности, (A.ii) и (A.iii) влекут за собой, что многобразия Π_{im}, B_{im}, $B_{im}(x)$ связны. Если все эти условия выполняются для всех $x \in X$, будем говорить, что X *удовлетворяет условию* A. Наконец, предположим, что X удовлетворяет сформулированным выше условиям L и A. Векторное расслоение Q на X называется *B_i-однородным*, если для любой проективной прямой $\mathbb{P}^1 \in B_i$ на X ограничение расслоения $Q|_{\mathbb{P}^1}$ изоморфно $\bigoplus_{j=1}^{\operatorname{rk} Q} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(k_j)$ для каких-либо целых чисел k_j, не зависящих от выбора $\mathbb{P}^1$. Если, кроме того, все $k_j = 0$, то Q называется *B_i-линейно тривиальным.* Мы называем Q *однородным* (соответственно, *линейно тривиальным*), если Q является B_i-однородным (соответственно, B_i-линейно тривиальным) для всех $i \in \Theta_X$. Будем говорить, что X *удовлетворяет условию* T, если любое линейно тривиальное векторное расслоение на X тривиально. Сформулируем основной результат этого раздела.

Теорема 6.6 (см. [2, Theorem 1])**.** *Пусть Q — векторное расслоение на линейном инд-многообразии X.*

(i) *Если X удовлетворяет условиям* L *и* A *для каких-либо фиксированных линейных расслоений $\{L_i\}_{i\in\Theta_X}$ и соответствующих семейств $\{B_i\}_{i\in\Theta_X}$ проективных прямых на X, то у Q есть фильтрация векторными подрасслоениями*

$$0 = Q_0 \subset Q_1 \subset \ldots \subset Q_t = Q$$

с однородными фактор-расслоениями Q_k/Q_{k-1}, $1 \leqslant k \leqslant t$.

(ii) *Если, кроме того, X удовлетворяет условию* T*, то указанная выше фильтрация Q расщепляется, а соответствующие факторы имеют вид*

$$Q_k/Q_{k-1} \cong \operatorname{rk}(Q_k/Q_{k-1}) \bigotimes_{i\in\Theta_X} L_i^{\otimes a_{i,k}}$$

для каких-либо $a_{i,k} \in \mathbb{Z}$, $1 \leqslant k \leqslant t$. В частности, Q изоморфно прямой сумме линейных расслоений.

Если X — один из инд-грассманианов $\operatorname{Gr}(k)$ или $\operatorname{Gr}^\beta(k,\infty)$, рассмотренных в разделе 3, то на X существует тавтологическое расслоение S ранга $\operatorname{rk} S = k$. При $k \geqslant 2$ это расслоение не изоморфно прямой сумме линейных расслоений, поэтому теорема Барта—Ван де Вена—Тюрина—Сато не может выполняться. С другой стороны, верна следующая теорема.

Следствие 6.7.

1) Предположим, что $X = \operatorname{Gr}(\infty)$, $\operatorname{Gr}^\beta(\infty,k)$, $\operatorname{Gr}_0^\beta(\infty,k)$ или $\operatorname{Gr}_1^\beta(\infty,k)$. Тогда любое векторное расслоение на X изоморфно $\bigoplus_i \mathcal{O}_X(k_i)$ для некоторых $k_i \in \mathbb{Z}$.

2) Пусть $X = \mathcal{F}\ell(\mathcal{F},E)$, где $\mathcal{F}$ — такой флаг в V, что $\operatorname{codim}_{F''} F' = \infty$ для всех $(F',F'') \in \mathcal{F}^\dagger$. Тогда любое векторное расслоение на X изоморфно прямой сумме линейных расслоений.

Доказательство. (i) Из нашего описания $\operatorname{Pic} X$ вытекает, что $\operatorname{Pic} X \cong \mathbb{Z}$ и что любое линейное расслоение на X изоморфно $\mathcal{O}_X(m)$, где, по определению, $\mathcal{O}_X(m)|_{X_n} \cong \mathcal{O}_{X_n}(m)$. Поскольку $\mathcal{O}_X(1)$ очень обилен, условие (A.i) выполняется. В [2, Sec. 4] проверено, что условия (A.ii)–(A.iv) тоже выполняются, поэтому X удовлетворяет условию A. То, что X удовлетворяет условию T, также проверено в [2, Sec. 4].

(ii) В [2, Sec. 6.3] показано, что X удовлетворяет условиям L, A, T. □

Характеризация векторных расслоений на произвольных инд-многообразиях обобщенных флагов остается неизвестной. Тем не менее, И. Пенковым была выдвинута следующая гипотеза: если $\mathcal{F}$ — максимальный обобщенный флаг, а Q — произвольное векторное расслоение конечного ранга на $\mathcal{F}\ell(\mathcal{F}, E)$, то Q допускает фильтрацию подрасслоениями, последовательные факторраслоения которой линейны. Заметим также, что в [3] изучены векторные расслоения на так называемых скрученных инд-грассманианах. Скрученные инд-грассманианы не являются инд-многообразиями обобщенных флагов: они получаются как индуктивные пределы $\varinjlim X_n$ грассманианов относительно нелинейных вложений

$$X_n \hookrightarrow X_{n+1}.$$

В [3] доказано, что любое векторное расслоение конечного ранга на любом скрученном инд-грассманиане тривиально.

7. Орбиты вещественных форм

В этом разделе изучается структура G^0-орбит на инд-многообразии $\mathcal{F}\ell = \mathcal{F}\ell(\mathcal{F}, E)$ для вещественной формы G^0 группы $G = \mathrm{SL}_\infty(\mathbb{C})$. Изложение следует статье [29]. В конечномерном случае изучение орбит вещественных форм полупростых комплексных групп Ли на их флаговых многообразиях уходит корнями в линейную алгебру. Теорема Витта гласит, что два подпространства W_1, W_2 конечномерного векторного пространства W с заданной на нем невырожденной билинейной (симметрической или кососимметрической) формой или невырожденной эрмитовой формой изометричны внутри W (т.е. переводятся друг в друга изометрией пространства W) тогда и только тогда, когда они изометричны. Для эрмитова пространства W это можно рассматривать как утверждение об орбитах унитарной группы $U(W)$ на комплексном грассманиане $\mathrm{Gr}(k, W)$, где

$$k = \dim W_1 = \dim W_2.$$

Точнее говоря, орбиты группы $U(W)$ на $\mathrm{Gr}(k, W)$ параметризуются всевозможными сигнатурами эрмитовых форм (возможно, вырожденных) на k-мерных подпространствах пространства W. Общая теория орбит вещественной формы G_n^0 (конечномерной) полупростой комплексной группы Ли G_n на флаговом многообразии G_n/P_n была развита Дж. А. Вольфом в [36, 37]. Она стала стандартным инструментом в полупростой теории представлений и комплексной алгебраической геометрии. Дальнейшим продвижением стала теория пространств циклов, разработанная А. Хаклберри и Дж. А. Вольфом (см. [20]).

Основной результат этого раздела гласит, что пересечение произвольной G^0-орбиты на G/P с конечномерным флаговым многообразием G_n/P_n из данного исчерпания G/P подмногообразиями G_n/P_n, $n \to \infty$, является одной G_n^0-орбитой. Это означает, что отображение

$$\{G_n^0\text{-орбиты на } G_n/P_n\} \to \{G_{n+1}^0\text{-орбиты на } G_{n+1}/P_{n+1}\}$$

инъективно. Используя это свойство, мы можем ответить на следующие вопросы.

(1) Когда число G^0-орбит на G/P конечно?
(2) Когда данная G^0-орбита на G/P замкнута?
(3) Когда данная G^0-орбита на G/P открыта?

Ответы зависят не только от параболической подгруппы $P \subset G$, но и от типа вещественной формы. Например, если $P = B$ — верхнетреугольная борелевская инд-подгруппа в $\mathrm{SL}_\infty(\mathbb{C})$ с положительными корнями

$$\{\varepsilon_i - \varepsilon_j\}, \quad i, j \in \mathbb{Z}_{>0},\ i < j,$$

то на G/B нет замкнутой $\mathrm{SU}(\infty, \infty)$-орбиты и нет открытой $\mathrm{SL}(\infty, \mathbb{R})$-орбиты.

7.1. Конечномерный случай. Пусть W — конечномерное векторное пространство. Напомним, что *вещественной формой* на W называется антилинейная инволюция τ на W. Множество

$$W^0 = \{v \in W \mid \tau(v) = v\}$$

является *вещественной формой* пространства W, т.е. W^0 — это вещественное подпространство в W, для которого

$$\dim_{\mathbb{R}} W^0 = \dim_{\mathbb{C}} W$$

и $\mathbb{C}$-линейная оболочка $\langle W^0 \rangle_{\mathbb{C}}$ которого совпадает с W. Любая вещественная форма W^0 пространства W однозначно определяет вещественную структуру τ на W, для которой W^0 — это множество неподвижных точек τ. *Вещественной формой* комплексной конечномерной алгебры Ли $\mathfrak{g}$ называется ее вещественная подалгебра Ли $\mathfrak{g}^0$, являющаяся вещественной формой $\mathfrak{g}$ как комплексного векторного пространства. Пусть G_n — связная комплексная полупростая алгебраическая группа, а G_n^0 — ее *вещественная форма*, т.е. G_n^0 — это вещественная замкнутая алгебраическая подгруппа в G_n, алгебра Ли $\mathfrak{g}_n^0$ которой является вещественной формой алгебры Ли $\mathfrak{g}_n$ группы G_n. Обозначим через P_n произвольную параболическую подгруппу в G_n, а через G_n/P_n — соответствующее многообразие флагов. Группа G_n^0 естественно действует на G_n/P_n. В [36] (см. [36, Theorems 2.6, 3.3, 3.6, Corollary 3.4]) доказаны следующие факты о структуре G_n^0-орбит на G_n/P_n (здесь мы используем обычную топологию гладкого многообразия на G_n/P_n).

Теорема 7.1. *Пусть G_n, P_n, G_n^0 — такие же, как выше.*
(i) *Каждая G_n^0-орбита является вещественным гладким подмногообразием в G_n/P_n.*
(ii) *Число G_n^0-орбит на G_n/P_n конечно.*
(iii) *Объединение открытых G_n^0-орбит плотно в G_n/P_n.*
(iv) *На G_n/P_n есть единственная замкнутая орбита Ω.*
(v) *Выполняется неравенство $\dim_{\mathbb{R}}\Omega \geqslant \dim_{\mathbb{C}} G_n/P_n$.*

Объясним, как эта теорема связана с теоремой Витта в случае эрмитовой формы. Пусть W — n-мерное комплексное векторное пространство, а $G_n = \mathrm{SL}(W)$. Зафиксируем невырожденную эрмитову форму ω сигнатуры $(p, n-p)$ на пространстве W и обозначим через $G_n^0 = \mathrm{SU}(W,\omega)$ группу всех линейных операторов на W с определителем 1, которые сохраняют форму ω. Тогда G_n^0 является вещественной формой группы G_n. Для любого $k \leqslant n$ группа G_n естественно действует на грассманиане $\mathrm{Gr}(k,W)$ всех k-мерных комплексных подпространств пространства W. Каждому $U \in \mathrm{Gr}(k,W)$ можно поставить в соответствие его *сигнатуру* $s(U) = (a,b,c)$, где ограничение формы $\omega|_U$ имеет ранг $a+b$ с a положительными и b отрицательными квадратами, а c равно размерности ядра ограничения формы на U. По теореме Витта, два подпространства U_1, $U_2 \in \mathrm{Gr}(k,W)$ лежат на одной G_n^0-орбите тогда и только тогда, когда их сигнатуры совпадают. Более того, несложно проверить следующую формулу для числа $|\mathrm{Gr}(k,W)/G_n^0|$ орбит группы G_n^0 на $\mathrm{Gr}(k,W)$. Положим $l = \min\{p,\ n-p\}$. Тогда

$$|\mathrm{Gr}(k,W)/G_n^0| = \begin{cases} (n-k+1)(n-k+2)/2, & \text{если } n-l \leqslant k, \\ (l+1)(l+2)/2, & \text{если } l \leqslant k \leqslant n-l, \\ (k+1)(k+2)/2, & \text{если } k \leqslant l. \end{cases}$$

При этом G_n^0-орбита подпространства $U \in \mathrm{Gr}(k,W)$ открыта тогда и только тогда, когда ограничение формы ω на U невырождено, т.е. когда $c = 0$. Следовательно, число открытых орбит равно $\min\{k+1, l+1\}$. Существует единственная замкнутая G_n^0-орбита Ω на $\mathrm{Gr}(k,W)$, состоящая из всех k-мерных подпространств в W, для которых $c = \min\{k,l\}$ (условие $c = \min\{k,l\}$ максимизирует вырожденность форм $\omega|_U$ на конечномерных подпространствах $U \subset W$). В частности, при $k = p \leqslant n-p$ орбита Ω состоит из всех изотропных k-мерных комплексных подпространств W. Более детально этот случай обсуждается в [36].

7.2. Орбиты вещественных форм как гладкие инд-многообразия. Ниже приведена классификация вещественных форм группы $G = \mathrm{SL}_\infty(\mathbb{C})$, принадлежащая А. Баранову (см. [6]). По определению, вещественная инд-подгруппа G^0 группы G называется ее *вещественной формой*, если G может быть представлено как неубывающее объединение $G = \bigcup \mathcal{G}_n$ таких конечномерных замкнутых в топологии Зарисского подгрупп, что каждая $\mathcal{G}_n$ является полупростой алгебраической группой и $G^0 \cap \mathcal{G}_n$ — вещественная форма группы $\mathcal{G}_n$ для каждого n. Чтобы определить вещественные формы G, выберем базис $\mathcal{E} = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots\}$ в V и такое его исчерпание

$$\mathcal{E} = \bigcup_{n\geqslant 1} \mathcal{E}_n$$

конечными подмножествами, что $V_n = \langle \mathcal{E}_n \rangle_{\mathbb{C}}$ и

$$\langle \mathcal{E}_{n+1} \setminus \mathcal{E}_n \rangle_{\mathbb{C}} = \langle E_{n+1} \setminus E_n \rangle_{\mathbb{C}}$$

для каждого $n \geqslant 1$. Напомним, что вложение $G_n \hookrightarrow G_{n+1}$ задается формулой $\varphi \mapsto \widehat{\varphi}$, где $\widehat{\varphi}(x) = \varphi(x)$ при $x \in V_n$ и $\widehat{\varphi}(e) = e$ при $e \in E \setminus E_n$. Зафиксируем вещественную структуру τ на V, для которой $\tau(\varepsilon) = \varepsilon$ при всех $\varepsilon \in \mathcal{E}$. Тогда каждое конечномерное пространство V_n будет τ-инвариантным. Обозначим через $\mathrm{GL}(V_n, \mathbb{R})$ (соответственно, через $\mathrm{SL}(V_n, \mathbb{R})$) подгруппу всех обратимых (соответственно, имеющих определитель 1) операторов на V_n, определенных над $\mathbb{R}$. Напомним, что линейный оператор на комплексном векторном пространстве с вещественной структурой *определен над* $\mathbb{R}$, если он коммутирует с вещественной структурой, или, что равносильно, если он отображает вещественную форму в нее саму. Для каждого n отображение $\varphi \mapsto \widehat{\varphi}$ задает вложение

$$\mathrm{SL}(V_n, \mathbb{R}) \hookrightarrow \mathrm{SL}(V_{n+1}, \mathbb{R}),$$

поэтому возникает индуктивный предел

$$G^0 = \varinjlim \mathrm{SL}(V_n, \mathbb{R}).$$

Обозначим эту вещественную форму группы G через $\mathrm{SL}(\infty, \mathbb{R})$. Теперь зафиксируем невырожденную эрмитову форму ω на V. Предположим, что ее ограничение $\omega_n = \omega|_{V_n}$ тоже невырожденно при всех n и что $\omega(\varepsilon, V_n) = 0$ при $\varepsilon \in \mathcal{E} \setminus \mathcal{E}_n$. Обозначим через p_n размерность максимального ω_n-положительно определенного подпространства V_n и положим $q_n = \dim V_n - p_n$. Пусть $\mathrm{SU}(p_n, q_n)$ — подгруппа в G_n, состоящая из всех операторов, сохраняющих форму ω_n. Для каждого n отображение $\varphi \mapsto \widehat{\varphi}$ индуцирует вложение

$$\mathrm{SU}(p_n, q_n) \hookrightarrow \mathrm{SU}(p_{n+1}, q_{n+1}),$$

поэтому возникает индуктивный предел

$$G^0 = \varinjlim \mathrm{SU}(p_n, q_n).$$

Если $p_n = p$ при некотором p для всех достаточно больших n (соответственно, если $\lim\limits_{n\to\infty} p_n = \lim\limits_{n\to\infty} q_n = \infty$), то обозначим эту вещественную форму группы G через $\mathrm{SU}(p, \infty)$ (соответственно, через $\mathrm{SU}(\infty, \infty)$). Наконец, зафиксируем *кватернионную структуру* J на V, т.е. такой антилинейный автоморфизм пространства V, что $J^2 = -\mathrm{id}_V$. Предположим, что комплексная размерность пространства V_n четна для каждого $n \geqslant 1$ и что ограничение J_n автоморфизма J на V_n является кватернионной структурой на V_n. Кроме того, предположим, что

$$J(\varepsilon_{2i-1}) = -\varepsilon_{2i},\ \ J(\varepsilon_{2i}) = \varepsilon_{2i-1}$$

при $i \geqslant 1$. Пусть $\mathrm{SL}(V_n, \mathbb{H})$ — подгруппа в G_n, состоящая из всех линейных операторов, коммутирующих с J_n. Тогда при каждом n отображение $\varphi \mapsto \widehat{\varphi}$ индуцирует вложение групп

$$\mathrm{SL}(V_n, \mathbb{H}) \hookrightarrow \mathrm{SL}(V_{n+1}, \mathbb{H});$$

обозначим индуктивный предел через

$$G^0 = \mathrm{SL}(\infty, \mathbb{H}) = \varinjlim \mathrm{SL}(V_n, \mathbb{H}).$$

Эта инд-группа тоже является вещественной формой группы G. Следующий результат вытекает из [6, Theorem 1.4] и [17, Corollary 3.2].

Теорема 7.2. *Если $G = \mathrm{SL}_\infty(\mathbb{C})$, то $\mathrm{SL}(\infty, \mathbb{R})$, $\mathrm{SU}(p, \infty)$, $0 \leqslant p < \infty$, $\mathrm{SU}(\infty, \infty)$, $\mathrm{SL}(\infty, \mathbb{H})$ — это все различные вещественные формы группы G с точностью до изоморфизма.*

Пусть теперь $\mathcal{F}$ — обобщенный флаг, совместимый с базисом E, $\mathcal{F}\ell = \mathcal{F}\ell(\mathcal{F}, E)$ и $\mathcal{F}\ell_n = \mathcal{F}\ell(d_n, V_n)$, где d_n — тип флага $\mathcal{F} \cap V_n$. Тогда $\mathcal{F}\ell = \varinjlim \mathcal{F}\ell_n$, где вложение

$$\iota_n : \mathcal{F}\ell_n \hookrightarrow \mathcal{F}\ell_{n+1}$$

задается формулой (3) (или, эквивалентно, ι_n является композицией вложений, заданных формулой (4); см. п. 2.2). Обозначим через G^0 произвольную вещественную форму группы G (см. теорему 7.2). Группа $G_n = \mathrm{SL}(V_n)$ естественно действует на $\mathcal{F}\ell_n$, и отображение ι_n эквивариантно:

$$g \cdot \iota_n(x) = \iota_n(g \cdot x), \quad g \in G_n \subset G_{n+1}, \quad x \in \mathcal{F}\ell_n.$$

Положим также $G_n^0 = G^0 \cap G_n$. Тогда G_n^0 будет вещественной формой для G_n. До конца раздела мы накладываем на V_n некоторые специальные ограничения для различных вещественных форм, которые сейчас опишем в каждом случае. Пусть $G^0 = \mathrm{SU}(p,\infty)$ или $\mathrm{SU}(\infty,\infty)$. Напомним, что ограничения ω_n фиксированной невырожденной эрмитовой формы ω на подпространства V_n тоже невырождены. С этого момента будем предполагать, что любой вектор $e \in E_{n+1} \setminus E_n$ ортогонален подпространству V_n относительно формы ω_{n+1}. Далее, пусть $G^0 = \mathrm{SL}(\infty,\mathbb{R})$. Здесь будем считать, что m_n нечетны для всех $n \geqslant 1$ и что $\langle E_n\rangle_{\mathbb{R}}$ — вещественная форма пространства V_n. Наконец, при $G^0 = \mathrm{SL}(\infty,\mathbb{H})$ мы будем предполагать, что все m_n четны при $n \geqslant 1$ и что

$$J(e_{2i-1}) = -e_{2i}, \quad J(e_{2i}) = e_{2i-1}$$

для каждого i. Эти дополнительные предположения согласуют выбор вещественной формы G^0 с инд-многообразием $\mathcal{F}\ell$. Сформулируем основной результат этого раздела.

Теорема 7.3. *Если пересечение $\iota_n(\mathcal{F}\ell_n)$ с какой-либо G_{n+1}^0-орбитой непусто, то это пересечение состоит из одной G_n^0-орбиты.*

Доказательство. Доказательство проводится в каждом случае отдельно. Рассмотрим случай $G^0 = \mathrm{SU}(\infty,\infty)$. Доказательство для $G^0 = \mathrm{SU}(p,\infty)$, $0 \leqslant p < \infty$, абсолютно такое же, в то время как для $G^0 = \mathrm{SL}(\infty,\mathbb{R})$ and $\mathrm{SL}(\infty,\mathbb{H})$ доказательство основано на других идеях (см. [29, Theorem 3.1]). Выберем два флага

$$\mathcal{D} = \Big\{\{0\} = D_0 \subset D_1 \subset \ldots \subset D_s = V_n\Big\},$$
$$\mathcal{B} = \Big\{\{0\} = B_0 \subset B_1 \subset \ldots \subset B_s = V_n\Big\}$$

в $\mathcal{F}\ell_n$, для которых $\widetilde{\mathcal{D}} = \iota_n(\mathcal{D})$ и $\widetilde{\mathcal{B}} = \iota_n(\mathcal{B})$ лежат на одной G_{n+1}^0-орбите. Положим

$$\widetilde{\mathcal{D}} = \Big\{\{0\} = \widetilde{D}_0 \subset \widetilde{D}_1 \subset \ldots \subset \widetilde{D}_{\widetilde{s}} = V_{n+1}\Big\},$$
$$\widetilde{\mathcal{B}} = \Big\{\{0\} = \widetilde{B}_0 \subset \widetilde{B}_1 \subset \ldots \subset \widetilde{B}_{\widetilde{s}} = V_{n+1}\Big\}.$$

Существует $\widetilde{\varphi} \in \mathrm{SU}(\omega_{n+1}, V_{n+1})$, удовлетворяющий условию $\widetilde{\varphi}(\widetilde{\mathcal{D}}) = \widetilde{\mathcal{B}}$, т.е. $\widetilde{\varphi}(\widetilde{D}_i) = \widetilde{B}_i$ для всех $i = 0, \ldots, \widetilde{s}$. Чтобы доказать теорему, достаточно построить такую изометрию $\varphi : V_n \to V_n$, что $\varphi(\mathcal{D}) = \mathcal{B}$. Разумеется, можно затем нормировать φ так, чтобы получить изометрию с определителем 1. Согласно [25, Theorem 6.2], изометрия $\varphi : V_n \to V_n$, для которой $\varphi(\mathcal{D}) = \mathcal{B}$, существует тогда и только тогда, когда D_i и B_i изометричны для всех i от 1 до s и

$$\dim(D_i \cap D_j^{\perp,V_n}) = \dim(B_i \cap B_j^{\perp,V_n}) \tag{9}$$

при всех $i < j$ от 1 до s. (Здесь $U^{\perp,V_n}$ обозначает ω_n-ортогональное дополнение в V_n к данному подпространству $U \subset V_n$.) Выберем i в пределах от 1 до s. Поскольку e_{n+1} ортогонален подпространству V_n, а $\widetilde{\varphi}$ устанавливает изометрию между $\widetilde{D}_i$ и $\widetilde{B}_i$, первое условие выполнено. Таким образом, остается проверить условие (9). Введем обозначение

$$C_n = \langle E_{n+1} \setminus E_n\rangle_{\mathbb{C}}.$$

Поскольку подпространство C_n ортогонально подпространству V_n, для произвольных подпространств $U \subset V_n$, $W \subset C_n$ выполняется условие

$$(U \oplus W)^{\perp,V_{n+1}} = U^{\perp,V_n} \oplus W^{\perp,C_n}.$$

Значит, если

$$\widetilde{D}_k = D_k \oplus W_k, \quad \widetilde{B}_k = B_k \oplus W_k$$

для $k \in \{i,j\}$ и каких-либо подпространств W_i, $W_j \subset C_n$, то

$$\widetilde{D}_i \cap \widetilde{D}_j^{\perp,V_{n+1}} = \big(D_i \oplus W_i\big) \cap \Big(D_j^{\perp,V_n} \oplus W_j^{\perp,C_n}\Big) = \big(D_i \cap D_j^{\perp,V_n}\big) \oplus \big(W_i \cap W_j^{\perp,C_n}\big),$$

и такое же равенство верно для $\widetilde{B}_i \cap \widetilde{B}_j^{\perp,V_{n+1}}$. Это доказывает теорему. $\square$

Следующий результат непосредственно вытекает из этой теоремы. (Определение гладкого вещественного инд-многообразия в C^∞-категории такое же, как алгебраического инд-многообразия.)

Следствие 7.4. *Пусть Ω — произвольная G^0-орбита на $\mathcal{F}\ell$, $\Omega_n = \iota_n^{-1}(\Omega) \subset \mathcal{F}\ell_n$. Тогда*

(i) *Ω_n есть одна G_n^0-орбита;*

(ii) *Ω есть бесконечномерное вещественное гладкое инд-многообразие.*

Доказательство. (i) Рассмотрим произвольные $\mathcal{D}$, $\mathcal{B} \in \Omega_n$. Для некоторого $m \geqslant n$ образы $\mathcal{D}$ и $\mathcal{B}$ под действием морфизма $\iota_{m-1} \circ \iota_{m-2} \circ \ldots \circ \iota_n$ лежат на одной G_m^0-орбите. Применяя теорему 7.3 последовательно к ι_{m-1}, ι_{m-2}, …, ι_n, получаем, что $\mathcal{D}$ и $\mathcal{B}$ лежат на одной G_n^0-орбите.

(ii) По определению, $\Omega = \varinjlim \Omega_n$. Далее, из (i) следует, что Ω является гладким вещественным инд-многообразием. По теореме 7.1(v), $\dim_{\mathbb{R}} \Omega_n \geqslant \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{F}\ell_n$. Поскольку

$$\lim_{n\to\infty} \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{F}\ell_n = \infty,$$

размерность орбиты Ω бесконечна. □

Теперь мы можем дать критерий конечности числа G^0-орбит на $\mathcal{F}\ell$. Обобщенный флаг $\mathcal{G}$ называют *конечным*, если он состоит из конечного числа (возможно, бесконечномерных) подпространств. Будем говорить, что обобщенный флаг $\mathcal{G}$ имеет *конечный тип*, если он состоит из конечного числа подпространств в V, каждое из которых имеет либо конечную размерность, либо конечную коразмерность в V. Ясно, что обобщенный флаг конечного типа является флагом. Говорят, что инд-многообразие $\mathcal{F}\ell(\mathcal{G}, E)$ имеет *конечный тип*, если $\mathcal{G}$ (или, что равносильно, любой $\widetilde{\mathcal{G}} \in \mathcal{F}\ell(\mathcal{G}, E)$) имеет конечный тип.

Предложение 7.5. *Если $G^0 = \mathrm{SU}(\infty,\infty)$, $\mathrm{SL}(\infty,\mathbb{R})$ или $\mathrm{SL}(\infty,\mathbb{H})$, то число G^0-орбит на $\mathcal{F}\ell$ конечно тогда и только тогда, когда $\mathcal{F}\ell$ имеет конечный тип. Если $G^0 = \mathrm{SU}(p,\infty)$, $0 < p < \infty$, то число G^0-орбит на $\mathcal{F}\ell$ конечно тогда и только тогда, когда $\mathcal{F}$ конечен. Если $G^0 = \mathrm{SU}(0,\infty)$, то инд-многообразие $\mathcal{F}\ell$ — это одна G^0-орбита.*

Доказательство. Рассмотрим случай $G^0 = \mathrm{SU}(p,\infty)$, $0 < p < \infty$. Предположим сначала, что $\mathcal{F}$ конечен, т.е. что $|\mathcal{F}| = N < \infty$. Для $n \geqslant 1$ введем обозначения

$$S_n = \{s(A) \mid A \subset V_n\}, \quad P_n = \{\dim A \cap B^{\perp,V_n} \mid A \subset B \subset V_n\}.$$

Пусть $s(A) = (a,b,c)$ для какого-либо подпространства A в V_n. Тогда, очевидно, $a \leqslant p$ и $c \leqslant p$, поэтому $|S_n| \leqslant p^2$. С другой стороны, если $A \subset B$ — какие-либо подпространства V_n, то $A^{\perp,V_n} \supset B^{\perp,V_n}$, так что

$$A \cap B^{\perp,V_n} \subset A \cap A^{\perp,V_n}.$$

Однако

$$\dim A \cap A^{\perp,V_n} = c \leqslant p.$$

Таким образом, $|P_n| \leqslant p$. При помощи [25, Theorem 6.2] заключаем, что число G_n^0-орбит на $\mathcal{F}\ell_n$ не превосходит числа

$$N \cdot |S_n| \cdot N^2 \cdot |P_n| \leqslant N^3 p^3.$$

Значит, по теореме 7.3, число G^0-орбит на инд-многообразии $\mathcal{F}\ell$ конечно. Допустим теперь, что $\mathcal{F}$ бесконечен. В этом случае для каждого $m \geqslant 1$ существует такое n, что длина любого флага из $\mathcal{F}\ell_n$ не меньше, чем m, положительный индекс инерции формы $\omega|_{V_n}$ (другими словами, размерность максимального положительно определенного подпространства V_n) равен p и $\operatorname{codim}_{V_n} F_m \geqslant p$, где

$$\mathcal{F}_n = \{F_1 \subset \ldots \subset F_m \subset \ldots \subset V_n\}.$$

Легко проверить, что число G_n^0-орбит на $\mathcal{F}\ell_n$ не меньше, чем m. Следовательно, по теореме 7.3, число G^0-орбит на $\mathcal{F}\ell$ не меньше, чем m; другими словами, число G^0-орбит на $\mathcal{F}\ell$ бесконечно. Доказательство для $\mathrm{SU}(p,\infty)$, $p > 0$ завершено. Доказательство остальных случаев см. в [29, Proposition 4.1]. □

7.3. Открытые и замкнутые орбиты. В этом разделе описаны необходимые и достаточные условия того, что данная G^0-орбита на $\mathcal{F}\ell = \mathcal{F}\ell(\mathcal{F}, E)$ является открытой или замкнутой. Оказывается, что для всех вещественных форм, кроме $\mathrm{SU}(p,\infty)$, $\mathcal{F}\ell$ одновременно имеет открытую и замкнутую орбиты тогда и только тогда, когда число орбит на нем конечно. Сначала рассмотрим случай открытых орбит. Выберем любое n. Напомним (см. [26]), что G_n^0-орбита флага

$$\mathcal{F}_n = \{A_1 \subset A_k \subset \ldots \subset A_k\} \in \mathcal{F}\ell_n$$

открыта тогда и только тогда, когда

(a) для $G^0 = \mathrm{SU}(p,\infty)$ или $\mathrm{SU}(\infty,\infty)$: все A_i невырожденны относительно формы ω;

(b) для $G^0 = \mathrm{SL}(\infty,\mathbb{R})$: при всех i, j, размерность $\dim A_i \cap \tau(A_j)$ минимальна, т.е. $\dim A_i \cap \tau(A_j) = \max\{\dim A_i + \dim A_j - \dim V_n,\ 0\}$;

(c) для $G^0 = \mathrm{SL}(\infty,\mathbb{H})$: при всех i, j, размерность $\dim A_i \cap J(A_j)$ минимальна в указанном смысле.

Заметим, что любые два обобщенных флага $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2$ из $\mathcal{F}\ell$ могут быть канонически отождествлены как линейно упорядоченные множества. Будем говорить, что образ подпространства $F \in \mathcal{F}_1$ в $\mathcal{F}_2$ при этом отождествлении *соответствует* подпространству F. Рассмотрим произвольный антилинейный оператор μ на V. Говорят, что точка $\mathcal{G}$ многообразия $\mathcal{F}\ell$ находится *в общем положении относительно* μ, если $\widetilde{F} \cap \mu(\widetilde{H})$ не является собственным подпространством в $F \cap \mu(H)$ ни для каких $F, H \in \mathcal{G}$, $\widetilde{\mathcal{G}} \in \mathcal{F}\ell$, где $\widetilde{F}$, $\widetilde{H}$ — подпространства из $\widetilde{\mathcal{G}}$, соответствующие F, H. Аналогичное определение можно дать для флагов из $\mathcal{F}\ell_n$. Отметим, что если $G^0 = \mathrm{SL}(\infty,\mathbb{R})$ или $\mathrm{SL}(\infty,\mathbb{H})$, то G_n^0-орбита флага $\mathcal{F}_n \in \mathcal{F}\ell_n$ открыта тогда и только тогда, когда $\mathcal{F}_n$ находится в общем положении относительно τ или J соответственно. Имея в виду конечномерный случай, дадим следующее определение.

Определение 7.6. Назовем обобщенный флаг $\mathcal{G}$ *невырожденным*, если

(i) для $G^0 = \mathrm{SU}(p,\infty)$ или $\mathrm{SU}(\infty,\infty)$: каждое $F \in \mathcal{G}$ невырожденно относительно ω;

(ii) для $G^0 = \mathrm{SL}(\infty,\mathbb{R})$ или $\mathrm{SL}(\infty,\mathbb{H})$: $\mathcal{G}$ находится в общем положении относительно τ или J соответственно.

Можно считать, что невырожденный обобщенный флаг находится «в общем положении по отношению к форме ω». Таким образом, все условия в определении 7.6 полностью аналогичны.

Для каждого обобщенного флага $\mathcal{G} \in \mathcal{F}\ell$ обозначим через $n_{\mathcal{G}}$ такое произвольное фиксированное целое положительное число, что $\mathcal{G}$ совместим с базисом, содержащим $E \setminus E_{n_{\mathcal{G}}-1}$ (здесь мы полагаем $E_0 = \varnothing$; отметим, что это определение несколько отличается от того, которое было дано в п. 2.2).

Предложение 7.7. *Орбита Ω обобщенного флага $\mathcal{G} \in \mathcal{F}\ell$ открыта тогда и только тогда, когда $\mathcal{G}$ невырожден.*

Доказательство. По определению топологии на $\mathcal{F}\ell$, Ω открыта тогда и только тогда, когда $\Omega_n = \iota_n^{-1}(\Omega \cap \iota_n(\mathcal{F}\ell_n))$ открыта для каждого n. Рассмотрим случай $G^0 = \mathrm{SU}(p,\infty)$ или $\mathrm{SU}(\infty,\infty)$ (доказательство остальных случаев см. в [29, Proposition 5.3]). В этом случае достаточно доказать, что $A \in \mathcal{G}$ невырождено относительно ω тогда и только тогда, когда $\omega|_{A\cap V_n}$ невырождена для всех $n \geqslant n_{\mathcal{G}}$. Доказательство получается прямой проверкой. В самом деле, если A вырождено, то существует $v \in A$, для которого $\omega(v,w) = 0$ при всех $w \in A$. Пусть $v \in V_{n_0}$ для некоторого $n_0 \geqslant n_{\mathcal{G}}$. Тогда $\omega|_{A\cap V_{n_0}}$ вырождена. С другой стороны, если $v \in A \cap V_n$ ортогонален всем векторам $w \in A \cap V_n$ для какого-либо $n \geqslant n_{\mathcal{G}}$, то v ортогонален вообще всем $w \in A$, потому что e ортогонален подпространству V_n при $e \in E \setminus E_n$. Это завершает доказательство. □

Будем говорить, что два обобщенных флага *имеют одинаковый тип*, если существует автоморфизм пространства V, переводящий один из них в другой. Понятно, что любые два E-соизмеримых обобщенных флага всегда имеют одинаковый тип. С другой стороны, легко видеть, что два обобщенных флага одного типа $\mathcal{F}$ и $\widetilde{\mathcal{F}}$ не обязаны обладать базисом $\widetilde{E}$, относительно которого они будут $\widetilde{E}$-соизмеримы. Оказывается, что для $G^0 = \mathrm{SU}(p,\infty)$ и $\mathrm{SU}(\infty,\infty)$ требование существования открытой орбиты на инд-многообразии вида $\mathcal{F}\ell(\mathcal{F}, E)$ не накладывает ограничений на тип обобщенного флага $\mathcal{F}$. Более точно, верно следующее утверждение.

Следствие 7.8. *Если $G^0 = \mathrm{SU}(p,\infty)$, $0 \leqslant p < \infty$, то на $\mathcal{F}\ell$ всегда есть открытая G^0-орбита. Если $G^0 = \mathrm{SU}(\infty,\infty)$, то существуют такие базис $\widetilde{E}$ пространства V и обобщенный флаг $\widetilde{\mathcal{F}}$ того же типа, что и $\mathcal{F}$, что на $\widetilde{\mathcal{F}\ell} = \mathcal{F}\ell(\widetilde{\mathcal{F}},\widetilde{E})$ есть открытая G^0-орбита.*

Доказательство. Для $\mathrm{SU}(p,\infty)$ обозначим через n натуральное число, для которого положительный индекс инерции формы $\omega|_{V_n}$ равен p. Пусть $\mathcal{G}_n \in \mathcal{F}\ell_n$ — любой флаг в V_n, состоящий из невырожденных подпространств (т.е. такой, G_n^0-орбита которого открыта в $\mathcal{F}\ell_n$). Обозначим через g какой-нибудь линейный оператор из G_n, для которого $g(\mathcal{F}_n) = \mathcal{G}_n$, где, как и выше,

$$\mathcal{F}_n = \iota_n^{-1}(\mathcal{F}) \in \mathcal{F}\ell_n.$$

Тогда, конечно, $g(\mathcal{F})$ лежит в $\mathcal{F}\ell$ и невырожден. Получаем, что G^0-орбита обобщенного флага $g(\mathcal{F})$ на $\mathcal{F}\ell$ открыта. Рассмотрим теперь случай $G^0 = \mathrm{SU}(\infty,\infty)$. Обозначим через $\widetilde{E}$ любой ω-ортогональный базис пространства V. Зафиксируем биекцию $E \to \widetilde{E}$. Она определяет автоморфизм пространства V. Пусть $\widetilde{\mathcal{F}}$ — обобщенный флаг, состоящий из образов подпространств из $\mathcal{F}$ относительно этого автоморфизма. Тогда $\widetilde{\mathcal{F}}$ и $\mathcal{F}$ имеют одинаковый тип, и каждое подпространство из $\widetilde{\mathcal{F}}$, будучи натянутым на какое-либо подмножество базиса $\widetilde{E}$, является невырожденным. Значит, G^0-орбита обобщенного флага $\widetilde{\mathcal{F}}$ на $\widetilde{\mathcal{F}\ell}$ будет открыта. □

Ситуация будет иной для $G^0 = \mathrm{SL}(\infty,\mathbb{R})$. В то время как инд-грассманиан $\mathrm{Gr}(F,E)$ обладает открытой орбитой тогда и только тогда, когда либо $\dim F < \infty$, либо $\mathrm{codim}_V F < \infty$, несложно проверить, что инд-многообразие вида $\widetilde{\mathcal{F}\ell} = \mathcal{F}\ell(\widetilde{\mathcal{F}},\widetilde{E})$, где $\widetilde{\mathcal{F}}$ имеет тот же тип, что и $\mathcal{F}$ в примерах 2.7(ii) или (iii), не может иметь открытую орбиту, потому что базис $\widetilde{E}$ обязательно удовлетворяет условию $\tau(\widetilde{e}) = \widetilde{e}$ для всех $\widetilde{e} \in \widetilde{E}$. Кватернионный случай обсуждается в [29, Sec. 5].

Перейдем теперь к замкнутым орбитам. Описание замкнутых орбит основано на схожих идеях, но (аналогично случаю открытых орбит) для разных вещественных форм детали разнятся. Предположим, что $G^0 = \mathrm{SU}(\infty,\infty)$ или $G^0 = \mathrm{SU}(p,\infty)$. Мы называем обобщенный флаг $\mathcal{G}$ из $\mathcal{F}\ell$ *псевдоизотропным*, если $F \cap H^{\perp,V}$ не является собственным подпространством в $\widetilde{F} \cap \widetilde{H}^{\perp,V}$ ни для каких $F, H \in \mathcal{G}$, $\widetilde{\mathcal{G}} \in \mathcal{F}\ell$, где $\widetilde{F}$, $\widetilde{H}$ — подпространства из $\widetilde{\mathcal{G}}$, соответствующие F, H. Аналогичное определение можно дать для флагов из $\mathcal{F}\ell_n$. Любой изотропный флаг будет псевдоизотропным, но обратное неверно. В частном случае, когда обобщенный флаг $\mathcal{G}$ имеет вид $\{\{0\} \subset F \subset V\}$, $\mathcal{G}$ будет псевдоизотропным тогда и только тогда, когда ядро $\mathrm{Ker}\,\omega|_F$ формы $\omega|_F$ не является собственным подпространством ядра $\mathrm{Ker}\,\omega|_{\widetilde{F}}$ ни для какого E-созимеримого флага $\{\{0\} \subset \widetilde{F} \subset V\}$. Далее, пусть $G^0 = \mathrm{SL}(\infty,\mathbb{R})$. Обобщенный флаг $\mathcal{G}$ из $\mathcal{F}\ell$ называется *вещественным*, если $\tau(F) = F$ при любом $F \in \mathcal{G}$. Это эквивалентно следующему условию: $F \cap \tau(H)$ не является собственным подпространством в $\widetilde{F} \cap \tau(\widetilde{H})$ ни для каких $F, H \in \mathcal{G}$, $\widetilde{\mathcal{G}} \in \mathcal{F}\ell$, где $\widetilde{F}$, $\widetilde{H}$ — подпространства из $\widetilde{\mathcal{G}}$, соответствующие F, H. Пусть, наконец, $G^0 = \mathrm{SL}(\infty,\mathbb{H})$. Назовем обобщенный флаг $\mathcal{G}$ из $\mathcal{F}\ell$ *псевдокватернионным*, если $F \cap J(H)$ не является собственным подпространством в $\widetilde{F} \cap J(\widetilde{H})$ ни для каких $F, H \in \mathcal{G}$, $\widetilde{\mathcal{G}} \in \mathcal{F}\ell$, где $\widetilde{F}$, $\widetilde{H}$ — подпространства из $\widetilde{\mathcal{G}}$, соответствующие F, H. Если $\mathcal{G}$ — *кватернионный* обобщенный флаг, т.е. $J(F) = F$ для любого $F \in \mathcal{G}$, то он является и псевдокватернионным, но обратное неверно. Обобщенный флаг $\mathcal{G}$ вида $\{\{0\} \subset F \subset V\}$ будет псевдокватернионным в том и только том случае, когда $\mathrm{codim}_F(F \cap J(F)) \leqslant 1$.

Предложение 7.9. *Орбита Ω обобщенного флага $\mathcal{G} \in \mathcal{F}\ell$ замкнута тогда и только тогда, когда*

(i) *$\mathcal{G}$ — псевдоизотропный при $G^0 = \mathrm{SU}(\infty,\infty)$ и $\mathrm{SU}(p,\infty)$;*
(ii) *$\mathcal{G}$ — вещественный при $G^0 = \mathrm{SL}(\infty,\mathbb{R})$;*
(iii) *$\mathcal{G}$ — псевдокватернионный при $G^0 = \mathrm{SL}(\infty,\mathbb{H})$.*

Доказательство. Рассмотрим сначала конечномерный случай, в котором есть ровно одна замкнутая G_n^0-орбита на $\mathcal{F}\ell_n$ (см. теорему 7.1). Легко проверить, что для всех вещественных форм условия предложения, примененные к конечномерным флагам из V_n, являются замкнутыми условиями на точки $\mathcal{F}\ell_n$. Поэтому G_n^0-орбита флага из V_n будет замкнутой тогда и только тогда, когда этот флаг удовлетворяет условиям предложения на конечном уровне. Пусть $G^0 = \mathrm{SU}(\infty,\infty)$ или

$\mathrm{SU}(p,\infty)$ (остальные случаи разобраны в [29, Proposition 5.6]). Предположим, что орбита Ω замкнута; тогда Ω_n замкнута для каждого $n \geqslant n_{\mathcal{G}}$. Пусть $\mathcal{G}$ не псевдоизотропен. Тогда найдутся такие $\widetilde{\mathcal{G}} \in \mathcal{F}\ell$ и $A,\ B \in \mathcal{G}$, что $\widetilde{A} \cap \widetilde{B}^{\perp,V} \supsetneq A \cap B^{\perp,V}$, где $\widetilde{A}$, $\widetilde{B}$ — подпространства из $\widetilde{\mathcal{G}}$, соответствующие A, B. Пусть

$$v \in \bigl(\widetilde{A} \cap \widetilde{B}^{\perp,V}\bigr) \setminus \bigl(A \cap B^{\perp,V}\bigr)$$

и $n \geqslant n_{\mathcal{G}}$ таковы, что $v \in V_n$. Тогда

$$v \in \bigl(\widetilde{A}_n \cap \widetilde{B}_n^{\perp,V_n}\bigr) \setminus \bigl(A_n \cap B_n^{\perp,V_n}\bigr),$$

где $A_n = A \cap V_n$, $B_n = B \cap V_n$, $\widetilde{A}_n = \widetilde{A} \cap V_n$, $\widetilde{B}_n = \widetilde{B} \cap V_n$, потому что $B^{\perp,V} \cap V_n = B_n^{\perp,V_n}$. Это означает, что $A_n \cap B_n^{\perp,V_n}$ является собственным подпространством в $\widetilde{A}_n \cap \widetilde{B}_n^{\perp,V_n}$. Значит, $\mathcal{G}_n$ не будет псевдоизотропным, что противоречит замкнутости орбиты Ω_n. Предположим теперь, что орбита Ω_n не замкнута при некотором $n \geqslant n_{\mathcal{G}}$. Тогда найдутся $A_n, B_n \in \mathcal{G}_n = \iota_n^{-1}(\mathcal{G})$ и $\widetilde{\mathcal{G}}_n \in \mathcal{F}\ell_n$, для которых $A_n \cap B_n^{\perp,V_n}$ является собственным подпространством в $\widetilde{A}_n \cap \widetilde{B}_n^{\perp,V_n}$, где $\widetilde{A}_n$ и $\widetilde{B}_n$ — подпространства в $\widetilde{\mathcal{G}}_n$, соответствующие A_n, B_n. Поскольку любой вектор $e \in E_{n+1} \setminus E_n$ ортогонален подпространству V_n, заключаем, что $A_{n+1} \cap B_{n+1}^{\perp,V_{n+1}}$ является собственным подпространством в $\widetilde{A}_{n+1} \cap \widetilde{B}_{n+1}^{\perp,V_{n+1}}$, где A_{n+1}, B_{n+1}, $\widetilde{A}_{n+1}$, $\widetilde{B}_{n+1}$ — образы A_n, B_n, $\widetilde{A}_n$, $\widetilde{B}_n$ соответственно при вложении $\mathcal{F}\ell_n \hookrightarrow \mathcal{F}\ell_{n+1}$. Повторяя этот процесс, мы видим, что $\mathcal{G}$ не псевдоизотропен. Это завершает доказательство. $\square$

Следствие 7.10. *Если $G^0 = \mathrm{SL}(\infty, \mathbb{R})$, то $\mathcal{F}\ell$ всегда обладает замкнутой орбитой.*

Доказательство. Орбита обобщенного флага $\mathcal{F}$ замкнута, потому что $\tau(e) = e$ для всех базисных векторов $e \in E$. $\square$

При $G^0 = \mathrm{SU}(p,\infty)$, $0 \leqslant p < \infty$, $G^0 = \mathrm{SU}(\infty,\infty)$ или $\mathrm{SL}(\infty,\mathbb{H})$, инд-многообразие $\mathcal{F}\ell$ иногда обладает замкнутой орбитой, а иногда нет. Соединяя наши результаты о существовании открытых и замкнутых орбит, мы получаем следующее утверждение для остальных вещественных форм [29, Corollary 5.8].

Следствие 7.11. *Если G^0 — вещественная форма группы $G = \mathrm{SL}_\infty(\mathbb{C})$, $G^0 \neq \mathrm{SU}(p,\infty)$, $0 < p < \infty$, то инд-многообразие обобщенных флагов $\mathcal{F}\ell = \mathcal{F}\ell(\mathcal{F}, E)$ обладает и открытой, и замкнутой орбитой тогда и только тогда, когда число G^0-орбит на нем конечно.*

7.4. Дальнейшие результаты. Естественная задача — обобщить результаты раздела 7 на случай вещественных форм инд-групп $\mathrm{SO}_\infty(\mathbb{C})$ и $\mathrm{Sp}_\infty(\mathbb{C})$. Другой естественный вопрос — изучить K-орбиты на G/P, где $G = \mathrm{SL}_\infty(\mathbb{C})$, $\mathrm{SO}_\infty(\mathbb{C})$, $\mathrm{Sp}_\infty(\mathbb{C})$, а K — симметрическая инд-подгруппа, т.е. множество неподвижных точек некоторой инволюции на G. В конечномерном случае K-орбиты связаны с G^0-орбитами двойственностью Мацуки. В недавней работе [22] было доказано, что двойственность Мацуки выполняется для $G = \mathrm{SL}_\infty(\mathbb{C})$, $\mathrm{SO}_\infty(\mathbb{C})$, $\mathrm{Sp}_\infty(\mathbb{C})$ в случае, когда $P = B$ — расщепляющая борелевская подгруппа, что является первым шагом в реализации этой программы. В недавней статье [38] Дж. А. Вольф начал развивать теорию пространств циклов для инд-групп, которая также может служить потенциальным источником новых задач.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бурбаки Н.* Группы и алгебры Ли. Группы Кокстера и системы Титса. Группы, порожденные отражениями. Системы корней. — М.: Мир, 1972.
2. *Пенков И. Б., Тихомиров А. С.* О теореме Барта—Ван де Вена—Тюрина—Сато// Мат. сб. — 2015. — *206*, № 6. — С. 49–84.
3. *Пенков И. Б., Тихомиров А. С.* Тривиальность векторных расслоений на скрученных инд-грассманианах// Мат. сб. — 2011. — *202*, № 1. — С. 65–104.
4. *Прессли Э., Сигал Г.* Группы петель. — М.: Мир, 1990.

5. *Тюрин А. Н.* Конечномерные расслоения на бесконечных многообразиях// Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1976. — *40*, № 6. — С. 1248–1268.
6. *Baranov A. A.* Finitary simple Lie algebras// J. Algebra. — 1999. — *219*. — С. 299–329.
7. *Barth W., Van de Ven A.* A decomposability criterion for algebraic 2-bundles on projective spaces// Invent. Math. — 1974. — *25*. — С. 91–106.
8. *Billey S., Lakshmibai V.* Singular loci of Schubert varieties/ Progr. Math. — Boston, MA: Birkhäuser (2000). — *182*.
9. *Bjorner A. and Brenti F.* Combinatorics of Coxeter groups/ Grad. Texts Math. — Berlin: Springer-Verlag, 2005. — **231**.
10. *Bott R.* Homogeneous vector bundles// Ann. Math. — 1957. — *66*. — С. 203–248.
11. *Dan-Cohen E.* Borel subalgebras of root-reductive Lie algebras// J. Lie Theory. — 2008. — *18*. — С. 215–241.
12. *Dan-Cohen E., Penkov I.* Parabolic and Levi subalgebras of finitary Lie algebras// Int. Math. Res. Not. — 2010. — № 6. — С. 1062–1101.
13. *Dan-Cohen E., Penkov I., Snyder N.* Cartan subalgebras of root-reductive Lie algebras// J. Algebra. — 2007. — *308*, № 2. — С. 583–611.
14. *Demazure M.* Une démonstration algébrique d'un théorème de Bott// Invent. Math. — 1968. — *5*. — С. 349–356.
15. *Demazure M.* A very simple proof of Bott's theorem// Invent. Math. — 1976. — *33*. — С. 271–272.
16. *Dimitrov I., Penkov I.* Ind-varieties of generalized flags as homogeneous spaces for classical ind-groups// Int. Math. Res. Not. — 2004. — № 55. — С. 2935–2953.
17. *Dimitrov I., Penkov I.* Borel subalgebras of $\mathfrak{gl}(\infty)$// Resenhas IME-USP. — 2004. — *6*, № 2/3. — С. 153–163.
18. *Dimitrov I., Penkov I.* Weight modules of direct limit Lie algebras// Int. Math. Res. Not. — 1999. — № 5.— С. 223–249.
19. *Dimitrov I., Penkov I., Wolf J. A.* A Bott–Borel–Weil theory for direct limits of algebraic groups// Am. J. Math. — 2002. — *124*. — С. 955–998.
20. *Fels G., Huckleberry A. T., Wolf J. A.* Cycle spaces of flag domains: a complex geometric viewpoint/ Progr. Math. — Boston: Birkhäuser/Springer, 2005. — *245*.
21. *Fresse L., Penkov I.* Schubert decomposition for ind-varieties of generalized flags/ e-print `arXiv: 1506.08263 [math.RT]`.
22. *Fresse L., Penkov I.* Orbit duality in ind-varieties of maximal flags/ e-print `arXiv: 1704.03671 [math.AG]`.
23. *Hartshorne R.* On the de Rham cohomology of algebraic varieties// Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. — 1976. — *45*. — С. 5–99.
24. *Hristova E., Penkov I.* Decomposition of cohomology of vector bundles on homogeneous ind-spaces/ e-print `arXiv: 1703.05086 [math.RT]`.
25. *Huang H.* Some extensions of Witt's theorem// Linear Multilin. Algebra. — 2009. — *57*. — С. 321–344.
26. *Huckleberry A. T., Wolf J. A.* Cycle spaces of real forms of $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$// В кн.: Complex Geometry. — Berlin: Springer-Verlag, 2002. — С. 111–133.
27. *Huckleberry A. T., Wolf J. A.* Schubert varieties and cycle spaces// Duke Math. J. — 2003. — *120*. — С. 229–249.
28. *Huckleberry A. T., Wolf J. A.* Injectivity of the double fibration transform for cycle spaces of flag domains// J. Lie Theory. — 2004. — *14*. — С. 509–522.
29. *Ignatyev M. V., Penkov I., Wolf J. A.* Real group orbits on flag ind-varieties of $\mathrm{SL}(\infty, \mathbb{C})$// В кн.: Lie Theory and Its Applications in Physics. *Dobrev V., ed.*/ Springer Proc. Math. Stat. — 2016. — *191*. — С. 111–135. См. также `arXiv: 1601.04326 [math.AG]`.
30. *Kumar S.* Kac–Moody groups, their flag varieties and representation theory/ Progr. Math. — Boston, MA: Birkhäuser, 2002. — *204*.
31. *Mathieu O.* Formules de Demazure–Weyl, et généralisation du théorème de Borel–Weil–Bott// C. R. Acad. Sci. Paris. — 1986. — *303*. — С. 391–394.
32. *Mathieu O.* Formules de caractéres pour les algébres de Kac–Moody gé'erales// Astérisque. — 1988. — №159–160.
33. *Neeb K.-H., Penkov I.* Cartan subalgebras of $\mathfrak{gl}_\infty$// Can. Math. Bull. — 2003. — *46*, № 4. — С. 597–616.
34. *Penkov I., Tikhomirov A.* Linear ind-grassmannians// Pure Appl. Math. Q. — 2014. — *10*. — С. 289–323.
35. *Sato E.* On the decomposability of infinitely extendable vector bundles on projective spaces and Grassmann varieties// J. Math. Kyoto Univ. — 1977. — *17*. — С. 127–150.
36. *Wolf J. A.* The action of a real semisimple Lie group on a complex flag manifold. I. Orbit structure and holomorphic arc components// Bull. Am. Math. Soc. — 1969. — *75*. — С. 1121–1237.

37. *Wolf J. A.* The action of a real semisimple group on a complex flag manifold. II. Unitary representations on partially holomorphic cohomology spaces// Mem. Am. Math. Soc. — 1974. — *138*.
38. *Wolf J. A.* Cycle spaces of infinite dimensional flag domains/ e-print `arXiv: 1509.0329 [math.DG]`.

М. В. Игнатьев
Самарский национальный исследовательский университет им. академика С. П. Королёва
E-mail: `mihail.ignatev@gmail.com`

И. Пенков
Jacobs University, Bremen
E-mail: `i.penkov@jacobs-university.de`

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 147 (2018). С. 51–83

УДК 514.772

ПОЛНЫЕ ВЫПУКЛЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ТИПА МОНЖА—АМПЕРА И ИХ АНАЛОГОВ

© 2018 г. В. Н. КОКАРЕВ

Аннотация. Статья посвящена исследованию полных выпуклых решений некоторых нелинейных эллиптических уравнений геометрическими методами. Приводится доказательство теоремы Йёргенса—Калаби—Погорелова о несобственных выпуклых аффинных сферах, которое сводится к исследованию полных выпуклых решений простейшего уравнения Монжа—Ампера. Рассматривается аналогичная задача для уравнения типа Монжа—Ампера более общего вида. Доказывается, что при определенных ограничениях решения будут квадратичными полиномами.

***Ключевые слова*:** несобственная выпуклая аффинная сфера, уравнение Монжа—Ампера.

***AMS Subject Classification*:** 58J05

СОДЕРЖАНИЕ

1. Уравнения Монжа—Ампера в геометрии

Уравнения Монжа—Ампера — уравнения, содержащие оператор Монжа—Ампера

$$\det\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^i \partial x^j}\right),$$

— возникают во многих геометрических задачах. Это, например, задача о нахождении выпуклой поверхности с заданной гауссовой кривизной (проблема Минковского), с заданной метрикой (проблема Вейля), а также задачи, связанные с изучением аффинных сфер. Проблема Минковского сводится к вопросу о разрешимости уравнения Монжа—Ампера на сфере. Задачи, связанные с изучением аффинных сфер, как правило, приводят к уравнениям Монжа—Ампера на некомпактных многообразиях (см. [15, 18, 19]). Например, несобственные выпуклые аффинные сферы — это выпуклые поверхности, которые в евклидовом пространстве E^{n+1} могут быть заданы уравнением

$$x^{n+1} = z(x^1, \dots, x^n),$$

где функция $z(x^1, \dots, x^n)$ удовлетворяет уравнению Монжа—Ампера простейшего вида (см. [11])

$$\det\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^i \partial x^j}\right) = 1. \tag{1.1}$$

Априори не предполагается, что функция $z(x^1, \dots, x^n)$ задана на всей плоскости $x^{n+1} = 0$. Требуется только полнота решения, т.е. график функции $z(x^1, \dots, x^n)$ должен быть полной выпуклой

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 16-01-00154а).

поверхностью. Проблема классификации полных несобственных выпуклых аффинных сфер стояла более полувека и увенчалась доказательством следующей теоремы.

Теорема 1.1. *Всякое полное выпуклое решение уравнения* (1.1) *является квадратичным полиномом.*

Эта теорема была доказана в 1954 г. К. Йёргенсом при $n = 2$ (см. [16]). Доказательство К. Йёргенса существенно опиралось на методы комплексного анализа, поэтому не обобщалось на более высокие размерности.

В 1958 г. Э. Калаби доказал теорему для $n \leqslant 5$ (см. [13]). В распоряжении Э. Калаби не было очень мощной теоремы 2.2, поэтому он был вынужден оценивать диаметр проекции графика решения в метрике $g_{ij} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^i \partial x^j}$. Это удалось сделать только для $n \leqslant 5$. После того как в 1972 г. А. В. Погорелов, сочетая геометрические и аналитические методы, доказал теорему 2.2 для всех n, надобность в таких оценках отпала (см. [9]).

В следующем разделе приведено доказательство теоремы 1.1. Это доказательство опирается на две теоремы. Теорема 2.1 принадлежит Э. Калаби, теорема 2.2 — А. В. Погорелову.

В разделе 3 рассматриваются полные выпуклые решения уравнения, которое является обобщением уравнения (1.1) (см. [6, 7]). Естественным обобщением уравнения (1.1) является уравнение (см. [12])

$$F(\sigma_1, \dots, \sigma_n) = 0,$$

или, считая, что уравнение разрешено относительно σ_n, обобщенное уравнение Монжа—Ампера

$$\sigma_n = \varphi(\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}).$$

Здесь σ_i — сумма главных миноров i-го порядка гессиана функции $z(x^1, \dots, x^n)$; σ_i является также i-й элементарной симметрической функцией от собственных значений этого гессиана. Для эллиптичности уравнения на функцию φ нужно наложить соответствующие условия. Если функция φ равняется тождественно единичной, то получается уравнение $\sigma_n = 1$, т.е. уравнение (1.1).

В разделе 4 рассматривается уравнение $\sigma_m = 1$, $1 < m < n$. Доказано, что при некоторых ограничениях решениями этих уравнений являются только квадратичные полиномы.

2. Доказательство теоремы Йёргенса—Калаби—Погорелова

В этом разделе мы докажем теорему 1.1, следуя Э. Калаби и А. В. Погорелову.

Будем использовать обозначения

$$\frac{\partial z}{\partial x^i} = z_i, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^i \partial x^j} = z_{ij} \quad \text{и т. д.}$$

Будем допускать только аффинные замены координат $x^1, \dots, x^n$. Тогда производные функции $z(x)$ будут координатами ковариантных тензоров соответствующего ранга. Введем риманову метрику g, задаваемую метрическим тензором $g_{ij} = z_{ij}$. Так как поверхность строго выпукла, то эта метрика положительно определена. Пусть Δ — оператор Лапласа—Бельтрами относительно введенной метрики; ковариантные производные будем обозначать с помощью точки с запятой (;). С помощью этой метрики будем поднимать и опускать индексы тензоров, в частности,

$$z_{ij}^k = g^{ak} z_{aij}, \quad z^{ijk} = g^{ia} g^{jb} g^{kc} z_{abc}.$$

Рассмотрим аффинный инвариант

$$P = z_{ijk} z^{ijk}.$$

Очевидно, $P \geqslant 0$. Равенство $P(x) = 0$ возможно лишь в том случае, когда все производные z_{ijk} в точке x обращаются в нуль. Для доказательства теоремы 1.1 достаточно доказать, что $P \equiv 0$. Заметим, что строго выпуклое решение уравнения (1.1) будет аналитическим (см. [9, теорема 5, § 5]).

Сначала докажем вспомогательные теоремы. При этом дифференциальные неравенства будем понимать в расширенном смысле, т.е. в смысле следующего определения (см. [14]).

Определение 2.1. *Пусть $v(x)$ — полунепрерывная сверху действительная функция на открытом множестве Σ. Будем говорить, что*

$$\Delta v(x) \leqslant u(x)$$

на множестве Σ, если для каждой точки $x_0 \in \Sigma$ и каждого числа $\alpha > 0$ существуют окрестность V_{α,x_0} точки x_0 и функция $v_{\alpha,x_0}(x) \in C^2$ в V_{α,x_0}, которая удовлетворяет следующим условиям:

(a) $v(x) - v_{\alpha,x_0}(x)$ *достигает максимального значения на V_{α,x_0} в точке x_0;*
(b) $\Delta v_{\alpha,x_0}(x_0) < u(x_0) + \alpha$.

Если $v(x)$ полунепрерывна снизу на Σ, то $\Delta v(x) \geqslant u(x)$ на множестве Σ, если

$$\Delta(-v)(x) \leqslant -u(x)$$

на множестве Σ.

При этом (см. [14]) принцип максимума имеет место в обычной формулировке.

Теорема 2.1. *Пусть $z(x)$ — полное выпуклое решение уравнения* (1.1). *Тогда инвариант P удовлетворяет дифференциальному неравенству*

$$\Delta(\sqrt{P}) \geqslant \frac{n+1}{4n(n-1)} P^{3/2}. \tag{2.1}$$

Доказательство. Дифференцируя уравнение (1.1) по x^k, получаем $g^{ij} z_{ijk} = 0$. Отсюда

$$g^{ij} z_{ijk;l} = 0. \tag{2.2}$$

Для коэффициентов Кристоффеля первого рода получаем выражение

$$\Gamma_{ijk} = \frac{1}{2} z_{ijk}.$$

Тогда тензор

$$z_{ijk;l} = z_{ijkl} - \frac{1}{2}\Big(z^h_{jk} z_{ilh} + z^h_{ik} z_{jlh} + z^h_{ij} z_{klh}\Big)$$

симметричен по всем индексам. Для тензора кривизны, тензора Риччи и скалярной кривизны получаем выражения

$$R_{ijkl} = \frac{1}{4}\big(z_{hil} z^h_{jk} - z_{hik} z^h_{jl}\big), \quad R_{ik} = \frac{1}{4} z^{hj}_i z_{hjk}, \quad R = \frac{1}{4} z^{ijk} z_{ijk} = \frac{1}{4} P.$$

Имеем

$$0 \leqslant \left(R_{ij} - \frac{1}{n} R g_{ij}\right)\left(R^{ij} - \frac{1}{n} R g^{ij}\right) = R_{ij} R^{ij} - \frac{1}{n} R^2.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{n} R^2 \leqslant R_{ij} R^{ij}. \tag{2.3}$$

Аналогично (см. [13]) доказывается неравенство

$$\frac{2}{n-1} R_{ij} R^{ij} \leqslant R_{ijkl} R^{ijkl}. \tag{2.4}$$

Так как

$$R_{ik} \xi^i \xi^k = g^{hm} g^{lj} (z_{hli} \xi^i)(z_{mjk} \xi^k) \geqslant 0, \tag{2.5}$$

то кривизна Риччи неотрицательна. Далее,

$$\Delta(\sqrt{P}) = \frac{\Delta P}{2P^{1/2}} - \frac{g^{ij} P_{;i} P_{;j}}{4P^{3/2}}, \tag{2.6}$$

$$\frac{\Delta P}{2} = z^{ijk} \Delta z_{ijk} + z^{ijk;l} z_{ijk;l}. \tag{2.7}$$

Введя обозначение

$$B_{abcijkl} = \frac{1}{2}(z_{abc;i} z_{jkl} - z_{abc} z_{jkl;i}),$$

получим

$$\frac{2B_{abcijkl}B^{abcijkl}}{P^{3/2}} = \frac{z_{abc;i}z^{abc;i}}{P^{1/2}} - \frac{g^{ij}P_{;i}P_{;j}}{4P^{3/2}} \geqslant 0.$$

Из соотношений (2.6), (2.7) и последнего неравенства следует

$$\Delta(\sqrt{P}) \geqslant \frac{z^{ijk}\Delta z_{ijk}}{P^{1/2}}. \tag{2.8}$$

Используя симметрию тензора $z_{ijk;l}$ по всем индексам и равенство (2.2), получаем

$$\begin{aligned}\Delta z_{ijk} &= g^{lm}z_{ijk;lm} = g^{lm}z_{ljk;im} = g^{lm}z_{ljk;mi} + g^{lm}\big(z_{ljk;im} - z_{ljk;mi}\big) = \\ &= \big(g^{lm}z_{lmk;j}\big)_{;i} + g^{lm}\Big(z_{hjk}R^h_{lim} + z_{lhk}R^h_{jim} + z_{ljh}R^h_{kim}\Big) = \\ &= z_{hjk}R^h_i + \frac{1}{4}z^m_{hk}\Big(z^h_{am}z^a_{ji} - z^h_{ai}\Big) + \frac{1}{4}z^m_{jh}\Big(z^h_{am}z^a_{ki} - z^h_{ai}z^a_{km}\Big) = \\ &= \frac{1}{4}z^{hlm}\Big(z_{hli}z_{mjk} + z_{hlj}z_{mki} + z_{hlk}z_{mij}\Big) - \frac{1}{2}z^a_{ib}z^b_{jc}z^c_{ka}.\end{aligned}$$

Следовательно,

$$z^{ijk}\Delta z_{ijk} = \frac{3}{4}z^{ijk}z^{hlm}z_{hli}z_{mjk} - \frac{1}{2}z^{ijk}z^a_{ib}z^b_{jc}z^c_{ka} = 4\Big(R_{ij}R^{ij} + R_{ijkl}R^{ijkl}\Big).$$

Из (2.8), используя (2.3) и (2.4), получаем утверждение теоремы 2.1. □

Теорема 2.2. *Пусть $z(x)$ — полное выпуклое решение уравнения* (1.1). *Тогда метрика*

$$ds^2 = g_{ij}\,dx^i\,dx^j,$$

где $g_{ij}(x) = z_{ij}(x)$, задана на всей плоскости $x^{n+1} = 0$ и является полной.

Доказательство. Пусть Φ — график функции $z(x)$. Так как к функции $z(x^1,\dots,x^n)$ можно прибавлять слагаемые вида $c_ix^i + c$, то без ограничения общности можно считать, что поверхность Φ касается плоскости $x^{n+1} = 0$. Через G_h обозначим область на плоскости $x^{n+1} = 0$, где $z(x^1,\dots,x^n) \leqslant h$. В силу выпуклости поверхности Φ матрица (z_{ij}) имеет положительные собственные значения, поэтому поверхность Φ не может быть цилиндром. Следовательно, множество G_h компактно. Пусть d_h — диаметр этого множества. Оценим первые производные функции $z(x^1,\dots,x^n)$ в области G_1.

Пусть $(x^1,\dots,x^n) \in G_1$. Построим конус C с вершиной в точке $S(x^1,\dots,x^n,z(x^1,\dots,x^n))$, который проектирует пересечение плоскости $x^{n+1} = 2$ с поверхностью Φ. Через Φ_h обозначим часть поверхности Φ, для которой $z(x^1,\dots,x^n) \leqslant h$, а через Φ^*_h и C^* — нормальные изображения Φ_h и C, соответственно, на плоскости переменных $p_1,\dots,p_n$ (см. [9, § 5, п. 1]). В силу выпуклости Φ_2 имеем $C^* \subset \Phi^*_2$; следовательно, для объемов получается неравенство

$$\operatorname{Vol}(C^*) \leqslant \operatorname{Vol}(\Phi^*_2).$$

Так как высота конуса C не менее 1, а диаметр основания равен d_2, то шар

$$p_1^2 + \dots + p_n^2 \leqslant \frac{1}{d_2^2}$$

принадлежит C^*. Точка

$$(p_1,\dots,p_n) = \big(z_1(x^1,\dots,x^n),\ \dots,\ z_n(x^1,\dots,x^n)\big)$$

тоже принадлежит C^*. Значит, в C^* лежит конус вращения с радиусом основания $1/d_2$, высотой $|z_i(x^1,\dots,x^n)|$ и объемом

$$\frac{|z_i(x^1,\dots,x^n)|\varkappa_{n-1}}{nd_2^{n-1}},$$

где $\varkappa_{n-1}$ — объем $(n-1)$-мерного единичного шара. Значит,

$$\operatorname{Vol}(C^*) \geqslant \frac{|z_i(x^1,\dots,x^n)|\varkappa_{n-1}}{nd_2^{n-1}}.$$

Далее,

$$\operatorname{Vol}(\Phi_2^*) = \int\limits_{\Phi_2^*} dp_1 \dots dp_n = \int\limits_{G_2} \frac{\partial(p_1, \dots, p_n)}{\partial(x^1, \dots, x^n)} dx^1 \dots dx^n =$$

$$= \int\limits_{G_2} \det(z_{ij}) dx^1 \dots dx^n = \int\limits_{G_2} dx^1 \dots dx^n \leqslant \frac{d_2^n \varkappa_n}{2^n},$$

где $\varkappa_n$ — объем n-мерного единичного шара. Из неравенства

$$\operatorname{Vol}(C^*) \leqslant \operatorname{Vol}(\Phi_2^*)$$

получаем оценку сверху на $|z_i(x^1, \dots, x^n)|$ для всех точек области G_1:

$$\left|z_i(x^1, \dots, x^n)\right| \leqslant \frac{n d_2^{2n-1} \varkappa_n}{2^n \varkappa_{n-1}}.$$

Оценка зависит от диаметра d_2 сечения поверхности Φ на высоте 2.

Теперь оценим вторые производные решения уравнения (1.1) в области $G_{1/2}$. Введем в G_1 функцию точки и направления

$$w = (1 - z) e^{z_\xi^2/2} z_{\xi\xi},$$

где индекс ξ означает дифференцирование в направлении ξ. Функция w обращается в нуль на границе области G_1, а во внутренних ее точках для всех направлений $w > 0$. В силу компактности множества G_1 функция w достигает положительного максимума, равного w_0, во внутренней точке O области G_1 для некоторого направления ξ_0. Выполним унимодулярную аффинную замену координат $x^1, \dots, x^n$ так, чтобы ось x^1 имела направление ξ_0, а остальные оси направим так, чтобы в точке O выполнялось условие $z_{ij} = 0$ для всех $i \neq j$. В новых координатах уравнение поверхности Φ будет по-прежнему иметь вид (1.1).

Итак, в точке O функция

$$w = (1 - z) e^{z_1^2/2} z_{11}$$

достигает максимума. Следовательно, в этой точке

$$d(\ln w) = 0, \quad d^2(\ln w) \leqslant 0.$$

Получаем в точке O

$$\frac{\partial \ln w}{\partial x^i} = \frac{z_i}{z - 1} + z_1 z_{1i} + \frac{z_{11i}}{z_{11}} = 0, \tag{2.9}$$

$$\frac{\partial^2 \ln w}{\partial x^{i2}} = \frac{z_{ii}}{z - 1} - \frac{z_i^2}{(z-1)^2} + z_1 z_{1ii} + \frac{z_{11ii}}{z_{11}} - \frac{z_{11i}^2}{z_{11}^2} \leqslant 0. \tag{2.10}$$

Умножив (2.10) на z_{11}/z_{ii} и просуммировав по всем i, получим

$$\frac{n z_{11}}{z - 1} - \frac{z_1^2}{(z-1)^2} - \sum_{i \neq 1} \frac{z_{11i}}{z_{11} z_{ii}} + z_{11}^2 + z_1 z_{11} \sum_i \frac{z_{1ii}}{z_{ii}} + \sum_i \frac{z_{ii11}}{z_{ii}} - \sum_i \frac{z_{11i}^2}{z_{11} z_{ii}} \leqslant 0. \tag{2.11}$$

Продифференцировав (1.1) в точке O один раз и дважды по x^1, получим

$$\sum_i \frac{z_{ii1}}{z_{ii}} = 0, \tag{2.12}$$

$$\sum_i \frac{z_{ii11}}{z_{ii}} + \sum_{i \neq j} \left(\frac{z_{ii1} z_{jj1}}{z_{ii} z_{jj}} - \frac{z_{ij1}^2}{z_{ii} z_{jj}} \right) = 0. \tag{2.13}$$

Возводя (2.12) в квадрат и вычитая из (2.13), находим

$$\sum_i \frac{z_{ii11}}{z_{ii}} - \sum_{i,j} \frac{z_{ij1}^2}{z_{ii} z_{jj}} = 0. \tag{2.14}$$

Вычитая (2.10) почленно (2.14). с учетом (2.12) и соотношения

$$-\sum_i \frac{z_{11i}}{z_{11}z_{ii}} - \sum_{i\neq 1} \frac{z_{11i}}{z_{11}z_{ii}} + \sum_{i,j} \frac{z_{ij1}^2}{z_{ii}z_{jj}} \geqslant 0$$

получим

$$\frac{nz_{11}}{z-1} - \frac{z_1^2}{(z-1)^2} + z_{11}^2 \leqslant 0.$$

Умножив последнее неравенство на $(1-z)^2 e^{z_1^2}$, получим в точке O неравенство

$$w_0^2 - ne^{z_1^2}w_0 - z_1^2 e^{z_1^2} \leqslant 0.$$

Отсюда получается оценка на w_0, зависящая от z_1, а значит от d_2. Обозначив эту оценку через $w_0(d_2)$, получаем для всех точек и всех направлений ξ в области G_1

$$(1-z)e^{z_\xi^2/2} z_{\xi\xi} \leqslant w_0(d_2).$$

Отсюда для всех точек и всех направлений в области $G_{1/2}$ имеем

$$z_{\xi\xi} \leqslant 2w_0(d_2). \tag{2.15}$$

Теперь получим глобальную оценку на $z_{\xi\xi}$. Обозначим через T_h пересечение плоскости $x^{n+1} = h$ с выпуклым телом, ограниченным поверхностью Φ. Не ограничивая общности, можно считать, что координатная плоскость $x^{n+1} = 0$ касается поверхности Φ в точке S, а ось x^{n+1} проходит через центр тяжести сечения T_h. Пусть E — n-мерный эллипсоид минимального объема, содержащий T_h, центр которого совпадает с центром тяжести сечение T_h. Подвергнем поверхность Φ унимодулярному аффинному преобразованию χ вида

$$(x^1, \dots, x^n, x^{n+1}) \mapsto (\alpha_i^1 x^i, \dots, \alpha_i^n x^i, x^{n+1}),$$

переводящему эллипсоид E в шар E' радиуса r, а поверхность Φ — в поверхность Φ'. Оси $x^1, \dots, x^n$ можно выбрать так, что это преобразование будет иметь вид

$$\chi : (x^1, \dots, x^n, x^{n+1}) \mapsto (\mu_1 x^1, \dots, \mu_n x^n, x^{n+1}).$$

При этом поверхность Φ' удовлетворяет уравнению (1.1). Докажем, что величина h/r^2 ограничена сверху и снизу некоторыми положительными константами.

Для поверхности Φ' введем Φ'_h, G'_h, Φ'^*_h так же, как вводились Φ_h, G_h, Φ^*_h для поверхности Φ. Тогда

$$\mathrm{Vol}(\Phi'^*_h) = \int\limits_{\Phi'^*_h} dp_1 \dots dp_n = \int\limits_{G'_h} \det(z_{ij}) dx^1 \dots dx^n = \int\limits_{G'_h} dx^1 \dots dx^n \leqslant r^n \varkappa_n.$$

Объем нормального изображения конуса, проектирующего шар E' из точки $s' = \chi(S)$, не менее, чем $(h/2r)^n \varkappa_n$. Сравнивая его с $\mathrm{Vol}(\Phi'^*_h)$, получаем

$$(h/2r)^n \varkappa_n \leqslant r^n \varkappa_n,$$

или, что равносильно, $h/r^2 \leqslant 2$.

Подвергнем шар E' гомотетии с коэффициентом $k = 1/n^{3/2}$ относительно его центра. Полученный шар E'' будет содержаться в $T'_h = \chi(T_h)$ (см. [5]). Спроектируем шар E' конусом V из точки $B(0, \dots, 0, -h)$. Часть поверхности Φ'_h, лежащую внутри этого конуса, обозначим через Φ_V. Обозначим нормальные изображения Φ_V и V через Φ_V^* и V^*. Для них имеем $\Phi_V^* \subset V^*$. Для объема V^* получаем

$$\mathrm{Vol}(V^*) = \left(\frac{2hn^{3/2}}{r}\right)^n \varkappa_n.$$

Подвергнем шар E'' гомотетии $H_B^{1/2}$ с коэффициентом $1/2$ относительно точки B. Полученный шар $H_B^{1/2}(E'')$ лежит в плоскости $x^{n+1}=0$ и содержит проекцию поверхности Φ_V. Поэтому

$$\mathrm{Vol}(\Phi_V^*) \geqslant \int\limits_{H_B^{1/2}(E'')} \det(z_{ij})\,dx^1\dots dx^n = \int\limits_{H_B^{1/2}(E'')} dx^1\dots dx^n \geqslant \left(\frac{r}{2n^{3/2}}\right)^n \varkappa_n.$$

Из неравенства $\mathrm{Vol}(\Phi_V^*) \leqslant \mathrm{Vol}(V^*)$ получаем оценку снизу на h/r^2:

$$\frac{h}{r^2} \geqslant \frac{1}{4n^3}.$$

Подвергнув поверхность Φ' аффинному преобразованию

$$\nu : \left(x^1,\dots,x^n,x^{n+1}\right) \to \left(\sqrt{\frac{2}{h}}x^1,\ \dots,\ \sqrt{\frac{2}{h}}x^n,\ \frac{2}{h}x^{n+1}\right),$$

получим в результате поверхность $\overline{\Phi}$; при этом поверхность $\overline{\Phi}$ будет удовлетворять уравнению (1.1). Композиция $\nu\circ\chi$ двух аффинных преобразований переведет плоскость $x^{n+1}=h$ в плоскость $x^{n+1}=2$, при этом сечение поверхности $\overline{\Phi}$ плоскостью $x^{n+1}=2$ будет содержаться в шаре радиуса $h\sqrt{\frac{2}{h}}$. Из оценки снизу на h/r^2 получаем для диаметра этого сечения $\overline{d}_2$ оценку

$$\overline{d}_2 \leqslant 4\sqrt{2}n^{3/2}, \tag{2.16}$$

зависящую только от n.

Пусть поверхность $\overline{\Phi}$ задается графиком функции $\overline{z}(x^1,\dots,x^n)$. В соответствующих точках поверхностей Φ и $\overline{\Phi}$ для вторых производных функций $z(x^1,\dots,x^n)$ и $\overline{z}(x^1,\dots,x^n)$ имеют место соотношения

$$\mu_i^2\overline{z}_{ii} = z_{ii}, \quad i=1,\dots,n. \tag{2.17}$$

Запишем эти соотношения для точки S на поверхности Φ и соответствующей ей точки $\overline{S}$ на поверхности $\overline{\Phi}$:

$$\mu_i^2\overline{z}_{ii}(\overline{S}) = z_{ii}(S), \quad i=1,\dots,n. \tag{2.18}$$

Из (2.15) получаем оценку сверху на $\overline{z}_{ii}(\overline{S})$ через $\overline{d}_2$, а с учетом (2.16) эта оценка выражается только через n. Так как

$$\overline{z}_{11}\dots\overline{z}_{nn} \geqslant \det(\overline{z}_{ij}) = 1$$

(см. [3, теорема 8.6.5]), получаем для $\overline{z}_{ii}(\overline{S})$ положительную оценку снизу, зависящую только от n. Тогда соотношение 2.18 позволяет оценить коэффициенты μ_i снизу и сверху через $z_{ii}(S)$.

Множество точек плоскости $x^{n+1}=0$, для которых $\overline{z}(x^1,\dots,x^n)\leqslant 1/2$, обозначим через $\overline{G}_{1/2}$. Из (2.15) следует существование оценки для $\overline{z}_{ii}$, зависящей от $\overline{d}_2$ (значит, только от n), в области $\overline{G}_{1/2}$. Эта область является образом области $G_{h/4}$ при аффинном преобразовании $\nu\circ\chi$. Возвращаясь к соотношению (2.17), получаем, что для вторых производных z_{ii} решения $z(x^1,\dots,x^n)$ уравнения (1.1) всюду в области $G_{h/4}$ существует оценка сверху. Она в конечном счете может быть выражена только через вторые производные $z_{ii}(S)$. Так как $h>0$ произвольно, то такая оценка имеет место для всех точек поверхности Φ. Отсюда как и ранее получается также положительная оценка на z_{ii} снизу, т.е. существует такая положительная константа c, что для любой точки x и любого направления осей $x^1,\dots,x^n$ прямоугольной системы координат выполняется неравенство $z_{ii}(x)\geqslant c$. Тогда в любой точке x

$$g_{ij}(x)\,dx^i\,dx^j = z_{ij}(x)\,dx^i\,dx^j \geqslant c\sum_{i=1}^n {dx^i}^2;$$

следовательно, метрика $g_{ij}=z_{ij}$ является полной. В силу полноты поверхности Φ и ограниченности z_{ii} сверху получаем, что проекцией поверхности Φ является вся плоскость $x^{n+1}=0$. $\square$

Доказательство теоремы 1.1. Пусть $z(x)$ — полное выпуклое решение уравнения (1.1). Если инвариант P во всех точках равен нулю, то все третьи производные функции $z(x)$ тождественно равны нулю и $z(x)$ — квадратичный полином. Предположим, что существует точка O, в которой $P(O) \neq 0$. Докажем, что вместе с неравенством (2.1) теоремы 2.1 это приведет нас к противоречию.

Введем обозначение $\sqrt{P(O)} = 2a$ и построим положительную функцию $v(x)$ со следующими свойствами:

(1) функция v определена в открытой области Σ с компактным замыканием, содержащей точку O;
(2) $v(O) = a$;
(3) $\Delta v \leqslant \dfrac{n+1}{4n(n-1)} v^3$;
(4) $v(x) \to +\infty$ при $x \to \partial\Sigma$.

Если функция $v(x)$ с указанными свойствами существует, то функция $\sqrt{P(x)} - v(x)$ достигает максимума в точке $\tilde{x} \in \Sigma$. В этой точке

$$\frac{4n(n-1)}{n+1}\,\Delta\big(\sqrt{P} - v(\tilde{x})\big)(\tilde{x}) \geqslant \big(P^{3/2} - v^3\big)(\tilde{x}) \geqslant \big(P^{3/2} - v^3\big)(O) > 0;$$

противоречие с тем, что в этой точке функция $\sqrt{P(x)} - v(x)$ достигает максимума.

Приступим к построению функции $v(x)$ со свойствами (1)–(4). Рассмотрим на положительной полуоси t обыкновенное дифференциальное уравнение

$$y'' + \frac{n-1}{t} y' = \frac{n+1}{4n(n-1)} y^3 \tag{2.19}$$

с начальными условиями

$$y(0) = a, \quad y'(0) = 0. \tag{2.20}$$

Решение $y(t)$ обладает следующими свойствами:

(1) существует такое положительное число d, что

$$\lim_{t \to d} y(t) = +\infty;$$

(2) $y'(t) > 0$ при $t \in (0, d)$.

Эти свойства доказаны в лемме 3.1 для более общего уравнения. Для (2.19) нужно положить в лемме 3.1 $\varepsilon_0 = 0$.

Пусть $s(x)$ — расстояние в метрике g от точки x до точки O. Пусть $y(t)$ — решение уравнения (2.19) с начальными условиями (2.20). Тогда функция $v(x) = y(s(x))$, очевидно, обладает свойствами (1), (2), (4). Проверим выполнение свойства (3). Функция $s(x)$, вообще говоря, является только непрерывной. Однако, множество Ω_O, где она достаточно регулярна (например, принадлежит классу C^2), всюду плотно. На множестве Ω_O функция $y(s(x))$ также принадлежит классу C^2, поэтому для точки $x \in \Omega_O$

$$\Delta v(x) = y''(s(x)) + y'(s(x))\Delta s(x).$$

Осталось доказать, что $\Delta s \leqslant (n-1)/s$.

Вектор $\operatorname{grad} s$ с координатами $\nu^i = g^{ij} s_{;j}$ является единичной нормалью к сфере $s = \mathrm{const}$. Этот вектор является касательным к геодезической γ, соединяющей точки O и x. Если вдоль геодезической γ ввести координаты Ферми $x^1, \dots, x^n$ с $x^n = s$, то

$$\Delta s = g^{ij} s_{;ij} = \sum_{i,j=1}^{n-1} g^{ij} s_{;ij},$$

где $-s_{;ij}$ и $g^{ij}(i,j=1,\ldots,n-1)$ — коэффициенты второй основной формы и ковариантные координаты метрического тензора поверхности $s=\mathrm{const}$, соответственно. Следовательно,

$$\Delta s = -\sum_{i=1}^{n-1} k_i = -(n-1)H,$$

где k_i — главные нормальные кривизны, H — средняя кривизна поверхности $s=\mathrm{const}$. Для H вдоль γ выполняется уравнение

$$\frac{dH}{ds} = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n-1} k_i^2 + R_{ij}\nu^i\nu^j\right)$$

(см. [4, следствие 3.6]). Из неотрицательности кривизны Риччи получаем

$$\frac{dH}{ds} \geqslant H^2.$$

Так как $H \to -1/s$ при $s \to 0$, то $H \geqslant -1/s$ и $\Delta s \leqslant (n-1)/s$.

Пусть теперь $p \notin \Omega_O$. Тогда O и p соединяют более чем одна геодезическая длины $s(p)$. Пусть l — одна из них. Возьмем на l точку p_ε на расстоянии ε от точки O. Введем в достаточно малой окрестности точки p функцию $s_{p,\varepsilon}(x) = \rho(p_\varepsilon, x)$, где $\rho(p_\varepsilon, x)$ — расстояние между точками p_ε и x. Легко проверяется, что функция $s_{p,\varepsilon}(x)$ удовлетворяет всем требованиям определения 2.1. Теорема 1.1 доказана. □

3. Полные выпуклые решения обобщенного уравнения Монжа—Ампера

В этом разделе будут рассмотрены некоторые обобщения результатов К. Йёргенса, Э. Калаби и А. В. Погорелова (см. [7, 17]).

Уравнение $\det(z_{ij}) = 1$ можно записать в виде $\lambda_1 \cdots \lambda_n = 1$ или $\sigma_n = 1$, где λ_i — собственные значения матрицы гессиана (z_{ij}), а σ_n — старшая элементарная симметрическая функция от $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Естественно поставить вопрос: что можно сказать о полных выпуклых решениях $z(x^1, \ldots, x^n)$ «возмущенного» уравнения

$$\sigma_n = \varphi(\sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1}), \tag{3.1}$$

где $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ — элементарные симметрические функции от собственных значений $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ матрицы (z_{ij}), т.е. σ_k — сумма всех главных миноров k-го порядка матрицы (z_{ij}), а φ — регулярная функция положительных переменных. В этом разделе будет доказана следующая теорема.

Теорема 3.1. *Пусть функция $\varphi(\sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1})$ задана в открытой области*

$$\sigma_k > C_n^k (1-\varepsilon)^{k/n}, \quad k = 1, \ldots, n-1,$$

принадлежит классу $C^{3,\alpha}$, $0<\alpha<1$, и удовлетворяет в этой области условиям

$$1-\varepsilon \leqslant \varphi \leqslant 1+\varepsilon, \tag{3.2}$$

$$\left|\frac{\partial\varphi}{\partial\sigma_i}\right| \leqslant \varepsilon\frac{\varphi}{\sigma_i}, \tag{3.3}$$

$$\left|\frac{\partial^2\varphi}{\partial\sigma_i\partial\sigma_j}\right| \leqslant \varepsilon\frac{\varphi}{\sigma_i\sigma_j}, \tag{3.4}$$

$$\left|\frac{\partial^3\varphi}{\partial\sigma_i\partial\sigma_j\partial\sigma_k}\right| \leqslant \varepsilon\frac{\varphi}{\sigma_i\sigma_j\sigma_k}, \tag{3.5}$$

где $i,j,k = 1, \ldots, n-1$ и

$$\varepsilon < \frac{1}{1210(n-1)^2(n+3)n^6}.$$

Тогда всякое полное выпуклое решение $z(x^1, \ldots, x^n)$ уравнения (3.1) является квадратичным полиномом.

3.1. Инвариантное уравнение. При изучении уравнения (1.1) нам придется выполнять аффинные преобразования координат. При таких преобразованиях координат величина

$$\det(z_{ij}) = \sigma_n$$

умножается на число; что же касается функций $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$, то они не являются даже относительными инвариантами. В связи с этим рассмотрим несколько более общую ситуацию.

Пусть полная выпуклая поверхность Φ и эллиптический параболоид Π заданы в евклидовом пространстве E^{n+1} уравнениями

$$x^{n+1} = z(x^1, \dots, x^n), \quad x^{n+1} = z^0(x^1, \dots, x^n) = \frac{1}{2}c_{ij}x^i x^j$$

соответственно; при суммировании индексы всюду пробегают значения $1, \dots, n$. Символами $\tilde{\lambda}_1, \dots, \tilde{\lambda}_n$ обозначим экстремумы формы $z_{ij}\xi^i\xi^j$ относительно формы $c_{ij}\xi^i\xi^j$. Они являются корнями уравнения

$$\det(z_{ij} - \tilde{\lambda}c_{ij}) = 0. \tag{3.6}$$

Это уравнение инвариантно при аффинных заменах координат $x^1, \dots, x^n$. Следовательно, и уравнение

$$\tilde{\sigma}_n = \varphi(\tilde{\sigma}_1, \dots, \tilde{\sigma}_{n-1}), \tag{3.7}$$

где $\tilde{\sigma}_1, \dots, \tilde{\sigma}_n$ — элементарные симметрические функции от $\tilde{\lambda}_1, \dots, \tilde{\lambda}_n$, инвариантно при аффинных заменах координат. Кроме того, если поверхности Φ и Π одновременно подвергнуть аффинному преобразованию вида

$$(x^1, \dots, x^{n+1}) \mapsto (a_i^1 x^i, \dots, a_i^n x^i, x^{n+1}),$$

то $\tilde{\lambda}_1, \dots, \tilde{\lambda}_n$ в соответственных точках поверхности Φ и ее образа будут одинаковы. Чтобы не усложнять вычислений, считаем, что $\det(c_{ij}) = 1$, а указанные аффинные преобразования и аффинные замены координат $x^1, \dots, x^n$ будем рассматривать только унимодулярные, т.е. с определителем, равным 1. С учетом этого получаем

$$\tilde{\sigma}_k = C_n^k D\big(\underbrace{z_{ij}, \dots, z_{ij}}_{k}, c_{ij}, \dots, c_{ij}\big),$$

где D — символ смешанного дискриминанта (см. [2]), т.е.

$$\tilde{\sigma}_k = \sum_{\substack{1 \leqslant i_1 < \dots < i_k \leqslant k \\ 1 \leqslant j_1 < \dots < j_k \leqslant k}} Z_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_k} C_{\overline{i_1 \dots i_k}}^{\overline{j_1 \dots j_k}}.$$

Здесь $Z_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_k}$ — минор матрицы (z_{ij}), стоящий в строках с номерами $i_1, \dots, i_k$ и столбцах с номерами $j_1, \dots, j_k$, а $C_{\overline{i_1 \dots i_k}}^{\overline{j_1 \dots j_k}}$ — алгебраическое дополнение минора матрицы (c_{ij}), который стоит в строках и столбцах с теми же номерами. Для простоты обозначим

$$C_n^k D\big(\underbrace{z_{ij}, \dots, z_{ij}}_{k}, c_{ij}, \dots, c_{ij}\big) = D^k.$$

Пусть выпуклая поверхность Φ является графиком функции $z(x^1, \dots, x^n)$, которая удовлетворяет уравнению (3.7). Сначала для функции $z(x^1, \dots, x^n)$ получим необходимые оценки первых и вторых производных.

3.2. C^2-Оценки решения уравнения (3.7) **в ограниченной области.** Так как $\det(z_{ij})$ не меняется от прибавления к функции $z(x^1, \dots, x^n)$ слагаемого вида $c_i x^i + c$, то без ограничения общности можно считать, что поверхность Φ касается плоскости $x^{n+1} = 0$. Через G_h обозначим область на плоскости $x^{n+1} = 0$, где

$$z(x^1, \dots, x^n) \leqslant h.$$

В силу выпуклости поверхности Φ и условия (3.2) матрица (z_{ij}) имеет положительные собственные значения, поэтому поверхность Φ не может быть цилиндром. Следовательно, множество G_h компактно. Пусть d_h — диаметр этого множества. Оценим первые производные функции $z(x^1,\dots,x^n)$ в области G_1.

В области G_1 возьмем точку $(x^1,\dots,x^n)$ и построим такой конус C с вершиной в точке $S\bigl(x^1,\dots,x^n,z(x^1,\dots,x^n)\bigr)$, который проектирует пересечение плоскости $x^{n+1}=2$ с поверхностью Φ. Через Φ_h обозначим часть поверхности Φ, для которой $z(x^1,\dots,x^n)\leqslant h$, а через Φ_h^* и C^* — нормальные изображения Φ_h и конуса C соответственно на плоскости переменных $p_1,\dots,p_n$ (см. [9, § 5, п. 1]). В силу выпуклости Φ_2 имеем $C^*\subset\Phi_2^*$; следовательно, для объемов получается неравенство

$$\operatorname{Vol}(C^*)\leqslant\operatorname{Vol}(\Phi_2^*).$$

Так как высота конуса C не менее 1, а диаметр основания равен d_2, то шар

$$p_1^2+\dots+p_n^2\leqslant\frac{1}{d_2^2}$$

принадлежит C^*. Точка $(p_1,\dots,p_n)=\bigl(z_1(x^1,\dots,x^n),\ \dots,\ z_n(x^1,\dots,x^n)\bigr)$ тоже принадлежит C^*. Значит в C^* лежит конус вращения с радиусом основания $1/d_2$, высотой $\bigl|z_i(x^1,\dots,x^n)\bigr|$ и объемом $\bigl|z_i(x^1,\dots,x^n)\bigr|\varkappa_{n-1}/nd_2^{n-1}$, где $\varkappa_{n-1}$ — объем $(n-1)$-мерного единичного шара. Значит,

$$\operatorname{Vol}(C^*)\geqslant\frac{|z_i(x^1,\dots,x^n)|\varkappa_{n-1}}{nd_2^{n-1}}.$$

Далее,

$$\operatorname{Vol}(\Phi_2^*)=\int\limits_{\Phi_2^*}dp_1\dots dp_n=\int\limits_{G_2}\frac{\partial(p_1,\dots,p_n)}{\partial(x^1,\dots,x^n)}\,dx^1\dots\,dx^n=$$
$$=\int\limits_{G_2}\det(z_{ij})\,dx^1\dots\,dx^n=\int\limits_{G_2}\varphi\,dx^1\dots\,dx^n\leqslant\frac{(1+\varepsilon)d_2^n\varkappa_n}{2^n},$$

где $\varkappa_n$ — объем n-мерного единичного шара. Из неравенства $\operatorname{Vol}(C^*)\leqslant\operatorname{Vol}(\Phi_2^*)$ получаем оценку сверху на $\bigl|z_i(x^1,\dots,x^n)\bigr|$ для всех точек области G_1. Оценка зависит от ε и диаметра d_2 сечения поверхности Φ на высоте 2.

Теперь оценим вторые производные решения уравнения (3.7) в области $G_{1/2}$. Модифицируя прием А. В. Погорелова (см. [10, § 5, п. 2, доказательство теоремы 5.1]), введем в G_1 функцию точки и направления

$$w=(1-z)^se^{(z_1^2+\dots z_n^2)/2}z_{\xi\xi},$$

где индекс ξ означает дифференцирование в направлении ξ, а постоянная $s>0$ будет выбрана позже. Функция w обращается в нуль на границе области G_1, а во внутренних ее точках для всех направлений $w>0$. В силу компактности множества G_1 функция w достигает положительного максимума, равного w_0, во внутренней точке O области G_1 для некоторого направления ξ_0. Это направление является главным направлением квадратичной формы d^2z в точке O. Направим оси $x^1,\dots,x^n$ по главным направлениям формы d^2z в точке O, причем ось x^1 пусть имеет направление ξ_0. Тогда в точке O имеем $z_{ij}=0$ $(i\neq j)$. В новых координатах уравнение поверхности Φ будет по-прежнему иметь вид (3.7), но вообще говоря, с другими c_{ij}. Оставим за этими коэффициентами старые обозначения. По-прежнему $\det c_{ij}=1$.

Итак, в точке O функция

$$w=(1-z)^se^{(z_1^2+\dots+z_n^2)/2}z_{11}$$

достигает максимума. Следовательно, в этой точке

$$d(\ln w)=0,\quad d^2(\ln w)\leqslant0.$$

В точке O получим

$$\frac{\partial \ln w}{\partial x^i} = \frac{s z_i}{z-1} + z_i z_{ii} + \frac{z_{11i}}{z_{11}} = 0, \tag{3.8}$$

$$\frac{\partial^2 \ln w}{\partial x^i \partial x^j} = \frac{s z_{ij}}{z-1} - \frac{s z_i z_j}{(z-1)^2} + \sum_\alpha z_\alpha z_{\alpha ij} + \sum_\alpha z_{\alpha i} z_{\alpha j} + \frac{z_{11ij}}{z_{11}} - \frac{z_{11i} z_{11j}}{z_{11}^2}. \tag{3.9}$$

Продифференцируем (3.7) в точке O по x^α и дважды по x^1. Поделив результаты почленно на (3.7) и введя обозначение

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \sigma_k} = \varphi_k, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \sigma_k \partial \sigma_l} = \varphi_{kl},$$

получим

$$\sum_i \frac{z_{ii\alpha}}{z_{ii}} = \sum_{k,p,q} \frac{\varphi_k}{\varphi} \frac{\partial D^k}{\partial z_{pq}} z_{pq\alpha} \tag{3.10}$$

и

$$\sum_i \frac{z_{ii11}}{z_{ii}} + \sum_{i \neq j} \frac{z_{ii1} z_{jj1}}{z_{ii} z_{jj}} - \sum_{i \neq j} \frac{z_{ij1}^2}{z_{ii} z_{jj}} = \sum_{k,p,q} \frac{\varphi_k}{\varphi} \frac{\partial D^k}{\partial z_{pq}} z_{pq11} +$$
$$+ \sum_{k,p,q,r,s} \frac{\varphi_k}{\varphi} \frac{\partial^2 D^k}{\partial z_{pq} \partial z_{rs}} z_{pq1} z_{rs1} + \sum_{k,l,p,q,r,s} \frac{\varphi_{kl}}{\varphi} \frac{\partial D^k}{\partial z_{pq}} \frac{\partial D^l}{\partial z_{rs}} z_{pq1} z_{rs1}. \tag{3.11}$$

При этом с помощью (3.3) получаем

$$\left| \sum_k \frac{\varphi_k}{\varphi} \frac{\partial D^k}{\partial z_{ii}} \right| \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\varepsilon \varphi}{\varphi \sigma_k} \frac{\sigma_k}{z_{ii}} = \frac{\varepsilon_1}{z_{ii}}, \quad \varepsilon_1 = (n-1)\varepsilon,$$

$$\left| \sum_k \frac{\varphi_k}{\varphi} \frac{\partial D^k}{\partial z_{ij}} \right| \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} \left| \frac{\varepsilon \varphi}{\varphi \sigma_k} \sigma_{k-1}^{ij} c_{ij} \right| \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} \left| \frac{\varepsilon}{\sigma_k} \sigma_{k-1}^{ij} \sqrt{c_{ii} c_{jj}} \right| \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\varepsilon}{\sigma_k} \sqrt{\frac{\sigma_k}{z_{ii}} \frac{\sigma_k}{z_{jj}}} \leqslant \frac{\varepsilon_1}{\sqrt{z_{ii} z_{jj}}}.$$

Здесь σ_{k-1}^{ij} — элементарная симметрическая функция порядка $k-1$ от всех $\tilde\lambda_1, \dots, \tilde\lambda_n$, кроме $\tilde\lambda_i$ и $\tilde\lambda_j$.

Аналогично получаем с помощью (3.3) и (3.4)

$$\left| \sum_k \frac{\varphi_k}{\varphi} \frac{\partial^2 D^k}{\partial z_{pq} \partial z_{rs}} \right| \leqslant \frac{\varepsilon_1}{\sqrt{z_{pp} z_{qq} z_{rr} z_{ss}}},$$

$$\left| \sum_{k,l} \frac{\varphi_{kl}}{\varphi} \frac{\partial D^k}{\partial z_{pq}} \frac{\partial D^l}{\partial z_{rs}} \right| \leqslant \frac{\varepsilon_2}{\sqrt{z_{pp} z_{qq} z_{rr} z_{ss}}}, \quad \varepsilon_2 = \varepsilon (n-1)^2.$$

Умножим (3.10) на z_α и просуммируем по α. Получим

$$\sum_{\alpha,i} \frac{z_\alpha z_{ii\alpha}}{z_{ii}} - \sum_{\alpha,i,j,k} \frac{\varphi_k}{\varphi} \frac{\partial D^k}{\partial z_{ij}} z_{ij\alpha} z_\alpha = 0. \tag{3.12}$$

Для элементов матрицы (A_{ij}), где

$$A_{ii} = \frac{1}{z_{ii}} - \sum_k \frac{\varphi_k}{\varphi} \frac{\partial D^k}{\partial z_{ii}}, \quad A_{ij} = \sum_k \frac{\varphi_k}{\varphi} \frac{\partial D^k}{\partial z_{ij}}, \quad i \neq j,$$

получим

$$\frac{1-\varepsilon_1}{z_{ii}} \leqslant |A_{ii}| \leqslant \frac{1+\varepsilon_1}{z_{ii}}, \quad |A_{ij}| \leqslant \frac{\varepsilon_1}{\sqrt{z_{ii} z_{jj}}}, \quad i \neq j.$$

Поэтому все ее главные миноры, а значит, и собственные значения, положительны. Таким образом,

$$z_{11}\sum_{i,j} A_{ij}\frac{\partial^2 \ln w}{\partial x^i \partial x^j} \leqslant 0.$$

С учетом (3.9) и (3.12) последнее неравенство дает

$$-\frac{snz_{11}(1+\varepsilon_1)}{1-z} - \sum_{i,j} z_{11}A_{ij}\frac{sz_iz_j}{(z-1)^2} + \sum_i z_{11}z_{ii}^2A_{ii} + \sum_{i,j} z_{11ij}A_{ij} - \sum_{i,j}\frac{A_{ij}z_{11i}z_{11j}}{z_{11}} \leqslant 0. \tag{3.13}$$

Третье слагаемое в левой части (3.11) преобразуем следующим образом:

$$\sum_{i\neq j}\frac{z_{ij1}^2}{z_{ii}z_{jj}} = \sum_{(i\neq j)>1}\frac{z_{ij1}^2}{z_{ii}z_{jj}} + \frac{2}{s}\sum_{i>1}\frac{z_{i11}^2}{z_{ii}z_{11}} + (2-\frac{2}{s})\sum_{j>1}\frac{z_{1j1}^2}{z_{11}z_{jj}} \tag{3.14}$$

и, используя (3.8), получим

$$\frac{2}{s}\frac{z_{i11}}{z_{ii}z_{11}} = \frac{2}{s}\frac{z_{11}}{z_{ii}}\left(\frac{sz_i}{z-1} + z_iz_{ii}\right)^2 > \frac{2sz_i^2z_{11}}{(z-1)^2z_{ii}} + \frac{4z_i^2z_{11}}{z-1}. \tag{3.15}$$

Возведем (3.10) почленно в квадрат, положив $\alpha = 1$, умножим на $(1+1/n^2)$ и сложим с (3.13), а затем из результата вычтем (3.11). Так как

$$\sum_i z_{11}z_{ii}^2A_{ii} > z_{11}^2(1-\varepsilon_1^2),$$

то с учетом (3.14), (3.15) и оценок на коэффициенты в правых частях (3.10) и (3.11) получим неравенство

$$\begin{aligned}-\frac{snz_{11}(1+\varepsilon_1)}{1-z} - \frac{2sz_1^2}{(z-1)^2} + \frac{sz_{11}}{(z-1)^2}\sum_{i,j}\left(\frac{2\delta_{ij}}{z_{ii}} - A_{ij}\right)z_iz_j+&\\ + z_{11}^2(1-\varepsilon_1) + \frac{4z_{11}}{z-1}\sum_{i>1}z_i^2 + \sum_{i,j,k,l}B_{ij,kl}\frac{z_{ij1}z_{kl1}}{\sqrt{z_{ii}z_{jj}z_{kk}z_{ll}}} \leqslant 0.&\end{aligned} \tag{3.16}$$

Матрица $(2\delta_{ij}/z_{ii} - A_{ij})$ имеет положительные собственные значения, поэтому третье слагаемое в (3.16) неотрицательно. Для коэффициентов $(n^2\times n^2)$-матрицы $(B_{ij,kl})$ получаем следующие оценки:

$$B_{11,11} \geqslant \frac{1}{n^2} - 2\varepsilon_2, \qquad B_{i1,i1} = B_{1i,1i} \geqslant 1 - \frac{1}{s} - 2\varepsilon_2 \quad (i>1),$$
$$B_{ij,ij} \geqslant 1 - 2\varepsilon_2 \quad (i,j>1), \qquad 0 < B_{ii,jj} \leqslant \frac{1}{n^2} + 2\varepsilon_2 \quad i\neq j,$$
$$|B_{ij,kl}| \leqslant 2\varepsilon_2, \quad \text{если упорядоченные пары } (ij),\ (kl) \text{ различны.}$$

При достаточно большом s, например $s \geqslant n^2$, собственные значения матрицы $B_{ij,kl}$ положительны (см. [8, теорема 7.2.1] и, следовательно, последнее слагаемое в (3.16) неотрицательно. Усиливая (3.16), получаем

$$-\frac{snz_{11}(1+\varepsilon_1)}{1-z} - \frac{2sz_1^2}{(z-1)^2} + z_{11}^2(1-\varepsilon_1) + \frac{4z_{11}}{z-1}\sum_{i>1}z_i^2 \leqslant 0.$$

Умножив последнее неравенство на $(1-z)^{2s}e^{z_1^2+\dots+z_n^2}$ и положив $s = n^2$, получим в точке O неравенство вида

$$(1-\varepsilon_1)w_0^2 + Qw_0 + R \leqslant 0,$$

где Q и R содержат $(1-z)$ в неотрицательных степенях и зависят также от ε и первых производных функции z. Так как в области G_1 функция z удовлетворяет неравенствам $0 \leqslant 1-z \leqslant 1$, то из оценок на первые производные функции z в области G_1 получаем, что Q и R оцениваются через d_2 и ε. Следовательно, w_0 оценивается через эти же величины. Обозначив эту оценку через $w_0(d_2,\varepsilon)$, получаем для всех точек и всех направлений ξ в области G_1

$$(1-z)^{n^2}e^{(z_1^2+\dots+z_n^2)/2}z_{\xi\xi}\leqslant w_0(d_2,\varepsilon).$$

Отсюда для всех точек и всех направлений в области $G_{1/2}$ получаем

$$z_{\xi\xi}\leqslant 2^{n^2}w_0(d_2,\varepsilon).$$

Очень важно, что оценка может быть выражена только через d_2 и ε вне зависимости от коэффициентов c_{ij}. Это позволит в следующем параграфе получить глобальную оценку на вторые производные функции z.

3.3. Глобальная оценка для вторых производных решения уравнения (3.7)**.** Обозначим через T_h пересечение плоскости $x^{n+1}=h$ с выпуклым телом, ограниченным поверхностью Φ. Не ограничивая общности, можно считать, что плоскость $x^{n+1}=0$ касается поверхности Φ в точке S, а ось x^{n+1} проходит через центр тяжести сечения T_h. Пусть E — n-мерный эллипсоид минимального объема, содержащий T_h, центр которого совпадает с центром тяжести T_h. Подвергнем поверхности Φ и Π унимодулярному аффинному преобразованию

$$(x^1,\dots,x^n,x^{n+1})\mapsto(\alpha_i^1x^i,\dots,\alpha_i^nx^i,x^{n+1}),$$

переводящему эллипсоид E в шар E' радиуса r, а поверхности Φ и Π — в поверхности Φ' и Π'. Оси $x^1,\dots,x^n$ можно выбрать так, что это преобразование будет иметь вид

$$\chi:(x^1,\dots,x^n,x^{n+1})\mapsto(\mu_1x^1,\dots,\mu_nx^n,x^{n+1}).$$

При этом поверхности Φ' и Π' удовлетворяют уравнению (3.7) с той же функцией φ, и для новых коэффициентов c'_{ij} также выполняется условие $\det(c'_{ij})=1$. Докажем, что величина h/r^2 ограничена сверху и снизу некоторыми положительными константами, зависящими только от ε.

Для поверхности Φ' введем Φ'_h, G'_h, Φ'^*_h так же, как вводились Φ_h, G_h, Φ^*_h для поверхности Φ в п. 3.2. Тогда как и в п. 3.2 имеем

$$\operatorname{Vol}(\Phi'^*_h)=\int\limits_{\Phi'^*_h}dp_1\dots dp_n=\int\limits_{G'_h}\det(z_{ij})\,dx^1\dots dx^n=\int\limits_{G'_h}\varphi\,dx^1\dots dx^n\leqslant(1+\varepsilon)r^n\varkappa_n.$$

Объем нормального изображения конуса, проектирующего шар E' из точки $s'=\chi(S)$, не менее, чем $(h/2r)^n\varkappa_n$. Сравнивая его с $\operatorname{Vol}(\Phi'^*_h)$, получаем

$$\left(\frac{h}{2r}\right)^n\varkappa_n\leqslant(1+\varepsilon)r^n\varkappa_n,$$

или, что равносильно, $h/r^2\leqslant 2(1+\varepsilon)^{1/n}$.

Подвергнем шар E' гомотетии с коэффициентом $k=1/n^{3/2}$ относительно его центра. Полученный шар E'' будет содержаться в $T'_h=\chi(T_h)$ (см. [5]). Спроектируем шар E' конусом V из точки $B(0,\dots,0,-h)$. Часть поверхности Φ'_h, лежащую внутри этого конуса, обозначим Φ_V. Обозначим нормальные изображения Φ_V и V через Φ^*_V и V^*. Для них имеем $\Phi^*_V\subset V^*$. Для объема V^* получаем

$$\operatorname{Vol}(V^*)=\left(\frac{2hn^{3/2}}{r}\right)^n\varkappa_n.$$

Подвергнем шар E'' гомотетии $H_B^{1/2}$ с коэффициентом $1/2$ относительно точки B. Полученный шар $H_B^{1/2}(E'')$ лежит в плоскости $x^{n+1}=0$ и содержит проекцию поверхности Φ_V. Поэтому

$$\operatorname{Vol}(\Phi^*_V)\geqslant\int\limits_{H_B^{1/2}(E'')}\det(z_{ij})\,dx^1\dots dx^n=\int\limits_{H_B^{1/2}(E'')}\varphi\,dx^1\dots dx^n\geqslant(1-\varepsilon)\left(\frac{r}{2n^{3/2}}\right)^n\varkappa_n.$$

Из неравенства $\mathrm{Vol}(\Phi_V^*) \leqslant \mathrm{Vol}(V^*)$ получаем оценку снизу на h/r^2:

$$\frac{h}{r^2} \geqslant \frac{(1-\varepsilon)^{1/n}}{4n^3}.$$

Подвергнем поверхности Φ' и Π' аффинному преобразованию

$$\nu : (x^1, \dots, x^n, x^{n+1}) \mapsto \left(\sqrt{\frac{2}{h}} x^1, \ \dots, \ \sqrt{\frac{2}{h}} x^n, \ \frac{2}{h} x^{n+1} \right).$$

В результате получим поверхности $\overline{\Phi}$ и $\overline{\Pi} = \Pi'$; при этом поверхность $\overline{\Phi}$ удовлетворяет уравнению (3.7). Композиция $\nu \circ \chi$ наших двух аффинных преобразований переведет плоскость $x^{n+1} = h$ в плоскость $x^{n+1} = 2$; при этом сечение поверхности $\overline{\Phi}$ плоскостью $x^{n+1} = 2$ содержится в шаре радиуса $r\sqrt{2/h}$. Из оценки снизу на h/r^2 получаем для диаметра $\overline{d}_2$ этого сечения оценку

$$\overline{d}_2 \leqslant \frac{4\sqrt{2} n^{3/2}}{(1-\varepsilon)^{1/2n}}, \tag{3.17}$$

зависящую только от ε.

Пусть поверхность $\overline{\Phi}$ задается графиком функции $\overline{z}(x^1, \dots, x^n)$. В соответствующих точках поверхностей Φ и $\overline{\Phi}$ для вторых производных функций $z(x^1, \dots, x^n)$ и $\overline{z}(x^1, \dots, x^n)$ имеют место соотношения

$$\mu_i^2 \overline{z}_{ii} = z_{ii}, \quad i = 1, \dots, n. \tag{3.18}$$

Запишем эти соотношения для точки S на поверхности Φ и соответствующей ей точки $\overline{S}$ на поверхности $\overline{\Phi}$:

$$\mu_i^2 \overline{z}_{ii}(\overline{S}) = z_{ii}(S), \quad i = 1, \dots, n. \tag{3.19}$$

Из результатов раздела 2 получаем оценку сверху на $\overline{z}_{ii}(\overline{S})$ через $\overline{d}_2$ и ε, а с учетом (3.17) эта оценка выражается только через ε. Так как

$$\overline{z}_{11} \dots \overline{z}_{nn} \geqslant \det(\overline{z}_{ij}) = \varphi \geqslant 1 - \varepsilon$$

(см. [3, теорема 8.6.5]), то мы получаем для $\overline{z}_{ii}(\overline{S})$ положительную оценку снизу, зависящую только от ε. Тогда соотношение (3.19) позволяет оценить коэффициенты μ_i снизу и сверху через ε и $z_{ii}(S)$.

Множество точек плоскости $x^{n+1} = 0$, для которых $\overline{z}(x^1, \dots, x^n) \leqslant 1/2$, обозначим $\overline{G}_{1/2}$. Из результатов раздела 2 следует существование оценки, зависящей от $\overline{d}_2$ (значит, только от ε), на $\overline{z}_{ii}$ в области $\overline{G}_{1/2}$. Эта область является образом области $G_{h/4}$ при аффинном преобразовании $\nu \circ \chi$. Возвращаясь к соотношению (3.18), получаем, что для вторых производных z_{ii} решения $z(x^1, \dots, x^n)$ уравнения (3.7) всюду в области $G_{h/4}$ существует оценка сверху. При фиксированном ε она может быть выражена в конечном счете только через вторые производные $z_{ii}(S)$. Так как $h > 0$ произвольно, то такая оценка имеет место для всех точек поверхности Φ. Отсюда как и ранее получается также положительная оценка на z_{ii} снизу.

В силу полноты поверхности Φ и ограниченности z_{ii} сверху получаем, что проекцией поверхности Φ является вся плоскость $x^{n+1} = 0$. Это позволит в следующем разделе ввести на всей плоскости $x^{n+1} = 0$ специальную метрику.

3.4. Дифференциальное неравенство для решения уравнения (3.7).

Запишем уравнение (3.7) в виде

$$\tilde{\sigma}_n - \varphi(\tilde{\sigma}_1, \dots, \tilde{\sigma}_{n-1}) = 0.$$

Рассматривая левую часть как функцию от производных z_{ij}, введем обозначение

$$\frac{\partial(\tilde{\sigma}_n - \varphi)}{\partial z_{ij}} = g^{ij}. \tag{3.20}$$

Если допускать только аффинные преобразования переменных $x^1, \dots, x^n$, то величины g^{ij} будут координатами симметричного тензора типа $(0,2)$. Введем метрику на плоскости $x^{n+1} = 0$, взяв g^{ij} в качестве координат контравариантного метрического тензора. Докажем, что эта метрика положительно определенная. Для этого поворотом осей добьемся, чтобы в рассматриваемой точке при $i \neq j$ выполнялись соотношения $z_{ij} = 0$. Тогда в этой точке

$$g^{ij} = \sigma_n A_{ij},$$

где матрица (A_{ij}) была введена в п. 3.2. Положительная определенность метрики следует из положительности собственных значений матрицы (A_{ij}).

Так как мы допускаем только аффинные преобразования координат, то производные z_{ij}, z_{ijk}, z_{ijkl} являются координатами симметричных ковариантных тензоров соответствующих рангов. Будем поднимать и опускать индексы у тензоров с помощью введенной метрики, в частности

$$z^i_{ij} = g^{ia} z_{aij}, \quad z^{ijk} = g^{ia} g^{jb} g^{kc} z_{abc}.$$

Рассмотрим инвариант $P = z_{ijk} z^{ijk}$. Очевидно, $P \geqslant 0$. Равенство $P(x) = 0$ возможно лишь в том случае, когда все производные z_{ijk} в точке x обращаются в нуль.

Пусть Δ — оператор Лапласа—Бельтрами относительно введенной метрики; ковариантные производные будем обозначать с помощью точки с запятой (;). В этом разделе получим инвариантную оценку для $\Delta(\sqrt{P})$.

Так же, как при выводе неравенства (2.8), получаем

$$\Delta(\sqrt{P}) \geqslant \frac{z^{ijk} \Delta z_{ijk}}{P^{1/2}}. \tag{3.21}$$

Дифференцируя уравнение $\tilde{\sigma}_n - \varphi(\tilde{\sigma}_1, \dots, \tilde{\sigma}_{n-1}) = 0$ по x^k, с учетом (3.20) получим

$$z_{ijk} g^{ij} = 0. \tag{3.22}$$

Следовательно, $g^{lq} z_{iql;jk} = 0$. Тогда

$$\Delta z_{ijk} = g^{lq} z_{ijk;lq} = g^{lq}\big(z_{ijl;kq} - z_{ijl;qk}\big) + g^{lq}\big(z_{ijl;q} - z_{iql;j}\big)_{;k} + g^{lq}\big(z_{ijk;l} - z_{ijl;k}\big)_{;q}.$$

Далее получаем

$$\begin{aligned} z^{ijk} \Delta z_{ijk} = z^{ijk} g^{lq} \Bigg(& - 5 z_{ijh} \Gamma^h_{qp} \Gamma^p_{kl} + 6 z_{ihl} \Gamma^h_{kp} \Gamma^p_{qj} - z_{ijh} \Gamma^h_{kp} \Gamma^p_{ql} - \\ & - 2 z_{hjl} \Gamma^h_{qp} \Gamma^p_{ki} + 4 z_{hqp} \Gamma^h_{ij} \Gamma^p_{lk} - 4 z_{phk} \Gamma^h_{jl} \Gamma^p_{iq} - 2 z_{hjlk} \Gamma^h_{iq} - z_{ijhk} \Gamma^h_{lq} + \\ & + 3 z_{hqlk} \Gamma^h_{ij} - 3 z^h_{jk} \left(\frac{1}{2} \partial_{lq} g_{ih} - \Gamma^a_{il} \partial_q g_{ah} \right) + 2 z^h_{jl} \left(\frac{1}{2} \partial_{ik} g_{qh} - \Gamma^a_{qi} \partial_k g_{ah} \right) \Bigg). \end{aligned} \tag{3.23}$$

Здесь Γ^k_{ij} — символы Кристоффеля для введенной метрики. Так как P — аффинный инвариант, то для оценки $\Delta(\sqrt{P})$ можно сделать унимодулярную замену координат $x^1, \dots, x^n$, чтобы выполняли условия $c_{ij} = \delta_{ij}$ и в рассматриваемой точке x $z_{ij} = 0$ при $i \neq j$. Тогда в точке x получим $\tilde{\lambda}_i = z_{ii}$, $i = 1, \dots, n$; следовательно,

$$g^{ii} = \frac{\sigma_n}{z_{ii}} - \sum_k \varphi_k \sigma^i_{k-1},$$

где σ^i_{k-1} — $(k-1)$-я элементарная симметрическая функция от $z_{11}, \dots, z_{nn}$ за исключением z_{ii}, $\sigma^i_0 = 1$,

$$g^{ij} = 0, \quad i \neq j.$$

Тогда, учитывая (3.2) и (3.3), получаем в точке x

$$\frac{(1-\varepsilon)(1-\varepsilon_1)}{z_{ii}} \leqslant g^{ii} \leqslant \frac{(1+\varepsilon)(1+\varepsilon_1)}{z_{ii}}. \tag{3.24}$$

В силу диагональности метрики в точке x для всех i, j, k

$$P \geqslant z^2_{ijk} g^{ii} g^{jj} g^{kk}, \quad P \geqslant (z^k_{ij})^2 g^{ii} g^{jj} g_{kk}, \quad P \geqslant (z^{ijk})^2 g_{ii} g_{jj} g_{kk}$$

(без суммирования). Поэтому

$$|z_{ijk}| \leqslant \left(\frac{P}{g^{ii}g^{jj}g^{kk}}\right)^{1/2}, \quad |z^k_{ij}| \leqslant \left(\frac{P}{g^{ii}g^{jj}g_{kk}}\right)^{1/2}, \quad |z^{ijk}| \leqslant \left(\frac{P}{g_{ii}g_{jj}g_{kk}}\right)^{1/2}. \tag{3.25}$$

Из тождества

$$\partial_r g_{lj} = -\partial_r g^{ik} g_{ij} g_{kl}$$

в силу диагональности метрики в точке x получим при $l \neq j$

$$\partial_r g_{lj} = \left(\frac{\sigma_n z_{ljr}}{z_{ll}z_{jj}} - \sum_{k=2}^{n-1} \varphi_k z_{ljr}\sigma^{lj}_{k-2}\right) g_{jj}g_{ll}.$$

Так как $\sigma^{lj}_{k-2} < \sigma_k/z_{ll}z_{jj}$, то, учитывая (3.2), (3.3) и (3.25), получаем

$$\frac{1-\varepsilon_1}{(1+\varepsilon)(1+\varepsilon_1)} \leqslant \frac{\sigma_n}{z_{ll}z_{jj}} - \sum_{k=2}^{n-1} \varphi_k \sigma^{lj}_{k-2} \leqslant \frac{1+\varepsilon_1}{(1-\varepsilon)(1-\varepsilon_1)}.$$

Следовательно, можно записать

$$\partial_r g_{lj} = \varepsilon_{ljr} z_{ljr}, \quad |\varepsilon_{ljr} - 1| \leqslant 4\varepsilon_1; \tag{3.26}$$

здесь величины ε_{ljr} не зависят от r. Далее,

$$\partial_r g^{jj} = \frac{1}{z_{jj}} \sum_{i\neq j} \frac{\sigma_n z_{iir}}{z_{ii}} - \sum_{k,i} z_{iir}\varphi_k \sigma^{ij}_{k-2} - \sum_{k,l,i} z_{iir}\varphi_{kl}\sigma^j_{k-1}\sigma^i_{l-1}. \tag{3.27}$$

Из (3.22) в точке x получаем

$$\frac{1}{z_{jj}} z_{iir} g^{ii} = 0,$$

т.е.

$$\frac{1}{z_{jj}}\left(\sum_i \frac{\sigma_n z_{iir}}{z_{ii}} - \sum_{k,i} \varphi_k \sigma^i_{k-1} z_{iir}\right) = 0.$$

Сложим это равенство почленно с (3.27). Учитывая (3.3), (3.4), (3.24), (3.25) и равенство $\partial_r g_{jj} = -\partial_r g^{jj} g^2_{jj}$ (без суммирования), получим

$$\partial_r g_{jj} = \varepsilon_{jjr} z_{jjr} + \tilde{\varepsilon}_{jjr}, \quad \tilde{\varepsilon}_{jjr}| \leqslant \varepsilon_2(n+1)\left(\frac{P}{g^{jj}g^{jj}g^{rr}}\right)^{1/2},$$

где ε_{jjr}, как и в (3.26), удовлетворяют неравенству

$$|\varepsilon_{jjr} - 1| \leqslant 4\varepsilon_1$$

и не зависят от r.

С помощью соотношения (3.27) $\partial_r g_{jj}$ можно записать также в виде

$$\partial_r g_{jj} = -\sum_i \frac{\partial^2(\sigma_n - \varphi)}{\partial\lambda_i \partial\lambda_j} z_{iir} g^2_{jj}. \tag{3.28}$$

Дифференцируя (3.22) по x^r в точке x, получаем $g^{ii}z_{iikr} = -z_{ljk}\partial_r g^{lj}$. Так как

$$\left|\partial_r g^{lj}\right| \leqslant \big(1 + 6\varepsilon_1 + (n+1)\varepsilon_2\big)\left(\frac{P}{g_{ll}g_{jj}g^{rr}}\right)^{1/2},$$

то из неравенства $n^2\big(1+6\varepsilon_1+(n+1)\varepsilon_2\big) < 2n^2$ получим

$$\left|g^{ii}z_{iikr}\right| \leqslant 2n^2 \frac{P}{(g^{kk}g^{rr})^{1/2}}. \tag{3.29}$$

В силу диагональности метрики в точке x имеем

$$\partial_{rp} g_{jl} = g_{jj}g_{ll}\Big(-\partial_{rp}g^{jl} + \partial_r g^{il}\partial_p g^{ij} g_{ii} + \partial_r g^{ij}\partial_p g^{il} g_{ii}\Big). \tag{3.30}$$

Так как при $i \neq k$

$$\partial_{rp} g^{ik} = -\frac{\partial^2(\sigma_n - \varphi)}{\partial\lambda_i \partial\lambda_k} z_{ikrp} - \sum_s \frac{\partial^3(\sigma_n - \varphi)}{\partial\lambda_i \partial\lambda_k \partial\lambda_s}\Big(z_{ikr} z_{ssp} + z_{ikp} z_{ssr}\Big),$$

а при $\varepsilon = 0$ все третьи производные в выражении $\partial_{rp} g_{jl}$ исчезают, то все они оцениваются величиной

$$\frac{(n-1)\varepsilon_2(1+\varepsilon)^3(1+\varepsilon_1)^3 P}{(g^{jj} g^{ll} g^{rr} g^{pp})^{1/2}}.$$

Использовав соотношение

$$(n-1)(1+\varepsilon)^3(1+\varepsilon_1)^3 < n,$$

получим при $i \neq k$

$$\partial_{rp} g_{ik} = \varepsilon_{ikrp} z_{ikrp} + \tilde\varepsilon_{ikrp}, \quad |\tilde\varepsilon_{ikrp}| \leqslant \frac{n\varepsilon_2 P}{(g^{rr} g^{pp} g^{jj} g^{ll})^{1/2}}. \tag{3.31}$$

Здесь $\varepsilon_{ikrp} = \varepsilon_{ikr}$ из формулы (3.26). Далее,

$$\partial_{rp} g^{jj} = \sum_i \frac{\partial^2(\sigma_n - \varphi)}{\partial\lambda_i \partial\lambda_j} z_{iirp} - \sum_{s,t} \frac{\partial^3(\sigma_n - \varphi)}{\partial\lambda_j \partial\lambda_s \partial\lambda_t} z_{stp} z_{str}.$$

Отсюда и из (3.30), используя те же соображения, получаем

$$\partial_{rp} g_{jj} = -g_{jj}^2 \sum_i \frac{\partial^2(\sigma_n - \varphi)}{\partial\lambda_i \partial\lambda_j} z_{iirp} + \tilde\varepsilon_{jjrp}, \tag{3.32}$$

где $\tilde\varepsilon_{jjrp}$ оценивается так же, как в (3.31). Теперь будем оценивать слагаемые в правой части (3.23), содержащие четвертые производные функции z. Из (3.26), (3.28), (3.31), (3.32) получаем

$$\begin{aligned} z^{ijk} g^{lq}\Big(-2z_{hjlk}\Gamma^h_{iq} + z^h_{jl}\partial_{ik} g_{qh}\Big) &= \\ = z^{ijk} g^{ll} g^{hh}\Big(-z_{hjlk} z_{lhi}\varepsilon_{lhi} + z_{ilh}\big(z_{lhjk}\varepsilon_{lhjk} + \bar\varepsilon_{lhjk}\big)\Big) &= z^{ijk} g^{ll} g^{hh} z_{ilh}\tilde\varepsilon_{lhjk}, \end{aligned}$$

и использовав еще (3.25) —

$$\Big| z^{ijk} g^{lq}\Big(-2z_{hjlk}\Gamma^h_{iq} + z^h_{jl}\partial_{ik} g_{qh}\Big)\Big| \leqslant n^6 \varepsilon_2 P^2. \tag{3.33}$$

Далее,

$$\begin{aligned} g^{lq}\left(3z_{hqlk}\Gamma^h_{ij} - \frac{3}{2} z^h_{ji}\partial_{lq} g_{kh}\right) &= g^{ll} g^{hh}\left(\frac{3}{2} z_{llhk}\big(2\partial_j g_{ih} - \partial_h g_{ij}\big) - \frac{3}{2} z_{hij}\partial_{ll} g_{kh}\right) = \\ &= g^{ll} g^{hh}\left(\frac{3}{2} z_{llhk} z_{ijh}\big(2\varepsilon_{ihj} - \varepsilon_{ijh}\big) - \frac{3}{2} z_{hij}\big(z_{khll}\varepsilon_{khll} + \bar\varepsilon_{khll}\big)\right) = \\ &= \frac{3}{2} g^{ll} g^{hh} z_{ijh}\Big(z_{llhk}\big(2\varepsilon_{ihj} - \varepsilon_{ijh} - \varepsilon_{ihll}\big) - \tilde\varepsilon_{khll}\Big). \end{aligned}$$

Отсюда, используя (3.25), (3.26), (3.29) и тот факт, что $\tilde\varepsilon_{khll}$ не зависит от l, получаем оценку

$$\left| z^{ijk} g^{lq}\left(3z_{hqlk}\Gamma^h_{ij} - \frac{3}{2} z^h_{jk}\partial_{lq} g_{ih}\right)\right| \leqslant 72 n^7 \varepsilon_1 P^2 + \frac{3}{2} n^6 \varepsilon_2 P^2. \tag{3.34}$$

Так как

$$P_{;h} = 2z^{ijk} z_{ijk;h} = 2z^{ijk}\Big(z_{ijkh} - z_{pjk}\Gamma^p_{ih} - z_{ipk}\Gamma^p_{jh} - z_{ijp}\Gamma^p_{kh}\Big),$$

то получаем в точке x

$$z^{ijk} g^{lq} z_{ijkh}\Gamma^h_{lq} = \Big(\frac{1}{4} P_{,h} + \frac{3}{2} z_{pjk}\Gamma^p_{ih} z^{ijk}\Big) g^{hh} g^{ll} z_{llh}\Big(2\varepsilon_{lhl} - \varepsilon_{llh}\Big).$$

Как и ранее, получаем

$$\Big| z_{pjk}\Gamma^p_{ih} z^{ijk} g^{hh} g^{ll} z_{llh}\big(2\varepsilon_{lhl} - \varepsilon_{llh}\big)\Big| \leqslant 18 n^6 P^2 \varepsilon_1.$$

Используя неравенство Коши для каждой пары индексов $h, l = 1, \ldots, n$, получим

$$\Big|P_{,h} g^{hh} g^{ll} z_{llh}\big(2\varepsilon_{lhl} - \varepsilon_{llh}\big)\Big| \leqslant \frac{nP_{,h}^2 g^{hh}}{\delta P} + 18^2\delta n^2 \varepsilon_1^2 P^2,$$

где δ — любое положительное число. В силу диагональности метрики в точке x имеем

$$\frac{P_{;h}^2 g^{hh}}{4P} = \big|\operatorname{grad}\sqrt{P}\big|^2.$$

Используя это равенство, получаем оценку

$$\Big|z^{ijk} g^{lq} z_{ijkh}\Gamma^h_{lq}\Big| \leqslant 27n^6\varepsilon_1 P^2 + 81\delta n^2\varepsilon_1^2 P^2 + \frac{n|\operatorname{grad}\sqrt{P}|^2}{\delta}. \tag{3.35}$$

Теперь можно считать, что в правой части (3.23) осталось $57n^6$ слагаемых типа

$$z^{ijk} g^{ll} z_{ijh}\partial_h g_{lp}\partial_p g_{kl} g^{hh} g^{pp},$$

каждое из которых содержит производные функции z не выше третьего порядка. Используя (3.22), (3.25), (3.26), (3.27), получаем соотношение

$$\begin{aligned} z^{ijk} g^{lq}\Big(&-5z_{ijh}\Gamma^h_{qp}\Gamma^p_{kl} + 6z_{ihl}\Gamma^h_{kp}\Gamma^p_{qj} - z_{ijh}\Gamma^h_{kp}\Gamma^p_{ql} - 2z_{hjl}\Gamma^h_{qp}\Gamma^p_{ki} + \\ &+ 4_{hqp}\Gamma^h_{ij}\Gamma^p_{lk} - 4z_{phk}\Gamma^h_{jl}\Gamma^p_{iq} + 3z^h_{jk}\Gamma^a_{il}\partial_q g_{ah} - 2z^h_{jl}\Gamma^a_{qi}\partial_k g_{ah}\Big) \geqslant \\ &\geqslant \frac{1}{4}\Big(3z^{ijk} z^s_{ij} z_{lsq} z^{lq}_k - 2z^{ijk} z^{sq}_i z_{lsk} z^l_{qj}\Big) - 57\Big(20n^6\varepsilon_1 + 4n^6\varepsilon_2\Big)P^2. \end{aligned} \tag{3.36}$$

Введем двухвалентный и четырехвалентный тензоры с координатами P_{ik} и P_{ijkl} формулами

$$P_{ik} = z^j_{hi} z^h_{jk}, \quad P_{ijkl} = z^a_{il} z_{ajk} - z^a_{ik} z_{ajl}.$$

Тогда

$$g^{ik} P_{ik} = P, \quad P_{ijkl}P^{ijkl} + P_{ik}P^{ik} = 3z^{ijk} z^s_{ij} z_{lsq} z^{lq}_k - 2z^{ijk} z^{sq}_i z_{lsk} z^l_{qj}$$

и имеют место соотношения (см. доказательство формулы (2.3))

$$P_{ik}P^{ik} \geqslant \frac{P^2}{n}, \quad P_{ijkl}P^{ijkl} \geqslant \frac{4P_{ik}P^{ik}}{n-2} - \frac{2P^2}{(n-1)(n-2)}.$$

Следовательно,

$$3z^{ijk} z^s_{ij} z_{lsq} z^{lq}_k - 2z^{ijk} z^{sq}_i z_{lsk} z^l_{qj} \geqslant \frac{n+1}{n(n-1)}P^2. \tag{3.37}$$

Обозначив для краткости

$$A = \frac{n+1}{4n(n-1)} - \Big(72n^7 + 1167n^6 + 81\delta n^2\Big)\varepsilon_1 - 230{,}5n^6\varepsilon_2, \tag{3.38}$$

из (3.21), (3.23), (3.33)–(3.38) получаем неравенство

$$\Delta\sqrt{P} \geqslant AP^{3/2} - \frac{n|\operatorname{grad}\sqrt{P}|^2}{\delta P^{1/2}}. \tag{3.39}$$

Это неравенство выполняется в любой точке x, где $P(x) \neq 0$, с любым $\delta > 0$ и является инвариантным при аффинных преобразованиях координат $x^1, \ldots, x^n$.

3.5. Доказательство теоремы о полных выпуклых решениях уравнения (3.7)**.** Заметим, что случай $c_{ij} \neq \delta_{ij}$ не является более общим по сравнению с $c_{ij} = \delta_{ij}$, так как сводится к нему аффинным преобразованием координат $x^1, \dots, x^n$. Нам потребовалось рассмотреть случай, когда $c_{ij}\xi^i\xi^j$ — произвольная положительно определенная форма, для того, чтобы получить глобальные оценки на вторые производные функции $z(x)$. Произвольность коэффициентов c_{ij} использовалась для оценок коэффициентов μ_i из (3.19). Далее считаем, что $x^1, \dots, x^n$ — прямоугольные декартовы координаты.

Пусть $z(x)$ — полное выпуклое решение уравнения (3.1). Если инвариант P во всех точках равен нулю, то все третьи производные функции $z(x)$ тождественно равны нулю и $z(x)$ — квадратичный полином. Предположим, что существует такая точка O, что $P(O) \neq 0$. Докажем, что вместе с неравенством (3.39) это приводит к противоречию.

Положим $\sqrt{P(O)} = 2a$ и построим положительную функцию $v(x)$, обладающую следующими свойствами:

(1) функция v определена в открытой области Σ с компактным замыканием, содержащей точку O;
(2) $v(O) = a$;
(3) $\Delta v \leqslant (A-H)v^3 + HP^{3/2} - 2n\big|\operatorname{grad} v\big|^2/(\delta v) + n\big|\operatorname{grad} v\big|^2/(\delta\sqrt{P})$, где A, δ — те же, что в неравенстве (3.39), положительные числа δ и H таковы, что $A - H > 0$, а если $P(x) = 0$, то считаем, что правая часть последнего дифференциального неравенства в точке x принимает значение $+\infty$;
(4) $v(x) \to +\infty$ при $x \to \partial\Sigma$.

Если функция $v(x)$ с указанными свойствами существует, то функция $\sqrt{P(x)} - v(x)$ достигает максимума в точке $\tilde{x} \in \Sigma$. В этой точке $\operatorname{grad}(\sqrt{P} - v) = 0$; значит, $\operatorname{grad}\sqrt{P}(\tilde{x}) = \operatorname{grad} v(\tilde{x})$. Кроме того, $\sqrt{P(\tilde{x})} - v(\tilde{x}) \geqslant a$, поэтому $\sqrt{P(\tilde{x})} > v(\tilde{x}) > 0$. Следовательно, в точке $\tilde{x}$

$$\Delta v \leqslant (A-H)v^3 + HP^{3/2} - \frac{n\big|\operatorname{grad}\sqrt{P}\big|^2}{\delta\sqrt{P}}.$$

Вычитая из (3.39) последнее неравенство, получим в точке $\tilde{x}$

$$\Delta(\sqrt{P} - v) \geqslant (A-H)\big(P^{3/2} - v^3\big) > 0.$$

Противоречие с тем, что в этой точке функция $\sqrt{P(x)} - v(x)$ достигает максимума.

Приступим к построению функции $v(x)$, обладающей свойствами (1)–(4). Для этого сначала докажем вспомогательную лемму. Пусть $B > 0$, $\varepsilon_0 \geqslant 0$, $c_0 > 0$ — некоторые константы. Рассмотрим на положительной полуоси t обыкновенное дифференциальное уравнение

$$y'' + \frac{B}{t}y' + \frac{\varepsilon_0 y'^2}{y} = c_0 y^3 \tag{3.40}$$

с начальными условиями

$$y(0) = a, \quad y'(0) = 0. \tag{3.41}$$

Лемма 3.1. *Пусть $y(t)$ — решение уравнения* (3.40) *с начальными условиями* (3.41) *при $t \geqslant 0$. Тогда существует такое число $d > 0$, зависящее от a, B, ε_0, c_0, что*

$$\lim_{t\to d} y(t) = +\infty.$$

Кроме того, $y'(t) > 0$ при $t \in (0, d)$.

Доказательство. Обозначим через $[0, b)$ максимальный полуинтервал, на который можно продолжить решение уравнения (3.40) с начальными условиями (3.41). Пока не исключен случай $b = +\infty$. Из (3.40) получается, что

$$y''(0) = \frac{c_0 a^3}{1 + B} > 0.$$

Поэтому $y(t)$ возрастает в достаточно малой полуокрестности нуля. Тогда всюду на интервале $(0, b)$ будем иметь $y'(t) > 0$. Действительно, если предположить, что это не так, и ввести обозначение

$$t_0 = \min_{t\in(0,b)} \big\{t \mid y'(t) = 0\big\},$$

то в достаточно малой левой полуокрестности точки t_0 из (3.40) получим $y''(t) > 0$. Тогда невозможно равенство $y'(t_0) = 0$, т.е. $y'(t) > 0$ при всех $t \in (0, b)$.

Возможны два случая:

I. Решение $y(t)$ нельзя продолжить до точки $t = 1$. Тогда, так как функция $y(t)$ возрастающая, ее график имеет вертикальную асимптоту $t = d$, $d \leqslant 1$, и утверждение леммы выполняется.

II. Решение $y(t)$ можно продолжить до точки $t = 1$. Тогда существует такая положительная константа M, зависящая от a, B, ε_0, c_0, что при любом $t \in [1, b)$ выполняется хотя бы одно из соотношений
   (a) $y'(t) \geqslant M\big(y(t) - y(1)\big)^2$,
   (b) $y''(t) > 4M^2\big(y(t) - y(1)\big)^3$.

Действительно, возьмем в качестве M такое положительное число, что

$$(4 + \varepsilon_0)M^2 + \frac{B}{a}M - c_0 = 0.$$

Предположим, что в некоторой точке $t \in [1, b)$ выполнены неравенства

$$y'(t) < M\,(y(t) - y(1))^2\,, \quad y''(t) \leqslant 4M^2\,(y(t) - y(1))^3\,.$$

Так как в этой точке

$$\frac{B}{t} \leqslant B \leqslant \frac{By(t)}{a},$$

то получаем

$$y'' + \frac{B}{t}y' + \varepsilon_0\frac{y'^2}{y} < 4M^2(y - y(1))^3 + \frac{BMy(y - y(1))^2}{a} + \varepsilon_0\frac{M^2(y - y(1))^4}{y} \leqslant$$
$$\leqslant y^3\Big(4M^2 + \frac{BM}{a} + \varepsilon_0M^2\Big) = c_0y^3.$$

Следовательно, на множестве $[1, b)$ не могут одновременно не выполняться соотношения (a) и (b).

Обозначим через E' то подмножество множества $[1, b)$, на котором выполняется соотношение (a). Докажем, что на самом деле $E' = [1, b)$.

Множество E' замкнуто в $[1, b)$. Так как $y'(1) > 0$, то множество E' не пусто. Предположим, что $E' \neq [1, b)$. Тогда максимальное связное подмножество множества E', содержащее точку $t = 1$, будет отрезком $[1, t_2]$, где $1 < t_2 < b$. В достаточно малом интервале $(t_2, t_2 + \gamma)$ не выполняется соотношение (a), значит выполняется соотношение (b). Обозначим $y' = p$. Так как функция $y(t)$ строго возрастающая, то существует обратная функция $t(y)$; следовательно, p можно считать функцией от y. Тогда (b) примет вид

$$\frac{dp}{dy}p > 4M^2(y - y(1))^3.$$

Интегрируя это неравенство от $y_2 = y(t_2)$ до $y_3 = y(t_3)$, где $t_3 \in (t_2, t_2 + \gamma)$ и, следовательно, $y_3 > y_2$, получим

$$\big(p(y_3)\big)^2 > 2M^2\Big(\big(y_3 - y(1)\big)^4 - \big(y_2 - y(1)\big)^4\Big) + \big(p(y_2)\big)^2.$$

Отсюда

$$\big(p(y_3)\big)^2 > M^2\Big(\big(y_3 - y(1)\big)^4 - \big(y_2 - y(1)\big)^4\Big) + \big(p(y_2)\big)^2.$$

Поскольку в точке t_2 еще выполняется условие (a), то

$$\big(p(y_2)\big)^2 - M^2\big(y_2 - y(1)\big)^4 \geqslant 0$$

и, следовательно,

$$\big(p(y_3)\big)^2 > M^2\big(y_3 - y(1)\big)^4.$$

Тогда $y'(t_3) > M(y_3 - y(1))^2$ для всех $t_3 \in (t_2, t_2+\gamma)$. Это противоречит максимальности множества $[1, t_2]$. Полученное противоречие доказывает, что $E' = [1, b)$, т.е. всюду на множестве $[1, b)$ решение уравнения (3.40) с начальными условиями (3.41) удовлетворяет неравенству (a).

Если решение нельзя продолжить до точки $t = 2$, то график функции $y(t)$ имеет вертикальную асимптоту $t = d$ $(d \leqslant 2)$, и утверждение леммы выполняется. В противном случае, проинтегрировав неравенство (a) от $t = 2$ до $t \in (2, b)$, получим

$$\frac{1}{y(t) - y(1)} \leqslant \frac{1}{y(2) - y(1)} + 2M - Mt.$$

Отсюда, введя обозначение $d_1 = 2 + \dfrac{1}{M\big(y(2) - y(1)\big)}$, имеем

$$y(t) \geqslant y(1) + \frac{1}{M(d_1 - t)},$$

где $d_1 > 2$. Поэтому существует такое $d \leqslant d_1$, что $\lim\limits_{t\to d} y(t) = +\infty$. Лемма доказана. $\square$

Возьмем начало прямоугольной системы координат на плоскости $z = 0$ в точке O. Пусть

$$s(x) = \sqrt{x^{1\,2} + \dots + x^{n\,2}}$$

— евклидово расстояние от точки O до точки $x = (x^1, \dots, x^n)$, а $y(t)$ — решение уравнения (3.40) с начальными условиями (3.41) при $t \geqslant 0$. Тогда функция $v(x) = y(s(x))$, очевидно, обладает свойствами (1), (2), (4). Подберем постоянные B, ε_0, c_0 так, чтобы выполнялось свойство (3). Заметим, что функция $v(x)$ принадлежит только классу C^1, поэтому дифференциальные неравенства с участием $v(x)$ мы понимаем в смысле определения 2.1.

Для каждой точки x в области Σ, за исключением точки O, имеем

$$\Delta v = g^{ij} v_{;ij} = g^{ij}\frac{\partial s}{\partial x^i}\frac{\partial s}{\partial x^j} y'' + y'\Delta s. \tag{3.42}$$

Выберем такие направления осей $x^1, \dots, x^n$ прямоугольной системы координат, чтобы матрица (z_{ij}) стала диагональной в точке x. Из результатов п. 3.3 следует, что все вторые производные $z_{ii}(x)$ оцениваются сверху и снизу:

$$0 < M_2 \leqslant z_{ii}(x) \leqslant M_1,$$

где величины M_1 и M_2 зависят только от ε и вторых производных функции $z(x)$ в фиксированной точке, например в точке O. Метрика, введенная в п. 3.4, является будет диагональной в точке x, поэтому, используя (3.22), получим в этой точке

$$\Delta s \leqslant \frac{n-1}{s}\max_i g^{ii} + \left|\frac{1}{2} g^{ii} g^{qq}(2\varepsilon_{iqi} - \varepsilon_{iiq})\right|.$$

Воспользовавшись (3.24), (3.25), (3.26), (3.28), получим

$$\Delta s \leqslant \frac{(n-1)(1+\varepsilon)(1+\varepsilon_1)}{sM_2} + \frac{\big(18\varepsilon_1 + (n+2)\varepsilon_2\big)(1+\varepsilon_1)n^2 P^{1/2}}{2M_2^{1/2}}. \tag{3.43}$$

Заметим, что

$$|\operatorname{grad} v|^2 = y'^2 g^{ij}\frac{\partial s}{\partial x^i}\frac{\partial s}{\partial x^j}, \quad \min_i g^{ii} \leqslant g^{ij}\frac{\partial s}{\partial x^i}\frac{\partial s}{\partial x^j} \leqslant \max_i g^{ii}.$$

Следовательно,

$$\frac{(1-\varepsilon)(1-\varepsilon_1)}{M_1} \leqslant g^{ij}\frac{\partial s}{\partial x^i}\frac{\partial s}{\partial x^j} \leqslant \frac{(1+\varepsilon)(1+\varepsilon_1)}{M_2}. \tag{3.44}$$

Поэтому

$$\frac{|\operatorname{grad} v|^2 M_2}{(1+\varepsilon)(1+\varepsilon_1)} \leqslant y'^2 \leqslant \frac{|\operatorname{grad} v|^2 M_1}{(1-\varepsilon)(1-\varepsilon_1)}. \tag{3.45}$$

Теперь подставим в (3.42) выражение для $y''(s)$, полученное из (3.40), воспользуемся (3.43), (3.44), (3.45), учтем, что $y'(s) > 0$, и положим

$$B = \frac{(n-1)(1+\varepsilon)(1+\varepsilon_1)M_1}{(1-\varepsilon)(1-\varepsilon_1)M_2}, \quad c_0 = \frac{(A-H)M_2}{(1+\varepsilon)(1+\varepsilon_1)}, \quad \varepsilon_0 = \frac{(1-\varepsilon)(1-\varepsilon_1)\delta M_2}{2n(1+\varepsilon)(1+\varepsilon_1)M_1},$$

где $H > 0$ выберем позже таким образом, чтобы выполнялось условие $A - H > 0$. Тогда получим в точке x

$$\Delta v \leqslant (A-H)v^3 - \frac{2n|\operatorname{grad} v|^2}{\delta v} + \frac{\bigl(18\varepsilon_1 + (n+2)\varepsilon_2\bigr)(1+\varepsilon_1)n^2 P^{1/2} y'}{2M_2^{1/2}}. \tag{3.46}$$

Используя неравенство Коши с постоянной $\varkappa$, получаем

$$\frac{\bigl(18\varepsilon_1 + (n+2)\varepsilon_2\bigr)(1+\varepsilon_1)n^2 P^{1/2} y'}{2M_2^{1/2}} \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{y'^2}{\varkappa} + \frac{\varkappa\bigl(18\varepsilon_1 + (n+2)\varepsilon_2\bigr)^2(1+\varepsilon_1)^2 n^4 P}{4M_2}\right).$$

Отсюда, взяв

$$\varkappa = \frac{M_1 \delta \sqrt{P}}{2(1-\varepsilon)(1-\varepsilon_1)n}$$

и положив

$$H = \frac{\bigl(18\varepsilon_1 + (n+2)\varepsilon_2\bigr)^2(1+\varepsilon_1)^2 n^4 \delta M_1}{16(1-\varepsilon)(1-\varepsilon_1)nM_2},$$

из (3.46) и (3.45) получаем

$$\Delta v \leqslant (A-H)v^3 + HP^{3/2} - \frac{2n|\operatorname{grad} v|^2}{\delta v} + \frac{n|\operatorname{grad} v|^2}{\delta\sqrt{P}}.$$

Из определения H и A, введенного соотношением (3.38), видно, что при

$$\frac{n+1}{4n(n-1)} - \bigl(72n^7 + 1167n^6\bigr)\varepsilon_1 - 230{,}5n^6\varepsilon_2 > 0 \tag{3.47}$$

можно выбрать такое $\delta > 0$, что $A - H > 0$. Следовательно, условие (3) для функции $v(x)$ будет выполняться во всей ее области определения за исключением, быть может, точки O. Так как $\varepsilon_1 = (n-1)\varepsilon$ и $\varepsilon_2 = (n-1)^2\varepsilon$, то при

$$\varepsilon < \frac{1}{1210n^6(n-1)^2(n+3)}$$

условие (3.47) выполняется.

Теперь проверим, что функция $v(x)$ удовлетворяет условию (3) и в точке O. Заметим, что в точке O правая часть неравенства в (3) равна $a^3(A + 7H)$. Возьмем

$$v_{\alpha,O}(x^1, \ldots, x^n) = a + \frac{1}{2}\frac{a^3(A+7H)+\alpha}{g^{11}(O) + \cdots + g^{nn}(O)}({x^1}^2 + \cdots + {x^n}^2).$$

Тогда условие (b) определения 2.1 выполняется. Из уравнения (3.40) получаем, что

$$y''(0) = \frac{c_0 a^3}{1+B}.$$

С помощью (3.24) и оценки $z_{ii} \geqslant M_2$ легко проверить, что

$$\frac{c_0 a^3}{1+B} < \frac{a^3(A+7H)+\alpha}{g^{11}(O) + \cdots + g^{nn}(O)}.$$

Теперь выполнимость условия (a) определения 2.1 следует из разложения Тейлора

$$y(s) = a + \frac{1}{2}y''(0)s^2 + \cdots.$$

Функция $v(x)$ построена.

При доказательстве теоремы нам потребовалась пятикратная дифференцируемость функции $z(x^1,\dots,x^n)$. Согласно [1, теорема 11.3] о гладкости решений эллиптических уравнений для выполнения этого условия достаточно потребовать принадлежности функции φ классу $C^{3,\alpha}$. Эллиптичность уравнения (3.1) следует из положительной определенности метрики (3.20).

Из (3.1), (3.2) и неравенства $\left(\sigma_k/C_n^k\right)^{1/k} \geqslant \sigma_n^{1/n}$ вытекает, что условия на функцию φ достаточно налагать в области $\sigma_k > C_n^k(1-\varepsilon)^{k/n}$, $k = 1,\dots,n-1$.

Теорема 3.1 доказана.

Тот факт, что выполнимость условий (3.2)–(3.5) достаточно требовать в области $\sigma_k > C_n^k(1-\varepsilon)^{k/n}$, $k = 1,\dots,n-1$, сильно облегчает построение большого числа функций, удовлетворяющих условиям теоремы. Можно, например, взять

$$\varphi(\sigma_1,\dots,\sigma_{n-1}) = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} A_k \sin\frac{1}{\sigma_k},$$

где коэффициенты A_k легко подбираются.

4. О полных выпуклых решениях уравнения $\mathrm{spur}_m(z_{ij}) = 1$

В этом разделе рассмотрим еще один аналог для уравнения несобственной выпуклой аффинной сферы. Поставим вопрос: что можно сказать о полных выпуклых решениях уравнения

$$\mathrm{spur}_m(z_{ij}) = 1, \tag{4.1}$$

где в левой части стоит сумма всех главных миноров порядка m $(2 \leqslant m < n)$ матрицы из вторых производных функции $z(x^1,\dots,x^n)$? Здесь нельзя, конечно, надеяться доказать, что графиком решения всегда будет эллиптический параболоид. Например, уравнение цилиндра

$$z = \frac{1}{2}({x^1}^2 + \dots + {x^m}^2)$$

является решением уравнения (4.1). Поэтому на функцию $z(x^1,\dots,x^n)$ будут наложены дополнительные ограничения.

Вместо уравнения (4.1) будем рассматривать уравнение

$$C_n^m D(\underbrace{z_{ij},\dots,z_{ij}}_{m},\ z^0_{ij},\dots,z^0_{ij}) = \det(z^0_{ij}), \tag{4.2}$$

полагая, что $z^0 = \frac{1}{2}c_{ij}x^ix^j$ — функция, график которой — эллиптический параболоид. Уравнение (4.2) инвариантно при аффинных преобразованиях координат $x^1,\dots,x^n$. При подходящем выборе аффинной системы координат уравнение (4.2) принимает вид (4.1). Чтобы подчеркнуть, что система координат не фиксирована, обозначим пространство, где заданы функции z и z^0, через A^n и будем пока считать его n-мерным аффинным пространством.

Введем обозначение

$$D(\underbrace{z_{ij},\dots,z_{ij}}_{m},\ z^0_{ij},\dots,z^0_{ij}) = D.$$

Всюду в дальнейшем будем допускать только аффинные преобразования координат в A^n, поэтому частные производные любой функции в A^n являются координатами ковариантного тензора соответствующего ранга. Отсюда легко получаем, что формальные производные

$$\frac{\partial}{\partial z_{ij}}\left(\frac{D}{\det(z^0_{ij})}\right)$$

являются координатами тензора типа $\binom{2}{0}$. Введем метрику в A^n, положив

$$g^{ij} = C_n^m \frac{\partial}{\partial z_{ij}}\left(\frac{D}{\det(z^0_{ij})}\right)$$

за координаты контравариантного метрического тензора. В силу выпуклости функций z и z^0 эта метрика положительно определенная. Положим

$$z^i_{ij} = g^{ia} z_{aij}, \quad z^{ijk} = g^{ia} g^{jb} g^{kc} z_{abc}.$$

Рассмотрим тензоры

$$P_{ijkl} = z^a_{il} z_{ajk} - z^a_{ik} z_{ajl}, \quad P_{ik} = z^j_{hi} z^h_{jk}$$

и инвариант $P = z_{ijk} z^{ijk}$. Очевидно, $P \geqslant 0$. Равенство $P(x) = 0$ возможно лишь в том случае, когда все производные z_{ijk} в точке x обращаются в нуль. Выведем для инварианта P дифференциальное неравенство.

Пусть Δ — оператор Лапласа—Бельтрами относительно введенной метрики; ковариантные производные будем обозначать с помощью точки с запятой (;). Через $\tilde{\lambda}_1(x), \ldots, \tilde{\lambda}_n(x)$ обозначим экстремумы формы $z_{ij}\xi^i\xi^j$ относительно формы $z^0_{ij}\xi^i\xi^j$ в точке x. Пусть существует такая положительная константа e, что

$$\frac{\tilde{\lambda}_i(x)}{\tilde{\lambda}_j(x)} \leqslant 1 + e \tag{4.3}$$

для всех точек $x \in A^n$ и всех i, j. Сначала получим получим инвариантную оценку для $\Delta(\sqrt{P})$ в произвольной точке $x_0 \in A^n$, где $P(x_0) \neq 0$. При этом будем считать, что e достаточно мало: $e < 1/(mn^2)$.

Так же, как в формуле (2.8), получаем

$$\Delta(\sqrt{P}) \geqslant \frac{z^{ijk} \Delta z_{ijk}}{P^{1/2}}. \tag{4.4}$$

Дифференцируя уравнение

$$\frac{1}{\det(z^0_{ij})} C^m_n D\big(\underbrace{z_{ij}, \ldots, z_{ij}}_{m},\ z^0_{ij}, \ldots, z^0_{ij}\big) = 1$$

по x^k, получим

$$z_{ijk} g^{ij} = 0. \tag{4.5}$$

Следовательно, $g^{lq} z_{iql;jk} = 0$. Тогда так же, как в формуле (3.23), получаем

$$\begin{aligned} z^{ijk} \Delta z_{ijk} = z^{ijk} g^{lq} \Bigg(&- 5 z_{ijh} \Gamma^h_{qp} \Gamma^p_{kl} + 6 z_{ihl} \Gamma^h_{kp} \Gamma^p_{qj} - z_{ijh} \Gamma^h_{kp} \Gamma^p_{ql} - \\ &- 2 z_{hjl} \Gamma^h_{qp} \Gamma^p_{ki} + 4 z_{hqp} \Gamma^h_{ij} \Gamma^p_{ik} - 4 z_{phk} \Gamma^h_{jl} \Gamma^p_{iq} - 2 z_{hjlk} \Gamma^h_{iq} - z_{ijhk} \Gamma^h_{lq} + \\ &+ 3 z_{hqlk} \Gamma^h_{ij} - 3 z^h_{jk} \left(\frac{1}{2} \partial_{lq} g_{ih} - \Gamma^a_{il} \partial_q g_{ah} \right) + 2 z^h_{jl} \left(\frac{1}{2} \partial_{ik} g_{qh} - \Gamma^a_{qi} \partial_k g_{ah} \right) \Bigg), \end{aligned} \tag{4.6}$$

где Γ^k_{ij} — символы Кристоффеля для введенной метрики. Так как P — аффинный инвариант, то для оценки $\Delta(\sqrt{P})$ можно сделать унимодулярную замену координат $x^1, \ldots, x^n$, чтобы выполнялись условия $c_{ij} = \delta_{ij}$ и в рассматриваемой точке x_0 $z_{ij} = 0$ при $i \neq j$. Тогда в точке x_0 получим

$$g^{ij} = g_{ij} = 0, \quad i \neq j, \qquad g^{ii} = S^i_{m-1}, \tag{4.7}$$

где S^i_{m-1} — $(m-1)$-я элементарная симметрическая функция от всех $z_{11}, \ldots, z_{nn}$, кроме z_{ii}. Тождество $g^{il} g_{ij} = \delta^l_j$ принимает вид

$$C^m_n g_{ij} \frac{\partial D}{\partial z_{il}} = \delta^l_j.$$

Продифференцировав его по x^k, находим выражение для производных от координат ковариантного метрического тензора:

$$\partial_k g_{ij} = -C^m_n g_{sj} g_{li} \frac{\partial^2 D}{\partial z_{sl} \partial z_{pq}} z_{pqk}. \tag{4.8}$$

Здесь, как и всюду далее, должен выполняться баланс индексов, поэтому суммирование в правой части ведется только по тем повторяющимся индексам, которых нет в левой части, т.е. по s, l, p, q. С учетом (4.7) получим в точке x_0

$$\partial_k g_{ij} = \begin{cases} \dfrac{S^{ij}_{m-2}}{S^i_{m-1}S^j_{m-1}} z_{ijk}, & i \neq j, \\ -\dfrac{S^{jp}_{m-2}}{(S^j_{m-1})^2} z_{ppk}, & i = j, \end{cases} \tag{4.9}$$

где S^{jp}_{m-2} — $(m-2)$-я элементарная симметрическая функция от всех $z_{11}, \dots, z_{nn}$, кроме z_{jj}, z_{pp}. Полагаем по определению $S^{jp}_{m-2} = 0$, при $j = p$, а при $m = 2$ считаем $S^{jp}_{m-2} = 1$, если $j \neq p$.

Дифференцируя (4.8) по x^r и учитывая (4.7), получаем в точке x_0 для вторых производных от ковариантных координат метрического тензора выражение

$$\begin{aligned} \partial_{kr} g_{ij} = (\partial_r g_{lj}) \frac{S^{li}_{m-2}}{S^i_{m-1}S^l_{m-1}} z^l_{ik} + (\partial_r g_{li}) \frac{S^{lj}_{m-2}}{S^j_{m-1}S^l_{m-1}} z^l_{jk} - \\ - (\partial_r g_{ij}) \frac{S^{li}_{m-2}}{S^i_{m-1}S^l_{m-1}} z^l_{lk} - (\partial_r g_{ij}) \frac{S^{lj}_{m-2}}{S^j_{m-1}S^l_{m-1}} z^l_{lk} + \\ + \begin{cases} \dfrac{S^{ijl}_{m-3}(z_{ijk}z^l_{lr} + z_{ijr}z^l_{lk} - z^l_{ik}z_{ljr} - z^l_{jk}z_{ilr})}{S^i_{m-1}S^j_{m-1}S^l_{m-1}} + \dfrac{S^{ij}_{m-2}}{S^i_{m-1}S^j_{m-1}} z_{ijkr}, & i \neq j, \\ \dfrac{S^{jpq}_{m-3}(z^{pq}_k z_{pqr} - z^p_{pk} z^q_{qr})}{(S^j_{m-1})^2 S^p_{m-1} S^q_{m-1}} - \dfrac{S^{jp}_{m-2}}{(S^j_{m-1})^2} z_{ppkr}, & i = j. \end{cases} \end{aligned} \tag{4.10}$$

Здесь S^{ijk}_{m-3} — $(m-3)$-я элементарная симметрическая функция от всех $z_{11}, \dots, z_{nn}$, кроме z_{ii}, z_{jj}, z_{kk}. Полагаем $S^{ijk}_{m-3} = 0$, если среди индексов i, j, k есть равные или $m = 2$, а при $m = 3$ считаем $S^{ijk}_{m-3} = 1$, если i, j, k различны. Положим также

$$\frac{C^{m-2}_{n-2}}{(C^{m-1}_{n-1})^2} = c.$$

Из условия (4.3) с учетом выбора системы координат получим для всех i, j в точке x_0

$$\frac{1}{1+e} \leqslant \frac{z_{ii}}{z_{jj}} \leqslant 1 + e.$$

Отсюда и из (4.2)

$$\frac{1}{1+e} \leqslant z_{ii} \leqslant 1 + e.$$

Тогда

$$\left| \frac{S^{ij}_{m-2}}{S^i_{m-1}S^j_{m-1}} - c \right| \leqslant c((1+e)^m - 1), \quad i \neq j, \tag{4.11}$$

$$\left| c\frac{S^p_{m-1}}{S^j_{m-1}} - \frac{S^{jp}_{m-2}}{(S^j_{m-1})^2} \right| \leqslant c((1+e)^m - 1), \quad p \neq j. \tag{4.12}$$

При $i \neq j \neq k$, $m \geqslant 3$

$$\left| \frac{S^{ijk}_{m-3}}{S^i_{m-1}S^j_{m-1}S^k_{m-1}} - \frac{C^{m-3}_{n-3}}{(C^{m-1}_{n-1})^3} \right| \leqslant (1+e)^{2m} - 1. \tag{4.13}$$

Для всех i, j, k

$$|z_{ijk}| \leqslant P^{1/2}(1+e)^{3(m-1)/2}(C^{m-1}_{n-1})^{-3/2}.$$

Равенство (4.5) в точке x_0 принимает вид

$$z_{ppk}S^p_{m-1} = 0.$$

Тогда (по-прежнему здесь и далее все величины вычисляются в точке x_0)

$$\partial_k g_{ij} = \begin{cases} cz_{ijk} + \left(\dfrac{S^{ij}_{m-2}}{S^i_{m-1}S^j_{m-1}} - c\right) z_{ijk}, & i \neq j, \\ \left(c\dfrac{S^p_{m-1}}{S^i_{m-1}} - \dfrac{S^{ip}_{m-2}}{(S^i_{m-1})^2}\right) z_{ppk}, & i = j. \end{cases}$$

Следовательно,

$$\partial_k g_{ij} = cz_{ijk} + e_{ijk}, \tag{4.14}$$

где

$$|e_{ijk}| \leqslant \begin{cases} \dfrac{c((1+e)^m - 1)(1+e)^{3(m-1)/2}P^{1/2}}{(C^{m-1}_{n-1})^{3/2}}, & i \neq j, \\ \dfrac{(n-1)c((1+e)^m - 1)(1+e)^{3(m-1)/2}P^{1/2}}{(C^{m-1}_{n-1})^{3/2}}, & i = j. \end{cases} \tag{4.15}$$

Продифференцируем (4.5) по x^r. Учитывая соотношение (4.7), получим в точке x_0

$$g^{ii}z_{iikr} = -S^{pq}_{m-2}z_{ppk}z_{qqr} + S^{pq}_{m-2}z_{pqk}z_{pqr},$$

откуда

$$g^{ii}z_{iikr} = cz^{pq}_k z_{pqr} + e_{kr}, \tag{4.16}$$

где

$$|e_{kr}| \leqslant 2c\big((1+e)^m - 1\big)(1+e)^{5(m-1)}\big(C^{m-1}_{n-1}\big)^{-1}P.$$

С учетом (4.11) и (4.13) получим из (4.10)

$$\partial_{kr}g_{ij} = \left(c^2 - \frac{C^{m-3}_{n-3}}{(C^{m-1}_{n-1})^3}\right)\Big(z_{ljr}z^l_{ik} + z_{lir}z^l_{jk}\Big) + \frac{C^{m-3}_{n-3}}{(C^{m-1}_{n-1})^3}z^{pq}_k z_{pqr} + \\ + e_{ijkr} + \begin{cases} \dfrac{S^{ij}_{m-2}}{S^i_{m-1}S^j_{m-1}}z_{ijkr}, & i \neq j, \\ -\dfrac{S^{jp}_{m-2}}{(S^j_{m-1})^2}z_{ppkr}, & i = j, \end{cases} \tag{4.17}$$

где

$$|e_{ijkr}| \leqslant 8c^2(n-1)(1+e)^{4(m-1)}\big((1+e)^m - 1\big)\big(C^{m-1}_{n-1}\big)^{-2}P + \\ + 2C^{m-3}_{n-3}(n-1)^2(1+e)^{5(m-1)}\big((1+e)^{3m-1} - 1\big)\big(C^{m-1}_{n-1}\big)^{-5}P.$$

При $m = 2$ здесь и далее нужно считать, что $C^{m-3}_{n-3} = 0$.

Рассмотрим слагаемые в правой части (4.6), содержащие четвертые производные функции z:

$$z^{ijk}g^{lq}\Big(-2z_{hjlk}\Gamma^h_{iq} - z_{ijhk}\Gamma^h_{lq} + 3z_{hqlk}\Gamma^h_{ij} - \frac{3}{2}z^h_{jk}\partial_{lq}g_{ih} + z^h_{jl}\partial_{ik}g_{qh}\Big) = \\ = z^{ijk}g^{qq}g^{ss}\Bigg(-z_{sjqk}\partial_i g_{qs} - \frac{1}{2}z_{ijks}\Big(2\partial_q g_{qs} - \partial_s g_{qq}\Big) + \\ + \frac{3}{2}z_{qqsk}\Big(2\partial_i g_{js} - \partial_s g_{ij}\Big) - \frac{3}{2}z_{sjk}\partial_{qq}g_{is} + z_{sjq}\partial_{ik}g_{qs}\Bigg) =$$

$$= z^{ijk} g^{qq} g^{ss} \Bigg(- z_{sjqk} \partial_i g_{qs} - \frac{1}{2} z_{ijks} \Big(c z_{qqs} + 2 e_{qsq} - e_{qqs} \Big) + \\ + \frac{3}{2} z_{qqsk} \Big(c z_{ijs} + 2 e_{jsi} - e_{ijs} \Big) - \frac{3}{2} z_{sij} \partial_{qq} g_{ks} + z_{siq} \partial_{jk} g_{qs} \Bigg).$$

Отсюда, воспользовавшись сначала соотношениями (4.17), (4.9), (4.5), а затем (4.16), получим

$$z^{ijk} g^{lq} (-2 z_{hjlk} \Gamma^h_{iq} - z_{ijhk} \Gamma^h_{lq} + 3 z_{hqlk} \Gamma^h_{ij} - \frac{3}{2} z^h_{jk} \partial_{lq} g_{ih} + z^h_{jl} \partial_{ik} g_{qh}) \geqslant \\ \geqslant \frac{3}{2} P^2 \left(c^2 - \frac{C^{m-3}_{n-3}}{(C^{m-1}_{n-1})^3} \right) - \left(c^2 - \frac{C^{m-3}_{n-3}}{(C^{m-1}_{n-1})^3} \right) \Big(3 z^{ijk} z^s_{ij} z_{lsq} z^{lq}_k - 2 z^{ijk} z^{sq}_i z_{lsk} z^l_{qj} \Big) - \\ - \frac{1}{2} z^{ijk} z^{qq} g^{ss} z_{ijks} \big(2 e_{qsq} - e_{qqs} \big) - 5 C^{m-3}_{n-3} \big(C^{m-1}_{n-1} \big)^{-3} (n-1)^2 n^5 (1+e)^{8m-3} \big((1+e)^{3m-1} - 1 \big) P^2 - \\ - 20 c^2 (n-1) n^5 (1+e)^{7m-2} \big((1+e)^m - 1 \big) P^2 - 9 n^7 c^2 (1+e)^{6m} \big((1+e)^m - 1 \big) P^2. \quad (4.18)$$

Далее, так как $P_{;s} = 2 z^{ijk} z_{ijk;s}$, то

$$\frac{1}{2} P_{;s} = z^{ijk} \Big(z_{ijks} - z_{hjk} \Gamma^h_{is} - z_{ihk} \Gamma^h_{js} - z_{ijh} \Gamma^h_{ks} \Big)$$

и

$$z^{ijk} g^{qq} g^{ss} z_{ijks} \big(2 e_{qsq} - e_{qqs} \big) = \frac{1}{2} g^{qq} g^{ss} P_{;s} \big(2 e_{qsq} - e_{qqs} \big) + 3 z^{ijk} g^{qq} g^{ss} z_{hjk} \Gamma^h_{is} \big(2 e_{qsq} - e_{qqs} \big). \quad (4.19)$$

Используя неравенство Коши с ε, получаем

$$\Big| P_{;s} g^{ss} g^{qq} \big(2 e_{qsq} - e_{qqs} \big) \Big| \leqslant \frac{P^2_{;s} g^{ss}}{2 P \varepsilon^2} + \varepsilon^2 P \Big(g^{qq} \sqrt{g^{ss}} \big(2 e_{qsq} - e_{qqs} \big) \Big)^2.$$

В силу диагональности метрики $\big| \operatorname{grad} \sqrt{P} \big|^2 = g^{ss} P^2_{;s} / (4P)$. Из последнего неравенства и соотношений (4.15) и (4.19)) следует оценка

$$\Big| z^{ijk} g^{qq} g^{ss} z_{ijks} \big(2 e_{qsq} - e_{qqs} \big) \Big| \leqslant \\ \leqslant \frac{\big| \operatorname{grad} \sqrt{P} \big|^2}{\varepsilon^2} + \frac{9}{4} \varepsilon^2 n^4 (n-1)^2 c^2 (1+e)^{6(m-1)} \big((1+e)^m - 1 \big)^2 P^2 + \\ + \frac{9}{2} (n-1) c^2 n^6 (1+e)^{12(m-1)} \big((1+e)^m - 1 \big) P^2. \quad (4.20)$$

Подставляя вместо коэффициентов Кристоффеля их выражение через метрику и заменяя производные от координат метрического тензора по формулам (4.14) с использованием неравенств (4.15), получаем следующую оценку:

$$z^{ijk} g^{lq} \Big(- 5 z_{ijh} \Gamma^h_{qp} \Gamma^p_{kl} + 6 z_{ihl} \Gamma^h_{kp} \Gamma^p_{qj} - z_{ijh} \Gamma^h_{kp} \Gamma^p_{ql} - 2 z_{hjl} \Gamma^h_{qp} \Gamma^p_{ki} + \\ + 4 z_{hqp} \Gamma^h_{ij} \Gamma^p_{lk} - 4 z_{phk} \Gamma^h_{jl} \Gamma^p_{iq} - 3 z^h_{jk} \Gamma^a_{il} \partial_q g_{ah} - 2 z^h_{jl} \Gamma^a_{qi} \partial_k g_{ah} \Big) \geqslant \\ \geqslant \frac{c^2}{4} \Big(3 z^{ijk} z^s_{ij} z_{lsq} z^{lq}_k - 2 z^{ijk} z^{sq}_l z_{lsk} z^l_{qj} \Big) - \\ - 48 n^6 (n-1) c^2 (1+e)^{12(m-1)} \big((1+e)^m - 1 \big) P^2. \quad (4.21)$$

Для инварианта

$$I = 3 z^{ijk} z^s_{ij} z_{lsq} z^{lq}_k - 2 z^{ijk} z^{sq}_l z_{lsk} z^l_{qj} = P^{ijkl} P_{ijkl} + P_{ik} P^{ik}$$

соотношение (3.37) дает оценку снизу

$$I \geqslant \frac{n+1}{n(n-1)} P^2. \quad (4.22)$$

Ввиду того, что коэффициент при инварианте I в (4.18) отрицателен, нам потребуется еще его оценка сверху. Оценим сверху величину

$$\frac{I}{P^2} = \frac{P_{ik}P^{ik} + P_{ijkl}P^{ijkl}}{(g^{ik}P_{ik})^2}.$$

При получении этой оценки безразлично конкретное происхождение тензора z_{ijk}. Оценка будет верна для любого ненулевого симметрического трехвалентного тензора z_{ijk}. Сначала оценим выражение $P_{ik}P^{ik}/(g^{ik}P_{ik})^2$. Тензор P_{ik} симметричен. Тогда можно одновременно привести матрицу (P_{ik}) к диагональному виду, а матрицу метрической формы (g_{ij}) к единичной. Наше выражение в новых координатах примет вид

$$\frac{\tilde{P}_{11}^2 + \cdots + \tilde{P}_{nn}^2}{(\tilde{P}_{11} + \cdots + \tilde{P}_{nn})^2}.$$

При этом, так как разницы между ковариантными и контравариантными индексами теперь нет, то

$$\tilde{P}_{ii} = \tilde{z}^j_{hi} z^h_{ji} = \sum_{j,h} \tilde{z}^2_{jhi} \geqslant 0.$$

Значит, надо найти максимум при неотрицательных $\tilde{P}_{ii}$, а поскольку $\tilde{P}_{11} + \cdots + \tilde{P}_{nn} = P > 0$, то все $\tilde{P}_{ii}$ не могут обращаться в нуль. При этих условиях легко находим

$$\frac{\tilde{P}_{11}^2 + \cdots + \tilde{P}_{nn}^2}{(\tilde{P}_{11} + \cdots + \tilde{P}_{nn})^2} \leqslant 1.$$

Теперь найдем максимум выражения

$$\frac{P_{ijkl}P^{ijkl}}{P^2} = \frac{P_{ijkl}P^{ijkl}}{(g^{ik}g^{jl}P_{ijkl})^2}.$$

Объединим индексы i,j и k,l и будем рассматривать величины $P_{(ij)(kl)}$ как координаты тензора типа $\binom{2}{0}$. Имеет место симметрия $P_{(ij)(kl)} = P_{(kl)(ij)}$. Введем метрический тензор $G_{(ij)(kl)} = g_{ik}g_{jl}$. Этот тензор определяет положительно определенную метрику. Легко проверить, что его контравариантные координаты $G^{(ij)(kl} = g^{ik}g^{jl}$. Тогда можно формально записать

$$\frac{P_{ijkl}P^{ijkl}}{(g^{ik}g^{jl}P_{ijkl})^2} = \frac{P_{(ij)(kl)}P^{(ij)(kl)}}{(G^{(ij)(kl)}P_{(ij)(kl)})^2},$$

или, приведя матрицу $(G_{(ij)(kl)})$ к единичной, а матрицу $(P_{(ij)(kl)})$ — к диагональной, придадим последнему выражению вид

$$\frac{\sum\limits_{i,j} \tilde{P}^2_{(ij)(ij)}}{\left(\sum\limits_{i,j} \tilde{P}_{(ij)(ij)}\right)^2}.$$

При этом $\tilde{P}_{(ii)(ii)} = 0$, так как P_{ijkl} антисимметричен по первому и второму индексам. Кроме того,

$$\sum_j \tilde{P}_{(ij)(ij)} = \tilde{P}_{ii} \geqslant 0, \quad \sum_i \tilde{P}_{ii} > 0.$$

Значит, нам нужно найти максимум выражения $\sum\limits_{i,j} \tilde{P}^2_{(ij)(ij)} \Big/ \left(\sum\limits_{i,j} \tilde{P}_{(ij)(ij)}\right)^2$ при условии

$$\sum_j \tilde{P}_{(ij)(ij)} \geqslant 0, \quad \tilde{P}_{(ii)(ii)} = 0, \quad \sum_{i,j} \tilde{P}_{(ij)(ij)} > 0.$$

Этот максимум равен $1/2$; следовательно, $P_{ijkl}P^{ijkl}/P^2 \leqslant 1/2$ и потому $I \leqslant 3P^2/2$.

Так как

$$c^2-\frac{C_{n-3}^{m-3}}{(C_{n-1}^{m-1})^3}=\frac{c^2(n-m)}{(m-1)(n-2)}>0,$$

то, учитывая еще (4.22), получаем

$$\left(\frac{3}{2}P^2-I\right)\left(c^2-\frac{C_{n-3}^{m-3}}{(C_{n-1}^{m-1})^3}\right)+\frac{c^2}{4}I\geqslant\frac{c^2(n+1)P^2}{4n(n-1)}. \tag{4.23}$$

Введем обозначение

$$\begin{multline} A_1(n,m,e,\varepsilon)=\frac{c^2(n+1)}{4n(n-1)}-c^2\big((1+e)^m-1\big)\Bigg(9n^7(1+e)^{6m}+\\ +20(n-1)n^5(1+e)^{7m-2}+\frac{9}{8}\varepsilon^2n^4(n-1)^2(1+e)^{6(m-1)}\big((1+e)^m-1\big)+\\ +\frac{201}{4}n^6(n-1)(1+e)^{12(m-1)}\Bigg)-\frac{5c^2(n-1)^3(m-2)n^5(1+e)^{8m-3}\big((1+e)^{3m-1}-1\big)}{(m-1)(n-2)}. \end{multline} \tag{4.24}$$

Тогда из (4.4) и (4.6) с помощью (4.18), (4.20), (4.21), (4.23), (4.24) получаем оценку для $\Delta(\sqrt{P})$:

$$\Delta(\sqrt{P})\geqslant A_1P^{3/2}-\frac{\left|\operatorname{grad}\sqrt{P}\right|^2}{2\varepsilon^2\sqrt{P}}.$$

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 4.1. *Если $z(x)$ — выпуклое регулярное решение уравнения* (4.2), *удовлетворяющее условию* (4.3) *с $e<1/(mn^2)$, то для инварианта P в области, где $P\neq 0$, выполняется неравенство*

$$\Delta(\sqrt{P})\geqslant A_1P^{3/2}-\frac{\left|\operatorname{grad}\sqrt{P}\right|^2}{2\varepsilon^2\sqrt{P}}. \tag{4.25}$$

Здесь A_1 определено формулой (4.24), $\varepsilon>0$ можно взять произвольным.

Теорема 4.2. *Всякое полное выпуклое решение уравнения* (4.2), *удовлетворяющее условию* (4.3) *с таким e, что $A_1(n,m,e,0)>0$, является квадратичным полиномом.*

В теореме 4.2 предъявляются более сильные требования к e, чем в теореме 4.1. Грубая оценка для e, которая обеспечивает выполнимость условия теоремы 4.2, имеет вид

$$e<\frac{1}{272mn^8}.$$

Доказательство теоремы 4.2. Пусть $z(x)$ — решение уравнения (4.2), удовлетворяющее условиям теоремы 4.2. Докажем, что все третьи производные функции $z(x)$ тождественно равны нулю. Для этого достаточно доказать, что тождественно равен нулю инвариант P.

Отметим, что из условия (4.3) следует существование оценки сверху для второй производной $z_{\eta\eta}(x)$ функции $z(x)$ в любой точке x, где она определена, по любому направлению η. Из существования такой оценки и полноты $z(x)$ получается, что функция $z(x)$ задана при всех $x\in A^n$.

Предположим, что в некоторой точке $O\in A^n$ значение инварианта P не равно нулю. Обозначим $\sqrt{P(O)}=2a$. Предположим, что нам удалось найти положительную функцию $v(x)$, обладающую следующими свойствами:

(1) функция v определена в открытой области Σ с компактным замыканием, содержащей точку O;
(2) $v(O)=a$;
(3) выполняется неравенство

$$\Delta v\leqslant(A_1-F)v^3+FP^{3/2}-\frac{\left|\operatorname{grad}v\right|^2}{\varepsilon^2v}+\frac{\left|\operatorname{grad}v\right|^2}{2\varepsilon^2\sqrt{P}},$$

где $A_1 = A_1(n, m, e, \varepsilon)$, положительные числа ε и F таковы, что $A_1 - F > 0$, а если $P(x) = 0$, то считаем, что правая часть последнего дифференциального неравенства в точке x принимает значение $+\infty$;

(4) $v(x) \to +\infty$ при $x \to \partial\Sigma$.

Тогда функция $\sqrt{P} - v$ достигает максимума в точке $x' \in \Sigma$, где $\operatorname{grad}(\sqrt{P} - v) = 0$. Это означает, что $\operatorname{grad}\sqrt{P(x')} = \operatorname{grad} v(x')$. Кроме того, в точке x' имеем $\sqrt{P(x')} - v(x') \geqslant a$; следовательно, $\sqrt{P(x')} > v(x') > 0$. Тогда в точке x'

$$\Delta v \leqslant (A_1 - F)v^3 + FP^{3/2} - \frac{|\operatorname{grad}\sqrt{P}|^2}{2\varepsilon^2\sqrt{P}}.$$

Вычитая последнее неравенство из неравенства (4.25), получим, что в точке x'

$$\Delta(\sqrt{P} - v) \geqslant (A_1 - F)(P^{3/2} - v^3) > 0;$$

это противоречит тому, что в этой точке достигается максимум функции $\sqrt{P(x)} - v(x)$. Следовательно, $P(x) \equiv 0$ и все третьи производные функции $z(x)$ тоже тождественно равны нулю. Значит, $z(x)$ — квадратичный полином.

В тех точках, где $P(x) = 0$, функция $\sqrt{P(x)}$ не принадлежит классу C^2. Но в этих точках функция $\sqrt{P} - v$ не может достигать максимума, и предыдущие рассуждения являются законными. □

Построим функцию v, обладающую свойствами (1)–(4). Воспользуемся леммой 3.1. Возьмем точку O за начало аффинной системы координат в A^n. Введем «аффинное расстояние» $s(x) = \sqrt{c_{ij}x^ix^j}$ от точки O до точки $x = (x^1, \dots, x^n)$. Пусть $y(t)$ — решение уравнения (3.40) с начальными условиями (3.41). Тогда функция $v(x) = y(s(x))$, очевидно, обладает свойствами (1), (2), (4). Подберем постоянные в (3.40) так, чтобы выполнялось свойство (3). Но двукратная дифференцируемость функции $v(x)$ нарушается в точке O, поэтому дифференциальные неравенства с участием $v(x)$ мы понимаем в расширенном смысле (см. определение 2.1).

Всюду в области Σ за исключением точки O имеем

$$\Delta v = g^{ij}v_{;ij} = g^{ij}\frac{\partial s}{\partial x^i}\frac{\partial s}{\partial x^j}y'' + y'\Delta s. \tag{4.26}$$

Так как функция $s(x)$ инвариантна при замене базисных векторов аффинной системы координат, то можно вычислять Δs и $g^{ij}\dfrac{\partial s}{\partial x^i}\dfrac{\partial s}{\partial x^j}$ в такой аффинной системе координат, где матрица (c_{ij}) единичная, а $(z_{ij}(x))$ — диагональная в точке x. Тогда получаем

$$\Delta s = \frac{1}{\sqrt{g}}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{g}\; g^{ij}\frac{\partial s}{\partial x^j}\right)\right) = \frac{(\partial_i g)g^{ii}x^i}{2sg} + \frac{(\partial_i g^{ij})x^j}{s} + \sum_i g^{ii}\;\frac{s^2 - {x^i}^2}{s^3},$$

где $g = \det(g_{ij})$. Далее имеем

$$\partial_i g^{ij} = C_n^m\frac{\partial^2 D}{\partial z_{ij}\partial z_{kl}}z_{kli} = -S^{ij}_{m-2}z_{iij} + S^{jp}_{m-2}z_{ppj} = 0.$$

Так как с учетом (4.14)

$$\frac{(\partial_i g)g^{ii}x^i}{2sg} = \frac{1}{2s}(\partial_i g_{pp})g^{pp}g^{ii}x^i = \frac{1}{2s}e_{ppi}g^{pp}g^{ii}x^i,$$

то с помощью (4.15) и того факта, что $|x^i/s| \leqslant 1$, получаем

$$\left|\frac{(\partial_i g)g^{ii}x^i}{2sg}\right| \leqslant \frac{1}{2}n^2(n-1)c\big((1+e)^m - 1\big)(1+e)^{7(m-1)/2}\big(C^{m-1}_{n-1}\big)^{1/2}P^{1/2}.$$

В силу выбора системы координат имеем

$$g^{ij}\frac{\partial s}{\partial x^i}\frac{\partial s}{\partial x^j} = \frac{g^{ii}{x^i}^2}{s^2},$$

поэтому из тех же соображений

$$\frac{C_{n-1}^{m-1}}{(1+e)^{m-1}} \leqslant g^{ij}\frac{\partial s}{\partial x^i}\frac{\partial s}{\partial x^j} \leqslant mC_n^m(1+e)^{m-1}, \tag{4.27}$$

$$\sum_i g^{ii}\ \frac{s^2-x^{i2}}{s^3} \leqslant \frac{C_{n-1}^{m-1}(n-1)(1+e)^{m-1}}{s}. \tag{4.28}$$

Введя обозначение

$$\delta = \frac{1}{2}n^2(n-1)c\big((1+e)^m-1\big)(1+e)^{7(m-1)/2}\big(C_{n-1}^{m-1}\big)^{1/2}, \tag{4.29}$$

получим

$$\Delta s \leqslant \delta P^{1/2} + \frac{C_{n-1}^{m-1}(n-1)(1+e)^{m-1}}{s}. \tag{4.30}$$

Кроме того,

$$\big|\operatorname{grad} v\big|^2 = y'^2 g^{ij}\frac{\partial s}{\partial x^i}\frac{\partial s}{\partial x^j}. \tag{4.31}$$

Теперь подставим в (4.26) выражение для y'' из (3.40), воспользуемся оценками (4.27), (4.28), (4.30), равенством (4.31), учтем, что $y' \geqslant 0$, и возьмем

$$B = (n-1)(1+e)^{2(m-1)}, \quad \varepsilon_0 = \frac{1}{\varepsilon^2}, \quad c_0 = \frac{A_1-F}{mC_n^m(1+e)^{m-1}},$$

где $F>0$ выберем позже так, чтобы выполнялось условие $A_1-F>0$. Тогда получим в точке x

$$\Delta v \leqslant (A_1-F)v^3 - \frac{\big|\operatorname{grad} v\big|^2}{\varepsilon^2 v} + y'\delta P^{1/2}. \tag{4.32}$$

Далее, использовав неравенство Коши с ε, получим

$$y'\delta P^{1/2} \leqslant \frac{(1+e)^{m-1}\varepsilon^2\delta^2P^{3/2}}{2C_{n-1}^{m-1}} + \frac{y'^2C_{n-1}^{m-1}}{2\varepsilon^2\sqrt{P}(1+e)^{m-1}}.$$

Из (4.27) имеем

$$\frac{y'^2C_{n-1}^{m-1}}{\varepsilon^2\sqrt{P}(1+e)^{m-1}} \leqslant \frac{\big|\operatorname{grad} v\big|^2}{\varepsilon^2\sqrt{P}}.$$

Выбрав

$$F = \frac{(1+e)^{m-1}\varepsilon^2\delta^2}{2C_{n-1}^{m-1}}, \tag{4.33}$$

получим

$$y'\delta P^{1/2} \leqslant FP^{3/2} + \frac{\big|\operatorname{grad} v\big|^2}{2\varepsilon^2\sqrt{P}}.$$

Отсюда и из (4.32) следует

$$\Delta v \leqslant (A_1-F)v^3 + FP^{3/2} - \frac{|\operatorname{grad} v|^2}{\varepsilon^2 v} + \frac{|\operatorname{grad} v|^2}{2\varepsilon^2\sqrt{P}}.$$

При этом из (4.24), (4.29) и (4.33) видно, что если $A_1(n,m,e,0)>0$, то существует такое $\varepsilon>0$, что $A_1(n,m,e,\varepsilon)-F>0$.

Выполнимость условия (3) в точке O доказывается дословным повторением соответствующих рассуждений из п. 3.5.

В условии теоремы 4.2 ничего не говорится о степени гладкости функции $z(x)$, хотя метод доказательства требует ее пятикратной дифференцируемости. Это не случайно. Условие (4.3) гарантирует строгую эллиптичность уравнения (4.2). Тогда согласно [1, теорема 11.3] получаем, что $z(x)$ — по крайней мере бесконечно дифференцируемая функция.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Агмон С., Дуглис А., Ниренберг Л.* Оценки вблизи границы решений эллиптических уравнений в частных производных при общих граничных условиях. I. — М.: ИЛ, 1962.
2. *Александров А. Д.* К теории смешанных объемов выпуклых тел. Смешанные дискриминанты и смешанные объемы// Мат. сб. — 1938. — *3*, № 2. — С. 227–251.
3. *Беллман Р.* Введение в теорию матриц. — М.: Наука, 1976.
4. *Грей А.* Трубки. Формула Вейля и ее обобщения. — М.: Мир, 1993.
5. *Загускин В. Л.* Об описанных и вписанных эллипсоидах экстремального объема// Усп. мат. наук. — 1958. — *13*, № 6. — С. 89–92.
6. *Кокарев В. Н.* О полных выпуклых решениях уравнения $\mathrm{spur}_m(z_{ij}) = 1$// Мат. физ. анал. геом. — 1996. — *3*, № 1-2. — С. 102–117.
7. *Кокарев В. Н.* Об уравнении несобственной аффинной сферы: обобщение теоремы Ёргенса// Мат. сб. — 2003. — *194*, № 11. — С. 65–80.
8. *Ланкастер П.* Теория матриц. — М.: Наука, 1978.
9. *Погорелов А. В.* Многомерная проблема Минковского. — М.: Наука, 1975.
10. *Погорелов А. В.* Многомерное уравнение Монжа—Ампера $\det(z_{ij}) = \varphi(z_1, \dots, z_n, z, x_1, \dots, x_n)$. — М.: Наука, 1988.
11. *Blaschke W.* Vorlesungen über Differentialgeometrie. II. Affine Differentialgeometrie. — Berlin: Springer-Verlag, 1923.
12. *Caffarelli L., Nirenberg L., Spruck J.* The Dirichlet problem for nonlinear second order elliptic equations. III. Functions of the eigenvalues of Hessian// Acta Math. — 1985. — *155*, № 3-4. — С. 261–304.
13. *Calabi E.* Improper affine hyperspheres of convex type and a generalizations of a theorem by K. Jörgens// Michigan Math. J. — 1958. — *5*, № 2. — С. 105–126.
14. *Calabi E.* An extension of E. Hopf's maximum principle with an application to Riemannian geometry// Duke Math. J. — 1958. — *25*. — С. 45–56.
15. *Cheng S. Y., Yau S. T.* Complete affine hypersurfaces. Part I. The completeness of affine metrics// Commum. Pure Appl. Math. — 1986. — *39*. — С. 839–866.
16. *Jörgens K.* Über die Lösungen der Differentialgleichung $rt - s^2 = 1$// Math. Ann. — 1954. — *127*. — С. 130–134.
17. *Kokarev V. N.* On complete convex solutions of equations similar to the improper affine sphere equation// J. Math. Phys. Anal. Geom. — 2007. — *3*, № 4. — С. 448–467.
18. *Tzitzeika G.* Sur one nouvelle classe de surfaces// C. R. Acad. Sci. Paris. — 1907. — *145*. — С. 132–133.
19. *Tzitzeika G.* Sur one nouvelle classe de surfaces// C. R. Acad. Sci. Paris. — 1908. — *146*. — С. 165–166.

В. Н. Кокарев
Самарский национальный исследовательский университет им. академика С. П. Королева
E-mail: `ko1949@yandex.ru`

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 147 (2018). С. 84–119

УДК 512.74

КРАТНЫЕ МНОГООБРАЗИЯ ФЛАГОВ

© 2018 г. **Е. Ю. СМИРНОВ**

Аннотация. Работа посвящена обзору основных результатов о кратных многообразиях флагов, т.е. многообразиях вида $G/P_1 \times \dots \times G/P_r$. Приведена классификация кратных многообразий флагов сложности 0 и 1 и изложены результаты о комбинаторике и геометрии B-орбит и их замыканий в двойных комикровесовых многообразиях флагов. Также обсуждаются вопросы конечности числа G-орбит на кратном многообразии флагов и существования на нем открытой G-орбиты.

Ключевые слова: многообразия флагов, сферические многообразия.

AMS Subject Classification: 14M17, 14M15

СОДЕРЖАНИЕ

Работа выполнена в Математическом институте им. В. А. Стеклова РАН при поддержке Российского научного фонда (проект № 14-11-00414).

ISSN 0233–6723

1. Введение

1.1. Кратные многообразия флагов. Грассмановы многообразия и многообразия флагов впервые возникли в конце XIX в. в работах Г. Грассмана, Ю. Плюккера, Г. Шуберта и других математиков. Эти многообразия являются однородными пространствами группы $G = \mathrm{GL}(V)$, где стабилизатором точки является параболическая подгруппа P. Также можно рассматривать однородные пространства G/P не только для $G = \mathrm{GL}(V)$, но и для произвольной связной редуктивной группы.

В настоящем обзоре рассматриваются свойства *кратных многообразий флагов*: это прямые произведения нескольких многообразий флагов, т.е. многообразия вида $G/P_1 \times \cdots \times G/P_r$ (если $r = 2$, они называются *двойными многообразиями флагов*). Каждое кратное многообразие флагов можно рассматривать как G-многообразие для диагонального действия группы G.

Особый интерес представляют *сферические кратные многообразия флагов*: так называются те из них, для которых алгебра регулярных функций на них как представление группы G раскладывается в сумму неприводимых представлений без кратностей. Иначе говоря, сферические многообразия — это такие G-многообразия, на которых борелевская подгруппа $B \subset G$ действует с открытой орбитой. Нетрудно убедиться, что если кратное многообразие флагов сферично, то количество сомножителей вида G/P не превосходит двух.

1.2. Двойные многообразия флагов, унипотентные инварианты колец Кокса и задачи теории представлений. Интерес к кратным (в особенности двойным) многообразиям флагов связан с фундаментальной задачей теории представлений о разложении на неприводимые слагаемые тензорного произведения представлений группы G.

Описание неприводимых представлений связной редуктивной алгебраической группы G восходит к работам Г. Вейля и связано с понятием доминантных весов. Существует большое количество формул для разложения тензорного произведения двух неприводимых G-модулей в прямую сумму неприводимых. В общем случае (для произвольной группы G) эта задача может быть решена с использованием формулы Вейля для характеров (см., например, [25]), однако недостатком этого универсального подхода является трудоемкость вычислений. Так что для различных конкретных ситуаций имеются более явные подходы к решению этих задач: формула Стейнберга, формула Партасарати—Ранга Рао—Варадараджана [44] и др.

Кроме того, имеется ряд формул, использующий специфику конкрентных групп. Первый и важнейший результат такого рода относится к представлениям группы типа A, т.е. группы $\mathrm{GL}(n)$. Это *правило Литтлвуда—Ричардсона*, сформулированное в 1934 г. (см. [37]) и доказанное М.-П. Шютценберже (см. [51]) лишь тремя десятилетиями позже (с тех пор был получен ряд новых, более простых доказательств, см., например, [19, 32] и др.). Его основная отличительная особенность — это явное (хотя и довольно замысловатое) комбинаторное описание неприводимых компонент, входящих в разложение произведения двух представлений. Важным (и самым простым) частным случаем правила Литтлвуда—Ричардсона является *правило Пьери*: оно описывает ситуацию, когда одно из представлений является симметрической или внешней степенью тавтологического представления $\mathrm{GL}(n)$. Также имеется принадлежащее П. Литтельману (см. [35]) обобщение правила Литтлвуда—Ричардсона на случай других групп.

Двойные многообразия флагов возникают в связи с еще одним подходом к задаче о разложении тензорного произведения представлений. Этот подход основан на геометрической реализации неприводимых представлений в пространствах сечений линейных расслоений над многообразиями флагов.

По теореме Бореля—Вейля всякий неприводимый G-модуль реализуется как пространство сечений $H^0(G/P, \mathcal{L})$ некоторого линейного расслоения $\mathcal{L}$ над многообразием G/P. Тензорное произведение пространств сечений $H^0(G/P, \mathcal{L}) \otimes H^0(G/Q, \mathcal{M})$ можно рассматривать как пространство сечений $H^0(G/P \times G/Q, \mathcal{L} \boxtimes \mathcal{M})$ линейного расслоения $\mathcal{L} \boxtimes \mathcal{M}$ над прямым произведением $G/P \times G/Q$. Здесь $\mathcal{L} \boxtimes \mathcal{M}$ — линейное расслоение, слоями которого являются тензорные произведения слоев над соответствующими точками: $(\mathcal{L} \boxtimes \mathcal{M})_{(x,y)} = \mathcal{L}_x \otimes \mathcal{M}_y$, где $x \in G/P$, $y \in G/Q$.

Если многообразие $X = G/P \times G/Q$ имеет сложность 0 (т.е. сферично) или 1, то существует эффективный способ разложения пространства сечений в прямую сумму неприводимых G-модулей, который описывается ниже в п. 3.3. В связи с этим возникает вопрос о классификации всех двойных многообразий флагов сложности 0 и 1.

Впервые сферические двойные многообразия флагов были рассмотрены в связи с задачей о разложении тензорных произведений в работе [36] П. Литтельмана. Им были классифицированы все сферические многообразия вида $G/P \times G/Q$, где P, Q — *максимальные* параболические подгруппы в G. В работе [43] Д. И. Панюшева для всех многообразий $G/P \times G/Q$, где P, Q максимальны, была вычислена их сложность. Классификация двойных сферических многообразий флагов без условия максимальности принадлежит Дж. Стембриджу (см. [55]). Наконец, в работе [3] Е. В. Пономаревой при помощи единого метода была получена полная классификация двойных многообразий флагов сложности 0 и 1, обобщающая все эти результаты. Далее в п. 3.1 приводится эта классификация.

Удобным инструментом для решения задачи разложения тензорного произведения является понятие *кольца Кокса* двойного многообразия флагов. Рассмотрим прямую сумму $R(X) = \bigoplus H^0(X, \mathcal{L})$ пространств сечений линейных расслоений многообразия X; при некоторых ограничениях на X на этом пространстве можно ввести структуру кольца, называемого кольцом Кокса многообразия X (это кольцо можно рассматривать как аналог кольца функций $\mathbb{C}[X]$ на алгебраическом многобразии X). Задача разложения пространств $H^0(X, \mathcal{L})$ на неприводимые G-модули сводится к описанию алгебры R^U унипотентных инвариантов кольца Кокса, где $U \subset B$ — максимальная унипотентная подгруппа.

Тем самым представляет интерес описание алгебр унипотентных инвариантов колец Кокса двойных многообразий флагов X. Как было показано П. Литтельманом (см. [36]), в случае, когда X имеет сложность 0, эта алгебра оказывается свободной. В случае, когда X имеет сложность 1, эта алгебра оказывается либо свободной, либо фактором свободной алгебры по единственному соотношению (т.е. гиперповерхностью); Д. И. Панюшев показал это для случая, когда $X = G/P \times G/Q$, где P и Q — максимальные параболические подгруппы (см. [43]); общий случай был разобран Е. В. Пономаревой (см. [4, 5]). Эти результаты изложены в п. 3.4.

1.3. Геометрия B-орбит сферических двойных многообразий флагов. Далее в разделе 4 изучаются геометрические и комбинаторные свойств орбит борелевской подгруппы, действующей на сферическом двойном многообразии флагов, и их замыканий. Эти орбиты и их замыкания представляют собой непосредственные аналоги клеток и многообразий Шуберта в многообразиях G/P.

Комбинаторное описание множества этих орбит для случая, когда группа G имеет тип A (т.е. $G = \mathrm{GL}(n)$), а кратное многообразие флагов — это прямое произведение двух грассманианов $\mathrm{Gr}(k, V) \times \mathrm{Gr}(l, V)$, было получено в [6]. В этом случае орбиты параметризуются парой диаграмм Юнга и инволютивной перестановкой некоторого специального вида. Также были построены разрешения особенностей замыканий B-орбит, аналогичные разрешениям Ботта—Самельсона многообразий Шуберта.

Геометрия B-орбит двойных комикровесовых многообразий флагов изучалась П. Ахингером и Н. Перреном в [7]; обобщая результаты [6], они показали, что если группа G имеет тип A, D или E, то замыкания B-орбит в этих многообразиях нормальны и обладают рациональными особенностями (для поля характеристики 0).

1.4. Кратные многообразия флагов с конечным числом G-орбит. Сферичность многообразия X, т.е. конечность числа B-орбит на этом многообразии, равносильна конечности числа орбит группы G на произведении $X \times G/B$ (между B-орбитами на первом многообразии и G-орбитами на втором имеется очевидная биекция). Итак, каждое сферическое двойное многообразие флагов $G/P_1 \times G/P_2$ дает нам тройное многообразие флагов $G/P_1 \times G/P_2 \times G/B$ с конечным числом G-орбит. Возникает естественный вопрос, обобщающий вопрос о классификации сферических кратных многообразий флагов: на каких кратных многообразиях флагов группа G действует с конечным числом орбит? Этому вопросу посвящен раздел 5. Классификация таких кратных многообразий флагов была получена П. Мадьяром, Е. Вейманом и А. В. Зелевинским с помощью методов теории представлений в случае, когда группа G есть $\mathrm{GL}(V)$ или $\mathrm{Sp}(V)$; ими же были получены комбинаторное описание G-орбит и некоторые результаты об их примыканиях.

1.5. Кратные многообразия флагов с открытой орбитой. Из конечности числа G-орбит на кратном многообразии флагов X следует, в частности, что одна из орбит открыта в X. Обратное, вообще говоря, неверно. Возникает вопрос об описании всех кратных многообразий флагов с открытой G-орбитой. Его мы рассматриваем в разделе 6. В. Л. Попов классифицировал все кратные многообразия флагов вида $(G/P)^r$ (т.е. произведения нескольких копий одного и того же многообразия флагов), где P — максимальная параболическая подгруппа. Наличие открытой G-орбиты на таком многообразии означает, что на наборах из r точек общего положения на многообразии G/P группа G действует транзитивно. Эти результаты были обобщены Р. А. Девятовым на случай, когда P — параболическая подгруппа, не являющаяся максимальной (в случае, когда тип группы G отличен от A). Наконец, недавно И. Джошкуном, М. Хадианом и Д. В. Захаровым были получено описание кратных многообразий флагов вида $G/P_1 \times \cdots \times G/P_r$ с открытой G-орбитой для случая, когда G имеет тип A, а подгруппы P_i максимальны (т.е. многообразие является произведением грассманианов).

Обозначения и соглашения. Будем считать, что основное поле — это поле комплексных чисел $\mathbb{C}$.

Пусть G — связная редуктивная алгебраическая группа над полем $\mathbb{C}$. Фиксируем в ней *борелевскую подгруппу* $B \subset G$ (т.е. максимальную связную разрешимую подгруппу) и *максимальный тор* $T \subset B$. Унипотентный радикал группы B будет обозначаться через U; таким образом, $B \cong U \ltimes T$.

Систему корней, связанную с тройкой $T \subset B \subset G$, обозначим через R. Положительные и отрицательные корни обозначим через R^+ и R^- соответственно. Группу Вейля системы корней R обозначим через $W \cong N(T)/T$, систему простых корней, отвечающую тройке (T, B, G), — через $\Delta \subset R^+$. При рассмотрении систем простых корней для простых алгебраических групп будем обозначать корни через $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$, где $r = |\Delta|$. Фундаментальные веса, двойственные к корням, обозначаем через $\omega_1, \ldots, \omega_n$. Нумерация корней приводится в соответствии с [1].

Решетка весов группы G обозначается через Λ, множество доминантных весов — через Λ^+. Для доминантного веса λ неприводимое представление группы G со старшим весом λ будем обозначать через V_λ.

Структура работы. Раздел 2 посвящен изложению предварительных сведений о многообразиях флагов: мы приводим определения разложения Шуберта, порядка Брюа, формулируем теорему Бореля—Вейля—Ботта и даем несколько эквивалентных определений сферического многообразия. В разделе 3 приведена классификация сферических двойных многообразий флагов, двойных многообразий флагов степени 1 и обсуждается связь этих задач с задачей разложения тензорных произведений неприводимых G-модулей. Раздел 4 посвящен изучению комбинаторных и геометрических свойств орбит борелевской подгруппы на сферическом двойном многообразии флагов и их замыканий. В разделе 5 обсуждается обобщение предыдущего вопроса: в нем исследуются ситуации, когда число G-орбит на кратном многообразии флагов конечно. Наконец, в разделе 6 излагаются результаты о кратных многообразиях флагов с открытой G-орбитой.

2. Предварительные сведения

2.1. Многообразия флагов. Пусть G — связная редуктивная алгебраическая группа, B — борелевская подгруппа.

Определение 2.1. Пусть P — связная алгебраическая подгруппа в G, содержащая B. Тогда P называется *параболической подгруппой*, а однородное пространство G/P — (обобщённым) *многообразием флагов*.

Пример 2.1. Пусть $G = \mathrm{GL}(n)$, B — подгруппа невырожденных верхнетреугольных матриц. Тогда каждая параболическая подгруппа P является стабилизатором некоторого частичного флага

$$V_\bullet = \langle e_1, \dots, e_{d_1}\rangle \subset \langle e_1, \dots, e_{d_2}\rangle \subset \dots \subset \langle e_1, \dots, e_{d_k}\rangle \subset \mathbb{C}^n,$$

где $1 \leqslant d_1 < \dots < d_k \leqslant n$ — некоторая строго возрастающая последовательность. В таком случае группа P является блочно-верхнетреугольной (на диагонали стоят блоки размеров $d_i - d_{i-1}$), а однородное пространство G/P есть многообразие частичных флагов

$$\mathrm{Fl}(d_1, \dots, d_k) = \Big\{(U_1 \subset \dots \subset U_k \subset \mathbb{C}^n \;\Big|\; \dim U_i = d_i\Big\}.$$

Пример 2.2. У предыдущего примера имеются два важных частных случая, в некотором смысле противоположных друг другу. Если $k = 1$, то P является максимальной параболической подгруппой; в таком случае $G/P = \mathrm{Gr}(d, n)$ — грассманиан d-мерных подпространств в n-мерном. Напротив, если $P = B$, т.е. $(d_1, \dots, d_{n-1}) = (1, \dots, n-1)$, то $G/P = G/B$ — *многообразие полных флагов*. Допуская некоторую вольность речи, мы иногда будем употреблять для пространства G/B термин «многообразие полных флагов» в случае, когда группа G не есть $\mathrm{GL}(n)$.

Параболические подгруппы $P \subset G$, содержащие B, находятся во взаимно однозначном соответствии с подмножествами в системе простых корней Δ группы G. Будем говорить, что параболическая подгруппа задана множеством простых корней $I \subseteq \Delta$, и обозначать её через P_I, если для ее касательной алгебры имеет место разложение

$$\mathfrak{p}_I = \mathfrak{t} \oplus \bigoplus_{\{\alpha \in R^+ \cup \mathbb{Z}(\Delta \setminus I)\}} \mathfrak{g}_\alpha,$$

где $\mathfrak{t}$ — касательная алгебра тора T, а пространство $\mathfrak{g}_\alpha$ — корневое подпространство в $\mathfrak{g}$, отвечающее корню α.

Иными словами, множество простых корней стандартной подгруппы Леви в P_I равно $\Delta \setminus I$. Тем самым, «чем меньше корней, тем больше подгруппа»: скажем, для борелевской подгруппы $B = P_\Delta$. Напротив, максимальные параболические подгруппы отвечают подмножествам из одного простого корня. В случае, если $G = \mathrm{GL}(n)$, то для многообразия флагов $Fl(d_1, \dots, d_k) = G/P_I$ имеем $I = \{\alpha_{d_1}, \dots, \alpha_{d_k}\}$. В частности, грассманиан $\mathrm{Gr}(d, n)$, будучи фактором $\mathrm{GL}(n)$ по максимальной параболической подгруппе, отвечает множеству $I = \{\alpha_d\}$.

2.2. Разложение Шуберта. Для группы G имеет место *разложение Брюа*:

$$G = \bigsqcup_{w \in W} BwB.$$

Группа G представляется в виде объединения двойных смежных классов борелевской подгруппы; эти классы нумеруются элементами группы Вейля.

Это разложение дает разложение многообразия полных флагов G/B в объединение орбит группы B, действующей на G/B слева:

$$G/B = \bigsqcup_{w \in W} BwB/B.$$

Пусть $w \in W$ — некоторый элемент группы Вейля, $\ell(w) \in \mathbb{Z}_+$ — его *длина*, т.е. наименьшее число m, для которого w представляется в виде композиции m простых отражений. (В случае, когда $G = \mathrm{GL}(n)$, имеем $W \cong S_n$, и длина элемента есть длина перестановки, т.е. количество инверсий:

$\ell(w) = \#\{(i,j) \mid i < j, w(i) > w(j)\}$.) Несложно видеть, что каждая из орбит BwB/B изоморфна аффинному пространству $\mathbb{A}^{\ell(w)}$, где $\ell(w)$ — *длина* элемента w. Тем самым получается клеточное разложение многообразия G/B.

Определение 2.2. B-Орбиты на G/B называются *клетками Шуберта.* Их замыкания называются *многообразиями Шуберта*; будем обозначать их через $X_w = \overline{BwB/B}$. Полученное таким образом клеточное разбиение G/B называется *разложением Шуберта.*

Из структуры разложения Шуберта многообразия G/B следует, что классы когомологий $[X_w] \in H^*(G/B, \mathbb{Q})$, двойственные по Пуанкаре к фундаментальным классам многообразий Шуберта, порождают кольцо когомологий $H^*(G/B, \mathbb{Q})$ как векторное пространство над $\mathbb{Q}$. Это соображение применяется при решении ряда задач исчислительной геометрии, которые могут быть переформулированы в терминах вычислений в кольце $H^*(G/B, \mathbb{Q})$. Этот подход называется *исчислением Шуберта*; он и послужил мотивировкой для рассмотрения разложения Шуберта многообразий флагов. Подробнее об исчислении Шуберта можно прочесть в предисловии к переизданию книги [50] (см. также [29, 30, 54].

2.3. Порядок Брюа. Разложение Шуберта является клеточным разбиением, т.е. замыкание каждой клетки является объединением клеток. Тем самым отношение примыкания на клетках Шуберта индуцирует на группе Вейля порядок, называемый *порядком Брюа.*

Определение 2.3. Будем говорить, что два элемента группы Вейля $v, w \in W$ *сравнимы в смысле порядка Брюа*, $v \leqslant w$, если $X_v \subset X_w$.

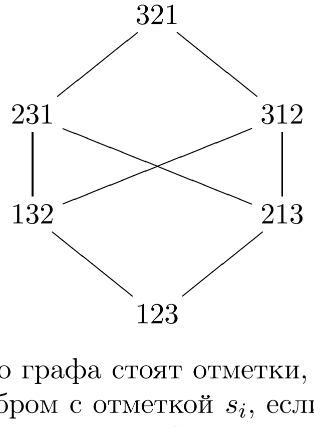
Порядок Брюа допускает следующее комбинаторное описание (см., например, [28]).

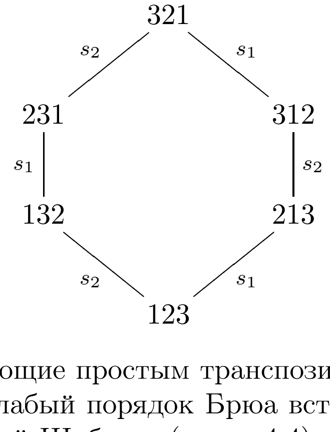
Предложение 2.1. *Элементы v и w сравнимы в смысле порядка Брюа, $v \leqslant w$, если и только если существует такая последовательность отражений* (*не обязательно простых*) *$s_{i_1}, \ldots, s_{i_r} \in W$, для которых $w = s_{i_r} \ldots s_{i_1} v$, причем $\ell(s_{i_t} \ldots s_{i_1} v) > \ell(s_{i_{t-1}} \ldots s_{i_1} v)$ для любого $t \leqslant r$.*

Кроме того, можно определить *слабый порядок Брюа.*

Определение 2.4. Элементы v и w *сравнимы в смысле слабого порядка Брюа*, $v \leqslant_w w$, если и только если существует такая последовательность *простых* отражений $s_{i_1}, \ldots, s_{i_r} \in W$, для которых $w = s_{i_r} \ldots s_{i_1} v$, причем $\ell(s_{i_t} \ldots s_{i_1} v) > \ell(s_{i_{t-1}} \ldots s_{i_1} v)$ для любого $t \leqslant r$.

Ясно, что из соотношения $v \leqslant_w w$ следует $v \leqslant w$; обратное, вообще говоря, неверно. Ниже приведен граф Хассе для порядков Брюа (обычного и слабого) на группе перестановок S_3 (для $G = \mathrm{GL}(3)$). Перестановки записаны в виде одной строки (так, скажем, 321 — это перестановка $1 \mapsto 3$, $2 \mapsto 2$, $3 \mapsto 1$).





На ребрах второго графа стоят отметки, соответствующие простым транспозициям: вершины w и v соединены ребром с отметкой s_i, если $w = s_i v$. Слабый порядок Брюа встретится ниже при описании разрешений Ботта—Самельсона многообразий Шуберта (см. п. 4.4).

2.4. Параболические подгруппы в группах Вейля. Пусть W — группа Вейля, порожденная образующими $s_1, \dots, s_r$ с соотношениями $s_i^2 = e$, $(s_i s_j)^{m_{ij}} = e$. Рассмотрим произвольный набор простых корней $I \subset \Delta$ и рассмотрим подгруппу $W_I \subset W$, порожденную всеми s_{α_i}, для которых $\alpha_i \in I$. Так, например, если $I = \varnothing$, то $W_I = \{e\}$. Эта подгруппа сама будет группой, порожденной отражениями; такие подгруппы называются *стандартными параболическими подгруппами* в группе Вейля W.

Предложение 2.2 (см. [28, Proposition 1.10]). *Пусть R_I — пересечение системы корней R с линейной оболочкой $V_I = \langle \alpha_i \rangle$, $\alpha_i \in I$.*

(i) *R_I — система корней, для которой I является системой простых корней, а W_I является группой отражений, связанной с этой системой корней.*
(ii) *Функция длины на W_I (как на группе отражений) совпадает с ограничением функции длины на W: $\ell_I(w) = \ell(w)$ для любого $w \in W_I$.*
(iii) *Определим $W^I = \{w \in W \mid \ell(ws_\alpha) > \ell(w)$ при всех $\alpha \in \Delta_I\}$. Тогда каждый элемент w однозначно разлагается в произведение $w = vu$, $v \in W^I$, $u \in W_I$, для которого $\ell(v) + \ell(u) = \ell(w)$. Более того, v является единственным элементом минимальной длины в левом смежном классе wW_I.*

Стандартные параболические подгруппы $W_I \subset W$ взаимно однозначно соответствуют параболическим подгруппам $P_I \subset G$, содержащим B. При этом множество W^I параметризует B-орбиты (клетки Шуберта) в многообразии флагов G/P_I:

$$G/P = \bigsqcup_{w \in W^I} BwP/P.$$

Вложение $W^I \hookrightarrow W$ индуцирует на W^I сильный и слабый порядки Брюа; сильный порядок Брюа описывает примыкание клеток Шуберта, а слабый отвечает действию минимальных параболических подгрупп (см. п. 4.3).

2.5. Теорема Бореля—Вейля. Эта теорема утверждает, что в сечениях линейных расслоений многообразий флагов G/B могут быть реализованы все конечномерные неприводимые представления группы G. Приведем краткое описание этой конструкции.

Пусть λ — целочисленный вес. Он определяет характер $\chi_\lambda : B \to \mathbb{C}^*$ борелевской подгруппы B, или, что то же самое, одномерное представление $\mathbb{C}_\lambda$ группы B, действие на котором задается формулой $b \cdot z = \lambda(b)z$.

Можно рассмотреть однородное расслоение $G \times^B \mathbb{C}_\lambda = \mathcal{L}_\lambda$; это будет G-эквивариантное линейное расслоение над G/B, причем все G-эквивариантные линейные расслоения над G/B будут получаться таким образом.

Голоморфные глобальные сечения $\mathcal{L}_\lambda$ отвечают голоморфным отображениям

$$f : G \to \mathbb{C}_\lambda, \quad f(gb) = \chi_\lambda(b) f(g) \quad \forall b \in B,\ g \in G.$$

Они образуют пространство $H^0(G/B, \mathcal{L}_\lambda)$. На этом пространстве естественно возникает структура G-модуля:

$$g \cdot f(h) = f(g^{-1}h) \quad \forall g, h \in G.$$

Теорема 2.1 (А. Борель, А. Вейль). *Если вес λ доминантен, пространство $H^0(G/B, \mathcal{L}_\lambda)$ изоморфно (как G-модуль) неприводимому G-модулю V_{λ^*} со старшим весом λ^*. В противном случае $H^0(G/B, \mathcal{L}_\lambda) = 0$.*

Доказательство см., например, в [24, 52]).

Отметим, что модуль V_{λ^*} можно рассматривать как G-модуль, индуцированный с одномерного B-модуля $\mathbb{C}_{\lambda^*}$.

Аналогично можно описать пространства глобальных сечений линейных G-эквивариантных расслоений над многообразиями частичных флагов $H^0(G/P, \mathcal{L}_\lambda)$ как неприводимые G-модули $V_{\lambda^*} = \mathrm{Ind}_P^G \mathbb{C}_{\lambda^*}$. Мы будем использовать эту геометрическую реализацию неприводимых представлений группы G в следующем разделе.

Обобщение этой теоремы, обычно называемое теоремой Бореля—Вейля—Ботта, дает описание не только глобальных сечений, но и высших когомологий $H^i(G/B, \mathcal{L}_\lambda)$ как G-модулей (см., например, [21]).

2.6. Сферические многообразия. В предыдущем разделе было описано разложение Шуберта для многообразий флагов G/P. Его можно рассматривать как разложение многообразия в объединение орбит борелевской подгруппы $B \subset G$, причем число этих орбит конечно, следовательно, среди них есть открытая орбита. Это свойство — наличие открытой орбиты борелевской подгруппы на G-многообразии — характеризует класс G-многообразий, называемых *сферическими.*

В настоящем разделе мы ограничиваемся тем, что приводим несколько эквивалентных определений сферического многообразия, которые понадобятся нам далее. Подробное изложение теории сферических многообразий можно найти, например, в книге Д. А. Тимашева [56] или в недавнем обзоре Н. Перрена [45].

Определение 2.5. Пусть X — нормальное G-многообразие. *Сложностью* $c_G(X) = c(X)$ многообразия X называется минимальная коразмерность B-орбиты в X. Многообразие X называется *сферическим*, если $c(X) = 0$.

Приведем несколько эквивалентных определений сферических многообразий.

Теорема 2.2 (см. [45, Theorem 2.1.2])**.** *Следующие условия эквивалентны*:

(1) *X сферично*;
(2) $\mathbb{C}(X)^B = \mathbb{C}$;
(3) *X состоит из конечного числа B-орбит.*

Для квазипроективного X эти свойства эквивалентны следующему свойству:

(4) *Если $\mathcal{L}$ — G-эквивариантное линейное расслоение, G-модуль $H^0(X, \mathcal{L})$ не имеет кратностей (т.е. для любого неприводимого G-модуля W верно, что* $\dim \operatorname{Hom}_G(W, H^0(X, \mathcal{L})) \leqslant 1$).

Важными примерами сферических многообразий, помимо многообразий флагов, являются торические многообразия (в этом случае $G = B = T$) и симметрические пространства.

3. Кратные многообразия флагов и разложение тензорных произведений

3.1. Двойные многообразия флагов сложности 0 и 1. В этом разделе приводится классификация двойных многообразий флагов сложности 0 и 1. Сначала отметим, что достаточно рассмотреть случай, когда G — простая алгебраическая группа. Действительно, всякая полупростая группа раскладывается в почти прямое произведение простых подгрупп $G = G_1 \dots G_s$, а параболические подгруппы $P, Q \subset G$ — в почти прямое произведение параболических подгрупп $P_i, Q_i \subset G_i$. Тогда сложность двойного многообразия флагов $G/P \times G/Q$ равна

$$c_G(G/P \times G/Q) = c_{G_1}(G/P_1 \times G/Q_1) + \dots + c_{G_s}(G_s/P_s \times G_s/Q_s).$$

Таким образом, интересующий нас вопрос сводится к рассмотрению простых групп.

В случае классических групп в качестве B будем рассматривать подгруппу верхнетреугольных матриц (считая в ортогональном и симплектическом случаях, что группа G сохраняет билинейную форму, имеющую антидиагональную матрицу). Тогда параболические подгруппы, содержащие B, имеют блочно-верхнетреугольный вид, и их можно задавать размерами блоков на диагонали. Исключение составляет группа $\mathrm{SO}(n)$ при четных n, для которой не все параболические подгруппы имеют указанный вид. Оставшиеся подгруппы приобретают такой вид в результате сопряжения с перестановкой двух средних базисных векторов; такие параболические подгруппы будем обозначать штрихами.

Для особых групп будем задавать параболические подгруппы $P_I \supseteq B$ наборами простых корней $I \subseteq \Delta$, как это указано в п. 2.1.

Имеют место следующие классификационные теоремы, относящиеся к случаю классических и исключительных групп соответственно.

Таблица 1. Пары параболических подгрупп, отвечающих двойным многообразиям флагов в группах $\mathrm{SL}(n)$

К-ва блоков	Сложность 0		Сложность 1	
в P и Q	P	Q	P	Q
$(2,2)$	(p_1,p_2)	(q_1,q_2)		
$(2,3)$	(p_1,p_2)	$(1,q_1,q_2)$	$(3,p_2)$, $p_2 \geqslant 3$	(q_1,q_2,q_3), $q_1,q_2,q_3 \geqslant 2$
	(p_1,p_2)	$(q_1,1,q_3)$	(p_1,p_2), $p_1,p_2 \geqslant 3$	$(2,2,q_3)$, $q_3 \geqslant 2$
	$(2,p_2)$	(q_1,q_2,q_3)	(p_1,p_2), $p_1,p_2 \geqslant 3$	$(2,q_2,2)$, $q_2 \geqslant 2$
$(2,4)$			$(2,p_2)$	(q_1,q_2,q_3,q_4)
			(p_1,p_2), $p_1,p_2 \geqslant 2$	$(1,1,1,q_4)$
			(p_1,p_2), $p_1,p_2 \geqslant 2$	$(1,1,q_3,1)$
$(2,s)$	$(1,p_2)$	$(q_1,\dots,q_s)$		
$(3,3)$			$(1,1,p_3)$	(q_1,q_2,q_3)
			$(1,p_2,1)$	(q_1,q_2,q_3)

Теорема 3.1 (см. [3, теорема 1])**.** *Пусть G — классическая группа (т.е.* $\mathrm{SL}(n)$, $\mathrm{SO}(n)$ *или* $\mathrm{Sp}(n)$*). Тогда все двойные многообразия флагов сложности* 0 *и* 1 *соответствуют парам параболических подгрупп (с точностью до перестановки, для* $\mathrm{SL}(n)$ *— еще и с точностью до одновременного транспонирования относительно побочной диагонали, а для* $\mathrm{SO}(2n)$*, кроме того, с точностью до диаграммного автоморфизма G), приведенных в таблицах* 1*,* 2*,* 3*.*

Теорема 3.2 (см. [3, теорема 2])**.**

(1) *Для групп E_8, F_4 и G_2 двойных многообразий флагов сложности* 0 *и* 1 *не существует.*

(2) *Для группы E_6 многообразия флагов сложности* 0 *отвечают следующим парам параболических подгрупп:*

$$\big(\{\alpha_1\},\{\alpha_1\}\big),\quad \big(\{\alpha_1\},\{\alpha_2\}\big),\quad \big(\{\alpha_1\},\{\alpha_4\}\big),\quad \big(\{\alpha_1\},\{\alpha_5\}\big),\quad \big(\{\alpha_1\},\{\alpha_6\}\big),\quad \big(\{\alpha_2\},\{\alpha_5\}\big),$$
$$\big(\{\alpha_4\},\{\alpha_5\}\big),\quad \big(\{\alpha_5\},\{\alpha_5\}\big),\quad \big(\{\alpha_5\},\{\alpha_6\}\big),\quad \big(\{\alpha_1\},\{\alpha_1,\alpha_5\}\big),\quad \big(\{\alpha_5\},\{\alpha_1,\alpha_5\}\big);$$

многообразия сложности 1 *отвечают следующим парам параболических подгрупп*:

$$\big(\{\alpha_1\},\{\alpha_1,\alpha_2\}\big),\quad \big(\{\alpha_1\},\{\alpha_1,\alpha_6\}\big),\quad \big(\{\alpha_1\},\{\alpha_4,\alpha_5\}\big),\quad \big(\{\alpha_1\},\{\alpha_5,\alpha_6\}\big),$$
$$\big(\{\alpha_5\},\{\alpha_1,\alpha_2\}\big),\quad \big(\{\alpha_5\},\{\alpha_1,\alpha_6\}\big),\quad \big(\{\alpha_5\},\{\alpha_4,\alpha_5\}\big),\quad \big(\{\alpha_5\},\{\alpha_5,\alpha_6\}\big).$$

(3) *Для группы E_7 многообразия флагов сложности* 0 *отвечают следующим парам параболических подгрупп*:

$$\big(\{\alpha_1\},\{\alpha_1\}\big),\quad \big(\{\alpha_1\},\{\alpha_6\}\big),\quad \big(\{\alpha_1\},\{\alpha_7\}\big);$$

многообразие флагов сложности 1 *отвечает паре параболических подгрупп* $\big(\{\alpha_1\},\{\alpha_2\}\big)$.

3.2. Кольца Кокса двойных многообразий флагов. Приведём определение кольца Кокса проективного многообразия X в случае, когда группа Пикара $\mathrm{Pic}(X)$ — свободная группа конечного ранга. Пусть $\mathrm{Pic}(X)$ свободно порождается классами линейных расслоений $\mathcal{L}_1,\dots,\mathcal{L}_s$. Тогда всякое линейное расслоение над X изоморфно $\mathcal{L}_1^{k_1}\otimes\dots\otimes\mathcal{L}_s^{k_s}$, где $k_1,\dots,k_s\in\mathbb{Z}$.

Определение 3.1. *Кольцом Кокса* многообразия X называется пространство

$$R(X)=\bigoplus_{k_i\in\mathbb{Z}} H^0(X,\mathcal{L}_1^{k_1}\otimes\dots\otimes\mathcal{L}_s^{k_s}).$$

Умножение на пространстве $R(X)$ отвечает тензорному произведению сечений.

Таблица 2. Пары параболических подгрупп, отвечающих двойным многообразиям флагов в группах $\mathrm{SO}(n)$

К-ва блоков	Сложность 0		Сложность 1	
в P и Q	P	Q	P	Q
$(2,2)$ $(2,2)$	(p,p) (p,p)	(p,p) $(p,p)'$		
$(2,3)$	(p,p) (p,p)	(q_1,q_2,q_1), $q_1\leqslant 3$ $(q,2,q)$	$(6,6)$	$(4,4,4)$
$(2,4)$	(p,p) (p,p) $(4,4)$	$(1,q,q,1)$ $(1,q,q,1)'$ $(2,2,2,2)'$	$(4,4)$ $(5,5)$ $(5,5)$ $(5,5)$ $(5,5)$	$(2,2,2,2)$ $(2,3,3,2)$ $(3,2,2,3)$ $(2,3,3,2)'$ $(3,2,2,3)'$
$(2,5)$			$(4,4)$	$(2,1,2,1,2)$
$(2,6)$ $(2,6)$			$(4,4)$ $(4,4)$	$(1,1,2,2,1,1)$ $(1,1,2,2,1,1)'$
$(3,3)$	$(1,p,1)$ $(p,1,p)$	(q_1,q_2,q_1) $(p,1,p)$	$(2,2,2)$ $(2,p,2)$, $p>1$	$(2,2,2)$ $(q,1,q)$
$(3,4)$	$(1,p,1)$	(q_1,q_2,q_2,q_1)	$(2,2,2)$	$(1,2,2,1)$
$(3,5)$			$(1,p,1)$ $(2,1,2)$	(q_1,q_2,q_3,q_2,q_1) $(1,1,1,1,1)$
$(3,6)$			$(1,p,1)$	$(q_1,q_2,q_3,q_3,q_2,q_1)$
$(4,4)$			$(1,2,2,1)$ $(1,2,2,1)$	$(1,2,2,1)$ $(1,2,2,1)'$

Замечание 3.1. Кольцо $R(X)$ является мультиградуированным при помощи группы $\mathrm{Pic}(X)$. Сечения линейных расслоений при этом являются в точности мультиоднородными элементами $R(X)$.

Более общее определение колец Кокса см., например, в [8, Sec. 1.4].

Для дальнейшего нам потребуется знание структуры колец Кокса многообразий флагов. Нам будет удобно реализовывать многообразия флагов в виде G/P^-, где P^- — параболическая подгруппа, содержащая *противоположную* к B борелевскую подгруппу B^-; иными словами, касательная алгебра $\mathfrak{p}^-$ содержит все корневые подпространства, отвечающие отрицательным корням.

Пусть $I=\{\alpha_{i_1},\dots,\alpha_{i_r}\}\subset\Delta$ — непустое подмножество системы простых корней, $P=P_I$ — соответствующая параболическая подгруппа, $P^-=P_I^-$ — параболическая подгруппа, противоположная к P_I. Хорошо известно (см., например, [16]), что группа Пикара $\mathrm{Pic}(G/P^-)\cong\mathbb{Z}^r$ свободно порождается классами дивизоров Шуберта, т.е. классами многообразий Шуберта коразмерности 1. Эти дивизоры образуют в точности множество всех B-инвариантных дивизоров на G/P^-; они имеют вид $D_{i_k}=\overline{Bs_{i_k}P^-/P^-}$, где $\alpha_{i_k}\in I$, а простое отражение s_{i_k} соответствует корню α_{i_k}.

Таблица 3. Пары параболических подгрупп, отвечающих двойным многообразиям флагов в группах $\mathrm{Sp}(n)$

К-ва блоков	Сложность 0		Сложность 1	
в P и Q	P	Q	P	Q
$(2,2)$	(p,p)	(p,p)		
$(2,3)$	(p,p)	$(1,q,1)$	(p,p)	$(2,q,2)$
$(2,4)$			$(2,2)$	$(1,1,1,1)$
$(3,3)$	$(1,p,1)$	(q_1,q_2,q_1)		
$(3,4)$			$(1,p,1)$	(q_1,q_2,q_2,q_1)
$(3,5)$			$(1,p,1)$	(q_1,q_2,q_3,q_2,q_1)

Пусть

$$D = \sum m_{i_k} D_{i_k} \in \mathrm{Pic}(G/P_I^-),$$

$\lambda = \sum m_{i_k}\omega_{i_k}$ — вес канонического сечения расслоения $\mathcal{O}(D)$. Тогда $H^0(G/P_I^-, \mathcal{O}(D)) \cong V_\lambda$, если $m_{i_1}, \dots, m_{i_r} \geqslant 0$, и 0 в противном случае. Таким образом,

$$R(G/P^-) \simeq \bigoplus_{\substack{\lambda = m_{i_1}\omega_{i_1} + \ldots + m_{i_r}\omega_{i_r} \\ m_{i_1},\ldots,m_{i_r} \geqslant 0}} V_\lambda.$$

Теперь рассмотрим двойное многообразие флагов $X = G/P^- \times G/Q^-$, где $P = P_I$, $Q = P_J$, $I = \{\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_r}\}$, $J = \{\alpha_{j_1}, \dots, \alpha_{j_t}\}$. Его группа Пикара свободно порождается прообразами дивизоров Шуберта на G/P^- и G/Q^- при канонических проекциях $X \to G/P^-$ и $X \to G/Q^-$ соответственно. Такие прообразы дивизоров Шуберта мы тоже будем называть дивизорами Шуберта и обозначать так же. Кольцо Кокса двойного многообразия флагов можно записать в следующем виде:

$$R(X) = R(G/P^-) \otimes R(G/Q^-) \simeq \bigoplus_{\substack{\lambda = m_{i_1}\omega_{i_1} + \ldots + m_{i_r}\omega_{i_r}, \\ m_{i_1},\ldots,m_{i_r} \geqslant 0 \\ \mu = n_{j_1}\omega_{j_1} + \ldots + n_{j_t}\omega_{j_t}, \\ n_{j_1},\ldots,n_{j_t} \geqslant 0}} V_\lambda \otimes V_\mu.$$

Мультистепень будет задаваться целочисленным $(r+t)$-вектором.

3.3. Разложение тензорных произведений неприводимых представлений. В этом разделе мы описываем, каким образом знание U-инвариантов колец Кокса двойных многообразий флагов позволяет раскладывать тензорные произведения неприводимых G-модулей. Мы следуем изложению в [4, 5].

Пусть кольцо A градуировано некоторой группой E; тогда через A_ρ будем обозначать соответствующую элементу $\rho \in E$ однородную компоненту в кольце A.

Пусть $X = G/P^- \times G/Q^-$, где $P = P_I$, $Q = P_J$, $I = \{\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_r}\}$, $J = \{\alpha_{j_1}, \dots, \alpha_{j_t}\}$. Пусть

$$\lambda = \sum m_{i_k}\omega_{i_k}, \quad \mu = \sum n_{j_l}\omega_{j_l}.$$

Тогда подмодуль $V_\lambda \otimes V_\mu \subset R(X)$ будет состоять в точности из мультиоднородных элементов мультистепени $(m_{i_1}, \dots, m_{i_r}, n_{j_1}, \dots, n_{j_t}) =: (\bar m, \bar n)$, т.е. совпадать с $R(X)_{(\bar m, \bar n)}$.

Кратность вхождения V_ν в $V_\lambda \otimes V_\mu$ равна размерности пространства $(V_\lambda \otimes V_\mu)_\nu^U$ инвариантов относительно действия U, имеющих вес ν относительно действия T. Это пространство можно отождествить с подпространством $R(X)^U_{(\bar m,\bar n),\nu}$ (где ν — вес относительно тора T). Таким образом,

$$V_\lambda \otimes V_\mu \simeq R(X)_{(\bar m,\bar n)} \simeq \bigoplus_\nu V_\nu^{\oplus d(\bar m,\bar n,\nu)},$$

где $d(\bar m,\bar n,\nu) = \dim R(X)^U_{(\bar m,\bar n),\nu}$.

Для следующих случаев размерности $d(\bar m,\bar n,\nu)$ и $d(\bar m,\nu)$, участвующие в правилах разложения тензорных произведений, можно без труда вычислить. Как следует из теоремы 3.5 (см. ниже), эти случаи будут включать в себя случаи сложностей 0 и 1.

Теорема 3.3. *Пусть* $X = G/P^- \times G/Q^-$, *где* $P = P_I$, $Q = P_J$, $I = \{\alpha_{i_1},\ldots,\alpha_{i_r}\}$, $J = \{\alpha_{j_1},\ldots,\alpha_{j_t}\}$. *Пусть*

$$\lambda = \sum m_{i_k}\omega_{i_k}, \quad \mu = \sum n_{j_l}\omega_{j_l},$$

$(\bar m,\bar n) := (m_{i_1},\ldots,m_{i_r},n_{j_1},\ldots,n_{j_t})$. *Пусть* $R(X)^U$ *свободна, элементы её минимальной системы однородных порождающих имеют веса* $\nu_1,\ldots,\nu_d$ *и мультистепени* $(\bar m_1,\bar n_1),\ldots,(\bar m_d,\bar n_d)$. *Тогда имеет место следующее разложение*:

$$V_\lambda \otimes V_\mu \simeq \bigoplus_{k_1(\bar m_1,\bar n_1)+\ldots+k_d(\bar m_d,\bar n_d)=(\bar m,\bar n)} V_{k_1\nu_1+\ldots+k_d\nu_d}.$$

Теорема 3.3 очевидным образом следует из изложенного выше.

Теорема 3.4. *Пусть* X, λ, μ, $(\bar m,\bar n)$ — *такие же, как в теореме* 3.3, *алгебра* $R(X)^U$ *является гиперповерхностью (т.е. образующие связаны единственным определяющим соотношением), элементы её минимальной системы однородных порождающих имеют веса* $\nu_1,\ldots,\nu_d$ *и мультистепени* $(\bar m_1,\bar n_1),\ldots,(\bar m_d,\bar n_d)$, *а определяющее соотношение имеет вес* ν_0 *и мультистепень* $(\bar m_0,\bar n_0)$. *Тогда имеет место следующее разложение*:

$$V_\lambda \otimes V_\mu \simeq \bigoplus_{k_1(\bar m_1,\bar n_1)+\ldots+k_d(\bar m_d,\bar n_d)=(\bar m,\bar n)} V_{k_1\nu_1+\ldots+k_d\nu_d} - \\ - \bigoplus_{l_1(\bar m_1,\bar n_1)+\ldots+l_d(\bar m_d,\bar n_d)=(\bar m,\bar n)-(\bar m_0,\bar n_0)} V_{\nu_0+l_1\nu_1+\ldots+l_d\nu_d}. \quad (1)$$

Под разностью представлений понимается представление, для которого кратность вхождения каждого неприводимого представления V_ν *равна разности кратностей вхождения* V_ν *в исходные представления.*

Доказательство. Рассмотрим точную последовательность

$$0 \to (F_1) \xrightarrow{\varphi_1} \mathbb{C}[t_1,\ldots,t_d] \xrightarrow{\varphi_2} R(X)^U \to 0,$$

где F_1 — определяющее соотношение, φ_1 — естественное вложение, $\varphi_2(t_i) = f_i$. Введем $\mathbb{Z}^{r+t+l}$-градуировку на алгебре многочленов $\mathbb{C}[t_1,\ldots,t_d]$, где $l = \operatorname{rk} G$, приписав каждой переменной t_i мультистепень $(\bar m_i,\bar n_i)$ и вес ν_i. Тогда φ_1 и φ_2 сохраняют градуировку. Кратность вхождения V_ν в $V_\lambda \otimes V_\mu$ равна $\dim R(X)^U_{(\bar m,\bar n),\nu}$, кратность вхождения в уменьшаемое правой части изоморфизма (1) равна $\dim \mathbb{C}[t_1,\ldots,t_d]_{(\bar m,\bar n),\nu}$, а кратность вхождения в вычитаемое правой части изоморфизма (1) равна $\dim (F_1)_{(\bar m,\bar n),\nu}$. Из точности последовательности имеем

$$\dim R(X)^U_{(\bar m,\bar n),\nu} = \dim \mathbb{C}[t_1,\ldots,t_d]_{(\bar m,\bar n),\nu} - \dim (F_1)_{(\bar m,\bar n),\nu},$$

что и доказывает теорему. □

3.4. U-Инварианты в кольцах Кокса двойных многообразий флагов.

Теорема 3.5 (см. [4,5])**.** *Пусть многообразие $X = G/P^- \times G/Q^-$ имеет сложность 0 или 1, где P^- и Q^- — параболические подгруппы простой группы G, содержащие борелевскую подгруппу B^-, противоположные к P и Q. Пусть P и Q заданы подмножествами простых корней $I = \{\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_r}\}$, $J = \{\alpha_{j_1}, \dots, \alpha_{j_t}\}$. Тогда алгебра $R(X)^U$ порождается элементами указанных в таблицах 4 и 5 весов и мультистепеней и элементами соответствующих фундаментальных весов $\omega_{i_1}, \dots, \omega_{i_r}, \omega_{j_1}, \dots, \omega_{j_t}$ мультистепеней $(1, 0, \dots, 0)$, $(0, 1, 0, \dots, 0)$, …, $(0, \dots, 0, 1)$ соответственно. Если многообразие X имеет сложность 0, эти образующие свободно порождают $R(X)^U$. В случае сложности 1 в таблице указано количество определяющих соотношений между этими элементами (оно либо одно, либо его нет), вес и мультистепень соотношения. Если соотношение есть, оно имеет следующий вид: сумма всех мономов данного веса и мультистепени от порождающих равна нулю.*

Из этой классификационной теоремы вытекает следующее утверждение.

Следствие 3.1.

(1) *Пусть X — сферическое двойное многообразие флагов. Тогда алгебра $R(X)^U$ свободна.*
(2) *Пусть сложность двойного многообразия флагов равна 1. Тогда алгебра $R(X)^U$ свободна либо является гиперповерхностью.*

Замечание 3.2. Частные случаи этого следствия были известны ранее; так, п. (1) был получен П. Литтельманом в [36]). Алгебра U-инвариантов для $R(X)$ в случае, когда X имеет сложность 1 и является произведением двух многообразий флагов, отвечающих максимальным параболическим подгруппам, была вычислена Д. И. Панюшевым (см. [43]).

Таблица 4. Веса и мультистепени образующих U-инвариантов в кольце Кокса для сложности 0

I	**J**	**степень**	**вес**
		SL_n	
α_i	α_j $i \leqslant j$	$(1,1)$	$\omega_{i-k} + \omega_{j+k}$, $k = 1, \dots, \min\{i, n-j\}$
α_i	α_1, α_j $i \leqslant j$	$(1,1,0)$ $(1,0,1)$ $(1,1,1)$	ω_{i+1} $\omega_{i-k} + \omega_{j+k}$, $k = 1, \dots, \min\{i, n-j\}$ $\omega_{i-k+1} + \omega_{j+k}$ $k = \max\{1, 2-(j-i)\}, \dots, \min\{i-1, n-j\}$
α_i	α_1, α_j $i > j$	$(1,1,0)$ $(1,0,1)$ $(1,1,1)$	ω_{i+1} $\omega_{i+k} + \omega_{j-k}$, $k = 1, \dots, \min\{j, n-i\}$ $\omega_{i+k} + \omega_{j-k+1}$, $k = 2, \dots, \min\{j-1, n-i\}$
α_i	α_j, α_{j+1} $i \geqslant j+1$	$(1,1,0)$ $(1,0,1)$	$\omega_{i+k} + \omega_{j-k}$, $k = 1, \dots, \min\{j, n-i\}$ $\omega_{i+k} + \omega_{j-k+1}$, $k = 1, \dots, \min\{j+1, n-i\}$
α_2	α_i, α_j $i > j$ $i, j-i, n-j \geqslant 2$	$(1,1,0)$ $(1,0,1)$ $(1,1,1)$	$\omega_1 + \omega_{i+1}$, ω_{i+2} $\omega_1 + \omega_{j+1}$, ω_{j+2} $\omega_{i+1} + \omega_{j+1}$
α_1	$\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_s}$	$(1,1,0,0,\dots,0)$ $(1,0,1,0,\dots,0)$ $\dots$ $(1,0,0,0,\dots,1)$	ω_{i_1+1} ω_{i_2+1} $\dots$ ω_{i_s+1}

Sp_{2l}, $l \geqslant 2$		
α_1 α_i $i \leqslant l-1$	$(1,1)$ $(2,1)$	ω_{i-1}, ω_{i+1} ω_i при $i > 1$
α_1 α_l	$(1,1)$ $(2,1)$	ω_{l-1} ω_l
α_l α_l	$(1,1)$	$2\omega_k$, $k = 0, \ldots, l-1$

SO_{2l}, $l \geqslant 4$		
α_1 α_i $i \leqslant l-3$	$(1,1)$ $(2,1)$	ω_{i-1}, ω_{i+1} ω_i при $i > 1$
α_1 α_{l-2}	$(1,1)$ $(2,1)$	ω_{l-3}, $\omega_{l-1} + \omega_l$ ω_{l-2}
α_1 α_{l-1}	$(1,1)$	ω_l
α_2 α_l	$(1,1)$ $(1,2)$	$\omega_1 + \omega_{l-1}$, ω_l ω_{l-2}
α_3 α_l $l \geqslant 6$	$(1,1)$ $(1,2)$ $(2,2)$	$\omega_1 + \omega_l$, $\omega_2 + \omega_{l-1}$, ω_{l-1} $\omega_1 + \omega_{l-2}$, ω_{l-3} $\omega_2 + \omega_{l-2}$
α_{l-1} α_l	$(1,1)$	ω_{l-2k-1}, $k = 1, \ldots, \left[\frac{l-1}{2}\right]$
α_l α_l	$(1,1)$	ω_{l-2k}, $k = 1, \ldots, \left[\frac{l}{2}\right]$
α_1 α_i, α_l $i \leqslant l-3$	$(1,1,0)$ $(2,1,0)$ $(1,0,1)$	ω_{i-1}, ω_{i+1} ω_i при $i > 1$ ω_{l-1}
α_1 α_{l-2}, α_l	$(1,1,0)$ $(2,1,0)$ $(1,0,1)$	ω_{l-3}, $\omega_{l-1} + \omega_l$ ω_{l-2} ω_{l-1}
α_1 α_{l-1}, α_l	$(1,1,0)$ $(1,0,1)$ $(1,1,1)$	ω_l ω_{l-1} ω_{l-2}
α_l α_1, α_2	$(1,1,0)$ $(1,0,1)$ $(2,0,1)$	ω_{l-1} $\omega_1 + \omega_{l-1}$, ω_l ω_{l-2}
α_l α_1,α_{l-1}	$(1,1,0)$ $(1,0,1)$ $(1,1,1)$	ω_{l-1} ω_{l-2k-1}, $k = 1, \ldots, \left[\frac{l-1}{2}\right]$ ω_{l-2k}, $k = 1, \ldots, \left[\frac{l-2}{2}\right]$
α_l α_1,α_l	$(1,1,0)$ $(1,0,1)$ $(1,1,1)$	ω_{l-1} ω_{l-2k}, $k = 1, \ldots, \left[\frac{l}{2}\right]$ ω_{l-2k+1}, $k = 2, \ldots, \left[\frac{l-1}{2}\right]$
α_l α_{l-1},α_l	$(1,1,0)$ $(1,0,1)$	ω_{l-2k-1}, $k = 1, \ldots, \left[\frac{l-1}{2}\right]$ ω_{l-2k}, $k = 1, \ldots, \left[\frac{l}{2}\right]$

	SO$_8$		
α_4	α_2,α_3	$(1,1,0)$ $(2,1,0)$ $(1,0,1)$	$\omega_1+\omega_3$, ω_4 ω_2 ω_1
	SO_{10}		
α_3	α_5	$(1,1)$ $(1,2)$	$\omega_1+\omega_5$, $\omega_2+\omega_4$, ω_4 $\omega_1+\omega_3$, ω_2
	SO_{2l+1}, $l\geqslant 3$		
α_1	α_i $i\leqslant l-2$	$(1,1)$ $(2,1)$	ω_{i-1}, ω_{i+1} ω_i при $i>1$
α_1	α_{l-1}	$(1,1)$ $(2,1)$	ω_{l-2}, $2\omega_l$ ω_{l-1}
α_1	α_l	$(1,1)$ $(1,2)$	ω_l ω_{l-1}
α_l	α_l	$(1,1)$	ω_k, $k=0,\dots,l-1$
	E_6		
α_1	α_1	$(1,1)$	ω_2, ω_5
α_1	α_2	$(1,1)$ $(2,1)$	$\omega_1+\omega_5$, ω_3, ω_6 $\omega_2+\omega_5$, ω_4
α_1	α_4	$(1,1)$ $(2,1)$	ω_2, ω_5, $\omega_5+\omega_6$ ω_3, ω_6
α_1	α_5	$(1,1)$	0, ω_6
α_1	α_6	$(1,1)$ $(2,1)$	ω_1, ω_4 ω_2
α_1	α_1, α_5	$(1,1,0)$ $(1,0,1)$ $(1,1,1)$	ω_2, ω_5 0, ω_6 ω_4
	E_7		
α_1	α_1	$(1,1)$	0, ω_2, ω_6
α_1	α_6	$(1,1)$ $(2,1)$	ω_1, ω_7 ω_2
α_1	α_7	$(1,1)$ $(2,1)$ $(2,2)$	ω_2, ω_5, ω_6 ω_3, ω_7 ω_4

Таблица 5. Веса и мультистепени образующих U-инвариантов в кольце Кокса для сложности 1

I	J	степень	вес	соотношения
			SL_n	
α_2	$\alpha_i,\ \alpha_j,\ \alpha_m$ $i<j<m$	$(1,1,0,0)$ $(1,0,1,0)$ $(1,0,0,1)$ $(1,1,1,0)$ $(1,1,0,1)$ $(1,0,1,1)$	$\omega_{2-k}+\omega_{i+k},\ k=\max\{1,3-i\},\dots,2$ $\omega_1+\omega_{j+1},\ \omega_{j+2}$ $\omega_{2-k}+\omega_{m+k},\ k=1,\dots,\min\{2,n-m\}$ $\omega_{i+1}+\omega_{j+1}$ при $j-i>1$ $\omega_{i+1}+\omega_{m+1}$ $\omega_{j+1}+\omega_{m+1}$ при $m-j>1$	$(2,1,1,1)$ $\omega_1+\omega_{i+1}+\omega_{j+1}+$ $+\omega_{m+1}$ 1 соотношение
α_i $i,n-i\geqslant 3$	$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$	$(1,1,0,0)$ $(1,0,1,0)$ $(1,0,0,1)$ $(1,1,0,1)$	ω_{i+1} $\omega_1+\omega_{i+1},\ \omega_{i+2}$ $\omega_1+\omega_{i+2},\ \omega_2+\omega_{i+1},\ \omega_{i+3}$ $\omega_2+\omega_{i+2}$	$(2,1,1,1)$ $\omega_1+\omega_2+\omega_{i+1}+$ $+\omega_{i+2}$ 1 соотношение
α_i $i,n-i\geqslant 3$	$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_{n-1}$	$(1,1,0,0)$ $(1,0,1,0)$ $(1,0,0,1)$ $(1,1,0,1)$ $(1,0,1,1)$	ω_{i+1} $\omega_1+\omega_{i+1},\ \omega_{i+2}$ ω_{i-1} ω_i $\omega_1+\omega_i,\ \omega_{i+1}$	$(2,1,1,1)$ $\omega_1+\omega_i+\omega_{i+1}$ 1 соотношение
α_3 $i,j-i,n-j\geqslant 2$	$\alpha_i,\ \alpha_j$	$(1,1,0)$ $(1,0,1)$ $(1,1,1)$ $(2,1,1)$	$\omega_{3-k}+\omega_{i+k},\ k=\max\{1,4-i\},\dots,3$ $\omega_{3-k}+\omega_{j+k}$ $k=1,\dots,\min\{3,j-i\}$ $\omega_1+\omega_{i+1}+\omega_{j+1},\ \omega_{i+k}+\omega_{j+3-k}$ $k=1,\dots,\min\{2,j-i-1\}$ $\omega_2+\omega_{i+2}+\omega_{j+2}$	$(3,2,2)$ $\omega_1+\omega_2+\omega_{i+1}+$ $+\omega_{i+2}+\omega_{j+1}+\omega_{j+2}$ 1 соотношение
α_i $i,n-i\geqslant 4$	α_2,α_4	$(1,1,0)$ $(1,0,1)$ $(1,1,1)$ $(2,1,1)$	$\omega_1+\omega_{i+1},\ \omega_{i+2}$ $\omega_1+\omega_{i+3},\ \omega_2+\omega_{i+2},\ \omega_3+\omega_{i+1},\ \omega_{i+4}$ $\omega_1+\omega_3+\omega_{i+2},\ \omega_3+\omega_{i+3}$ $\omega_2+\omega_{i+1}+\omega_{i+3}$	$(3,2,2)$ $\omega_1+\omega_2+\omega_3+$ $+\omega_{i+1}+\omega_{i+2}+\omega_{i+3}$ 1 соотношение
α_i $i,n-i\geqslant 4$	α_2,α_{n-2}	$(1,1,0)$ $(1,0,1)$ $(1,1,1)$ $(2,1,1)$	$\omega_1+\omega_{i+1},\ \omega_{i+2}$ $\omega_{i-1}+\omega_{n-1},\ \omega_{i-2}$ $\omega_1+\omega_{i-1},\ \omega_1+\omega_i+\omega_{n-1}$ $\omega_{i+1}+\omega_{n-1},\ \omega_i$ $\omega_{i-1}+\omega_{i+1}$	$(3,2,2)$ $\omega_1+\omega_{i-1}+\omega_i+$ $+\omega_{i+1}+\omega_{n-1}$ 1 соотношение
α_i,α_j	α_1,α_2	$(1,0,1,0)$ $(1,0,0,1)$ $(0,1,1,0)$ $(0,1,0,1)$ $(1,1,0,1)$	ω_{i+1} $\omega_{2-k}+\omega_{i+k},\ k=\max\{1,3-i\},\dots,2$ ω_{j+1} $\omega_{2-k}+\omega_{j+k}$ $k=1,\dots,\min\{2,n-j\}$ $\omega_{i+1}+\omega_{j+1}$ при $j-i>1$	$(1,1,1,1)$ $\omega_1+\omega_{i+1}+\omega_{j+1}$ 1 соотношение
α_i,α_j	α_1,α_{n-1}	$(1,0,1,0)$ $(1,0,0,1)$ $(0,1,1,0)$ $(0,1,0,1)$ $(1,0,1,1)$ $(0,1,1,1)$	ω_{i+1} ω_{i-1} ω_{j+1} ω_{j-1} ω_i при $i>1$ ω_j при $n-j>1$	$(1,1,1,1)$ $\omega_i+\omega_j$ при $j-i>1$ 0 соотношений; при $j-i=1$ 1 соотношение

Sp_{2l}, $l \geqslant 2$			
α_l α_2 $l \geqslant 4$	$(1,1)$ $(1,2)$ $(2,2)$	$\omega_1+\omega_{l-1}$, ω_{l-2} $\omega_1+\omega_{l-1}$, $2\omega_1+\omega_l$, ω_l $2\omega_{l-1}$	$(3,4)$ $2\omega_1+2\omega_{l-1}+\omega_l$ 1 соотношение
α_1 α_i, α_l	$(1,1,0)$ $(2,1,0)$ $(1,0,1)$ $(2,0,1)$	ω_{i-1}, ω_{i+1} ω_i при $i>1$ ω_{l-1} ω_l	$(2,1,1)$ $\omega_i+\omega_l$ при $l-i>1$ 0 соотношений; при $l-i=1$ 1 соотношение
α_1 α_i, α_j $i<j<l$	$(1,1,0)$ $(2,1,0)$ $(1,0,1)$ $(2,0,1)$	ω_{i-1}, ω_{i+1} ω_i при $i>1$ ω_{j-1}, ω_{j+1} ω_j	$(2,1,1)$ $\omega_i+\omega_j$ при $j-i>1$ 0 соотношений; при $j-i=1$ 1 соотношение
Sp_4			
α_2 α_1	$(1,1,0)$ $(1,2,0)$ $(1,0,1)$	ω_1 ω_2 0, $2\omega_1$	$(2,1,1)$ $2\omega_1+\omega_2$ 1 соотношение
Sp_6			
α_3 α_2	$(1,1)$ $(1,2)$ $(2,2)$	ω_1, $\omega_1+\omega_2$ $2\omega_1+\omega_3$, ω_3 $2\omega_2$	$(3,4)$ $2\omega_1+2\omega_2+\omega_3$ 1 соотношение

SO_{2l}, $l \geqslant 4$			
α_1 α_i,α_j $i<j<l-2$	$(1,1,0)$ $(2,1,0)$ $(1,0,1)$ $(2,0,1)$	ω_{i-1}, ω_{i+1} ω_i при $i>1$ ω_{j-1}, ω_{j+1} ω_j	$(2,1,1)$ $\omega_i+\omega_j$ при $j-i>1$ 0 соотношений; при $j-i=1$ 1 соотношение
α_1 α_i,α_{l-2} $i<l-2$	$(1,1,0)$ $(2,1,0)$ $(1,0,1)$ $(2,0,1)$	ω_{i-1}, ω_{i+1} ω_i при $i>1$ ω_{l-3}, $\omega_{l-1}+\omega_l$ ω_{l-2}	$(2,1,1)$ $\omega_i+\omega_{l-2}$ при $l-2-i>1$ 0 соотношений; при $l-2-i=1$ 1 соотношение
α_1 α_i,α_j,α_l $i<j<l-2$	$(1,1,0,0)$ $(2,1,0,0)$ $(1,0,1,0)$ $(2,0,1,0)$ $(1,0,0,1)$	ω_{i-1}, ω_{i+1} ω_i при $i>1$ ω_{j-1}, ω_{j+1} ω_j ω_{l-1}	$(2,1,1,0)$ $\omega_i+\omega_j$ при $j-i>1$ 0 соотношений; при $j-i=1$ 1 соотношение

α_1	α_i,α_{l-2},α_l $i<l-2$	$(1,1,0,0)$ $(2,1,0,0)$ $(1,0,1,0)$ $(2,0,1,0)$ $(1,0,0,1)$	ω_{i-1}, ω_{i+1} ω_i при $i>1$ ω_{l-3}, $\omega_{l-1}+\omega_l$ ω_{l-2} ω_{l-1}	$(2,1,1,0)$ $\omega_i+\omega_{l-2}$ при $l-2-i>1$ 0 соотношений; при $l-2-i=1$ 1 соотношение
α_1	α_i,α_{l-1},α_l $i<l-1$	$(1,1,0,0)$ $(2,1,0,0)$ $(1,0,1,0)$ $(1,0,0,1)$ $(1,0,1,1)$	ω_{i-1}, ω_{i+1} ω_i при $i>1$ ω_l ω_{l-1} ω_{l-2}	$(2,1,1,1)$ $\omega_i+\omega_{l-1}+\omega_l$ при $l-1-i>1$ 0 соотношений; при $l-1-i=1$ 1 соотношение
		SO_8		
α_4	α_2,α_4	$(1,1,0)$ $(2,1,0)$ $(1,0,1)$	$\omega_1+\omega_3$, ω_4 ω_2 0, ω_2	$(2,1,1)$ $\omega_2+\omega_4$ 1 соотношение
α_4	α_1,α_3,α_4	$(1,1,0,0)$ $(1,0,1,0)$ $(1,0,0,1)$ $(1,1,1,0)$	ω_3 ω_1 0, ω_2 ω_2	$(2,1,1,1)$ $\omega_1+\omega_3+\omega_4$ 0 соотношений
α_4	α_2,α_3,α_4	$(1,1,0,0)$ $(2,1,0,0)$ $(1,0,1,0)$ $(1,0,0,1)$	$\omega_1+\omega_3$, ω_4 ω_2 ω_1 0, ω_2	$(2,1,0,1)$ $\omega_2+\omega_4$ 1 соотношение
α_4	α_1,α_2,α_4	$(1,1,0,0)$ $(1,0,1,0)$ $(2,0,1,0)$ $(1,0,0,1)$	ω_3 $\omega_1+\omega_3$, ω_4 ω_2 0, ω_2	$(2,0,1,1)$ $\omega_2+\omega_4$ 1 соотношение
α_4	α_1,α_2,α_3	$(1,1,0,0)$ $(1,0,1,0)$ $(2,0,1,0)$ $(1,0,0,1)$ $(1,1,0,1)$	ω_3 $\omega_1+\omega_3$, ω_4 ω_2 ω_1 ω_2	$(2,1,1,1)$ $\omega_1+\omega_2+\omega_3$ 1 соотношение
		SO_{10}		
α_5	α_2,α_5	$(1,1,0)$ $(2,1,0)$ $(1,0,1)$ $(1,1,1)$ $(2,1,1)$	$\omega_1+\omega_4$, ω_5 ω_3 ω_1, ω_3 ω_3 $\omega_2+\omega_4$	$(2,1,1)$ $\omega_3+\omega_5$ 1 соотношение
α_5	α_2,α_4	$(1,1,0)$ $(2,1,0)$ $(1,0,1)$ $(1,1,1)$	$\omega_1+\omega_4$, ω_5 ω_3 0, ω_2 $\omega_1+\omega_3$	$(2,1,1)$ $\omega_2+\omega_5$ 0 соотношений
α_5	α_3,α_5	$(1,1,0)$ $(2,1,0)$ $(1,0,1)$	$\omega_1+\omega_5$, $\omega_2+\omega_4$, ω_4 $\omega_1+\omega_3$, ω_2 ω_1, ω_3	$(2,1,1)$ $\omega_1+\omega_3+\omega_5$ 1 соотношение

α_5	α_3,α_4	$(1,1,0)$ $(2,1,0)$ $(1,0,1)$	$\omega_1+\omega_5$, $\omega_2+\omega_4$, ω_4 $\omega_1+\omega_3$, ω_2 0, ω_2	$(2,1,1)$ $\omega_2+\omega_4$ 1 соотношение
SO_{12}				
α_4	α_6	$(1,1)$ $(1,2)$	$\omega_1+\omega_5$, $\omega_2+\omega_6$, $\omega_3+\omega_5$, ω_6 $\omega_1+\omega_3$, ω_2, $\omega_2+\omega_4$, ω_4	$(2,3)$ $\omega_2+\omega_4+\omega_6$ 1 соотношение
SO_{2l+1}, $l\geqslant 3$				
α_2	α_l $l\geqslant 4$	$(1,1)$ $(1,2)$ $(2,2)$	$\omega_1+\omega_l$, ω_l $\omega_1+\omega_{l-1}$, ω_{l-2}, ω_{l-1} $\omega_1+\omega_{l-1}$	$(2,3)$ $\omega_1+\omega_{l-1}+\omega_l$ 1 соотношение
α_1	α_i,α_j $i<j<l-1$	$(1,1,0)$ $(2,1,0)$ $(1,0,1)$ $(2,0,1)$	ω_{i-1}, ω_{i+1} ω_i при $i>1$ ω_{j-1}, ω_{j+1} ω_j	$(2,1,1)$ $\omega_i+\omega_j$ при $j-i>1$ 0 соотношений; при $j-i=1$ 1 соотношение
α_1	α_i,α_{l-1} $i<l-1$	$(1,1,0)$ $(2,1,0)$ $(1,0,1)$ $(2,0,1)$	ω_{i-1}, ω_{i+1} ω_i при $i>1$ ω_{l-2}, $2\omega_l$ ω_{l-1}	$(2,1,1)$ $\omega_i+\omega_{l-1}$ при $l-1-i>1$ 0 соотношений; при $l-1-i=1$ 1 соотношение
α_1	α_i,α_l	$(1,1,0)$ $(2,1,0)$ $(1,0,1)$ $(1,0,2)$	ω_{i-1}, ω_{i+1} ω_i при $i>1$ ω_l ω_{l-1}	$(2,1,2)$ $\omega_i+2\omega_l$ при $l-i>1$ 0 соотношений; при $l-i=1$ 1 соотношение
SO_7				
α_2	α_3	$(1,1)$ $(1,2)$	$\omega_1+\omega_3$, ω_3 $\omega_1+\omega_2$, ω_1, ω_2	$(2,3)$ $\omega_1+\omega_2+\omega_3$ 1 соотношение
E_6				
α_1	α_1, α_2	$(1,1,0)$ $(1,0,1)$ $(2,0,1)$	ω_2, ω_5 $\omega_1+\omega_5$, ω_3, ω_6 $\omega_2+\omega_5$, ω_4	$(2,1,1)$ $\omega_1+\omega_2+\omega_5$ 1 соотношение
α_1	α_1, α_6	$(1,1,0)$ $(1,0,1)$ $(2,0,1)$ $(2,1,1)$	ω_2, ω_5 ω_1, ω_4 ω_2 ω_3	$(2,1,1)$ $\omega_1+\omega_2$ 0 соотношений
α_1	α_4, α_5	$(1,1,0)$ $(2,1,0)$ $(1,0,1)$	ω_2, ω_5, $\omega_5+\omega_6$ ω_3, ω_6 0, ω_6	$(2,1,1)$ $\omega_5+\omega_6$ 1 соотношение

α_1	α_5, α_6	$(1,1,0)$ $(1,0,1)$ $(2,0,1)$ $(1,1,1)$	0, ω_6 ω_1, ω_4 ω_2 ω_3	$(2,1,1)$ $\omega_1+\omega_6$ 0 соотношений
		E_7		
α_1	α_2	$(1,1)$ $(2,1)$	ω_1, $\omega_1+\omega_6$, ω_3, ω_7 ω_2, $\omega_2+\omega_6$, ω_5, ω_6	$(3,2)$ $\omega_1+\omega_2+\omega_6$ 1 соотношение

4. Орбиты борелевской подгруппы на кратном многообразии флагов

Как обсуждалось выше в п. 2.1, орбиты борелевской подгруппы B на многообразии флагов G/P — это клетки Шуберта. Они параметризуются смежными классами в группе Вейля W/W^I; две клетки Шуберта примыкают (т.е. их замыкания вложены одно в другое) тогда и только тогда, когда соответствующие элементы группы Вейля сравнимы в смысле порядка Брюа. Кроме того, замыкания этих орбит — многообразия Шуберта — нормальны, коэн–маколеевы и обладают рациональными особенностями.

Теперь рассмотрим множество B-орбит на произвольном сферическом кратном многообразии флагов. В связи с ними возникает аналогичный набор вопросов: как описать это множество комбинаторно? Когда одна орбита лежит в замыкании другой? Что можно сказать о геометрии этих замыканий, в частности, об их множествах особенностей?

Ответы на эти вопросы известны лишь для некоторых сферических кратных многообразий флагов. Эти результаты изложены в настоящем разделе.

4.1. Прямое произведение двух грассманианов. Пусть группа $G = \mathrm{GL}(n)$ действует на прямом произведении двух грассманианов $X = \mathrm{Gr}(k,n)\times\mathrm{Gr}(l,n)$. Нам уже известно, что многообразие X является сферическим (см. теорему 3.1). Наша ближайшая цель — дать комбинаторное описание B-орбит на X.

Группа G вложена диагональным образом в прямое произведение $G\times G$, где каждый экземпляр G действует на своем грассманиане. Легко описать орбиты борелевской подгруппы $B\times B\subset G\times G$: каждая такая орбита является прямым произведением двух клеток Шуберта $C_\alpha\times C_\beta\subset\mathrm{Gr}(k,n)\times\mathrm{Gr}(l,n)$, где (α,β) — пара диаграмм Юнга, вписанных в прямоугольники размера $k\times n-k$ и $l\times n-l$ соответственно.

Далее мы опишем, как $(B\times B)$-орбита $C_\alpha\times C_\beta$ представляется в виде объединения B-орбит.

Пусть $\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_k)$ — диаграмма Юнга, при этом $n-k\geqslant\alpha_1\geqslant\dots\geqslant\alpha_k\geqslant 0$. По ней можно построить последовательность нулей и единиц $\mathbf{a}=(a_1,\dots,a_n)$ следующим образом:

$$a_i=\begin{cases}1, & i=\alpha_k+1,\alpha_{k-1}+2,\dots,\alpha_1+k,\\ 0 & \text{в противном случае.}\end{cases}$$

Эту последовательность можно интерпретировать следующим образом: диаграмма Юнга, вписанная в прямоугольник размера $k\times n-k$, ограничена снизу ломаной, идущей из левого нижнего в правый верхний угол прямоугольника; i-е звено этой ломаной вертикально, если $a_i=1$, и горизонтально в противном случае. В таком случае в последовательности будет k единиц и $n-k$ нулей.

Аналогичным образом по диаграмме $\beta\subset l\times n-l$ построим последовательность $\mathbf{b}=(b_1,\dots,b_n)$, в которой будет ровно l единиц и $m-l$ нулей.

Определение 4.1. Пусть $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ — две последовательности нулей и единиц длины n. Инволютивную перестановку $w \in S_n$, $w^2 = \mathrm{Id}$, назовем *согласованной* с парой $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, если для всякого такого $i < n$, для которого $w(i) > i$, выполняются условия $a_i = b_i = 0$ и $a_{w(i)} = b_{w(i)} = 1$.

Теорема 4.1 (см. [6, 39]). *Имеется биекция между B-орбитами $\mathcal{O} \subset C_\alpha \times C_\beta$ и инволютивными перестановками $w \in S_n$, согласованными с парой* $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$.

Введем понятие *общей части* пары $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$. Это последовательность нулей и единиц $\mathbf{c}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (a_{i_1}, \ldots, a_{i_r})$, где $i_1, \ldots, i_r$ — в точности те индексы, для которых соответствующие члены последовательностей $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ совпадают: $a_{i_1} = b_{i_1}$, $\ldots$, $a_{i_r} = b_{i_r}$. Последовательность c может иметь длину от 0 до n (в частности, может быть пустой).

Определение 4.2. *Общая диаграмма* для диаграмм Юнга α и β, отвечающих последовательностям $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, — это диаграмма Юнга $c(\lambda, \mu)$, построенная по последовательности $c(\mathbf{a}, \mathbf{b})$.

Пример 4.1. Пусть $n = 9$, $k = 4$, $l = 3$. Возьмем $\alpha = (5, 3, 3, 2)$, $\beta = (6, 3, 1)$. Тогда

$$\mathbf{a} = (0, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 1), \quad \mathbf{b} = (0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1).$$

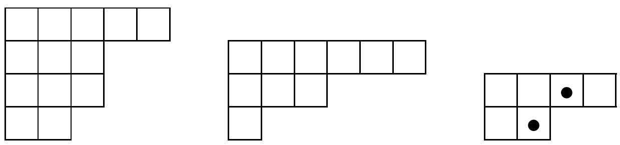
Последовательности $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ совпадают на местах $1, 2, 4, 5, 7, 8, 9$; при этом $c(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (0, 0, 1, 0, 0, 1)$, и $c(\alpha, \beta) = (4, 2)$.

Пусть $w = (i_1, j_1) \ldots (i_s, j_s)$ — инволютивная перестановка, представленная в виде произведения независимых транспозиций, где $i_t < j_t$, и согласованная с парой $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$. Последнее условие значит, что

$$a_{i_1} = b_{i_1} = \cdots = a_{i_s} = b_{i_s} = 0, \quad a_{j_1} = b_{j_1} = \cdots = a_{j_s} = b_{j_s} = 1.$$

Инволютивные перестановки, согласованные с парой $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, удобно изображать, отметив в общей диаграмме Юнга $c(\alpha, \beta)$ ячейки, отвечающие парам $(i_1, j_1), \ldots, (i_s, j_s)$. При этом оказывается, что никакие две отмеченные ячейки не находятся в одной строке или в одном столбце (т.е. возникает *расстановка ладей*: каждая отмеченная ячейка диаграммы Юнга интерпретируется как поле шахматной доски, занятое ладьей, причем никакие две ладьи не атакуют друг друга).

Пример 4.2. Изобразим диаграммы Юнга α, β из примера 4.1, а также общую диаграмму $c(\alpha, \beta)$, на которой отмечены ячейки, отвечающие перестановке $w = (2, 4)(7, 9)$:



4.2. Порядок на B-орбитах, принадлежащих данной $(B \times B)$-орбите. Пусть $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ — пара последовательностей нулей и единиц. Она определяет $(B \times B)$-орбиту в $\mathrm{Gr}(k, V) \times \mathrm{Gr}(l, V)$, т.е. произведение двух клеток Шуберта $C_\alpha \times C_\beta$. Оно распадается в объединение B-орбит, которые нумеруются инволютивными перестановками, согласованными с парами $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$. Пусть $w, v \in S_n$ — две такие перестановки, $\mathcal{O}_w, \mathcal{O}_v \subset C_\alpha \times C_\beta$ — отвечающие им орбиты. Приведем критерий того, что $\mathcal{O}_w \subset \overline{\mathcal{O}}_v$.

Рассмотрим множество всех инволютивных перестановок из S_n (не обязательно согласованных с какой-либо парой $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$. Каждой такой перестановке $w \in S_n$ поставим в соответствие *матрицу рангов* $R(w) = (r_{ij}(w))$: это строго верхнетреугольная матрица порядка n с целыми неотрицательными коэффициентами, определенными правилом

$$r_{ij}(w) = \begin{cases} \#\{k \leqslant n \mid i \leqslant w(k) < k \leqslant j\}, & i < j, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Тождественной перестановке соответствует нулевая матрица рангов.

Пример 4.3. Пусть $w = (13)(26)(47) \in S_7$; тогда

$$R(w) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Введем на инволютивных перестановках частичный порядок $\preceq$ (этот порядок не имеет ничего общего с порядком Брюа) следующим правилом: $w \preceq v$ тогда и только тогда, когда $r_{ij}(w) \leqslant r_{ij}(v)$ при всех $1 \leqslant i < j \leqslant n$. У этого порядка будет единственный минимальный элемент — тождественная перестановка; в случае $n \leqslant 3$ максимальных элементов будет более одного.

Теорема 4.2 (см. [53]). *Пусть $\mathcal{O}_w$, $\mathcal{O}_v$ — две B-орбиты в одной и той же $(B \times B)$-орбите в двойном грассманиане. Тогда $\mathcal{O}_w \subset \overline{\mathcal{O}}_v$ тогда и только тогда, когда $w \preceq v$.*

Тот же порядок на инволюциях возникает в работах А. Мельниковой о верхнетреугольных нильпотентных матрицах с нулевым квадратом. А именно, пусть $X = \{x \in \mathfrak{n} \subset \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}) \mid x^2 = 0\}$ — множество таких матриц. Тогда группа $B \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ верхнетреугольных матриц действует на X сопряжениями, причем это действие имеет конечное число орбит. Как показано в [41, 42], эти орбиты параметризуются инволютивными перестановками в S_n, причем одна орбита лежит в замыкании другой тогда и только тогда, когда соответствующие перестановки сравнимы в смысле порядка $\preceq$. Эквивалентное описание того же порядка см. в [33, Sec. 2].

4.3. Слабый порядок на замыканиях B-орбит. Наша дальнейшая цель состоит в том, чтобы, используя явное комбинаторное описание B-орбит в двойных грассманианах, построить для их замыканий разрешения особенностей, аналогичные разрешениям Ботта—Самельсона.

Сначала изложим некоторые факты, относящиеся к сферическим многообразиям в целом. Пусть X — сферическое G-многообразие, Y — замыкание некоторой B-орбиты, $\alpha \in \Delta$ – простой корень группы G, а $P_\alpha = B \cup B s_\alpha B$ — минимальная параболическая подгруппа, отвечающая корню α. Коразмерность B в P_α равна 1, и $P_\alpha/B \cong \mathbb{P}^1$. Возможна одна из двух ситуаций: либо $P_\alpha Y = Y$, либо $P_\alpha Y = Y'$, где $\dim Y' = \dim Y + 1$. Пусть имеет место второй случай; тогда будем говорить, что простой корень α *поднимает* замыкание орбиты Y до замыкания орбиты Y'. Это отношение можно продолжить до отношения порядка на множестве замыканий орбит многообразия X, называемого *слабым порядком.*

Определение 4.3. Будем говорить, что Y *не превосходит* Y' *в смысле слабого порядка* (обозначение $Y \preceq Y'$), если существует такая последовательность минимальных параболических подгрупп $P_{\alpha_1}, \ldots, P_{\alpha_r}$, для которой $Y' = P_{\alpha_r} \ldots P_{\alpha_1} Y$.

Замечание 4.1. В случае, когда X — многообразие полных флагов G/B, слабый порядок Брюа на X совпадает со слабым порядком Брюа на группе W, определенным в п. 2.3: если $w = s_i v$, то для соответствующих многообразий Шуберта $X_w = P_{\alpha_i} X_v$.

Ясно, что если $Y \preceq Y'$, то $Y \subseteq Y'$. Обратное неверно: например, из сравнимости двух орбит в смысле слабого порядка следует, что они лежат в одной G-орбите, тогда как для порядка, задаваемого примыканиями орбит, это не обязательно так. Это объясняет термин «слабый порядок».

4.4. Параболическая индукция и разрешения Ботта—Самельсона. Пусть замыкания орбит Y и Y' таковы, что $Y' = P_\alpha Y$, т.е. Y поднимается до Y' минимальной параболической подгруппой P_α. Рассмотрим B-эквивариантное расслоение

$$P_\alpha \times^B Y = \{(p, y) \mid p \in P_\alpha, y \in Y\}/(p, y) \sim (pb^{-1}, by), \quad b \in B.$$

Это расслоение над $\mathbb{P}^1$ со слоем Y; отображение проекции на базу есть проекция на первый сомножитель: $(p, x) \mapsto pB$.

Далее, из $P_\alpha \times^B Y$ имеется отображение в Y':

$$\pi_{\alpha,Y} : P_\alpha \times^B Y \to Y', \quad (p, y) \mapsto py.$$

Это отображение, очевидно, является B-эквивариантным морфизмом алгебраических многообразий.

Следующее утверждение — стандартный факт из теории сферических многообразий (см. [14,48] и [31, Lemma 3.2]).

Теорема 4.3. *Отображение $\pi_{\alpha,Y} : P_\alpha \times^B Y \to Y'$ либо бирационально, либо прообраз точки общего положения состоит из двух точек.*

Оказывается, что для некоторых классов сферических многообразий отображение $\pi_{\alpha,Y}$ всегда бирационально. Это иногда позволяет строить для замыканий орбит в таких многообразиях разрешения особенностей. Впервые этот прием был применен к многообразиям Шуберта в многообразиях флагов в работе Р. Ботта и Х. Самельсона [12] в комплексно-аналитической ситуации; алгебраическая формулировка принадлежит Демазюру [20] и Хансену [27]. Именно, имеет место следующее предложение.

Предложение 4.1 (см., например, [17]). *Пусть $X = G/P$ — многообразие флагов. Тогда справедливы следующие утверждения*:

(1) *$Y_{\min} = eP \subset G/P$ является единственной минимальной орбитой для слабого порядка на X*;
(2) *для любых замыканий орбит Y, Y', для которых $Y' = P_\alpha Y$, отображение $\pi_{\alpha,Y}$ бирационально.*

Это предложение позволяет построить разрешения особенностей для всех замыканий орбит. Именно, пусть $Y \subset X$ — замыкание некоторой B-орбиты. Поскольку $Y_{\min} \preceq Y$ (минимальная орбита для слабого порядка единственна, а следовательно, является наименьшей), существует такая последовательность минимальных параболических подгрупп, для которой $Y = P_{\alpha_r} \dots P_{\alpha_1} Y_{\min}$. В силу второй части предыдущего предложения отображение из итерированного $\mathbb{P}^1$-расслоения, которое мы обозначим через Z, отображение

$$\pi_{\alpha_1,\dots,\alpha_r} : Z = P_{\alpha_r} \times^B P_{\alpha_{r-1}} \times^B \dots \times^B P_{\alpha_1} \times^B Y_{\min} \longrightarrow Y$$

в Y бирационально. Но $Y_{\min}$ состоит из одной точки, т.е., в частности, является гладким многообразием. Значит, и итерированное $\mathbb{P}^1$-расслоение над ним гладко. Тем самым имеет место следующий результат.

Теорема 4.4. *$\pi_{\alpha_1,\dots,\alpha_r} : Z \to Y$ есть разрешение особенностей.*

Замечание 4.2. Вообще говоря, последовательность параболических подгрупп, «поднимающих» $Y_{\min}$ до Y, можно выбрать не единственным образом; соответственно, при этом могут получиться разные разрешения особенностей. Кроме того, можно действовать более экономно, беря вместо расслоений с базой $\mathbb{P}^1$ расслоения, базой которых является какой-либо больший грассманиан. Оказывается, что в случае, когда $X = \mathrm{Gr}(k, n)$, в классе таких разрешений всегда есть так называемые *малые разрешения*. Это позволяет дать геометрическое описание полиномов Каждана—Люстига (и, в частности, доказать положительность их коэффициентов). Подробности см. в [2].

4.5. Двойные комикровесовые многообразия флагов.

Определение 4.4. Максимальная параболическая подгруппа P_α, ассоциированная с корнем $\alpha \in \Delta$, называется *комикровесовой* (cominuscule), если корень α входит в разложение старшего корня с коэффициентом 1. Двойственный корню α фундаментальный вес ω называется *комикровесом*. Многообразие флагов G/P_α в этом случае также называется *комикровесовым*.

Приведем список комикровесов и соответствующих многообразий флагов для полупростых алгебраических групп каждого из типов.

A_n: все фундаментальные веса являются комикровесами; $G/P_k \cong \mathrm{Gr}(k, n+1)$.

B_n: ω_1; многообразие $G/P_1 \cong Q^{2n-1}$ есть нечетномерная квадрика;
C_n: ω_n; многообразие флагов $G/P_n \cong \mathrm{LGr}(n)$ есть лагранжев грассманиан;
D_n: $\omega_1, \omega_{n-1}, \omega_n$; многообразия флагов — квадрика $G/P_1 = Q^{2n-2}$ и ортогональные грассманианы $G/P_{n-1} \cong G/P_n \cong \mathrm{OGr}(n)$;
E_6: ω_1, ω_6; многообразие флагов — проективная плоскость Кэли $\mathbb{OP}^2$;
E_7: ω_7; многообразие флагов — $G_\omega(\mathbb{O}^3, \mathbb{O}^6)$ (см. [34, 47]).

Для групп типа E_8, F_4 и G_2 комикровесов нет.

Комикровесовые флаговые многообразия примечательны в силу ряда алгебраических и геометрических свойств, в том числе следующих:

(i) унипотентный радикал подгруппы P_α абелев;
(ii) порядок Брюа на множестве B-орбит на G/P_α есть дистрибутивная решетка;
(iii) подгруппа Леви в P_α действует на касательном пространстве в точке eP с конечным числом орбит.

Из классификационной теоремы Литтельмана (см. [36], а также раздел 3) вытекает следующая теорема.

Теорема 4.5. *Всякое двойное комикровесовое многообразие флагов (т.е. прямое произведение двух комикровесовых флаговых многообразий) сферично относительно диагонального действия G.*

В [7] изучается геометрия замыканий B-орбит на двойных комикровесовых многообразиях флагов. Основным результатом работы является следующая теорема.

Теорема 4.6 (см. [7, Theorem 1])**.** *Пусть G — группа с простыми связями (т.е. с простыми факторами типа A, D или E). Пусть $P, Q \subset G$ — комикровесовые параболические подгруппы, содержащие борелевскую подгруппы $B \subset G$, и $X = G/P \times G/Q$. Тогда замыкания B-орбит в X являются нормальными коэн–маколеевыми многообразиями и имеют рациональные особенности.*

В случае, когда G — группа типа A, двойное многообразие флагов есть произведение двух грассманианов. В этом случае нормальность и рациональность особенностей замыканий B-орбит были ранее доказаны Г. Бобиньским и Г. Зварой (см. [9]) с использованием теории представлений колчанов.

Для доказательства этого результата в общем случае авторы детально изучают структуру B-орбит на двойных комикровесовых многообразиях флагов и устанавливают два следующих факта, представляющих и самостоятельный интерес. Для случая двойных грассманианов эти факты были отмечены в [6].

Предложение 4.2. *B-Орбиты на X, минимальные в смысле слабого порядка, являются $B \times B$-инвариантными, т.е. тем самым являются произведениями многообразий Шуберта в G/P и G/Q.*

Предложение 4.3. *Пусть группа G содержит лишь простые факторы типа A, D, E, и пусть Y и Y' — замыкания B-орбит на $X = G/P \times G/Q$, сравнимые в смысле слабого порядка, причем $\dim Y' = \dim Y + 1$ (т.е. $Y' = P_\alpha Y$ для некоторой минимальной параболической подгруппы P_α). Тогда отображение $P \times^B Y \to Y'$ бирационально.*

Это предложение позволяет построить для замыканий B-орбит на X разрешение особенностей, аналогичное разрешению Ботта—Самельсона (теорема 4.4).

Именно, пусть Y — замыкание некоторой B-орбиты. Рассмотрим замыкание орбиты $Y_{\min}$, минимальной в смысле слабого порядка, для которой $Y_{\min} \preceq Y$. Иными словами, существует такая последовательность минимальных параболических подгрупп, для которой $Y = P_{\alpha_r} \ldots P_{\alpha_1} Y_{\min}$. В силу предыдущего предложения отображение

$$\pi_{\alpha_1,\ldots,\alpha_r} : P_{\alpha_r} \times^B P_{\alpha_{r-1}} \times^B \cdots \times^B P_{\alpha_1} \times^B Y_{\min} \longrightarrow Y$$

бирационально.

Отличие от случая многообразий флагов состоит в том, что, во-первых, минимальная орбита, меньшая данной в смысле слабого порядка, может быть не единственна, и, во-вторых, замыкание орбиты $Y_{\min}$ может быть особым. Однако в силу предложения 4.2 все замыкания минимальных орбит $Y_{\min}$ являются $B \times B$-инвариантными многообразиями, т.е. произведениями многообразий Шуберта в G/P и G/Q. Взяв прямое произведение разрешений Ботта—Самельсона для этих многообразий, мы получаем бирациональный изоморфизм $\pi_{\min} : Z_{\min} \to Y_{\min}$, где $Z_{\min}$ гладко. Тем самым сквозное отображение

$$P_{\alpha_r} \times^B P_{\alpha_{r-1}} \times^B \cdots \times^B P_{\alpha_1} \times^B Z_{\min} \xrightarrow{\mathrm{Id} \times \pi_{\min}}$$

$$\xrightarrow{\mathrm{Id} \times \pi_{\min}} P_{\alpha_r} \times^B P_{\alpha_{r-1}} \times^B \cdots \times^B P_{\alpha_1} \times^B Y_{\min} \xrightarrow{\pi_{\alpha_1,\ldots,\alpha_r}} Y$$

— это бирациональный изоморфизм гладкого многообразия и Y, т.е. разрешение особенностей.

Конструкция этого разрешения особенностей является ключевым шагом для доказательства теоремы 4.6. Дальнейшее доказательство нормальности, коэн–маколеевости и рациональности особенностей замыканий B-орбит существенно опирается на факты о сферических многообразиях, приведенные в [14, 15], и в целом следует исходному доказательству нормальности многообразий Шуберта в G/P, принадлежащему Сешадри (см. его изложение, например, в [17]).

Требование наличия у G простых связей является существенным для теоремы 4.6. Пусть $G = \mathrm{Sp}(3)$ действует стандартным образом на пространстве $\mathbb{C}^6$ с невырожденной кососимметричной билинейной формой, а подгруппа P есть стабилизатор максимального (трехмерного) изотропного подпространства в $\mathbb{C}^6$. Тогда многообразие G/P есть лагранжев грассманиан $LGr(3,6)$. В [7, Proposition 5.1] приведен пример B-орбиты в $G/P \times G/P$, замыкание которой не является нормальным. Также для этого примера не выполняется предложение 4.3: для некоторых отображений $P \times^B Y \to Y'$ слой общего положения состоит из двух точек (т.е. эти отображения не бирациональны).

5. G-Орбиты на кратных многообразиях флагов

5.1. Кратные многообразия флагов с конечным числом G-орбит. В предыдущих разделах рассматривались орбиты борелевской подгруппы $B \subset G$, действующей диагонально на прямом произведении двух многообразий флагов $X = G/P_1 \times G/P_2$. Эти орбиты находятся во взаимно однозначном соответствии с орбитами группы G, диагонально действующей на произведении трех многообразий флагов $G/P_1 \times G/P_2 \times G/B$; это соответствие сохраняет отношение примыкания орбит. Иными словами, многообразие X сферично тогда и только тогда, когда группа G действует на $X \times G/B$ с конечным числом орбит.

Эту ситуацию можно обобщить, взяв вместо $X \times G/B$ произвольный набор многообразий флагов G/P_i. Возникает следующий вопрос.

Проблема 5.1. Для каких наборов параболических подгрупп $(P_1, \ldots, P_r)$ группа G действует на $G/P_1 \times \cdots \times G/P_r$ с конечным числом орбит? Как описать орбиты этого действия в комбинаторных терминах?

Ответ на этот вопрос был дан для групп $\mathrm{GL}(n)$ и $\mathrm{Sp}(2n)$ в работах П. Мадьяра, Е. Веймана и А. В. Зелевинского (см. [39, 40]). Для произвольной редуктивной группы (в том числе для ортогональной) классификация таких троек параболических подгрупп пока не известна.

Критерий Мадьяра, Веймана и Зелевинского конечности числа орбит на кратном многообразии флагов типа A использует идеи и результаты из теории колчанов; этот результат весьма схож с принадлежащим П. Габриэлю (см. [26]) описанием колчанов конечного типа. Приведем здесь его формулировку.

Определение 5.1. *Разложением* целого неотрицательного числа n называется упорядоченный набор целых неотрицательных чисел $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_p)$, сумма которых равна n. Эти числа называются *частями разложения.* Наименьшее из чисел $a_1, \ldots, a_p$ называется *минимумом* разложения и обозначается через $\min(\mathbf{a})$.

Каждому разложению $\mathbf{a}$ соответствует многообразие частичных флагов $\mathrm{Fl}_{\mathbf{a}}$ группы $\mathrm{GL}(n)$, состоящее из флагов $V_1 \subset \cdots \subset V_p \cong \mathbb{C}^n$, для которых $\dim V_i/V_{i-1} = a_i$. Будем говорить, что набор разложений $(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k)$ одного и того же числа n имеет *конечный тип*, если группа $\mathrm{GL}(n)$, действующая диагонально на $\mathrm{Fl}_{\mathbf{a}_1} \times \cdots \times \mathrm{Fl}_{\mathbf{a}_k}$, имеет конечное число орбит. Кроме того, назовем разложение, состоящее из одной компоненты, *тривиальным*; ему соответствует одноточечное многообразие флагов, и поэтому все разложения в данном наборе можно считать нетривиальными.

Теорема 5.1. *Если набор нетривиальных разложений* $(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k)$ *имеет конечный тип, то* $k \leqslant 3$.

Набросок доказательства. Для доказательства того, что любая четверка нетривиальных разбиений не имеет конечный тип, достаточно проверить это для «самой маленькой» четверки, а именно, четырех разбиений числа 2 вида $(1,1)$. В этом случае соответствующее кратное многообразие флагов будет произведением четырех копий $\mathbb{P}^1$. Но четверки точек на $\mathbb{P}^1$ с точностью до действия группы $\mathrm{GL}(2)$ задаются их двойным отношением, которое может принимать бесконечное множество значений. $\square$

Итак, всякий набор разложений конечного типа имеет не более трех компонент. Добавляя при необходимости тривиальные компоненты, можно считать, что их ровно три, и обозначим их через $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$. Пусть p, q, r — число частей в этих разложениях; без ограничения общности будем считать, что $p \leqslant q \leqslant r$.

Теорема 5.2. *Тройка разложений* $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ *имеет конечный тип тогда и только тогда, когда она принадлежит к одному из следующих классов*:

$$
\begin{array}{lll}
A_{p,q}: & (p,q,r) = (1,q,r), & 1 \leqslant q \leqslant r; \\
D_{r+2}: & (p,q,r) = (2,2,r), & 2 \leqslant r; \\
E_6: & (p,q,r) = (2,3,3); & \\
E_7: & (p,q,r) = (2,3,4); & \\
E_8: & (p,q,r) = (2,3,5); & \\
E^{(a)}_{r+3}: & (p,q,r) = (2,3,r), & 3 \leqslant r, \quad \min(\mathbf{a}) = 2; \\
E^{(b)}_{r+3}: & (p,q,r) = (2,3,r), & 3 \leqslant r, \quad \min(\mathbf{b}) = 1; \\
S_{p,q}: & (p,q,r) = (2,q,r), & 2 \leqslant q \leqslant r, \quad \min(\mathbf{a}) = 1.
\end{array}
$$

5.2. Описание орбит. В этом разделе мы приводим комбинаторное описание множества $\mathrm{GL}(V)$-орбит на $\mathrm{Fl}_{\mathbf{a}}(V) \times \mathrm{Fl}_{\mathbf{b}}(V) \times \mathrm{Fl}_{\mathbf{c}}(V)$ для каждой тройки разложений, имеющей конечный тип. Для разложения $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_p)$ (которое, возможно, включает нулевые части) запишем

$$|\mathbf{a}| = a_1 + \cdots + a_p, \quad \|\mathbf{a}\|^2 = a_1^2 + \cdots + a_p^2.$$

Число частей p назовём *длиной* разложения и обозначим через $\ell(\mathbf{a})$.

Для данной тройки (p,q,r) обозначим через $\Lambda_{p,q,r}$ аддитивную полугруппу всех троек разложений $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$, для которых $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}| = |\mathbf{c}| = n$, $(\ell(\mathbf{a}), \ell(\mathbf{b}), \ell(\mathbf{c})) = (p,q,r)$ («полугруппа положительных корней»). Определим *квадратичную форму Титса* как

$$Q(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \dim \mathrm{GL}(V) - \dim \mathrm{Fl}_{\mathbf{a}}(V) - \dim \mathrm{Fl}_{\mathbf{b}}(V) - \dim \mathrm{Fl}_{\mathbf{c}}(V),$$

где $\dim V = |\mathbf{a}| = |\mathbf{b}| = |\mathbf{c}| = n$. Простое вычисление показывает, что

$$Q(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \frac{1}{2}(\|\mathbf{a}\|^2 + \|\mathbf{b}\|^2 + \|\mathbf{c}\|^2 - n^2).$$

Определим множество «простых корней» $\Pi_{p,q,r}$ как множество таких $\mathbf{d} = (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$, для которых $Q(\mathbf{d}) = 1$.

Следующая теорема позволяет свести описание орбит к чисто комбинаторной задаче.

Теорема 5.3. *Пусть* $(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}) \in \Lambda_{p,q,r}$ *— тройка разложений конечного типа. Тогда* $\mathrm{GL}(V)$*-орбиты в* $\mathrm{Fl}_{\mathbf{a}}(V)\times\mathrm{Fl}_{\mathbf{b}}(V)\times\mathrm{Fl}_{\mathbf{c}}(V)$ *биективно соответствуют наборам целых неотрицательных чисел* $(m_{\mathbf{d}})$, *где* $\mathbf{d} \in \Pi_{p,q,r}$, *для которых в полугруппе* $\Lambda_{p,q,r}$ *имеет место равенство*

$$(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}) = \sum m_{\mathbf{d}}\mathbf{d}.$$

Множество $\Pi_{p,q,r}$ также имеет явное описание. Пусть $\mathbf{a}$ — разложение. Обозначим через $\mathbf{a}^+$ разбиение, полученное из него удалением нулевых частей и упорядочением остальных частей по убыванию. Введеи обозначение $(\underbrace{a,\ldots,a}_{p\ \text{раз}}) = (a^p)$.

Теорема 5.4. *Тройка* $(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}) \in \Lambda_{p,q,r}$ *принадлежит* $\Pi_{p,q,r}$ *тогда и только тогда, когда тройка разбиений* $(\mathbf{a}^+,\mathbf{b}^+,\mathbf{c}^+)$ *с точностью до порядка принадлежит следующему списку*:

$$\begin{array}{rll}
\text{(i)} & \{(1,1,1)\}; & \\
\text{(ii)} & \{(3^2),(2^3),(2,1,1,1,1)\}; & \\
\text{(iii)} & \{(4,2),(2^3),(1^6)\}; & \\
\text{(iv)} & \{(m+1,m),(m,m,1),(1^{2m+1}\}, & m \geqslant 2; \\
\text{(v)} & \{(m,m),(m-1,m,1),(1^{2m}\}, & m \geqslant 2; \\
\text{(vi)} & \{(m-1,1),(1^m),(1^m)\}, & m \geqslant 2.
\end{array}$$

Биекция в теореме 5.3 имеет следующую категорную интерпретацию. Рассмотрим аддитивную категорию $\mathcal{F}_{p,q,r}$, *объектами* которой являются семейства $(V;A,B,C)$, где V — векторное пространство, (A,B,C) — тройка флагов в V, принадлежащая кратному многообразию флагов $\mathrm{Fl}_{\mathbf{a}}(V)\times\mathrm{Fl}_{\mathbf{b}}(V)\times\mathrm{Fl}_{\mathbf{c}}(V)$ для некоторого набора $(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}) \in \Lambda_{p,q,r}$. Набор $(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})$ называется *вектором размерности* объекта. *Морфизм* из объекта $(V;A,B,C)$ в объект $(V';A',B',C')$ — это линейное отображение $f : V \to V'$, для которого $f(A_i) \subset A'_i$, $f(B_i) \subset B'_i$, $f(C_i) \subset C'_i$ при всех i; прямые суммы определяются покомпонентно.

Категория $\mathcal{F}_{p,q,r}$ реализуется как подкатегория в категории представлений колчана $Q_{p,q,r}$ с $p+q+r-2$ вершинами, состоящего из трех ветвей длины p, q и r, причем стрелки на каждой ветви направлены в сторону центральной вершины. Эта подкатегория выделяется следующим условием: все «стрелки», т.е. отображения между векторными пространствами, отвечающими вершинам колчана, являются вложениями. Это аддитивная подкатегория, замкнутая относительно взятия расширений, но не факторов (если $I,J \in \mathcal{F}_{p,q,r}$ — два объекта, причем $I \subset J$, то фактор J/I не обязан лежать в $\mathcal{F}_{p,q,r}$).

Классы изоморфизма объектов из $\mathcal{F}_{p,q,r}$ с заданным вектором размерности $(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})$ совпадают с орбитами действия $\mathrm{GL}(V)$ на $\mathrm{Fl}_{\mathbf{a}}(V)\times\mathrm{Fl}_{\mathbf{b}}(V)\times\mathrm{Fl}_{\mathbf{c}}(V)$. Поэтому конечность числа орбит равносильна конечности числа классов изоморфизмов объектов с заданным вектором размерности из $\mathcal{F}_{p,q,r}$. Объекты в этой категории представляются в виде прямых сумм неразложимых объектов; по теореме Крулля—Ремака—Шмидта такое разложение единственно с точностью до автоморфизма $(V;A,B,C)$. Тем самым класс изоморфизма объекта определяется набором кратностей неразложимых объектов, входящих в его разложение. Более того, оказывается, что неразложимый объект однозначно задается своим вектором размерности. Поэтому если список неразложимых объектов для данной категории известен, то задача классификации орбит $\mathrm{GL}(V)$ на $\mathrm{Fl}_{\mathbf{a}}(V)\times\mathrm{Fl}_{\mathbf{b}}(V)\times\mathrm{Fl}_{\mathbf{c}}(V)$ сводится к чисто комбинаторной задаче представления вектора размерности $(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})$ в виде целочисленной положительной линейной комбинации векторов размерности неразложимых объектов. Отметим также, что если колчан $Q_{p,q,r}$ является колчаном конечного типа (т.е. его граф есть схема Дынкина типа A, D или E), отсюда автоматически следует, что число орбит конечно; это первые пять случаев в теореме 5.2.

Теорема 5.5. *Для любого* $\mathbf{d} \in \Pi_{p,q,r}$ *существует единственный класс изоморфизма* $I_{\mathbf{d}} \in \mathcal{F}_{p,q,r}$ *с вектором размерности* $\mathbf{d}$. *Для каждой тройки конечного типа* $(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}) \in \Lambda_{p,q,r}$ *всякий объект с вектором размерности* $(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})$ *однозначно разлагается в прямую сумму объектов вида* $I_{\mathbf{d}}$.

Кроме того, помимо перечисления орбит действия $\mathrm{GL}(V)$ на кратном многообразии флаговб приводится способ указать по конкретному представителю в каждой из орбит (см. [39, Theorem 2.9]).

Пример 5.1. Рассмотрим многообразие типа $A_{q,r}$, т.е. прямое произведение двух многообразий флагов $\mathrm{Fl}_{\mathbf{b}}(V)\times\mathrm{Fl}_{\mathbf{c}}(V)$. Пусть $\mathbf{b}=(b_1,\dots,b_q)$, $\mathbf{c}=c_1,\dots,c_r$. Пара флагов (B,C) соответствует объекту $(V;A,B,C)$ в категории $\mathcal{F}_{1,q,r}$, где A — тривиальный флаг $0=A_0\subset A_1=V$. Согласно теореме 5.3, неразложимые объекты в этой категории имеют приведенный вектор размерности $(1,1,1)$, т.е. имеют вид $I_{ij}=(V';A',B',C')$, где $i\leqslant q$, $j\leqslant r$; при этом $\dim V'=1$, $B'=(0=B'_0=\dots=B'_{i-1}\subset B_i)=\dots=B_q=V'$, $C'=(0=C'_0=\dots=C'_{j-1}\subset C_j)=\dots=C_r=V'$ (т.е. единственный скачок размерности происходит на i-м и j-м местах).

Отсюда следует, что $\mathrm{GL}(V)$-орбиты в $\mathrm{Fl}_{\mathbf{b}}(V)\times\mathrm{Fl}_{\mathbf{c}}(V)$ параметризуются матрицами (m_{ij}) размера $q\times r$ с целыми неотрицательными элементами, сумма которых по строкам равна $b_1,\dots,b_q$, а по столбцам — $c_1,\dots,c_r$. Такой орбите отвечает прямая сумма неразложимых объектов $\bigoplus\limits_{i,j} m_{ij}I_{ij}$. В частности, если $\mathbf{b}=\mathbf{c}=(1^n)$, то мы имеем дело с произведением двух полных флагов, орбиты в котором нумеруются матрицами перестановок (они находятся в биекции с многообразиями Шуберта наЁG/B).

5.3. Примыкание орбит на кратных многообразиях флагов. Следующий естественный вопрос — это описание обобщенного порядка Брюа на кратном многообразии флагов: при каких условиях одна G-орбита на $X=\mathrm{Fl}_{\mathbf{a}}(V)\times\mathrm{Fl}_{\mathbf{b}}(V)\times\mathrm{Fl}_{\mathbf{c}}(V)$ лежит в замыкании другой? Он тоже допускает ответ в терминах категорииЁ$\mathcal{F}_{p,q,r}$.

Пусть Ω_F и $\Omega_{F'}$ — две G-орбиты на X, отвечающие классам изоморфизма объектов M и M' в категории $\mathcal{F}_{p,q,r}$ (в смысле теоремы 5.3). Будем писать $F\overset{\deg}{<}F'$, если $\Omega_F\subset\overline{\Omega}_{F'}$ и называть такой частичный порядок *порядком примыкания.*

Имеет место следующий результат, принадлежащий К. Ридтман (см. [49]).

Предложение 5.1. *Если $F\overset{\deg}{<}F'$, то для любого неразложимого объекта $I_{\mathbf{d}}$, где $\mathbf{d}\in\Pi_{p,q,r}$, имеет место неравенство*

$$\dim\mathrm{Hom}(I_{\mathbf{d}},F)\geqslant\dim\mathrm{Hom}(I_{\mathbf{d}},F').$$

Представляет интерес вопрос, является ли это необходимое условие также и достаточным, т.е. следует ли из этих неравенств примыкание соответствующих орбит. Из результатов К. Бонгарца (см. [10, § 2], [11, § 4]) следует, что это так в случае, когда граф колчана $Q_{p,q,r}$ является схемой Дынкина, т.е. имеет тип A_n, D_n, E_6, E_7, E_8. В случаях A_n и D_n это можно проверить и непосредственно (см. [53]). Кроме того, П. Мадьяр показал (см. [38]), что эти неравенства определяют примыкание орбит и в случае колчана $S_{p,q}$.

5.4. Случай $S_{p,q}$. Этот интересный «внесерийный» случай отвечает $\mathrm{GL}(V)$-многообразию $G/P_1\times G/P_2\times\mathbb{P}(V)$. Иначе говоря, группа $\mathrm{GL}(V)$ действует с конечным числом орбит на наборах, состоящих из двух флагов заданного типа и прямой в V. В частности, положив $P_1=B$, $P_2=P$, получаем, что многообразие $G/P\times\mathbb{P}(V)$ будет сферично. Впервые это было отмечено, по-видимому, М. Брионом (см. [13]).

В [38] П. Мадьяр приводит описание G-орбит на $G/B\times G/B\times\mathbb{P}(V)$ (они задаются «декорированными» перестановками, т.е. перестановками из S_n, где $n=\dim V$, в которых отмечено некоторое подмножество в $\{1,\dots,n\}$) и доказывает простой критерий, формулируемый в линейно-алгебраических терминах и позволяющий определить, когда одна G-орбита лежит в замыкании другой. Он также описывает накрывающие соотношения, т.е. пары орбит, меньшая из которых лежит в замыкании большей и имеет в ней коразмерность 1.

Это сферическое многообразие играет важную роль в описании *мираболического соответствия Робинсона—Шенстеда—Кнута* (см. [23, 57]).

5.5. Симплектические кратные многообразия флагов конечного типа. Проблема 5.1 была решена в [40] для случая группы $G = \mathrm{Sp}_{2n}$. Кроме того, по аналогии со случаем $G = \mathrm{GL}(V)$ удается свести задачу перечисления орбит на кратном многообразии флагов к чисто комбинаторной и указать в каждой из орбит по конкретному представителю.

Основным инструментом для этого является следующее (достаточно неожиданное) наблюдение: оказывается, два кратных флага в симплектическом $2n$-мерном пространстве V лежат в одной Sp_{2n}-орбите тогда и только тогда, когда они лежат в одной GL_{2n}-орбите. Тем самым задача по существу сводится к случаю $\mathrm{GL}(V)$.

Приведём классификацию многообразий флагов конечного типа для группы Sp_{2n}. Пусть V — $2n$-мерное симплектическое векторное пространство с невырожденной кососимметрической билинейной формой $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Группа автоморфизмов V, сохраняющих эту форму, — это $\mathrm{Sp}(V) = \mathrm{Sp}_{2n}$. Подпространство $U \subset V$ называется *изотропным*, если $\langle U, U\rangle = 0$.

Пусть $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_p)$ — разложение числа $2n$, удовлетворяющее условию симметричности: $a_i = a_{p-i+1}$. Рассмотрим пространство флагов $0 = A_0 \subset A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset A_p = V$, удовлетворяющих условию $\dim A_i/A_{i-1} = a_i$. Такой флаг называется *изотропным*, если он образован изотропными подпространствами и ортогоналами к ним; множество всех изотропных флагов мы будем обозначать через $\mathrm{Sp}\,\mathrm{Fl}_{\mathbf{a}}$:

$$\mathrm{Sp}\,\mathrm{Fl}_{\mathbf{a}} = \bigl\{A \in \mathrm{Fl}_{\mathbf{a}}(V) \bigm| \langle A_i, A_{p-i}\rangle = 0 \text{ при всех } i\bigr\}.$$

Мы получили реализацию многообразия частичных флагов Sp_{2n}/P. Многообразие полных флагов Sp_{2n}/B отвечает вектору размерности (1^{2n}).

Набор симметричных разложений $(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k)$ называется набором Sp_{2n}-*конечного типа*, если группа Sp_{2n} действует с конечным числом орбит на $\mathrm{Sp}\,\mathrm{Fl}_{\mathbf{a}_1} \times \cdots \times \mathrm{Sp}\,\mathrm{Fl}_{\mathbf{a}_k}$.

Так же, как для случая $\mathrm{GL}(V)$, доказывается аналог теоремы 5.1: набор имеет конечный тип только при $k \leqslant 3$. Перечислим все тройки разложений $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$, для которых это так. Будем считать, что в разложения не входят нули, а число ненулевых слагаемых в них равно соответственно (p, q, r), причем $p \leqslant q \leqslant r$.

Теорема 5.6. *Тройка разбиений* $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ *имеет* Sp-*конечный тип тогда и только тогда, когда она принадлежит к одному из следующих классов*:

$$\begin{array}{rll}
\mathrm{Sp}\,A_{p,q}: & (p,q,r) = (1,q,r), & 1 \leqslant q \leqslant r;\\
\mathrm{Sp}\,D_{r+2}: & (p,q,r) = (2,2,r), & 2 \leqslant r;\\
\mathrm{Sp}\,E_6: & (p,q,r) = (2,3,3); & \\
\mathrm{Sp}\,E_7: & (p,q,r) = (2,3,4); & \\
\mathrm{Sp}\,E_8: & (p,q,r) = (2,3,5); & \\
\mathrm{Sp}\,E^{(b)}_{r+3}: & (p,q,r) = (2,3,r), & 3 \leqslant r, \text{ ненулевые части } \mathbf{b} \text{ равны } (1, 2n-2, 1);\\
\mathrm{Sp}\,Y_{r+4}: & (p,q,r) = (3,3,r), & 3 \leqslant r, \text{ ненулевые части одного из трех раз-}\\
 & & \text{биений равны } (1, 2n-2, 1).
\end{array}$$

6. Кратные многообразия флагов с открытой G-орбитой

Как было указано в п. 2.6, конечность числа B-орбит на G-многообразии X эквивалентна наличию на X открытой B-орбиты. Это, в свою очередь, эквивалентно наличию открытой G-орбиты на $X \times G/B$. Отметим, что для произвольной параболической подгруппы P это, вообще говоря, не будет верно: из наличия открытой P-орбиты на X не следует конечность числа P-орбит.

Возникает другой, значительно более общий вопрос.

Проблема 6.1. Для каких кратных многообразий флагов $G/P_1 \times \cdots \times G/P_d$ диагональное действие группы G имеет *открытую* орбиту?

6.1. Локально n-транзитивные действия на многообразиях флагов. В. Л. Попов (см. [46]) получил ответ на этот вопрос в следующем важном частном случае.

Вопрос 6.1. Пусть G — связная простая линейная алгебраическая группа, P — ее максимальная параболическая подгруппа. Для каких G и P группа G действует на $G/P \times G/P \times G/P$ с открытой орбитой?

Этот вопрос служит мотивировкой для следующих определений.

Определение 6.1. Пусть n — целое положительное число, G — алгебраическая группа, действующая алгебраически на неприводимом алгебраическом многообразии X. Обозначим это действие через $\alpha : G \times X \to X$. Будем называть α *локально n-транзитивным*, если диагональное действие $\alpha^n : G \curvearrowright X^n$ локально транзитивно, т.е. имеет открытую орбиту. (Если уже исходное действие не было локально транзитивным, будем называть его *локально 0-транзитивным*).

Неформально говоря, локальная n-транзитивность означает, что «почти любой» набор из n точек многообразия может быть переведен действием группы в «почти любой другой» набор. Ясно, что из локальной n-транзитивности действия следует его локальная m-транзитивность при всех $0 < m \leqslant n$. Также очевидна оценка сверху: α не является локально n-транзитивным, если $n \dim X > \dim G$.

Определение 6.2. *Степенью локальной транзитивности* действия α называется число

$$\operatorname{gtd}(\alpha) := \sup n,$$

где супремум берется по всем n, для которых α локально n-транзитивно. *Максимальной степенью транзитивности* связной алгебраической группы называется величина

$$\operatorname{gtd}(G) := \sup \operatorname{gtd}(\alpha),$$

где супремум берется по всем нетривиальным действиям α группы G на всевозможных неприводимых алгебраических многообразиях.

В [46] были получены следующие результаты относительно максимальной степени транзитивности связных алгебраических групп.

Теорема 6.1. *Пусть G — нетривиальная связная алгебраическая группа. Тогда спреведливы следующие утверждения.*

(1) *если G разрешима, то* $\operatorname{gtd}(G) \leqslant 2$;
(2) *если G нильпотентна, то* $\operatorname{gtd}(G) = 1$;
(3) *если G — редуктивная группа и $\widetilde{G} \to G$ — изогения, то* $\operatorname{gtd}(\widetilde{G}) = \operatorname{gtd}(G)$;
(4) *если $G = Z \times S_1 \times \cdots \times S_d$, где Z — алгебраический тор, а $S_1, \ldots, S_d$ — связные простые алгебраические группы, то*
$$\operatorname{gtd}(G) = \max_i \operatorname{gtd}(S_i);$$
(5) *максимальная степень транзитивности простых групп G приведена в следующей таблице*:

Тип G	A_l	B_l	C_l	D_l	E_6	E_7	E_8	F_4	G_2
$\operatorname{gtd}(G)$	$l+2$	3	3	3	4	3	2	2	2

Возникает вопрос, для каких многообразий связная редуктивная группа G действует «наиболее транзитивно», т.е. для каких G-многообразий достигается указанный максимум. Утверждается, что среди таких многообразий всегда есть многообразие флагов, отвечающее некоторой максимальной параболической подгруппе.

Теорема 6.2. *Пусть G — связная неабелева редуктивная группа. Тогда имеется максимальная параболическая подгруппа $P \subset G$, для которой степень локальной транзитивности стандартного действия G на G/P равняется максимальной степени транзитивности* $\operatorname{gtd}(G)$ *группы G.*

Следующая теорема указывает, чему равняется степень локальной транзитивности действия группы G для различных G/P. Ясно, что действие G на G/P всегда будет 2-транзитивным. Для некоторых параболических подгрупп, перечисленных в следующей таблице, эта степень транзитивности будет выше.

Теорема 6.3. *Пусть G — простая группа, $d \geqslant 3$, P_i — максимальная параболическая подгруппа в G, отвечающая корню α_i. Тогда диагональное действие G на кратном многообразии флагов $(G/P_i)^n$ имеет открытую орбиту тогда и только тогда, когда $n \leqslant 2$ или тройка (G, n, i) указана в следующей таблице*:

Тип G	(n, i)
A_l	$n < \dfrac{(l+1)^2}{i(l+1-i)}$
$B_l,\ l \geqslant 3$	$n = 3,\ i = 1, l$
$C_l,\ l \geqslant 2$	$n = 3,\ i = 1, l$
$D_l,\ l \geqslant 4$	$n = 3,\ i = 1, l-1, l$
E_6	$n = 3, 4,\ i = 1, 6$
E_7	$n = 3,\ i = 7$

Интересно, что действие группы типа A_l на грассманианах будет «наиболее транзитивным»: его степень локальной транзитивности может быть равна 5 и более, тогда как для остальных групп она может равняться только двум, трем и (лишь в случае группы E_6) четырем. А именно, справедливо следующее утверждение.

Следствие 6.1. *Пусть G — связная простая алгебраическая группа типа A_l. Тогда*

$$\operatorname{gtd}(G : G/P_i) \begin{cases} = 3, & \text{если } 2i = l+1; \\ \geqslant 4 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Отсюда получается ответ на вопрос 6.1.

Следствие 6.2. *Пусть G — связная простая линейная алгебраическая группа, P — максимальная параболическая подгруппа. Группа G действует с открытой орбитой на $(G/P)^3$ тогда и только тогда, когда P сопряжена стандартной параболической подгруппе, отвечающей микровесу или комикровесу.*

6.2. Случай параболических подгрупп, не являющихся максимальными. Результаты В. Л. Попова были обобщены Р. А. Девятовым (см. [22]) на случай многообразий вида G/P, где G — простая алгебраическая группа, не являющаяся локально изоморфной SL_l, а P — произвольная (не обязательно максимальная) параболическая подгруппа.

Обозначим пересечение нескольких максимальных стандартных параболических подгрупп через $P_{i_1,\ldots,i_s} = P_{i_1} \cap \cdots \cap P_{i_s}$. Имеет место следующий результат.

Теорема 6.4 (см. [22]). *Пусть G — простая алгебраическая группа, тип которой отличен от A_l, а $P = P_{i_1,\ldots,i_s}$ — стандартная параболическая подгруппа в G, не являющаяся максимальной. Степень локальной транзитивности действия G на G/P равна* 3 *для случаев, перечисленных в таблице, и* 2 *для всех остальных случаев*:

Тип G	P
$D_l,\ l \geqslant 5$ нечетно	$P_{1,l-1},\ P_{1,l}$
$D_l,\ l \geqslant 4$ четно	$P_{1,l-1},\ P_{1,l},\ P_{l-1,l}$

Кроме того, в [22] непосредственно проверяется, что для данных многообразий число G-орбит на $(G/P)^3$ бесконечно. Таким образом, получается следующий результат.

Теорема 6.5. *Пусть G — простая алгебраическая группа, $P \subset G$ — параболическая подгруппа, $n \geqslant 3$. Следующие условия эквивалентны*:

(i) *G действует на $(G/P)^n$ с конечным числом орбит*;

(ii) *$n = 3$, P максимальна и на $(G/P)^n$ имеется открытая G-орбита*;

(iii) *$n = 3$ и $G/P \times G/P$ сферично.*

6.3. Произведения грассманианов с открытой $\mathrm{GL}(n)$-орбитой. В работах В. Л. Попова и Р. А. Девятова изучалось действие группы G на произведении нескольких копий одного и того же многообразия флагов G/P. В работе И. Джошкуна, М. Хадиана и Д. В. Захарова [18] рассматривается действие группы $GL(n)$ на произведении нескольких, вообще говоря, различных грассманианов $X = \mathrm{Gr}(d_1, n) \times \cdots \times \mathrm{Gr}(d_k, n)$ и дается частичный ответ на следующий вопрос, являющийся частным случаем проблемы 6.1.

Вопрос 6.2. Для каких наборов размерностей $(d_1, \ldots, d_k; n)$ действие группы $\mathrm{GL}(n)$ на $\mathrm{Gr}(d_1, n) \times \cdots \times \mathrm{Gr}(d_k, n)$ имеет открытую орбиту? (Будем называть такой вектор размерности *плотным.*)

Соображения размерности позволяют немедленно выписать следующее необходимое условие на существование такой орбиты:

$$\sum_{i=1}^{k} d_i(n - d_i) \leqslant n^2 - 1. \qquad (*)$$

Наличие -1 в правой части связано с тем, что центр группы $\mathrm{GL}(n)$ действует на X тривиально. Поэтому в дальнейшем мы будем говорить о действии не $\mathrm{GL}(n)$, а $\mathrm{PGL}(n)$.

Следующий пример показывает, что это условие не является достаточным.

Пример 6.1. Возьмем вектор $(1, 1, 2, 2; 3)$. Для него $X = \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^{2*} \times \mathbb{P}^{2*}$, $\dim X = 8 = \dim \mathrm{PGL}(3)$, т.е. необходимое условие выполнено.

Элемент X можно рассматривать как конфигурацию $(p_1, p_2, \ell_1, \ell_2)$ из двух точек и двух прямых в $\mathbb{P}^2$. Покажем, что действие $\mathrm{PGL}(3)$ на таких четверках не имеет открытой орбиты. Пусть ℓ — прямая, содержащая p_1 и p_2, а q_1 и q_2 — точки пересечения ℓ с ℓ_1 и ℓ_2 соответственно. Тогда двойное отношение точек p_1, p_2, q_1, q_2 на ℓ является $\mathrm{PGL}(3)$-инвариантом; более того, фиксировав p_1 и p_2 и изменяя ℓ_1 и ℓ_2, можно добиться того, чтобы этот инвариант принял бы любое значение. Значит, орбиты $\mathrm{PGL}(3)$ имеют коразмерность не менее 1.

Этот же пример допускает обобщение на случай произвольной размерности. Возьмем вектор размерности $(1, 1, n-1, n-1; n)$ при $n \geqslant 3$. Для него $\dim X = 4(n-1) \leqslant n^2 - 1$; элементами X являются четверки (p_1, p_2, H_1, H_2), состоящие из двух точек и двух гиперплоскостей в $\mathbb{P}^{n-1}$. Для таких четверок также имеется непрерывный инвариант: пусть $\ell = \langle p_1, p_2 \rangle$, $q_i = \ell \cap H_i$, $i = 1, 2$. Тогда двойное отношение четверки точек p_1, p_2, q_1, q_2 на прямой ℓ сохраняется действием $\mathrm{PGL}(n)$.

В обоих этих примерах удаётся найти меньшую конфигурацию подпространств, получаемых из исходной взятием сумм и пересечений, для которой неравенство $(*)$ уже не будет выполнено. Действительно, четверка точек на прямой (p_1, p_2, q_1, q_2) — это элемент четырехмерного многообразия $(\mathbb{P}^1)^4$, на котором группа $\mathrm{PGL}(2)$, имеющая размерность 3, не может иметь открытую орбиту. Гипотетически, для любого произведения грассманианов, для которого действие $\mathrm{PGL}(n)$ не имеет открытую орбиту, можно указать «препятствие» к её наличию: такую конфигурацию подпространств, получаемую из исходной операциями суммы и пересечения, для которой неравенство $(*)$ будет нарушаться.

Далее вопрос плотности или неплотности интересующих нас векторов размерности часто удается свести к вопросу плотности/неплотности векторов в меньшем пространстве. Следующее очевидное утверждение при этом часто выступает в качестве «базы индукции».

Лемма 6.1. *Вектор размерности $(d_1, \ldots, d_k; n)$ плотен, если*

$$\sum_{i=1}^{k} d_i \leqslant n.$$

Далее удается классифицировать все векторы размерности с малым числом компонент. Как мы видели выше, группа $\mathrm{GL}(n)$ действует на прямом произведении не более чем трёх грассманианов с открытой орбитой — и даже с конечным числом орбит (см. раздел 5). Оказывается, что для четырех компонент плотны «почти все» векторы размерности.

Теорема 6.6. *Пусть $\mathbf{d}$ — вектор размерности длины $k \leqslant 4$. Он не является плотным тогда и только тогда, когда $k = 4$ и $\mathbf{d} = (a, b, c, d; n)$, причем $a + b + c + d = 2n$.*

Доказательство. Приведем доказательство части «тогда». Во-первых, в том случае, когда $a = b = c = d = n/2$, открытой орбиты нет по соображениям размерности: $4(n/2)(n - n/2) = n^2 > n^2 - 1 = \dim \mathrm{PGL}(n)$.

Если a, b, c, d не все одинаковы, будем доказывать утверждение индукцией по $a+b+c+d = 2n$. Нам потребуется следующая лемма.

Лемма 6.2 (см. [18, Lemma 4.2]). *Пусть $\mathbf{d} = (a_1, \ldots, a_r, b_1, \ldots, b_s; n)$ — вектор размерности, для которого*

$$\sum_{i=1}^{r} a_i = n - k < n, \quad \sum_{j=1}^{s} (n - b_j) \leqslant n - k.$$

Тогда $\mathbf{d}$ плотен тогда, когда плотен вектор $\mathbf{d}' = (a_1, \ldots, a_r, b_1 - k, \ldots, b_s - k; n - k)$.

Можно считать (перенумеровывая пространства и, если нужно, переходя к их двойственным), что $a + b < n$. Теперь применим предыдущую лемму. Пусть $(V_1, V_2, V_3, V_4; V)$ — какая-либо конфигурация векторных пространств, отвечающая вектору $(a, b, c, d; n)$. Рассмотрим $(a + b)$-мерное пространство $W := V_1 + V_2$. Тогда конфигурация пространств $(V_1, V_2, W \cap V_3, W \cap V_4; W)$ отвечает вектору размерности

$$\mathbf{d}' = (a, b, a + b + c - n, a + b + d - n; a + b).$$

Сумма его четырех компонент равна $2(a+b) < 2n$. Значит, вектор $\mathbf{d}'$ неплотен по предположению индукции. Поэтому вектор $\mathbf{d}$ также неплотен. □

Аналогичные лемме 6.2 соображения позволяют привести алгоритм, при помощи которого можно получить полный список плотных векторов размерности, для которых $\max d_i$ не превосходит некоторого заданного числа l. Приведем ответ для $l \leqslant 3$. Будем обозначать a-кратное вхождение компоненты, равной d, через a^d.

Пусть $l = 1$. Этот случай тривиален: вектор $(1^r; n)$ является плотным при $r \leqslant n+1$ и неплотным в противном случае (группа $\mathrm{PGL}(n)$ транзитивно действует на наборах из не более чем $n + 1$ точек).

Далее, рассмотрим случай $l = 2$, $\mathbf{d} = (1^a, 2^b; n)$ (т.е. конфигурации из a точек и b прямых на $\mathbb{P}^{n-1}$).

Теорема 6.7. *Ниже перечислены все плотные векторы размерности, максимальная компонента в которых не превосходит* 2:

(i) $(1^a, 2^b; n)$, *где* $a + 2b \leqslant n + 1$;
(ii) $(1^a, 2^b; n)$, *где* $a + 2b = n + 2$ *и* $a \leqslant 3$;
(iii) *конечное число «исключительных» векторов, для которых* $a + 2b \geqslant n + 3$:

$$(2^3; 3), \quad (1, 2^3; 3), \quad (2^4; 3), \quad (1, 2^3; 4), \quad (2^4; 5).$$

Теорема 6.8. *Ниже перечислены все плотные векторы размерности, максимальная компонента в которых не превосходит* 3:

(i) $(1^a, 2^b, 3^c; n)$, *где* $a + 2b + 3c \leqslant n + 1$;
(ii) $(1^a, 2^b, 3^c; n)$, *где* $a + 2b + 3c = n + 2$ *и* $a \leqslant 3$;
(iii) $(1^a, 2^b, 3^c; n)$, *где* $a + 2b + 3c = n + 3$, $a + b \leqslant 4$ *и* $(a, b) \neq (2, 2)$;

(iv) *конечное число «исключительных» векторов, для которых* $a + 2b + 3c \geqslant n + 4$:

$$(2, 3^2; 4), \quad (2^3, 3, 4), \quad (1, 2, 3^2; 4), \quad (3^3; 4), \quad (1, 3^3; 4), \quad (2, 3^3; 4), \quad (3^4; 4),$$
$$(1, 3^4; 4), \quad (2^3, 3; 5), \quad (1, 2, 3^2; 5), \quad (3^3; 5), \quad (1, 3^3; 5), \quad (2, 3^3; 5), \quad (3^4; 5),$$
$$(1, 3^3; 6), \quad (2^2, 3^2; 6), \quad (2, 3^3; 6), \quad (2, 3^3; 7), \quad (3^4; 8), \quad (2, 3^4; 9), \quad 3^5; 11).$$

Далее ситуация обстоит таким же образом: для вектора$\mathbf{d} = (1^{e_1}, 2^{e_2}, \ldots, k^{e_k}; n)$, для которого $e_1 + 2e_2 + \cdots + ke_k = n + l + 1$, $l < k$, критерий его плотности выписывается явно; он сводится к вопросу о плотности вектора в меньшем объемлющем пространстве и с меньшей максимальной компонентой. Имеет место следующая теорема.

Теорема 6.9.

(1) *Пусть* $\mathbf{d} = (1^{e_1}, 2^{e_2}, \ldots, k^{e_k}; n)$*, причем* $e_1 + 2e_2 + \cdots + ke_k = n + l + 1$ *и* $l < k$*. Тогда* $\mathbf{d}$ *плотен тогда и только тогда, когда плотен вектор размерности* $(1^{e_1}, 2^{e_2}, \ldots, l^{e_l}; l + 1)$*.*

(2) *При данном* k *число плотных векторов, для которых* $e_1 + 2e_2 + \cdots + ke_k \geqslant n + k + 1$*, конечно.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бурбаки Н.* Группы и алгебры Ли. Группы Кокстера и системы Титса. Группы, порожденные отражениями. Системы корней. — М.: Мир, 1972.
2. *Зелевинский А. В.* Малые разрешения особенностей многообразий Шуберта// Функц. анал. прилож. — 1983. — *17*, № 2. — С. 75–77.
3. *Пономарева Е. В.* Классификация двойных многообразий флагов сложности 0 и 1// Изв. РАН. Сер. мат. — 2013. — *77*, № 5. — С. 155–178.
4. *Пономарева Е. В.* Инварианты колец Кокса двойных многообразий флагов малой сложности классических групп// Тр. Моск. мат. о-ва. — 2015. — *76*, № 1. — С. 85–150.
5. *Пономарева Е. В.* Инварианты колец Кокса двойных многообразий флагов малой сложности для особых групп// Мат. сб. — 2017. — *208*, № 5. — С. 129–166.
6. *Смирнов Е. Ю.* Разрешения особенностей для многообразий Шуберта в двойных грассманианах// Функц. анал. прилож. — 2008. — *42*, № 2. — С. 56–67.
7. *Achinger P., Perrin N.* Spherical multiple flags/ e-print `arXiv:1307.7236` (2013).
8. *Arzhantsev I., Derenthal U., Hausen J., Laface A.* Cox rings// Cambridge Stud. Adv. Math. — Cambridge: Cambridge University Press, 2015. — *144*.
9. *Bobiński G., Zwara G.* Schubert varieties and representations of Dynkin quivers// Colloq. Math. — 2002. — *94*, № 2. — С. 285–309.
10. *Bongartz K.* Degenerations for representations of tame quivers// Ann. Sci. École Norm. Sup. (4). — 1995. — *28*, № 5. — С. 647–668.
11. *Bongartz K.* On degenerations and extensions of finite-dimensional modules// Adv. Math. — 1996. — *121*, № 2. — С. 245–287.
12. *Bott R., Samelson H.* Applications of the theory of Morse to symmetric spaces// Am. J. Math. — 1958. — *80*. — С. 964–1029.
13. *Brion M.* Groupe de Picard et nombres caractéristiques des variétés sphériques// Duke Math. J. — 1989. — *58*, № 2. — С. 397–424.
14. *Brion M.* On orbit closures of spherical subgroups in flag varieties// Comment. Math. Helv. — 2001. — *76*, № 2. — С. 263–299.
15. *Brion M.* Multiplicity-free subvarieties of flag varieties// в кн.: Commutative Algebra (Grenoble/Lyon, 2001)/ Contemp. Math. — Providence, RI: Am. Math. Soc., 2003. — *331*. — С. 13–23.
16. *Brion M.* Lectures on the geometry of flag varieties// в кн.: Topics in Cohomological Studies of Algebraic Varieties/ Trends Math. — Basel: Birkhäuser, 2005. — С. 33–85.
17. *Brion M., Kumar Sh.* Frobenius splitting methods in geometry and representation theory/ Prog. Math. — Boston: Birkhäuser, 2005. — *231*.
18. *Coskun I., Hadian M., Zakharov D.* Dense $\mathbb{P}GL$-orbits in products of Grassmannians// J. Algebra. — 2015. — *429*. — С. 75–102.
19. *Danilov V. I., Koshevoi G. A.* Massifs and the combinatorics of Young tableaux// Usp. Mat. Nauk. — 2005. — *60*, № 2 (362). — С. 79–142.
20. *Demazure M.* Désingularisation des variétés de Schubert généralisées// Ann. Sci. École Norm. Sup. (4). — 1974. — *7*. — С. 53–88.

21. *Demazure M.* A very simple proof of Bott's theorem// Invent. Math. — 1976. — *33*, № 3. — С. 271–272.
22. *Devyatov R.* Generically transitive actions on multiple flag varieties// Int. Math. Res. Not. — 2014. — *11*. — С. 2972–2989.
23. *Finkelberg M., Ginzburg V., Travkin R.* Mirabolic affine Grassmannian and character sheaves// Selecta Math. (N.S.). — 2009. — *14*, № 3-4. — С. 607–628.
24. *Fulton W.* Young tableaux/ London Math. Soc. Student Texts. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1997. — *35*.
25. *Fulton W., Harris J.* Representation theory/ Grad. Texts Math. — New York: Springer-Verlag, 1991. — *129*.
26. *Gabriel P.* Unzerlegbare Darstellungen. I// Manuscr. Math. — 1972. — *6*. — С. 71–103; correction: ibid. С. 309.
27. *Hansen H. C.* On cycles in flag manifolds// Math. Scand. — 1974. — *33*. — С. 269–274.
28. *Humphreys J. E.* Reflection groups and Coxeter groups/ Cambridge Stud. Adv. Math. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1990. — *29*.
29. *Kleiman S. L., Laksov D.* Schubert calculus// Am. Math. Monthly. — 1972. — *79*. — С. 1061–1082.
30. *Kleiman S. L.* The transversality of a general translate// Compos. Math. — 1974. — *28*. — С. 287–297.
31. *Knop F.* On the set of orbits for a Borel subgroup// Comment. Math. Helv. — 1995. — *70*, № 2. — С. 285–309.
32. *Knutson A., Tao T., Woodward C.* The honeycomb model of $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ tensor products. II. Puzzles determine facets of the Littlewood–Richardson cone// J. Am. Math. Soc. — 2004. — *17*, № 1. — С. 19–48.
33. *Knutson A., Zinn-Justin P.* The Brauer loop scheme and orbital varieties// J. Geom. Phys. — 2014. — *78*. — С. 80–110.
34. *Landsberg J. M., Manivel L.* On the projective geometry of rational homogeneous varieties// Comment. Math. Helv. — 2003. — *78*, № 1. — С. 65–100.
35. *Littelmann P.* A Littlewood–Richardson rule for symmetrizable Kac–Moody algebras// Invent. Math. — 1994. — *116*, № 1–3. — С. 329–346.
36. *Littelmann P.* On spherical double cones// J. Algebra. — 1994. — *166*, № 1. — С. 142–157.
37. *Littlewood D. E., Richardson A. R.* Group characters and algebra// Philos. Trans. Roy. Soc. London. Ser. A. — 1934. — С. 99–141.
38. *Magyar P.* Bruhat order for two flags and a line// J. Alg. Combin. — 2005. — *21*, № 1. — С. 71–101.
39. *Magyar P., Weyman J., Zelevinsky A.* Multiple flag varieties of finite type// Adv. Math. — 1999. — *141*, № 1. — С. 97–118.
40. *Magyar P., Weyman J., Zelevinsky A.* Symplectic multiple flag varieties of finite type// J. Algebra. — 2000. — *230*, № 1. — С. 245–265.
41. *Melnikov (Melnikova) A.* B-Orbits in solutions to the equation $X^2 = 0$ in triangular matrices// J. Algebra. — 2000. — *223*, № 1. — С. 101–108.
42. *Melnikov (Melnikova) A.* The combinatorics of orbital varieties closures of nilpotent order 2 in sl_n// Electr. J. Combin. — 2005. — *12*. — R21.
43. *Panyushev D. I.* Complexity and rank of double cones and tensor product decompositions// Comment. Math. Helv. — 1993. — *68*, № 3. — С. 455–468.
44. *Parthasarathy K. R., Ranga Rao R., Varadarajan V. S.* Representations of complex semi-simple Lie groups and Lie algebras// Ann. Math. (2). — 1967. — *85*. — С. 383–429.
45. *Perrin N.* On the geometry of spherical varieties// Transform. Groups. — 2014. — *19*, № 1. — С. 171–223.
46. *Popov V. L.* Generically multiple transitive algebraic group actions// Tata Inst. Fund. Res. Stud. Math. — Mumbai, 2007. — *19*. — С. 481–523.
47. *Purbhoo K., Sottile F.* The recursive nature of cominuscule Schubert calculus// Adv. Math. — 2008. — *217*, № 5. — С. 1962–2004.
48. *Richardson R. W., Springer T. A.* The Bruhat order on symmetric varieties// Geom. Dedicata. — 1990. — *35*, № 1–3. — С. 389–436.
49. *Riedtmann C.* Degenerations for representations of quivers with relations// Ann. Sci. École Norm. Sup. (4). — 1986. — *19*, № 2. — С. 275–301.
50. *Schubert H.* Kalkül der abzählenden Geometrie. — Berlin–New York: Springer-Verlag, 1979.
51. *Schützenberger M.-P.* La correspondance de Robinson// в кн.: Combinatoire et représentation du groupe symétrique (Actes Table Ronde CNRS, Univ. Louis-Pasteur Strasbourg, Strasbourg, 1976)/ Lect. Notes Math. — Berlin: Springer-Verlag, 1977. — *579*. — С. 59–113.
52. *Serre J.-P.* Représentations linéaires et espaces homogènes kählériens des groupes de Lie compacts (d'après Armand Borel et André Weil)// в кн.: Séminaire Bourbaki, Vol. 2. — Paris: Soc. Math. France, 1995. — Exp. No. 100, С. 447–454.

53. *Smirnov E.* Orbites d'un sous-groupe de Borel dans le produit de deux grassmanniennes/ Ph.D. thesis. — Université Joseph-Fourier-Grenoble I, 2007.
54. *Smirnov E.* Grassmannians, flag varieties, and Gelfand–Zetlin polytopes// в кн.: Recent Developments in Representation Theory. Proceedings of Maurice Auslander Distinguished Lectures and International Conference/ Contemp. Math. — Providence, RI: Am. Math. Soc., 2016. — *673*. — С. 179–226.
55. *Stembridge J. R.* Multiplicity-free products and restrictions of Weyl characters// Represent. Theory. — 2003. — *7*. — С. 404–439.
56. *Timashev D. A.* Homogeneous spaces and equivariant embeddings// Invariant Theory and Algebraic Transformation Groups–8/ Encycl. Math. Sci. — Heidelberg: Springer-Verlag, 2011. — *138*.
57. *Travkin R.* Mirabolic Robinson–Schensted–Knuth correspondence// Selecta Math. (N.S.). — 2009. — *14*, № 3-4. — С. 727–758.

Е. Ю. Смирнов
Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», Москва;
Независимый Московский университет, Москва
E-mail: esmirnov@hse.ru