ISSN 0233-6723

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ

СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Тематические обзоры

Том 146

Москва 2018

ISSN 0233–6723

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

ВСЕРОССИЙСКИЙ ИНСТИТУТ
НАУЧНОЙ И ТЕХНИЧЕСКОЙ ИНФОРМАЦИИ
(ВИНИТИ РАН)

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ

СЕРИЯ
СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

ТЕМАТИЧЕСКИЕ ОБЗОРЫ

Том 146

ГЕОМЕТРИЯ

Москва 2018

СОДЕРЖАНИЕ

О шестимерной сфере с приближенно кэлеровой структурой
(*М. Б. Банару*) 3

О почти комплексных структурах на шестимерных произведениях сфер
(*Н. А. Даурцева, Н. К. Смоленцев*) 17

Аффинные преобразования в расслоениях
(*А. Я. Султанов, О. А. Монахова*) 48

Метрически-аффинные пространства
(*В. И. Паньженский, С. Е. Степанов, М. В. Сорокина*) 89

О геометрическом анализе динамики объемного расширения
и его приложениях в общей теории относительности
(*С. Е. Степанов, И. Е. Денежкина, А. В. Овчинников*) 103

Таблицы Юнга и проекции тензоров
(*М. Юкл, Л. Юклова, Й. Микеш*) 113

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 146 (2018). С. 3–16

УДК 514.76

О ШЕСТИМЕРНОЙ СФЕРЕ С ПРИБЛИЖЕННО КЭЛЕРОВОЙ СТРУКТУРОЙ

© 2018 г. **М. Б. БАНАРУ**

Аннотация. Описаны геометрические свойства шестимерной сферы с приближенно кэлеровой структурой.

Ключевые слова: обыкновенное дифференциальное уравнение, инвариант, связность, классификация, дифференциально-алгебраические характеристики, группы симметрий.

AMS Subject Classification: 34A26, 53A55

1. Введение. Шестимерная сфера S^6 с канонической приближенно кэлеровой структурой занимает особое место в эрмитовой геометрии. Самое очевидное объяснение этого факта таково: каноническая приближенно кэлерова структура, индуцируемая на S^6, — исторически первый пример отличной от кэлеровой почти эрмитовой структуры (см. [20]). Количество опубликованных в серьезных математических журналах статей о различных аспектах геометрии приближенно кэлеровой шестимерной сферы исчисляется многими десятками. Среди них как работы классиков эрмитовой геометрии (А. Грей [90–95], Е. Калаби [79], В. Ф. Кириченко [26, 28, 32, 35], К. Секигава [80, 117]), так и статьи многих других геометров из самых разных стран (см. [24, 74, 81, 83, 88, 97–101, 111, 113, 124] и др.). Отметим, что обзор [18] достижений в области эрмитовой геометрии шестимерных многообразий содержит множество разнообразных связанных с геометрией сферы результатов, которые были получены до 2009 г.

Обратим внимание на тот факт, что приближенно кэлерову структуру на сфере S^6, как и другие почти эрмитовы структуры на шестимерных многообразиях, обычно связывают с существованием так называемых 3-векторных произведений на пространстве R^8, несущем структуру алгебры Кэли. Еще в 1967 г. Р. Браун и А. Грей указали (см. [78]) два неизоморфных 3-векторных произведения в алгебре октав:

$$\begin{aligned} P_1(X,Y,Z) &= -X(\bar{Y}Z) + \langle X,Y\rangle Z + \langle Y,Z\rangle X - \langle Z,X\rangle Y,\\ P_2(X,Y,Z) &= -(X\bar{Y})Z + \langle X,Y\rangle Z + \langle Y,Z\rangle X - \langle Z,X\rangle Y, \end{aligned} \tag{1}$$

где $X,Y,Z \in \mathbf{O}$, $\mathbf{O} \equiv \mathbf{R^8}$ — алгебра октав, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — скалярное произведение в $\mathbf{O}$, $X \to \bar{X}$ — оператор сопряжения в $\mathbf{O}$. Оказалось, что любое другое 3-векторное произведение в алгебре октав изоморфно одному из приведенных в (1). Браун и Грей установили, что каждое этих 3-векторных произведений индуцирует почти эрмитову структуру на любом шестимерном ориентируемом подмногообразии $M^6 \subset \mathbf{O}$, в частности, на шестимерной сфере (см. [78]).

Во многих работах о шестимерных почти эрмитовых многообразиях, в том числе о сфере S^6 с приближенно кэлеровой структурой, подчеркивается, что эта структура может рассматриваться именно как структура, порождаемая 3-векторными произведениями в алгебре Кэли (см. [18, 22, 26, 48, 73, 91, 92]). В [90] А. Грей выдвинул гипотезу, согласно которой всякое компактное шестимерное приближенно кэлерово многообразие, полученное с помощью 3-векторного произведения, изометрично сфере S^6. Это утверждение было им доказано для случая, когда многообразие является эйнштейновым и имеет положительную кривизну в двумерных направлениях. В. Ф. Кириченко доказал данный факт в самом общем случае, причем в качестве следствия показал, что сфера S^6 является единственным примером шестимерного подмногообразия алгебры Кэли, для которого индуцированная приближенно кэлерова структура отлична от кэлеровой (см. [26]). Именно работа [26] является, на наш взгляд, наиболее значительной в исследовании приближенно кэлеровых шестимерных многообразий.

2. Почти эрмитовы и почти контактные метрические структуры. Почти эрмитовой (almost Hermitian, AH-) структурой на четномерном многообразии M^{2n} называется пара $\{J,\ g=\langle\cdot,\cdot\rangle\}$, где J — почти комплексная структура, $g=\langle\cdot,\cdot\rangle$ — риманова метрика на этом многообразии (см. [30, 96]). При этом J и $g=\langle\cdot,\cdot\rangle$ должны быть согласованы условием

$$\langle JX, JY\rangle = \langle X, Y\rangle, \quad X, Y \in \aleph(M^{2n}),$$

где $\aleph(M^{2n})$ — модуль гладких (класса C^∞) векторных полей на многообразии M^{2n}. Многообразие с фиксированной на нем почти эрмитовой структурой называется почти эрмитовым многообразием (AH-многообразием). С каждой AH-структурой $\{J,\ g=\langle\cdot,\cdot\rangle\}$ на многообразии M^{2n} связано поле дважды ковариантного кососимметрического тензора (т.е. 2-формы), определяемого равенством

$$F(X,Y) = \langle X, JY\rangle, \quad X, Y \in \aleph(M^{2n}),$$

и называемого *фундаментальной формой структуры.*

Пусть $\left(M^{2n},\ \{J,\ g=\langle\cdot,\cdot\rangle\}\right)$ — почти эрмитово многообразие. Зафиксируем точку $p\in M^{2n}$. Пусть $T_p(M^{2n})$ — пространство, касательное к многообразию M^{2n} в точке p, $\{J_p,\ g_p=\langle\cdot,\cdot\rangle\}$ — почти эрмитова структура, порожденная парой $\{J,\ g=\langle\cdot,\cdot\rangle\}$. Реперы, адаптированные почти эрмитовой структуре (или A-реперы), в комплексификации касательного пространства, устроены следующим образом:

$$\left(p,\ \varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n,\ \varepsilon_{\hat 1},\dots,\varepsilon_{\hat n}\right),$$

где ε_a — собственные векторы оператора почти комплексной структуры, отвечающие собственному значению оператора $i=\sqrt{-1}$, а $\varepsilon_{\hat a}$ — собственные векторы, отвечающие собственному значению $-i$. Здесь индекс a принимает значения от 1 до n; $\hat a = a+n$. Матрица оператора структуры в A-репере в точке p имеет вид

$$(J_j^k) = \left(\begin{array}{c|c} iI_n & 0 \\ \hline 0 & -iI_n \end{array}\right),$$

где I_n — единичная матрица порядка n; $k,j=1,\dots,2n$. Хорошо известно (см. [30]), что матрицы римановой метрики g и фундаментальной формы F в A-репере принимают соответственно вид

$$(g_{kj}) = \left(\begin{array}{c|c} 0 & I_n \\ \hline I_n & 0 \end{array}\right), \quad (F_{kj}) = \left(\begin{array}{c|c} 0 & iI_n \\ \hline -iI_n & 0 \end{array}\right).$$

Отметим, что конструкция A-репера и его применение к исследованию почти эрмитовых структур разработаны В. Ф. Кириченко (см. [29]).

Почти эрмитово многообразие называется *эрмитовым*, если индуцируемая на нем почти эрмитова структура интегрируема; *приближенно кэлеровым*, если выполняется условие $\nabla_X(F)(X,Y)=0$, и *кэлеровым*, если $\nabla F = 0$ (см. [30, 96]).

Почти контактной метрической структурой на многообразии N называется система тензорных полей $\{\Phi,\xi,\eta,g\}$ на этом многообразии, для которой выполняются следующие условия (см. [30, 75, 76]):

$$\eta(\xi)=1, \quad \Phi(\xi)=0, \quad \eta\circ\Phi=0, \quad \Phi^2=-id+\xi\otimes\eta,$$
$$\langle\Phi X, \Phi Y\rangle = \langle X, Y\rangle - \eta(X)\eta(Y), \quad X, Y\in\aleph(N);$$

здесь Φ — поле тензора типа $(1,1)$, ξ — векторное поле, η — ковекторное поле, $g=\langle\cdot,\cdot\rangle$ — риманова метрика, $\aleph(N)$ — модуль гладких векторных полей на многообразии N.

Хорошо известно, что многообразие, допускающее почти контактную метрическую структуру, нечетномерно и ориентируемо. Простейшим примером почти контактной метрической структуры является косимплектическая структура, которую можно охарактеризовать тождеством

$$\nabla\eta = \nabla\Phi = 0,$$

где ∇ — риманова связность метрики g. Многообразия, наделенные такой структурой, локально эквивалентны произведению кэлерова многообразия на вещественную прямую (см. [30]).

Почти контактная метрическая структура $\{\Phi, \xi, \eta, g\}$ называется *слабо косимплектической*, если выполняется условие

$$(\nabla_X \Phi)X = 0.$$

По нашему мнению, ведущим специалистом в области геометрии слабо косимплектических структур является японский геометр Х. Эндо. Именно ему принадлежит ряд интереснейших результатов в этой области (см., например, [84–87]). Выделим и отечественного специалиста Е. В. Кусову, которая провела глубокие исследования в теории слабо косимплектических многообразий (см. [38]).

Напомним (см. [30,42]), что почти контактная метрическая структура называется *контактной метрической*, или *почти сасакиевой*, если $d\eta = \Omega$, и *нормальной*, если $2N + d\eta \otimes \xi = 0$, где

$$N(X, Y) = \frac{1}{4}\Big\{\Phi^2[X, Y] + [\Phi X, \Phi Y] - \Phi[\Phi X, Y] - \Phi[X, \Phi Y]\Big\}$$

— тензор Нейенхейса оператора структуры (см. [30]). Через $\Omega(X, Y) = \langle X, \Phi Y\rangle$ обозначена фундаментальная форма структуры. Нормальная контактная метрическая структура называется *сасакиевой*. Сасакиевы структуры можно охарактеризовать и с помощью тождества

$$\nabla_X(\Phi)Y = \langle X, Y\rangle\xi - \eta(Y)X, \quad X, Y \in \aleph(N).$$

Сасакиевы структуры индуцируются, например, на вполне омбилических гиперповерхностях кэлеровых многообразий (см. [42]). Они обладают многими замечательными свойствами и играют фундаментальную роль в контактной геометрии.

Еще одним из наиболее содержательных и интересных видов почти контактных метрических структур является структура Кенмоцу, которая, как известно (см. [30, 116]), характеризуется тождеством

$$\nabla_X(\Phi)Y = \langle \Phi X, Y\rangle\xi - \eta(Y)\Phi X, \quad X, Y \in \aleph(N).$$

Многообразия Кенмоцу и их различные обобщения — одно из самых популярных направлений исследований в современной контактной геометрии. В этой области работают известнейшие современные геометры, в частности Д. Блэр (США), В. Ф. Кириченко (Россия), Г. Питиш (Румыния) и М. М. Трипати (Индия), а также многие другие математики из разных стран.

Отметим также, что геометрия почти контактных метрических структур имеет широкие приложения в различных разделах теоретической физики (см. [1, 25, 30, 44, 89, 103, 106, 125, 127]).

3. Новые результаты в геометрии приближенно кэлеровых многообразий. Класс приближенно кэлеровых многообразий, как и всякий класс Грея—Херведлы (см. [96]) почти эрмитовых многообразий, содержит все кэлеровы многообразия. Многие результаты, полученные при исследовании приближенно кэлеровых многообразий, являются обобщением соответствующих результатов кэлеровой геометрии. Например, в статье Е. Омачи [115] конструкция Тачибаны, обобщающая понятие ковариантного и контравариантного аналитического тензора в кэлеровом многообразии для произвольного почти комплексного многообразия, применяется для приближенно кэлеровых многообразий.

В [114] рассматриваются различные связности на приближенно кэлеровом многообразии. Получен ряд тождеств для полусимметрической неметрической связности на кэлеровом и приближенно кэлеровом многообразиях. В частности, получено выражение для тензора Нейенхейса относительно подобной связности на приближенно кэлеровом многообразии.

Преобразованиям приближенно кэлеровых метрик посвящена статья А. Морояну и У. Земмельмана [112] . Известно, что всякое шестимерное строго приближенно кэлерово многообразие (M, g, J) является многообразием Эйнштейна положительной скалярной кривизны. Через $E(\lambda)$ обозначим λ-собственное пространство сужения оператора Δ на пространстве E. Доказано, что если многообразие (M, g, J) компактно, а скалярная кривизна нормализована к значению 30, то пространство инфинитезимальных преобразований Эйнштейна приближенно кэлеровой метрики g естественным образом изоморфно прямой сумме $E(2) \oplus E(6) \oplus E(12)$.

Выделим статью [82] М. Джорич и Л. Вранкена о шестимерной сфере $S^6(1)$ постоянной скалярной кривизны с канонической приближенно кэлеровой структурой. В ней исследуются трехмерные подмногообразия Коши—Римана сферы $S^6(1)$. Известно, что у такой сферы не существует вполне геодезических собственных трехмерных подмногообразий Коши—Римана. М. Джорич и Л. Вранкен получили классификацию наиболее близких к вполне геодезическим трехмерных подмногообразий Коши—Римана шестимерной сферы постоянной скалярной кривизны с канонической приближенно кэлеровой структурой.

В большой и многоплановой работе [50] Д. В. Алексеевского, Б. С. Кругликова и Х. Винтера изучаются однородные почти комплексные структуры. Эта работа имеет отношение к так называемым строго приближенно кэлеровым (SNK-) многообразиям. Например, в этой статье при исследовании инвариантных (псевдо) римановых и симплектических структур на однородных шестимерных многообразиях выделен случай, когда почти комплексное многообразие является SNK-многообразием.

Л. Веццони доказал (см. [123]), что тензор эрмитовой кривизны $\hat{R}$, ассоциированный с приближенно кэлеровой метрикой g, всегда удовлетворяет второму тождеству Бианки:

$$\circlearrowleft\ (\tilde{\nabla}_X \tilde{R})\,(Y, Z, \cdot\,, \cdot) = 0.$$

При этом тензор $\hat{R}$ удовлетворяет первому тождеству Бианки

$$\circlearrowleft\ \tilde{R}(X, Y, Z, \cdot) = 0$$

в том и только том случае, когда метрика g является кэлеровой. Кроме этого, в данной работе в терминах тензора римановой кривизны получены условия, при которых тензор параллелен относительно канонической эрмитовой связности $\tilde{\nabla}$.

Работы [33] и [35] посвящены геометрии тензора конгармонической кривизны приближенно кэлеровых многообразий. Напомним, что понятие конгармонического преобразования, (т.е. конформного преобразования, сохраняющего свойство гармоничности гладких функций) введено в рассмотрение Й. Ишии (см. [104]). Известно, что такие преобразования имеют тензорный инвариант — так называемый тензор конгармонической кривизны, определяемый следующим образом:

$$\begin{aligned}\mathrm{Ch}(X,Y,Z,W) &= R(X,Y,Z,W) - \\ &- \frac{1}{n-2}\Big[(X,W)\,\mathrm{Ric}(Y,Z) - \langle X,Z\rangle\,\mathrm{Ric}(Y,W) + \langle Y,Z\rangle\,\mathrm{Ric}(X,W) - \langle Y,W\rangle\,\mathrm{Ric}(X,Z)\Big],\end{aligned}$$

где R — тензор римановой кривизны, а Ric — тензор Риччи. Легко проверить, что тензор конгармоничекой кривизны обладает классическими свойствами симметрии тензора римановой кривизны (см. [40, 105]). Выделим самые значительные результаты, полученные для приближенно кэлеровых многообразий в [33, 35].

Теорема 1 (см. [33]). *Конгармонически паракэлерово приближенно кэлерово многообразие является многообразием постоянной неотрицательной скалярной кривизны. При этом оно является многообразием нулевой скалярной кривизны тогда и только тогда, когда оно кэлерово.*

Теорема 2 (см. [35]). *Всякое четырехмерное приближенно кэлерово многообразие является конгармонически паракэлеровым тогда и только тогда, когда оно имеет нулевую скалярную кривизну. Всякое приближенно кэлерово многообразие размерности > 4 конгармонически паракэлерово тогда и только тогда, когда оно является Риччи-плоским кэлеровым многообразием. Всякое приближенно кэлерово многообразие размерности > 4 конгармонически плоско тогда и только тогда, когда оно локально изометрично пространству C^n, снабженному канонической кэлеровой структурой.*

Обратим внимание на то, что систематические исследования в области тензоров кривизны почти эрмитовых многообразий начаты в 1970-х гг. Особую роль в этих исследованиях, по мнению многих специалистов, играют работы [121, 122].

Статья Р. Шармы и С. Десмука [118] развивает богатую тематику лагранжевых подмногообразий шестимерной приближенно кэлеровой сферы (см., например, [97, 98, 124]). Получен такой основной результат: если M — лагранжево подмногообразие шестимерной приближенно кэлеровой сферы, то на M канонически индуцируется почти контактная метрическая структура. Доказано, что всякая слабо сасакиева структура такого вида является сасакиевой, а всякая слабо косимплектическая структура — косимплектической. Также доказано, что если нормальная связность на лагранжевом подмногообразии M приближенно кэлеровой шестимерной сферы является плоской, то M может быть только вполне геодезическим подмногообразием S^3.

Отметим, что сфера S^6, разумеется, не является единственным примером собственного шестимерного приближенно кэлерова многообразия. Приближенно кэлерова структура может быть реализована и на произведении двух трехмерных сфер $S^3 \times S^3$. Так, например, Дж. Болтон, Ф. Диллен, Б. Диос и Л. Вранкен (см. [77]) показали, что на почти комплексной поверхности в приближенно кэлеровом произведении $S^3 \times S^3$ возможно глобально определить голоморфный дифференциал, порожденный структурой почти произведения в $S^3 \times S^3$. Установлено соответствие между поверхностями постоянной средней кривизны в R^3 и почти комплексными поверхностями с равным нулю голоморфным дифференциалом в приближенно кэлеровом произведении $S^3 \times S^3$. Из этого соответствия выведена классификация вполне геодезических почти комплексных поверхностей в $S^3 \times S^3$. Доказано, что двумерная почти комплексная сфера S^2 всегда является вполне геодезическим подмногообразием в приближенно кэлеровом произведении $S^3 \times S^3$. Также доказано, что в $S^3 \times S^3$ является вполне геодезическим подмногообразием и всякая почти комплексная поверхность с параллельной второй квадратичной формой.

Ху и Жанг (см. [102]) также рассматривают почти комплексные поверхности в многообразии $S^3 \times S^3$ с канонической приближенно кэлеровой структурой. Ими доказано, что существует только два вида (с точностью до локальной конгруэнции) таких поверхностей с параллельной второй квадратичной формой. Для длины второй квадратичной формы компактных почти комплексных поверхностей в $S^3 \times S^3$ установлено интегральное неравенство типа Симонса, причем показано, что в случае обращения в равенство такого нестрого неравенства почти комплексная поверхность должна быть вполне геодезической.

4. О гиперповерхностях с малыми типовыми числами приближенно кэлеровой шестимерной сферы. Одними из самых важных примеров почти контактных метрических структур, в значительной мере определяющими их роль в современной дифференциальной геометрии, служат структуры, индуцируемые на гиперповерхностях почти эрмитовых многообразий. Изучением почти контактных метрических гиперповерхностей почти эрмитовых многообразий занимались такие геометры, как Д. Блэр, С. Голдберг, С. Ишихара, В.Ф. Кириченко, М. Окумура, С. Сасаки, Л. В. Степанова, С. Танно, Й. Таширо, Х. Янамото, К. Яно. Имея в виду, что данный вопрос подробно освещен в обзоре [31], выделим только одну из первых работ по этой тематике [126]. По нашему мнению, именно эта статья К. Яно и С. Ишихары определила направление исследований в области геометрии почти контактных метрических гиперповерхностей почти эрмитовых многообразий.

Из других давних работ, имеющих отношение к содержанию данного параграфа, особо отметим [119], где гиперповерхности сферы характеризуются с помощью свойств их второй квадратичной формы. Отметим также, что характеризацией гиперповерхностей в терминах их типового числа, т.е. ранга второй квадратичной формы, занимались и занимаются в основном японские геометры, среди которых выделяются своими результатами Р. Такаги и Х. Курихара (см. [107–110, 120]).

Отправной точкой многих исследований в области геометрии шестимерных почти эрмитовых подмногообразий алгебры Кэли являются структурные уравнения Картана почти эрмитовой структуры на произвольном ориентируемом шестимерном подмногообразии алгебры октав (см. [27]):

$$d\omega^a = \omega^a_b \wedge \omega^b + \frac{1}{\sqrt{2}}\varepsilon^{abh} D_{hc}\omega^c \wedge \omega_b + \frac{1}{\sqrt{2}}\varepsilon^{ah[b} D^{c]}_h \omega_b \wedge \omega_c, \tag{2a}$$

$$d\omega_a = -\omega^b_a \wedge \omega_b + \frac{1}{\sqrt{2}}\varepsilon_{abh} D^{hc}\omega_c \wedge \omega^b + \frac{1}{\sqrt{2}}\varepsilon_{ah[b} D^h_{c]} \omega^b \wedge \omega^c, \tag{2b}$$

$$d\omega^a_b = \omega^a_c \wedge \omega^c_b - \left(\frac{1}{2}\delta^{ah}_{bg} D_{h[k} D^g_{j]} + \sum_{\phi} T^{\phi}_{\hat{a}[k} T^{\phi}_{j]b}\right) \omega^k \wedge \omega^j, \tag{2c}$$

где

$$D_{cj} = \mp T^8_{cj} + iT^7_{cj}, \quad D_{\hat{c}j} = \mp T^8_{\hat{c}j} - iT^7_{\hat{c}j}, \quad D^{hc} = D_{\hat{h}\hat{c}}, \quad D_h{}^c = D_{h\hat{c}},$$
$$D^h{}_c = D_{\hat{h}c}, \quad \delta^{ah}_{bg} = \delta^a_b \delta^h_g - \delta^a_g \delta^h_b,$$

$\varepsilon_{abc} = \varepsilon^{123}_{abc}$, $\varepsilon^{abc} = \varepsilon^{abc}_{123}$ — компоненты тензора Кронекера третьего порядка. При этом $\bar{\omega}^a = \omega_a$, $\bar{\omega}^a_b = -\omega^b_a$. В частности, (2a) комплексно сопряжено (2b), (2c) самосопряжено. При этом

$$a, b, c, d, e, f, g, h = 1, 2, 3, \quad \psi, \phi = 7, 8;$$
$$i, j, k, l = 1, 2, 3, 4, 5, 6, \quad \alpha, \beta, \gamma, \delta = 2, 3, \quad \hat{a} = a + 3.$$

Здесь $\{T^{\phi}_{kj}\}$ — система функций на пространстве расслоения комплексных реперов над подмногообразием M^6 алгебры октав. Эти симметричные по нижним индексам функции служат компонентами конфигурационного тензора (в терминологии А. Грея и В. Ф. Кириченко, см. [23, 27, 28, 91]), или второй основной формы погружения подмногообразия M^6 (см. [36, 37]). При этом

$$T^{\psi}_{ab} = \bar{T}^{\psi}_{\hat{a}\hat{b}}, \quad T^{\psi}_{\hat{a}b} = \bar{T}^{\psi}_{a\hat{b}}.$$

Условия, необходимые и достаточные для того, чтобы шестимерное почти эрмитово подмногообразие алгебры октав являлось приближенно кэлеровым, давно известны (см. [2, 3, 18, 60, 65]):

$$D^{ab} = 0, \quad D_{ab} = 0, \quad D^a_b = \lambda \delta^a_b.$$

С учетом этого структурные уравнения (2) принимают следующий вид:

$$d\omega^a = \omega^a_b \wedge \omega^b + \mu\, \varepsilon^{acb} \omega_b \wedge \omega_c, \tag{3a}$$
$$d\omega_a = -\omega^b_a \wedge \omega_b + \bar{\mu}\, \varepsilon_{acb} \omega^b \wedge \omega^c; \tag{3b}$$
$$\begin{aligned} d\omega^a_b = {} & \omega^a_c \wedge \omega^c_b + i\lambda\, T^7_{b[d}\, \delta^a_{c]} \omega^c \wedge \omega^d + \\ & + \left(\left(-\frac{1}{2}\delta^a_b \delta^c_d + \frac{3}{2}\delta^a_d \delta^c_b\right) |\lambda|^2 - 2\, T^7_{\hat{a}\hat{c}} T^7_{db}\right) \omega_c \wedge \omega^d - i\bar{\lambda}\, T^7_{\hat{a}[\hat{d}} \delta^{\hat{b}}_{\hat{c}]}\, \omega_c \wedge \omega_d. \end{aligned} \tag{3c}$$

Теперь воспользуемся первой группой структурных уравнений Картана на ориентируемой поверхности произвольного почти эрмитова многообразия. Впервые их вывела Л. В. Степанова (см. [41, 42]; более подробный вывод содержится в обзоре [31]):

$$\begin{aligned} d\omega^a = {} & \omega^a_b \wedge \omega^b + B^{ab}{}_c\, \omega^c \wedge \omega_b + B^{abc} \omega_b \wedge \omega_c + \\ & + \left(\sqrt{2}\, B^{an}{}_b + i\sigma^a_b\right) \omega^b \wedge \omega + \left(-\sqrt{2}\, \tilde{B}^{nab} - \frac{1}{\sqrt{2}} B^{ab}{}_n - \frac{1}{\sqrt{2}} \tilde{B}^{abn} + i\, \sigma^{ab}\right) \omega_b \wedge \omega, \end{aligned} \tag{4a}$$
$$\begin{aligned} d\omega_a = {} & -\omega^b_a \wedge \omega_b + B_{ab}{}^c\, \omega_c \wedge \omega^b + B_{abc}\, \omega^b \wedge \omega^c + \\ & + \left(\sqrt{2}\, B_{an}{}^b - i\sigma^b_a\right) \omega_b \wedge \omega + \left(-\sqrt{2}\, \tilde{B}_{nab} - \frac{1}{\sqrt{2}} \tilde{B}_{abn} - \frac{1}{\sqrt{2}} B_{ab}{}^n - i\, \sigma_{ab}\right) \omega^b \wedge \omega, \end{aligned} \tag{4b}$$
$$\begin{aligned} d\omega = {} & \sqrt{2}\, B_{nab}\, \omega^a \wedge \omega^b + \sqrt{2}\, B^{nab} \omega_a \wedge \omega_b + \\ & + \left(\sqrt{2}\, B^{na}{}_b - \sqrt{2}\, B_{nb}{}^a - 2i\, \sigma^a_b\right) \omega^b \wedge \omega_a + \\ & + \left(\tilde{B}_{nbn} + B_{nb}{}^n + i\, \sigma_{nb}\right) \omega \wedge \omega^b + \left(\tilde{B}^{nbn} + B^{nb}{}_n - i\, \sigma^b_n\right) \omega \wedge \omega_b, \end{aligned} \tag{4c}$$

где

$$B^{ab}{}_c = -\frac{i}{2} J^a_{\hat{b},c}, \quad B_{ab}{}^c = \frac{i}{2} J^{\hat{a}}_{b,\hat{c}},$$

а через $\{J^j_{k,m}\}$ обозначены компоненты ∇J; системы функций $\{B^{abc}\}$, $\{B_{abc}\}$ и $\{B^{ab}{}_c\}$, $\{B_{ab}{}^c\}$ служат компонентами структурных и виртуальных тензоров Кириченко, соответственно, почти эрмитовой структуры на многообразии M^{2n} (см. [2, 47, 66]). Также отметим, что

$$\alpha, \beta, \gamma = 1, \dots, n, \quad a, b, c = 1, \dots, n, \quad \hat{a} = a + n;$$

σ — вторая квадратичная форма погружения гиперповерхности N^{2n-1} в почти эрмитово многообразие M^{2n} (см. [39]), $\{\omega^\alpha\}$, $\{\omega_\alpha\}$ — компоненты форм смещения ($\omega^n = \omega$), $\{\omega^k_j\}$ — компоненты форм римановой связности, $\omega_\alpha = \omega^{\hat{\alpha}}$.

Поскольку для приближенно кэлерова многообразия структурные тензоры Кириченко обращаются в нуль (см. [3, 18, 54, 60]), уравнения (4) примут в данном случае такой вид:

$$\begin{aligned} d\omega^\alpha &= \omega^\alpha_\beta \wedge \omega^\beta + B^{\alpha\beta\gamma}\,\omega_\beta \wedge \omega_\gamma + \\ &+ i\sigma^\alpha_\beta\,\omega^\beta \wedge \omega + \left(-\sqrt{2}\,\tilde{B}^{n\alpha\beta} - \frac{1}{\sqrt{2}}\tilde{B}^{\alpha\beta n} + i\sigma^{\alpha\beta}\right)\omega_\beta \wedge \omega, \end{aligned} \tag{5a}$$

$$\begin{aligned} d\omega_\alpha &= -\omega^\beta_\alpha \wedge \omega_\beta + B_{\alpha\beta\gamma}\omega^\beta \wedge \omega^\gamma - \\ &- i\sigma^\beta_\alpha\,\omega_\beta \wedge \omega + \left(-\sqrt{2}\,\tilde{B}_{n\alpha\beta} - \frac{1}{\sqrt{2}}\tilde{B}_{\alpha\beta n} - i\sigma_{a\beta}\right)\omega^\beta \wedge \omega, \end{aligned} \tag{5b}$$

$$\begin{aligned} d\omega &= \sqrt{2}\,B_{n\alpha\beta}\,\omega^\alpha \wedge \omega^\beta + \sqrt{2}\,B^{n\alpha\beta}\,\omega_\alpha \wedge \omega_\beta - \\ &- 2i\,\sigma^\alpha_\beta\,\omega^\beta \wedge \omega_\alpha + \left(\tilde{B}_{n\beta n} + i\,\sigma_{n\beta}\right)\omega \wedge \omega^\beta + \left(\tilde{B}^{n\beta n} - i\,\sigma^\beta_n\right)\omega \wedge \omega_\beta. \end{aligned} \tag{5c}$$

(5d)

Если типовое число почти контактной метрической гиперповерхности приближенно кэлерова многообразия равно двум, то простейшая матрица второй квадратичной формы имеет следующий вид:

$$(\sigma_{ps}) = \left(\begin{array}{c|c|c} & 0 & \\ (\sigma_{\alpha\beta}) & \vdots & 0 \\ & 0 & \\ \hline 0 \cdots 0 & 0 & 0 \cdots 0 \\ \hline & 0 & \\ 0 & \vdots & (\sigma_{\bar{\alpha}\hat{\beta}}) \\ & 0 & \end{array}\right), \quad p, s = 1, 2, 3, 4, 5, \tag{6}$$

причем

$$\operatorname{rank}(\sigma_{\alpha\beta}) = \operatorname{rank}(\sigma_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}) = 1.$$

Следовательно, из (5) и (6) мы можем получить структурные уравнения Картана почти контактной метрической структуры на ориентируемой 2-гиперповерхности приближенно кэлеровой шестимерной сферы.

Теорема 3. *Структурные уравнения Картана почти контактной метрической структуры на ориентируемой* 2*-гиперповерхности приближенно кэлеровой шестимерной сферы имеют следующий вид*:

$$\begin{aligned} d\omega^\alpha &= \omega^\alpha_\beta \wedge \omega^\beta + B^{\alpha\beta\gamma}\omega_\beta \wedge \omega_\gamma + \left(-\sqrt{2}\tilde{B}^{n\alpha\beta} - \frac{1}{\sqrt{2}}\tilde{B}^{\alpha\beta n} + i\sigma^{\alpha\beta}\right)\omega_\beta \wedge \omega; \\ d\omega_\alpha &= -\omega^\beta_\alpha \wedge \omega_\beta + B_{\alpha\beta\gamma}\omega^\beta \wedge \omega^\gamma + \left(-\sqrt{2}\tilde{B}_{n\alpha\beta} - \frac{1}{\sqrt{2}}\tilde{B}_{\alpha\beta n} - i\sigma_{\alpha\beta}\right)\omega^\beta \wedge \omega; \\ d\omega &= 0. \end{aligned} \tag{7}$$

В работе [34] В. Ф. Кириченко и И. В. Ускорев ввели в рассмотрение новый тип почти контактных метрических структур — структуру косимплектического типа. Она определяется как почти контактная метрическая структура с замкнутой контактной формой. В. Ф. Кириченко и И. В. Ускорев показали, что условие $d\omega = 0$ является необходимым и достаточным для того, чтобы почти контактная метрическая структура была структурой косимплектического типа. В [34] также доказано, что структура косимплектического типа инвариантна относительно канонических конформных преобразований. Напомним, что конформным преобразованием почти контактной метрической структуры $\{\Phi, \xi, \eta, g\}$ на многообразии называют переход к почти контактной метрической структуре $\{\tilde{\Phi}, \tilde{\xi}, \tilde{\eta}, \tilde{g}\}$, где $\tilde{\Phi} = \Phi$, $\tilde{\xi} = e^f \xi$, $\tilde{\eta} = e^{-f}\eta$ и $\tilde{g} = e^{-2f}g$; через f обозначена некоторая гладкая функция на многообразии N (см. [30, 116]).

Очевидно, что простейшим примером почти контактной метрической структуры косимплектического типа является косимплектическая структура, картановы уравнения которой таковы (см. [5, 6, 8, 30, 53]):

$$\begin{aligned} d\omega^\alpha &= \omega^\alpha_\beta \wedge \omega^\beta; \\ d\omega_\alpha &= -\omega^\beta_\alpha \wedge \omega_\beta; \\ d\omega &= 0. \end{aligned}$$

Другим важнейшим примером почти контактной метрической структуры косимплектического типа является структура Кенмоцу, картановы уравнения которой имеют вид (см. [12,13,30,64,68])

$$\begin{aligned} d\omega^\alpha &= \omega^\alpha_\beta \wedge \omega^\beta + \omega \wedge \omega^\alpha; \\ d\omega^\alpha &= -\omega^\beta_\alpha \wedge \omega_\beta + \omega \wedge \omega_\alpha; \\ d\omega &= 0. \end{aligned}$$

Легко заметить, что структурные уравнения (7) в точности соответствуют именно почти контактной метрической структуре косимплектического типа. При этом эта структура не является ни косимплектической структурой, ни структурой Кенмоцу. Справедливо следующее утверждение.

Теорема 4. *Гиперповерхности с типовым числом 2 приближенно кэлеровой шестимерной сферы допускают отличную от косимплектической и кенмоцевой почти контактную метрическую структуру косимплектического типа.*

Если же типовое число гиперповерхности приближенно кэлерова многообразия равно единице, то матрица второй квадратичной формы имеет следующий вид (см. [15, 58]):

$$(\sigma_{ps}) = \left(\begin{array}{c|c|c} 0 & \begin{matrix} 0 \\ \dots \\ 0 \end{matrix} & 0 \\ \hline 0\dots0 & \sigma_{nn} & 0\dots0 \\ \hline 0 & \begin{matrix} 0 \\ \dots \\ 0 \end{matrix} & 0 \end{array}\right), \quad p, s = 1, \dots, 2n-1.$$

Для приближенно кэлеровой гиперповерхности шестимерной сферы мы получим следующую матрицу:

$$(\sigma_{ps}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad p, s = 1, 2, 3, 4, 5.$$

Очевидно, что $\sigma_{33} \neq 0$, иначе типовое число окажется равным нулю. Принимая во внимание, что все элементы матрицы (σ_{ps}), кроме σ_{33}, обращаются в нуль, получаем следующие структурные уравнения для почти контактной метрической структуры на гиперповерхности приближенно кэлеровой шестимерной сферы:

$$\begin{aligned} d\omega^\alpha &= \omega^\alpha_\beta \wedge \omega^\beta + B^{\alpha\beta\gamma}\omega_\beta \wedge \omega_\gamma + \left(-\sqrt{2}\tilde{B}^{n\alpha\beta} - \frac{1}{\sqrt{2}}\tilde{B}^{\alpha\beta n}\right)\omega_\beta \wedge \omega; \\ d\omega_\alpha &= -\omega^\beta_\alpha \wedge \omega_\beta + B_{\alpha\beta\gamma}\omega^\beta \wedge \omega^\gamma + \left(-\sqrt{2}\tilde{B}_{n\alpha\beta} - \frac{1}{\sqrt{2}}\tilde{B}_{\alpha\beta n}\right)\omega^\beta \wedge \omega; \\ d\omega &= \sqrt{2}B_{n\alpha\beta}\omega^\alpha \wedge \omega^\beta + \sqrt{2}B^{n\alpha\beta}\omega_\alpha \wedge \omega_\beta + \left(\tilde{B}_{n\beta n}\right)\omega \wedge \omega^\beta + \left(\tilde{B}^{n\beta n}\right)\omega \wedge \omega_\beta. \end{aligned} \tag{8}$$

Эти уравнения в точности соответствуют структурным уравнениям слабо косимплектической структуры (см. [15, 38, 58]):

$$\begin{aligned} d\omega^\alpha &= \omega^\alpha_\beta \wedge \omega^\beta + H^{\alpha\beta\gamma}\omega_\beta \wedge \omega_\gamma + H^{\alpha\beta}\omega_\beta \wedge \omega; \\ d\omega_\alpha &= -\omega^\beta_\alpha \wedge \omega_\beta + H_{\alpha\beta\gamma}\omega^\beta \wedge \omega^\gamma + H_{\alpha\beta}\omega^\beta \wedge \omega; \\ d\omega &= -\frac{2}{3}G_{\alpha\beta}\omega^\alpha \wedge \omega^\beta - \frac{2}{3}G^{\alpha\beta}\omega_\alpha \wedge \omega_\beta. \end{aligned} \tag{9}$$

Теорема 5. *Если типовое число гиперповерхности приближенно кэлеровой шестимерной сферы равно единице, то почти контактная метрическая структура, индуцированная на такой гиперповерхности, является слабо косимплектической.*

Обратим внимание на то, что компонента σ_{33} не присутствует ни явно, ни косвенно в структурных уравнениях (8). Это означает, что если эта компонента обращается в нуль (как сказано выше, в этом случае гиперповерхность будет вполне геодезической, т.е. ее типовое число будет равно нулю), то свойства почти контактной метрической структуры останутся теми же.

Теорема 6. *Почти контактная метрическая структура, индуцированная на вполне геодезической гиперповерхности приближенно кэлеровой шестимерной сферы, является слабо косимплектической.*

Замечание. *Как видно из уравнений* (9)*, слабо косимплектическая структура не является структурой косимплектического типа.*

В [58] было доказано, что типовое число слабо косимплектической гиперповерхности приближенно кэлерова многообразия не превосходит единицы. С учетом двух предыдущих теорем получаем следующее утверждение.

Теорема 7. *Типовое число ориентируемой гиперповерхности приближенно кэлеровой шестимерной сферы не превосходит единицы тогда и только тогда, когда почти контактная метрическая структура на этой гиперповерхности является слабо косимплектической.*

Как уже упоминалось выше, класс кэлеровых многообразий содержится в любом из классов Грея—Херveллы почти эрмитовых многообразий. Поэтому из теорем данного параграфа можно легко вывести следствия о гиперповерхностях шестимерных кэлеровых многообразий. Однако геометрия почти контактных метрических гиперповерхностей шестимерных кэлеровых подмногообразий алгебры октав изучена к настоящему времени довольно обстоятельно (см. [8, 14, 16, 20, 43, 45, 49, 57, 67, 70]). Кроме того, имеется много работ о шестимерных специальных эрмитовых и эрмитовых подмногообразиях алгебры Кэли (см. [4, 7, 10, 11, 21, 46, 51, 52, 55, 59, 61–63, 68, 69, 71, 72]), а также о шестимерных подмногообразиях алгебры октав других классов Грея—Херveллы (см. [9, 17, 19, 56, 60]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Арнольд В. И.* Математические методы классической механики. — М.: Наука, 1989.
2. *Банару М. Б.* Эрмитова геометрия шестимерных подмногообразий алгебры Кэли/ Дисс.. . . уч. ст. канд. физ.-мат. наук. — М.: МПГУ им. В. И. Ленина, 1993.
3. *Банару М. Б.* Классы Грея—Херveллы почти эрмитовых структур на шестимерных подмногообразиях алгебры Кэли// Науч. тр. МПГУ им. В. И. Ленина. — М.: Прометей, 1994. — С. 36–38.

4. *Банару М. Б.* О шестимерных подмногообразиях алгебры Кэли// Дифференциальная геометрия многообразий фигур. — Калининград, 2000. — *31*. — С. 6–8.
5. *Банару М. Б.* Две теоремы о косимплектических гиперповерхностях шестимерных эрмитовых подмногообразий алгебры Кэли// Изв. вузов. Сер. мат. — 2002. — № 1 (476). — С. 9–12.
6. *Банару М. Б.* Об эрмитовых многообразиях, удовлетворяющих аксиоме U-косимплектических поверхностей// Фундам. прикл. мат. — 2002. — *8*, № 3. — С. 934–937.
7. *Банару М. Б.* Эрмитова геометрия шестимерных подмногообразий алгебры Кэли// Мат. сб. — 2002. — *193*, № 5. — С. 3–16.
8. *Банару М. Б.* О косимплектических гиперповерхностях шестимерных кэлеровых подмногообразий алгебры Кэли// Изв. вузов. Сер. мат. — 2003. — № 7 (494). — С. 59–63.
9. *Банару М. Б.* О шестимерных G_2-подмногообразиях алгебры Кэли// Мат. заметки. — 2003. — *74*, № 3. — С. 323–328.
10. *Банару М. Б.* О сасакиевых гиперповерхностях шестимерных эрмитовых подмногообразий алгебры Кэли// Мат. сб. — 2003. — *194*, № 8. — С. 13–24.
11. *Банару М. Б.* О типовом числе косимплектических гиперповерхностей шестимерных эрмитовых подмногообразий алгебры Кэли// Сиб. мат. ж. — 2003. — *44*, № 5. — С. 981–991.
12. *Банару М. Б.* О гиперповерхностях Кенмоцу шестимерных эрмитовых подмногообразий алгебры Кэли// Дифференциальная геометрия многообразий фигур. — Калининград. 2003. — *34*. — С. 12–21.
13. *Банару М. Б.* Аксиома гиперповерхностей Кенмоцу для шестимерных эрмитовых подмногообразий алгебры Кэли// Сиб. мат. ж. — 2014. — *55*, № 2. — С. 261–266.
14. *Банару М. Б.* О почти контактных метрических 1-гиперповерхностях кэлеровых многообразий// Сиб. мат. ж. — 2014. — *55*, № 4. — С. 719–723.
15. *Банару М. Б.* Почти контактные метрические гиперповерхности с типовым числом 1 или 0 в приближенно кэлеровых многообразиях// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. Мех. — 2014. — *3*. — С. 60–62.
16. *Банару М. Б.* О почти контактных метрических гиперповерхностях с типовым числом 1 в шестимерных кэлеровых подмногообразиях алгебры Кэли// Изв. вузов. Сер. мат. — 2014. — № 10. — С. 13–18.
17. *Банару М. Б.* О почти контактных метрических гиперповерхностях NK-многообразий// Геометрический анализ и его приложения/ Мат. II Междунар. конф., Волгоград, 26–30 мая 2014. — Волгоград: Изд-во ВолГУ, 2014. — С. 14–17.
18. *Банару М. Б.* Геометрия шестимерных почти эрмитовых подмногообразий алгебры октав// Итоги науки и техн. Совр. мат. прилож. Тематич. обзоры. — М.: ВИНИТИ, 2014. — *126*. — С. 10–61.
19. *Банару М. Б.* W_4-многообразия и аксиома косимплектических гиперповерхностей// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. Мех. — 2015. — *5*. — С. 34–37.
20. *Банару М. Б.* О почти контактных метрических 2-гиперповерхностях в шестимерных кэлеровых подмногообразиях алгебры Кэли// Междунар. конф. «Дни геометрии в Новосибирске–2015»/ Тез. докл. — Новосибирск: Ин-т мат. им. С. Л. Соболева СО РАН, 2015. — С. 9–10.
21. *Банару М. Б.* Аксиома сасакиевых гиперповерхностей и шестимерные эрмитовы подмногообразия алгебры октав// Мат. заметки. — 2016. — *99*, № 1. — С. 140–144.
22. *Банару М. Б., Банару Г. А.* О почти контактных метрических гиперповерхностях шестимерной сферы// Сист. компьют. мат. прилож. — 2015. — *16*. — С. 126–127.
23. *Банару М. Б., Кириченко В. Ф.* Эрмитова геометрия шестимерных подмногообразий алгебры Кэли// Усп. мат. наук. — 1994. — *49*, № 1. — С. 205–206.
24. *Даурцева Н. А.* О существовании структур класса G_2 на строго приближенно кэлеровом шестимерном многообразии// Вестн. Томск. ун-та. Сер. мат. мех. — 2014. — № 6 (32). — С. 19–24.
25. *Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т.* Современная геометрия: методы и приложения. — М: Наука, 1986.
26. *Кириченко В. Ф.* Почти кэлеровы структуры, индуцированные 3-векторными произведениями на шестимерных подмногообразиях алгебры Кэли// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. Мех. — 1973. — *3*. — С. 70–75.
27. *Кириченко В. Ф.* Классификация кэлеровых структур, индуцированных 3-векторными произведениями на шестимерных подмногообразиях алгебры Кэли// Изв. вузов. Сер. мат. — 1980. — № 8. — С. 32–38.
28. *Кириченко В. Ф.* Устойчивость почти эрмитовых структур, индуцированных 3-векторными произведениями на шестимерных подмногообразиях алгебры Кэли// Укр. геом. сб. — Харьков, 1982. — *25*. — С. 60–68.
29. *Кириченко В. Ф.* Методы обобщенной эрмитовой геометрии в теории почти контактных многообразий// Итоги науки и техн. Пробл. геом. — М.: ВИНИТИ, 1986. — *18*. — С. 25–71.

30. *Кириченко В. Ф.* Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях. — Одесса: Печатный дом, 2013.
31. *Кириченко В. Ф., Банару М. Б.* Почти контактные метрические структуры на гиперповерхностях почти эрмитовых многообразий// Итоги науки и техн. Совр. мат. прилож. Тематич. обзоры. — М.: ВИНИТИ, 2014. — *127*. — С. 5–40.
32. *Кириченко В. Ф., Власова Л. И.* Концикулярная геометрия приближенно кэлеровых многообразий// Мат. сб. — 2002. — *193*, № 5. — С. 51–76.
33. *Кириченко В. Ф., Рустанов А. Р., Шихаб А.* Геометрия тензора конгармонической кривизны почти эрмитовых многообразий// Мат. заметки. — 2011. — *90*, № 1. — С. 87–103.
34. *Кириченко В. Ф., Ускорев И. В.* Инварианты конформного преобразования почти контактных метрических структур// Мат. заметки. — 2008. — *84*, № 6. — С. 838–850.
35. *Кириченко В. Ф., Шихаб А.* О геометрии тензора конгармонической кривизны приближенно кэлеровых многообразий// Фундам. прикл. мат. — 2010. — *16*, № 2. — С. 43–54.
36. *Кобаяси Ш., Номидзу К.* Основы дифференциальной геометрии. Т. 1. — М.: Наука, 1981.
37. *Кобаяси Ш., Номидзу К.* Основы дифференциальной геометрии. Т. 2. — М.: Наука, 1981.
38. *Кусова Е. В.* О геометрии слабо косимплектических структур/ Дисс.... уч. ст. канд. физ.-мат. наук. — М.: МПГУ им. В. И. Ленина, 2013.
39. *Мищенко А. С., Фоменко А. Т.* Курс дифференциальной геометрии и топологии. — М.: Изд-во МГУ, 1980.
40. *Рашевский П. К.* Риманова геометрия и тензорный анализ. — М: Наука, 1967.
41. *Степанова Л. В.* Квазисасакиева структура на гиперповерхностях эрмитовых многообразий// Науч. тр. МПГУ им. В. И. Ленина, 1995. — С. 187–191.
42. *Степанова Л. В.* Квазисасакиева структура на гиперповерхностях эрмитовых многообразий/ Дисс.... уч. ст. канд. физ.-мат. наук. — М.: МПГУ им. В. И. Ленина, 1995.
43. *Степанова Л. В., Банару Г. А., Банару М. Б.* О квазисасакиевых гиперповерхностях кэлеровых многообразий// Изв. вузов. Сер. мат. — 2016. — № 1. — С. 86–89.
44. *Харт Н.* Геометрическое квантование в действии. — М.: Мир. 1985.
45. *Abu-Saleem A., Banaru G. A.* On some contact metric structures on hypersurfaces in a Kählerian manifold// Acta Univ. Apulensis. — 2012. — *31*. — С. 179–189.
46. *Abu-Saleem A., Banaru M. B.* Two theorems on Kenmotsu hypersurfaces in a W_3-manifold// Stud. Univ. Babeş–Bolyai. Math. — 2005. — *51*, № 3. — С. 3–11.
47. *Abu-Saleem A., Banaru M. B.* Some applications of Kirichenko tensors// Anal. Univ. Oradea. Fasc. Mat. — 2010. — *17*, № 2. — С. 201–208.
48. *Abu-Saleem A., Banaru M. B.* On almost contact metric hypersurfaces of nearly Kählerian 6-sphere// Malaysian J. Math. Sci. — 2014. — *8*, № 1. — С. 35–46.
49. *Abu-Saleem A., Shihab A., Banaru M. B.* On six-dimensional Kählerian and nearly-Kählerian submanifolds of Cayley algebra// Anal. Univ. Oradea. Fasc. Mat. — 2014. — *21*, № 1. — С. 29–39.
50. *Alekseevsky D. V., Kruglikov B. S., Winther H.* Homogeneous almost complex structures in dimension 6 with semi-simple isotropy // Ann. Glob. Anal. Geom. — 2014. — *46*. — С. 361–387.
51. *Banaru M. B.* Six theorems on six-dimensional Hermitian submanifolds of Cayley algebra// Изв. АН Республики Молдова. Сер. Мат. — 2000. — № 3 (34). — С. 3–10.
52. *Banaru M. B.* On six-dimensional Hermitian submanifolds of Cayley algebra satisfying the g-cosymplectic hypersurfaces axiom// Ann. Sofia Univ. St. K. Ohridski. — 2000. — *94*. — С. 91–96.
53. *Banaru M. B.* Two theorems on cosymplectic hypersurfaces of six-dimensional Hermitian submanifolds of Cayley algebra// J. Harbin Inst. Tech. — 2001. — *8*, № 1. — С. 38–40.
54. *Banaru M. B.* A new characterization of the Gray–Hervella classes of almost Hermitian manifolds// Proc. 8th Int. Conf. on Differential Geometry and Its Aplications. — Opava, Czech Republic, 2001. — С. 4.
55. *Banaru M. B.* Some theorems on cosymplectic hypersurfaces of six-dimensional Hermitian submanifolds of Cayley algebras// Mat. Vesnik. — 2001. — *53*, № 3-4. — С. 103–110.
56. *Banaru M. B.* A note on six-dimensional G_2-submanifolds of Cayley algebra// An. Ştiinţ. Univ. Al. I. Cuza Iaşi, Ser. Nouă, Mat. — 2001. — *47*, № 2. — С. 389–396.
57. *Banaru M. B.* On spectra of some tensors of six-dimensional Kählerian submanifolds of the Cayley algebra// Stud. Univ. Babeş–Bolyai. Math. — 2002. — *47*, № 1. — С. 11–17.
58. *Banaru M. B.* On nearly-cosymplectic hypersurfaces in nearly-Kählerian manifolds// Stud. Univ. Babeş–Bolyai. Math. — 2002. — *47*, № 3. — С. 3–11.
59. *Banaru M. B.* On Kenmotsu hypersurfaces in a six-dimensional Hermitian submanifolds of Cayley algebra// Proc. Int. Conf. “Contemporary Geometry and Related Topics”. — Belgrade, 2002. — С. 5.

60. *Banaru M. B.* A note on six-dimensional G_1-submanifolds of the octave algebra// Taiwan. J. Math. — 2002. — *6*, № 3. — С. 383–388.
61. *Banaru M. B.* Six-dimensional Hermitian submanifolds of Cayley algebra and u-Sasakian hypersurfaces axiom// Изв. Акад. наук Республики Молдова. Сер. мат. — 2002. — № 2 (39). — С. 71–76.
62. *Banaru M. B.* On totally umbilical cosymplectic hypersurfaces of six-dimensional Hermitian submanifolds of Cayley algebra// Acta Univ. Palacki Olomuc. Math. — 2002. — *41*. — С. 7–12.
63. *Banaru M. B.* On the type number of six-dimensional planar Hermitian submanifolds of Cayley algebra// Kyungpook Math. J. — 2003. — *43*, № 1. — С. 27–35.
64. *Banaru M. B.* On Kenmotsu hypersurfaces in a six-dimensional Hermitian submanifold of Cayley algebra// Proc. Int. Conf. "Contemporary Geometry and Related Topics", Belgrade, Yugoslavia, May 15–21, 2002. — Singapore: World Scientific, 2004. — С. 33–40.
65. *Banaru M. B.* On the Gray–Hervella classes of AH-structures on six-dimensional submanifolds of Cayley algebra// Ann. Sofia Univ. St. K. Ohridski. — 2004. — *95*. — С. 125–131.
66. *Banaru M. B.* On Kirichenko tensors of nearly-Kählerian manifolds// J. Sichuan Univ. Sci. Eng. — 2012. — *25*, № 4. — С. 1–5.
67. *Banaru M. B.* On some almost contact metric hypersurfaces of nearly Kählerian manifolds// Proc. 20th Conf. on Applied and Industr. Mathematics Dedicated to Academician M. Ciobanu. — Chişinău, 2012. — С. 16–17.
68. *Banaru M. B.* The U-Kenmotsu hypersurfaces axiom and six-dimensional Hermitian submanifolds of Cayley algebra// J. Sichuan Univ. Sci. Eng. — 2013. — *26*, № 3. — С. 1–5.
69. *Banaru M. B.* Special Hermitian manifolds and the 1-cosymplectic hypersurfaces axiom// Bull. Austr. Math. Soc. — 2014. — *90*, № 3. — С. 504–509.
70. *Banaru M. B.* On almost contact metric 2-hypersurfaces in Kählerian manifolds// Bull. Transilvania Univ. of Braşov. Ser. III. Math. Inform. Phys. — 2016. — *9 (58)*, № 1. — С. 1–10.
71. *Banaru M. B., Banaru G. A.* A note on six-dimensional planar Hermitian submanifolds of Cayley algebra// Изв. АН Республики Молдова. Сер. мат. — 2014. — № 1 (74). — С. 23–32.
72. *Banaru M. B., Banaru G. A.* 1-Cosymplectic hypersurfaces axiom and six-dimensional planar Hermitian submanifolds of the octonian// SUT J. Math. — 2015. — *51*, № 1. — С. 1–9.
73. *Banaru M. B., Banaru G. A.* A note on almost contact metric hypersurfaces of nearly Kählerian 6-sphere// Bull. Transilvania Univ. of Braşov. Ser. III. Math. Inform. Phys. — 2015. — *8 (57)*, № 2. — С. 21–28.
74. *Belgun F., Moroianu A.* Nearly Kähler 6-manifolds with reduced holonomy// Ann. Global Anal. Geom. — 2001. — *19*. — С. 307–319.
75. *Blair D. E.* Contact manifolds in Riemannian geometry // Lect. Notes Math. — 1976. — *509*. — С. 1–145.
76. *Blair D. E.* Riemannian geometry of contact and symplectic manifolds/ Progr. Math. — Boston–Basel–Berlin: Birkhäuser, 2002.
77. *Bolton J., Dillen F., Dioos B., Vrancken L.* Almost complex surfaces in the nearly Kähler $S^3 \times S^3$// Tôhoku Math. J. — 2015. — *67*. — С. 1–17.
78. *Brown R., Gray A.* Vector cross products// Commum. Math. Helv. — 1967. — *42*. — С. 222–236.
79. *Calabi E.* Construction and properties of some 6-dimensional almost complex manifolds// Trans. Am. Math. Soc. — 1958. — *87*, № 2. — С. 407–438.
80. *Cho J. T., Sekigawa K.* Six-dimensional quasi-Kählerian manifolds of constant sectional curvature// Tsukuba J. Math. — 1998. — *22*, № 3. — С. 611–627.
81. *Deszcz R., Dillen F., Verstraelen L., Vrancken L.* Quasi-Einstein totally real submanifolds of nearly Kähler 6-sphere// Tôhoku Math. J. — 1999. — *51*. — С. 461–478.
82. *Djoric M., Vrancken L.* Three-dimensional CR-submanifolds in the nearly Kähler 6-sphere with one-dimensional nullity// Int. J. Math. — 2009. — *20*, № 2. — С. 189–208.
83. *Ejiri N.* Totally real submanifolds in a 6-sphere// Proc. Am. Math. Soc. — 1981. — *83*. — С. 759–763.
84. *Endo H.* On the curvature tensor of nearly cosymplectic manifolds of constant Phi-sectional curvature// An. Ştiinţ. Univ. Al. I. Cuza Iaşi, Ser. Nouă, Mat. — 2005. — *51*, № 2. — С. 439–454.
85. *Endo H.* Remarks on nearly cosymplectic manifolds of constant Phi-sectional curvature with a submersion of geodesic fibers// Tensor, N.S. — 2005. — *66*. — С. 26–39.
86. *Endo H.* On nearly cosymplectic manifolds of constant Phi-sectional curvature// Tensor, N.S. — 2006. — *67*. — С. 323–335.
87. *Endo H.* Some remarks of nearly cosymplectic manifolds of constant Phi-sectional curvature// Tensor, N.S. — 2007. — *68*. — С. 204–221.
88. *Funabashi S., Pak J. S.* Tubular hypersurfaces of the nearly Kähler 6-sphere// Saitama Math. J. — 2001. — *19*. — С. 13–36.

89. *Gheorghiev G., Oproiu V.* Varietăţi diferentiabile finit şi infinit dimensionale. Vols. I, II. — Bucureşti: Academia RSR, 1976, 1979.
90. *Gray A.* Some examples of almost Hermitian manifolds// Ill. J. Math. — 1966. — *10*, № 2. — С. 353–366.
91. *Gray A.* Six-dimensional almost complex manifolds defined by means of three-fold vector cross products// Tôhoku Math. J. — 1969. — *21*, № 4. — С. 614–620.
92. *Gray A.* Vector cross products on manifolds// Trans. Am. Math. Soc. — 1969. — *141*. — С. 465–504.
93. *Gray A.* Almost complex submanifolds of the six sphere// Proc. Am. Math. Soc. — 1969. — *20*. — С. 277–280.
94. *Gray A.* Nearly Kähler manifolds// J. Differ. Geom. — 1970. — *4*. — С. 283–309.
95. *Gray A.* The structure of nearly Kähler manifolds// Math. Ann. — 1976. — *223*. — С. 223–248.
96. *Gray A., Hervella L. M.* The sixteen classes of almost Hermitian manifolds and their linear invariants// Ann. Mat. Pura Appl. — 1980. — *123*, № 4. — С. 35–58.
97. *Haizhong Li.* The Ricci curvature of totally real 3-dimensional submanifolds of the nearly Kähler 6-sphere// Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin. — 1996. — *3*. — С. 193–199.
98. *Haizhong Li, Gouxin Wei.* Classification of Lagrangian Willmore submanifolds of the nearly Kähler 6-sphere $S^6(1)$ with constant scalar curvature// Glasgow Math. J. — 2006. — *48*. — С. 53–64.
99. *Hashimoto H.* Characteristic classes of oriented six-dimensional submanifolds in the octonions// Kodai Math. J. — 1993. — *16*. — С. 65–73.
100. *Hashimoto H.* Oriented six-dimensional submanifolds in the octonions// Int. J. Math. Math. Sci. — 1995. — *18*. — С. 111–120.
101. *Hashimoto H., Koda T., Mashimo K., Sekigawa K.* Extrinsic homogeneous Hermitian six-dimensional submanifolds in the octonions// Kodai Math. J. — 2007. — *30*. — С. 297–321.
102. *Hu Z., Zhang Y.* Rigidity of the almost complex surfaces in the nearly Kähler $S^3 \times S^3$// J. Geom. Phys. — 2016. — *100*. — С. 80–91.
103. *Ianus S.* Geometrie diferentială cu aplicaţii în teoria relativităţii. — Bucureşti: Editura Acad. Române, 1983.
104. *Ishii Y.* On conharmonic transformations// Tensor, N.S. — 1957. — *7*. — С. 73–80.
105. *Jost J.* Riemannian geometry and geometric analysis. — Berlin–Heidelberg–New-York: Springer-Verlag, 2003.
106. *Kholodenko A. L.* Applications of contact geometry and topology in physics. — New Jersey–London–Singapore: World Scientific, 2013.
107. *Kim H. S., Takagi R.* The type number of real hypersurfaces in $P_n(C)$// Tsukuba J. Math. — 1996. — *20*. — С. 349–356.
108. *Kurihara H.* On real hypersurfaces in a complex space form// Math. J. Okayama Univ. — 1998. — *40*. — С. 177–186.
109. *Kurihara H.* The type number on real hypersurfaces in a quaternionic space form// Tsukuba J. Math. — 2000. — *24*. — С. 127–132.
110. *Kurihara H., Takagi R.* A note on the type number of real hypersurfaces in $P_n(C)$// Tsukuba J. Math. — 1998. — *22*. — С. 793–802.
111. *Matsumoto M.* On six-dimensional almost Tachibana spaces// Tensor, N.S. — 1972. — *23*. — С. 250–252.
112. *Moroianu A., Semmelmann U.* Infinitesimal Einstein deformations of nearly Kähler metrics// Trans. Am. Math. Soc. — 2011. — *363*, № 6. — С. 3057–3069.
113. *Nagy P.-A.* On nearly-Kähler geometry// Ann. Global Anal. Geom. — 2002. — *22*. — С. 167–178.
114. *Nivas R., Agnihotri A.* On semi-symmetric non-metric connections on a nearly Kähler manifold// Tensor, N.S. — 2010. — *72*. — С. 279–284.
115. *Omachi E.* On nearly Kähler manifolds with almost analytic Ricci operator// Tensor, N.S. — 2009. — *71*. — С. 87–90.
116. *Pitiş G.* Geometry of Kenmotsu manifolds. — Braşov: Publ. House Transilvania Univ., 2007.
117. *Sekigawa K.* Almost complex submanifolds of a six-dimensional sphere// Kodai Math. J. — 1983. — *6*. — С. 174–185.
118. *Sharma R., Deshmukh S.* On Lagrangian submanifolds of the nearly Kähler 6-sphere// Contemp. Math. — 2016. — *674*. — С. 153–160.
119. *Shern S. S., Do Carmo M. P., Kobayashi S.* Minimal submanifolds of a sphere with second fundamental form of constant length// В кн.: Functional Analysis and Related Fields. — Berlin: Springer-Verlag, 1970. — С. 59–75.
120. *Takagi R.* A class of hypersurfaces with constant principal curvatures in a sphere// J. Differ. Geom. — 1976. — *11*. — С. 225–233.

121. *Tricerri F., Vanhecke L.* Curvature tensors on almost Hermitian manifolds// Trans. Am. Math. Soc. — 1981. — *267*. — С. 365–398.
122. *Vanhecke L.* The Bochner curvature tensor on almost Hermitian manifolds// Geom. Dedicata. — 1977. — *6*. — С. 389–397.
123. *Vezzoni L.* On the canonical Hermitian connection in nearly Kahler manifolds// Kodai Math. J. — 2009. — *32*. — С. 420–431.
124. *Vranchen L.* Special Lagrangian submanifolds of the nearly Kähler 6-sphere// Glasgow Math. J. — 2003. — *45*. — С. 415–426.
125. *Yano K.* Differential geometry on complex and almost complex spaces. — Oxford: Pergamon Press, 1965.
126. *Yano K., Ishihara S.* Almost contact structures induced on hypersurfaces in complex and almost complex spaces// Kodai Math. Sem. Rep. — 1965. — *17*, № 3. — С. 222–249.
127. *Yano K., Kon M.* Structures on manifolds. — Singapore: World Scientific, 1984.

М. Б. Банару
Смоленский государственный университет
E-mail: `mihail.banaru@yahoo.com`

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 146 (2018). С. 17–47

УДК 514.76

О ПОЧТИ КОМПЛЕКСНЫХ СТРУКТУРАХ НА ШЕСТИМЕРНЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЯХ СФЕР

© 2018 г. Н. А. ДАУРЦЕВА, Н. К. СМОЛЕНЦЕВ

Аннотация. В статье рассматриваются почти комплексные структуры на сфере S^6 и на произведениях сфер $S^3 \times S^3$, $S^1 \times S^5$ и $S^2 \times S^4$. Показано, что почти комплексные структуры Кэли, которые естественно возникают при их вложении в алгебру октав Кэли $\mathbb{C}\mathrm{a}$, все являются неинтегрируемыми. Получено выражение фундаментальной формы ω для каждого случая через калибровки пространства $\mathbb{C}\mathrm{a}$, найдено выражение тензора Нейенхейса, доказана невырожденность формы $d\omega$. Показано, что через каждую точку слоя твисторного расслоения над S^6 проходит однопараметрическое семейство структур Кэли. Описано множество $U(2) \times U(2)$ — инвариантных эрмитовых метрик на $S^3 \times S^3$, найдены оценки секционной кривизны. Рассмотрено пространство левоинвариантных почти комплексных структур на $S^3 \times S^3 = SU(2) \times SU(2)$, установлены свойства левоинвариантных структур, дающих максимальное значение нормы тензора Нейенхейса на множестве левоинвариантных, ортогональных почти комплексных структур.

Ключевые слова: произведение сфер, комплексная структура, почти комплексная структура Кэли, алгебра октав.

AMS Subject Classification: 51M15

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение 17
2. Предварительные сведения 18
3. Почти комплексная структура Кэли на области в $\mathbb{R}^8$ 23
4. Почти комплексные структуры на сфере S^6 26
5. Почти комплексные структуры на $S^3 \times S^3$ 35
6. Структуры Кэли на произведениях сфер $S^1 \times S^5$ и $S^2 \times S^4$ 41
Список литературы 45

1. Введение

Хорошо известно (см. [32]), что на ориентируемом шестимерном подмногообразии M в алгебре $\mathbb{C}\mathrm{a}$ чисел Кэли может быть определена почти комплексная структура при помощи трехместного векторного произведения. В серии работ В. Ф. Кириченко (см. [9–12]) изучена геометрия почти эрмитовых структур, индуцированных 3-векторными произведениями на шестимерных подмногообразиях алгебры Кэли. Однако наиболее активно почти комплексная структура Кэли изучается в случае сферы $S^6 \subset \mathbb{R}^7 = \mathrm{Im}(\mathbb{C}\mathrm{a})$ (см. [23, 25, 27, 39, 49]) и на произведениях сфер (см. [31, 35]). Как известно, она является неинтегрируемой (см. [18]). Заметим, что на произведениях нечетномерных сфер имеется комплексная структура, определенная Экманом и Калаби (см. [13, 44]). Для произведений четномерных сфер ситуация значительно сложнее. Единственный нетривиальный случай существования почти комплексной структуры на произведениях четномерных сфер дает произведение $S^2 \times S^4$ (см. [29]). Вопрос о существовании интегрируемой почти комплексной структуры в настоящее время открыт как для $S^2 \times S^4$, так и для S^6. В [31] показано, что не существует ортогональных комплексных структур на произведении круглых сфер $S^2 \times S^4$. Известно, что ортогональные почти комплексные структуры J на S^6 со стандартной круглой метрикой g_0

не интегрируемы (см. [39]). В [20] показано, что неинтегрируемыми будут почти комплексные структуры J, ортогональные относительно метрик, близких к стандартной. Попытка доказать существование комплексной структуры предпринята в [30]. Среди ортогональных почти комплексных структур J на (S^6, g_0) почти комплексная структура Кэли J_c занимает особое место. В [27] показано, что для структуры Кэли объем подмногообразия $J_c(S^6)$ в пространстве ортогональных комплексных структур в $\mathbb{R}^8$ является минимальным среди всех других ортогональных почти комплексных структур на S^6. В [17] для структуры Кэли J_c на сфере S^6 получены явные выражения фундаментальной формы и ее внешнего дифференциала через калибровки пространства $\mathbb{R}^7$, найден тензор Нейенхейса через тройное векторное произведение и показано, что фундаментальная форма ω является собственной для оператора Лапласа. В [6] доказано, что через каждую точку слоя твисторного расслоения над S^6 проходит однопараметрическое семейство структур Кэли. В [4] описано множество $U(2)\times U(2)$-инвариантных эрмитовых метрик на $S^3 \times S^3$, найдены оценки секционной кривизны. В [7] рассмотрено пространство левоинвариантных почти комплексных структур на $S^3 \times S^3 = SU(2) \times SU(2)$, установлены свойства левоинвариантных структур, дающих максимальное значение нормы тензора Нейенхейса на множестве левоинвариантных, ортогональных почти комплексных структур.

2. Предварительные сведения

Поскольку шестимерные сферы естественно вкладываются в алгебру чисел Кэли, то в данном разделе мы напомним некоторые необходимые факты о числах Кэли и векторном произведении. Кроме того, напомним необходимые факты о геометрии пространства почти комплексных структур и о приближенно кэлеровых структурах.

2.1. Векторное произведение на алгебре Кэли. Пусть $\mathbb{C}$a — алгебра чисел Кэли, т.е. чисел вида

$$x = x_0 + x_1 e_1 + \dots + x_7 e_7,$$

где $x_i \in \mathbb{R}$, а числа $e_1, \dots, e_7$ — мнимые единицы. Будем записывать число Кэли x в виде $x = x_0 + X$, где x_0 — действительная часть и $X = x_1 e_1 + \dots + x_7 e_7$ — чисто мнимая часть. Алгебра Кэли $\mathbb{C}$a имеет операцию сопряжения $\overline{x} = x_0 - X$, которая позволяет определить естественным образом скалярное произведение и норму:

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{2}(x\overline{y} + y\overline{x}), \quad |x|^2 = x\overline{x}.$$

Легко видеть, что

$$\overline{xy} = \overline{y} \cdot \overline{x}.$$

Алгебра чисел Кэли $\mathbb{C}$a *неассоциативна*, т.е. $(xy)z \neq x(yz)$. *Ассоциатором* называется выражение

$$[x, y, z] = (xy)z - x(yz).$$

Известно (см. [36]), что ассоциатор кососимметричен по всем аргументам, принимает мнимые значения, ортогонален каждому из элементов x, y, z и зависит только от мнимых частей:

$$[x, y, z] = [X, Y, Z].$$

Векторным (r*-местным*) *произведением* на n-мерном евклидовом пространстве V называется (см. [32]) полилинейное отображение $P : V^r \to V$, $r = 1, \dots, n$, обладающее свойствами

$$\langle P(x_1, \dots, x_r), x_i\rangle = 0, \quad i = 1, \dots, r, \qquad \|P(x_1, \dots, x_r)\|^2 = \det(\langle x_i, x_j\rangle).$$

Одноместное векторное произведение на V есть ортогональная комплексная структура J. Двуместное векторное произведение существует только в размерности 3 и 7. На алгебре Кэли $\mathbb{C}$a трехместное векторное произведение определено формулами (см. [32])

$$P(x, y, z) = -(x\overline{y})z + \langle x, y\rangle z + \langle y, z\rangle x - \langle z, x\rangle y, \tag{2.1}$$

$$P_1(x, y, z) = -x(\overline{y}z) + \langle x, y\rangle z + \langle y, z\rangle x - \langle z, x\rangle y.$$

Сопряжение в алгебре $\mathrm{Im}(\mathbb{C}\mathrm{a})$ определяет (см. [32]) антиизоморфизм этих векторных произведений,

$$P_1(x,y,z) = \overline{P(\overline{z},\overline{y},\overline{x})}.$$

Поэтому в дальнейшем мы будем рассматривать на $\mathbb{C}\mathrm{a}$ только первое векторное произведение P, заданное формулой (2.1).

Понятие векторного произведения естественно определяется и на римановых многообразиях. При этом имеет место следующее свойство.

Теорема 2.1 (см. [32])**.** *Пусть P_M — r-местное векторное произведение на римановом многообразии M и N — ориентируемое подмногообразие коразмерности k в M. Тогда P_M определяет $(r-k)$-местное векторное произведение P_N на подмногообразии N по формуле*

$$P_N(X_1,\dots,X_{r-k}) = P_M(n_1,\dots,n_k,X_1,\dots,X_{r-k}),$$

где $n_1,\dots,n_k$ — локально определенный ортонормированный базис нормального расслоения к подмногообразию N.

Из этой теоремы следует, что любое семимерное ориентируемое подмногообразие M^7 в алгебре $\mathbb{C}\mathrm{a} = \mathbb{R}^8$ имеет двуместное векторное произведение, а любое шестимерное ориентируемое подмногообразие $N \subset \mathbb{R}^8$ имеет почти комплексную структуру (одноместное векторное произведение), определенную формулой $J(X) = P(n_1,n_2,X)$.

Рассмотрим более подробно двуместное векторное произведение $X \times Y$ на пространстве $\mathbb{R}^7 = \mathrm{Im}(\mathbb{C}\mathrm{a})$ чисто мнимых чисел Кэли, которое определяется формулой

$$Y \times Z = \frac{1}{2}(XY - YX) = \mathrm{Im}(YZ). \tag{2.2}$$

Оно получается также из векторного произведения $P(x,y,z)$, когда $x = 1$, а $y = Y$ и $z = Z$ — чисто мнимые,

$$Y \times Z = P(1,Y,Z) = YZ + \langle Y,Z\rangle.$$

Легко видеть, что векторное произведение $X \times Y$ билинейно, кососимметрично и ортогонально каждому их сомножителей. Заметим, что если $x = x_0 + X$ и $y = y_0 + Y$, то

$$xy = (x_0y_0 - \langle X,Y\rangle) + x_0Y + y_0X + X \times Y.$$

Отметим также, что ортогональные чисто мнимые числа Кэли X и Y антикоммутируют, поскольку для них $XY = X \times Y$.

Смешанное произведение определяется равенством

$$(XYZ) = \langle X, Y \times Z\rangle = \langle X \times Y, Z\rangle$$

и представляет собой кососимметричную 3-форму φ, которая называется *ассоциативной калибровкой* (см. [36]) пространства $\mathbb{R}^7 = \mathrm{Im}(\mathbb{C}\mathrm{a})$,

$$\varphi(X,Y,Z) = \langle X, Y \times Z\rangle. \tag{2.3}$$

Если ввести обозначение $\omega_{pqr} = dx_p \wedge dx_q \wedge dx_r$, то калибровка φ имеет следующее выражение:

$$\varphi = \omega_{123} - \omega_{167} + \omega_{257} - \omega_{356} + \omega_{145} + \omega_{246} + \omega_{347}. \tag{2.4}$$

Тройное векторное произведение на алгебре $\mathbb{C}\mathrm{a}$ определяется равенством (см. [36]):

$$x \times y \times z = \frac{1}{2}(x(\overline{y}z) - z(\overline{y}x)). \tag{2.5}$$

Оно обладает свойством кососимметричности. Если $x = x_0 + X$, $y = y_0 + Y$ и $z = z_0 + Z$ — разложение на вещественные и мнимые части, то

$$\mathrm{Re}(x \times y \times z) = \langle X, Y \times Z\rangle, \quad \mathrm{Im}(x \times y \times z) = \frac{1}{2}[x,y,z] = \frac{1}{2}[X,Y,Z], \tag{2.6}$$

где $[x,y,z] = (xy)z - x(yz)$ — ассоциатор. Если элементы x, y, z взаимно ортогональны, то $x \times y \times z = x(\overline{y}z)$. В частности, для взаимно ортогональных и чисто мнимых векторов имеем

$$X \times Y \times Z = -X \times (Y \times Z) + \langle X, Y \times Z\rangle. \tag{2.7}$$

Коассоциативная калибровка (см. [36]) пространства $\mathbb{R}^7 = \mathrm{Im}(\mathbb{C}\mathrm{a})$ — это внешняя 4-форма ψ, определенная равенством

$$\psi(X, Y, Z, W) = \frac{1}{2}\langle X, [Y, Z, W]\rangle. \tag{2.8}$$

Калибровка ψ имеет следующее выражение в стандартных координатах $\mathbb{R}^7$:

$$\psi = \omega_{4567} - \omega_{4523} - \omega_{4163} - \omega_{4127} + \omega_{2367} + \omega_{1357} + \omega_{1256}. \tag{2.9}$$

Легко видеть, что формы φ и ψ связаны соотношением $\psi = *\varphi$, где $*$ — оператор Ходжа.

Калибровкой Кэли на пространстве $\mathbb{C}\mathrm{a}$ называется кососимметричная 4-форма, определенная равенством (см. [36])

$$\Phi_C(x, y, z, w) = \langle x, y \times z \times w\rangle. \tag{2.10}$$

Имеет место формула

$$\Phi_C = dx_0 \wedge \varphi + \psi, \tag{2.11}$$

где φ и ϕ — введенные ранее ассоциативная и коассоциативная калибровки. Для взаимно ортогональных векторов x, y, z имеем

$$\begin{aligned}\Phi_C(x, y, z, w) = \Phi_C(w, z, y, x) = \langle w, z(\overline{y}x)\rangle = \langle \overline{w}, \overline{z(\overline{y}x)}\rangle = \langle \overline{w}, (\overline{\overline{y}x})\overline{z}\rangle = \\ = \langle \overline{w}, (\overline{x}y)\overline{z}\rangle = -\langle \overline{w}, P(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})\rangle = -\langle P(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}), \overline{w}\rangle.\end{aligned}$$

Поэтому в случае, когда все элементы x, y, z являются взаимно ортогональными, мы получаем следующее равенство:

$$\langle P(x, y, z), w\rangle = -\Phi_C(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}, \overline{w}). \tag{2.12}$$

Определим 4-форму Φ на пространстве $\mathbb{C}\mathrm{a}$ равенством

$$\Phi = dx_0 \wedge \varphi - \psi.$$

Тогда для взаимно ортогональных элементов x, y, z имеет место формула

$$\langle P(x, y, z), w\rangle = \Phi(x, y, z, w). \tag{2.13}$$

В [25] Калаби доказал следующее равенство в $\mathbb{R}^7 = \mathrm{Im}(\mathbb{C}\mathrm{a})$:

$$(X \times Y) \times Z - \langle X, Z\rangle Y + \langle Y, Z\rangle X = -X \times (Y \times Z) + \langle X, Z\rangle Y - \langle X, Y\rangle Z. \tag{2.14}$$

Отсюда сразу вытекают свойства векторного произведения, которые мы будем в дальнейшем использовать:

(i) если $n, Y, Z \in \mathbb{R}^7$ и $Y, Z \perp n$, то

$$(n \times Y) \times Z = -n \times (Y \times Z) - \langle Y, Z\rangle n;$$

(ii) если n — чисто мнимый вектор единичной длины, то для любого $Z \in \mathbb{R}^7$

$$n \times (n \times Z) = -Z + \langle n, Z\rangle n.$$

Отсюда следует, что для любых $X, Y \in \mathbb{R}^7$ имеет место равенство

$$\langle n \times X, n \times Y\rangle = \langle X, Y\rangle - \langle X, n\rangle\langle Y, n\rangle.$$

2.2. Пространства почти комплексных структур. Напомним, что *почти комплексной структурой* на многообразии M называется гладкое поле эндоморфизмов $J \in \mathrm{End}(TM)$, удовлетворяющих в каждой точке $x \in M$ условию $J_x^2 = -1_x$. Следует заметить, что почти комплексная структура на многообразии определяет на нем некоторую ориентацию (см., например, [13]). Если почти комплексная структура на многообразии индуцирована некоторой структурой комплексного многообразия на M, то она называется *интегрируемой*.

Если на многообразии задана риманова метрика g и почти комплексная структура J и выполняется соотношение

$$g(J\cdot, J\cdot) = g(\cdot, \cdot),$$

то говорят, что (M, g, J) — *почти эрмитово многообразие*. Почти эрмитова структура (g, J) позволяет определить на M единственным образом кососимметрическую 2-форму:

$$\omega(\cdot, \cdot) = g(J\cdot, \cdot).$$

Символом $\mathcal{A}$ будем обозначать пространство всех почти комплексных структур на многообразии (M, g). Предположим. что задана некоторая почти эрмитова структура (g, J_0). Тогда множество, состоящее из всех почти комплексных структур на (M, g), определяющих ту же ориентацию, что и структура J_0, будем обозначать символом $\mathcal{A}^+$. В пространстве $\mathcal{A}^+$ естественным образом выделяются следующие подпространства:

(i) пространство g-ортогональных почти комплексных структур, сохраняющих ориентацию:

$$\mathcal{AO}_g^+ = \{J \in \mathcal{A}^+ : \ g(J\cdot, J\cdot) = g(\cdot, \cdot)\};$$

(ii) пространство структур, положительно ассоциированных с формой ω:

$$\mathcal{A}_\omega^+ = \{J \in \mathcal{A}^+ : \ \omega(J\cdot, J\cdot) = \omega(\cdot, \cdot), \ \omega(X, JX) > 0\}.$$

Дифференциальная геометрия этих пространств изучалась в [8, 43, 52]. В [2] доказана следующая теорема.

Теорема 2.2. *Пространство почти комплексных структур $\mathcal{A}^+$ на почти эрмитовом многообразии (M, g, J_0) имеет структуру бесконечномерного расслоения над пространством $\mathcal{AO}_g^+$, при этом слоем над ортогональной почти комплексной структурой $J \in \mathcal{AO}_g^+$ является множество $\mathcal{A}_{\omega_J}^+$ всех почти комплексных структур, положительно ассоциированных с невырожденной формой $\omega_J(X, Y) = g(JX, Y)$.*

Известно (см., например, [13]), что в случае почти эрмитовых структур на векторном пространстве V размерности $2n$ пространство $\mathcal{A}^+$ диффеоморфно $GL(2n, \mathbb{R})^+/GL(n, \mathbb{C})$, а $\mathcal{AO}_g^+$ и $\mathcal{A}_\omega^+$ диффеоморфны $SO(2n)/U(n)$ и $Sp(n, \mathbb{R})/U(n)$ соответственно. Для шестимерного случая важно, что $SO(6)/U(3) = \mathbb{CP}^3$.

2.3. Приближенно кэлеровы многообразия. Особое место среди шестимерных многообразий занимают приближенно кэлеровы многообразия.

Определение 2.3. *Приближенно кэлерово* (далее NK — nearly Kählerian) *многообразие* — это почти эрмитово многообразие (M, g, J, ω), на котором $(\nabla_X J)X = 0$ для всех $X \in \Gamma(TM)$, где ∇ обозначает связность Леви-Чивита метрики g. Если, кроме того, $\nabla_X J \neq 0$ для любого ненулевого векторного поля X, то такое многообразие называется *строго приближенно кэлеровым.*

В [34] установлены следующие свойства приближенно кэлеровых многообразий:

$$\delta\omega = 0, \quad |\nabla\omega|^2 = \frac{1}{9}|d\omega|^2 = \frac{1}{16}|N|^2 = s - s^*,$$

где ω — фундаментальная форма, N — тензор Нейенхейса и s, s^* — скалярные кривизны.

Приближенно кэлерова геометрия возникла благодаря концепции слабой голономии, введенной А. Грэем в 1971 г. (см. [33]); она соответствует слабой голономии с группой $U(n)$. Как известно, $U(n)$ является структурной группой почти эрмитова многообразия; в случае же, когда группа голономии совпадает с $U(n)$, данное почти эрмитово многообразие является кэлеровым. В ослабленном случае (см. [33]) почти эрмитово многообразие со слабой группой голономии $U(n)$ является приближенно кэлеровым. Также класс NK-многообразий естественным образом возникает как один из шестнадцати классов почти эрмитовых многообразий, описанных в классификации Грэя—Хервеллы (см. [34]). В 2002 г. П. А. Надь доказал следующий результат (см. [42]).

Теорема 2.4. *Всякое компактное односвязное NK-многообразие M изометрично риманову произведению $M_1 \times \cdots \times M_k$ множителей M_i, являющихся NK-многообразиями из следующего списка*:

(i) *кэлеровы многообразия*;
(ii) *естественно редуктивные* 3*-симметрические пространства*;
(iii) *твисторные пространства над компактным кватернионно кэлеровым многообразием с положительной скалярной кривизной*;
(iv) *приближенно кэлеровы* 6*-многообразия.*

К наиболее интересным и недостаточно изученным многообразиям из этого списка относятся приближенно кэлеровы 6-многообразия. Для однородных римановых шестимерных приближенно кэлеровых многообразий имеет место следующая классификационная теорема.

Теорема 2.5. *Приближенно кэлеровы шестимерные римановы однородные многообразия изоморфны однородным пространствам G/H, где группы G и H принадлежат следующему списку* (см. [24]):

(i) $G = SU(2) \times SU(2)$ *и* $H = \{1\}$*;*
(ii) $G = Sp(2)$ *и* $H = SU(2)U(1)$; *тогда* $G/H \simeq \mathbb{C}P^3$ *является трехмерным комплексным проективным пространством*;
(iii) $G = SU(3)$, $H = U(1) \times U(1)$ *и* G/H *— пространство флагов* $\mathbb{F}^3$;
(iv) $G = G_2$ *и* $H = SU(3)$; *в этом случае* G/H *— это «круглая» сфера.*

На сегодняшний день не известно ни одного примера приближенно кэлерова 6-многообразия, которое не являлось бы однородным.

Для первых трех многообразий из данного списка существует единственная приближенно кэлерова структура. Совсем иначе обстоит дело с «круглой» сферой (сферой, на которой метрика индуцирована из стандартной метрики на $\mathbb{R}^7$). На ней существует бесконечно много приближенно кэлеровых структур. Относительно этого факта имеется следующий общий результат, полученный в 2006 г. М. Вербицким (см. [53]).

Теорема 2.6. *Пусть (M^6, I, g) — приближенно кэлерово многообразие. Тогда риманова метрика единственным образом определяет почти комплексную структуру, за исключением случая, когда M локально изометрично* 6*-сфере.*

Все почти комплексные структуры, которые вместе с «круглой» метрикой определяют приближенно кэлеровы структуры на S^6, являются структурами Кэли.

2.4. Почти комплексные структуры невырожденных 3-форм. Поскольку все рассматриваемые нами шестимерные произведения сфер не являются симплектическими многообразиями, то фундаментальные формы ω почти комплексных структур Кэли не являются замкнутыми, $d\omega \neq 0$. Хитчин в [37] показал, что в шестимерном случае для 3-формы имеет смысл понятие невырожденности и каждая 3-форма определяет оператор, который в некоторых случаях может быть почти комплексной структурой. Естественно рассмотреть вопрос о невырожденности 3-формы $d\omega$ для фундаментальной формы ω почти комплексной структуры Кэли на произведении сфер и вопрос о том, определяет ли $d\omega$ новую почти комплексную структуру на $S^{p-1} \times S^{q-1}$. Напомним основные построения Хитчина.

Пусть V — шестимерное вещественное векторное пространство, μ — форма объема на V и $\Lambda^3 V^*$ — 20-мерное линейное пространство кососимметрических полилинейных 3-форм на V. Для формы $\Omega \in \Lambda^3 V^*$ и вектора $v \in V$ возьмем внутреннее произведение $\iota_v \Omega \in \Lambda^2 V^*$. Тогда $\iota_v \Omega \wedge \Omega \in \Lambda^5 V^*$. Естественное спаривание внешним произведением

$$V^* \otimes \Lambda^5 V^* \to \Lambda^6 V^* \equiv \mathbb{R}\mu$$

определяет изоморфизм

$$A : \Lambda^5 V^* \cong V.$$

Используя это, мы определим линейное преобразование $K_\Omega : V \to V$ следующим образом:

$$K_\Omega(v) = A(\iota_v \Omega \wedge \Omega). \tag{2.15}$$

Другими словами,

$$\iota_{K_\Omega(v)} \mu = \iota_v \Omega \wedge \Omega.$$

Определим $\lambda(\Omega) \in \mathbb{R}$ как

$$\lambda(\Omega) = \frac{1}{6} \operatorname{tr} K_\Omega^2.$$

Определение 2.7. Форму Ω будем называть *невырожденной*, если $\lambda(\Omega) \neq 0$.

В [37] показано, что линейное преобразование K_Ω обладает следующими свойствами: $\operatorname{tr} K_\Omega = 0$ и $K_\Omega^2 = \lambda(\Omega)\,\mathrm{Id}$. В случае $\lambda(\Omega) < 0$ вещественная 3-форма Ω определяет комплексную 3-форму $\alpha \in \Lambda^3(V^* \otimes \mathbb{C})$ и структуру I_Ω комплексного векторного пространства на вещественном векторном пространстве V следующим образом:

$$I_\Omega = \frac{1}{\sqrt{-\lambda(\Omega)}} K_\Omega. \tag{2.16}$$

3. Почти комплексная структура Кэли на области в $\mathbb{R}^8$

В данном разделе мы определим неинтегрируемую почти комплексную структуру на открытом всюду плотном множестве $E^{p,q}$ пространства $\mathbb{R}^8$, которая определяет структуры Кэли на произведениях сфер $S^{p-1} \times S^{q-1}$ при их естественных вложениях в $\mathbb{R}^8$.

3.1. Почти комплексная структура Кэли на $E^{p,q} \subset \mathbb{R}^8$. Возьмем разложение $\mathbb{C}\mathrm{a} = \mathbb{R}^8$ на две ортогональных плоскости $\mathbb{C}\mathrm{a} = E^p \oplus E^q$, $p + q = 8$, причем так, что первая плоскость E^p содержит вещественную ось пространства $\mathbb{C}\mathrm{a}$. В каждой плоскости E^p и E^q рассмотрим единичную сферу S^{p-1} и S^{q-1}. Их произведение $S^{p-1} \times S^{q-1}$ является шестимерным ориентируемым подмногообразием в $\mathbb{R}^8$ и поэтому имеет почти комплексную структуру, определенную формулой $J(X) = P(n_1, n_2, X)$, где $n_1(x) = x \in S^{p-1}$ и $n_2(y) = y \in S^{q-1}$ — нормальные векторы сфер, а X — касательный вектор к произведению сфер. Поскольку второй вектор n_2 чисто мнимый и векторы n_1, n_2 и X взаимно ортогональны, то по формуле (2.1) получаем следующую формулу для почти комплексной структуры на произведении сфер:

$$J(X) = P(n_1, n_2, X) = (n_1 n_2)X, \quad X \in T_{(n_1,n_2)} S^{p-1} \times S^{q-1}. \tag{3.1}$$

Формула $J(X) = (n_1 n_2)X$ определяет комплексную структуру не только в касательном пространстве $T_{(n_1,n_2)} S^{p-1} \times S^{q-1}$, но и во всем пространстве $\mathbb{C}\mathrm{a}$. Действительно, для чисто мнимого единичного вектора $n = n_1 n_2$ и любого $X \in \mathbb{C}\mathrm{a}$ имеем $J^2(X) = n(nX) = (nn)X = -X$. Легко видеть, что $J(n_1) = n_2$, $J(n_2) = -n_1$.

Поскольку n_1 и n_2 являются ортогональными, а n_2 чисто мнимый, то

$$P(n_1, n_2, X) = (n_1 n_2)X + \langle n_2, X\rangle n_1 - \langle n_1, X\rangle n_2.$$

Поэтому получаем следующее выражение для оператора почти комплексной структуры на пространстве $\mathbb{C}\mathrm{a}$ в точке (n_1, n_2):

$$J(X) = P(n_1, n_2, X) - \langle n_2, X\rangle n_1 + \langle n_1, X\rangle n_2, \quad X \in \mathbb{C}\mathrm{a}. \tag{3.2}$$

Отсюда, в частности, следует, что

$$\langle J(X), n_1\rangle = -\langle X, n_2\rangle, \quad \langle J(X), n_2\rangle = \langle X, n_1\rangle.$$

Оператор J комплексной структуры на $\mathbb{C}\mathrm{a}$ определен в точках $(n_1, n_2) \in S^{p-1} \times S^{q-1}$. Легко видеть, что его можно продолжить на открытое всюду плотное множество $E^{p,q}$ в $\mathbb{C}\mathrm{a}$, являющееся произведением плоскостей E^p и E^q с удаленными нулями,

$$E^{p,q} = (E^p \setminus \{0\}) \times (E^q \setminus \{0\}) \subset \mathbb{C}\mathrm{a}. \tag{3.3}$$

Элементы пространства $E^{p,q}$ будем записывать в виде $x = (x_1, x_2)$, где $x_1 \in E^p$ и $x_2 \in E^q$. Для каждой точки $x \in E^{p,q}$ определены два ортогональных единичных вектора

$$n_1(x) = \frac{x_1}{\|x_1\|}, \quad n_2(x) = \frac{x_2}{\|x_2\|}.$$

Тогда оператор J_x почти комплексной структуры на восьмимерном многообразии $E^{p,q}$ в точке $x = (x_1, x_2)$ определим по той же формуле

$$J_x(X) = (n_1(x) n_2(x))X, \qquad X \in T_x E^{p,q} = \mathbb{C}\mathrm{a}. \tag{3.4}$$

Определение 3.1. *Почти комплексной структурой Кэли* на пространстве $E^{p,q} \subset \mathbb{C}\mathrm{a}$ называется почти комплексная структура J, определенная формулой (3.4).

Найдем выражение тензора Нейенхейса

$$N(X,Y) = 2([JX,JY] - [X,Y] - J[X,JY] - J[JX,Y])$$

структуры Кэли на $E^{p,q}$. Для вычисления $N(X,Y)$ нам потребуется производная $D_X(J)$ тензорного поля J в направлении вектора X:

$$D_X(J)(Y) = D_X((n_1n_2)Y) - (n_1n_2)(D_XY).$$

Поскольку пространство $E^{p,q}$ является открытым подмножеством в $\mathbb{R}^8$, то можно отождествить векторы X, Y с параллельными векторными полями на $E^{p,q}$, и тогда

$$D_X(J)(Y) = D_X(n_1n_2)Y.$$

Производная единичных векторов n_1 и n_2 в направлении вектора $X = (X_1, X_2)$ в точке $x = (x_1, x_2)$ находится простым дифференцированием единичных векторных полей n_1 и n_2:

$$dn_1(X) = \frac{1}{\|x_1\|}\left(X_1 - \langle X, n_1\rangle n_1\right), \quad dn_2(X) = \frac{1}{\|x_2\|}\left(X_2 - \langle X, n_2\rangle n_2\right).$$

Поэтому из формулы

$$D_X(J)(Y) = D_X(n_1n_2)Y = (dn_1(X)n_2 + n_1dn_2(X))Y$$

получаем следующее выражение для производной почти комплексной структуры Кэли на $E^{p,q}$:

$$D_X(J)(Y) = \frac{1}{\|x_1\|}(X_1n_2)Y + \frac{1}{\|x_2\|}(n_1X_2)Y - \left(\frac{1}{\|x_1\|}\langle X, n_1\rangle + \frac{1}{\|x_2\|}\langle X, n_2\rangle\right)(n_1n_2)Y.$$

В частности, в точках произведения сфер $S^{p-1} \times S^{q-1}$ мы имеем $\|x_1\| = \|x_2\| = 1$, поэтому

$$D_X(J)Y = (X_1n_2)Y + (n_1X_2)Y - \big(\langle X,\ n_1\rangle + \langle X,\ n_2\rangle\big)(n_1n_2)Y.$$

Для векторов X, Y, ортогональных $S^{p-1} \times S^{q-1}$, получаем:

$$D_X(J)(Y) = (X_1n_2)Y + (n_1X_2)Y. \tag{3.5}$$

Напомним, что нижний индекс у векторов X_1 и X_2 обозначает компоненты вектора X, соответствующие разложению (3.3) пространства $E^{p,q}$ в прямое произведение.

Вычислим также $\langle D_X(J)Y, Z\rangle$ в точках произведения сфер и для векторов X, Y, Z, ортогональных произведению сфер, через векторное произведение. Если в формуле трехместного векторного произведения P второй вектор y — чисто мнимый, то

$$P(x,y,z) = (xy)z + \langle x,y\rangle z + \langle y,z\rangle x - \langle z,x\rangle y.$$

Поэтому

$$(xy)z = P(x,y,z) - \langle x,y\rangle z - \langle y,z\rangle x + \langle z,x\rangle y.$$

Тогда для $D_X(J)Y = (X_1n_2)Y + (n_1X_2)Y$ имеем

$$(X_1n_2)Y = P(X_1,n_2,Y) + \langle Y, X_1\rangle n_2, \quad (n_1X_2)Y = P(n_1,X_2,Y) - \langle X_2, Y\rangle n_1.$$

Поэтому

$$D_X(J)Y = P(X_1,n_2,Y) + P(n_1,X_2,Y) + \langle Y, X_1\rangle n_2 - \langle X_2, Y\rangle n_1.$$

Если Z — любой вектор, ортогональный произведению сфер в точке x, то по формуле (2.13) получаем

$$\langle D_X(J)Y, Z\rangle = \Phi(X_1,n_2,Y,Z) + \Phi(n_1,X_2,Y,Z). \tag{3.6}$$

Используя формулу (3.5), нетрудно вычислить все слагаемые тензора Нейенхейса

$$N(X,Y) = 2([JX,JY] - [X,Y] - J[X,JY] - J[JX,Y])$$

структуры Кэли на $E^{p,q}$ в точках произведения сфер $S^{p-1} \times S^{q-1}$ для векторов X, Y, ортогональных произведению сфер:

$$\begin{aligned} N(X,Y) = 2\Big\{&\big((JX)_1n_2 + n_1(JX)_2\big)Y - \big((JY)_1n_2 + n_1(JY)_2\big)X - \\ &- J\big((X_1n_2)Y - (Y_1n_2)X + (n_1X_2)Y - (n_1Y_2)X\big)\Big\}. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Из полученной формулы сразу следует, что почти комплексная структура J на $E^{p,q}$ является неинтегрируемой.

Теорема 3.2. *Почти комплексная структура Кэли J на $E^{p,q}$ является ортогональной и неинтегрируемой. Ее фундаментальная форма $\omega(X,Y) = \langle JX, Y\rangle$ имеет вид*

$$\omega_x(X,Y) = \Phi(n_1, n_2, X, Y) + n_1^* \wedge n_2^*(X,Y), \tag{3.8}$$

где символами n_1^* и n_2^* обозначены линейные формы, дуальные к векторным полям $n_1(x)$ и $n_2(x)$ на $E^{p,q}$.

Доказательство. Ортогональность J следует из свойства

$$\langle nX, nY\rangle = \langle n, n\rangle\langle X, Y\rangle = \langle X, Y\rangle,$$

когда $n = n_1 n_2$. Поскольку открытое множество $E^{p,q}$ имеет единые координаты из $\mathbb{R}^8$, то тензор Нейенхейса

$$N(X,Y) = 2([JX, JY] - [X,Y] - J[X, JY] - J[JX, Y])$$

может быть вычислен непосредственно по формуле

$$N^i_{jk} = 2(J^h_j \partial_h J^i_k - J^h_k \partial_h J^i_j - J^i_h \partial_j J^h_k + J^i_h \partial_k J^h_j).$$

Для того чтобы воспользоваться этой формулой, достаточно оператор умножения $J_x(X) = \dfrac{x_1 x_2}{\|x_1\|\|x_2\|} X$ записать в виде матрицы, действующей на столбец координат вектора X, и провести явное вычисление компонент N^i_{jk}. Легко видеть, что квадраты компонент N^i_{jk} тензора Нейенхейса являются рациональными функциями координат точки x. Поэтому для доказательства неинтегрируемости J достаточно показать, что хотя бы в одной точке значение тензора отлично от нуля, $N_x(X,Y) \neq 0$. Тогда $N \neq 0$ почти всюду на $E^{p,q}$. Можно использовать формулу (3.7) для нахождения тензора Нейенхейса в точках произведения сфер и для векторов X, Y ортогональных произведению сфер. Пусть, например, $n_1 = 1$, $n_2 = e_5$, $X = X_1 = e_1$, $Y = Y_1 = e_2$. Тогда

$$N_{(n_1,n_2)}(e_1, e_2) = 4e_3 - 4e_6 \neq 0.$$

Фундаментальная 2-форма почти комплексной структуры J на $E^{p,q}$ находится достаточно просто из формулы (3.2) для J:

$$\begin{aligned}\omega_x(X,Y) = \langle JX, Y\rangle = \langle P(n_1, n_2, X) - \langle n_2, X\rangle n_1 + \langle n_1, X\rangle n_2, Y\rangle = \\ = \Phi(n_1, n_2, X, Y) + \langle n_1, X\rangle\langle n_2, Y\rangle - \langle n_1, Y\rangle\langle n_2, X\rangle = \\ = \Phi(n_1, n_2, X, Y) + n_1^* \wedge n_2^*(X,Y).\end{aligned}$$

где $\Phi(x,y,z,w) = \langle P(x,y,z), w\rangle$ — введенная ранее в разделе 2.1 кососимметрическая 4-форма на алгебре $\mathbb{C}$a, а символами n_1^* и n_2^* обозначены линейные формы, дуальные к векторным полям $n_1(x)$ и $n_2(x)$ на $E^{p,q}$ относительно скалярного произведения. □

3.2. Шестимерные произведения сфер в $\mathbb{C}a = \mathbb{R}^8$. Различные случаи произведений сфер в $\mathbb{R}^8$ — это $S^0 \times S^6$, $S^1 \times S^5$, $S^2 \times S^4$ и $S^3 \times S^3$. Все они имеют почти комплексные структуры как шестимерные подмногообразия алгебры Кэли. А именно, почти комплексная структура Кэли на открытом множестве $E^{p,q} \subset \mathbb{R}^8$ при ограничении на подмногообразие $S^{p-1} \times S^{q-1}$ определяет на нем почти комплексную структуру, которую и будем называть *структурой Кэли.* Точку $x \in S^{p-1} \times S^{q-1}$ естественно представить в виде двух компонент, $x = (n_1, n_2)$, где $n_1 \in S^{p-1}$ и $n_2 \in S^{q-1}$ отождествляются также с нормальными векторами сфер. Тогда для вектора $X \in T_x(S^{p-1} \times S^{q-1})$ имеем $J_x(X) = P(n_1, n_2, X) = (n_1 n_2)X$.

Теорема 3.3. *Ортогональная почти комплексная структура Кэли J на $S^{p-1} \times S^{q-1}$ является неинтегрируемой. Фундаментальная 2-форма на $S^{p-1} \times S^{q-1}$ и ее внешний дифференциал имеют выражения*

$$\omega_x(X,Y) = \Phi(n_1, n_2, X, Y) \tag{3.9}$$

и

$$d\omega(X,Y,Z) = \Phi(X_1,n_2,Y,Z) + \Phi(Y_1,n_2,Z,X) + \Phi(Z_1,n_2,X,Y) + \\ + \Phi(n_1,X_2,Y,Z) + \Phi(n_1,Y_2,Z,X) + \Phi(n_1,Z_2,X,Y), \quad (3.10)$$

где $n_1 \in S^{p-1}$, $n_2 \in S^{q-1}$, *а нижние индексы* 1 *и* 2 *у векторов* $X,Y,Z \in T_x(S^{p-1}\times S^{q-1})$ *обозначают компоненты этих векторов, касательные к* S^{p-1} *и* S^{q-1}, *соответственно.*

Для ковариантной производной $\nabla_X J$ *на* $S^{p-1}\times S^{q-1}$ *справедливо выражение*

$$\langle \nabla_X(J)Y, Z\rangle = \Phi(X_1,n_2,Y,Z) + \Phi(n_1,X_2,Y,Z).$$

Почти комплексная структура Кэли J *на* $S^{p-1}\times S^{q-1}$ *является покомпонентно приближенно кэлеровой, т.е. имеют место следующие равенства*:

$$\nabla_{X_1}(J)X_1 = 0, \quad \nabla_{X_2}(J)X_2 = 0,$$

для любых векторов касательных только к одному из сомножителей в произведении $S^{p-1}\times S^{q-1}$, *т.е. векторов вида* $X=(X_1,0)$ *и* $X=(0,X_2)$.

Доказательство. Поскольку сфера $S^{p-1}\times S^{q-1}$ (почти) голоморфно вкладывается в пространство $E^{p,q}$, то выражения тензора Нейенхейса, фундаментальной формы и ковариантной производной тензора J получаются из общих выражений, полученных для пространства $E^{p,q}$, считая, что все векторы X, Y, Z ортогональны нормальным векторам n_1 и n_2. Таким образом, на сфере $S^{p-1}\times S^{q-1}$ тензор Нейенхейса имеет выражение (3.7), из которого следует неинтегрируемость J.

Для фундаментальной 2-формы, учитывая, что X, Y ортогональны n_1 и n_2, имеем:

$$\omega_x(X,Y) = \langle JX, Y\rangle = \langle P(n_1,n_2,X), Y\rangle = \Phi(n_1,n_2,X,Y).$$

Найдем внешний дифференциал формы ω по формуле

$$d\omega(X,Y,Z) = X\omega(Y,Z) + Y\omega(Z,X) + Z\omega(X,Y) - \omega([X,Y],Z) - \omega([Y,Z],X) - \omega([Z,X],Y).$$

Векторы $X,Y,Z \in T_x(S^{p-1}\times S^{q-1})$ удобно считать продолженными на $E^{p,q}$ как параллельные векторные поля; тогда их скобки Ли будут нулевыми. Поскольку вектор $X=(X_1,X_2)$ ортогонален к n_1 и n_2, то $dn_1(X) = X_1$ и $dn_2(X) = X_2$, Поэтому

$$X\omega(Y,Z) = X\Phi(n_1,n_2,Y,Z) = \Phi(X_1,n_2,Y,Z) + \Phi(n_1,X_2,Y,Z).$$

Остальные компоненты вычисляются аналогично. Складывая их, получаем $d\omega$.

Формула для ковариантной производной $\nabla_X J$ установлена ранее как формула (3.6). Из (3.6) и кососимметричности Φ легко получается, что

$$\nabla_{X_1}(J)X_1 = 0, \quad \nabla_{X_2}(J)X_2 = 0,$$

для векторов вида $X=(X_1,0)=X_1$ и $X=(0,X_2)=X_2$. Это свойство естественно назвать *покомпонентной приближенной кэлеровостью*, т.е. приближенной кэлеровостью отдельно по направлениям, касательным к S^{p-1} и отдельно к S^{q-1}. Для общего вектора X это свойство не выполняется, что легко проверяется прямыми вычислениями. Теорема доказана. □

4. Почти комплексные структуры на сфере S^6

В данном разделе мы рассмотрим почти комплексные структуры на сфере S^6 и начнем с самой известной структуры Кэли, которая строится на основе чисел Кэли.

4.1. Почти комплексная структура Кэли на сфере S^6. Следуя схеме, изложенной в разделе 3.2, для шестимерной сферы S^6 возьмем разложение пространства $\mathbb{C}\mathrm{a}$ в произведение одномерного и семимерного подпространств,

$$\mathbb{C}\mathrm{a} = \mathrm{Re}(\mathbb{C}\mathrm{a}) \times \mathrm{Im}(\mathbb{C}\mathrm{a}) = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^7.$$

Получаем $S^0 \times S^6 = \{-1, +1\} \times S^6$ — два экземпляра стандартной единичной сферы S^6 в пространстве $\mathbb{R}^7$ чисто мнимых чисел Кэли. Будем рассматривать один экземпляр $\{1\} \times S^6 = S^6 \subset \mathbb{R}^7$. Почти комплексная структура Кэли J на S^6 определяется в каждой точке $x \in S^6$ векторным умножением на единичный нормальный вектор $n(x) = x$ к сфере,

$$J_x : T_xS^6 \to T_xS^6, \quad J_x(X) = n \times X.$$

Очевидно, что J является ортогональной. Хорошо известно, что J не интегрируема. Пусть $\omega(X, Y) = \langle JX, Y\rangle$ — фундаментальная 2-форма, соответствующая J. Она имеет очень простое выражение через векторное произведение:

$$\omega(X, Y) = \langle n \times X, Y\rangle = \langle n, X \times Y\rangle. \tag{4.1}$$

Выразим основные характеристики почти комплексной структуры J на сфере S^6 через векторное произведение (подробные вычисления см. в [17]).

Лемма 4.1. *Калибровка φ при ее ограничении на сферу обладает свойством*

$$\varphi(JX, Y, Z) = \varphi(X, JY, Z) = \varphi(X, Y, JZ).$$

Доказательство:

$$\begin{aligned}\varphi(Z, JX, Y) &= \langle Z, JX \times Y\rangle = \langle Z, -n \times (X \times Y) - (X, Y)n\rangle = \langle Z, -n \times (X \times Y)\rangle = \\ &= -\langle Z \times n, X \times Y\rangle = \langle n \times Z, X \times Y\rangle = \langle JZ, X \times Y\rangle = \varphi(JZ, X, Y). \quad \square\end{aligned}$$

Лемма 4.2. *Пусть φ и ψ — ассоциативная и коассоциативная калибровки пространства $\mathbb{R}^7$ соответственно. Тогда для любых X, Y, Z касательных к сфере S^6 имеет место равенство*

$$i_n\psi(X, Y, Z) = -\varphi(JX, Y, Z),$$

где i_n — внутреннее произведение с вектором нормали $n(x)$.

Доказательство:

$$i_n\psi(X, Y, Z) = \langle n, [XYZ]\rangle = \langle n, -X \times (Y \times Z)\rangle = -\langle n \times X, Y \times Z\rangle = -\varphi(JX, Y, Z). \quad \square$$

Пусть $*_S$ — оператор Ходжа на сфере и $\theta|_S$ — ограничение дифференциальной формы θ в $\mathbb{R}^7$ на подмногообразие S^6.

Теорема 4.3 (см. [17]). *Фундаментальная форма ω почти комплексной структуры Кэли J на S^6 и ее внешний дифференциал $d\omega$ обладают следующими свойствами*:

$$\begin{gathered}\omega = i_n\varphi, \qquad d\omega = 3\varphi|_S, \\ *_S\ \omega = \psi|_S, \qquad *_S\ d\omega = -3\ i_n\psi, \\ d\omega(X, Y, Z) = 3\ i_n\psi(JX, Y, Z), \\ d\omega(JX, Y, Z) = d\omega(X, JY, Z) = d\omega(X, Y, JZ), \\ d\omega(X, JY, JZ) = -d\omega(X, Y, Z).\end{gathered} \tag{4.2}$$

Найдем ковариантную производную тензора J. Поскольку $n(x) = x$, то для любого касательного вектора $X \in T_xS^6$ имеем $Dn_x(X) = X$. Тогда из равенства

$$(\nabla_X J)Y = \mathrm{pr}(D_X(JY)) = \mathrm{pr}(D_X(n \times Y)) = \mathrm{pr}(X \times Y),$$

где pr — проекция на касательное пространство T_xS^6, получаем:

$$(\nabla_X J)Y = X \times Y - \langle n(x), X \times Y\rangle n = X \times Y - \omega(X, Y)n.$$

Теорема 4.4. *Тензор Нейенхейса $N(X,Y)$ почти комплексной структуры J имеет вид*

$$N(X,Y) = -8n\,(X\times Y).$$

Доказательство сразу следует из формулы (3.7). Можно также использовать формулу

$$g(N(X,Y),JZ) = 4g((\nabla_Z J)X,Y) + 2d\omega(Z,JX,JY) - 2d\omega(Z,X,Y),$$

установленную в [13] (с учетом разницы в определении внешнего произведения и фундаментальной формы), последнего равенства теоремы 4.3 и формулы для $(\nabla_X J)Y$. □

Теорема 4.5 (см. [17]). *Фундаментальная 2-форма ω почти комплексной структуры Кэли является собственной для оператора Лапласа,*

$$\Delta\omega = 12\,\omega.$$

4.1.1. Почти комплексная структура, соответствующая 3-форме $d\omega$. Для фундаментальной формы ω почти комплексной структуры Кэли на S^6, 3-форма $\Omega = d\omega$ имеет вид $\Omega = 3\varphi|_{S^6}$, где

$$\varphi = \omega_{123} - \omega_{167} + \omega_{257} - \omega_{356} + \omega_{145} + \omega_{246} + \omega_{347}$$

— ассоциативная калибровка пространства $\mathbb{R}^7 = \mathrm{Im}(\mathbb{C}\mathrm{a})$ (напомним, что $\omega_{pqr} = dx_p\wedge dx_q\wedge dx_r$).

Найдем оператор K_Ω для каждой точки сферы. Рассмотрим сначала точку $e_7\in S^6$. Касательное пространство имеет ортонормированный базис векторов e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6 и форму объема $\mu = \omega_{123456}$. Ограничение формы $\Omega = d\omega$ на $T_{e_7}S^6$ имеет вид

$$\Omega_{e_7} = 3(\omega_{123} - \omega_{356} + \omega_{145} + \omega_{246}).$$

В силу инвариантности формы Ω_{e_7} относительно подгруппы изотропии $SU(3)\subset G_2$, действующей на $T_{e_7}S^6$, достаточно вычислить K_Ω на одном векторе, например, $K_\Omega(e_1)$:

$$\iota_{e_1}\Omega_{e_7} = 3\iota_{e_1}(\omega_{123} - \omega_{356} + \omega_{145} + \omega_{246}) = 3(\omega_{23} + \omega_{45}).$$
$$\iota_{e_1}\Omega_{e_7}\wedge\Omega_{e_7} = 18\omega_{12345} = -18\iota_{e_6}\omega_{123456}.$$

Поэтому

$$K_\Omega(e_1) = -18e_6 = 18e_7\times e_1 = 18J(e_1).$$

Отсюда следует, что $I_{\Omega_{e_7}} = J_{e_7}$. Из инвариантности почти комплексной структуры Кэли J и формы Ω относительно группы G_2, действующей транзитивно на S^6, мы получаем, что равенство $I_{\Omega_{e_7}} = J_{e_7}$ имеет место не только для e_7, но и в любой другой точке сферы.

Таким образом, мы можем сделать вывод, что 3-форма $\Omega = d\omega$ на S^6 невырождена всюду и определяет почти комплексную структуру I_Ω на S^6, совпадающую с почти комплексной структурой Кэли J.

4.1.2. Почти комплексные структуры на сфере S^6 в локальных координатах. Представляет интерес выражение почти комплексной структуры Кэли в координатах стереографической проекции сферы на плоскость $\mathbb{R}^6$. Будем использовать стереографическую проекцию из точки $N = (0,0,0,1,0,0,0)$ сферы S^6, расположенной на оси x_4, на плоскость $\mathbb{R}^6$. Точке $x\in S^6$ соответствуют координаты $y = (y_1, y_2,\dots,y_6)\in\mathbb{R}^6$, причем

$$x = \left(\frac{2y_1}{1+y^2},\ \frac{2y_2}{1+y^2},\ \frac{2y_3}{1+y^2},\ \frac{y^2-1}{y^2+1},\ \frac{2y_4}{1+y^2},\ \frac{2y_5}{1+y^2},\ \frac{2y_6}{1+y^2}\right),$$

где $y^2 = y_1^2 + \dots + y_6^2$. Метрика g_0 сферы в стереографической проекции конформно евклидова,

$$g_0 = \frac{4}{(1+y^2)^2}\delta_{ij}.$$

Матрица оператора почти комплексной структуры J_0 в координатном базисе $\partial_{y_1},\dots,\partial_{y_6}$ пространства T_xS^6 находится прямым рутинным вычислением: $J_0(\partial_{y_i}) = J_{0i}^j\partial_{y_j}$. Эта матрица имеет следующую блочную структуру:

$$J_0 = \frac{1}{1+y^2}\begin{pmatrix} J_{11} & J_{12}\\ -J_{12}{}^T & J_{22}\end{pmatrix},$$

где

$$J_{11} = 2\begin{pmatrix} 0 & y_1y_5 - y_2y_4 - y_3 & y_1y_6 - y_3y_4 + y_2 \\ -y_1y_5 + y_2y_4 + y_3 & 0 & y_2y_6 - y_3y_5 - y_1 \\ -y_1y_6 + y_3y_4 - y_2 & -y_2y_6 + y_3y_5 + y_1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$J_{12} = \begin{pmatrix} -1 + y^2 - 2(y_1^2 + y_4^2) & 2(-y_1y_2 - y_5y_4 + y_6) & 2(-y_1y_3 - y_6y_4 - y_5) \\ 2(-y_1y_2 - y_5y_4 - y_6) & -1 + y^2 - 2(y_2^2 + y_5^2) & 2(-y_2y_3 - y_6y_5 + y_4) \\ 2(-y_1y_3 - y_6y_4 + y_5) & 2(-y_2y_3 - y_6y_5 - y_4) & -1 + y^2 - 2(y_3^2 + y_6^2) \end{pmatrix},$$

$$J_{22} = 2\begin{pmatrix} 0 & y_1y_5 - y_2y_4 + y_3 & y_1y_6 - y_3y_4 - y_2 \\ -y_1y_5 + y_2y_4 - y_3 & 0 & y_2y_6 - y_3y_5 + y_1 \\ -y_1y_6 + y_3y_4 + y_2 & -y_2y_6 + y_3y_5 - y_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Пусть $J_{st} = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{smallmatrix}\right)$ — стандартная комплексная структура на $\mathbb{R}^6$, $z_1 = y_1 + iy_4$, $z_2 = y_2 + iy_5$, $z_3 = y_3 + iy_6$, I — единичная матрица порядка 3. Тогда оператор почти комплексной структуры J_0 можно представить в виде суммы

$$J_0 = \frac{1}{1 + y^2}\left((1 - y^2)J_{st} + 2A + 2B\right). \tag{4.3}$$

В последнем выражении матрицы A и B имеют вид

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{12} & -A_{11} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ -B_{12} & B_{11} \end{pmatrix},$$

где

$$A_{11} = \begin{pmatrix} 0 & -y_3 & y_2 \\ y_3 & 0 & -y_1 \\ -y_2 & y_1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B_{11} = 2\begin{pmatrix} 0 & y_1y_5 - y_2y_4 & y_1y_6 - y_3y_4 \\ -y_1y_5 + y_2y_4 & 0 & y_2y_6 - y_3y_5 \\ -y_1y_6 + y_3y_4 & -y_2y_6 + y_3y_5 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_{12} = \begin{pmatrix} 0 & y_6 & -y_5 \\ -y_6 & 0 & y_4 \\ y_5 & -y_4 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B_{12} = \begin{pmatrix} -y_1^2 - y_4^2 & -y_1y_2 - y_5y_4 & -y_1y_3 - y_6y_4 \\ -y_1y_2 - y_5y_4 & -y_2^2 - y_5^2 & -y_2y_3 - y_6y_5 \\ -y_1y_3 - y_6y_4 & -y_2y_3 - y_6y_5 & -y_3^2 - y_6^2 \end{pmatrix}.$$

Матрицы A и B обладают рядом интересных свойств. Матрица A кососимметрична и антикоммутирует с J_{st}: $AJ_{st} = -J_{st}A$. Образуем симметричную матрицу $B_0 = -J_{st}B$. Тогда легко видеть, что

$$AB = AB_0 = 0, \quad A^2 = -y^2 I + B_0.$$

Поэтому

$$A^3 = -y^2 A, \quad J_{st}A^2 = -y^2 J_{st} + J_{st}B_0 = -y^2 J_{st} + B.$$

Из последнего равенства следует, что

$$B = y^2 J_{st} + J_{st}A^2.$$

Поэтому из равенства (4.3) получаем следующее выражение для структуры Кэли в стереографической проекции:

$$J_0 = J_{st} + \frac{2}{1 + y^2}\left((A + J_{st}A^2\right). \tag{4.4}$$

4.1.3. Ассоциированные почти комплексные структуры на сфере S^6 в локальных координатах. Если на многообразии задана невырожденная кососимметричная 2-форма ω, то с ней можно связать большой класс почти комплексных структур, так называемых *ассоциированных с ω почти комплексных структур* (см. [14, 15]), т.е. таких структур J, что для любых векторных полей X, Y выполняются условия

$$\omega(JX, JY) = \omega(X, Y), \qquad \omega(X, JX) > 0, \quad X \neq 0.$$

Соответствующая риманова метрика g определяется равенством $g(X, Y) = \omega(X, JY)$. В [14] показано, что положительную ассоциированную почти комплексную структуру J можно получить в следующем виде:

$$J = J_0(1 + P)(1 - P)^{-1}, \tag{4.5}$$

где P — симметрический эндоморфизм $P : TS^6 \to TS^6$, антикоммутирующий с J_0. При этом

$$P = (I - JJ_0)^{-1}(I + JJ_0).$$

На сфере S^6 к настоящему времени нет примеров почти комплексных структур J, отличных от структур Кэли J_0. Поэтому интересным является вопрос о построении на S^6 ассоциированной почти комплексной структуры J, отличной от J_0. В качестве 2-формы ω будем рассматривать фундаментальную форму $\omega(X, Y) = g_0(J_0X, Y)$ структуры Кэли и стандартной метрики сферы g_0. Поскольку метрика g_0 конформно евклидова, то для симметричности оператора P достаточно, чтобы его матрица была симметрической в стандартном базисе пространства $\mathbb{R}^6$. Оператор J_0 имеет матрицу, существенно зависящую от $y \in \mathbb{R}^6$, поэтому вопрос о нахождении оператора P, антикоммутирующего с J_0, является достаточно сложным. Мы ограничимся только тем, что найдем примеры операторов P с необходимыми свойствами. Из вида (4.4) оператора J_0 следует, что достаточно найти симметрическую матрицу, антикоммутирующую с J_{st} и с A.

Для того чтобы найти матрицу оператора P, воспользуемся комплексными координатами $z_1 = y_1 + iy_4$, $z_2 = y_2 + iy_5$, $z_3 = y_3 + iy_6$ на $\mathbb{R}^6$. Искомый оператор P в комплексном базисе задается матрицей вида

$$P = \begin{pmatrix} 0 & P_{\overline{\alpha}}^{\beta} \\ P_{\alpha}^{\overline{\beta}} & 0 \end{pmatrix}, \quad P_{\overline{\alpha}}^{\beta} = \overline{P_{\alpha}^{\overline{\beta}}}. \tag{4.6}$$

Условие симметричности оператора P выражается соотношением

$$P_{\alpha\beta} = P_{\beta\alpha},$$

где $P_{\alpha\beta} = g_{\alpha\overline{\gamma}}\, P_{\beta}^{\overline{\gamma}}$, $g_{\alpha\overline{\beta}} = g_0(\partial_\alpha, \overline{\partial}_\beta)$ — компоненты метрического тензора g_0, $\alpha, \beta = 1, 2, 3$. Оператор P также должен антикоммутировать с J_{st} и с A. Матрица оператора A принимает в комплексном базисе следующий вид:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & A_{12}^c \\ \overline{A}_{12}^c & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{где} \quad A_{12}^c = \begin{pmatrix} 0 & -\overline{z}_3 & \overline{z}_2 \\ \overline{z}_3 & 0 & -\overline{z}_1 \\ -\overline{z}_2 & \overline{z}_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим оператор Q с матрицей

$$Q = J_{st}Q_0 = \begin{pmatrix} iI & 0 \\ 0 & -iI \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & Q_{12}^c \\ \overline{Q}_{12}^c & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{где} \quad Q_{12}^c = \begin{pmatrix} z_1\overline{z}_2\overline{z}_3 & 0 & 0 \\ 0 & \overline{z}_1 z_2 \overline{z}_3 & 0 \\ 0 & 0 & \overline{z}_1\overline{z}_2 z_3 \end{pmatrix}. \tag{4.7}$$

Легко видеть, что он обладает необходимыми свойствами, однако он не определен на всей сфере S^6. Для того чтобы данная матрица определяла бы эндоморфизм $P : TS^6 \to TS^6$, умножим ее на гладкую вещественную функцию, которая обращается в нуль на бесконечности быстрее, чем возрастает $z_1z_2z_3$. Возьмем, например, функцию вида $1/f(z)$, где $f(z) = (1 + |z|^2)^2$. Положим $P = \dfrac{1}{f(z)}Q$; тогда

$$P = \frac{1}{f(z)} \begin{pmatrix} 0 & iQ_{12}^c \\ -i\overline{Q}_{12}^c & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.8}$$

Для нахождения

$$(I+P)(I-P)^{-1} = (I+P)(I+P)(I-P^2)^{-1}$$

выполним простые вычисления:

$$P^2 = \frac{|z_1 z_2 z_3|^2}{f^2(z)} I, \quad I - P^2 = \left(1 - \frac{|z_1 z_2 z_3|^2}{f^2(z)}\right) I > 0,$$

$$(I+P)(I-P)^{-1} = (I+P)(I+P)(I-P^2)^{-1} =$$
$$= \frac{f^2(z)}{f^2(z) - |z_1 z_2 z_3|^2}(I + 2P + P^2) = \frac{f^2(z) + |z_1 z_2 z_3|^2}{f^2(z) - |z_1 z_2 z_3|^2} I + \frac{2 f^2(z)}{f^2(z) - |z_1 z_2 z_3|^2} P.$$

Из полученного выражения получаем искомую ассоциированную почти комплексную структуру на сфере S^6:

$$J_P = \left(J_{st} + \frac{2}{1+z^2}\left((A + J_{st}A^2\right)\right)\left(\frac{f^2(z) + |z_1 z_2 z_3|^2}{f^2(z) - |z_1 z_2 z_3|^2} I + \frac{2 f^2(z)}{f^2(z) - |z_1 z_2 z_3|^2} P\right). \qquad (4.9)$$

Данная почти комплексная структуря J_P является неинтегрируемой; это было проверено прямым вычислением с использованием системы Maple.

4.2. Другие структуры Кэли на S^6. Действием ортогональной группы $O(7)$ на структуру Кэли на S^6 можно определить другие почти комплексные структуры, которые мы также будем называть структурами Кэли. Пусть $A \in O(7)$ — произвольное ортогональное преобразование и $n_A = n(A(x))$. Определим структуру J^A в точке $x \in S^6$ (см. [27]):

$$J_x^A(X) = A^{-1}(n_A \times A(X)).$$

Структура J^A будет совпадать со стандартной в том и только том случае, когда A является автоморфизмом алгебры Кэли. Таким образом, пространство всех структур Кэли есть однородное пространство $O(7)/G_2$.

Замечание 4.6. Далее мы ограничимся рассмотрением почти комплексных структур, определяющих одну и ту же ориентацию на S^6; пространство таких структур есть $SO(7)/G_2 \cong \mathbb{R}P^7$.

Замечание 4.7. Далее под структурой J^A мы будем подразумевать структуру, соответствующую классу смежности $G_2 A \in SO(7)/G_2$.

Все эти структуры приближенно кэлеровы на однородном римановом многообразии $S^6 = G_2/SU(3)$. Каждое вложение G_2 в $SO(7)$ определяет на сфере приближенно кэлерову структуру согласованную с «круглой» метрикой (см. [24]).

Пусть Z^+ — твисторное расслоение над «круглой» сферой S^6. Точка в Z^+ есть пара (x, I_x), состоящая из точки на сфере $x \in S^6$ и почти комплексной структуры $I_x : T_x S^6 \to T_x S^6$, согласованной с «круглой» метрикой, и сохраняющей ориентацию, заданную на сфере почти комплексной структурой Кэли. Каждый слой такого расслоения шестимерен и диффеоморфен $SO(6)/U(3) \cong \mathbb{C}P^3$. Таким образом, пространство Z^+ является 12-мерным. Всякая почти комплексная структура J на S^6 — это гладкое сечение твисторного расслоения, а $J(S^6)$ — гладкое подмногообразие в Z^+.

Лемма 4.8. *Для любой точки $p \in S^6$ и любой почти комплексной структуры $I_p \in \pi^{-1}(p)$ существует такое $A \in SO(7)$, что $J_p^A = I_p$.*

Доказательство. Пусть $p \in S^6$ — произвольная точка на сфере и $I_p \in \pi^{-1}(p)$ — произвольная почти комплексная структура. Пусть J_p — значение стандартной структуры Кэли в точке p. Тогда существует такое ортогональное преобразование $A \in SO(6)$, действующее в касательной плоскости $T_p S^6$, что $J_p = A I_p A^{-1}$. Рассмотрим A как вращение в $\mathbb{R}^7$ относительно p. Тогда A определяет структуру Кэли

$$J_x^A = A^{-1} J_{A(x)} A \quad \forall x \in S^6.$$

В точке p имеем
$$J_p^A(X) = A^{-1}J_{A(p)}A(X) = A^{-1}J_pA(X) = I_p(X)$$
для произвольного вектора $X \in T_pS^6$. Лемма доказана. □

Учитывая, что размерность слоя нашего расслоения равна 6, а размерность пространства всех структур Кэли равна 7, естественно предположить, что на каждом слое найдутся точки, через которые проходит более чем одна структура Кэли. Более того, можно доказать следующий результат.

Теорема 4.9. *Пусть p — произвольная точка на сфере S^6. Тогда через каждую точку I_p слоя $\pi^{-1}(p)$ твисторного расслоения Z^+ проходит однопараметрическое семейство сечений, являющихся приближенно кэлеровыми структурами на S^6.*

Доказательство. Пусть $I_p \in \pi^{-1}(p)$ — произвольная точка слоя твисторного расслоения Z^+ над некоторой точкой $p \in S^6$. Пусть J^A — соответствующая I_p (согласно лемме 4.8) структура Кэли, удовлетворяющая условию $J_p^A = I_p$, $A \in SO(6)$. Группа $SO(6)$ в этом случае вкладывается в $SO(7)$ как группа вращений относительно p. Пусть
$$\lambda = (\cos\varphi + i\sin\varphi)E \in U(3), \quad \varphi \in [0; 2\pi/3)$$
— унитарное преобразование в плоскости T_pS^6, коммутирующее с I_p. Имеем $\lambda \notin SU(3) = G_2 \cap SO(6)$ при $\varphi \neq 0$; тогда
$$J_p^{\lambda A} = A^{-1}\lambda^{-1}I_p\lambda A = A^{-1}I_pA = J_p^A = I_p,$$
но $J^{\lambda_1 A} \neq J^{\lambda_2 A}$ для любых различных φ_1 и φ_2, так как $\lambda_1\lambda_2^{-1} \notin G_2$. Теорема доказана. □

Лемма 4.10. *Пусть $p \in S^6$ и $I_p \in \pi^{-1}(p)$ — некоторая точка слоя над p. Тогда любые две структуры Кэли J^A и J^B, проходящие через точку $(p, I_p) \in Z^+$, имеют ровно две точки пересечения.*

Доказательство. Пусть J^A и J^B проходят через точку (p, I_p). Согласно лемме 4.8 и доказательству теоремы 4.9 можно рассматривать преобразования A и B как повороты в $\mathbb{R}^7$ относительно p, причем $B = \lambda A$, где $\lambda = (\cos\varphi + i\sin\varphi)E \in U(3)$, $\varphi \in (0; 2\pi/3)$. Поворот относительно точки p в $\mathbb{R}^7$ оставляет инвариантными две точки на сфере: p и $-p$. Очевидно, что в точке $-p$ значения структур J^A и J^B также совпадают.

Предположим, что существуют такие точка $q \neq \pm p$ на сфере и элемент слоя $I_q \in \pi^{-1}(q)$, что $J_q^A = J_q^{\lambda A} = I_q$. Тогда согласно определению структуры Кэли и доказательству теоремы 4.9 имеем
$$(\lambda A)^{-1}\Big(n(\lambda A(q)) \times (\lambda A)(X)\Big) = A^{-1}\Big(n(A(q))A(X)\Big)$$
для всех $X \in T_qS^6$,
$$\lambda^{-1}\Big(n(\lambda q') \times (\lambda X')\Big) = n(q') \times X',$$
где $q' = Aq$, $X' = AX$. Поскольку $q' \neq \pm p, 0$ и X' — произвольный касательный вектор к сфере в точке q', то данное равенство возможно только при $\lambda \in G_2$, что противоречит выбору λ. □

Пусть (p, I_p) — некоторая точка пространства Z^+, а J — некоторое сечение этого расслоения, проходящее через данную точку. Тогда касательное пространство к $J(S^6)$ имеет вид
$$T_{(p,I_p)}J(S^6) = \left\{(X, K) \in T_pS^6 \times T_{I_p}\pi^{-1}(p) :\ X = \frac{dx_t}{dt}\Big|_{t=0},\ K = \frac{dJ_{x_t}}{dt}\Big|_{t=0};\ x_t : [0;1] \to S^6,\ x_0 = p\right\}.$$

Лемма 4.11. *Для произвольной точки $(p, I_p) \in Z^+$ и пары проходящих через нее сечений J^A и $J^{\lambda A}$ их пересечение трансверсально.*

Доказательство. Соответствующие структурам J^A и $J^{\lambda A}$ касательные пространства суть
$$T_{(p,I_p)}J^A(S^6) = \Big\{(X, K) :\ X \in T_pS^6;\ K(Y) = A^{-1}(n(AX) \times A(Y))\Big\},$$
$$T_{(p,I_p)}J^{A\lambda}(S^6) = \Big\{(X, K_\lambda) :\ X \in T_pS^6;\ K_\lambda(Y) = A^{-1}\lambda^{-1}\Big(n(\lambda A(X)) \times \lambda A(Y)\Big)\Big\}.$$

Равенство $(X, K) = (X, K_\lambda)$ возможно в том и только том случае, если

$$K = K_\lambda, \quad A^{-1}\big(n(AX) \times A(Y)\big) = A^{-1}\lambda^{-1}\Big(n\big(\lambda A(X)\big) \times \lambda A(Y)\Big)$$

для произвольного вектора $Y \in T_p(S^6)$,

$$n(X') \times Y' = \lambda^{-1}\Big(n(\lambda X') \times \lambda(Y')\Big),$$

где $X' = AX$, $X' \neq \pm p, 0$, $Y' = A(Y)$. Это возможно в том и только том случае, если $\lambda \in G_2$, а это противоречит первоначальному выбору λ. $\square$

Лемма 4.12. *Любая структура Кэли J^A, проходящая через некоторую точку $(q, I_q) \in Z^+$, принадлежит однопараметрическому семейству структур теоремы* 4.9.

Доказательство. Пусть структура Кэли J^A проходит через точку (q, I_q), т.е. $J^A_q = I_q$. Согласно теореме 4.9 и лемме 4.8, J^A принадлежит соответствующему однопараметричскому семейству в точке (q, I_q) в том и только том случае, если найдется такое преобразование $G \in G_2$, что $GA(q) = q$. Группа автоморфизмов алгебры октав G_2 действует транзитивно на сфере, а значит, для пары точек сферы $q, A(q) \in S^6$ всегда найдется такое преобразование $G \in G_2$, что $GA(q) = q$. $\square$

Следствие 4.13. *Если две произвольные структуры Кэли J^A и J^B пересекаются в некоторой точке $(q, I_q) \in Z^+$, то J^A, J^B принадлежат однопараметрическому семейству теоремы* 4.9.

4.3. Приближенно кэлеровы $SU(3)$-структуры на S^6. К конструкции однопараметрических семейств приближенно кэлеровых структур можно подойти с другой стороны, описав их на языке дифференциальных форм. Наличие на M^6 пары таких форм (ω, ψ), что ω — невырожденная кососимметрическая 2-форма со стабилизатором $Sp(3, \mathbb{R})$, а ψ — 3-форма со стабилизатором $SL(3, \mathbb{C})$ в каждой точке, связанных дополнительными условиями, позволяет определить $SU(3)$-структуру на M. Начнем с того, что 3-форма ψ со стабилизатором $SL(3, \mathbb{C})$ определяет на M почти комплексную структуру J_ψ по формуле (2.16) (см. п. 2.4). Для того чтобы такая пара (ω, ψ) определяла на многообразии $SU(3)$ структуру, необходимо выполнение двух дополнительных условий:

1) $\omega \wedge \psi = 0$;
2) $\omega(X, J_\psi X) > 0$.

2-Форма ω, удовлетворяющая первому условию, будет инвариантна относительно J_ψ:

$$\omega(J_\psi X, J_\psi Y) = \omega(X, Y).$$

Если для нее выполняется и второе условие, то это позволяет определить на M^6 метрику $g(X, Y) = \omega(X, J_\psi Y)$.

Допустим, что на многообразии M^6 определена некоторая $SU(3)$-структура (ω, ψ). Для того чтобы соответствующая ей почти эрмитова структура (g, J_ψ) стала приближенно кэлеровой, необходимо выполнение следующих условий (см. [45]):

$$\psi = 3d\omega, \quad d\phi = -2\mu\omega \wedge \omega,$$

где $\iota_{JX}\phi = \iota_X\psi$.

Пусть теперь $(\overline{M}, \overline{g})$, где $\overline{M} = M \times \mathbb{R}^+$, $\overline{g} = r^2 g + dr^2$ в координатах (x, r) — риманов конус для многообразия (M, g). В случае, если пара форм (ω, ψ) определяет приближенно кэлерову $SU(3)$-структуру на (M, g), риманов конус $(\overline{M}, \overline{g})$ наделен формой

$$\rho = r^2 dr \wedge \omega + r^3\psi, \tag{4.10}$$

определяющей G_2-структуру на $\overline{M}$ и параллельной относительно связности Леви-Чивита метрики $\overline{g}$. Обратно, параллельная 3-форма на $(\overline{M}, \overline{g})$ всегда может быть записана в виде (4.10), где пара (ω, ψ) определяет приближенно кэлерову $SU(3)$-структуру на M.

Риманов конус шестимерной сферы есть евклидово пространство $\mathbb{R}^7$. Следовательно, приближенно кэлерова структура на S^6, совместимая с g_0, определяет параллельную или, что эквивалентно, постоянную 3-форму на $\mathbb{R}^7$.

Пусть $x \in S^6$ и (ω_x, ψ_x) — некоторая $SU(3)$-структура на T_xS^6. Такая структура может быть продолжена до приближенно кэлеровой структуры на сфере. Определим постоянную 3-форму на $\mathbb{R}^7$, значение которой в точке $(x, 1)$ равно

$$\rho_{(x,1)} = dr \wedge \omega_x + \psi_x.$$

Тогда ρ параллельна относительно связности Леви-Чивита плоской метрики. Определим теперь формы $\omega = \iota_{\partial/\partial r}\rho$ и $\psi = \frac{1}{3}d\omega$. Несложно показать (см. [24]), что они определяют приближенно кэлерову структуру на S^6, и значения этих форм в точке x совпадают с ω_x и ψ_x соответственно.

Пусть $\Psi_x = dz^1 \wedge dz^2 \wedge dz^3$ — комплексная форма объема на T_xS^6; тогда $\psi_x = \operatorname{Re}\Psi_x$ определяет стандартную комплексную структуру J_{0_x} на $T_xS^6 = \mathbb{R}^6$. Пусть

$$\lambda = \cos\varphi + i\sin\varphi, \quad \varphi \in \left[0; \frac{2\pi}{3}\right).$$

Рассмотрим семейство форм $\Psi_{\lambda_x} = \lambda^3\Psi_x$. Отождествим λ с унитарным преобразованием $\lambda \cdot \mathrm{Id} \in U(3)$, вложенным в $SO(6)$ стандартным способом. Тогда

$$\psi_{\lambda_x}(X, Y, Z) = \psi_x(\lambda X, \lambda Y, \lambda Z), \quad K_\lambda(\lambda X) = \lambda K(X), \quad J_{\lambda_x} = \lambda J_x \lambda^{-1} = J_x.$$

Таким образом, однопараметрическое семейство $SU(3)$-структур $(\omega_x, \operatorname{Re}(\lambda\Psi_x))$ определяет семейство приближенно кэлеровых структур J_λ, значения которых в точке x совпадают.

Любая другая $SU(3)$-структура на T_xS^6 может быть задана парой форм (ω_A, ψ_A), где

$$A \in SO(6), \quad \omega_A(X, Y) = \omega(A^{-1}X, A^{-1}Y), \quad \psi_A(X, Y, Z) = \psi(AX, AY, AZ).$$

Для такой пары форм $K_A(AX) = AK(X)$ и, соответственно, $J_{A_x} = AJ_xA^{-1}$. Таким образом, для каждой точки $x \in S^6$ $SU(3)$ структуры (ω_x, ψ_x) определяют все возможные почти комплексные структуры на T_xS^6, причем для каждого возможного значения J_x существует однопараметрическое семейство таких приближенно кэлеровых структур J_λ на S^6, что $J_{\lambda_x} = J_x$.

4.4. Об интегрируемости почти комплексных структур на S^6. В [21] было доказано, что среди четномерных сфер только S^2 и S^6 допускают почти комплексную структуру. Поскольку любая почти комплексная структура на двумерном многообразии интегрируема (см., например, [13]), то и почти комплексная структура на S^2 является комплексной. Однако для S^6 дело обстоит гораздо сложнее. Структуры Кэли задают семимерное подпространство в бесконечномерном пространстве почти комплексных структур, ортогональных относительно «круглой» метрики g. Все они строго приближенно кэлеровы, а значит, не могут быть интегрируемыми. Про остальные почти комплексные структуры, ортогональные относительно g, известно, что они также не интегрируемы (см. [39]). Однако не известно, к какому классу почти эрмитовых многообразий относится сфера с «круглой» метрикой и ортогональной почти комплексной структурой, не являющейся структурой Кэли.

Неинтегрируемость ортогональных почти комплексных структур на «круглой» сфере после работы Клода Ле Брюна была показана в работах многих других авторов (см., например, [20,51]). В [20] доказана следующая теорема.

Теорема 4.14. *Пусть g — риманова метрика на S^6 с положительным оператором кривизны $\widetilde{R}$, удовлетворяющим следующему условию: в каждой точке $x \in S^6$ соотношение наибольшего $\lambda_{\max}$ и наименьшего $\lambda_{\min}$ собственных значений $\widetilde{R}$ удовлетворяет неравенству*

$$\frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}} < \frac{7}{5}.$$

Тогда (S^6, g) не допускает ортогональной комплексной структуры.

Это показывает, что для метрик, находящихся «достаточно близко» к «круглой» метрике, невозможна интегрируемость ортогональных почти комплексных структур.

В 2015 г. Г. Этеши опубликовал статью [30], в которой привел доказательство существования комплексной структуры на сфере S^6. Идея его доказательства состоит в том, чтобы «перенести» комплексную структуру с G_2 на S^6, используя диффеоморфизм между $G_2/SU(3)$ и S^6. Однако доказательство существования такого «переноса» содержит многочисленные неточности и серьезные пробелы.

Расширим множество заведомо неинтегрируемых почти комплексных структур следующим образом. Откажемся от требования ортогональности и будем рассматривать почти комплексные структуры, принадлежащие слоям расслоения, описанного в п. 2.2, лежащим над почти комплексными структурами Кэли. Если J — почти комплексная структура Кэли, то вместе с «круглой» метрикой g она определяет 2-форму $\omega_J(X,Y) = g(JX,Y)$, то слоем над J будет пространство всех положительно ассоциированных с формой ω_J почти комплексных структур $\mathcal{A}^+_{\omega_J}$.

Теорема 4.15 (см. [1])**.** *Для строго приближенно кэлерова 6-многообразия (M,g,J,ω) всякая почти комплексная структура $I \in \mathcal{A}^+_\omega$ неинтегрируема.*

В [3] доказан более сильный результат.

Теорема 4.16. *Для строго приближенно кэлерова 6-многообразия (M,g,J,ω) всякая почти эрмитова структура (g_I,I), где $I \in \mathcal{A}^+_\omega$ и $g_I(\cdot,\cdot) = \omega(\cdot,I\cdot)$, не может принадлежать классу $\mathcal{G}_2$ по классификации Грэя—Хервеллы.*

Эти результаты позволяют получить следующее утверждение.

Теорема 4.17. *Все почти комплексные структуры на S^6, положительно ассоциированные с теми же 2-формами, что и структуры Кэли, являются неинтегрируемыми.*

В 2003 г. профессор Чжень Шэншэнь занимался изучением вопроса о существовании комплексных структур на S^6. К сожалению, он не успел закончить решение этой проблемы, уйдя из жизни в 2004 г. Узкому кругу математиков была доступна его рукопись, в которой он доказал, что на S^6 не существует комплексных структур. Теорема Чженя утверждала несуществование интегрируемых структур среди принадлежащих $\mathcal{A}^+_\omega$. Однако в доказательстве этого утверждения он использовал свойство формы ω, которым обладает лишь 2-форма, соответствующая приближенно кэлеровой структуре (g,J), поэтому результат не может быть распространен на все почти комплексные структуры на шестимерной сфере. В 2014 г. Р. Брайант опубликовал работу [22], посвященную этой последней работе Чженя.

5. Почти комплексные структуры на $S^3 \times S^3$

В данном разделе мы рассмотрим почти комплексные структуры на произведении сфер $S^3 \times S^3$. Поскольку структуры Калаби—Экмана являются интегрируемыми, начнем именно с них.

5.1. Комплексные структуры Калаби—Экмана на $S^3 \times S^3$. На произведении сфер $S^3 \times S^3$ существует хорошо известное двухпараметрическое семейство комплексных структур (см. [13, 44]). Конструкция таких структур основывается на расслоении Хопфа $S^3 \xrightarrow{S^1} \mathbb{CP}^2$. Применяя расслоение Хопфа к каждому из сомножителей в произведении сфер $S^3 \times S^3$, получим расслоение с базой $\mathbb{CP}^2 \times \mathbb{CP}^2$ и слоем $S^1 \times S^1$. База и слой — комплексные многообразия; зафиксировав на них комплексные структуры и подобрав голоморфные функции перехода, можно получить комплексную структуру на $S^3 \times S^3$. Данное семейство комплексных структур было построено Е. Калаби и Б. Экманом в [26]. Оно является двухпараметрическим, поскольку тор $S^1 \times S^1$ обладает двухпараметрическим семейством комплексных структур.

Опишем конструкцию структуры Калаби—Экмана в терминах однородных пространств. Действительно,

$$S^3 \times S^3 = U(2)/U(1) \times U(2)/U(1),$$

группа $U(1) \times U(1)$ является слоем, а база расслоения — это

$$\mathbb{CP}^2 \times \mathbb{CP}^2 = U(2)/(U(1) \times U(1)) \times U(2)/(U(1) \times U(1)).$$

Алгебра Ли $\mathfrak{u}(2)$ состоит из косоэрмитовых (2×2)-матриц:

$$\mathfrak{u}(2) = \left\{ \begin{pmatrix} ia & -\overline{x} \\ x & ib \end{pmatrix}, \quad a, b \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{C} \right\}.$$

Алгебра Ли $\mathfrak{u}(1) = \big\{(ic) : c \in \mathbb{R}\big\}$ вкладывается в $\mathfrak{u}(2)$ как $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & ic \end{pmatrix}$. Тогда базис касательного пространства $T_0(U(2)/U(1))$ есть

$$v_1 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

Обозначим базисные векторы для касательного пространства ко второму сомножителю через w_1, w_2, w_3; тогда v_1, w_1 — векторы, касательные к слою, а v_2, v_3, w_2, w_3 — векторы, касательные к базе. Обозначим касательные пространства к каждому сомножителю через $\mathfrak{m}_1$ и $\mathfrak{m}_2$ соответственно; тогда $T_0(S^3 \times S^3) = \mathfrak{m}_1 \times \mathfrak{m}_2$.

Построение инвариантной почти комплексной структуры на однородном пространстве

$$S^3 \times S^3 = U(2)/U(1) \times U(2)/U(1)$$

сводится к построению эндоморфизма J на $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_1 \times \mathfrak{m}_2$, $J^2 = -1$, коммутирующего с представлением изотропии $\mathrm{Ad}_{U(1)\times U(1)}\big|_{\mathfrak{m}}$.

В базисе v_1, w_1, v_2, v_3, w_2, w_3 инвариантные почти комплексные структуры на $U(2)/U(1) \times U(2)/U(1)$ зависят от двух параметров и задаются матрицей

$$I_{a,c} = \begin{pmatrix} \begin{matrix} a/c & -(a^2+c^2)/c \\ 1/c & -a/c \end{matrix} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_1 I_1 & \\ 0 & & \varepsilon_2 I_2 \end{pmatrix},$$

где $\varepsilon_1, \varepsilon_1 = \pm 1$, $I_1(v_2) = v_3$, $I_2(w_2) = w_3$ (см. [4]).

Лемма 5.1 (см. [4]). *Почти комплексные структуры построенного выше семейства интегрируемы,* $\mathrm{ad}(\mathfrak{u}(1)\times\mathfrak{u}(1))$*-инвариантны и определяют ту же ориентацию, что и* $I_{0,1}$*,* $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$ *в следующих случаях*:

(i) *при* $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$, $c > 0$;
(ii) $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = -1$, $c > 0$;
(iii) $\varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2 = -1$, $c < 0$.

Множество всех $U(2) \times U(2)$-инвариантных почти комплексных структур на $S^3 \times S^3$ совпадает с множеством комплексных структур Калаби—Экмана.

Сосредоточим внимание только на тех почти комплексных структурах, для которых $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$, $c > 0$. Пусть v_1, w_1, v_2, v_3, w_2, w_3 также обозначают ковекторы, соответствующие одноименным векторам; тогда на $\mathfrak{m}$ можно определить внешние дифференциальные формы

$$\omega_{t,\lambda_1,\lambda_2} = t v_1 \wedge w_1 + \lambda_1 v_2 \wedge v_3 + \lambda_2 w_2 \wedge w_3,$$

где $t, \lambda_1, \lambda_2 > 0$.

Лемма 5.2 (см. [4]). *Все комплексные структуры* $I_{a,c}$ *принадлежат пространству* $\mathcal{A}^+_{\omega_{t,\lambda_1,\lambda_2}}$ *для любых* $t, \lambda_1, \lambda_2 > 0$.

Замечание 5.3. Каждой комплексной структуре $I_{a,c}$ можно поставить в соответствие трехпараметрическое семейство метрик по формуле

$$g_{\lambda,\lambda';t}(X, Y) = \omega_{\lambda,\lambda';t}(X, I_{a,c} Y).$$

Учитывая параметры a и c, получаем семейство метрик, зависящее от пяти параметров.

В [4] получены оценки для секционной кривизны оценки для любой инвариантной метрики на однородном пространстве $U(n+1)/U(n) \times U(p+1)/U(p)$, для произвольных натуральных значений n и p, в частности, для $U(2)/U(1) \times U(2)/U(1)$.

Теорема 5.4. *Секционная кривизна K метрики $g_{a,c,\lambda,\lambda';t}$ удовлетворяет неравенству*

$$K_{\min} \leqslant K \leqslant K_{\max},$$

где

$$K_{\min} = \min\left(-\frac{|a|t}{c\lambda\lambda'},\ \frac{c(\lambda m_2 + \lambda' m_1) - \sqrt{c^2(\lambda' m_1 - \lambda m_2)^2 + 16a^2t^2}}{2c\lambda\lambda'}\right),$$

$$K_{\max} = \max\left(\frac{t}{c\lambda^2},\ \frac{(a^2+c^2)t}{c\lambda'^2},\ \frac{|a|t}{c\lambda\lambda'},\ \frac{c(\lambda m_2 + \lambda' m_1) + \sqrt{c^2(\lambda' m_1 - \lambda m_2)^2 + 16a^2t^2}}{2c\lambda\lambda'}\right),$$

$$m_1 = \min\left(4 - \frac{3t}{c\lambda},\ 1\right), \quad m_2 = \min\left(4 - 3\frac{(a^2+c^2)t}{c\lambda'},\ 1\right).$$

5.2. Левоинвариантные почти комплексные структуры на $SU(2)\times SU(2)$. Кроме структуры Кэли и комплексных структур Калаби—Экмана на произведении сфер $S^3 \times S^3$ имеется множество других почти комплексных структур. Будем рассматривать $S^3 \times S^3$ как группу Ли $G = SU(2) \times SU(2)$. Обозначим через $\mathfrak{a}$ алгебру Ли $\mathfrak{su}(2) \times \mathfrak{su}(2)$; тогда множество всех левоинвариантных почти комплексных структур на группе Ли G отождествляется с множеством всех эндоморфизмов $I : \mathfrak{a} \to \mathfrak{a}$, $I^2 = -1$. Семейство $U(2) \times U(2)$-инвариантных почти комплексных структур на $U(2)/U(1) \times U(2)/U(1)$ задается двумя параметрами, в случае левоинвариантных почти комплексных структур на группе Ли G имеем уже 18-параметрическое семейство структур. Естественным образом возникает вопрос о существовании других комплексных структур на $S^3 \times S^3$, отличных от структур Калаби—Экмана. В [5] доказано, что среди левоинвариантных почти комплексных структур нет других интегрируемых, отличных от структур Калаби—Экмана.

Алгебру Ли группы $SU(2) \times SU(2)$ можно отождествить с $\mathbb{R}^3_1 \times \mathbb{R}^3_2$, где $\mathbb{R}^3_1$ и $\mathbb{R}^3_2$ — два экземпляра $\mathbb{R}^3$. Скобка Ли для $X, Y \in \mathbb{R}^3_1 \times \mathbb{R}^3_2$, где $X = (X_1, X_2)$, $Y = (Y_1, Y_2)$, $X_i, Y_i, \in \mathbb{R}^3_i$ имеет вид

$$[X, Y] = ([X_1, Y_1], [X_2, Y_2]).$$

Если e_1, e_2, e_3 — стандартный базис в $\mathbb{R}^3_1$ и e_4, e_5, e_6 — стандартный базис в $\mathbb{R}^3_2$, то

$$[e_1, e_2] = e_3, \quad [e_2, e_3] = e_1, \quad [e_3, e_1] = e_2, \quad [e_4, e_5] = e_6,$$
$$[e_5, e_6] = e_4, \quad [e_6, e_4] = e_5, \quad [e_i, e_j] = 0 \quad \text{для } i = 1,2,3,\ j = 4,5,6.$$

Форма Киллинга—Картана

$$B(X, Y) = -\operatorname{tr}(\operatorname{ad} X \circ \operatorname{ad} Y)$$

задает на $SU(2) \times SU(2)$ метрику

$$B(X, Y) = 2(X_1, Y_1) + 2(X_2, Y_2),$$

где $(\cdot,\cdot)$ — стандартная метрика на $\mathbb{R}^3$.

Зафиксируем на $SU(2) \times SU(2)$ метрику B и ориентацию, индуцируемую структурой Калаби—Экмана $I_{0,1}$, $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$. На множестве левоинвариантных почти комплексных структур $\mathcal{Z}$, содержащихся в $\mathcal{A}O^+_B$, можно определить функционал нормы тензора Нейенхейса $J \to \|N(J)\|$. Множество $\mathcal{Z} = SO(6)/U(3) = \mathbb{CP}^3$ компактно. Функционал J достигает минимума на комплексных структурах, а именно на структурах $I_{(0,1)}$, $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$, и $I_{(0,-1)}$, $\varepsilon_1\varepsilon_2 = -1$. В [7] найдены ортогональные левоинвариантные структурыб на которых достигается максимум.

Теорема 5.5. *Максимальное значение нормы тензора Нейенхейса на множестве $\mathcal{Z}$ для группы Ли $SU(2) \times SU(2)$ достигается на классе структур*

$$\mathcal{N}_{\max} = \Big\{J \in \mathcal{Z} :\ J\langle e_1, e_2, e_3\rangle \subset \langle e_4, e_5, e_6\rangle,\ J\langle e_4, e_5, e_6\rangle \subset \langle e_1, e_2, e_3\rangle\Big\}$$

и равно $8\sqrt{3}$.

Каждая почти комплексная структура $I \in \mathcal{Z}$ определяет кососимметрическую 2-форму $\omega_I(X,Y) = B(IX,Y)$. Так как $S^3 \times S^3$ не допускает симплектической структуры, то $d\omega_I \neq 0$, а значит, каждой почти комплексной структуре $I \in \mathcal{Z}$ соответствует ненулевая 3-форма $d\omega_I$.

В разделе 2.4 описана конструкция, позволяющая по 3-форме Ω, удовлетворяющей условию $\lambda(\Omega) < 0$, построить почти комплексную структуру.

В [24] такая конструкция использована для вычисления приблизительно кэлеровой структуры на $SU(2) \times SU(2)$. Этот результат опирается на то, что приблизительно кэлерова структура может быть определена парой (ω, ψ), состоящей из 2-формы ω и 3-формы ψ, удовлетворяющих следующим условиям:

1) $\lambda(\psi) < 0$, т.е. ψ определяет почти комплексную структуру J;
2) $\omega \wedge \omega \wedge \omega \neq 0$;
3) $\omega \wedge \psi = 0$. При выполнении этого условия форма ω становится формой типа $(1,1)$ относительно почти комплексной структуры J;
4) $\omega(X, JX)$ — положительно определенная форма, т.е. в паре с J дает положительно определенную метрику;
5) $\psi = 3d\omega$, $d\phi = -2\mu\omega \wedge \omega$, где $i_X\psi = i_{JX}\phi$, $\mu \in \mathbb{R}$.

Пусть $I \in \mathcal{Z}$. В базисе $(e) = (e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6)$ почти комплексная структура I задается кососимметрической матрицей

$$I = \begin{pmatrix} A & B \\ -B^T & C \end{pmatrix},$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & a_2 \\ -a_1 & 0 & a_3 \\ -a_2 & -a_3 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ b_4 & b_5 & b_6 \\ b_7 & b_8 & b_9 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & c_1 & c_2 \\ -c_1 & 0 & c_3 \\ -c_2 & -c_3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Параметры a_i, b_j, c_k, $i,k = 1,2,3$, $j = 1,\ldots,6$, связаны соотношениями, вытекающими из условия $I^2 = -1$.

Теорема 5.6 (см. [7]). *Неравенство $\lambda(d\omega_I) < 0$ справедливо в том и только том случае, когда $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 < 3/4$.*

Замечание 5.7. Так как $I^2 = -1$, то следующие условия эквивалентны:

1) $\lambda(d\omega_I) < 0$;
2) $c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 < 3/4$;
3) $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 < 3/4$;
4) $\sum\limits_{i=1}^{9} b_i^2 > 3/2$.

Обозначим подмножество в $\mathcal{Z}$, состоящее из почти комплексных структур, удовлетворяющих условию $\lambda(d\omega_I) < 0$, через $\mathcal{Z}^-$.

Замечание 5.8. Ни одна B-ортогональная комплексная структура не удовлетворяет этому условию, так как $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1$. Напротив, $\mathcal{N}_{\max} \subset \mathcal{Z}^-$.

Теперь на множестве $\mathcal{Z}^-$ определено отображение

$$\alpha : I \in \mathcal{Z}^- \to K_I \to J_I = \frac{1}{\sqrt{-\lambda(d\omega_I)}} K_I.$$

Прямые вычисления (см. [7]) показывают, что матрица K в репере (e) имеет вид

$$K = \begin{pmatrix} 1 - 2A^* & -2B^* \\ 2B^{*T} & -1 + 2C^* \end{pmatrix},$$

где A^*, B^*, C^* — алгебраические дополнения к матрицам A, B, C соответственно.

Для матрицы

$$I_0 = \begin{pmatrix} 0 & -E \\ E & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{N}_{\max}$$

соответствующая почти комплексная структура имеет вид

$$J_{I_0} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Вместе с метрикой

$$g_{\mathcal{NK}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

она дает приближенно кэлерову структуру (см. [24]). Учитывая, что для шестимерных многообразий, не изометричных «круглой» сфере, приближенно кэлерова структура однозначно определяется почти комплексной структурой или метрикой (см. [53]), будем называть структуру J_{I_0} *приближенно кэлеровой.*

Можно показать, что справедливы следующие утверждения.

Лемма 5.9 (см. [7]). *Неравенство* $\det B < 0$ *выполняется для всех почти комплексных структур* $I \in \mathcal{Z}^-$.

Лемма 5.10 (см. [7]). *Для любой почти комплексной структуры* $I \in \mathcal{Z}$ *соответствующая ей структура* $J_I = \alpha(I)$ *задает на* $S^3 \times S^3$ *ту же ориентацию, что и* I.

Теорема 5.11. *Структура* J_I *принадлежит пространству* $\mathcal{A}^+_{\omega_J}$, *где*

$$\omega_J = \frac{2}{\sqrt{1-\lambda}} \begin{pmatrix} 0 & (1+yA^*)B^* \\ -(1+yC^*)B^{*T} & 0 \end{pmatrix}, \quad y = \frac{1-\sqrt{1-x}}{x\sqrt{1-x}}.$$

В доказательстве используется конструкция проекции действующей на расслоении почти комплексных структур $\pi : \mathcal{A}^+ \to \mathcal{A}O^+_B$ (см. раздел 2.2). Прямые вычисления (см. [7]) данной проекции дают указанный выше результат.

Замечание 5.12. Очевидно, что

$$X = \frac{2}{\sqrt{1-\tau}}(1+yA^*)B^* \in SO(3).$$

Тогда матрица формы ω_J будет иметь канонический вид

$$\begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix}$$

в репере $(u_1, u_2,\ u_3, u_4, u_5, u_6) = (e_1, e_2, e_3, Xe_4, Xe_5, Xe_6)$. Группа $SO(3) \times SO(3)$ действует на $SU(2) \times SU(2)$ с метрикой B изометриями (см. [24]). Имеем

$$[u_4, u_5] = u_6, \quad [u_4, u_6] = -u_5, \quad [u_5, u_6] = u_4, \quad u_4, u_5, u_6 \in \{0\} \times \mathfrak{su}(2).$$

Таким образом, реперы (e) и (u) эквивалентны (см. [24]). Можно повторить все эти вычисления для почти комплексной структуры $I \in \mathcal{Z}$ в новом базисе (u), в результате чего получим $\pi(J_I) = I_0$.

Следствие 5.13. *Отображение*

$$I \in \mathcal{Z}^- \to J_I \to \pi(J_I) \to J_{\pi(J_I)}$$

дает приближенно кэлерову структуру.

5.3. Почти комплексные структуры Кэли на произведении сфер $S^3 \times S^3$**.** Рассмотрим произведение двух нечетномерных сфер S^3 и S^3, вложенное в $\mathbb{C}\mathrm{a} = \mathbb{R}^8$ следующим образом. Сфера S^3 является единичной в координатной плоскости $\mathbb{R}^4$, состоящей из чисел вида

$$x = x^0 + x^1 e_1 + x^2 e_2 + x^3 e_3,$$

а вторая сфера S^3 является единичной в другой координатной плоскости $\mathbb{R}^4$, состоящей из чисел вида

$$y = x^4 e_4 + x^5 e_5 + x^6 e_6 + x^7 e_7.$$

Считая число e_1 комплексной мнимой единицей, $e_1 = i$, отождествим первое пространство $\mathbb{R}^4$ чисел $x = x^0 + x^1e_1 + x^2e_2 + x^3e_3$ с комплексными матрицами следующим образом:

$$x = x^0 + x^1e_1 + x^2e_2 + x^3e_3 = (x^0 + x^1i) + (x^2 + x^3i)e_2 = z^1 + z^2e_2 \equiv \begin{pmatrix} z^1 & z^2 \\ -\overline{z^2} & \overline{z^1} \end{pmatrix} = U_x.$$

При этом произведение xy чисел Кэли переходит в произведение матриц U_xU_y. Легко видеть, что сфера $S^3 \subset \mathbb{R}^4$ отождествляется с группой $SU(2)$. Касательное пространство в единице T_1S^3 имеет базис из векторов e_1, e_2, e_3. При отождествлении $S^3 \equiv SU(2)$ данному базису соответствует базис в касательном пространстве $T_eSU(2)$ в единице e, состоящий из матриц

$$E_1 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_3 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда соответствующие правоинвариантные векторные поля на S^3 имеют вид

$$\begin{aligned} V_1(x) &= dR_x(E_1) = (-x^1, x^0, -x^3, x^2), \\ V_2(x) &= dR_x(E_2) = (-x^2, x^3, x^0, -x^1), \\ V_3(x) &= dR_x(E_3) = (-x^3, -x^2, x^1, x^0). \end{aligned}$$

Легко видеть, что данные правоинвариантные поля получаются из векторов e_1, e_2, e_3 при их умножении справа (как чисел Кэли) на элемент $x \in S^3$. Действительно,

$$\begin{aligned} e_1x &= e_1\Big(x^0 + x^1e_1 + x^2e_2 + x^3e_3\Big) = -x^1 + x^0e_1 - x^3e_2 + x^2e_3 = \Big(-x^1,\ x^0,\ -x^3,\ x^2) = V_1(x), \\ e_2x &= e_2\Big(x^0 + x^1e_1 + x^2e_2 + x^3e_3\Big) = -x^2 + x^3e_1 + x^0e_2 - x^1e_3 = \Big(-x^2,\ x^3,\ x^0,\ -x^1\Big) = V_2(x), \\ e_3x &= e_3\Big(x^0 + x^1e_1 + x^2e_2 + x^3e_3\Big) = -x^3 - x^2e_1 + x^1e_2 + x^0e_3 = \Big(-x^3,\ -x^2,\ x^1,\ x^0\Big) = V_3(x). \end{aligned}$$

Аналогично отождествим второе пространство $\mathbb{R}^4$ чисел

$$y = x^4e_4 + x^5e_5 + x^6e_6 + x^7e_7 = (x^4 + x^5e_1 + x^6e_2 + x^7e_3)e_4$$

с комплексными матрицам следующим образом:

$$y = (x^4, x^5, x^6, x^7) = (x^4 + x^5i, x^6 + x^7i) = (w^1, w^2) = \begin{pmatrix} w^1 & -\overline{w^2} \\ w^2 & \overline{w^1} \end{pmatrix} = U_y.$$

Легко видеть, что сфера $S^3 \subset \mathbb{R}^4$ отождествляется с группой $SU(2)$. Касательное пространство $T_{e_4}S^3$ в точке e_4 имеет базис из векторов e_5, e_6, e_7. При отождествлении $S^3 \equiv SU(2)$ данному базису соответствует базис в касательном пространстве $T_eSU(2)$, состоящий из матриц $F_1 = E_1$, $F_2 = -E_2$, $F_3 = E_3$. Тогда соответствующие им правоинвариантные векторные поля на S^3 имеют вид

$$W_1(y) = (-x^5, x^4, x^7, -x^6), \quad W_2(y) = (-x^6, -x^7, x^4, x^5), \quad W_3(y) = (-x^7, x^6, -x^5, x^4).$$

Данные правоинвариантные поля получаются из векторов e_1, e_2, e_3 при их умножении справа на элемент $y \in S^3$. Действительно,

$$\begin{aligned} e_1y &= e_1\Big(x^4e_4 + x^5e_5 + x^6e_6 + x^7e_7\Big) = x^4e_5 - x^5e_4 - x^6e_7 + x^7e_6 = \Big(-x^5,\ x^4,\ x^7,\ -x^6\Big) = W_1(y), \\ e_2y &= e_2\Big(x^4e_4 + x^5e_5 + x^6e_6 + x^7e_7\Big) = x^4e_6 + x^5e_7 - x^6e_4 - x^7e_5 = \Big(-x^6,\ -x^7,\ x^4,\ x^5\Big) = W_2(y), \\ e_3y &= e_3\Big(x^4e_4 + x^5e_5 + x^6e_6 + x^7e_7\Big) = x^4e_7 - x^5e_6 + x^6e_5 - x^7e_4 = \Big(-x^7,\ x^6,\ -x^5,\ x^4\Big) = W_3(y). \end{aligned}$$

Теорема 5.14 (см. [18]). *Ортогональная почти комплексная структура Кэли на $S^3 \times S^3$ является неинтегрируемой. При естественном отождествлении произведения сфер $S^3 \times S^3$ с группой Ли $SU(2) \times SU(2)$, почти комплексная структура Кэли J является правоинвариантной. При этом, для базисных правоинвариантных векторных полей V_i и W_j на группах-сомножителях, имеют место равенства*

$$JW_1 = V_1, \quad JW_2 = V_2, \quad JW_3 = V_3.$$

Доказательство. Для доказательства правоинвариантности структуры Кэли J достаточно проверить, что оператор почти комплексной структуры J переводит правоинвариантные векторные поля $W_i(y)$ в правоинвариантные векторные поля $V_i(x)$. Пусть $(x,y) \in S^3 \times S^3$. Как уже отмечалось, $n_1(x) = x$ и $n_2(y) = y$. В дальнейших вычислениях будем использовать следующие свойства:

(i) $n_1 n_2 \perp e_i$, $n_1 \perp n_2$, $n_2 \perp e_i$, $n_1 \perp n_2 \times e_i$, $n_2 \perp n_2 \times e_i$ для $i = 1, 2, 3$;
(ii) $uv = U \times V - \langle U, V\rangle$ для чисто мнимых октав u и v;
(iii) $n \times (n \times Z) = -Z + \langle n, Z\rangle n$, если n — вектор единичной длины;
(iv) $(X \times Y) \times Z = -X \times (Y \times Z) + 2\langle X, Z\rangle Y - \langle X, Y\rangle Z - \langle Y, Z\rangle X$;
(v) $\langle xy, zy\rangle = \langle x, z\rangle\langle y, y\rangle$.

Учитывая разложение $n_1 = n_1^0 + N_1$ на вещественную и чисто мнимую части, для $i = 1, 2, 3$ имеем

$$\begin{aligned}
J(W_i(y)) = J(e_i y) = (n_1 n_2)(e_i n_2) = -\langle n_1 n_2, e_i n_2\rangle + (n_1 n_2) \times (e_i n_2) = \\
= -\langle n_1, e_i\rangle + \big((n_1^0 + N_1)n_2\big) \times (e_i \times n_2) = \\
= -\langle n_1, e_i\rangle + n_1^0\big(n_2 \times (e_i \times n_2)\big) + (N_1 \times n_2) \times (e_i \times n_2) = \\
= -\langle n_1, e_i\rangle - n_1^0\big(n_2 \times (n_2 \times e_i)\big) - (N_1 \times n_2) \times (n_2 \times e_i) = \\
= -\langle n_1, e_i\rangle + n_1^0 e_i - (N_1 \times n_2) \times (n_2 \times e_i) = \\
= -\langle n_1, e_i\rangle + n_1^0 e_i + N_1 \times \big(n_2 \times (n_2 \times e_i)\big) - 2\langle N_1, n_2 \times e_i\rangle n_2 + \\
+ \langle N_1, n_2\rangle (n_2 \times e_i) + \langle n_2, n_2 \times e_i\rangle N_1 = \\
= -\langle n_1, e_i\rangle + n_1^0 e_i + N_1 \times (n_2 \times (n_2 \times e_i)) = \\
= n_1^0 e_i - N_1 \times e_i - \langle n_1, e_i\rangle = n_1^0 e_i - N_1 \times e_i - \langle N_1, e_i\rangle = \\
= n_1^0 e_i + e_i \times N_1 - \langle e_i, N_1\rangle = e_i(n_1^0 + N_1) = e_i n_1 = e_i x = V_i(x).
\end{aligned}$$

Очевидно, что почти комплексная структура Кэли на $S^3 \times S^3$ является неинтегрируемой. Тензор Нейенхейса легко вычисляется для базисных правоинвариантных полей V_i и W_j, $i, j = 1, 2, 3$, с учетом того, что $[V_i, W_j] = 0$. $\square$

Пусть e^1, e^2, e^3, f^1, f^2, f^3 — базис, дуальный к $\{E_1, E_2, E_3, F_1, F_2, F_3\}$. Тогда фундаментальная форма ω имеет вид

$$\omega = -e^1 \wedge f^1 - e^2 \wedge f^2 - e^3 \wedge f^3.$$

В [18] показано, что 3-форма $\Omega = d\omega$ на $S^3 \times S^3 \equiv SU(2) \times SU(2)$ невырождена и определяет следующую почти комплексную структуру I_Ω на $S^3 \times S^3$:

$$I_\Omega(X_1, X_2) = \frac{1}{\sqrt{3}}\big(2X_2 - X_1,\ -2X_1 + X_2\big), \tag{5.1}$$

где X_1 и X_2 — компоненты касательного вектора $X \in T(S^3 \times S^3)$.

6. Структуры Кэли на произведениях сфер $S^1 \times S^5$ и $S^2 \times S^4$

Рассмотрим теперь остальные случаи произведений сфер в пространстве $\mathbb{C}$a. Напомним, что на $S^1 \times S^{2m-1}$ существует комплексная структура (см. [38]); в [29] показано, что на произведении четномерных сфер почти комплексная структура существует только в одном нетривиальном случае $S^2 \times S^4$.

6.1. Произведение сфер $S^1 \times S^5$. Пусть сфера S^1 является единичной в координатной плоскости $\mathbb{R}^2$, состоящей из чисел вида $x = x^0 + x^4 e_4$, а S^5 является единичной в координатной плоскости $\mathbb{R}^6$, состоящей из чисел вида $x = x^1 e_1 + x^2 e_2 + x^3 e_3 + x^5 e_5 + x^6 e_6 + x^7 e_7$. Пусть $n_1(x) = x \in S^1$ и $n_2(x) = x \in S^5$. Поскольку $S^1 \times S^5$ — шестимерное подмногообразие в $\mathbb{R}^8$, то оно имеет почти комплексную структуру, определенную формулой

$$J(X) = P(n_1, n_2, X) = (n_1 n_2)X, \quad X \in T_{(n_1, n_2)} S^1 \times S^{2m-1}.$$

Вложение $S^1 \times S^5 \subset E^{2,6}$ является (почти) голоморфным. Поэтому мы можем использовать полученные ранее выражения (3.7) для тензора Нейенхейса и (3.10) для фундаментальной 2-формы с учетом того, что касательные векторы X, Y ортогональны к n_1 и n_2.

Отметим, что S^1 является группой относительно умножения чисел Кэли. Легко видеть, что $n_1 n_2 \in S^5$. Поэтому группа S^1 действует слева на S^5: $S^1 \times S^5 \to S^5$. Это действие удобно выразить при помощи комплексных чисел. Вектор $x = x^0 + x^4 e_4 \in \mathbb{R}^2$ удобно отождествить с комплексным числом $x = x^0 + x^4 i = z \in \mathbb{C}$, считая, что $e_4 = i$ — мнимая единица. Для векторов $y \in \mathbb{R}^6$ имеем

$$\begin{aligned} y = x^1 e_1 + x^2 e_2 + x^3 e_3 + x^5 e_5 + x^6 e_6 + x^7 e_7 = (x^1 - x^5 e_4) e_1 + (x^2 - x^6 e_4) e_2 - (x^3 + x^7 e_4) e_3 = \\ = (x^1 - i x^5) e_1 + (x^2 - i x^6) e_2 + (x^3 - i x^7) e_3 = z^1 e_1 + z^2 e_2 + z^3 e_3 \equiv (z^1, z^2, z^3). \end{aligned}$$

Таким образом можно отождествить $\mathbb{R}^6$ с $\mathbb{C}^3$. Тогда левое действие S^1 на S^5 — это просто умножение комплексного вектора $y \equiv (z^1, z^2, z^3) \in S^5 \subset \mathbb{C}^3$ на комплексное число $z \in S^1 \subset \mathbb{C}$. При этом выполняются следующие свойства умножения:

$$z(z^k e_k) = (z z^k) e_k, \quad e_k z = \overline{z} e_k, \quad (z e_k) e_p = \overline{z}(e_k e_p), \quad k, p = 1, 2, 3, \quad k \neq p.$$

Очевидно, что левое действие S^1 на S^5 определяет расслоение Хопфа $S^5 \to \mathbb{C}P^2$. Отметим также, что элементы группы G_2 автоморфизмов чисел Кэли, оставляющие на месте вектор e_4, действуют на $\mathbb{C}^3$ как комплексно линейные преобразования. Известно, что они образуют группу $SU(3)$.

Теорема 6.1 (см. [18]). *Ортогональная почти комплексная структура Кэли J на $S^1 \times S^5$ является неинтегрируемой. Оператор почти комплексной структуры Кэли J переводит векторное поле V_0, касательное к S^1, в векторное поле V_1 на S^5, касательное к слоям расслоения Хопфа, $J(V_0) = -V_1$.*

Доказательство. Находим тензор Нейенхейса прямым вычислением по формуле (3.7). Легко видеть, что для $n_1 = \cos\theta + \sin\theta e_4 = e^{i\theta}$, $n_2 = e_1$, $X = X_2 = e_2$, $Y = Y_2 = e_3$ имеем

$$N_{(n_1, n_2)}(e_2, e_3) = -4(1 - e^{i2\theta}) \neq 0.$$

Поэтому J неинтегрируема.

Пусть $n_1 = \cos\theta + i \sin\theta = e^{i\theta} \in S_1$ и $n_2 = z^1 e_1 + z^2 e_2 + z^3 e_3 \in S^5$. Тогда

$$n_1 n_2 = e^{i\theta} z^1 e_1 + e^{i\theta} z^2 e_2 + e^{i\theta} z^3 e_3 \in S^5.$$

Пусть $V_0(n_1) = i e^{i\theta} = i n_1$ — касательное векторное поле к окружности S^1 и $V_1(n_2) = i(z^1, z^2, z^3)$ — касательное векторное поле к слоям расслоения Хопфа. Тогда

$$\begin{aligned} J(V_0(n_1)) = (n_1 n_2) i e^{i\theta} = \Big(e^{i\theta} z^1 e_1,\ e^{i\theta} z^2 e_2,\ e^{i\theta} z^3 e_3\Big) i e^{i\theta} = \\ = \Big(z^1 e_1,\ z^2 e_2,\ z^3 e_3\Big) i e^{i\theta} e^{-i\theta} = -i\Big(z^1 e_1,\ z^2 e_2,\ z^3 e_3\Big) = -i(z^1, z^2, z^3) = -V_1(n_2). \end{aligned}$$

Теорема доказана. □

По построению, почти комплексная структура Кэли J инвариантна относительно действия таких элементов $g \in G_2$, которые действуют на $S^1 \times S^5$. Легко видеть, что подгруппа изотропии $SU(3) \subset G_2$ элемента e_4 действует транзитивно на S^5 и тождественно на S^1. Тогда почти комплексная структура Кэли J на $S^1 \times S^5$ инвариантна относительно действия $SU(3)$. Поэтому для описания почти комплексной структуры Кэли достаточно найти ее в точках вида (n_1, n_2), где n_1 пробегает S^1, а вектор $n_2 \in S^5$ фиксирован. Во всех остальных точках почти комплексная структура Кэли получается действием группы $SU(3)$.

Найдем почти комплексную структуру Кэли в точках вида (n_1, n_2), где

$$n_1 = \cos\theta + \sin\theta\, e_4 = e^{i\theta} \in S^1, \quad n_2 = e_1 \in S^5.$$

Тогда

$$n_1 n_2 = \cos\theta\, e_1 - \sin\theta\, e_5.$$

Касательное пространство $T_{(n_1,e_1)}S^1 \times S^5$ имеет ортонормированный базис из векторов $V_0(n_1) = -\sin\theta + \cos\theta\, e_4$, e_2, e_3, e_5, e_6, e_7. Действие почти комплексной структуры Кэли J на этих базисных векторах легко вычисляется (см. [18]):

$$J_{(n_1,e_1)}V_0(n_1) = e_5, \qquad J_{(n_1,e_1)}e_5 = -V_0(n_1), \qquad J_{(n_1,e_1)}e_2 = e^{-i\theta}e_3,$$
$$J_{(n_1,e_1)}e_3 = -e^{-i\theta}e_2, \qquad J_{(n_1,e_1)}e_6 = -e^{-i\theta}e_7, \qquad J_{(n_1,e_1)}e_7 = e^{-i\theta}e_6.$$

Отметим, что почти комплексная структура Кэли не инвариантна при левом действии S^1 на $S^1 \times S^5$. Действительно, пусть

$$x = \cos\varphi + \sin\varphi\, e_4 = e^{i\varphi} \in S^1.$$

Тогда

$$x(J_{(n_1,e_1)}e_2) = e^{i\varphi}e^{-i\theta}e_3 = e^{i(\varphi-\theta)}e_3.$$

С другой стороны, используя равенства

$$(ze_k)e_p = \overline{z}(e_ke_p), \quad e_k(ze_p) = (e_k\overline{z})e_p, \quad e_k\overline{z} = ze_k,$$

получаем:

$$J_{(xn_1,xe_1)}(xe_2) = \Big(e^{i\varphi}e^{i\theta}e^{i\varphi}e_1\Big)\Big(e^{i\varphi}e_2\Big) = \Big(e^{i(2\varphi+\theta)}e_1\Big)\Big(e^{i\varphi}e_2\Big) = e^{-i(3\varphi+\theta)}e_3.$$

Нет инвариантности и при правом действии S^1 на $S^1 \times S^5$. Действительно,

$$\Big(J_{(n_1,e_1)}e_2\Big)x = e^{-i\theta}e_3e^{i\varphi} = e^{-i(\theta+\varphi)}e_3.$$

С другой стороны,

$$J_{(n_1x,e_1x)}(e_2x) = \Big(e^{i\theta}e^{i\varphi}\big(e_1e^{i\varphi}\big)\Big)\big(e_2e^{i\varphi}\big) = \Big(e^{i\theta}e^{i\varphi}e^{-i\varphi}e_1\Big)\big(e_2e^{i\varphi}\big) = \big(e^{i\theta}e_1\big)\big(e_2e^{i\varphi}\big) = e^{-i(\theta-\varphi)}e_3.$$

6.1.1. Почти комплексная структура, соответствующая 3-форме $d\omega$. Найдем выражение внешнего дифференциала $d\omega$ фундаментальной формы ω почти комплексной структуры Кэли на $S^1 \times S^5$ и исследуем $d\omega$ на невырожденность.

Поскольку почти комплексная структура Кэли J и форма ω на $S^1 \times S^5$ инвариантны относительно действия $SU(3)$ на S^5, то достаточно найти $\Omega = d\omega$ в точках вида (n_1, n_2), где $n_1 \in S^1$, а вектор $n_2 \in S^5$ фиксирован. Пусть для определенности $n_2 = e_1 \in S^5$ и пусть $n_1 = \cos\theta + \sin\theta\, e_4 \in S^1$.

Ортонормированный базис касательного пространства $T_{(n_1,e_1)}S^1 \times S^5$ образуют векторы $V_0(n_1) = -\sin\theta + e_4\cos\theta$ и e_2, e_3, e_5, e_6, e_7. Для нахождения $\Omega = d\omega$ нужно найти значения $\Omega(e_i, e_j, e_k)$, $i, j, k \in \{2, 3, 5, 6, 7\}$, $i < j < k$, и значения $\Omega(V_0, e_i, e_j)$, $i, j \in \{2, 3, 5, 6, 7\}$, $i < j$. Будем использовать выражение (3.10) для $d\omega$ и формулу

$$\Phi = dx_0 \wedge \varphi + \psi,$$

где φ и ψ — ассоциативная и коассоциативная калибровки $\mathbb{R}^7$.

При вычислении $\Omega(e_i, e_j, e_k)$ формула (3.10) принимает вид

$$\Omega(e_i, e_j, e_k) = 3\Phi(n_1, e_i, e_j, e_k) = 3\cos\theta\varphi(e_i, e_j, e_k) + 3\sin\theta\psi(e_4, e_i, e_j, e_k).$$

Таким образом,

$$\Omega = 3\cos\theta\varphi + 3\sin\theta\iota_{e_4}\psi.$$

Используя формулы (2.4) и (2.9), получаем выражение Ω на $T_{e_1}S^5$:

$$\Omega_{S^5} = 3\cos\theta\big(\omega_{257} - \omega_{356}\big) + 3\sin\theta\big(\omega_{567} - \omega_{235}\big). \tag{6.1}$$

В случае вычисления $\Omega(V_0, e_i, e_j)$ формула (3.10) принимает вид

$$\Omega(V_0, e_i, e_j) = \Phi(V_0, e_1, e_i, e_j) + 2\Phi(n_1, V_0, e_i, e_j).$$

Первое слагаемое $\iota_{e_1}\iota_{V_0}\Phi$:

$$\Phi(V_0, e_1, e_i, e_j) = -\sin\theta\varphi(e_1, e_i, e_j) + \cos\theta\psi(e_4, e_1, e_i, e_j).$$

Таким образом, используя формулы (2.4) и (2.9), получаем для первого слагаемого

$$\iota_{V_0}\Omega = -\sin\theta\iota_{e_1}\varphi + \cos\theta\iota_{e_1}\iota_{e_4}\psi = -\sin\theta\big(\omega_{23}-\omega_{67}\big) - \cos\theta\big(\omega_{63}+\omega_{27}\big).$$

Следовательно,

$$\Omega_1 = -v_0^* \wedge \Big(\sin\theta\big(\omega_{23}-\omega_{67}\big) + \cos\theta\big(\omega_{63}+\omega_{27}\big)\Big), \tag{6.2}$$

где v_0^* — первый вектор дуального базиса к $\{V_0, e_2, e_3, e_5, e_6, e_7\}$.

Второе слагаемое $\iota_{V_0}\iota_{n_1}\Phi$:

$$2\Phi(n_1, V_0, e_i, e_j) = 2\varphi(e_4, e_i, e_j).$$

Используя формулы (2.4) и (2.9), получаем

$$\iota_{V_0}\Omega = 2\iota_{e_4}\varphi = -\omega_{26} - \omega_{37}.$$

Следовательно,

$$\Omega_2 = -2v_0^* \wedge \big(\omega_{26} + \omega_{37}\big). \tag{6.3}$$

Складывая все формулы (6.1)–(6.3), получаем окончательно общее выражение для Ω:

$$\Omega = -v_0^* \wedge \Big(\sin\theta\,\omega_{23} + 2\omega_{26} + \cos\theta\,\omega_{27} - \cos\theta\,\omega_{36} + 2\omega_{37} - \sin\theta\,\omega_{67}\Big) - \\ - 3\sin\theta\,\omega_{235} + 3\cos\theta\,\omega_{257} - 3\cos\theta\,\omega_{356} + 3\sin\theta\,\omega_{567}. \tag{6.4}$$

Элемент объема на $T_{(n_1,e_1)}S^1 \times S^5$ имеет вид

$$\mu = v_0^* \wedge \omega_{23567} = \omega_{023567}.$$

Пусть $X = X^0V_0 + X^2e_2 + X^3e_3 + X^5e_5 + X^6e_6 + X^7e_7 \in T_{(n_1,e_1)}S^1 \times S^5$. Простыми вычислениями получаем следующую формулу:

$$\iota_X\Omega \wedge \Omega = -\big(6X^0 + 18X^5\big)\omega_{23567} + \big(12\cos\theta\,X^3 - 12\sin\theta\,X^7\big)\omega_{03567} + \\ + \big(12\cos\theta\,X^2 - 12\sin\theta\,X^6\big)\omega_{02567} - \big(10X^0 + 6X^5\big)\omega_{02367} + \\ + \big(12\sin\theta\,X^3 + 12\cos\theta\,X^7\big)\omega_{02357} + \big(12\sin\theta\,X^2 + 12\cos\theta\,X^6\big)\omega_{02356}.$$

Поэтому оператор K_Ω имеет следующую матрицу:

$$K_\Omega = \begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 & -18 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -12\cos\theta & 0 & 0 & 12\sin\theta \\ 0 & 12\cos\theta & 0 & 0 & -12\sin\theta & 0 \\ 10 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 12\sin\theta & 0 & 0 & 12\cos\theta \\ 0 & -12\sin\theta & 0 & 0 & -12\cos\theta & 0 \end{pmatrix}. \tag{6.5}$$

Простое вычисление показывает, что $K_\Omega^2 = -144\,\mathrm{Id}$. Оператор K_Ω определяет почти комплексную структуру $I_\Omega = \frac{1}{12}K_\Omega$. Легко видеть, что в точках $S^1 \times \{e_1\}$ имеет место соотношение $I_\Omega = AJ$ между почти комплексными структурами I_Ω и J, где связующая матрица имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 3/2 & 0 & 0 & -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 2\theta & 0 & 0 & \sin 2\theta & 0 \\ 0 & 0 & \cos 2\theta & 0 & 0 & \sin 2\theta \\ -1/2 & 0 & 0 & 5/6 & 0 & 0 \\ 0 & -\sin 2\theta & 0 & 0 & \cos 2\theta & 0 \\ 0 & 0 & -\sin 2\theta & 0 & 0 & \cos 2\theta \end{pmatrix}. \tag{6.6}$$

Поскольку почти комплексные структуры I_Ω и J инвариантны относительно действия на S^5 подгруппы изотропии $SU(3) \subset G_2$, то данное соотношение $I_\Omega = AJ$ имеет место во всех точках пространства $S^1 \times S^5$. Мы получили следующее утверждение.

Теорема 6.2. *3-Форма $\Omega = d\omega$ на $S^1 \times S^5$ невырождена всюду и определяет почти комплексную структуру $I_\Omega = \frac{1}{12}K_\Omega$ на $S^1 \times S^5$, которая в точках $(e^{i\theta}, n_2) \in S^1 \times S^5$ связана с почти комплексной структурой Кэли J формулой $I_\Omega = AJ$, где матрица A имеет вид* (6.6).

Замечание 6.3. Легко видеть, что почти комплексная структура I_Ω не является ортогональной и не является ассоциированной с фундаментальной формой ω, $\omega(I_\Omega X, I_\Omega Y) \neq \omega(X, Y)$. Рассмотрим расслоение Хопфа $S^1 \times S^5 \to \mathbb{C}P^2$, определенное левым действием S^1 на S^5. Тогда на горизонтальном распределении этого расслоения имеет место соотношение

$$I_\Omega = e^{2i\theta} J,$$

а на вертикальном распределении с базисными полями $\{V_0, V_1\}$ почти комплексная структура I_Ω действует следующим образом:

$$I_\Omega(V_0) = -\frac{1}{2}V_0 + \frac{5}{6}V_1, \quad I_\Omega(V_1) = -\frac{3}{2}V_0 + \frac{1}{2}V_1.$$

6.2. Произведение сфер $S^2 \times S^4$. Как известно (см. [29]), такое произведение четномерных сфер является единственным нетривиальным случаем, когда на нем существует почти комплексная структура. Вопрос о существовании комплексных структур является открытым. В [31] показано, что не существует ортогональных комплексных структур на произведении круглых сфер $S^2 \times S^4$. В [35] изучалась геометрия однородных шестимерных почти эрмитовых подмногообразий в алгебре октав Кэли и показано, в частности, что $S^2 \times S^4$ является римановым однородным, но не однородным относительно почти комплексной структуры Кэли.

Рассмотрим на $S^2 \times S^4$ почти комплексные структуры Кэли. Вложим $S^2 \times S^4$ в $\mathbb{C}\mathrm{a} = \mathbb{R}^8$ следующим образом. Сфера S^2 является единичной в координатной плоскости $\mathbb{R}^3$, состоящей из чисел вида $x = x^0 + x^1 e_1 + x^2 e_2$, а S^4 является единичной в координатной плоскости $\mathbb{R}^5$, состоящей из чисел вида $x = x^3 e_3 + x^4 e_4 + x^5 e_5 + x^6 e_6 + x^7 e_7$. Пусть n_1 и n_2 — нормальные векторы к сферам S^2 и S^4. Как шестимерное подмногообразие $\mathbb{R}^8$, произведение $S^2 \times S^4$ имеет почти комплексную структуру, определенную формулой

$$J(X) = P(n_1, n_2, X) = (n_1 n_2)X, \quad X \in T_{(n_1,n_2)} S^2 \times S^4.$$

Поскольку касательный вектор X ортогонален к n_1 и n_2, то данное вложение $S^2 \times S^4 \subset E^{3,5}$ является (псевдо)голоморфным. Поэтому мы можем использовать полученные ранее выражения (3.9) и (3.7) для фундаментальной 2-формы и для тензора Нейенхейса с учетом того, что касательные векторы X, Y ортогональны к n_1 и n_2.

Прямая проверка показывает, что почти комплексная структура Кэли J на $S^2 \times S^4$ является неинтегрируемой. Действительно, пусть, например, $n_1 = 1$, $n_2 = e_5$, $X = X_1 = e_1$, $Y = Y_1 = e_2$. Тогда

$$N_{(n_1,n_2)}(e_1, e_2) = 4e_3 - 4e_6.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Даурцева Н. А.* Об интегрируемости почти комплексных структур на строго приближенно келеровом 6-многообразии// Сиб. мат. ж. — 2014. — *55*, № 1. — С. 61–65.
2. *Даурцева Н. А.* О многообразии почти комплексных структур// Мат. заметки. — 2005. — *78*, № 1. — С. 66–71.
3. *Даурцева Н. А.* О существовании структур класса G_2 на строго приближенно кэлеровом шестимерном многообразии// Вестн. Томск. ун-та. Сер. мат. мех. — 2014. — No 6 (32). — С. 19–24.
4. *Даурцева Н. А.* $U(n+1) \times U(p+1)$-эрмитовы метрики на многообразии $S^{2n+1} \times S^{2p+1}$// Мат. заметки. — 2007. — *82*, № 2. — С. 207–223.
5. *Даурцева Н. А.* Инвариантные комплексные структуры на $S^3 \times S^3$// Исследовано в России (электр. ж.). — 2004. — *81*. — С. 882–887.
6. *Даурцева Н. А.* Структуры Кэли на S^6 как сечения твисторного расслоения// Вестн. НГУ. Сер. мат., мех., информ. — 2015. — *15*, № 4. — С. 43–49.
7. *Даурцева Н. А.* Функционал нормы тензора Нейенхейса на множестве левоинвариантных почти комплексных структур на $SU(2) \times SU(2)$, ортогональных относительно метрики Киллинга—Картана// Вестн. КемГУ. — 2004. — *17* (1). — С. 156–158.
8. *Даурцева Н. А., Смоленцев Н. К.* О пространстве почти комплексных структур на многообразии// Вестн. КемГУ. — 2001. — *7*. — С. 176–186.
9. *Кириченко В. Ф.* Почти келеровы структуры, индуцированные 3-векторными произведениями на шестимерных подмногообразиях алгебры Кэли// Вестн. МГУ. Сер. мат. мех. — 1973. — *3*. — С. 70–75.

10. *Кириченко В. Ф.* Классификация келеровых структур, индуцированных 3-векторными произведениями на шестимерных подмногообразиях алгебры Кэли// Изв. вузов. Мат. — 1980. — *8*. — С. 32–38.
11. *Кириченко В. Ф.* Устойчивость почти эрмитовых структур, индуцированных 3-векторными произведениями на шестимерных подмногообразиях алгебры Кэли// Укр. геом. сб. — 1982. — *25*. — С. 60–68.
12. *Кириченко В. Ф.* Эрмитова геометрия шестимерных симметрических подмногообразий алгебры Кэли// Вестн. МГУ. Сер. мат. мех. — 1994. — *3*. — С. 6–13.
13. *Кобаяси Ш., Номидзу К.* Основы дифференциальной геометрии. Т. 1, 2. — М.: Наука, 1981.
14. *Смоленцев Н. К.* Пространства римановых метрик// Итоги науки и техн. Сер. Совр. мат. прилож. Тематич. обзоры. — М.: ВИНИТИ РАН. — 2003. — *31*. — С. 69–146.
15. *Smolentsev N. K.* Spaces of Riemannian metrics// J. Math. Sci. — 2007. — *142*, № 5. — С. 2436–2519.
16. *Смоленцев Н. К.* О почти комплексной структуре Кэли на сфере S^6// Тр. Рубцовского индустр. ин-та. — Рубцовск—Барнаул: Изд. Алтайск. ун-та, 2003. — № 12. — С. 78–85.
17. *Смоленцев Н. К.* О почти комплексных структурах на сфере S^6// Вестн. КемГУ. Сер. мат. — 2005. — *4*. — С. 155–162.
18. *Смоленцев Н. К.* О почти комплексных структурах на шестимерных произведениях сфер// Уч. зап. Казанск. гос. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. — 2004. — *151*, № 4. — С. 116–135.
19. *Смоленцев Н. К.* Канонические псевдокэлеровы метрики на шестимерных нильпотентных группах Ли// Вестн. КемГУ. — 2011. — *3/1* (47). — С. 155–168.
20. *Bor G., Hernandez-Lamoneda L.* The canonical bundle of Hermitian manifold// Bol. Soc. Mat. Mexicana. — 1999. — *5*, № 3. — С. 187–198.
21. *Borel A., Serre J. P.* Groupes de Lie et puissance reduites de Steenrod// Am. J. Math. — 1953. — *75*. — С. 409–448.
22. *Bryant'R.* S.-S. Chern's study of almost-complex structures on the six-sphere/ e-print `arXiv:1405.3405v1`.
23. *Bryant R.* Submanifolds and special structures on the octonians// J. Differ. Geom. — 1982. — *17*. — С. 185–232.
24. *Butruille J.-B.* Classification des variétés approximativement kähleriennes homogénes// Ann. Global Anal. Geom. — 2005. — *27*. — С. 201–225; `arXiv:math/0612655`.
25. *Calabi E.* Construction and properties of some six-dimensional almost-complex manifolds// Trans. Am. Math. Soc. — 1958. — *87*. — С. 407–438.
26. *Calabi E., Eckmann B.* A class of compact complex manifolds which are not algebraic// Ann. Math. — 1935. — *58*. — С. 494–500.
27. *Calabi E., Gluck H.* What are best almost-complex structures on the 6-sphere?// Proc. Symp. Pure Math. — 1993. — *54*, № 2. — С. 99–108.
28. *Cordero L. A., Fernández M., Gray A.* Lie groups with no left invariant complex structures// Portug. Math. — 1990. — *47*, № 2. — С. 183–190.
29. *Datta B., Subramanian S.* Nonexistence of almost complex structures on products of even-dimensional spheres// Topol. Appl. — 1990. — *36*, № 1. — С. 39–42.
30. *Etesi G.* Complex structure on the six-dimensional sphere from a spontaneous symmetry breaking// J. Math. Phys. — 2015. — *56*. — С. 043508-1–043508-21.
31. *Euh Y., Sekigawa K.* Orthogonal almost complex structures on the Riemannian products of even-dimensional round spheres/ `arXiv:1301.6835v2 [math.DG]`.
32. *Gray A.* Vector cross products on manifolds// Trans Am. Math. Soc. — 1969. – *141*. — С. 465–504.
33. *Gray A.* Weak holonomy groups// Math. Z. — 1971. — *123*, № 4. — С. 290–300.
34. *Gray A., Harvella L. M.* The sixteen classes of almost Hermitian manifolds and their linear invariants// Ann. Math. Pura Appl. — 1980. — *123*. — С. 35–58.
35. *Hashimoto H., Koda T., Mashimi K., Sekigawa K.* Extrinsic homogeneous almost Hermitian 6-dimensional submanifolds in the octonions// Kodai Math. J. — 2007. — *30*. — С. 297–321.
36. *Harvey R., Lawson H.* Calibrated geometries// Acta math. — 1982. — *148*. — С. 47–157.
37. *Hitchin N. J.* The geometry of three-forms in six dimensions// J. Differ. Geom. — 2000. — *55*. — С. 547–576.
38. *Hopf H.* Zur Topologie der komplexen Mannigfaltigkeiten// Studies and Essays presented to R. Courant. — N.Y.: Interscience, 1948. — С. 167–185.
39. *LeBrun C.* Orthogonal complex structures on S^6// Proc. Am. Math. Soc. — 1958. — *101*, № 1. — С. 136–138.
40. *Loeb J.-J., Manjarin M., Nicolau M.* Complex and CR-structures on compact Lie groups associated to Abelian actions/ `arXiv:math/0610915v1 [math.DG]`.
41. *Morimoto A.* Structures complexes sur les Groupes de Lie semi-simples// C. R. Acad. Sci. Paris. — 1956. — *242*. — С. 1101–1103.

42. *Nagy P.-A.* Nearly Kähler geometry and Riemannian foliations// Asian J. Math. — 2002. — *6*, № 3. — С. 481–504.
43. *O'Braian N. R., Rawnsley J. H.* Twistor spaces// Ann. Global Anal. Geom. — 1985. — *3*, № 1. — С. 29–58.
44. *Peng C. K., Tang Z.* Integrability condition on an almost complex structure and its application// Acta Math. Sinica, English Ser. — 2005. — *21*, № 6. — С. 1459–1464.
45. *Reyes Carrión R.* Some special geometries defined by Lie groups/ Ph.D. Thesis. — Oxford Univ., 1993.
46. *Samelson H.* A class of complex analytic manifolds// Port. Math. — 1953. — *12*. — С. 129–132.
47. *Sasaki T.* Classification of invariant complex structures on $SL(2,\mathbb{R})$ and $U(2)$// Kumamoto J. Sci. Math. — 1981. — *14*. — С. 115–123.
48. *Sasaki T.* Classification of invariant complex structures on $SL(3,\mathbb{R})$// Kumamoto J. Sci. Math. — 1982. — *15*. — С. 59–72.
49. *Sekigawa K.* Almost complex submanifolds of a six-dimensional sphere// Kodai Math. J. — 1983. — *6*, № 2. — С. 174–185.
50. *Snow D. M.* Invariant complex structures on reductive Lie groups// J. Reine Angew. Math. — 1986. — *371*. — С. 191–215.
51. *Tang Z.* Curvature and integrability of an almost Hermitian structure// Int. J. Math. — 2006. — *17*, № 1. — С. 97–105.
52. *Vaisman I.* Symplectic twistor spaces// J. Geom. Phys. — 1986. — *3*, № 4. — С. 507–524.
53. *Verbitsky M.* An intrinsic volume functional on almost complex 6-manifolds and nearly Kähler geometry// Pac. J. Math. — 2008. — *236*, № 5. — С. 323–344.
54. *Wang H. C.* Closed manifolds with homogeneous complex structure// Am. J. Math. — 1954. — *76*. — С. 1–37.

Н. А. Даурцева
Кемеровский государственный университет
E-mail: `natali0112@ngs.ru`

Н. К. Смоленцев
Кемеровский государственный университет
E-mail: `smolennk@mail.ru`

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 146 (2018). С. 48–88

УДК 514.76

АФФИННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ В РАССЛОЕНИЯХ

© 2018 г. **А. Я. СУЛТАНОВ, О. А. МОНАХОВА**

Аннотация. В статье приводится обзор результатов, посвященных исследованию аффинных преобразований в обобщенных пространствах над вещественными линейными алгебрами за последние 15–20 лет.

***Ключевые слова*:** аффинное преобразование, обобщенное пространство над алгеброй, гладкое многообразие, связность, кручение.

***AMS Subject Classification*:** 53B15

СОДЕРЖАНИЕ

Введение . . . 48
1. Голоморфные линейные связности и их преобразования . . . 49
2. Расслоения Вейля, снабженные линейными связностями . . . 65
3. Тензорные расслоения специального типа . . . 78
Список литературы . . . 81

Введение

В статье приводится обзор результатов, посвященных исследованию аффинных преобразований в обобщенных пространствах над вещественными линейными алгебрами за последние 15–20 лет. Основные работы по геометрии многообразий за предыдущие годы были выполнены А. В. Аминовой [1–4], В. В. Вишневским [11,12], Л. Е. Евтушиком, Ю. Г. Лумисте, Н. М. Остиану, А. П. Широковым [17], И. П. Егоровым [26, 27, 29], Б. Н. Шапуковым [136, 138], А. П. Широковым [139–142], В. В. Шурыгиным [143, 144] и др.

Из обзорных работ, вышедших сравнительно недавно, отметим работы [5] А. В. Аминовой и [145] В. В. Шурыгина.

В работе [5] А. В. Аминовой исследуются групповые свойства двух (разрешенных относительно вторых производных) обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка, правые части которых являются многочленами третьей степени относительно производных неизвестных функций. Приведена классификация таких систем, допускающих четырехмерные разрешимые группы симметрий типа Ли—Петрова VI_2. Для каждой системы получены необходимые и достаточные условия, при которых система заменой переменных может быть приведена к дифференциальной системе, интегральные кривые которой являются прямыми линиями и выражаются тремя линейными параметрическими уравнениями или двумя линейными уравнениями с постоянными коэффициентами.

В работе [145] В. В. Шурыгина исследуется строение гладких многообразий $M_n^{\mathbb{A}}$ над алгеброй Вейля $\mathbb{A}$, моделируемых модулями $\mathbb{A}^n$ строк длины n с элементами из алгебры $\mathbb{A}$. Рассматриваются препятствия к радиантности многообразия $M_n^{\mathbb{A}}$ и обобщенные трансверсальные структуры, возникающие на гладких многообразиях над алгеброй Вейля $\mathbb{A}$, моделируемые $\mathbb{A}$-модулями вида $\mathbb{A}^n \oplus \mathbb{B}^m$, где $\mathbb{B}$ — факторалгебра алгебры $\mathbb{A}$ по идеалу I алгебры $\mathbb{A}$.

Настоящая работа состоит из трех частей. В первой части приводятся сведения о голоморфных линейных связностях на гладких многообразиях над линейной алгеброй и дается обзор результатов, связанных со свойствами таких связностей и инфинитезимальными аффинными векторными полями. Вторая часть посвящена расслоениям А. Вейля и обзору результатов, полученных в этой области за последние годы. В третьей части представлены результаты, полученные при исследовании некоторых типов тензорных расслоений.

1. Голоморфные линейные связности и их преобразования

1.1. Голоморфные функции над алгебрами. Пусть $\mathbb{A}$ — линейная алгебра над полем действительных чисел $\mathbb{R}$, коммутативная, ассоциативная, обладающая единицей и имеющая конечный ранг m. Дополнительно предположим, что $\mathbb{A}$ снабжена естественной топологией.

Рассмотрим декартову степень $\mathbb{A}^n$, которая снабжена топологией прямого произведения, порожденной топологией алгебры $\mathbb{A}$. Обозначим через U открытое связное множество в $\mathbb{A}^n$. Пусть $\mathcal{F} : U \to \mathbb{A}$ — функция, заданная на U. Для каждой точки $x \in U$ значение $\mathcal{F}(x)$ этой функции можно разложить по базисным элементам ε^α алгебры $\mathbb{A}$:

$$\mathcal{F}(x) = \mathcal{F}_\alpha(x)\varepsilon^\alpha, \quad x = (x^1, \dots, x^n),$$

где $\mathcal{F}_\alpha$ — функции со значениями в $\mathbb{R}$. Так как $x^i = x^i_\alpha \varepsilon^\alpha$, то функции $\mathcal{F}_\alpha$ являются вещественнозначными функциями от вещественных аргументов x^i_α, $i = 1, 2, \dots, n$, $\alpha = 1, 2, \dots, m$. Будем в дальнейшем рассматривать только функции $\mathcal{F}$, для которых $\mathcal{F}_\alpha$ являются функциями класса C^∞ (это требование можно ослабить и заменить условием принадлежности функций классу C^k).

Дифференциал $d\mathcal{F}$ определим равенством $d\mathcal{F} = d\mathcal{F}_\alpha \varepsilon^\alpha$; аналогично $dx^i = dx^i_\alpha \varepsilon^\alpha$.

Определение 1.1.1 (см. [10]). Функция $\mathcal{F}$ называется *голоморфной по Шефферсу*, если существуют функции Φ_i, удовлетворяющие условию $d\mathcal{F} = \Phi_i dx^i$.

Необходимым и достаточным условием голоморфности функции $\mathcal{F}$ является условие

$$\partial^\alpha_i \mathcal{F}_\beta = \delta_\sigma \partial^\sigma_i \mathcal{F}_\tau \gamma^{\tau\alpha}_\beta, \tag{1.1.1}$$

где $\gamma^{\tau\alpha}_\beta = \varepsilon_\beta(\varepsilon^\tau \varepsilon^\alpha)$ — структурные постоянные алгебры $\mathbb{A}$, δ_σ — координаты единицы алгебры $\mathbb{A}$.

Функции Φ_i называются *частными производными* функции $\mathcal{F}$ по аргументам x^i и обозначаются символом $\partial \mathcal{F}/\partial x^i$. Имеют место равенства (см. [10])

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x^i} = \delta_\sigma \partial^\sigma_i \mathcal{F}_\tau \varepsilon^\tau; \tag{1.1.2}$$

в частности, $\partial x^i/\partial x^j = \delta^i_j \delta$.

Отметим основные свойства голоморфных функций:

1. сумма голоморфных функций $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ является голоморфной функцией, причем
$$\frac{\partial(\mathcal{F} + \mathcal{G})}{\partial x^i} = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x^i} + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial x^i};$$
2. если $\mathcal{F}$ — голоморфная функция, a — произвольный элемент алгебры $\mathbb{A}$, то $a\mathcal{F}$ — голоморфная функция, причем
$$\partial_i(a\mathcal{F}) = a\partial_i \mathcal{F};$$
3. произведение голоморфных функций $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ — голоморфная функция, причем
$$\partial_i(\mathcal{F}\mathcal{G}) = (\partial_i \mathcal{F})\mathcal{G} + \mathcal{F}(\partial_i \mathcal{G}).$$

Доказательство этих свойств проводится на основании тождеств (1.1.1).

На множестве всевозможных голоморфных функций, заданных на U, можно ввести еще операцию умножения на действительные числа условием $\lambda\mathcal{F} = (\lambda\delta)\mathcal{F}$ для каждого $\lambda \in \mathbb{R}$. В итоге получим, что множество $\mathbb{B}(U)$ всевозможных голоморфных функций на U является $\mathbb{A}$-модулем.

Предложение 1.1.1. *Если функция $\mathcal{F}$ голоморфна, то все ее частные производные голоморфны, причем результат частного дифференцирования не зависит от порядка дифференцирования.*

Для частных производных произвольного порядка голоморфной функции $\mathcal{F}$ имеют место равенства
$$\partial_{j_1\ldots j_k}\mathcal{F} = \delta_{\tau_1}\delta_{\tau_2}\ldots\delta_{\tau_k}\partial^{\tau_1}_{j_1}\partial^{\tau_2}_{j_2}\ldots\partial^{\tau_k}_{j_k}\mathcal{F}_\mu\varepsilon^\mu.$$

Остановимся на свойстве сложных голоморфных функций. Пусть $\mathcal{F}$ — голоморфная функция, аргументы $x^1,\ldots,x^n$ которой также являются голоморфными функциями от аргументов $y^i = y^i_\beta\varepsilon^\beta$, т.е. $\mathcal{F}$ является сложной функцией от $y^1,\ldots,y^n$. Покажем, что сложная функция также голоморфна.

Прежде всего заметим, что функции $\mathcal{F}_\mu$ в разложении $\mathcal{F} = \mathcal{F}_\mu\varepsilon^\mu$ будут сложными функциями от y^i_β. Положим
$$\frac{\partial\mathcal{F}_\mu}{\partial y^i_\alpha} = \hat{\partial}^\alpha_i\mathcal{F}_\mu;$$
тогда
$$\hat{\partial}^\alpha_i\mathcal{F}_\mu = \partial^\sigma_j\mathcal{F}_\mu\hat{\partial}^\alpha_i x^j_\sigma.$$
В силу голоморфности функций $\mathcal{F}$ и x^i имеем
$$\hat{\partial}^\alpha_i\mathcal{F}_\mu = \delta_\tau\partial^\tau_j\mathcal{F}_\nu\gamma^{\nu\sigma}_\mu\delta_{\tau_1}\hat{\partial}^{\tau_1}_i x^j_{\mu_1}\gamma^{\mu_1\alpha}_\sigma.$$
Свернув эти соотношения с δ_α, получим
$$\delta_\alpha\hat{\partial}^\alpha_i\mathcal{F}_\mu = \delta_\tau\partial^\tau_j\mathcal{F}_\nu\delta_{\tau_1}\hat{\partial}^{\tau_1}_i x^j_\sigma\gamma^{\nu\sigma}_\mu. \tag{1.1.3}$$
Далее рассмотрим разность
$$A^\alpha_{i\mu} = \hat{\partial}^\alpha_i\mathcal{F}_\mu - \delta_{\alpha_1}\hat{\partial}^{\alpha_1}_i\mathcal{F}_{\mu_1}\gamma^{\mu_1\alpha}_\mu.$$
Учитывая коммутативность и ассоциативность алгебры $\mathbb{A}$, получим, что
$$\begin{aligned}A^\alpha_{i\mu} = \delta_\tau\partial^\tau_j\mathcal{F}_\nu\delta_{\tau_1}\hat{\partial}^{\tau_1}_i x^j_\sigma\gamma^{\sigma\alpha}_{\mu_1}\gamma^{\nu\mu_1}_\mu - \delta_\tau\partial^\tau_j\mathcal{F}_\nu\delta_{\tau_1}\hat{\partial}^{\tau_1}_i x^j_\sigma\gamma^{\alpha\sigma}_{\mu_1}\gamma^{\nu\mu_1}_\mu = \\ = \delta_\tau\partial^\tau_j\mathcal{F}_\nu\gamma^{\nu\mu_1}_\mu(\delta_{\tau_1}\hat{\partial}^{\tau_1}_i x^j_\sigma\gamma^{\sigma\alpha}_{\mu_1} - \delta_{\tau_1}\hat{\partial}^{\tau_1}_i x^j_\sigma\gamma^{\alpha\sigma}_{\mu_1}) = 0.\end{aligned}$$
Отсюда следует, что сложная функция $\mathcal{F}$ голоморфна. Из соотношений (1.1.3) следует, что
$$\delta_\alpha\hat{\partial}^\alpha_i\mathcal{F}_\mu\varepsilon^\mu = (\delta_\tau\partial^\tau_j\mathcal{F}_\nu\varepsilon^\nu)(\delta_\beta\hat{\partial}^\beta_i x^j_\sigma\varepsilon^\sigma).$$
Полученные соотношения, учитывая (1.1.2), можно представить в следующем виде:
$$\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial y^i} = \frac{\partial\mathcal{F}}{\partial x^j}\frac{\partial x^j}{\partial y^i}. \tag{1.1.4}$$
Эти соотношения выражают правило дифференцирования сложных голоморфных функций.

1.2. Гладкие многообразия над алгебрами, диффференцирования и векторные поля. Введенное в п. 1.1 понятие голоморфности функции над алгеброй $\mathbb{A}$ позволяет ввести понятие гладкого многообразия над этой алгеброй. Предполагается по-прежнему, что $\mathbb{A}$ — коммутативная, ассоциативная алгебра с единицей δ и имеет размерность m.

Определение 1.2.1 (см. [10])**.**

1. $\mathbb{A}$-*Картой* на топологическом пространстве M называется пара (U,h), где $U\subset M$ — открытое связное множество, h — гомеоморфизм области U на некоторую область $U'\subset\mathbb{A}^n$.
2. $\mathbb{A}$-*Гладким атласом* на M называется набор карт (U_A,h_A), удовлетворяющий условиям:
   (a) $\bigcup\limits_A U_A = M$;
   (b) если $U_A\cap U_B\neq\emptyset$, то гомеоморфизм
   $$h_B\circ h_A^{-1} : h_A(U_A\cap U_B)\to h_B(U_A\cap U_B)$$
   задается голоморфными функциями $x^i_B = \mathcal{F}^i_B(x^1_A,\ldots,x^n_A)$.

Определение 1.2.2 (см. [10])**.** *Гладким многообразием размерности* n называется хаусдорфово топологическое пространство со счетной базой вместе с заданным на нем максимальным $\mathbb{A}$-гладким атласом.

Гладкое многообразие $M_n^{\mathbb{A}}$ обладает также структурой гладкого многообразия размерности mn над алгеброй вещественных чисел, которое обозначается $M_{mn}^{\mathbb{R}}$.

Пусть $p \in M_n^{\mathbb{A}}$, (U, x^i) — координатная окрестность, содержащая точку p, $x^i = x^i_\alpha \varepsilon^\alpha$ и $\mathbb{B}(U)$ — алгебра, голоморфных функций, заданных на U.

Определение 1.2.3. *Касательным вектором* в точке p к гладкому многообразию $M_n^{\mathbb{A}}$ называется отображение $X_p : \mathbb{B}(U) \to \mathbb{A}$, удовлетворяющее условиям
(1) $X_p(a\mathcal{F} + b\mathcal{G}) = a(X_p\mathcal{F}) + b(X_p\mathcal{G})$,
(2) $X_p(\mathcal{F}\mathcal{G}) = (X_p\mathcal{F})\mathcal{G}(p) + \mathcal{F}(p)(X_p\mathcal{G})$,
для всех $a, b \in \mathbb{A}$, $\mathcal{F}, \mathcal{G} \in \mathbb{B}(U)$.

Из свойств (1) и (2) следует, что $X_p(C) = 0$ для каждой постоянной функции $C \in \mathbb{B}(U)$. Действительно, для главной единицы алгебры $\mathbb{A}$ имеем $X_p(\delta\delta) = X_p(\delta)$, откуда
$$(X_p\delta)\delta + \delta(X_p\delta) = X_p(\delta);$$
значит, $X_p(\delta) = 0$ и далее $X_p(C) = X_p(C\delta) = CX_p(\delta) = 0$.

На множестве $T_p(M_n^{\mathbb{A}})$ всех касательных векторов в точке $p \in M_n^{\mathbb{A}}$ естественным образом можно ввести операции сложения и умножения на элементы алгебры $\mathbb{A}$ и поля $\mathbb{R}$, условиями
(a) $(X_p + Y_p)\mathcal{F} = X_p\mathcal{F} + Y_p\mathcal{F}$;
(b) $(aX_p)\mathcal{F} = a(X_p\mathcal{F})$;
(c) $\lambda X_p = (\lambda\delta)X_p$
для всех $a \in \mathbb{A}$ и $\mathcal{F} \in \mathbb{B}(U)$.

Множество $T_p(M_n^{\mathbb{A}})$ с введенными операциями становится $\mathbb{A}$-модулем. Этот модуль называется *касательным модулем* к многообразию $M_n^{\mathbb{A}}$ в точке p.

Определение 1.2.4. Отображение X, которое каждой точке $p \in M_n^{\mathbb{A}}$ ставит в соответствие касательный вектор X_p, называется *векторным полем* на $M_n^{\mathbb{A}}$.

Действие векторного поля X на голоморфные функции $\mathcal{F} \in \mathbb{B}(U)$ определяется следующим образом: $X\mathcal{F}(p) = X_p\mathcal{F}$. Векторное поле X называется *голоморфным*, если $X\mathcal{F}$ — голоморфная функция для любой голоморфной функции $\mathcal{F} \in \mathbb{B}(U)$.

Предложение 1.2.1. *Ограничение каждого голоморфного векторного поля на $U \subset M_n^{\mathbb{A}}$ является дифференцированием алгебры $\mathbb{B}(U)$ голоморфных функций, заданных на U.*

Верно и обратное утверждение: каждое дифференцирование D алгебры $\mathbb{B}(U)$ является векторным полем на $U \subset M_n^{\mathbb{A}}$. Действительно, пусть D — дифференцирование алгебры $\mathbb{B}$, $p \in M_n^{\mathbb{A}}$ — произвольная точка. Определим отображение $D_p : \mathbb{B} \to \mathbb{A}$ по правилу $D_p\mathcal{F} = (D\mathcal{F})(p)$. Введенное отображение D_p является касательным вектором в точке p, поэтому само D является векторным полем.

Касательный $\mathbb{A}$-модуль $T_p(M_n^{\mathbb{A}})$ обладает базисом, и $\dim_{\mathbb{A}} T_p(M_n^{\mathbb{A}}) = n$. Доказательство этого утверждения основано на следующих предложениях.

Предложение 1.2.2. *Для каждой голоморфной функции $\mathcal{F} \in \mathbb{B}(U)$ и любой точки $p \in U$, где U — область карты с координатными функциями $x^i = x^i_\alpha \varepsilon^\alpha$, существуют такие голоморфные функции $\mathcal{G}_i \in \mathbb{B}(U)$, что*
$$\mathcal{F} = \mathcal{F}(p) + (x^i - x^i(p))\mathcal{G}_i; \tag{1.2.1}$$
при этом $G_i(p) = \partial_{i|_p}\mathcal{F}$.

Предложение 1.2.3. *Касательные векторы $\partial_{i|_p}$ образуют базис касательного $\mathbb{A}$-модуля $T_p(M_n^{\mathbb{A}})$.*

Следствие 1.2.1. $\dim_{\mathbb{A}} T_p(M_n^{\mathbb{A}}) = n$.

Следствие 1.2.2. *Если X — голоморфное векторное поле, то в локальной карте (U, x^i) ограничение $X_{|U}$ можно представить в виде $X_{|U} = X^i\partial_i$, где X^i — голоморфные функции, причем $X^i(p) = X_p x^i$.*

Пусть X — векторное поле. Пусть (U, x^i), (V, y^i) — две карты, причем $U \cap V \neq \emptyset$ и $y^i = y^i(x^1, \dots, x^n)$, $x^i = x^i(y^1, \dots, y^n)$ — функции перехода, голоморфные в окрестности $U \cap V$. Введем обозначения $X^i = Xx^i$, $Y^i = Xy^i$. Для каждой голоморфной функции $\mathcal{F}$ в $U \cap V$ имеем

$$X\mathcal{F} = X^i \partial_i \mathcal{F}, \quad X\mathcal{F} = Y^i \hat{\partial}_i \mathcal{F},$$

где

$$\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad \hat{\partial}_i = \frac{\partial}{\partial y_i}.$$

На основании формул (1.1.3) получим

$$X^i \partial_i \mathcal{F} = Y^i \frac{\partial x^j}{\partial x_i} \partial_i \mathcal{F}.$$

Отсюда в силу произвольности $\mathcal{F}$ следуют тождества

$$X^i = \frac{\partial x^i}{\partial y_j} Y^j, \quad Y^i = \frac{\partial y^i}{\partial x_j} X^j.$$

1.3. Вещественные реализации тензорных полей. Рассмотрим алгебры $\mathbb{B} = \mathbb{B}(U)$-голоморфных функций на $U \subset M_n^{\mathbb{A}}$ и $\tilde{\mathbb{B}}$-гладких класса C^∞ функций на $U^{\mathbb{R}} \subset M_{nm}^{\mathbb{R}}$. Обозначим через $\mathbb{A}^*$ векторное пространство линейных форм, заданных на $\mathbb{A}$ со значениями в $\mathbb{R}$. Определим на $\mathbb{A}^*$ внешнюю операцию умножения на элементы алгебры $\mathbb{A}$ условием $a^* \cdot b(c) = a^*(bc)$ для любого $c \in \mathbb{A}$.

Зададим отображение $\tau : \mathbb{A}^* \times \mathbb{B} \to \tilde{\mathbb{B}}$ условием $\tau(a^*, \mathcal{F}) = a^* \circ \mathcal{F}$ для любых $a^* \in \mathbb{A}^*$, $\mathcal{F} \in \mathbb{B}$. Обозначим $\tau(a^*, \mathcal{F})$ через $\mathcal{F}_{(a^*)}$. В этом определении $a^* \circ \mathcal{F}$ означает композицию отображений $\mathcal{F}$ и a^*.

Предложение 1.3.1. *Отображение τ обладает следующими свойствами*:

(1) *τ является $\mathbb{R}$-линейным по каждому аргументу*;
(2) $\mathcal{F}_{(a^* \cdot b)} = (b\mathcal{F})_{(a^*)}$;
(3) $(\mathcal{F}\mathcal{G})_{(a^*)} = \mathcal{F}_{(a^* \cdot \varepsilon^\alpha)} \mathcal{G}_{(\varepsilon_\alpha)}$*, где по α ведется суммирование от* 1 *до* m*, а* (ε^α), (ε_α) *— взаимные базисы алгебры $\mathbb{A}$ и векторного пространства $\mathbb{A}^*$ над $\mathbb{R}$*;
(4) *если $\mathcal{F}_{(b^*)} = 0$ для всех b^*, то $\mathcal{F} = 0$.*

Условия (1) можно записать в виде

$$(\lambda \mathcal{F} + \mu \mathcal{G})_{(b^*)} = \lambda \mathcal{F}_{(b^*)} + \mu \mathcal{G}_{(b^*)}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \quad \mathcal{F}_{(\lambda b^* + \mu c^*)} = \lambda \mathcal{F}_{(b^*)} + \mu \mathcal{F}_{(c^*)}.$$

Введенное выше отображение τ будем использовать при построении вещественных реализаций тензорных полей, заданных на $M_n^{\mathbb{A}}$. Для сокращения записи вместо $\mathcal{F}_{(\varepsilon_\alpha)}$ будем писать $\mathcal{F}_{(\alpha)}$.

Заметим, что если x^i — координатные функции в окрестности U некоторой карты (U, h), то $x^i = x^i_\alpha \varepsilon^\alpha$, и эти функции голоморфны, причем $(x^i)_{(\varepsilon_\alpha)} = x^i_\alpha$. Функции x^i_α являются координатными функциями в карте (U, h'), где отображение $h' : U \to U' \subset \mathbb{R}^{mn}$, определенное условием $h'(x) = (x^i_\alpha)$б является гомеоморфизмом.

Предложение 1.3.2. *Если векторное поле $\tilde{X}$, заданное на многообразии $M_{mn}^{\mathbb{R}}$, удовлетворяет условию $\tilde{X}\mathcal{F}_{(b^*)} = 0$ для всех $\mathcal{F} \in \mathbb{B}$ и $b^* \in \mathbb{A}^*$, то $\tilde{X} = 0$.*

Предложение 1.3.3. *Пусть (U, x^i), (U, x^i_α) — карты атласов гладких структур многообразий $M_n^{\mathbb{A}}$ и $M_{nm}^{\mathbb{R}}$ соответственно, заданных на одном и том же топологическом пространстве M. Для каждой голоморфной функции $\mathcal{F} = \mathcal{F}_\alpha \varepsilon^\alpha$, заданной на $M_n^{\mathbb{A}}$, ее ограничение на окрестность U удовлетворяет тождествам*

$$\partial_i^\beta \mathcal{F}_{(\tau)} = (\partial_i \mathcal{F})_{(\varepsilon_\tau \cdot \varepsilon^\beta)}, \quad \partial_i^\beta \mathcal{F}_{(b^*)} = (\partial_i \mathcal{F})_{(b^* \cdot \varepsilon^\beta)}.$$

Предложение 1.3.4. *Пусть X — произвольное векторное поле на $M^{\mathbb{A}}$, a — произвольный элемент алгебры $\mathbb{A}$. Существует единственное векторное поле $X^{(a)}$ на $M_{mn}^{\mathbb{R}}$, удовлетворяющее условию*

$$X^{(a)} \mathcal{F}_{(b^*)} = (X\mathcal{F})_{(b^* \cdot a)} \tag{1.3.1}$$

для всех $b^* \in \mathbb{A}^*$ и любой голоморфной функции $\mathcal{F} \in \mathbb{B}(V)$, где V — произвольная открытая окрестность произвольной точки q области определения векторного поля X.

Заметим, что из предложения 1.3.4 следует, что $(\partial_i)^{(\alpha)} = \partial_i^\alpha$, а также что каждое векторное поле на $M_n^{\mathbb{A}}$ имеет бесчисленное множество вещественных реализаций.

Особое место занимает вещественная реализация векторного поля X, соответствующая единице δ алгебры $\mathbb{A}$, обозначаемая $X^{(\delta)}$. Векторное поле $X^{(\delta)}$ определяется условием

$$X^{(\delta)}\mathcal{F}_{(b^*)} = (X\mathcal{F})_{(b^*)}.$$

Отметим основные свойства отображения $(a) : X \to X^{(a)}$.

Предложение 1.3.5. *Имеют место следующие тождества*:
(1) $X^{(\lambda a+\mu b)} = \lambda X^{(a)} + \mu X^{(b)}$;
(2) $(\lambda X + \mu Y)^{(a)} = \lambda X^{(a)} + \mu Y^{(a)}$;
(3) $(aX)^{(b)} = X^{(ab)}$;
(4) $(\mathcal{F}X)^{(a)} = \mathcal{F}_{(\alpha)} X^{(a\varepsilon^\alpha)}$;
(5) $[X^{(a)}, Y^{(b)}] = [X, Y]^{(ab)}$,
где $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{A}$, $\mathcal{F} \in \mathbb{B}(U)$.

Отметим еще два свойства (δ)-реализации векторных полей.

Предложение 1.3.6.
(1) *Если* $X^{(\delta)} = 0$, *то* $X = 0$;
(2) *если* $X = X^i \partial_i$, *то* $X^{(\delta)} = X^i_\alpha \partial_i^\alpha$, *где* $X^i_\alpha = (X^i)_{(\alpha)}$;
(3) $X^{(a)} = (aX)^{(\delta)}$.

Предложение 1.3.7. *Если система векторных полей $X_1, \dots, X_s$, $s \leqslant n$, в каждой точке области $U \subset M_n^{\mathbb{A}}$ является $\mathbb{A}$-линейно независимой и система элементов $a^1, \dots, a^k$, $k \leqslant m$, алгебры $\mathbb{A}$ линейно независима над $\mathbb{R}$, то система векторных полей $X_1^{(a^\nu)}, X_2^{(a^\nu)}, \dots, X_s^{(a^\nu)}$, $\nu = 1, 2, \dots, k$, линейно независима в каждой точке $p \in U$. В частности, если (X_i), $i = 1, \dots, n$, и (a^λ) — базисы алгебры голоморфных векторных полей на U и алгебры $\mathbb{A}$, то система векторных полей $X_i^{(a^\lambda)}$ образует подвижной репер в области U.*

Последнее предложение позволяет задавать тензорные поля типа (r, s) ($r = 0$ или 1) на $M_{mn}^{\mathbb{R}}$ указанием значений этих тензорных полей на векторных полях вида $X^{(a)}$.

Пусть K — тензорное поле типа $(1, s)$ на $M_n^{\mathbb{A}}$, $a \in \mathbb{A}$ (см. [10]).

Определение 1.3.1. (a)-Вещественной реализацией тензорного поля K называется тензорное поле на $M_{mn}^{\mathbb{R}}$, обозначаемое $K^{(a)}$ и удовлетворяющее условию

$$K^{(a)}\Big(X_1^{(b_1)}, \dots, X_s^{(b_s)}\Big) = \Big(K(X_1, \dots, X_s)\Big)^{(ab_1\dots b_s)}$$

для всех векторных полей $X_1, \dots, X_s$ на $M_n^{\mathbb{A}}$, $b_1, \dots b_s \in \mathbb{A}$.

Предположим, что выбраны карты (U, x^i) и (U, x^i_α) на $M_n^{\mathbb{A}}$ и $M_{mn}^{\mathbb{R}}$ соответственно. Тогда на U можно выбрать поля натуральных реперов ∂_i и ∂_i^α соответственно,

$$K\Big(\partial_{i_1}, \dots, \partial_{i_s}\Big) = K^j_{i_1\dots i_s}\partial_j, \quad K^{(a)}\Big(\partial_{i_1}^{\alpha_1}, \dots, \partial_{i_s}^{\alpha_s}\Big) = {}^aK^{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_s\,j}_{i_1\,i_2\,\dots\,i_s\,\sigma}\partial_j^\sigma.$$

Из определения 1.3.1 следует, что

$${}^aK^{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_s\,j}_{i_1\,i_2\,\dots\,i_s\,\sigma}\partial_j^\sigma = \Big(K^j_{i_1\dots i_s}\partial_j\Big)^{(a\varepsilon^{\alpha_1}\dots\varepsilon^{\alpha_s})}.$$

Разложив $K^j_{i_1\dots i_s}$ по ε^τ и учитывая, что $a = a_\mu\varepsilon^\mu$, получим

$${}^aK^{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_s\,j}_{i_1\,i_2\,\dots\,i_s\,\sigma}\partial_j^\sigma = \Big(K^j_{\tau i_1\dots i_s}\partial_j\Big)^{(a_\mu\varepsilon^\mu\varepsilon^\tau\varepsilon^{\alpha_1}\dots\varepsilon^{\alpha_s})}.$$

Отсюда

$$ {}^{a}K^{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_s\,j}_{i_1\,i_2\,\ldots\,i_s\,\sigma} = a_\mu K^{j}_{\tau i_1\ldots i_s}\gamma^{\mu\tau\alpha_1\ldots\alpha_s}_{\sigma}, $$

где

$$ \gamma^{\mu\tau\alpha_1\ldots\alpha_s}_{\sigma} = \varepsilon_\sigma\Big(\varepsilon^\mu\varepsilon^\tau\varepsilon^{\alpha_1}\ldots\varepsilon^{\alpha_s}\Big) = \gamma^{\mu\tau}_{\sigma_1}\gamma^{\sigma_1\alpha_1}_{\sigma_2}\ldots\gamma^{\sigma_s\alpha_s}_{\sigma}, $$

а $\gamma^{\alpha\beta}_{\sigma}$ — структурные постоянные алгебры $\mathbb{A}$ относительно базиса (ε^α).

Особо выделим (a)-вещественные реализации единичного аффинора I, заданного на $M_n^{\mathbb{A}}$, который удовлетворяет условию $I(X)=X$. Из определения 1.3.1 следует, что $I^{(a)}$ является аффинором, который однозначно определяется тождеством

$$ I^{(a)}(X^{(b)}) = X^{(ab)}. $$

В локальных координатах компоненты этого аффинора определяются исходя из этих соотношений. В карте (U,x^i) имеем $I(\partial_i)=\delta_i^j\partial_j$. Получим

$$ I^{(a)}(\partial_i^\alpha) = {}^{a}I^{\alpha j}_{i\sigma}\partial_j^\sigma. $$

В силу определения 1.3.1 левые части этих соотношений можно представить так:

$$ I^{(a)}(\partial_i^\alpha) = (I(\partial_i))^{(a\varepsilon^\alpha)} = \delta_i^j\partial_j^{(a\varepsilon^\alpha)} = a_\tau\gamma^{\tau\alpha}_{\mu}\delta_i^j\partial_j^\mu. $$

Следовательно,

$$ {}^{a}I^{\alpha j}_{i\sigma}\partial_j^\sigma = a_\tau\gamma^{\tau\alpha}_{\sigma}\delta_i^j. \tag{1.3.2} $$

Аффинор $I^{(a)}$ называется *структурным аффинором*, соответствующим элементу $a\in\mathbb{A}$ (см. [10]). Коэффициенты $a_\tau\gamma^{\tau\alpha}_{\sigma}$ являются элементами матрицы L_a линейного оператора $\tilde{L}_a:\mathbb{A}\to\mathbb{A}$, действующего по закону $\tilde{L}_a(b)=ab$, $b\in\mathbb{A}$.

Поскольку ранг линейного оператора не зависит от выбора базиса, корректно следующее определение.

Определение 1.3.2. Ранг линейного оператора $\tilde{L}_a$ называется *рангом элемента* $a\in\mathbb{A}$, а дефект линейного оператора $\tilde{L}_a$ называется *дефектом элемента* a.

Ясно, что ранг элемента a будет максимальным, равным размерности алгебры $\mathbb{A}$ тогда и только тогда, когда a обратим. При этом дефект будет равен нулю. Напротив, дефект элемента a не равен нулю тогда и только тогда, когда этот элемент либо нулевой, либо является делителем нуля.

Заметим также, что из соотношений (1.3.2) следует, что матрицу аффинора $I^{(a)}$ можно представить как тензорное произведение $L_a\otimes E_n$, где E_n — единичная матрица порядка n.

Если тензорное поле K является ковариантным типа $(0,s)$, то для каждого элемента $b^*\in\mathbb{A}^*$ можно построить (b^*)-вещественную реализацию $K_{(b^*)}$, удовлетворяющую условию

$$ K_{(b^*)}\Big(X_1^{(a_1)},\ldots,X_s^{(a_s)}\Big) = \Big(K(X_1,\ldots,X_s)\Big)_{(b^*\cdot(a_1\ldots a_s))}. $$

В локальных координатах компоненты $K_{(b^*)}$ можно найти следующим образом. Пусть

$$ K\Big(\partial_{i_1},\ldots,\partial_{i_s}\Big) = K_{i_1i_2\ldots i_s}, \quad K_{(b^*)}\Big(\partial^{\alpha_1}_{i_1},\ldots,\partial^{\alpha_s}_{i_s}\Big) = {}_{b^*}K^{\alpha_1\ldots\alpha_s}_{i_1\,\ldots\,i_s}. $$

Тогда

$$ {}_{b^*}K^{\alpha_1\ldots\alpha_s}_{i_1\,\ldots\,i_s} = \Big(K_{i_1\ldots i_s}\Big)_{\left(b^*\cdot(\varepsilon^{\alpha_1}\ldots\varepsilon^{\alpha_s})\right)} = \gamma^{\alpha_1\ldots\alpha_s}_{\tau}\Big(K_{\sigma i_1\ldots i_s}\varepsilon^\sigma\Big)_{(b^*\cdot\varepsilon^\tau)} = \gamma^{\alpha_1\ldots\alpha_s}_{\tau}\gamma^{\tau\sigma}_{\mu}b^\mu K_{\sigma i_1\ldots i_s}. $$

Таким образом,

$$ {}_{b^*}K^{\alpha_1\ldots\alpha_s}_{i_1\,\ldots\,i_s} = K_{\sigma i_1\ldots i_s}\gamma^{\sigma\alpha_1\ldots\alpha_s}_{\mu}b^\mu. $$

1.4. Вещественные реализации линейных связностей. Линейная связность ∇ на многообразии $M_n^{\mathbb{A}}$ определяется так же, как и в вещественном случае (см. [10]). В каждой карте (U, x^i) задается набор $\mathbb{A}$-гладких функций $\Gamma^i_{jk} = \Gamma^i_{jk}(x^i)$, связанных на пересечении областей определения карт (U, x^i) и $(\overline{U}, \overline{x}^i)$ соотношениями

$$\overline{\Gamma}^i_{jk} = \Gamma^a_{bc}\frac{\partial x^b}{\partial \overline{x}^j}\frac{\partial x^c}{\partial \overline{x}^k}\frac{\partial \overline{x}^i}{\partial x^a} + \frac{\partial \overline{x}^i}{\partial x^a}\frac{\partial^2 x^a}{\partial \overline{x}^j \partial \overline{x}^k}.$$

Линейная связность называется *голоморфной*, если голоморфны функции Γ^i_{jk}.

Пусть X, Y — голоморфные векторные поля на $M_n^{\mathbb{A}}$. В открытой окрестности каждой точки области определения векторных полей X, Y определим операцию ∇, положив

$$\nabla_X Y = X^j(\Gamma^i_{jk}Y^k + \partial_j Y^i)\partial_i.$$

Векторное поле $\nabla_X Y$ называется *ковариантной производной* Y относительно X. В частности, для векторных полей ∂_i, ∂_j имеем

$$\nabla_{\partial_j}\partial_k = \Gamma^i_{jk}\partial_i.$$

Предложение 1.4.1. *Для каждой голоморфной линейной связности ∇ на $M_n^{\mathbb{A}}$ существует такая единственная линейная связность $\nabla^{\mathbb{R}}$ на $M^{\mathbb{R}}_{mn}$, что*

$$\nabla^{\mathbb{R}}_{X^{(a)}} Y^{(b)} = (\nabla_X Y)^{(ab)} \tag{1.4.1}$$

для любых векторных полей X, Y и $a, b \in \mathbb{A}$.

Последнее предложение позволяет ввести следующее определение.

Определение 1.4.1. Связность $\nabla^{\mathbb{R}}$, определенная условием (1.4.1), называется *вещественной реализацией* голоморфной линейной связности ∇.

Впервые вещественные реализации комплексных линейных связностей были введены другим способом А. П. Норденом (см. [10]).

Отметим свойства тензорных полей кручения и кривизны связности $\nabla^{\mathbb{R}}$. Обозначим их соответственно через $\tilde{T}$ и $\tilde{R}$. Для произвольных векторных полей вида $X^{(a)}$, $Y^{(b)}$, $Z^{(c)}$ имеем

$$\tilde{T}(X^{(a)}, Y^{(b)}) = \nabla^{\mathbb{R}}_{X^{(a)}} Y^{(b)} - \nabla^{\mathbb{R}}_{Y^{(b)}} X^{(a)} - [X^{(a)}, Y^{(b)}] = \Big(\nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]\Big)^{(ab)} = (T(X, Y))^{(ab)},$$

где T — тензорное поле кручения связности ∇. Из этих соотношений получаем $\tilde{T} = T^{(\delta)}$, т.е. $\tilde{T}$ является (δ)-вещественной реализацией тензорного поля T кручения связности ∇.

Аналогичный результат получим и для $\tilde{R}$:

$$\tilde{R}(X^{(a)}, Y^{(b)})Z^{(c)} = \nabla^{\mathbb{R}}_{X^{(a)}}\nabla^{\mathbb{R}}_{Y^{(b)}} Z^{(c)} - \nabla^{\mathbb{R}}_{Y^{(b)}}\nabla^{\mathbb{R}}_{X^{(a)}} Z^{(c)} - \nabla^{\mathbb{R}}_{[X^{(a)}, Y^{(b)}]} Z^{(c)} =$$
$$= (\nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z)^{(abc)}.$$

Отсюда $\tilde{R} = R^{(\delta)}$.

Предложение 1.4.2. *Тензорные поля кручения и кривизны связности $\nabla^{\mathbb{R}}$ являются (δ)-вещественными реализациями соответствующих тензорных полей.*

Предложение 1.4.3 (см. [113]). *Пусть $M^{\mathbb{R}}_{mn}$ — вещественная реализация $\mathbb{A}$-гладкого многообразия M_n, $\nabla^{\mathbb{R}}$ — вещественная реализация $\mathbb{A}$-гладкой линейной связности ∇. Если существует такая линейная форма ϕ на $M^{\mathbb{R}}_{mn}$, что*

$$T^{(\delta)} = I^{(\delta)} \otimes \phi - \phi \otimes I^{(\delta)},$$

где $I^{(\delta)}$ — единичный аффинор на $M^{\mathbb{R}}_{mn}$, то $T = 0$.

На основании предложений 1.3.6 и 1.4.3 заключаем, что имеет место следующая теорема.

Теорема 1.4.1. *Пусть $\nabla^{\mathbb{R}}$ — вещественная реализация некоторой голоморфной связности ∇. Следующие условия эквивалентны*:

(1) $T = 0$;
(2) $T^{(\delta)} = 0$;
(3) *существует такая линейная форма* ϕ *на* $M_{mn}^{\mathbb{R}}$, *что*

$$T^{(\delta)} = I^{(\delta)} \otimes \phi - \phi \otimes I^{(\delta)},$$

где $I^{(\delta)}$ *— единичный аффинор на* $M_{mn}^{\mathbb{R}}$.

Пространство, тензор кручения которого удовлетворяет условию (3), называется *полусимметрическим* (см. [25]). Поэтому теорема 1.4.1 может быть сормулирована следующим образом.

Теорема 1.4.2. *Вещественная реализация* $\nabla^{\mathbb{R}}$ *является полусимметрической тогда и только тогда, когда она сама и связность* ∇ *не имеют кручения.*

Теорема 1.4.3 (см. [113]). *Следующие условия эквивалентны*:
(1) *пространство* $(M_{mn}^{\mathbb{R}}, \nabla^{\mathbb{R}})$ *является локально проективно плоским*;
(2) *пространство* $(M_{mn}^{\mathbb{R}}, \nabla^{\mathbb{R}})$ *является локально плоским.*

1.5. Алгебры Ли голоморфных аффинных векторных полей. Пусть ∇ — голоморфная линейная связность на $\mathbb{A}$-гладком многообразии M_n, X — голоморфное векторное поле на этом многообразии.

Определение 1.5.1. Голоморфное векторное поле X, заданное на M_n, называется *аффинным* относительно линейной связности ∇, если $L_X\nabla = 0$, где $L_X\nabla$ — производная Ли связности ∇ вдоль векторного поля X, удовлетворяющая условию

$$L_X\nabla(Y, Z) = L_X(\nabla_Y Z) - \nabla_Y(L_X Y) - \nabla_{[X,Y]}Z.$$

Если X — аффинное векторное поле, то тензорные поля кручения T и кривизны R связности ∇ удовлетворяют следующим тождествам (см. [118]):

$$L_X(\nabla^k T) = 0, \quad L_X(\nabla^k R) = 0, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Эти тождества являются условиями интегрируемости уравнения $L_X\nabla = 0$ относительно неизвестного аффинного векторного поля X.

На $\mathbb{A}$-гладком многообразии M_n выберем некоторую карту (U, x^i); тогда ограничение векторного поля X на U можно разложить по векторным полям ∂_i натурального репера на U: $X = X^i\partial_i$. Из определения производной Ли линейной связности следует, что уравнение $L_X\nabla = 0$ равносильно системе дифференциальных уравнений

$$\partial_j\partial_k X^i + \Gamma^i_{sk}\partial_j X^s + \Gamma^i_{js}\partial_k X^s - \Gamma^s_{jk}\partial_s X^i + X^s\partial_s\Gamma^i_{jk} = 0$$

относительно неизвестных голоморфных функций X^i. Это система в частных производных второго порядка. Вводя неизвестные $X^i_j = \partial_j X^i$, полученную систему можно представить в виде системы линейных дифференциальных уравнений первого порядка, причем в виде, разрешенном относительно всех производных:

$$\partial_j X^i = X^i_j, \quad \partial_k X^i_j = -\Gamma^i_{sj}X^s_k - \Gamma^i_{ks}X^s_j + \Gamma^s_{kj}X^i_s - X^s\partial_s\Gamma^i_{kj}.$$

Результат дифференцирования голоморфных функций не зависит от порядка дифференцирования, поэтому

$$\partial_k\partial_j X^i - \partial_j\partial_k X^i = 0, \quad \partial_l\partial_k X^i_j - \partial_k\partial_l X^i_j = 0.$$

Отсюда получаем тождества

$$X^s\partial_s T^i_{kj} + T^i_{sj}X^s_k + T^i_{ks}X^s_j - T^s_{kj}X^i_s = 0,$$

$$X^s\partial_s R^i_{jkl} + R^i_{skl}X^s_j + R^i_{jsl}X^s_k + R^i_{jks}X^s_l - R^s_{jkl}X^i_s = 0,$$

которые равносильны соотношениям $L_X T = 0$ и $L_X R = 0$, соответственно. Для каждого $k \in \mathbb{N}$ будут выполняться равенства $L_X(\nabla^k T) = 0$ и $L_X(\nabla^k R) = 0$ (см. [97]).

Обозначим через $g(M_n)$ множество всех голоморфных аффинных векторных полей относительно связности ∇. Из определения производной Ли линейной связности следует, что если

$X, Y \in g(M_n)$ и $a, b \in \mathbb{A}$, то $aX + bY$ и $[X, Y]$ являются голоморфными аффинными векторными полями относительно ∇.

Предложение 1.5.1. *$\mathbb{A}$-Модуль $g(M_n)$ голоморфных аффинных векторных полей относительно связности ∇, снабженный операцией коммутирования, является алгеброй Ли над $\mathbb{A}$.*

Модуль $g(M_n)$ обладает естественной структурой векторного пространства над полем действительных чисел $\mathbb{R}$, поэтому пара $(g(M_n), [\cdot,\cdot])$ является алгеброй Ли голоморфных аффинных векторных полей над $\mathbb{R}$. Обозначим эту алгебру символом $(g(M_n))^{\mathbb{R}}$, а вещественную алгебру Ли аффинных векторных полей относительно $\nabla^{\mathbb{R}}$ — символом $g(M^{\mathbb{R}}_{mn})$. Вещественную реализацию алгебры $(g(M_n))^{\mathbb{R}}$ обозначим через ${}^{\mathbb{R}}(g(M_n))$.

Предложение 1.5.2. *Отображение*

$$h : (g(M_n))^{\mathbb{R}} \to g(M^{\mathbb{R}}_{mn}), \quad h(X) = X^{(\delta)},$$

является инъективным гомоморфизмом.

Следствие 1.5.1. *Алгебры Ли $(g(M_n))^{\mathbb{R}}$ и ${}^{\mathbb{R}}(g(M_n)) \subset g(M^{\mathbb{R}}_{mn})$ изоморфны.*

Из следствия 1.5.1 получаем, что алгебра $(g(M_n))^{\mathbb{R}}$ конечномерна. Действительно, алгебра Ли $g(M^{\mathbb{R}}_{mn})$ имеет размерность, на превышающую $(mn)^2 + mn$, где m — ранг алгебры $\mathbb{A}$.

Рассмотрим расслоение линейных реперов $(L(M^{\mathbb{R}}_{mn}), \pi, M^{\mathbb{R}}_{mn})$ над многообразием $M^{\mathbb{R}}_{mn}$. Известно, что соответствие $Z \to Z^{(0)}_{p'}$, где $Z \in g(M^{\mathbb{R}}_{mn})$, $Z^{(0)}_{p'}$ — значение в точке $p' \in L(M^{\mathbb{R}}_{mn})$ полного лифта векторного поля Z в расслоение $L(M^{\mathbb{R}}_{mn})$, является инъективным.

Пусть $p \in M^{\mathbb{R}}_{mn}$ — естественная проекция точки $p' \in L(M^{\mathbb{R}}_{mn})$, т.е. $p = \pi(p')$, (U, x^i_α) — такая карта на $M^{\mathbb{R}}_{mn}$, что $p \in U$, индекс i принимает значения от 1 до n, а α — от 1 до m. На $L(M^{\mathbb{R}}_{mn})$ построим карту $(\pi^{-1}(U), x^i_\alpha, x^{i\beta}_{\alpha j})$. Для любой точки $p' \in \pi^{-1}(U)$ матрица $\left\| x^{i\beta}_{\alpha j}(p') \right\|$ является элементом полной линейной группы $GL(mn, \mathbb{R})$.

Для произвольного голоморфного аффинного векторного поля $X \in g(M_n)$ имеем

$$X^{(\delta)} = (X^i \partial_i)^{(\delta)} = (X^i)_{(\varepsilon_\alpha)} \partial_i^{(\varepsilon^\alpha)} = X^i_\alpha \partial^\alpha_i.$$

Здесь $\varepsilon^\alpha, \varepsilon_\beta$ — элементы базиса алгебры $\mathbb{A}$ и дуального ему базиса в пространстве $\mathbb{A}^*$, $X^i = X^i_\alpha \varepsilon^\alpha$ — координаты векторного поля X в карте $(U, x^i = x^i_\alpha \varepsilon^\alpha)$. Полный лифт векторного поля $X^{(\delta)} = \widetilde{X}$ в расслоении $(L(M^{\mathbb{R}}_{mn}), \pi, M^{\mathbb{R}}_{mn})$ имеет вид

$$\widetilde{X}^{(0)} = (X^i_\alpha)_{(0)} (\partial^\alpha_i)^{(0)} + (X^i_\alpha)_{\binom{j}{\sigma}} (\partial^\alpha_i)_{\binom{j}{\sigma}}.$$

В точке $p' \in L(M^{\mathbb{R}}_{mn})$ будем иметь

$$\widetilde{X}^{(0)}_{p'} = X^i_\alpha(p) (\partial^\alpha_i)^{(0)}\big|_{p'} + \partial^\tau_k X^i_\alpha(p) x^{k\sigma}_{\tau j}(p') \partial^{\alpha j}_{i\sigma}\big|_{p'}.$$

В силу голоморфности векторного поля $X \in (g(M_n))^{\mathbb{R}}$ выполняются тождества (условия Шefферса, см. [10]):

$$\partial^\tau_k X^i_\alpha(p) = \delta_\sigma \partial^\sigma_k X^i_\mu(p) \gamma^{\mu\tau}_\alpha,$$

где $\gamma^{\mu\tau}_\alpha$ — структурные постоянные алгебры $\mathbb{A}$ относительно базиса (ε^α):

$$\gamma^{\mu\tau}_\alpha = \varepsilon_\alpha(\varepsilon^\mu \varepsilon^\tau), \quad \delta_\alpha \varepsilon^\alpha = \delta.$$

Введем обозначение $X^i_{k\mu} = \delta_\alpha \partial^\alpha_k X^i_\mu$. Тогда

$$\widetilde{X}^{(0)}_{p'} = X^i_\alpha(p) (\partial^\alpha_i)^{(0)}\big|_{p'} + X^i_{k\mu}(p) \gamma^{\mu\tau}_\alpha x^{k\sigma}_{\tau j}(p') \partial^{\alpha j}_{i\sigma}\big|_{p'}.$$

Система векторов $(\partial^\alpha_i)^{(0)}\big|_{p'}$, $\gamma^{\mu\tau}_\alpha x^{k\sigma}_{\tau j}(p') \partial^{\alpha j}_{i\sigma}\big|_{p'}$ касательного пространства $T_{p'}$ к расслоению $L(M^{\mathbb{R}}_{mn})$ линейно независима. Действительно, пусть

$$A_{i\alpha} (\partial^\alpha_i)^{(0)}\big|_{p'} + A^i_{\mu k} \gamma^{\mu\tau}_\alpha x^{k\sigma}_{\tau j}(p') \partial^{\alpha j}_{i\sigma}\big|_{p'} = 0. \qquad (1.5.1)$$

Векторы $(\partial_i^\alpha)^{(0)}\big|_{p'}$, $\partial_{i\sigma}^{\alpha j}\big|_{p'}$ образуют базис касательного пространства $T_{p'}(L(M_{mn}^{\mathbb{R}}))$. Поэтому из (1.5.1) следуют соотношения

$$A_{i\alpha}=0, \quad A^i_{\mu k}\gamma_\alpha^{\mu\tau}x_{\tau j}^{k\sigma}(p')=0. \tag{1.5.2}$$

Так как $\left\|x_{\tau j}^{k\sigma}(p')\right\|\in GL(mn,\mathbb{R})$, то из (1.5.2) получим $A^i_{\mu k}\gamma_\alpha^{\mu\tau}=0$. Свернув эти соотношения с δ_τ, придем к равенствам $A^i_{\alpha k}=0$.

Отсюда следует, что подпространство пространства $T_{p'}(L(M_{mn}^{\mathbb{R}}))$, натянутое на векторы $(\partial_i^\alpha)^{(0)}\big|_{p'}$, $\gamma_\alpha^{\mu\tau}x_{\tau j}^{k\sigma}(p')\partial_{i\sigma}^{\alpha j}\big|_{p'}$, имеет размерность $m(n^2+n)$.

Таким образом, приходим к следующей теореме.

Теорема 1.5.1. *Размерность алгебры Ли над $\mathbb{R}$ голоморфных аффинных векторных полей относительно связности ∇ на M_n не превышает числа $m(n^2+n)$, где m — ранг алгебры $\mathbb{A}$, $n=\dim_{\mathbb{A}}M_n$.*

Координаты $X^i_\alpha(p)$, $X^i_{k\mu}(p)$ вектора $\widetilde{X}^{(0)}_{p'}$ удовлетворяют системе линейных однородных уравнений. Для получения этой системы рассмотрим соотношение

$$L_XK=0, \tag{1.5.3}$$

где X — голоморфное аффинное векторное поле на M_n относительно ∇, а тензорное поле K представляет собой ∇^lT или ∇^lR, где T, R — тензорные поля кручения и кривизны соответственно связности ∇.

Пусть (U,x^i) — карта $\mathbb{A}$-гладкого атласа и $p\in U$. Тогда из (1.5.3) получим

$$\Big(\partial_sK^i_{j_1j_2\dots j_t}(p)\Big)X^s(p)+K\Big(\begin{smallmatrix}i\\ j_1j_2\dots j_t\end{smallmatrix}\Big|\begin{smallmatrix}l\\ s\end{smallmatrix}\Big)X^s_l(p)=0, \tag{1.5.4}$$

где

$$K\Big(\begin{smallmatrix}i\\ j_1j_2\dots j_t\end{smallmatrix}\Big|\begin{smallmatrix}l\\ s\end{smallmatrix}\Big)=\delta^l_{j_1}K^i_{sj_2\dots j_t}(p)+\delta^l_{j_2}K^i_{j_1s\dots j_t}(p)+\dots+\delta^l_{j_t}K^i_{j_1j_2\dots j_{t-1}s}(p)-\delta^i_sK^l_{j_1j_2\dots j_t}(p),$$
$$X^s_l(p)=\partial_lX^s(p).$$

В частности, при $K=T$ или $K=R$ будем иметь соотношения

$$\partial_sT^i_{jk}(p)X^s(p)+T\Big(\begin{smallmatrix}i\\ jk\end{smallmatrix}\Big|\begin{smallmatrix}l\\ s\end{smallmatrix}\Big)X^s_l(p)=0, \quad \partial_sR^h_{ijk}(p)X^s(p)+R\Big(\begin{smallmatrix}h\\ ijk\end{smallmatrix}\Big|\begin{smallmatrix}l\\ s\end{smallmatrix}\Big)X^s_l(p)=0.$$

Пусть $K^i_{j_1j_2\dots j_t}=K^i_{\nu j_1j_2\dots j_t}\varepsilon^\nu$, $X^i=X^i_\alpha\varepsilon^\alpha$. Тогда

$$\partial_sK^i_{j_1j_2\dots j_t}(p)=\delta_\sigma\partial_s^\sigma K^i_{\nu j_1j_2\dots j_t}(p)\varepsilon^\nu, \quad X^s_l(p)=\delta_\sigma\partial_l^\sigma X^s_\alpha(p)\varepsilon^\alpha=X^s_{l\alpha}(p)\varepsilon^\alpha.$$

Учитывая эти равенства и соотношения (1.5.4), получим

$$\delta_\sigma\partial_s^\sigma K^i_{\nu j_1j_2\dots j_t}(p)X^s_\alpha(p)\gamma_\tau^{\nu\alpha}+K\Big(\begin{smallmatrix}i\\ \tau j_1\dots j_t\end{smallmatrix}\Big|\begin{smallmatrix}l\alpha\\ s\end{smallmatrix}\Big)X^s_{l\alpha}(p)=0,$$

где

$$K\Big(\begin{smallmatrix}i\\ \tau j_1\dots j_t\end{smallmatrix}\Big|\begin{smallmatrix}l\alpha\\ s\end{smallmatrix}\Big)=\varepsilon_\nu\Big(K\Big(\begin{smallmatrix}i\\ j_1\dots j_t\end{smallmatrix}\Big|\begin{smallmatrix}l\\ s\end{smallmatrix}\Big)(p)\Big)\gamma_\tau^{\nu\alpha}. \tag{1.5.5}$$

Таким образом, координаты $X^i_\alpha(p)$, $X^i_{k\mu}(p)$ вектора $\tilde{X}^{(0)}_{p'}$ удовлетворяют следующей системе однородных линейных уравнений:

$$\delta_\sigma\partial_s^\sigma K^i_{\nu j_1\dots j_t}\gamma_\tau^{\nu\alpha}y^s_\alpha+K\Big(\begin{smallmatrix}i\\ \tau j_1\dots j_t\end{smallmatrix}\Big|\begin{smallmatrix}l\alpha\\ s\end{smallmatrix}\Big)y^s_{l\alpha}=0. \tag{1.5.6}$$

Отсюда вытекает следующее утверждение.

Предложение 1.5.3 (см. [112])**.** *Если ранг матрицы $\widetilde{K}$ с элементами $K\Big(\begin{smallmatrix}i\\ \tau j_1\dots j_t\end{smallmatrix}\Big|\begin{smallmatrix}l\alpha\\ s\end{smallmatrix}\Big)$ не меньше, чем ρ, то $\dim_{\mathbb{R}}(g(M_n))^{\mathbb{R}}\leqslant m(n^2+n)-\rho$.*

Предположим, что алгебра Ли $g(M_n)$ голоморфных аффинных векторных полей относительно голоморфной линейной связности ∇ имеет размерность над полем $\mathbb{R}$, равную $m(n^2+n)$. Тогда координаты вектора $\widetilde{X}^{(0)}_{p'}$ для каждого векторного поля $X \in g(M_n)$ удовлетворяют системе (1.5.6). Пусть $p = \pi(P')$. Так как $\dim_{\mathbb{R}}(g(M_n))^{\mathbb{R}} = m(n^2+n)$, число неизвестных в системе (1.5.6) равно также $m(n^2+n)$, то ранг системы (1.5.6) равен нулю. Выделим в системе (1.5.6) подсистемы

$$\delta_\sigma \partial^\sigma_s T^i_{\nu jk}(p)\gamma^{\nu\alpha}_\tau y^s_\alpha + T\Big(\begin{smallmatrix} i \\ \tau jk\end{smallmatrix}\Big|\begin{smallmatrix} l\alpha \\ s\end{smallmatrix}\Big) y^s_{l\alpha} = 0, \tag{1.5.7}$$

$$\delta_\sigma \partial^\sigma_s R^h_{\nu ijk}(p)\gamma^{\nu\alpha}_\tau y^s_\alpha + R\Big(\begin{smallmatrix} h \\ \tau ijk\end{smallmatrix}\Big|\begin{smallmatrix} l\alpha \\ s\end{smallmatrix}\Big) y^s_{l\alpha} = 0. \tag{1.5.8}$$

Ранги систем (1.5.6) и (1.5.7) также равны нулю. Поэтому, в частности,

$$T\Big(\begin{smallmatrix} i \\ \tau jk\end{smallmatrix}\Big|\begin{smallmatrix} l\alpha \\ s\end{smallmatrix}\Big) = 0, \quad R\Big(\begin{smallmatrix} h \\ \tau ijk\end{smallmatrix}\Big|\begin{smallmatrix} l\alpha \\ s\end{smallmatrix}\Big) = 0.$$

В развернутом виде эти соотношения имеют вид:

$$(\delta^l_j T^i_{\nu sk} + \delta^l_k T^i_{\nu js} - \delta^h_s T^l_{\nu jk})\gamma^{\nu\alpha}_\tau = 0, \quad (\delta^l_i R^h_{\nu sjk} + \delta^l_j R^h_{\nu isk} + \delta^l_k R^h_{\nu ijs} - \delta^h_s R^l_{\nu ijk})\gamma^{\nu\alpha}_\tau = 0.$$

Свернем эти соотношения сначала с δ_α, затем полученные соотношения свернем по l и s. В результате будем иметь

$$T^i_{\nu sk} = 0, \quad R^l_{\nu ijk} = 0.$$

Отсюда следует, что $T = 0$ и $R = 0$. Таким образом, доказано следующее утверждение.

Предложение 1.5.4 (см. [112]). *Если алгебра Ли голоморфных аффинных векторных полей на $\mathbb{A}$-гладком многообразии M_n относительно голоморфной линейной связности ∇ имеет вещественную размерность $m(n^2+n)$, где m — ранг алгебры $\mathbb{A}$ над $\mathbb{R}$, $n = \dim_{\mathbb{A}} M_n$, то тензорные поля кручения T и кривизны R связности ∇ равны нулю.*

1.6. Оценка размерностей алгебр Ли голоморфных аффинных векторных полей $\mathbb{A}$-гладких многообразий, снабженных голоморфной линейной связностью с отличным от нуля тензорным полем Вейля. Тензорное поле W, определенное тождеством

$$\begin{aligned} W(X,Y)Z = R(X,Y)Z + \frac{1}{n+1}\big(\operatorname{Ric}(X,Y) - \operatorname{Ric}(Y,X)\big)Z - \\ - \frac{1}{n^2-1}\Big(\big(\operatorname{Ric}(X,Z) + n\operatorname{Ric}(Z,X)\big)Y - \big(\operatorname{Ric}(Y,Z) + n\operatorname{Ric}(Z,Y)\big)X\Big), \end{aligned} \tag{1.6.1}$$

называется *тензорным полем Вейля.* Тензорное поле Ric удовлетворяет условию

$$\operatorname{Ric}(\partial_j, \partial_k) = R_{jk} = R^i_{jki}$$

(по i ведется суммирование от 1 до n) и называется *тензорным полем Риччи.*

Из тождества (1.6.1) следуют тождества

$$W(X,Y)Z = -W(Y,X)Z, \tag{1.6.2}$$

$$W(X,Y)Z + W(Y,Z)X + W(Z,X)Y = 0, \tag{1.6.3}$$

$$C^1_s W = 0, \quad s = 1,2,3, \tag{1.6.4}$$

где C^1_s — операция свертывания тензорного поля.

Предложение 1.6.1. *Следующие условия эквивалентны*:

(1) $W_p \neq 0$;

(2) *существует такая карта (U, x^i) на M_n, что $W^h_{iij}(p) \neq 0$, $p \in U$б для некоторых индексов h, i, jб попарно различных между собой, или если в каждой карте (U, x^i) выполняется равенство $W^h_{iij} = 0$, то существует карта, в которой $W^h_{ijk}(p) \neq 0$ для некоторых индексов, попарно различных между собой.*

При исследовании размерности алгебры используется понятие ранга элемента алгебры и сингулярного ранга алгебры.

Определение 1.6.1. *Рангом элемента* a алгебры $\mathbb{A}$ называется ранг линейного оператора $L_a : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$, действующего по правилу $L_a(x) = ax$.

Обозначим ранг элемента a через $\operatorname{rank} a$.

Определение 1.6.2. Число $r_0 = \min\{\operatorname{rank} a \mid a \in \mathbb{A},\ a \neq 0\}$ называется *сингулярным рангом* алгебры $\mathbb{A}$.

Предложение 1.6.2 (см. [112])**.** *Пусть* ∇ *— голоморфная линейная связность на* M_n *и* $T = 0$. *Если* $W^h_{iij}(p) = a \neq 0$, $h \neq i$, $h \neq j$, *и* $r = \operatorname{rank} a$, *то*

$$\dim_{\mathbb{R}} \left(g(M_n)\right)^{\mathbb{R}} \leqslant m(n^2 + n) - r(3n - 5).$$

Для установления точности оценки, приведенной в доказанном предложении 1.6.2, рассмотрим следующий пример.

Пример 1.6.1. Рассмотрим $\mathbb{A}$-гладкое многообразие $\mathbb{A}^n$ с естественными координатными функциями $x^i = x^i_\alpha \varepsilon^\alpha$, где ε^α, $\alpha = 1, 2, \ldots, m,$ — базисные элементы алгебры $\mathbb{A}$. Зададим $\mathbb{A}$-гладкую линейную связность ∇ на $\mathbb{A}^n$ условиями

$$\nabla_{\partial_2}\partial_3 = \nabla_{\partial_3}\partial_2 = ax^2\partial_1, \quad \nabla_{\partial_j}\partial_k = 0 \text{ для остальных индексов } j \text{ и } k.$$

В этих соотношениях a — элемент алгебры $\mathbb{A}$, ранг которого равен r. Указанная связность не имеет кручения, а составляющие тензорного поля R кривизны равны $R^1_{223} = -R^1_{232} = a$; остальные компоненты R^h_{ijk} равны нулю.

Прямые вычисления показывают, что $\nabla R = 0$ и, следовательно, для каждого натурального числа k имеем $\nabla^k R = 0$. Отсюда следует, что условия $L_X \nabla^k R = 0$ эквивалентны условию $L_X R = 0$. Последнее соотношение равносильно системе уравнений

$$aX^h_1 = 0 \ (h > 1), \quad aX^2_l = 0 \ (l > 2), \quad aX^3_{l_1} = 0 \ (l_1 > 3), \quad a(2X^2_2 + X^3_3 - X^1_1) = 0, \tag{1.6.5}$$

где $X^i_j = \partial_j X^i$, а $X^i = dx^i(X)$ — составляющие векторного поля X.

Система дифференциальных уравнений, состоящая из уравнения $L_X \nabla = 0$ и уравнений (1.6.5), вполне интегрируема. Интегрируя эту систему, получим, что элементами алгебры $g(M_n)$ являются векторные поля вида

$$X = (c^s_t x^t + c^s)\partial_s - \left(ac^2x^2x^3 + \frac{1}{3}ac^3_2(x^2)^3\right)\partial_1,$$

где $c^s_t = c^s_{t\alpha}\varepsilon^\alpha$, $c^s = c^s_\alpha \varepsilon^\alpha$ являются элементами алгебры $\mathbb{A}$, удовлетворяющими системе линейных однородных уравнений

$$A^\alpha_\tau c^h_{1\alpha} = 0 \ (h > 1), \quad A^\alpha_\tau c^2_{l\alpha} = 0 \ (l > 2), \quad A^\alpha_\tau c^3_{l_1\alpha} = 0 \ (l_1 > 3), \quad A^\alpha_\tau(2c^2_{2\alpha} + c^3_{3\alpha} - c^1_{1\alpha}) = 0, \tag{1.6.6}$$

где $A^\alpha_\tau = a_\nu \gamma^{\nu\alpha}_\tau$ — элементы матрицы линейного оператора L_a относительно базиса (ε^α). В силу того, что $\operatorname{rank} a = r$, имеем, что ранг системы (1.6.6) равен $r(3n - 5)$. Отсюда следует, что вещественная размерность алгебры Ли $g(M_n)$ голоморфных аффинных векторных полей пространства $(\mathbb{A}^n, \nabla)$ равна $m(n^2 + n) - r(3n - 5)$.

Предложение 1.6.3. *Если в некоторой карте* (U, x^i) *существует такая ненулевая составляющая вида* W^h_{iij} *тензорного поля Вейля, что* $W^h_{iij}(p) = a$, *где* a *— регулярный элемент алгебры* $\mathbb{A}$, *то вещественная размерность алгебры Ли голоморфных аффинных векторных полей пространства* (M_n, ∇), *не превышает числа* $m(n^2 - 2n + 5)$. *Указанная оценка является точной.*

Доказательство. Элемент $a \in \mathbb{A}$ регулярен тогда и только тогда, когда $\operatorname{rank} a = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{A}$. Из предложения 1.6.3 следует, что $\dim_{\mathbb{R}}(g(M_n))^{\mathbb{R}} \leqslant m(n^2 - 2n + 5)$.

Для доказательства точности этой оценки в примере 1.6.1 возьмем элемент $a = \delta$, где δ — главная единица алгебры; ранг этого элемента равен m. Для произвольного аффинного векторного поля X имеем

$$X = (c^h_s x^s + c^h)\partial_h - \left(c^2x^2x^3 + \frac{1}{3}c^3_2(x^2)^3\right)\partial_1.$$

Из (1.6.6) следует, что

$$c_1^b = 0 \ (b > 1), \quad c_l^2 = 0 \ (l > 2), \quad c_j^3 = 0 \ (j > 3), \quad 2c_2^2 + c_3^3 = c_1^1,$$

поэтому

$$X = c^2\big(\partial_2 - x^2x^3\partial_1\big) + c^t\partial_t + c_2^2\big(2x^1\partial_1 + x^2\partial_2\big) + \\ + c_3^3\big(x^1\partial_1 + x^3\partial_3\big) + c_b^1x^b\partial_1 + c_2^3\left(x^2\partial_3 - \frac{1}{3}(x^2)^3\partial_1\right) + c_b^jx^b\partial_j,$$

где по $t = 1, 3, \ldots, n$, $b = 2, 3, \ldots, n$, $j = 4, 5, \ldots, n$ ведется суммирование.

Полученное равенство означает, что голоморфные аффинные векторные поля

$$\partial_t, \quad t = 1, 3, \ldots, n,$$
$$\partial_2 - x^2x^3\partial_1, \quad 2x^1\partial_1 + x^2\partial_2, \quad x^1\partial_1 + x^3\partial_3, \quad x^2\partial_3 - \frac{1}{3}(x^2)^3\partial_1,$$
$$x^b\partial_1, \quad x^b\partial_j, \quad b = 2, \ldots, n, \quad j = 4, \ldots, n,$$

являются порождающими элементами алгебры Ли $g(M_n)$. Умножив их на базисные элементы ε^α, $\alpha = 1, 2, \ldots, m$, получим базис алгебры Ли $(g(M_n))^{\mathbb{R}}$. Отсюда

$$\dim_{\mathbb{R}}(g(M_n))^{\mathbb{R}} = m(n^2 - 2n + 5). \qquad \square$$

Замечание 1.6.1. Если алгебра $\mathbb{A}$ совпадает с алгеброй действительных чисел $\mathbb{R}$, то

$$\operatorname{rank} a = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{A} = 1.$$

Поэтому предложение 1.6.3 становится в этом случае теоремой, доказанной И. П. Егоровым (см. [24]):

$$\dim g(M_n) \leqslant n^2 - 2n + 5.$$

Предложение 1.6.4. *Максимальная вещественная размерность алгебр Ли голоморфных аффинных векторных полей на M_n с $\mathbb{A}$-гладкими линейными связностями ∇, тензорные поля Вейля W которых имеют в некоторой карте отличные от нуля составляющие вида W_{iij}^h, равна в точности $m(n^2 + n) - r_0(3n - 5)$, где r_0 — сингулярный ранг алгебры $\mathbb{A}$, $m = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{A}$.*

Доказательство. Для любого элемента a имеем $\operatorname{rank} a \geqslant r_0$, поэтому из предложения 1.6.3 следует, что

$$\dim_{\mathbb{R}}(g(M_n))^{\mathbb{R}} \leqslant m(n^2 + n) - r_0(3n - 5).$$

Точность оценки следует из примера 1.6.1. $\square$

Так как сингулярный ранг $r_0 \geqslant 1$ для любой вещественной алгебры $\mathbb{A}$, то из предложения 1.6.4 вытекает следующее утверждение.

Предложение 1.6.5. *Максимальная размерность алгебр Ли голоморфных аффинных векторных полей в пространствах (M_n, ∇) над коммутативными ассоциативными алгебрами с единицей ранга m равна $m(n^2+n)-3n+5$ при условии, что тензорное поле Вейля имеет в некоторой координатной окрестности (U, x^i) отличные от нуля составляющие вида W_{iij}^h.*

Точность оценки, указанной в предложении 1.6.5, следует из примера 1.6.1. Для этого в качестве алгебры $\mathbb{A}$ возьмем алгебру плюральных чисел $\mathbb{R}(\varepsilon^{m-1})$ и положим $a = \varepsilon^{m-1}$, $\operatorname{rank} a = 1$. Тогда для каждого голоморфного аффинного векторного поля X будем иметь

$$X = (c_t^s x^t + c^s)\partial_s - \left(\varepsilon^{m-1}c^2x^2x^3 + \frac{1}{3}\varepsilon^{m-1}c_2^3(x^2)^3\right)\partial_1,$$

причем постоянные $c_t^s = c_{t\alpha}^s\varepsilon^\alpha$ удовлетворяют условиям

$$c_{10}^h = 0 \ (h > 1), \quad c_{k0}^2 = 0 \ (k > 2), \quad c_{l0}^3 = 0 \ (l > 3), \quad 2c_{20}^2 + c_{30}^3 = c_{10}^1.$$

На основании этих соотношений заключаем, что базисом алгебры Ли $(g(M_n))^{\mathbb{R}}$ голоморфных аффинных векторных полей является следующая система векторных полей:

$$\partial_1, \quad \partial_3, \quad \ldots, \quad \partial_n,$$
$$2x^1\partial_1 + x^2\partial_2, \quad x^1\partial_1 + x^3\partial_3, \quad \partial_2 - \varepsilon^{m-1}x^2x^3\partial_1, \quad x^2\partial_3 - \frac{1}{3}\varepsilon^{m-1}(x^2)^3\partial_1,$$
$$x^k\partial_1, \quad x^k\partial_j, \quad \varepsilon^\lambda\partial_s, \quad \varepsilon^\lambda x^1\partial_s, \quad \varepsilon^\lambda x^k\partial_1,$$
$$\varepsilon^\lambda x^k\partial_2, \quad \varepsilon^\lambda x^2\partial_3, \quad \varepsilon^\lambda x^3\partial_3, \quad \varepsilon^\lambda x^j\partial_3, \quad \varepsilon^\lambda x^k\partial_j,$$

где $s = 1, 2, \ldots, n$; $k = 2, 3, \ldots, n$; $j = 4, 5, \ldots, n$, $\lambda = 1, 2, \ldots, m-1$.

Рассмотрим теперь пространства (M_n, ∇), тензорное поле Вейля которых удовлетворяет следующему условию: составляющие вида W^h_{iij} равны нулю в каждой карте $\mathbb{A}$-гладкого атласа, но существует составляющая вида W^h_{ijk}, отличная от нуля в некоторой карте. Пусть $W^h_{ijk}(p) = \lambda_i$, $W^h_{jkl}(p) = \lambda_j$, $W^h_{klj}(p) = \lambda_k$. Положим $A^\alpha_{i\beta} = \lambda_{i\sigma}\gamma^{\sigma\alpha}_\beta$, где $\lambda_{i\sigma}$ — координаты элемента λ_i относительно базиса (ε^α): $\lambda_i = \lambda_{i\sigma}\varepsilon^\sigma$. Матрицу с элементами $A^\alpha_{i\beta}$ обозначим через A_i и введем еще одну матрицу A:

$$A = \begin{pmatrix} A_i \\ A_j \\ A_k \end{pmatrix}.$$

Так как тензорное поле W удовлетворяет тождеству Бианки, то $A_i + A_j + A_k = 0$. В силу этого ранг матрицы A равен рангу ее подматрицы, содержащей только два блока.

Предложение 1.6.6 (см. [112]). *Если в каждой карте составляющие вида W^h_{iij}, $h \neq i, j$, $i \neq j$, тензорного поля Вейля равны нулю и $W^h_{ijk}(p) = \lambda_i \neq 0$, $W^h_{jki}(p) = \lambda_j$, $W^h_{kij}(p) = \lambda_k$ для некоторых индексов h, i, j, k, попарно различных между собой, и $p \in M_n$, то*

$$\dim_{\mathbb{R}}(g(M_n))^{\mathbb{R}} \leqslant m(n^2+n) - r(4n-12) - 2r_1,$$

где $r = \operatorname{rank} A$,

$$r_1 = \operatorname{rank}\begin{pmatrix} A_i - A_j & 0 & 0 \\ 0 & A_i - A_k & 0 \\ 0 & 0 & A_k - A_j \end{pmatrix}.$$

Предложение 1.6.7 (см. [112]). *Если в каждой карте составляющие вида W^h_{iij}, $h \neq i, j$, $i \neq j$, тождественно равны нулю, а $W \neq 0$, то наибольшая вещественная размерность алгебры Ли голоморфных аффинных векторных полей таких пространств (M_n, ∇) равна в точности $m(n^2+n) - 4r_0(n-2)$, где r_0 — сингулярный ранг алгебры $\mathbb{A}$, $m = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{A}$.*

На основании предложений 1.6.4 и 1.6.7 можно доказать следующую теорему.

Теорема 1.6.1 (см. [112]). *Пусть M_n — $\mathbb{A}$-гладкое многообразие, ∇ — $\mathbb{A}$- гладкая линейная связность на M_n. Если тензорное поле Вейля W не нулевое, то максимальная вещественная размерность алгебры Ли $(g(M_n))^{\mathbb{R}}$ голоморфных аффинных векторных полей равна в точности $m(n^2+n) - r_0(3n-5)$, где $m = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{A}$, $n \geqslant 3$, r_0 — сингулярный ранг алгебры $\mathbb{A}$.*

Рассмотрим гладкие многообразия, снабженные линейными связностями над коммутативными ассоциативными алгебрами ранга m. Поскольку сингулярный ранг $r_0 \geqslant 1$, то из теоремы 1.6.1 вытекает следующий результат.

Теорема 1.6.2 (см. [112]). *Вещественные размерности алгебр Ли голоморфных аффинных векторных полей пространств (M_n, ∇) с $W \neq 0$ над алгебрами ранга m не превосходят $m(n^2+n) - 3n + 5$, причем указанная граница — точная.*

Изучению алгебр Ли голоморфных аффинных векторных полей линейных связностей с ненулевым тензорным полем Риччи посвящена работа [121].

Теорема 1.6.3. *Пусть M_n, $n \geqslant 2$, — гладкое многообразие над алгеброй $\mathbb{A}$, ∇ — голоморфная линейная связность на M_n и $\mathrm{Ric} = \mathrm{Ric}^{(+)} \neq 0$, то*

$$\dim_{\mathbb{R}}(g(M_n))^{\mathbb{R}} \leqslant mn^2 + (m - r_0)n,$$

где $m = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{A}$, r_0 — сингулярный ранг алгебры $\mathbb{A}$.

Теорема 1.6.4. *Вещественные размерности алгебр Ли голоморфных аффинных векторных полей пространств (M_n, ∇), $n \geqslant 2$, с симметричным тензорным полем Риччи $\mathrm{Ric} \neq 0$ над алгебрами ранга m не больше, чем $mn^2 + (m-1)n$.*

Сингулярный ранг алгебры $\mathbb{R}(i)$ комплексных чисел равен 2. Поэтому имеет место следующая теорема.

Теорема 1.6.5. *Максимальная вещественная размерность алгебры Ли голоморфных аффинных векторных полей комплексного многообразия M_n со связностью ∇ с ненулевым симметричным тензорным полем Риччи равна в точности $2n^2$.*

Теорема 1.6.6. *Наибольшая возможная размерность алгебры Ли голоморфных аффинных векторных полей относительно $\mathbb{A}$-гладкой линейной связности ∇ на M_n, $n \geqslant 3$, с ненулевым тензорным полем Риччи равна $mn^2 + (m - r_0)n$, где m — ранг алгебры $\mathbb{A}$, r_0 — сингулярный ранг алгебры $\mathbb{A}$.*

1.7. Максимальная размерность алгебр Ли голоморфных аффинных векторных полей относительно $\mathbb{A}$-голоморфных линейных связностей без кручения, с ненулевым тензорным полем кривизны.

Теорема 1.7.1. *Наибольшая вещественная размерность алгебр Ли голоморфных аффинных векторных полей на M_n, $n \geqslant 3$, снабженном $\mathbb{A}$-голоморфной линейной связностью без кручения с отличным от нуля тензорным полем кривизны, равна $mn^2 + (m - r_0)n$, где r_0 — сингулярный ранг алгебры $\mathbb{A}$.*

Теорема 1.7.2. *Всякое пространство (M_n, ∇), для которого $\dim_{\mathbb{R}}(g(M_n))^{\mathbb{R}} = mn^2 + (m-r_0)n$, является эквипроективным.*

Замечание 1.7.1. Теоремы 1.7.1 и 1.7.2 для случая, когда $\mathbb{A} = \mathbb{R}$ (тогда m=1), впервые были доказаны И. П. Егоровым (см. [25]).

Отметим еще одну теорему, которая доказывается на основании полученных результатов.

Теорема 1.7.3. *Пусть M_n, $n \geqslant 3$, — n-мерное гладкое многообразие над алгеброй $\mathbb{A}$. На M_n не существует голоморфной линейной связности ∇ без кручения, алгебра Ли голоморфных аффинных векторных полей которой имеет размерность r, удовлетворяющую неравенствам $mn^2 + (m - r_0)n < r < mn^2 + mn$, где m — ранг алгебры $\mathbb{A}$, r_0 — сингулярный ранг алгебры $\mathbb{A}$.*

Изучены алгебры Ли голоморфных аффинных векторных полей пространств (M_n, ∇) над алгеброй $\mathbb{A}$ конечного ранга с ненулевым тензорным полем кручения.

Теорема 1.7.4 (см. [108])**.** *Если тензорное поле кручения T линейной связности ∇ над алгеброй $\mathbb{A}$ и заданной на M_n удовлетворяет условию $T \neq I \otimes \phi - \phi \otimes I$, то наибольшая возможная вещественная размерность алгебры Ли $(g(M_n))^{\mathbb{R}}$ голоморфных аффинных векторных полей не превышает числа $m(n^2 + n) - r_0(3n - 6)$, где m — ранг алгебры $\mathbb{A}$, при этом $n \geqslant 3$, r_0 — сингулярный ранг алгебры. Эта оценка является точной.*

Теорема 1.7.5 (см. [108])**.** *Размерность над $\mathbb{R}$ алгебры Ли голоморфных аффинных векторных полей в пространствах (M_n, ∇), $n \geqslant 3$, при условии $T \neq I \otimes \phi - \phi \otimes I$, над всевозможными алгебрами ранга m не превышает числа $m(n^2 + n) - 3n + 6$, причем эта оценка — точная.*

Предложение 1.7.1. *Если тензорное поле T пространства (M_n, ∇) имеет структуру*

$$T = I \otimes \phi - \phi \otimes I,$$

где ϕ — голоморфная 1-форма, заданная на M_n, I — единичный аффинор на M_n и $\operatorname{rank}\phi_s(q) = r \neq 0$ в некоторой карте (U, x^i), то

$$\dim_{\mathbb{R}}(g(M_n))^{\mathbb{R}} \leqslant mn^2 + (m-r)n,$$

где $m = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{A}$, $n \geqslant 2$.

Из предложения 1.7.1 вытекают следующие два утверждения.

Предложение 1.7.2. *Если тензорное поле кручения T пространства (M_n, ∇), $n \geqslant 2$, над алгеброй $\mathbb{A}$ удовлетворяет условию $T = I \otimes \phi - \phi \otimes I$ и $\phi_s(p)$ — регулярный элемент алгебры $\mathbb{A}$, то*

$$\dim_{\mathbb{R}}(g(M_n))^{\mathbb{R}} \leqslant mn^2,$$

причем эта оценка — точная.

Теорема 1.7.6. *Наибольшая вещественная размерность алгебры Ли голоморфных аффинных векторных полей пространства (M_n, ∇), $n \geqslant 2$, над $\mathbb{A}$ с тензорным полем кручения T, удовлетворяющим условию $T = I \otimes \phi - \phi \otimes I \neq 0$, равна в точности $mn^2 + (m - r_0)n$, где $m = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{A}$, r_0 — сингулярный ранг алгебры.*

Учитывая, что $r_0 \geqslant 1$, из теоремы 1.7.6 получаем следующее утверждение.

Теорема 1.7.7. *Наибольшая вещественная размерность алгебр Ли голоморфных аффинных векторных полей пространств (M_n, ∇), $n \geqslant 2$, над всевозможными алгебрами $\mathbb{A}$ (коммутативными, ассоциативными, обладающими единицей) ранга m равна в точности $m(n^2 + n) - n$, если $T = I \otimes \phi - \phi \otimes I \neq 0$.*

М. В. Глебова исследовала группы аффинных преобразований голоморфной линейной связности над алгеброй двойных чисел (см. [56]). Доказано, что для вещественной реализации голоморфной линейной связности $\nabla_1 \times \nabla_2$, при условиях $W = 0$, $R_1 \neq 0$, $R_2 \neq 0$ алгебра Ли инфинитезимальных аффинных преобразований пространства $M_{2n}^{\mathbb{R}}$ с указанной связностью изоморфна прямой сумме алгебр Ли инфинитезимальных аффинных преобразований пространств со связностями ∇_1 и ∇_2. Получены оценки максимальных размерностей алгебр Ли инфинитезимальнх аффинных преобразований для указанных связностей при различных ограничениях, накладываемых на них.

Исследованы размерности интранзитивных групп аффинных преобразований пространств аффинной связности над алгеброй действительных чисел (см. [91]).

Теорема 1.7.8 (см. [93]). *Максимальная размерность полных интранзитивных групп движений непроективно-евклидовых пространств аффинной связности A_n без кручения равна в точности $n^2 - 2n + 3$, $n \geqslant 3$.*

И. П. Егоров доказал, что не существует пространства A_n, полная группа движений которого имеет размерность r, удовлетворяющую неравенствам $n^2 - 2n + 5 < r < n^2 - n - 2$ (см. [25]). Из этого результата и теоремы 1.7.8 вытекает следующий результат.

Теорема 1.7.9. *Не существует пространства A_n, $n \geqslant 3$, $W \neq 0$, допускающего полную интранзитивную группу движений, размерность r которой удовлетворяет неравенствам $n^2 - 2n + 3 < r < n^2 - n - 2$.*

При исследовании интранзитивных группы движений пространств аффинной связности с кручением над алгеброй действительных чисел доказана следующая теорема.

Теорема 1.7.10 (см. [93]). *Если тензор кручения T пространства $A_n = (M_n, \nabla)$ удовлетворяет условию $T \neq I \otimes \phi - \phi \otimes I$, то размерность полной интранзитивной группы движений этого пространства не превосходит $n^2 - 2n + 3$, причем оценка точная.*

2. Расслоения Вейля, снабженные линейными связностями

2.1. Алгебры Вейля. Алгебры Вейля лежат в основе определения расслоений Вейля, а также используются при построении лифтов геометрических объектов с базы в расслоение Вейля. Мы приведем здесь определение алгебры Вейля над полем действительных чисел.

Определение 2.1.1 (см. [167])**.** Линейная алгебра $\mathbb{A}$ конечного ранга над полем $\mathbb{R}$ называется *алгеброй Вейля*, если выполнены следующие условия:

(1) алгебра $\mathbb{A}$ коммутативна, ассоциативна, обладает единицей;
(2) существует такой идеал $\mathbb{I}$, что $\mathbb{I}^p \neq \{0\}$ и $\mathbb{I}^{p+1} = \{0\}$;
(3) факторалгебра $\mathbb{A}/_{\mathbb{I}}$ изоморфна $\mathbb{R}$.

Число p называется *высотой* алгебры $\mathbb{A}$, а число m, равное размерности факторалгебры $\mathbb{I}/\mathbb{I}^2$, называется *шириной* алгебры $\mathbb{A}$. В идеале $\mathbb{I}$ можно выбрать m элементов $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m$, порождающие этот идеал. Одномерная подалгебра, порожденная единицей δ алгебры $\mathbb{A}$, изоморфна $\mathbb{R}$. Отождествив δ с единицей поля действительных чисел $\mathbb{R}$, алгебру $\mathbb{A}$ можно представить в виде полупрямой суммы $\mathbb{R}$ и $\mathbb{I}$: $\mathbb{A} = \mathbb{R} + \mathbb{I}$. Каждый элемент a алгебры $\mathbb{A}$ единственным образом представи́м в виде $a_0 + a_1 = a$; число a_0 назовем *вещественной частью* и обозначим $\operatorname{Re} a$. Если $a_0 \neq 0$, то $a^k \neq 0$ при любом натуральном k. Отсюда следует, что все нильпотентные элементы алгебры $\mathbb{A}$ принадлежат идеалу $\mathbb{I}$. Идеал $\mathbb{I}$ называется *радикалом* и обозначается символом $\operatorname{Rd}\mathbb{A}$. Базис в алгебре $\mathbb{A}$ можно построить из элементов $\varepsilon^0 = 1$ и $\varepsilon_1^{\alpha_1} \dots \varepsilon_m^{\alpha_m}$, где α_i — неотрицательные целые числа и $\alpha_1 + \dots + \alpha_m \neq 0$. Для обозначения базисных элементов удобно использовать мультииндексы $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ с неотрицательными целыми составляющими α_i и $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_m \leqslant p$. Тогда $\varepsilon_1^{\alpha_1} \dots \varepsilon_m^{\alpha_m} = \varepsilon^\alpha$; мультииндекс $0 = (0, \dots, 0)$ соответствует 1. Количество всевозможных мультииндексов α, удовлетворяющих условию $0 \leqslant |\alpha| \leqslant p$, равно числу сочетаний $\binom{p+m}{m}$ из $p+m$ элементов по m элементов. Если $|\alpha| > p$, то $\varepsilon^\alpha = 0$. Мультииндексы складываются как арифметические векторы. Ранг алгебры $\mathbb{A}$ не превосходит $\binom{p+m}{m}$. Если $\dim\mathbb{A} < \binom{p+m}{m}$, то не все мультииндексы будут соответствовать базисным элементам. Обозначим через Λ множество мультииндексов, соответствующих базисным элементам алгебры $\mathbb{A}$, а через Λ^* — множество всех остальных мультииндексов α, для которых $|\alpha| \leqslant p$. Для каждого $\mu^* \in \Lambda^*$, имеем

$$\varepsilon^{\mu^*} = a_\lambda^{\mu^*} \varepsilon^\lambda, \tag{2.1.1}$$

где $a_\lambda^{\mu^*} \in \mathbb{R}$, а по мультииндексу $\lambda \in \Lambda \setminus \{0\}$ ведется суммирование.

Соотношения (2.1.1) называются *определяющими соотношениями* алгебры Вейля $\mathbb{A}$.

Если $\dim\mathbb{A} = \binom{p+m}{m}$, то $\Lambda^* = \emptyset$. В этом случае алгебра $\mathbb{A}$ не имеет определяющих соотношений и называется *свободной алгеброй Вейля.*

В алгебре Вейля $\mathbb{A}$ можно выделить цепочку идеалов

$$\mathbb{A} \supset \mathbb{I} \supset \mathbb{I}^2 \supset \dots \supset \mathbb{I}^p \supset \{0\}. \tag{2.1.2}$$

Будем считать, что описанный выше базис $(\varepsilon^0, \varepsilon^\alpha)$, $\alpha \neq 0$, удовлетворяет следующему условию: набор (ε^τ) является базисом идеала $\mathbb{I}^r$ при $|\tau| \geqslant r$ (см. [113]). Тогда каждый набор элементов вида ε^α, где $|\alpha| < r$, не будет содержаться в $\mathbb{I}^r$. Такой базис будем называть *подчиненным* цепочке идеалов (2.1.2).

2.2. Расслоения Вейля. В основе определения расслоения Вейля лежат алгебры Вейля и гладкие многообразия. Обозначим через $\mathbb{A}$ произвольную алгебру Вейля конечного ранга над полем действительных чисел $\mathbb{R}$. Будем считать, что единица δ алгебры $\mathbb{A}$ отождествлена с единицей 1 поля $\mathbb{R}$. Тогда $\mathbb{A}$ как векторное пространство может быть представлено в виде прямой суммы $\mathbb{R}$ и идеала $\mathbb{I}$. Выберем какой-либо базис ε^α, $\alpha = 0, 1, \dots, \dim\mathbb{A} - 1$, алгебры $\mathbb{A}$, причем $\varepsilon^0 = 1$. Наряду с $\mathbb{A}$ будем использовать дуальное пространство $\mathbb{A}^*$ линейных форм, заданных на $\mathbb{A}$, со значениями в $\mathbb{R}$. Обозначим через ε_α элементы дуального базиса к базису (ε^α); тогда $\varepsilon_\alpha(\varepsilon^\beta) = \delta_\alpha^\beta$. Будем использовать также мультииндексы $s = (s_1, \dots, s_n)$, где s_i, $i = 1, \dots, n$, —

целые неотрицательные числа. Введем обозначения

$$|s| = s_1 + s_2 + \dots + s_n, \quad s! = s_1!\, s_2! \, \dots \, s_n! \quad \binom{s}{t} = \frac{s!}{t!(s-t)!}.$$

Пусть M — n-мерное вещественное связное гладкое многообразие класса C^∞. Обозначим через $C^\infty(M)$ алгебру гладких функций класса C^∞, заданных на M и принимающих значения в $\mathbb{R}$.

Определение 2.2.1. Точкой, $\mathbb{A}$-*близкой* к точке $q \in M$, называется гомоморфизм $j_q : C^\infty(M) \to \mathbb{A}$, удовлетворяющий условию $j_q(f) \equiv f(q) \,(\mathrm{mod}\, \mathbb{I})$.

Множество точек, $\mathbb{A}$-близких к точке $q \in M$, обозначим через $M_q^{\mathbb{A}}$. Объединение $\bigcup\limits_{q\in M} M_q^{\mathbb{A}}$ обозначим через $M^{\mathbb{A}}$. Отображение

$$\pi : M^{\mathbb{A}} \to M, \quad \pi(j_q) = q,$$

называется *канонической проекцией*, а тройка $(M^{\mathbb{A}}, \pi, M)$ — *расслоением Вейля*.

На тотальном пространстве $M^{\mathbb{A}}$ возникают структуры гладкого многообразия над алгеброй $\mathbb{A}$ и над алгеброй $\mathbb{R}$.

Определение 2.2.2. Функция

$$f_{(0)} : M^{\mathbb{A}} \to \mathbb{R}, \quad f_{(0)} = f \circ \pi,$$

называется *вертикальным лифтом* функции f. Функция

$$f^{\mathbb{A}} : M^{\mathbb{A}} \to \mathbb{A}, \quad f^{\mathbb{A}}(j_q) = j_q(f) \quad \forall j_q \in M^{\mathbb{A}},$$

называется *естественным продолжением* f с базы M в пространство $M^{\mathbb{A}}$.

Из определения 2.2.2 следуют соотношения

$$(f+g)^{\mathbb{A}} = f^{\mathbb{A}} + g^{\mathbb{A}}, \quad (cf)^{\mathbb{A}} = cf^{\mathbb{A}}, \quad (fg)^{\mathbb{A}} = f^{\mathbb{A}} g^{\mathbb{A}}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Пусть на M выбран атлас гладкой структуры и (U, x^i) — произвольная карта этого атласа. Для координатных функций x^i построим их естественные продолжения $(x^i)^{\mathbb{A}} = X^i$. Обозначим через $\pi^{-1}(U)$ полный прообраз области U выбранной карты. Из определения естественного продолжения функций получаем

$$(x^i)^{\mathbb{A}}(j_q) = j_q(x^i) \quad \forall j_q \in \pi^{-1}(U).$$

Так как $j_q(x^i) \equiv x^i(q) \,(\mathrm{mod}\, \mathbb{I})$, то

$$(x^i)^{\mathbb{A}}(j_q) = x^i_{(0)}(j_q) + x^i_\alpha(j_q)\varepsilon^\alpha, \quad \alpha \neq 0. \tag{2.2.1}$$

Из последних соотношений следует, что

$$(x^i)^{\mathbb{A}} = x^i_{(0)} + x^i_\alpha \varepsilon^\alpha.$$

Здесь $x^i_\alpha : M^{\mathbb{A}} \to \mathbb{R}$ — функции, определенные соотношением (2.2.1).

В. В. Шурыгиным доказано, что для каждой функции $f \in C^\infty(M_n)$ ее естественное продолжение $f^{\mathbb{A}}$ является голоморфной над $\mathbb{A}$ и всякую голоморфную функцию $\widetilde{f}$ на $M_n^{\mathbb{A}}$ можно представить в виде $\widetilde{f} = \varepsilon^\alpha f_\alpha^{\mathbb{A}}$ для некоторых функций $f_\alpha \in C^\infty(M_n)$, где ε^α — элементы некоторого базиса алгебры $\mathbb{A}$.

Имеет место равенство

$$df^{\mathbb{A}} = (\partial_j f)^{\mathbb{A}} dX^j.$$

Отсюда получаем следующую формулу для вычисления частной производной по переменной X^j:

$$\frac{\partial f^{\mathbb{A}}}{\partial X^j} = (\partial_j f)^{\mathbb{A}}.$$

2.3. Голоморфные функции, голоморфные тензорные поля на расслоениях Вейля.

Определение 2.3.1. Векторное поле $\widetilde{X}$ на расслоении $M_n^{\mathbb{A}}$ называется *голоморфным*, если функция $\widetilde{X}\widetilde{f}$ голоморфна для каждой голоморфной функции $\widetilde{f}$.

Предложение 2.3.1. *Для любого векторного поля $X \in \mathcal{T}_0^1(M_n)$ существует и притом единственное векторное поле $\widetilde{X}$ на $M_n^{\mathbb{A}}$, обладающее свойством*

$$\widetilde{X} f^{\mathbb{A}} = (Xf)^{\mathbb{A}} \quad \forall f \in C^\infty(M_n).$$

Это предложение позволяет ввести понятие естественного лифта векторного поля $X \in \mathcal{T}_0^1(M_n)$ в $\mathcal{T}_0^1(M_n^{\mathbb{A}})$.

Определение 2.3.2. Для каждого векторного поля $X \in \mathcal{T}_0^1(M_n)$ единственное векторное поле $\widetilde{X} \in \mathcal{T}_0^1(M_n^{\mathbb{A}})$, удовлетворяющее тождеству $\widetilde{X} f^{\mathbb{A}} = (Xf)^{\mathbb{A}}$, называется *естественным лифтом* векторного поля X и обозначается через $X^{\mathbb{A}}$. Итак,

$$X^{\mathbb{A}} f^{\mathbb{A}} = (Xf)^{\mathbb{A}}.$$

Из определения векторного поля $X^{\mathbb{A}}$ следует, что

$$\frac{\partial}{\partial (x^i)^{\mathbb{A}}} = \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)^{\mathbb{A}}.$$

Предложение 2.3.2. *Для любых векторных полей $X, Y \in \mathcal{T}_0^1(M_n)$ и любого скаляра $\lambda \in \mathbb{R}$ выполняются равенства*

(1) $X^{\mathbb{A}} + Y^{\mathbb{A}} = (X+Y)^{\mathbb{A}}$;
(2) $\lambda X^{\mathbb{A}} = (\lambda X)^{\mathbb{A}}$;
(3) $[X^{\mathbb{A}}, Y^{\mathbb{A}}] = [X, Y]^{\mathbb{A}}$;
(4) $f^{\mathbb{A}} X^{\mathbb{A}} = (fX)^{\mathbb{A}}$.

Предложение 2.3.3. *Векторное поле $\widetilde{X}$ на $M_n^{\mathbb{A}}$ является голоморфным тогда и только тогда, когда существуют такие векторные поля $X_1, \dots, X_k$ на M_n и элементы $a^1, \dots, a^k$ алгебры $\mathbb{A}$, что $\widetilde{X} = a^\alpha X_\alpha^{\mathbb{A}}$, $\alpha = 1, 2, \dots, k$.*

Поскольку алгебра Вейля $\mathbb{A}$ обладает базисом, например (ε^α), то каждое голоморфное векторное поле $\widetilde{X}$ единственным образом можно представить в виде $\widetilde{X} = \varepsilon^\alpha X_\alpha^{\mathbb{A}}$.

Пусть K — тензорное поле типа (r, s), где $r = 0$ или 1 на M_n. Построим его естественное продолжение в $M_n^{\mathbb{A}}$.

Предложение 2.3.4. *Для каждого тензорного поля K типа (r, s) ($r = 0$ или 1) на M_n существует единственное тензорное поле $\widetilde{K}$ на $M_n^{\mathbb{A}}$, удовлетворяющее условию*

$$\widetilde{K}\big(X_1^{\mathbb{A}}, \dots, X_s^{\mathbb{A}}\big) = \big(K(X_1, \dots, X_s)\big)^{\mathbb{A}}.$$

Это предложение позволяет ввести следующее определение.

Определение 2.3.3. Для тензорного поля K типа (r, s) ($r = 0$ или 1) тензорное поле $K^{\mathbb{A}}$, удовлетворяющее тождеству

$$K^{\mathbb{A}}\big(X_1^{\mathbb{A}}, \dots, X_s^{\mathbb{A}}\big) = \big(K(X_1, \dots, X_s)\big)^{\mathbb{A}},$$

называется *естественным продолжением* в $M_n^{\mathbb{A}}$.

Из этого определения следует, что тензорное поле $K^{\mathbb{A}}$ голоморфно.

Предложение 2.3.5. *Каждое голоморфное тензорное поле $\widetilde{K}$ типа (r, s) ($r = 0$ или 1) можно представить в виде*

$$\widetilde{K} = a^1 K_1^{\mathbb{A}} + \dots + a^l K_l^{\mathbb{A}},$$

где $a^1, \dots, a^l$ — элементы алгебры $\mathbb{A}$, $K_1, \dots, K_l$ — тензорные поля типа (r, s).

Предложение 2.3.6. *Пусть $X \in \mathcal{T}_0^1(M_n)$, K — тензорное поле типа (r, s) ($r = 0$ или 1). Выполняется тождество*

$$L_{X^{\mathbb{A}}} K^{\mathbb{A}} = (L_X K)^{\mathbb{A}}.$$

2.4. Голоморфные линейные связности на расслоениях Вейля. Пусть $M_n^{\mathbb{A}}$ — расслоение Вейля над алгеброй $\mathbb{A}$, (ε^α) — некоторый базис алгебры Вейля $\mathbb{A}$, причем $\varepsilon^0 = 1$, $\alpha = 0, 1, \dots, \dim \mathbb{I}$.

Введем понятие голоморфной линейной связности и сформулируем ее свойства (см. [86]).

Определение 2.4.1. Линейная связность $\widetilde{\nabla}$ на $M_n^{\mathbb{A}}$ называется *голоморфной*, если для любых голоморфных векторных полей $\widetilde{X}$ и $\widetilde{Y}$ векторное поле $\widetilde{\nabla}_{\widetilde{X}}\widetilde{Y}$ также голоморфно.

Предложение 2.4.1. *Линейная связность $\widetilde{\nabla}$ на $M_n^{\mathbb{A}}$ голоморфна тогда и только тогда, когда для любых векторных полей X и Y, заданных на M_n, векторное поле $\widetilde{\nabla}_{X^{\mathbb{A}}}Y^{\mathbb{A}}$ голоморфно.*

Это предложение позволяет получить строение голоморфной линейной связности $\widetilde{\nabla}$.

Предложение 2.4.2. *Линейная связность $\widetilde{\nabla}$, заданная на расслоении Вейля $M_n^{\mathbb{A}}$, голоморфна тогда и только тогда, когда на базе M_n существуют такие линейная связность $\nabla = \Gamma_0$ и тензорные поля Γ_λ, $\lambda \neq 0$, типа* (2.1.2), *что выполняется тождество*

$$\widetilde{\nabla}_{X^{\mathbb{A}}}Y^{\mathbb{A}} = \varepsilon^\alpha(\Gamma_\alpha(X, Y))^{\mathbb{A}}.$$

Среди голоморфных линейных связностей выделим линейную связность, которая определяется тождеством

$$\overline{\nabla}_{X^{\mathbb{A}}}Y^{\mathbb{A}} = (\nabla_X Y)^{\mathbb{A}} \tag{2.4.1}$$

для $X, Y \in \mathfrak{T}_0^1(M_n)$. Эта связность определяется лишь связностью ∇, заданной на базе M_n расслоения Вейля $M_n^{\mathbb{A}}$, и называется *естественным продолжением* линейной связности ∇ с базы M_n в расслоение $M_n^{\mathbb{A}}$. Связность, определенная тождеством (2.4.1), обозначается $\nabla^{\mathbb{A}}$; она была впервые введена А. Моримото (см. [168]).

На основании определения 2.3.3, предложения 2.4.2 и тождества (2.4.1), заключаем, что имеет место следующее утверждение.

Теорема 2.4.1 (см. [86]). *Линейная связность $\widetilde{\nabla}$ на $M_n^{\mathbb{A}}$ голоморфна тогда и только тогда, когда на базе M_n расслоения существуют такие линейная связность ∇ и тензорные поля Γ_λ $(\lambda \neq 0)$, что*

$$\widetilde{\nabla} = \nabla^{\mathbb{A}} + \varepsilon^\lambda \Gamma_\lambda^{\mathbb{A}}, \quad \lambda \neq 0.$$

Предложение 2.4.3. *Тензорные поля кручения $\widetilde{T}$ и кривизны $\widetilde{R}$ голоморфной линейной связности $\widetilde{\nabla} = \varepsilon^\alpha\Gamma_\alpha$ на расслоении Вейля $M_n^{\mathbb{A}}$ можно представить в виде*

$$\widetilde{T} = \varepsilon^\alpha T_\alpha^{\mathbb{A}}, \quad \widetilde{R} = \varepsilon^\alpha R_\alpha^{\mathbb{A}},$$

где T_0 — тензорное поле кручения, R_0 — тензорное поле кривизны линейной связности $\Gamma_0 = \nabla$, а тензорные поля T_λ, R_λ, $\lambda \neq 0$, определяются соответственно условиями

$$T_\lambda(X, Y) = \Gamma_\lambda(X, Y) - \Gamma_\lambda(Y, X) \tag{2.4.2}$$

и

$$R_\lambda(X, Y, Z) = \nabla_X\Gamma_\lambda(Y, Z) - \nabla_Y\Gamma_\lambda(X, Z) + \Gamma_\lambda(T(X, Y), Z) + \\ + \gamma_\lambda^{\sigma\tau}(\Gamma_\sigma(X, \Gamma_\tau(Y, Z)) - \Gamma_\sigma(Y, \Gamma_\tau(X, Z))), \tag{2.4.3}$$

где по σ, τ $(\neq 0)$ ведется суммирование, $\gamma_\lambda^{\sigma\tau}$ — структурные постоянные алгебры Вейля $\mathbb{A}$.

Из предложения 2.4.3 следует, что если связность $\widetilde{\nabla}$ является естественным продолжением связности ∇ с M_n в $M_n^{\mathbb{A}}$, то $\widetilde{T} = T^{\mathbb{A}}$ и $\widetilde{R} = R^{\mathbb{A}}$.

Предложение 2.4.4. *Пространство $\left(M_n^{\mathbb{A}}, \widetilde{\nabla}\right)$ является локально симметрическим тогда и только тогда, когда*

$$T_\alpha = 0, \ \alpha = 0, 1, \dots, \dim \mathbb{I}, \quad \nabla R = 0, \quad \nabla R_\lambda + \gamma_\lambda^{\alpha\mu} R_{\alpha\mu} = 0,$$

где $\lambda, \mu \neq 0$, *по* α *и* μ *ведется суммирование,* $R_{\alpha\mu}$ *— тензорные поля, удовлетворяющие тождествам*

$$R_{\alpha\mu}(X_1, X_2, X_3, Z) = \Gamma_\mu(Z, R_\alpha(X_1, X_2, X_3)) - \\ - R_\alpha(\Gamma_\mu(Z, X_1), X_2, X_3) - R_\alpha(X_1, \Gamma_\mu(Z, X_2), X_3) - R_\alpha(X_1, X_2, \Gamma_\mu(Z, X_3)).$$

2.5. Лифты тензорных полей и линейных связностей с базы M_n в расслоение Вейля. Рассмотрим расслоения Вейля $M_n^{\mathbb{A}}$, снабженные гладкой класса C^∞ структурой над полем действительных чисел. Для построения лифтов тензорных полей и линейных связностей будем использовать $\mathbb{A}$-гладкую структуру $M_n^{\mathbb{A}}$ и построения, описанные в разделе 1.

Определение 2.5.1. *Естественным* (δ)*-лифтом* тензорного поля типа $(1, s)$ или линейной связности с M_n в расслоение $M_n^{\mathbb{A}}$ называется (δ)-реализация их естественных $\mathbb{A}$-продолжений.

Если в алгебре Вейля главная единица δ включена в базис, $\varepsilon^0 = 1 = \delta$, то (δ)-лифт будет обозначаться символом (0) вместо (ε^0); (0)-лифт называется также полным лифтом тензорного поля типа $(1, s)$ или линейной связности. Будем считать, что $\varepsilon^0 = 1 = \delta$.

Сначала остановимся на лифтах функций с M_n в $M_n^{\mathbb{A}}$. Пусть $a^* \in \mathbb{A}^*$; через $C^\infty(M_n)$ и $C^\infty(M_n^{\mathbb{A}})$ обозначим алгебры вещественных функций класса C^∞ на M_n и на $M_n^{\mathbb{A}}$ соответственно.

Определение 2.5.2. (a^*)-*Лифтом* функций называется отображение

$$(a^*)\colon C^\infty(M_n) \to C^\infty(M_n^{\mathbb{A}}), \quad f_{(a^*)} = a^* \circ f^{\mathbb{A}},$$

где $\circ$ означает композицию указанных отображений.

Предложение 2.5.1. (a^*)-*Лифты функций удовлетворяют следующим тождествам*:

(1) $(tf + sg)_{(a^*)} = tf_{(a^*)} + sg_{(a^*)}$;
(2) $f_{(ta^*+sb^*)} = tf_{(a^*)} + sf_{(b^*)}$;
(3) $f_{((t+s)a^*)} = tf_{(a^*)} + sf_{(a^*)}$;
(4) $(fg)^{(b)}_{(a^*)} = f^{(\alpha)}_{(a^*)} g^{(b)}_{(\alpha)}$,

где $t, s \in \mathbb{R}$, $f^{(\alpha)}_{(a^*)} = f_{(a^* \cdot \varepsilon^\alpha)}$, $g_{(\alpha)} = g_{(\varepsilon^\alpha)}$, ε^α *— базисные элементы алгебры* $\mathbb{A}$, ε_α *— элементы базиса, дуального к базису* (ε^α).

Предложение 2.5.2. *Если* $a^1, \ldots, a^l$ *— линейно независимые элементы алгебры* $\mathbb{A}$ *и для всех* $b^* \in \mathbb{A}^*$ *выполняется соотношение* $(f_\alpha)_{(b^* \cdot a^\alpha)} = 0$, *то* $f_\alpha = 0$.

Из определения 1.5.1 получим, что для векторного поля X, заданного на базе M_n, его (δ)-реализация определяется условием $X^{(0)} = (X^{\mathbb{A}})^{(\delta)}$. Для любого элемента $a \in \mathbb{A}$ положим $X^{(a)} = (aX^{\mathbb{A}})^{(\delta)}$. Векторное поле $X^{(a)}$ называется (a)-*лифтом* векторного поля X с M_n в $M_n^{\mathbb{A}}$.

Предложение 2.5.3. *Векторное поле* $X^{(a)}$ *на* $M_n^{\mathbb{A}}$ *— единственное векторное поле, удовлетворяющее тождеству*

$$X^{(a)} f_{(b^*)} = (Xf)_{(b^* \cdot a)}.$$

Пусть (U, x^i) — карта на M_n, $(\pi^{-1}(U), x^i_\alpha)$ — карта на $M_n^{\mathbb{A}}$. Тогда $x^i_\alpha = \varepsilon_\alpha \circ (x^i)^{\mathbb{A}} = (x^i)^{\mathbb{A}}_{(\varepsilon_\alpha)}$, что следует из определения расслоения Вейля. Для векторных полей $\partial_i = \partial/\partial x^i$ натурального репера на U имеем

$$(\partial_j)^{(\alpha)} x^i_\beta = \partial_j^{(\varepsilon^\alpha)}((x^i)^{\mathbb{A}})_{(\varepsilon_\beta)} = (\partial_j x^i)_{(\varepsilon_\beta \cdot \varepsilon^\alpha)} = (\delta^i_j)_{(\gamma^{\alpha\sigma}_\beta \varepsilon_\sigma)} = \gamma^{\alpha\sigma}_\beta (\delta^i_j)_{(\varepsilon_\sigma)} = \gamma^{\alpha 0}_\beta \delta^i_j = \delta^\alpha_\beta \delta^i_j.$$

С другой стороны,

$$\frac{\partial}{\partial x^j_\alpha}\left(x^i_\beta\right) = \delta^i_j \delta^\alpha_\beta.$$

Из этих соотношений следует, что

$$(\partial_j)^{(\alpha)} = \frac{\partial}{\partial x^j_\alpha};$$

значит, векторные поля $(\partial_j)^{(\alpha)}$ определяют поле натурального репера на $\pi^{-1}(U)$.

Пусть $\widetilde{X}$ — произвольное голоморфное векторное поле на $M_n^{\mathbb{A}}$, $a \in \mathbb{A}$. Существуют такие векторные поля $X_1, \dots, X_l \in \mathcal{T}_0^1(M_n)$ и элементы $b_1, b_2, \dots, b_l \in \mathbb{A}$, что

$$\widetilde{X} = \sum_i b_i X_i^{\mathbb{A}}.$$

Поэтому (a)-реализация векторного поля $\widetilde{X}$ будет иметь вид

$$\widetilde{X}^{(a)} = \left(a \sum_i b_i X_i^{\mathbb{A}}\right)^{(\delta)} = \sum_i X_i^{(ab_i)}.$$

Таким образом, (a)-реализация каждого голоморфного векторного поля $\widetilde{X}$ на расслоении $M_n^{\mathbb{A}}$ является конечной суммой лифтов векторных полей, заданных на базе расслоения.

Предложение 2.5.4. *Для любых $t, s \in \mathbb{R}$, $X, Y \in \mathcal{T}_0^1(M_n)$, $a, b \in \mathbb{A}$ и $f \in C^\infty(M_n)$ имеют место равенства*
(1) $X^{(ta+sb)} = tX^{(a)} + sX^{(b)}$;
(2) $(tX + sY)^{(a)} = tX^{(a)} + sY^{(a)}$;
(3) $(fX)^{(a)} = f_{(\alpha)} X^{(a\varepsilon^\alpha)}$;
(4) $[X^{(a)}, Y^{(b)}] = ([X, Y])^{(ab)}$.

Для каждого элемента $a \in \mathbb{A}$ положим $K^{(a)} = (aK^{\mathbb{A}})^{(\delta)}$. Этот лифт называется (a)-лифтом тензорного поля K.

Предложение 2.5.5. *(a)-Лифт $K^{(a)}$ тензорного поля K типа $(1, s)$ заданного на M_n, является единственным, удовлетворяющим тождеству*

$$K^{(a)}\big(X_1^{(b_1)}, \dots, X_s^{(b_s)}\big) = \big(K(X_1, \dots, X_s)\big)^{(ab_1 \dots b_s)}.$$

Если $K = I$ — единичный аффинор на M_n, то его (a)-лифт определяется условием

$$I^{(a)}(X^{(b)}) = X^{(ab)}.$$

Полный лифт $I^{(0)} = I^{(\varepsilon^0)}$ определяется тождеством $I^{(0)}(X^{(b)}) = X^{(b)}$ и потому является единичным аффинором на M_n^A. (a)-Лифты тензорных полей K типа $(1, s)$ обладают свойствами, аналогичными свойствам (a)-лифтов векторных полей.

Предложение 2.5.6. *Пусть K, Q — тензорные поля типа $(1, s)$ на M_n, $t, s \in \mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{A}$. Имеют место следующие тождества*:
(1) $K^{(ta+sb)} = tK^{(a)} + sK^{(b)}$;
(2) $(tK + sQ)^{(a)} = tK^{(a)} + sQ^{(a)}$;
(3) $(fK)^{(a)} = f_{(\alpha)} K^{(a\varepsilon^\alpha)}$;
(4) $L_{X^{(b)}} K^{(b)} = (\mathcal{L}_X K)^{(ab)}$.

Рассмотрим теперь лифты s-форм с M_n в $M_n^{\mathbb{A}}$. Пусть ω — s-форма на M_n, $a^* \in \mathbb{A}^*$.

Предложение 2.5.7. *Пусть $a^* \in \mathbb{A}^*$, $\omega \in \mathcal{T}_s^0(M_n)$. Существует единственная s-форма $\widetilde{\omega}$ на $M_n^{\mathbb{A}}$, удовлетворяющая тождеству*

$$\widetilde{\omega}\left(X_1^{(a_1)}, \dots, X_s^{(a_s)}\right) = \Big(\omega(X_1, \dots, X_s)\Big)_{(a^*)}^{(a_1 a_2 \dots a_s)}.$$

Определение 2.5.3. Отображение

$$(a^*) : \mathcal{T}_s^0(M_n) \to \mathcal{T}_s^0(M_n^{\mathbb{A}}), \quad \widetilde{\omega}_{(a^*)}\left(X_1^{(a_1)}, \dots, X_s^{(a_s)}\right) = \Big(\omega(X_1, \dots, X_s)\Big)_{(a^*)}^{(a_1 \dots a_s)},$$

называется (a^*)-*лифтом* s-формы ω.

Свойства построенных лифтов s-форм описаны в следующих предложениях.

Предложение 2.5.8. *Для любых $t, s \in \mathbb{R}$, $a^*, b^* \in \mathbb{A}^*$, s-форм ω и θ, заданных на M_n, $a \in \mathbb{A}$ и функций $f \in C^\infty(M_n)$ выполняются равенства*

(1) $\omega_{(ta^*+sb^*)} = t\omega_{(a^*)} + s\omega_{(b^*)}$;
(2) $(t\omega + s\theta)_{(a^*)} = t\omega_{(a^*)} + s\theta_{(a^*)}$;
(3) $(f\omega)_{(a^*)} = f_{(\sigma)}\omega_{(a^*\cdot\varepsilon^\sigma)}$;
(4) $(f\omega)_{(a^*)} = f^{(\sigma)}_{(a^*)}\omega_{(\sigma)}$.

Предложение 2.5.9. *Если $\omega_1 \in \mathcal{T}^0_r(M_n)$, $\omega_2 \in \mathcal{T}^0_s(M_n)$ и $a^* = a^\alpha\varepsilon_\alpha \in \mathbb{A}^*$, то*

$$(\omega_1 \otimes \omega_2)_{(a^*)} = a^\alpha\gamma^{\sigma_1\sigma_2}_\alpha(\omega_1)_{(\sigma_1)} \otimes (\omega_2)_{(\sigma_2)},$$

где $\gamma^{\sigma_1\sigma_2}_\alpha = \varepsilon_\alpha(\varepsilon^{\sigma_1}\varepsilon^{\sigma_2})$ — структурные постоянные алгебры $\mathbb{A}$.

Предложение 2.5.10. *Для любого векторного поля $X \in \mathcal{T}^1_0(M_n)$ и любой s-формы ω имеет место тождество*

$$L_{X^{(a)}}\omega_{(b^*)} = (L_X\omega)_{(a^*\cdot b)},$$

где $a \in \mathbb{A}$, $b^* \in \mathbb{A}^*$.

Если ω — 1-форма на M_n, то (a^*)-лифт $\omega_{(a^*)}$ определяется условием

$$\omega_{(a^*)}\left(X^{(b)}\right) = (\omega(X))_{(a^*\cdot b)}.$$

В частности, если $a^* = \varepsilon_\alpha$ и $\omega = dx^i$ в (U, x^i), то

$$\left(dx^i\right)_{(\varepsilon_\alpha)}(\partial_j)^{(\varepsilon^\beta)} = \left(dx^i(\partial_j)\right)_{(\varepsilon_\alpha\cdot\varepsilon^\beta)} = \left(\delta^i_j\right)_{(\gamma^{\beta\tau}_\alpha\varepsilon_\tau)} = \gamma^{\beta\tau}_\alpha(\delta^i_j)_{(\varepsilon_\tau)} = \delta^i_j\delta^\beta_\alpha.$$

С другой стороны, $\partial^{(\beta)}_j = \partial/\partial x^j_\beta$, поэтому

$$dx^i_\alpha\left(\frac{\partial}{\partial x^j_\beta}\right) = \delta^i_j\delta^\beta_\alpha.$$

Отсюда заключаем, что $\left(dx^i\right)_{(\alpha)} = dx^i_\alpha$.

2.6. Лифты тензорных полей в координатах. Пусть (U, x^i) — произвольная карта гладкого атласа многообразия M_n, $(\pi^{-1}(U), x^i_\alpha)$ — карта гладкого атласа на $M^{\mathbb{A}}_n$. Сначала остановимся на координатном представлении функций $f_{(a^*)}$, где $f \in C^\infty(M_n)$. Из определения (a^*)-лифта функции и локального представления функции $f^{\mathbb{A}}$ (см. [158]) следует, что

$$f_{(a^*)} = a^0 f_{(0)} + a^\vartheta\Bigg(\left(\partial_{j_1}f\right)_{(0)}x^j_\vartheta + \frac{1}{2!}\left(\partial_{j_1j_2}f\right)_{(0)}x^{j_1}_{\alpha_1}x^{j_2}_{\alpha_2}\gamma^{\alpha_1\alpha_2}_\vartheta + \\ + \dots + \frac{1}{p!}\left(\partial_{j_1j_2\dots j_p}f\right)_{(0)}x^{j_1}_{\alpha_1}\dots x^{j_p}_{\alpha_p}\gamma^{\alpha_1\dots\alpha_p}_\vartheta\Bigg),$$

где $f_{(0)} = f \circ \pi$ — вертикальный лифт функции f,

$$\gamma^{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_s}_\vartheta = \varepsilon_\vartheta(\varepsilon^{\alpha_1}\varepsilon^{\alpha_2}\dots\varepsilon^{\alpha_s}) = \gamma^{\alpha_1\alpha_2}_{\tau_1}\gamma^{\tau_1\alpha_3}_{\tau_2}\dots\gamma^{\tau_{s-2}\alpha_s}_\vartheta,$$

$\gamma^{\alpha_1\alpha_2}_{\tau_1}$ — структурные постоянные алгебры Вейля $\mathbb{A}$.

Если ковектор a^* совпадает с базисным ковектором ε_τ, дуального базиса (ε_α) к базису (ε^α) алгебры $\mathbb{A}$, то получим, в силу принятых соглашений об обозначениях,

$$f_{(\varepsilon_0)} = f_{(0)}$$

и

$$f_{(\varepsilon_\vartheta)} = f_{(\vartheta)} = (\partial_{j_1}f)_{(0)}x^{j_1}_\vartheta + \frac{1}{2!}\left(\partial_{j_1j_2}f\right)_{(0)}x^{j_1}_{\alpha_1}x^{j_2}_{\alpha_2}\gamma^{\alpha_1\alpha_2}_\vartheta + \\ + \dots + \frac{1}{p!}\left(\partial_{j_1j_2\dots j_s}f\right)_{(0)}x^{j_1}_{\alpha_1}\dots x^{j_p}_{\alpha_p}\gamma^{\alpha_1\dots\alpha_p}_\vartheta. \quad (2.6.1)$$

Используя представление функций $f_{(a^*)}$, можно получить локальное выражение лифтов $X^{(a)}$ векторного поля $X = X^i\partial_i$, заданного на M_n:

$$X^{(a)} = (X^i)_{(\alpha)}\partial_i^{(a\varepsilon^\alpha)},$$

где (α)-лифты координат X^i векторного поля X вычисляются по формулам (2.6.1).

Для тензорного поля K типа $(1, s)$, $s \geqslant 1$, положим

$$K^{(a)}\Big(\partial_{i_1}^{\alpha_1}, \partial_{i_2}^{\alpha_2}, \dots, \partial_{i_s}^{\alpha_s}\Big) = {}^aK_{i_1 i_2 \dots i_s \mu}^{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_s i}\partial_i^\mu.$$

С другой стороны, по определению

$$K^{(a)}\Big(\partial_{i_1}^{\alpha_1}, \partial_{i_2}^{\alpha_2}, \dots, \partial_{i_s}^{\alpha_s}\Big) = \Big(K_{i_1 i_2\dots i_s}^i\partial_i\Big)^{(a\varepsilon^{\alpha_1}\dots\varepsilon^{\alpha_s})} =$$
$$= a_\tau\gamma_\vartheta^{\tau\alpha_1\dots\alpha_s}\Big(K_{i_1 i_2\dots i_s}^i\Big)_{(\alpha)}\partial_i^{(\varepsilon^\alpha\varepsilon^\vartheta)} = a_\tau\gamma_\mu^{\tau\alpha_1\dots\alpha_s\alpha}\Big(K_{i_1 i_2\dots i_s}^i\Big)_{(\alpha)}\partial_i^\mu.$$

Из полученных соотношений следует, что

$${}^aK_{i_1 i_2\dots i_s\mu}^{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_s i} = a_\tau\gamma_\mu^{\tau\alpha_1\dots\alpha_s\alpha}\Big(K_{i_1 i_2\dots i_s}^i\Big)_{(\alpha)}.$$

Таким образом,

$$K^{(a)} = a_\tau\gamma_\mu^{\tau\alpha_1\dots\alpha_s\alpha}\Big(K_{i_1 i_2\dots i_s}^i\Big)_{(\alpha)}\partial_i^\mu \otimes dx_{\alpha_1}^i \otimes \dots \otimes dx_{\alpha_s}^{i_s}.$$

Аналогичное координатное представление можно получить для (a^*)-лифтов s-форм ω, заданных на M_n.

Пусть

$$\omega = \omega_{i_1 i_2\dots i_s}dx^{i_1} \otimes dx^{i_2} \otimes \dots \otimes dx^{i_s}.$$

Для $\omega_{(a^*)}$ положим

$$\omega_{(a^*)} = \tilde\omega_{i_1 i_2\dots i_s}^{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_s}dx_{\alpha_1}^{i_1} \otimes dx_2^{i_2} \otimes \dots \otimes dx_{\alpha_s}^{i_s}.$$

Тогда

$$\omega_{(a^*)}\Big(\partial_{i_1}^{\alpha_1}, \partial_{i_2}^{\alpha_2}, \dots, \partial_{i_s}^{\alpha_s}\Big) = \widetilde\omega_{i_1 i_2\dots i_s}^{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_s}.$$

По определению (a^*)-лифтов левые части этих соотношений можно представить следующим образом:

$$\omega_{(a^*)}\Big(\partial_{i_1}^{\alpha_1}, \partial_{i_2}^{\alpha_2}, \dots, \partial_{i_s}^{\alpha_s}\Big) = \Big(\omega\Big(\partial_{i_1}, \partial_{i_2}, \dots, \partial_{i_s}\Big)\Big)_{(a^*)}^{(\varepsilon^{\alpha_1}\varepsilon^{\alpha_2}\dots\varepsilon^{\alpha_s})} = \Big(\omega_{i_1 i_2\dots i_s}\Big)_{(a^*)}^{(\varepsilon^\vartheta)}\gamma_\nu^{\alpha_1\dots\alpha_s} =$$
$$= \Big(\omega_{i_1 i_2\dots i_s}\Big)_{(a^\tau\varepsilon_\tau\varepsilon^\vartheta)}\gamma_\nu^{\alpha_1\dots\alpha_s} = a^\tau\gamma_\tau^{\mu\alpha_1\dots\alpha_s}\Big(\omega_{i_1 i_2\dots i_s}\Big)_{(\mu)}.$$

Таким образом, s-форму $\omega_{(a^*)}$ можно представить в виде

$$\omega_{(a^*)} = a^\tau\gamma_\tau^{\mu\alpha_1\dots\alpha_s}\Big(\omega_{i_1 i_2\dots i_s}\Big)_{(\mu)}dx_{\alpha_1}^{i_1} \otimes dx_{\alpha_2}^{i_2} \otimes \dots \otimes dx_{\alpha_s}^{i_s}.$$

В частности, для 1-формы $\theta = \theta_i dx^i$ имеем

$$\theta_{(a^*)} = a^\tau\gamma_\tau^{\mu\alpha}(\theta_i)_{(\mu)}dx_\alpha^i.$$

Если в полученных соотношениях положить $a^* = \varepsilon_0$, то получим

$$\omega_{(\varepsilon_0)} = \Big(\omega_{i_1 i_2\dots i_s}\Big)_{(0)}dx_0^{i_1} \otimes dx_0^{i_2} \otimes \dots \otimes dx_0^{i_s}, \quad \theta_{(\varepsilon_0)} = (\theta_i)_{(0)}dx_0^i.$$

Эти лифты называются *вертикальными лифтами* и обозначаются символом $\omega_{(0)}$ и $\theta_{(0)}$ соответственно.

2.7. Вещественные реализации голоморфных линейных связностей на расслоениях Вейля. Предположим, что на расслоении Вейля $M_n^{\mathbb{A}}$, снабженном $\mathbb{A}$-гладкой структурой, задана голоморфная линейная связность $\widetilde{\nabla}$. Наряду с этой $\mathbb{A}$-гладкой структурой на $M_n^{\mathbb{A}}$ зададим естественную $\mathbb{R}$-гладкую структуру класса C^∞.

Определение 2.7.1. Вещественная реализация $\widetilde{\nabla}^{\mathbb{R}}$ линейной связности $\widetilde{\nabla}$ называется *синектической* связностью на $M_n^{\mathbb{A}}$.

В силу определения вещественной реализации голоморфной линейной связности для любых векторных полей $X, Y \in \Im_0^1(M_n)$ и любых элементов $a, b \in \mathbb{A}$ будет выполняться равенство

$$\widetilde{\nabla}^{\mathbb{R}}_{X^{(a)}} Y^{(b)} = (\widetilde{\nabla}_{X^{\mathbb{A}}} Y^{\mathbb{A}})^{(ab)}. \tag{2.7.1}$$

Отсюда следует

$$\widetilde{\nabla}^{\mathbb{R}}_{X^{(a)}} Y^{(b)} = (\Gamma_\alpha(X, Y))^{(\varepsilon^\alpha ab)}, \tag{2.7.2}$$

где $\Gamma_0 = \nabla$ — линейная связность на M_n, Γ_λ, $\lambda \neq 0$, — тензорное поле на M_n.

Обратно, если на M_n задана линейная связность $\nabla = \Gamma_0$ и тензорные поля Γ_λ, $\lambda = 1, 2, \ldots, \dim \mathbb{A} - 1$, то тождество (2.7.2) определяет на $M_n^{\mathbb{A}}$ линейную связность $\widetilde{\nabla}^{\mathbb{R}}$, которая будет служить вещественной реализацией голоморфной линейной связности $\widetilde{\nabla}$. Поэтому связность $\widetilde{\nabla}^{\mathbb{R}}$ можно называть также *синектическим лифтом* линейной связности $\nabla = \Gamma_0$ и тензорных полей Γ_λ $(\lambda \neq 0)$ с M_n в расслоение Вейля $M_n^{\mathbb{A}}$.

Для касательных расслоений синектический лифт был построен впервые А. П. Широковым (см. [141]). Поэтому синектическую связность $\widetilde{\nabla}^{\mathbb{R}}$ обозначим символом ∇^{sh}.

Учитывая предложение 1.4.1 и определения (a)-лифтов тензорных полей типа $(1, s)$, получим, что тензорные поля кручения и кривизны линейной связности $\widetilde{\nabla}^{\mathbb{R}}$ удовлетворяют равенствам

$$T^{sh} = T_\alpha^{(\alpha)}, \tag{2.7.3}$$

$$R^{sh} = R_\alpha^{(\alpha)}, \tag{2.7.4}$$

где по α ведется суммирование от 0 до $\dim \mathbb{A} - 1$, а тензорные поля T_α и R_α определены условиями (2.4.2) и (2.4.3).

Теорема 2.7.1. *Для синектической связности ∇^{sh} на $M_n^{\mathbb{A}}$ следующие условия эквивалентны*:

(1) *существует такая линейная форма $\widetilde{\Phi}$ на $M_n^{\mathbb{A}}$, что тензорное поле кручения $T_\alpha^{(\alpha)}$ синектической связности $\widetilde{\nabla}^{\mathbb{R}}$ удовлетворяют условию*

$$T_\alpha^{(\alpha)} = I^{(0)} \otimes \tilde{\Phi} - \tilde{\Phi} \otimes I^{(0)},$$

где I — единичный аффинор на M_n;

(2) $T_\alpha = 0$ *для всех* $\alpha = 0, 1, \ldots, \dim \mathbb{A}$.

Теорема 2.7.1 эквивалентна следующей теореме.

Теорема 2.7.2. *Следующие условия эквивалентны*:

(1) *существует* $T_\alpha \neq 0$ *для некоторого* $\alpha \in \{0, 1, \ldots, N-1\}$;

(2) $T_\alpha^{(\alpha)} \neq I^0 \otimes \widetilde{\Phi} - \widetilde{\Phi} \otimes I^0$ *для всех* $\Phi \in f_1^0(M_n^{\mathbb{A}})$.

Теорема 2.7.3. *Пусть ∇^{sh} — синектическая связность на расслоении Вейля $M_n^{\mathbb{A}}$, снабженном $\mathbb{R}$-гладкой структурой класса C^∞. Следующие условия эквивалентны*:

(1) *тензорные поля кручения $\widetilde{T}^{(0)}$ и Вейля $\widetilde{W}$ связности $\widetilde{\nabla}^{\mathbb{R}}$ равны нулю (иначе говоря, пространство $(M_n^{\mathbb{A}}, \widetilde{\nabla}^{\mathbb{R}})$ является локально проективно плоским)*;

(2) $T_\alpha = 0$ *и* $R_\alpha = 0$ *(т.е. пространство $(M_n^{\mathbb{A}}, \widetilde{\nabla}^{\mathbb{R}})$ является локально плоским) для всех* $\alpha \in \{0, 1, \ldots, N-1\}$.

Определение 2.7.2. Вещественная реализация $(\nabla^{\mathbb{A}})^{\mathbb{R}}$ естественного продолжения $\nabla^{\mathbb{A}}$ линейной связности ∇ называется *полным лифтом связности* ∇ и обозначается $\nabla^{(0)}$.

Таким образом, полный лифт $\nabla^{(0)}$ связности ∇ определяется однозначно тождеством

$$\nabla^{(0)}_{X^{(a)}} Y^{(b)} = (\nabla_X Y)^{(ab)}.$$

Тензорные поля кручения $(T^{\mathbb{A}})^{(0)}$ и кривизны $(R^{\mathbb{A}})^{(0)}$ связности ∇^0 удовлетворяют условиям

$$(T^{\mathbb{A}})^{(0)} = T^{(0)}, \quad (R^{\mathbb{A}})^{(0)} = R^{(0)},$$

которые представляют собой определение полных лифтов тензорных полей T и R соответственно.

Из определения полного лифта связности следует, что $\nabla^{(0)}$ — синектическая связность, порожденная линейной связностью ∇ и тензорными полями типа (2.1.2): $\Gamma_\lambda = 0$, $\lambda \neq 0$. Поэтому для полного лифта $\nabla^{(0)}$ имеют место следующие теоремы.

Теорема 2.7.4. *Для тензорного поля кручения $T^{(0)}$ полного лифта $\nabla^{(0)}$ линейной связности ∇, следующие условия эквивалентны*:

(1) *существует такая линейная форма $\widetilde{\Phi}$ на $M_n^{\mathbb{A}}$, что $T^{(0)} = I^{(0)} \otimes \tilde{\Phi} - \tilde{\Phi} \otimes I^{(0)}$*;

(2) $T = 0$.

Теорема 2.7.5. *Расслоение Вейля $M_n^{\mathbb{A}}$ со связностью полного лифта $\nabla^{(0)}$ тогда и только тогда является локально проективно плоским, когда пространство (M_n, ∇) плоское.*

Из определения синектической связности на расслоении Вейля $M_n^{\mathbb{A}}$ и предложения 2.4.2 вытекает следующее утверждение.

Предложение 2.7.1. *Расслоение Вейля $M_n^{\mathbb{A}}$, снабженное синектической связностью ∇^{sh}, является локально симметрическим тогда и только тогда, когда*

$$T_\alpha = 0, \quad \nabla R = 0, \quad \nabla R_\lambda + \gamma_\lambda^{\alpha\mu} R_{\alpha\mu} = 0.$$

Следствием предложения 2.7.1 является следующая теорема Моримото.

Теорема 2.7.6 (см. [168]). *Пространство $(M_n^{\mathbb{A}}, \nabla^{(0)})$ является симметрическим тогда и только тогда, когда пространство (M_n, ∇) симметрическое.*

2.8. Локальное представление синектических связностей на расслоениях Вейля. Пусть синектическая связность ∇^{sh} на $M_n^{\mathbb{A}}$ порождена линейной связностью $\nabla = \Gamma_0$, тензорными полями Γ_λ, $\lambda = 1, 2, \ldots, N-1$, типа $(1, 2)$, заданными на M_n, и пусть (U, x^i) — локальная карта $\mathbb{R}$-гладкой структуры на M_n, $(\pi^{-1}(U), x^i_\alpha)$, $\alpha = 0, 1, \ldots, N-1$, — карта $\mathbb{R}$-гладкой структуры на $M_n^{\mathbb{A}}$, индуцированной гладкой структурой базы и алгебры Вейля $\mathbb{A}$. Положим

$$\nabla_{\partial_j} \partial_k = \Gamma^i_{jk} \partial_i, \quad \Gamma_\alpha(\partial_j \partial_k) = \Gamma^i_{\alpha jk} \partial_i, \quad \alpha = 0, 1, \ldots, N-1.$$

Отметим, что $\Gamma^i_{0jk} = \Gamma^i_{jk}$.

Аналогично, относительно поля натурального репера (∂_i^α) на $\pi^{-1}(U)$ положим

$$\nabla^{sh}(\partial_j^\alpha, \partial_k^\beta) = \Gamma^{\alpha\beta i}_{jk\sigma} \partial_i^\sigma.$$

Из соотношений (2.7.2) для синектической связности ∇^{sh} следует, что

$$\nabla^{sh}(\partial_j^\alpha, \partial_k^\beta) = \big(\Gamma_\nu(\partial_j, \partial_k)\big)^{(\varepsilon^\nu \varepsilon^\alpha \varepsilon^\beta)},$$

где (ε^α) — базис алгебры $\mathbb{A}$, причем $\varepsilon^0 = 1$. Поэтому

$$\Gamma^{\alpha\beta i}_{jk\sigma} \partial_i^\sigma = \gamma_\tau^{\nu\alpha\beta} (\Gamma^i_{\nu jk} \partial_i)^{(\varepsilon^\tau)} = \gamma_\tau^{\nu\alpha\beta} (\Gamma^i_{\nu jk})_{(\mu)} \partial_i^{(\varepsilon^\mu \varepsilon^\tau)} = \gamma_\sigma^{\nu\alpha\beta\mu} (\Gamma^i_{\nu jk})_{(\mu)} \partial_i^\sigma.$$

Отсюда

$$\Gamma^{\alpha\beta i}_{jk\sigma} = \gamma_\sigma^{\nu\alpha\beta\mu} (\Gamma^i_{\nu jk})_{(\mu)}. \tag{2.8.1}$$

Так выражаются коэффициенты синектической связности ∇^{sh} через $\Gamma^i_{\alpha jk}$ и структурные постоянные алгебры Вейля.

Для полного лифта $\nabla^{(0)}$ связности ∇, поскольку $\Gamma_\lambda = 0$, $\lambda \neq 0$, из формул (2.8.1), получим следующие формулы для коэффициентов:

$$\Gamma^{\alpha\beta i}_{jk\sigma} = \gamma_\sigma^{\alpha\beta\mu} (\Gamma^i_{jk})_{(\mu)}. \tag{2.8.2}$$

В частном случае, когда алгебра $\mathbb{A}$ является алгеброй дуальных чисел $\mathbb{R}(\varepsilon)$, формулы (2.8.1) дают известные соотношения для вычисления коэффициентов полного лифта линейной связности на касательном расслоении $T(M_n)$. Если $\mathbb{A}$ является алгеброй плюральных чисел $\mathbb{R}(\varepsilon^r)$, то по формулам (2.8.1) вычисляются коэффициенты полного лифта линейной связности на касательном расслоении $T^r(M_n)$.

Заметим, что в силу коммутативности и ассоциативности алгебры Вейля $\mathbb{A}$ из формул (2.8.1) следуют соотношения

$$\Gamma^{\alpha\beta i}_{jk\sigma} = \Gamma^{\beta\alpha i}_{jk\sigma}. \tag{2.8.3}$$

Из соотношений (2.8.1) и соотношений $\gamma^{0\beta}_{\alpha} = \delta^{\beta}_{\alpha}$ следует, что

$$\Gamma^{\alpha 0 i}_{jk\sigma} = \gamma^{\nu\alpha\mu}_{\sigma}(\Gamma^{i}_{\nu jk})_{(\mu)}, \tag{2.8.4}$$

$$\Gamma^{00i}_{jk\sigma} = \gamma^{\nu\mu}_{\sigma}(\Gamma^{i}_{\nu jk})_{(\mu)}, \tag{2.8.5}$$

$$\Gamma^{\alpha\beta i}_{jk0} = 0 \quad \text{при } \alpha \neq 0 \text{ или } \beta \neq 0,$$

$$\Gamma^{00i}_{jk0} = (\Gamma^{i}_{jk})_{(0)}.$$

Предложение 2.8.1. *Коэффициенты* $\Gamma^{\alpha\beta i}_{jk\sigma}$ *синектической связности* ∇^{sh} *удовлетворяют условиям*

$$\begin{array}{llll}
(1) & \Gamma^{\alpha\beta i}_{jk\sigma} = \gamma^{\beta\mu}_{\sigma}\Gamma^{\alpha 0 i}_{jk\mu}, & (4) & \Gamma^{0\beta i}_{jk\sigma} = \gamma^{\beta\mu}_{\sigma}\Gamma^{00i}_{jk\mu}, \\
(2) & \Gamma^{\alpha\beta i}_{jk\sigma} = \gamma^{\alpha\mu}_{\sigma}\Gamma^{0\beta i}_{jk\mu}, & (5) & \Gamma^{\alpha\beta i}_{jk\sigma} = \gamma^{\alpha\beta\mu}_{\sigma}\Gamma^{00i}_{jk\mu}. \\
(3) & \Gamma^{\alpha 0 i}_{jk\sigma} = \gamma^{\alpha\mu}_{\sigma}\Gamma^{00i}_{jk\mu}, & &
\end{array}$$

Пусть T^{sh}, R^{sh} — тензорные поля кручения и кривизны соответственно. Положим

$$T^{sh}(\partial^{\alpha}_{j}, \partial^{\beta}_{k}) = T^{\alpha\beta i}_{jk\sigma}\partial^{\sigma}_{i}, \quad R^{sh}(\partial^{\alpha}_{k}, \partial^{\beta}_{l})\partial^{\sigma}_{j} = R^{\sigma\alpha\beta i}_{jkl\tau}\partial^{\tau}_{i}.$$

Левые части этих равенств можно вычислить на основании равенств (2.7.3) и (2.7.4). Имеем

$$\begin{aligned}
T^{sh}(\partial^{\alpha}_{j}, \partial^{\beta}_{k}) = T^{(\lambda)}_{\lambda}(\partial^{\alpha}_{j}, \partial^{\beta}_{k}) = (T_{\lambda}(\partial_{j}, \partial_{k}))^{(\varepsilon^{\lambda}\varepsilon^{\alpha}\varepsilon^{\beta})} = \\
= \gamma^{\lambda\alpha\beta}_{\mu}(T^{i}_{\lambda jk}\partial_{i})^{(\varepsilon^{\mu})} = \gamma^{\lambda\alpha\beta}_{\mu}(T^{i}_{\lambda jk})_{(\nu)}\partial^{(\varepsilon^{\nu}\varepsilon^{\mu})}_{i} = \gamma^{\lambda\alpha\beta\nu}_{\sigma}(T^{i}_{\lambda jk})_{(\nu)}\partial^{\sigma}_{i}.
\end{aligned}$$

Отсюда

$$T^{\alpha\beta i}_{jk\sigma} = \gamma^{\lambda\alpha\beta\nu}_{\sigma}(T^{i}_{\lambda jk})_{(\nu)}. \tag{2.8.6}$$

Аналогично,

$$\begin{aligned}
R^{sh}(\partial^{\alpha}_{k}, \partial^{\beta}_{l})\partial^{\sigma}_{j} = R^{(\lambda)}_{\lambda}(\partial^{\alpha}_{k}, \partial^{\beta}_{l})\partial^{\sigma}_{j} = (R_{\lambda}(\partial_{k}, \partial_{l})\partial_{j})^{(\varepsilon^{\lambda}\varepsilon^{\alpha}\varepsilon^{\beta}\varepsilon^{\sigma})} = \\
= \gamma^{\lambda\alpha\beta\sigma}_{\mu}(R^{i}_{\lambda jkl}\partial_{i})^{(\varepsilon^{\mu})} = \gamma^{\lambda\alpha\beta\sigma}_{\mu}(R^{i}_{\lambda jkl})_{(\vartheta)}\partial^{(\varepsilon^{\nu}\varepsilon^{\mu})}_{i} = \gamma^{\lambda\alpha\beta\sigma\nu}_{\tau}(R^{i}_{\lambda jkl})_{(\nu)}\partial^{\sigma}_{i},
\end{aligned}$$

поэтому

$$R^{\sigma\alpha\beta i}_{jkl\tau} = \gamma^{\lambda\sigma\alpha\beta\nu}_{\tau}(R^{i}_{\lambda jkl})_{(\nu)}. \tag{2.8.7}$$

Если $\nabla^{sh} = \nabla^{(0)}$, то из (2.8.6) и (2.8.7) получим

$$T^{\alpha\beta i}_{jk\sigma} = \gamma^{\alpha\beta\nu}_{\sigma}(T^{i}_{jk})_{(\nu)}, \quad R^{\sigma\alpha\beta i}_{jkl\tau} = \gamma^{\sigma\alpha\beta\nu}_{\tau}(R^{i}_{jkl})_{(\nu)},$$

где T^{i}_{jk} — составляющие тензорного поля кручения T, R^{i}_{jkl} — составляющие тензорного поля кривизны связности ∇, заданной на базе M_n расслоения Вейля $M^{\mathbb{A}}_{n}$.

2.9. Голоморфные аффинные векторные поля на расслоениях Вейля. Пусть $M_n^{\mathbb{A}}$ — расслоение Вейля над M_n, порожденное алгеброй Вейля $\mathbb{A}$, $\widetilde{\nabla}$ — голоморфная связность на $M_n^{\mathbb{A}}$. Предположим, что (ε^α) — базис алгебры $\mathbb{A}$, причем $\varepsilon^0 = 1$. Условие голоморфности связности $\widetilde{\nabla}$ равносильно условиям

$$\widetilde{\nabla}_{X^{\mathbb{A}}} Y^{\mathbb{A}} = \varepsilon^\alpha (\Gamma_\alpha(X,Y))^{\mathbb{A}}, \quad \alpha = 0, 1, \ldots, \dim \mathbb{A} - 1, \tag{2.9.1}$$

где $\Gamma_0 = \nabla$ — линейная связность, Γ_λ, $\lambda \neq 0$, — тензорные поля типа (2.1.2) на M_n.

Голоморфное векторное поле $\widetilde{X} = \varepsilon^\alpha X^{\mathbb{A}}$ является аффинным тогда и только тогда, когда

$$L_{\widetilde{X}} \widetilde{\nabla} = 0. \tag{2.9.2}$$

Теорема 2.9.1. *Голоморфное векторное поле $\widetilde{X}$ на $M_n^{\mathbb{A}}$ с голоморфной связностью $\widetilde{\nabla}$ является аффинным тогда и только тогда, когда существуют такие векторные поля X_α на M_n, что*

(1) $\widetilde{X} = \varepsilon^\alpha X_\alpha^{\mathbb{A}}$;

(2) $\gamma_\sigma^{\alpha\beta} L_{X_\alpha} \Gamma_\beta = 0$, $\alpha, \beta, \sigma = 0, 1, 2, \ldots, \dim \mathbb{A} - 1$.

Множество всех голоморфных аффинных векторных полей на $M_n^{\mathbb{A}}$ образует алгебру Ли $(g(M_n^{\mathbb{A}}))^{\mathbb{R}}$ над полем действительных чисел. Отображение

$$h : (g(M_n^{\mathbb{A}}))^{\mathbb{R}} \to \mathbb{A} \otimes_{\mathbb{R}} \Im_0^1(M_n), \quad h(\widetilde{X} + \widetilde{Y}) = h(\widetilde{X}) + h(\widetilde{Y}), \quad h(s\widetilde{X}) = s \cdot h(\widetilde{X}), \quad h(aX^{\mathbb{A}}) = a \otimes X,$$

является инъективным гомоморфизмом. Поэтому отображение

$$\widetilde{h} : (g(M_n^{\mathbb{A}}))^{\mathbb{R}} \to h((g(M_n^{\mathbb{A}}))^{\mathbb{R}}), \quad \widetilde{h}(\widetilde{X}) = h(\widetilde{X}),$$

будет изоморфизмом.

Пусть линейная связность $\widetilde{\nabla}$ является естественным продолжением в $M_n^{\mathbb{A}}$ линейной связности ∇, заданной на M_n, т.е. $\widetilde{\nabla} = \nabla^{\mathbb{A}}$. Тогда $\Gamma_\lambda = 0$, $\lambda \neq 0$, и условия (2) теоремы 2.9.1 будут иметь вид $L_{X_\alpha} \nabla = 0$.

Эти условия означают, что каждое векторное поле X_α является аффинным на M_n со связностью ∇. Отсюда замечаем, что доказано следующее утверждение.

Теорема 2.9.2. *Голоморфное векторное поле $\widetilde{X}$ на многообразии $M_n^{\mathbb{A}}$, снабженном связностью $\nabla^{\mathbb{A}}$, является аффинным тогда и только тогда, когда существуют такие векторные поля X_α на M_n, что*

(1) $\widetilde{X} = \varepsilon^\alpha X_\alpha^{\mathbb{A}}$;

(2) *каждое векторное поле X_α является аффинным на (M_n, ∇).*

Учитывая, что в рассматриваемом случае $h((g(M_n^{\mathbb{A}}))^{\mathbb{R}}) = \mathbb{A} \otimes_{\mathbb{R}} g(M_n)$, получим, что имеет место следующее утверждение.

Теорема 2.9.3 (см. [123]). *Алгебра Ли $(g(M_n^{\mathbb{A}}))^{\mathbb{R}}$ голоморфных аффинных векторных полей пространства $(M_n^{\mathbb{A}}, \nabla^{\mathbb{A}})$ изоморфна тензорному произведению $\mathbb{A} \otimes_{\mathbb{R}} g(M_n)$, где $g(M_n)$ — алгебра Ли аффинных векторных полей базы (M_n, ∇).*

Сингулярный ранг алгебры Вейля $\mathbb{A}$ равен 1, что следует из определения алгебры Вейля. Поэтому справедливы следующие теоремы (см. [117]).

Теорема 2.9.4. *Пусть $M_n^{\mathbb{A}}$ — расслоение Вейля над гладким (класса C^∞) многообразием M_n, порожденное алгеброй Вейля $\mathbb{A}$, $\widetilde{\nabla}$ — голоморфная линейная связность на $M_n^{\mathbb{A}}$. Если тензорное поле W не нулевое, то максимальная вещественная размерность алгебры Ли $(g(M_n^{\mathbb{A}}))^{\mathbb{R}}$ голоморфных аффинных векторных полей равна в точности $m(n^2 + n) - 3n + 5$, где $m = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{A}$, $n \geqslant 3$.*

Теорема 2.9.5. *Пусть $M_n^{\mathbb{A}}$ — расслоение Вейля над M_n, $n \geqslant 2$, порожденное алгеброй Вейля $\mathbb{A}$, $\widetilde{\nabla}$ — голоморфная линейная связность на $M_n^{\mathbb{A}}$. Если тензорное поле Риччи связности $\widetilde{\nabla}$ симметрично, то наибольшая вещественная размерность алгебры Ли $(g(M_n^{\mathbb{A}}))^{\mathbb{R}}$ голоморфных аффинных векторных полей равна в точности $m(n^2 + n) - n$, где $m = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{A}$.*

Теорема 2.9.6. *Максимальная вещественная размерность алгебры Ли голоморфных аффинных векторных полей на $M_n^{\mathbb{A}}$ с голоморфной линейной связностью $\widetilde{\nabla}$ с ненулевым тензорным полем Риччи равна в точности $m(n^2+n)-n$, $n \geqslant 2$.*

Теорема 2.9.7. *Наибольшая вещественная размерность алгебры Ли голоморфных аффинных векторных полей на расслоении Вейля $M_n^{\mathbb{A}}$, $n \geqslant 3$, с голоморфной линейной связностью без кручения и отличным от нуля тензорным полем кривизны, равна $m(n^2+n)-n$, где $m = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{A}$.*

Теорема 2.9.8. *Всякое пространство $(M_n^{\mathbb{A}}, \widetilde{\nabla})$, где $\widetilde{\nabla}$ — голоморфная связность на $M_n^{\mathbb{A}}$, для которого $\dim_{\mathbb{R}}(g(M_n^{\mathbb{A}}))^{\mathbb{R}} = m(n^2+n)-n$, является эквипроективным.*

Теорема 2.9.9. *На любом расслоении Вейля $M_n^{\mathbb{A}}$ над гладким многообразием M_n, $n \geqslant 3$, класса C^∞ не существует голоморфной линейной связности без кручения, алгебра Ли голоморфных векторных полей которой имеет вещественную размерность r, удовлетворяющую неравенствам $m(n^2+n)-n < r < m(n^2+n)$, где $m = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{A}$.*

В [161–165] изучалась геометрия расслоений Вейля и естественные преобразования этих расслоений.

Продолжения тензорных полей различных типов на расслоения Вейля изучались в [151–154].

2.10. Инфинитезимальные аффинные преобразования в касательных расслоениях различных порядков. Последнее время, достаточно активно изучаются различные структуры и их автоморфизмы на касательных расслоениях различных порядков.

Касательные расслоения, снабженные скалярной плотностью фиксированного веса, однородной второго порядка относительно слоевых переменных, изучались Л. С. Горшковой (см. [14]). Инфинитезимальные преобразования в метрических пространствах векторных и ковекторных плотностей исследованы ею в [15, 16].

В касательных расслоениях первого порядка,а также кокасательных расслоениях, снабженных различными геометрическими структурами в последние годы ряд результатов был получен А. И. Егоровым (см. [19–23]).

Н. Д. Никитин исследовал касательные расслоения, снабженные нелинейными связностями (см. [57]). В [58, 59] им исследованы проектируемые инфинитезимальные преобразования касательного расслоения, снабженного интегрируемой линейной связностью.

Оценки размерностей алгебр Ли инфинитезимальных аффинных преобразований касательного расслоения со связностями полного лифта, удовлетворяющими некоторым условиям, получены в [124–128] Г. А. Султановой.

В работе [6] Н. Е. Беловой изучаются расслоения алгебры антикватернионов на смежные классы по подалгебрам двойных и дуальных чисел и связанные с ними расслоения биаксиальных пространств прямыми абсолютной линейной конгруэнции. Исследованы линейные связности расслоения антикватернионов и порожденные ими нелинейные связности проективных расслоений.

В работе [13] Ф. Р. Гайнуллина и В. В. Шурыгина получены условия, выраженные в терминах производных Ли тензорных полей и объекта линейной связности, при которых $\mathbb{R}(\varepsilon^2)$-гладкое тензорное поле и $\mathbb{R}(\varepsilon^2)$-гладкая линейная связность могут быть переведены специальным диффеоморфизмом в лифты некоторого тензорного поля на касательном расслоении второго порядка гладкого многообразия в лифты тензорного поля и линейной связности, заданной на этом многообразии.

Полные лифты структурных тензоров многообразия Пуассона—Нейенхейса в расслоение А. Вейля этого многообразия изучены В. В. Шурыгиным (мл.) в [146].

Касательные расслоения второго порядка со связностью полного лифта изучались в работах Н. А. Осьмининой (см. [64–70]).

Инфинитезимальным аффинным преобразованиям касательного расслоения второго порядка со связностью горизонтального лифта посвящены работы Н. И. Маниной (см. [36–39]).

Расслоения Вейля второго порядка над специальными алгебрами Вейля изучались К. М. Будановым (см. [7, 8]), Я. В. Никитиной (см. [60]).

N-Линейные связности касательных расслоений второго порядка изучались в [148, 149]. Работа [166] посвящена дифференциальной геометрии касательных расслоений порядка k.

Е. П. Шустова исследовала полный лифт связности и метрики в касательное расслоение порядка k (см. [147]).

Изучению расслоений Вейля посвящены работы Г. Н. Бушуевой (см. [9, 150]) и Л. Б. Смоляковой (см. [74, 75]).

Лифты тензорных полей и горизонтальные лифты линейных связностей, а также их инфинитезимальные аффинные преобразования в кокасательных расслоениях изучены Н. С. Султановой в [129–132].

3. Тензорные расслоения специального типа

Существуют различные подходы к определению тензорных расслоений. Одним из первых эти расслоения рассматривал Б. Л. Лаптев. По Лаптеву (см. [34]), расслоение тензоров типа (r, s) — пространство с опорным элементом, опорный объект которого является тензором типа (r, s). Другой подход к этому понятию описан у Ш. Кобаяси (см. [30]): тензорное расслоение $T_s^r(M)$ типа (r, s) над M ассоциировано с расслоением линейных реперов $L(M)$. Группой преобразований этого расслоения является полная линейная группа $GL(n, R)$, стандартным слоем является тензорное пространство T_s^r типа (r, s) над векторным простанством R^n. Еще один способ построения тензорного расслоения типа (r, s) рассматривается И. П. Егоровым (см. [28]).

Пусть M_n — гладкое класса C^∞ многообразие, p — произвольная точка на нем, T_p и T_p^* — касательное и кокасательное пространства к M_n в этой точке. Обозначим через

$$(T_s^r)_p = \bigotimes^r T_p \otimes \bigotimes^s T_p^*$$

пространство r-контравариантных, s-ковариантных тензоров в точке p многообразия M_n. Объединение всех пространств $(T_s^r)_p$ называется тензорным расслоением типа (r, s) над базой M_n:

$$T_s^r(M_n) = \bigcup_{p \in M_n} (T_s^r)_p.$$

Элементом расслоения $T_s^r(M_n)$ является совокупность точки p и тензора t типа (r, s) в этой точке; обозначение $\overline{p} = (p, t)$, $p \in M_n$, $t \in (T_s^r)_p$. Канонической проекцией служит отображение $\pi : T_s^r(M_n) \to M_n$, определяемое по закону $\overline{p} \in T_s^r(M_n)$, $\pi(\overline{p}) = p$.

На тензорном расслоении естественным образом возникает структура гладкого многообразия, индуцированная соответствующей структурой на базе. Расслоение $T_s^r(M_n)$ является гладким многообразием размерности $n + n^{p+q}$.

Полный лифт и горизонтальный лифт векторных полей с базы в тензорное расслоение типа (r, s) определен Б. Н. Шапуковым в [136, 137].

В работах [40, 42] О. А. Монаховой вводятся полные, горизонтальные и некоторые специальные лифты тензорных и векторных полей с базы в расслоение дважды ковариантных тензоров, изучаются свойства этих лифтов, выясняется связь между полным и горизонтальным лифтом векторного поля. В [44] рассматриваются естественные продолжения диффеоморфизмов базы и векторных полей.

В [41] определяется горизонтальный лифт линейной связности. Доказано, что он является линейной связностью на расслоении. Вычисляются значения тензорных полей кривизны и кручения построенной связности на полях адаптированного репера. Изучаются свойства горизонтального лифта связности (см. [43, 46]).

В [45] найдено условие рекуррентности тензора кривизны горизонтального лифта связности на расслоении дважды ковариантных тензоров следующим образом.

Рассмотрим гладкое (класса C^∞) многообразие M_n и расслоенное пространство $T_2^0(M_n)$ дважды ковариантных тензоров над ним. Задание линейной связности $\overset{\circ}{\nabla}$ на базе этого расслоения позволяет строить горизонтальные лифты векторных полей, а также построить связность ∇^H — горизонтальный лифт линейной связности ∇, заданной на M_n, в общем случае отличной от $\overset{\circ}{\nabla}$.

∇^H однозначно определяется условиями, аналогичными для горизонтального лифта связности в касательном и кокасательном расслоении (см. [174]):

$$\nabla^H_{Q^V} W^V = 0, \quad \nabla^H_{X^H} Y^H = (\nabla_X Y)^H, \quad \nabla^H_{Q^V} X^H = 0, \quad \nabla^H_{X^H} Q^V = (\nabla_X Q)^V,$$

где Q, W — тензорные поля типа $(0,2)$ на базе расслоенного пространства, X, Y — векторные поля на базе, X^H — горизонтальный лифт векторного поля X, Q^V — вертикальный лифт тензорного поля Q типа $(0,2)$.

Кручение $\tilde{T}$ горизонтального лифта связности зависит от кручения T поднимаемой связности ∇ и кривизны $\overset{\circ}{R}$ связности $\overset{\circ}{\nabla}$. Кривизна $\tilde{R}$ связности ∇^H зависит только от кривизны R связности ∇. Поскольку горизонтальные и вертикальные векторные поля образуют поле адаптированного репера на расслоении $T^0_2(M_n)$, то для определения $\tilde{T}$ и $\tilde{R}$ достаточно указать их значения на всевозможных наборах горизонтальных и вертикальных векторных полей:

$$\tilde{T}(X^H, Q^V) = -\tilde{T}(Q^V, X^H) = (\nabla_X Q - \overset{\circ}{\nabla}_X Q),$$
$$\tilde{T}(X^H, Y^H) = (T(X,Y))^H - (\overset{\circ}{R}(X,Y))^{V_1} - (\overset{\circ}{R}(X,Y))^{V_2};$$

здесь через V_1, V_2 обозначены специальные вертикальные лифты тензорных полей типа $(1,1)$. Значение $\tilde{T}$ на остальных наборах горизонтальных и вертикальных векторных полей равно 0.

Кривизна $\tilde{R}$ определяется следующими соотношениями:

$$\tilde{R}(X^H, Y^H)Z^H = (R(X,Y)Z)^H,$$
$$\tilde{R}(X^H, Y^H)Q^V = (-Q \overset{1}{\bullet} R(X,Y) - Q \overset{2}{\bullet} R(X,Y))^V;$$

здесь свертки $Q \overset{1}{\bullet} R(X,Y)$, $Q \overset{2}{\bullet} R(X,Y)$ — тензорные поля типа $(0,2)$ на базе определяются следующим образом: для любых векторных полей A, B на базе

$$(Q \overset{1}{\bullet} R(X,Y))(A,B) = Q(R(X,Y)A, B), \quad (Q \overset{2}{\bullet} R(X,Y))(A,B) = Q(A, R(X,Y)B).$$

Теорема 3.1 (см. [45]). *Для того чтобы связность ∇^H на расслоении дважды ковариантных тензоров имела рекуррентный тензор кривизны, необходимо и достаточно, чтобы поднимаемая связность ∇ на базе имела рекуррентный тензор кривизны.*

Как отмечалось выше, чтобы произвольное векторное поле являлось инфинитезимальным аффинным преобразованием пространства аффинной связности, необходимо и достаточно, чтобы производная Ли от объекта связности вдоль этого векторного поля обращалась в нуль. Таким образом, произвольное векторное поле $\widetilde{X}$ является инфинитезимальным аффинным преобразованием пространства $(T^0_2(M_n), \nabla^H)$ тогда и только тогда, когда $L_{\widetilde{X}} \nabla^H = 0$. Проинтегрировав эту систему, получим необходимые и достаточные условия существования инфинитезимального аффинного преобразования пространства $(T^0_2(M_n), \nabla^H)$.

Теорема 3.2 (см. [48]). *Для того чтобы произвольное векторное поле $\widetilde{X}$ являлось инфинитезимальным аффинным преобразованием на расслоении $(T^0_2(M_n), \nabla^H)$, необходимо и достаточно, чтобы на M_n существовали тензорные поля $A \in \Im^3_0(M_n)$, $B \in \Im^1_0(M_n)$, $P \in \Im^2_2(M_n)$, $D \in \Im^0_2(M_n)$, удовлетворяющие следующим условиям:*

$$\widetilde{X} = A^{H\gamma} + B^C + P^{V\gamma} + D^V,$$
$$\nabla A = 0, \quad A * R = 0, \quad A * T = 0, \quad \nabla^2 D = 0, \quad \nabla P = 0, \quad L_B \nabla = 0,$$

где R, T — тензоры кривизны и кручения связности ∇ соответственно.

Каждое из векторных полей, входящих в разложение $\widetilde{X}$, самостоятельно является инфинитезимальным аффинным преобразованием пространства $(T^0_2(M_n), \nabla^H)$, если $\tilde{X}$ является инфинитезимальным аффинным преобразованием этого пространства.

Найдена размерность алгебры Ли инфинитезимальных аффинных преобразований пространства $(T_2^0(M_n), \nabla^H)$ над максимально подвижным не проективно плоским пространством $\mathbb{R}^n$ с объектом связности

$$\Gamma^i_{jk} = \delta^i_1(\delta^2_j\delta^3_k + \delta^3_j\delta^2_k)x^2, \quad i,j,k = \overline{1,n}.$$

Тензор кривизны этого пространства имеет компоненты

$$R^i_{jkl} = \delta^i_1\delta^2_j(\delta^2_k\delta^3_l - \delta^3_k\delta^2_l), \quad i,j,k,l = \overline{1,n}.$$

Предложение 3.1 (см. [47]). *Размерность алгебры Ли инфинитезимальных аффинных преобразований расслоения дважды ковариантных тензоров над максимально подвижным не проективно плоским пространством аффинной связности размерности n равна $n^4 - 2n^3 + 8n^2 - 16n + 18$.*

В [49] получено разложение произвольного инфинитезимального аффинного преобразования расслоения дважды ковариантных тензоров со связностью горизонтального лифта над пространством аффинной связности нулевой кривизны. Вычислена размерность алгебры Ли инфинитезимальных аффинных преобразований этого пространства.

Рассмотрим расслоение дважды ковариантных тензоров над пространством $\mathbb{R}^n$ с объектом связности

$$\Gamma^i_{jk} = \delta^i_1\delta^2_j\delta^3_k x^2, \quad i,j,k = \overline{1,n}.$$

Тензор кручения этого пространства имеет компоненты

$$T^i_{jk} = \delta^i_1(\delta^2_j\delta^3_k - \delta^3_j\delta^2_k)x^, \quad i,j,k = \overline{1,n}.$$

Все компоненты тензора кривизны равны нулю:

$$R^i_{jkl} = 0, \quad i,j,k,l = \overline{1,n}.$$

Предложение 3.2 (см. [49]). *Размерность алгебры Ли инфинитезимальных аффинных преобразований расслоения $(T_2^0(\mathbb{R}^n), \nabla^H)$ над пространством аффинной связности $(\mathbb{R}^n, \nabla)$ с объектом связности*

$$\Gamma^k_{ij} = \delta^k_1\delta^2_i\delta^3_j x^2, \quad i,j,k = \overline{1,n},$$

равна $n^4 + 2n^3 - 2n^2 - 3n + 4$.

В [50, 51] описано правое действие полной линейной группы $GL(n,R)$ на расслоении дважды ковариантных тензоров с помощью гомеоморфизма R_A пространства $(T_2^0(M_n))_p$ в себя, действующего по закону $R_A(T_p) = T_pA$, $A \in GL(n,R)$. Введенное действие не является эффективным; его орбиты представляют собой слои расслоения дважды ковариантных тензоров. Доказаны некоторые тождества, которым удовлетворяют операторы действия группы.

В работах Н. А. Опокиной изучены касательные TG и тензорные расслоения T_0^2G типа $(2,0)$ над группой Ли. Доказано (см. [61]), что эти расслоения тривиальны, а пространства расслоений также являются группами Ли. Построены лифты левоинвариантных векторных полей в эти расслоения. Найдены алгебра Ли группы TG и алгебра Ли группы T_0^2G, получены структурные уравнения этих алгебр.

Построена левая связность на тотальном пространстве расслоения T_0^2G и найдена ее связь с левой связностью на базе G (см. [62]). Доказаны некоторые свойства левой внешней связности. С ее помощью построена внутренняя связность тензорного расслоения T_0^2G.

В [63] построены вертикальный и горизонтальный лифты левоинвариантных векторных полей. Найдено необходимое и достаточное условие для того, чтобы горизонтальный лифт левоинвариантных векторных полей был левоинвариантным. Построены левоинвариантные вертикальное и горизонтальное распределения, а также левоинвариантная метрика g на T_0^2G из левоинвариантной метрики на базе G.

Изучению расслоений аффиноров посвящены работы И. М. Крестининой. Построены продолжения тензорных полей и линейных связностей в расслоение аффиноров (см. [31]). Найдено разложение инфинитезимального аффинного преобразования расслоения аффиноров со связностью горизонтального лифта (см. [32]). Получено разложение инфинитезимального проективного преобразования расслоения аффиноров со связностью, присоединенной к связности горизонтального лифта (см. [33]).

Изучению различных объектов на тензорных расслоениях посвящены работы [35, 71, 73, 155–160, 169–172] А. А. Салимова и его учеников.

В [72] локально определены полный и горизонтальный лифты тензорного поля $S^i_{k_1\ldots k_{q_1}}$ в чистое тензорное подрасслоение тензорного расслоения типа (p, q). При построении используется обобщенный оператор Яно—Ако и условие проектируемости тензорного поля.

В [73] определен диагональный лифт римановой метрики с гладкого многообразия на его тензорное расслоение, изучены киллинговы векторные поля и геодезические линии метрики на расслоении.

Горизонтальный и полный лифты связности Леви-Чевита римановой или псевдоримановой метрики на тензорных расслоениях описаны в [169]. Тензорные расслоения типа $(1, 1)$ с метриками Чигера—Громола и Сасаки изучены в [160, 170].

Работы [35, 155, 158, 159] посвящены изучению лифтов тензорных полей типа (2.1.1) и чистых сечений в тензорных расслоениях типа (p, q).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Аминова А. В.* Проективно-групповые свойства некоторых римановых пространств// Тр. геом. семинара. — М.: ВИНИТИ, 1974. — *6*. — С. 295–316.
2. *Аминова А. В.* Группы проективных и аффинных движений в пространствах общей теории относительности// Тр. геом. семинара. — М.: ВИНИТИ, 1974. — *6*. — С. 317–346.
3. *Аминова А. В.* Группы почти проективных движений пространств аффинной связности// Изв. вузов. Мат. — 1979. — *4*. — С. 71–75.
4. *Аминова А. В.* Псевдоримановы многообразия с общими геодезическими// Усп. мат. наук. — 1993. — *48*, № 2 (290). — 1993. — С. 107–164.
5. *Аминова А. В.* Пространства проективной связности Картана и групповой анализ дифференциальных уравнений второго порядка// Итоги науки и техн. Совр. мат. прилож. Тематич. обзоры. — 2009. — *123*. — С. 58–80.
6. *Белова Н. Е.* Расслоения биаксиальных пространств, порожденные алгеброй антикватернионов// Движения в обобщенных пространствах/ Межвуз. сб. науч. тр. — Пенза, 2000. — С. 17–30.
7. *Буданов К. М., Воеводин А. В.* О фробениусовых алгебрах Вейля ширины 2// Дифференциальная геометрия многообразий фигур/ Межвуз. тематич. сб. — Калининград, 2006. — *37*. — С. 19–23.
8. *Буданов К. М.* Лифты функций и векторных полей в расслоение Вейля над тензорным произведением алгебр дуальных чисел// Междунар. геом. семин. им. Г. Ф. Лаптева/ Сб. тр. — Пенза, 2007. — С. 16–20.
9. *Бушуева Г. Н.* Расслоения Вейля над многообразиями, зависящими от параметров// Движения в обобщенных пространствах/ Межвуз. сб. науч. тр. — Пенза, 2002. — С. 24–33.
10. *Вишневский В. В., Широков А. П., Шурыгин В. В.* Пространства над алгебрами. — Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1984.
11. *Вишневский В. В.* Многообразия над плюральными числами и полукасательные структуры// Итоги науки и техн. Пробл. геом. — М.: ВИНИТИ, 1988. — *20*. — С. 35–75.
12. *Вишневский В. В.* Интегрируемые аффинные структуры и их плюральные интерпретации// Итоги науки и техн. Совр. мат. прилож. Тематич. обзоры. — М.: ВИНИТИ, 2002. — *73*. — С. 5–64.
13. *Гайнуллин Ф. Р., Шурыгин В. В.* Голоморфные тензорные поля и линейные связности на касательном расслоении второго порядка// Уч. зап. Казан. гос. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. — 2009. — *151*, № 4. — С. 36–50.
14. *Горшкова Л. С.* Инфинитезимальные конформные преобразования в пространствах Дейвиса// Движения в обобщенных пространствах/ Межвуз. сб. науч. тр. — Пенза, 2000. — С. 13–16.
15. *Горшкова Л. С.* Об инфинитезимальных конформных преобразованиях в метрических пространствах векторных и ковекторных плотностей// Движения в обобщенных пространствах/ Межвуз. сб. науч. тр. — Пенза, 2002. — С. 34–37.
16. *Горшкова Л. С.* О некоторых классах метрических пространств векторных плотностей, допускающих конформные преобразования// Междунар. геом. семин. им. Г. Ф. Лаптева/ Сб. тр. — Пенза, 2004. — С. 31–33.

17. *Евтушик Л. Е., Лумисте Ю. Г., Остиану Н. М., Широков А. П.* Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях// Итоги науки и техн. Пробл. геом. — М.: ВИНИТИ, 1979. — *9.*
18. *Егоров А. И., Синюков Н. С., Султанов А. Я.* Научное наследие И. П. Егорова (25.07.1915–2.10.1990)// Итоги науки и техн. Совр. мат. прилож. Тематич. обзоры. — М.: ВИНИТИ, 1995. — *8.* — С. 5–36.
19. *Егоров А. И.* Максимально подвижные обобщенные дифференциально-геометрические пространства. I// Движения в обобщенных пространствах/ Межвуз. сб. науч. тр. — Пенза, 2000. — С. 91–100.
20. *Егоров А. И.* Римановы пространства $V_n(x)$ профессора Егорова И. П. с группой движений G_r порядка $r = \dfrac{(n-1)(n-2)}{2} + 5$ $(n \geqslant 4)$// Движения в обобщенных пространствах/ Межвуз. сб. науч. тр. — Пенза, 2002. — С. 52–61.
21. *Егоров А. И.* Движения в обобщенных римановых, финслеровых пространствах. III// Движения в обобщенных пространствах/ Межвуз. сб. науч. тр. — Пенза, 2002. — С. 62–71.
22. *Егоров А. И.* Финслеровы пространства неопределенной метрики с группой движений G_r порядка $r = \dfrac{(n-1)(n-2)}{2} + 5$ $(n \geqslant 4)$. II// Движения в обобщенных пространствах/ Межвуз. сб. науч. тр. — Пенза, 2002. — С. 72–74.
23. *Егоров А. И.* Локальные поверхности вращения пространства как метрические пространства векторных элементов. I// Междунар. геом. семин. им. Г. Ф. Лаптева/ Сб. тр. — Пенза, 2004. — С. 45–50.
24. *Егоров И. П.* О порядке групп движений пространств аффинной связности// Докл. АН СССР. — *61*, № 4. — 1948. — С. 605–608.
25. *Егоров И. П.* Движения в пространствах аффинной связности/ Дисс. на соискание уч. степ. докт. физ.-мат. наук. — М.: МГУ, 1955.
26. *Егоров И. П.* Движения в обобщенных дифференциально-геометрических пространствах// Итоги науки. Алгебра, топология, геометрия. 1965. — М.: ВИНИТИ. 1967. — С. 375–428.
27. *Егоров И. П.* Автоморфизмы в обобщенных пространствах// Итоги науки и техн. Пробл. геом. — М.: ВИНИТИ, 1978. — *10.* С. 147–191.
28. *Егоров И. П.* Геометрия. — М., 1979.
29. *Егоров И. П.* Движения и гомотетии в пространствах Финслера и их обобщениях// Итоги науки и техн. Пробл. геом. — М.: ВИНИТИ, 1984. — *16.* — С. 81–126.
30. *Кобаяси Ш., Номидзу К.* Основы дифференциальной геометрии. Т. 1. — М.: Наука, 1981.
31. *Крестинина И. М.* Продолжения тензорных полей и линейных связностей с базы M_n в его расслоение аффиноров $E(M_n)$// Движения в обобщенных пространствах/ Межвуз. сб. науч. тр. — Пенза, 1999. — С. 50–60.
32. *Крестинина И. М.* Каноническое разложение инфинитезимального аффинного преобразования расслоения аффиноров со связностью горизонтального лифта// Движения в обобщенных пространствах/ Межвуз. сб. науч. тр. — Пенза, 1999. — С. 61–64.
33. *Крестинина И. М.* О разложении инфинитезимального проективного преобразования расслоения аффиноров со связностью, присоединенной к связности горизонтального лифта// Движения в обобщенных пространствах/ Межвуз. сб. науч. тр. — Пенза, 2000. — С. 168–172.
34. *Лаптев Б. Л.* Ковариантный дифференциал и теория дифференциальных инвариантов в пространстве тензорных опорных элементов// Уч. зап. Казан. ун-та. — 1958. — *118*, № 4. — С. 75—147.
35. *Магден А., Салимов А. А.* Горизонтальные лифты тензорных полей на сечения тензорного расслоения// Изв. вузов. Мат. — 2001. — *3.* — С. 77–80.
36. *Манина Н. И.* О горизонтальных лифтах векторных полей в касательное расслоение второго порядка// Движения в обобщенных пространствах/ Межвуз. сб. науч. тр. — Пенза, 2005. — С. 65–70.
37. *Манина Н. И.* О разложении инфинитезимального аффинного преобразования касательного расслоения второго порядка// Изв. ПГПУ им. В. Г. Белинского. — Пенза, 2010. — *22.* — С. 58–63.
38. *Манина Н. И., Султанов А. Я.* Инфинитезимальные аффинные преобразования касательного расслоения второго порядка со связностью горизонтального лифта// Изв. вузов. Мат. — 2011. — *9.* — С. 62—69.
39. *Манина Н. И.* Инфинитезимальные аффинные преобразования касательного расслоения второго порядка со связностью горизонтального лифта над непроектовноплоским пространством// Фундаментальные и прикладные проблемы науки. Т. 1/ Мат. VII Междунар. симп. — М.: РАН, 2012. — С. 23–31.
40. *Монахова О. А.* Вертикальные лифты тензорных полей типа $(1,1)$// Движения в обобщенных пространствах/ Межвуз. сб. науч. тр. — Пенза, 2000. — С. 173–177.

41. *Монахова О. А.* Горизонтальный лифт связности в расслоении дважды ковариантных тензоров// Движения в обобщенных пространствах/ Межвуз. сб. науч. тр. — Пенза, 2002. — С. 168–172.
42. *Монахова О. А.* Об адаптированных реперах и некоторых лифтах в расслоении дважды ковариантных тензоров// Дифференциальная геометрия многообразий фигур/ Межвуз. тематич. сб. — Калининград, 2002. — *33.* — С. 72–74.
43. *Монахова О. А.* О некоторых свойствах горизонтального лифта связности на расслоении дважды ковариантных тензоров// Дифференциальная геометрия многообразий фигур/ Межвуз. тематич. сб. — Калининград, 2003. — *34.* — С. 95–98.
44. *Монахова О. А.* Естественное продолжение диффеоморфизмов базы в расслоение дважды ковариантных тензоров// Междунар. геом. семин. им. Г. Ф. Лаптева/ Сб. тр. — Пенза, 2004. — С. 80–83.
45. *Монахова О. А.* Условие рекуррентности тензора кривизны горизонтального лифта связности на расслоении дважды ковариантных тензоров// Движения в обобщенных пространствах/ Межвуз. сб. науч. тр. — Пенза, 2005. — С. 78–84.
46. *Монахова О. А.* Горизонтальный лифт линейной связности на расслоение дважды ковариантных тензоров// Дифференциальная геометрия многообразий фигур/ Межвуз. тематич. сб. — Калининград, 2005. — *36.* — С. 88–92.
47. *Монахова О. А.* Инфинитезимальное аффинное преобразование пространства $(T_2^0(M_n), \nabla^H)$ над максимально подвижным непроективноплоским пространством (M_n, ∇)// Уч. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. — 2005. — *147.* — С. 132–137.
48. *Монахова О. А.* Разложение инфинитезимального аффинного преобразования расслоения $(T_2^0(M_n), \nabla^H)$// Дифференциальная геометрия многообразий фигур/ Межвуз. тематич. сб. — Калининград, 2006. — *37.* — С. 108–112.
49. *Монахова О. А.* О размерности алгебры Ли инфинитезимальных аффинных преобразований пространства $(T_2^0(M_n), \nabla^H)$// Междунар. геом. семин. им. Г. Ф. Лаптева/ Сб. тр. — Пенза, 2007. — С. 68–73.
50. *Монахова О. А.* Структурная группа на расслоении дважды ковариантных тензоров// Изв. ПГПУ им. В. Г. Белинского — Пенза, 2010. — *22.* — С. 64–66.
51. *Монахова О. А.* О структурной группе на расслоении дважды ковариантных тензоров// Дифференциальная геометрия многообразий фигур/ Межвуз. тематич. сб. — Калининград, 2010. — *41.* — С. 98–102.
52. *Моргун М. В.* Некоторые свойства прямого произведения линейных связностей// Движения в обобщенных пространствах/ Межвуз. сб. науч. тр. — Пенза, 2005. — С. 84–90.
53. *Моргун М. В.* О размерностях алгебр Ли инфинитезимальных аффинных преобразований прямого произведения пространств аффинной связности// Дифференциальная геометрия многообразий фигур/ Межвуз. тематич. сб. — Калининград, 2006. — *37.* — С. 113–118.
54. *Моргун М. В.* Об алгебрах Ли аффинных векторных полей прямого произведения проективно-евклидового и плоского пространств аффинной связности// Междунар. геом. семин. им. Г. Ф. Лаптева/ Сб. тр. — Пенза, 2007. — С. 74–79.
55. *Моргун М. В.* О прямом произведении неплоских проективно-евклидовых пространств аффинной связности// Дифференциальная геометрия многообразий фигур/ Межвуз. тематич. сб. — Калининград, 2007. — *38.* — С. 103–106.
56. *Моргун М. В., Султанов А. Я.* Об алгебрах Ли векторных полей вещественных реализаций голоморфных линейных связностей// Изв. вузов. Мат. — 2008. — *4.* — С. 59–65.
57. *Никитин Н. Д.* Инфинитезимальные движения в пространствах нелинейной связности// Движения в обобщенных пространствах/ Межвуз. сб. науч. тр. — Пенза, 1999. — С. 93–101.
58. *Никитин Н. Д.* Инфинитезимальные проектируемые преобразования касательного расслоения с аффинной связностью// Движения в обобщенных пространствах/ Межвуз. сб. науч. тр. — Пенза, 2000. — С. 101–105.
59. *Никитин Н. Д.* Об алгебре Ли группы преобразований с одномерными орбитами// Междунар. геом. семин. им. Г. Ф. Лаптева/ Сб. тр. — Пенза, 2004. — С. 87–90.
60. *Никитина Я. В., Султанов А. Я.* Расслоение Вейля над тензорным произведением двух алгебр дуальных чисел// Изв. вузов. Поволжский регион. Физ.-мат. науки. — 2013. — *4 (28).* — С. 17—28.
61. *Опокина Н. А.* Касательные и тензорные расслоения типа $(2, 0)$ над группой Ли// Уч. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. — 2005. — *147*, № 1. — С. 138—147.
62. *Опокина Н. А.* Левая связность на тензорном расслоении типа $(2, 0)$ над группой Ли// Изв. вузов. Мат. — 2006. — *11.* — С. 77—82.

63. *Опокина Н. А.* Левоинвариантные метрики на тензорном расслоении типа $(2, 0)$ над группой Ли// Уч. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. — 2012. — *154*, № 4. — С. 146—155.
64. *Осьминина Н. А.* Об алгебре инфинитезимальных аффинных преобразований касательного расслоения второго порядка со связностью полного лифта// Движения в обобщенных пространствах/ Межвуз. сб. науч. тр. — Пенза, 1999. — С. 102–106.
65. *Осьминина Н. А.* О некоторых лифтах касательного расслоения второго порядка// Движения в обобщенных пространствах/ Межвуз. сб. науч. тр. — Пенза, 1999. — С. 107–120.
66. *Осьминина Н. А.* О каноническом разложении произвольного инфинитезимального проективного преобразования касательного расслоения второго порядка со связностью полного лифта// Движения в обобщенных пространствах/ Межвуз. сб. науч. тр. — Пенза, 2000. — С. 179–181.
67. *Осьминина Н. А.* Инфинитезимальные аффинные преобразования касательного расслоения второго порядка $T_2(M_n)$ с синектической связностью $\nabla^*(H_1, H_2)$ над проективно-евклидовым пространством// Движения в обобщенных пространствах/ Межвуз. сб. науч. тр. — Пенза, 2002. — С. 173–176.
68. *Осьминина Н. А.* О каноническом разложении произвольного инфинитезимального аффинного преобразования касательного расслоения второго порядка $T_2(M_n)$ с синектической связностью $\nabla^*(\nabla, H_1, H_2)$// Движения в обобщенных пространствах/ Межвуз. сб. науч. тр. — Пенза, 2002. — С. 176–180.
69. *Осьминина Н. А.* Инфинитезимальные аффинные преобразования касательного расслоения второго порядка $(T_2(M_n)$ с синектической связностью ∇^* над максимально подвижным пространством// Движения в обобщенных пространствах/ Межвуз. сб. науч. тр. — Пенза, 2002. — С. 181–182.
70. *Осьминина Н. А.* Инфинитезимальные преобразования касательного расслоения второго порядка $T_2(M_n)$ со связностью полного лифта ∇^C над проективно-евклидовым пространством// Движения в обобщенных пространствах/ Межвуз. сб. науч. тр. — Пенза, 2005. — С. 101–105.
71. *Салимов А. А.* Голоморфно-проективные преобразования связности на многообразиях со структурами, определяемыми алгебрами// Тр. геом. семин. Казан. ун-та. — 1984. — *16*. — С. 91–103.
72. *Салимов А. А.* Новый метод в теории лифтов тензорных полей в тензорное расслоение// Изв. вузов. Мат. — 1994. — *3*. — С. 69—75.
73. *Салимов А. А., Ченгиз Н.* Поднятие римановых метрик на тензорные расслоения// Изв. вузов. Мат. — 2003. — *11*. — С. 51—59.
74. *Смолякова Л. Б.* О представлениях голономии многообразий, моделируемых модулями над алгеброй Вейля// Тр. геом. семин. Казан. ун-та. — 2003. — *24*. — С. 129–138.
75. *Смолякова Л. Б.* Строение полных радиантных многообразий, моделируемых модулями над алгебрами Вейля// Изв. вузов. Мат. — 2004. — *5*. — С. 76–83.
76. *Султанов А. Я.* О лифтах тензорных полей из многообразия в расслоение линейных реперов// Движения в обобщенных пространствах/ Межвуз. сб. науч. тр. — Рязань, 1988. — С. 53–60.
77. *Султанов А. Я.* Некоторые лифты в расслоении линейных реперов// Движения в обобщенных пространствах/ Межвуз. сб. науч. тр. — Пенза, 1991. — С. 150–157.
78. *Султанов А. Я.* Расслоение линейных реперов над почти комплексными многообразиями// Геометрия обобщенных пространств/ Межвуз. сб. науч. тр. — Пенза, 1992. — С. 101–105.
79. *Султанов А. Я.* Инфинитезимальные проективные преобразования расслоений линейных реперов со связностью полного лифта// Международная конференция «Лобачевская и современная геометрия»/ Тез. докл. — Казань, 1992. — С. 96–97.
80. *Султанов А. Я.* Продолжения римановых метрик из дифференцируемого многообразия в его расслоение линейных реперов// Изв. вузов. Мат. — 1992. — *6*. — С. 93–102.
81. *Султанов А. Я.* Об абелевых подгруппах аффинной группы// Междунар. конф. по алгебре памяти М. И. Каргаполова. — Красноярск, 1993. — С. 323–324.
82. *Султанов А. Я.* Инфинитезимальные преобразования расслоения линейных реперов со связностью полного лифта// Тр. геом. семин. Казан. ун-та. — 1994. — *22*. — С. 78–88.
83. *Султанов А. Я.* О некоторых геометрических структурах в расслоении струй дифференцируемых отображений// Изв. вузов. Мат. — 1995. — *7*. — С. 51–64.
84. *Султанов А. Я.* Инфинитезимальные преобразования расслоения линейных реперов со связностью полного лифта// Изв. вузов. Мат. — 1996. — *2*. — С. 53–58.
85. *Султанов А. Я.* Разложение расслоения струй дифференцируемых отображений в сумму Уитни касательных расслоений// Тр. геом. семин. Казан. ун-та. — 1997. — *23*. — С. 139–148.
86. *Султанов А. Я.* Продолжения тензорных полей и связностей в расслоения Вейля// Изв.вузов. Мат. — 1999. — *9*. — С. 64–72.

87. *Султанов А. Я.* О линейных связностях в расслоениях Вейля// Инвариантные методы исследования на многообразиях структур геометрии, анализа и математической физики/ Мат. междунар. конф., посв. 90-летию со дня рождения Г. Ф. Лаптева. — М.: МГУ, 1999. — С. 48–60.
88. *Султанов А. Я.* О максимальной размерности групп аффинных преобразований расслоения Вейля с синектической связностью// Теория функций, ее приложения и смежные вопросы/ Мат. школы-конф., посв. 130-летию со дня рождения Д. Ф. Егорова. — Казань, 1999. — С. 215–216.
89. *Султанов А. Я.* Инфинитезимальные аффинные преобразования в расслоениях Вейля первого порядка со связностью горизонтального лифта// Движения в обобщенных пространствах/ Межвуз. сб. науч. тр. — Пенза, 1999. — С. 142–149.
90. *Султанов А. Я.* О линейных связностях над алгебрами// Тр. междунар. школы-семинара по геометрии и анализу памяти Н. В. Ефимова/ Абрау-Дюрсо, 5–11 сентября 2000 г. — Ростов-на-Дону, 2000. — С. 68.
91. *Султанов А. Я.* О максимальной размерности интранзитивных групп движений пространств аффинной связности// Движения в обобщенных пространствах/ Межвуз. сб. науч. тр. — Пенза, 2000. — С. 79–80.
92. *Султанов А. Я.* О разложении инфинитезимальных аффинных преобразований сумм Уитни касательных расслоений// Актуальные проблемы математики и механики/ Тр. мат. центра им. Н. И. Лобачевского. — Казань, 2000. — *5*. — С. 200–201.
93. *Султанов А. Я.* Об интранзитивных группах движений пространств аффинной связности// Дифференциальная геометрия многообразий фигур/ Межвуз. тематич. сб. — Калининград, 2001. — *32*. — С. 101–104.
94. *Султанов А. Я.* Об аффинных преобразованиях расслоений Вейля с синектической связностью// Мат. 4 междунар. конф. по геометрии и топологии. — Черкассы, 2001. — С. 99–100.
95. *Султанов А. Я.* Дифференцирования линейных алгебр специального типа// Движения в обобщенных пространствах/ Межвуз. сб. науч. тр. — Пенза, 2002. — С. 206–215.
96. *Султанов А. Я.* О группах движений пространств аффинной связности с кручением// Дифференциальная геометрия многообразий фигур/ Межвуз. тематич. сб. — Калининград, 2002. — *33*. — С. 100–103.
97. *Султанов А. Я.* Аффинные преобразования многообразий с линейной связностью и автоморфизмы линейных алгебр// Изв. вузов. Мат. — 2003. — *11*. — С. 77–81.
98. *Султанов А. Я.* Об инфинитезимальных автоморфизмах расслоений// Мат. 5 междунар. конф. по геометрии и топологии памяти А. В. Погорелова. — Черкассы, 2003. — С. 137–138.
99. *Султанов А. Я.* О размерности алгебры дифференцирований линейной алгебры с единицей// Междунар. конф. по геометрии и анализу/ Сб. тр. — Пенза, 2003. — С. 110–112.
100. *Султанов А. Я., Султанова Н. С.* Об аффинных автоморфизмах локально тривиальных расслоений// Дифференциальная геометрия многообразий фигур/ Межвуз. тематич. сб. — Калининград, 2003. — *34*. — С. 136–140.
101. *Султанов А. Я.* О сумме Уитни расслоений Вейля// Тр. междунар. школы-семинара по геометрии и анализу памяти Н. В. Ефимова/ Абрау-Дюрсо, 5–11 сентября 2004. — Ростов-на-Дону, 2004. — С. 57.
102. *Султанов А. Я., Султанова Н. С.* Группы автоморфизмов алгебр Вейля и их действия на расслоениях Вейля// Мат. Междунар. науч. конф. «Актуальные проблемы математики и механики», посв. 200-летию КГУ и 70-летию НИИ математики и механики им. Н. Г. Чеботарева КГУ/ Тр. мат. центра им. Н. И. Лобачевского. — Казань, 2004. — *25*. — С. 252–253.
103. *Султанов А. Я.* Действия групп автоморфизмов алгебр Вейля на расслоениях Вейля// Уч. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. — Казань, 2005. — *147*, кн. 1. — С. 159–172.
104. *Султанов А. Я.* О дифференцированиях свободных алгебр Вейля и их представления на расслоениях Вейля// Междунар. геом. семин. им. Г. Ф. Лаптева/ Сб. тр. — Пенза, 2004. — С. 128–137.
105. *Султанов А. Я.* Горизонтальные лифты линейных связностей на расслоениях Вейля второго порядка// Дифференциальная геометрия многообразий фигур/ Межвуз. тематич. сб. — Калининград, 2005. — Вып. 36. — С. 133–140.
106. *Султанов А. Я.* О дифференцированиях линейных алгебр// Движения в обобщенных пространствах/ Межвуз. сб. науч. тр. — Пенза, 2005. — С. 111–136.
107. *Султанов А. Я.* Голоморфные аффинные векторные поля на расслоениях Вейля// Тр. междунар. школы-семинара по геометрии и анализу памяти Н. В. Ефимова/ Абрау-Дюрсо, 5–11 сентября 2006). — Ростов-на-Дону, 2006. — С. 90.

108. *Султанов А. Я.* О размерностях алгебр Ли голоморфных аффинных векторных полей пространств аффинной связности над алгеброй// Дифференциальная геометрия многообразий фигур/ Межвуз. тематич. сб. — Калининград, 2006. — Вып. 37. — С. 164–168.
109. *Султанов А. Я.* Об алгебре Ли голоморфных аффинных векторных полей расслоения Вейля со связностью естественного лифта// Тез. докл. Междунар. конф. «Геометрия в Одессе–2006». — Одесса, 2006. — С. 152.
110. *Султанов А. Я.* Об алгебрах Вейля// Тез. докл. науч. конф. «Современные вопросы геометрии и механики деформируемого тела» (19–20 октября 2006 г.). — Чебоксары, 2006. — С. 38–39.
111. *Султанов А. Я.* Об алгебрах Вейля с дополнительными условиями// Вестн. Чуваш. гос. пед. ун-та им. Н. Я. Яковлева. — 2006. — № 5. — С. 172–174.
112. *Султанов А. Я.* О вещественных размерностях алгебр Ли голоморфных аффинных векторных полей// Изв. вузов. Мат. — 2007. — *4*. — С. 54–67.
113. *Султанов А. Я.* О вещественной реализации голоморфной линейной связности над алгеброй// Дифференциальная геометрия многообразий фигур/ Межвуз. тематич. сб. — Калининград, 2007. — Вып. 38. — С. 136–139.
114. *Султанов А. Я., Мошин А. Ю.* О сумме Уитни расслоений Вейля// Тр. Ин-та сист. анал. РАН. — 2007. — *31 (1)*. — С. 215–223.
115. *Султанов А. Я., Мухин А. В.* Разложение расслоений Вейля в сумму Уитни// Тр. Ин-та сист. анал. РАН. — 2007. — *31 (1)*. — С. 224–229.
116. *Султанов А. Я.* Линейные связности в модуле дифференцирований алгебры// Междунар. геом. семин. им. Г. Ф. Лаптева/ Сб. тр. — Пенза, 2007. — С. 78–109.
117. *Султанов А. Я.* Об алгебрах Ли голоморфных аффинных векторных полей на расслоениях Вейля// Уч. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. — Казань, 2009. — *151*, № 4. — С. 171-177.
118. *Султанов А. Я.* Дифференцирования линейных алгебр и линейные связности// Итоги науки и техн. Совр. мат. прилож. Тематич. обзоры. — М.: ВИНИТИ, 2009. — *123*. — С. 141–210.
119. *Султанов А. Я.* О группах автоморфизмов специальных линейных алгебр// Изв. ПГПУ им. В. Г. Белинского. — Пенза, 2010. — *18 (22)*. — С. 70–74.
120. *Султанов А. Я.* Об алгебрах дифференцирований максимальной размерности линейных алгебр// Изв. ПГПУ им. В. Г. Белинского. — Пенза, 2010. — *18 (22)*. — С. 75–77.
121. *Султанов А. Я.* Об алгебрах Ли голоморфных аффинных векторных полей голоморфных линейных связностей с симметричным тензорным полем Риччи// Вестн. ТТГПУ. — Казань, 2011. — *1 (23)*. — С. 41–45.
122. *Султанов А. Я.* Об аффинных дифференцированиях в модуле дифференцирований алгебры многочленов// Фундаментальные и прикладные проблемы науки. Том 1/ Мат. VII Междунар. симп. — М.: РАН, 2012. — С. 16–22.
123. *Султанов А. Я.* Голоморфные аффинные векторные поля на расслоениях Вейля// Мат. заметки. — 2012. — *91*, № 6. — С. 896–899.
124. *Султанов А. Я., Султанова Г. А.* Оценка размерностей алгебры Ли инфинитезимальных аффинных преобразований касательного расслоения $T(M)$ со связностью полного лифта// Уч. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. — 2014. — *156*, № 2. — С. 43–54.
125. *Султанова Г. А.* Некоторые лифты тензорных полей типа $(1, r)$ с базы в его касательное расслоение// Изв. вузов. Поволж. регион. Физ.-мат. науки. — 2014. — *1 (29)*. — С. 54–64.
126. *Султанова Г. А.* О группах движений в касательных расслоениях со связностью полного лифта над двумерными максимально подвижными пространствами аффинной связности// Дифференциальная геометрия многообразий фигур/ Межвуз. тематич. сб. — Калининград, 2015. — Вып. 46. — С. 153–161.
127. *Султанова Г. А.* Об оценке размерностей алгебр Ли инфинитезимальных автоморфизмов касательных расслоений со связностью полного лифта над непроективно-евклидовой базой// Дифференциальная геометрия многообразий фигур/ Межвуз. тематич. сб. — Калининград, 2016. — Вып. 47. — С. 146–153.
128. *Султанова Г. А.* О размерностях алгебр Ли автоморфизмов в касательных расслоениях со связностью полного лифта над проективно-евклидовой базой// Султанова// Дальневост. мат. ж. — 2016. — *16*, № 1. — С. 83–95.
129. *Султанова Н. С.* Инфинитезимальные аффинные преобразования кокасательного расслоения со связностью горизонтального лифта// Движения в обобщенных пространствах/ Межвуз. сб. науч. тр. — Пенза, 1999. — С. 150–156.

130. *Султанова Н. С.* Об аффинных преобразованиях кокасательных расслоений над максимально подвижными пространствами аффинной связности// Движения в обобщенных пространствах/ Межвуз. сб. науч. тр. — Пенза, 2000. — С. 162–167.
131. *Султанова Н. С.* Естественные продолжения диффеоморфизмов с гладкого многообразия в его кокасательное расслоение// Движения в обобщенных пространствах/ Межвуз. сб. науч. тр. — Пенза, 2002. — С. 215–220.
132. *Султанова Н. С.* О размерности полной группы движений кокасательного расслоения со связностью горизонтального лифта// Дифференциальная геометрия многообразий фигур/ Межвуз. тематич. сб. — Калининград, 2002. — Вып. 33. — С. 104–107.
133. *Шапуков Б. Н.* Структура тензорных расслоений// Изв. вузов. Мат. — 1979. — *5.* — С. 63–73.
134. *Шапуков Б. Н.* Связности на дифференцируемом расслоении// Тр. геом. семин. Казан. ун-та. — 1980. — № 12. — С. 97–111.
135. *Шапуков Б. Н.* Структура тензорных расслоений, II// Изв. вузов. Мат. — 1981. — *9.* — С. 56–63.
136. *Шапуков Б. Н.* Связности на дифференцируемых расслоениях// Итоги науки и техн. Пробл. геом. — М.: ВИНИТИ, 1983. — *15.* — С. 61–93.
137. *Шапуков Б. Н.* Структуры на расслоенных многообразиях и вопросы редукции/ Дисс. на соиск. уч. степ. докт. физ.-мат. наук. — Казань, 1990.
138. *Шапуков Б. Н.* Производная Ли на расслоенных многообразиях// Итоги науки и техн. Совр. мат. прилож. Тематич. обзоры. — М.: ВИНИТИ, 2002. — *73.* — С. 103–134.
139. *Широков А. П.* Структуры на дифференцируемых многообразиях// Итоги науки и техн. Алгебра. Топология. Геометрия, 1967. — М.:ВИНИТИ, 1969. — С. 127–188.
140. *Широков А. П.* Структуры на дифференцируемых многообразиях// Итоги науки и техн. Алгебра. Топология. Геометрия. — М.: ВИНИТИ, 1974. — *11.* — С. 153–208.
141. *Широков А. П.* Замечание о структурах в касательных расслоениях// Труды геометр. семин. ВИНИТИ. — 1974. — *5.* — С. 311–318.
142. *Широков А. П.* Геометрия касательных расслоений и пространства над алгебрами// Итоги науки и техн. Пробл. геом. — М.: ВИНИТИ, 1981. — *12.* — С. 61–96.
143. *Шурыгин В. В.* Расслоения струй как многообразия над алгебрами// Итоги науки и техн. Пробл. геом. — М.: ВИНИТИ, 1987. — *19.* — С. 3–22.
144. *Шурыгин В. В.* Гладкие многообразия над локальными алгебрами и многообразия Вейля// Итоги науки и техн. Совр. мат. прилож. Тематич. обзоры. — М.: ВИНИТИ, 2002. — *73.* — С. 162–236.
145. *Шурыгин В. В.* Некоторые аспекты теории многообразий над алгебрами и расслоений Вейля// Итоги науки и техн. Совр. мат. прилож. Тематич. обзоры. — М.: ВИНИТИ, 2009. — *123.* — С. 211–255.
146. *Шурыгин В. В.* (мл.) Лифты структур Пуассона—Нейенхейса в расслоения Вейля// Уч. зап. Казан. гос. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. — 2009. — *151*, № 4. — С. 203–214.
147. *Шустова Е. П.* Полный лифт связности и метрики в касательное расслоение порядка k// Движения в обобщенных пространствах/ Межвуз. сб. науч. тр. — Пенза, 2002. — С. 228–233.
148. *Atanasiu G., Purcaru M.* About a class of metrical N-linear connections on the 2-tangent bundle// Filomat. — 2007. — *21*, № 1. — С. 113–128.
149. *Atanasiu G.* N-Linear connections and JN-linear connections on second-order tangent bundle T_2// Acta Univ. Apulensis Math. Inform. — 2006. — No. 11. — С. 35–38.
150. *Bushueva G. N., Shurygin V. V.* On the higher order geometry of Weil bundles over smooth manifolds and over parameter depended manifolds// Lobachevskii J. Math. — 2005. — *18.* — С. 53–105.
151. *Dębecki J.*, Linear liftings of symmetric tensor fields of type $(1, 2)$ to Weil bundles// Ann. Polon. Math. — 2007. — *92*, № 1. — С. 13–27.
152. *Dębecki J.*, Linear natural liftings of forms to Weil bundles with Weil algebras D^r_k// Note Mat. — 2008. — *28*, № 2. — С. 99–105.
153. *Dębecki J.* Affine liftings of torsion-free connections to Weil bundles// Colloq. Math. — 2009. — *114*, № 1. — С. 1–8.
154. *Dębecki J.* Linear liftings of skew symmetric tensor fields of type $(1, 2)$ to Weil bundles// Czechoslovak. Math. J. — 2010. — *60 (135)*, № 4. — С. 933–943.
155. *Gezer A., Salimov A.* Diagonal lifts of tensor fields of type $(1, 1)$ on cross-sections in tensor bundles and its applications// J. Korean Math. Soc. — 2008. — *45*, № 2. — С. 367–376.
156. *Gezer A., Salimov A. A.* Almost complex structures on the tensor bundles// Arab. J. Sci. Eng. Sec. A Sci. — 2008. — *33*, № 2. — С. 283–296.
157. *Gezer A., Akbulut K., Salimov A. A.* Infinitesimal holomorphically projective transformations on tangent bundles with respect to the synectic metric tensor// JP J. Geom. Topol. — 2009. — *9*, № 3. — С. 225–237.

158. *Gezer A., Salimov A. A.* Lifts of $(1,1)$-tensor fields on pure cross-sections of (p,q)-tensor bundles// TWMS J. Pure Appl. Math. — 2011. — *2*, № 2. — С. 194–202.
159. *Gezer A., Altunbas M.* Some results on a cross-section in the tensor bundle// Hacet. J. Math. Stat. — 2014. — *43*, № 3. — С. 391–397.
160. *Gezer A., Altunbas M.* On the $(1,1)$-tensor bundle with Cheeger–Gromoll type metric// Proc. Indian Acad. Sci. Math. Sci. — 2015. — *125*, № 4. — С. 569–576.
161. *Kolář I.* Affine structures on Weil bundles// Nagoya Math. J. — 2000. — *158*. — С. 99–106.
162. *Kolář I.* Weil bundles as generalized jet spaces// Handbook of Global Analysis. — Amsterdam: Elsevier (2008). — *1214*. — С. 625–664.
163. *Kolář I.* On the natural transformations of Weil bundles// Arch. Math. (Brno). — 2013. — *49*, № 5. — С. 303–308.
164. *Kolář I.* On the geometry of Weil bundles// Differ. Geom. Appl. — 2014. — *35*, suppl. — С. 136–142.
165. *Kolář I.* On the geometry of vertical Weil bundles// Arch. Math. (Brno). — 2014. — *50*, № 5. — С. 317–322.
166. *Miron R., Atanasiu G.* Differential geometry of the k-osculator bundle// Rev. Roumaine Math. Pures Appl. — 1996. — *41*, № 3-4. — С. 205–236.
167. *Mok Kam-Ping.* Lifts of vector fields to tensor bundles// Geom. Dedic. — 1979. — *8*, № 1. — С. 61–67.
168. *Morimoto A.* Prolongation of connections to tangent bundles of near points// J. Differ. Geom. — 1976. — *11*, № 4. — С. 479–498.
169. *Salimov A. A., Gezer A., Akbulut K.* Geodesics of Sasakian metrics on tensor bundles// Mediterr. J. Math. — 2009. — , № 2. — С. 135–147.
170. *Salimov A., Gezer A.* On the geometry of the $(1,1)$-tensor bundle with Sasaki type metric// Chin. Ann. Math. Ser. B. — 2011. — *32*, № 3. — С. 369–386.
171. *Salimov A., Gezer A., Aslanc S.* On almost complex structures in the cotangent bundle// Turkish J. Math. — 2011. — *35*, № 3. — С. 487–492.
172. *Salimov A., Gezer A., Iscan M.* On para-Kaehler–Norden structures on the tangent bundles// Ann. Polon. Math. — 2012. — *103*, № 3. — С. 247–261.
173. *Sultanov A. Ya.* Derivations of linear algebras and linear connections// J. Math. Sci. — 2010. — *169*, № 3. — С. 362–412.
174. *Yano K.* Tangent and cotangent bundles. — New York: Marcel Dekker, 1973.

А. Я. Султанов
Педагогический институт им. В. Г. Белинского
Пензенского государственного университета
E-mail: `sultanovaya@rambler.ru`

О. А. Монахова
Педагогический институт им. В. Г. Белинского
Пензенского государственного университета
E-mail: `monakh@penza.com.ru`

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 146 (2018). С. 89–102

УДК 514.763.62

МЕТРИЧЕСКИ-АФФИННЫЕ ПРОСТРАНСТВА

© 2018 г. В. И. ПАНЬЖЕНСКИЙ, С. Е. СТЕПАНОВ, М. В. СОРОКИНА

Аннотация. Настоящая работа посвящена некоторым направлениям исследований специальных классов метрически-аффинных пространств.

Ключевые слова: метрика, связность, автоморфизм, группа Ли.

AMS Subject Classification: 53B15, 53B20

СОДЕРЖАНИЕ

Введение 89
1. Автоморфизмы метрически-аффинных пространств 90
2. Пространства Вейля—Картана 93
3. Пространства Римана—Картана 95
Список литературы 101

Введение

Настоящая работа посвящена некоторым направлениям исследований специальных классов метрически-аффинных пространств и является естественным продолжением обзорной статьи [20].

Гладкое n-мерное ($n \geqslant 2$) многообразие M называется *метрически-аффинным* (или *аффинно-метрическим*) *пространством*, если на M задана (псевдо)риманова метрика g и линейная связность ∇. Если ∇ является метрической связностью без кручения, то M — (псевдо)риманово пространство. В рамках римановой геометрии в общей теории относительности Эйнштейна было геометризовано гравитационное поле. Затем была поставлена задача геометризации единой теории гравитации и электромагнетизма. Попытки решения этой задачи привели к возникновению новых неримановых геометрий.

Первую такую геометрию предложил Г. Вейль. В 1918 г. вышла в свет его знаменитая монография «Пространство. Время. Материя» (см. [2]). В геометрии Вейля в пространственно-временном многообразии M, наделенном псевдоримановой метрикой лоренцевой сигнатуры, связность Леви-Чивита заменяется более общей линейной связностью без кручения. При параллельном перенесении векторов в этой связности изменяются длины, но не меняются углы между векторами. Это означает, что выполняется следующий постулат Вейля:

$$\nabla_Z g(X,Y) = 2\omega(Z)g(X,Y)$$

для любых векторных полей X, Y, Z на M, а дифференциальная 1-форма ω (ковектор) отождествляется с векторным потенциалом электромагнитного поля. Кроме того, было замечено важное свойство уравнений Максвелла для безмассовых частиц: их инвариантность относительно конформных (масштабных) преобразований: $g \to \lambda^2 g = \bar{g}$. Если потребовать, чтобы постулат Вейля имел место и для метрического тензора $\bar{g}$, то ковектор ω должен преобразовываться по закону $\bar{\omega} = \omega + \operatorname{grad} \ln \lambda$, что соответствует калибровочному преобразованию в электродинамике.

Таким образом, в теории Вейля предполагается, что гравитация определяет метрику, а электромагнитное поле является ответственным за изменение длин векторов при переходе от одной точки к другой.

Другой вариант геометризации гравитации и электромагнетизма был предложен Э. Картаном в 1922 г. (см. обзор [20]). В геометрии Картана связность Леви-Чивита заменяется линейной метрической связностью с кручением. В дальнейшем этот подход привел к созданию теории Эйнштейна—Картана. В этой теории предполагается, что связность Картана является полусимметрической, а след ее тензора кручения определяет векторный потенциал электромагнитного поля. Многообразие, наделенное (псевдо-)римановой метрикой и метрической связностью с кручением называется *пространством Римана—Картана*. Таким образом, пространства Вейля и Римана—Картана являются первыми основополагающими примерами метрически-аффинных пространств.

Кроме того, появившиеся в последние десятилетия наблюдаемые данные в космологии, подтверждающие существование темной материи, темной энергии, ускоренное расширение Вселенной предполагают более общую геометрическую структуру пространства-времени. В частности, было установлено, что распределение и движение материи не определяют однозначно геометрию пространства-времени, а калибровочный подход, предложенный Вейлем, может быть успешно распространен и на гравитацию. При этом в качестве основополагающей геометрической структуры пространства-времени может выступать пространство Вейля—Картана, в котором связность подчиняется постулату Вейля и имеет кручение (см., например, [1]).

Многочисленные варианты геометризации физических теорий, объединяющих различные виды взаимодействий, с необходимостью приводят к привлечению более общих дифференциально-геометрических структур; при этом в качестве модельных используются и многомерные пространства с положительно определенной метрикой.

Еще одним примером метрически-аффинных пространств является статистичекое многообразие. Отправным пунктом для «геометростатистики» послужила статья С. Рао [25]. В ней на основе фишеровской информационной матрицы был определен метрический тензор на многообразии распределений вероятностей, который превратил последнее в риманово многообразие. Н. Н. Ченцов в фундаментальной монографии [14] построил однопараметрическое семейство связностей ${}^{\gamma}\nabla$ на многообразии распределения вероятностей и показал, что экспоненциальные семейства кривых являются геодезическими относительно этих связностей. В развитии теории С. Лауритцен обобщил понятие риманова многообразия распределений вероятностей с однопараметрическим семейством связностей Ченцова ${}^{\gamma}\nabla$, дав определение абстрактного статистического многообразия как гладкого многообразия M, наделенного римановой метрикой g и линейной связностью без кручения, удовлетворяющей условию Кодацци

$$\nabla_Z g(X,Y) = \nabla_X g(Z,Y)$$

для любых векторных полей X, Y, Z на M (см. [17]).

1. Автоморфизмы метрически-аффинных пространств

1.1. Диффеоморфизм $\varphi : M \to M$ называется *автоморфизмом метрически-аффинного пространства* $(M, g, \widehat{\nabla})$, если он оставляет инвариантными метрику g и связность $\widehat{\nabla}$. Так как $\widehat{\nabla} = \nabla + T$, где ∇ — связность Леви-Чивита метрики g, а T — ее тензор деформации, и из инвариантности g следует ивариантность ∇, то связность $\widehat{\nabla}$ инвариантна тогда и только тогда, когда инвариантен тензор деформации T. Таким образом, множество всех автоморфизмов n-мерного метрически-аффинного пространства либо совпадает с группой Ли изометрий риманова пространства (M, g), либо является ее подгруппой Ли, оставляющей инвариантным тензор деформации T и, следовательно, имеет размерность $r \leqslant n(n+1)/2$.

Теорема 1.1. *Если g — положительно определенная метрика, то не существует n-мерных ($n \neq 4$) метрически-аффинных пространств, группа автоморфизмов которых имеет размерность r, где $n(n-1)/2 + 1 < r < n(n+1)/2$.*

Это утверждение следует из известного результата Монтгомери и Самельсона (см. [21]) о том, что ортогональная группа $O(n)$, $n \neq 4$, не содержит отличных от $SO(n)$ собственных замкнутых подгрупп размерности $r' > (n-1)(n-2)/2$. Действительно, так как группа изометрий размерности $r \geqslant n(n-1)/2+1$ необходимо транзитивна, а ее группа изотропий произвольной точки состоит из ортогональных преобразований, то не существует подгрупп Ли группы изометрий размерности $r = r' + n$, где $n(n-1)/2 + 1 < r < n(n+1)/2$.

Далее, естественно, возникает вопрос о существовании n-мерных метрически-аффинных пространств, отличных от римановых, допускающих группы автоморфизмов максимальной размерности $n(n+1)/2$. Для решения этого вопроса необходимо исследовать уравнения инвариантности метрического тензора g и тензора деформации T. В локальных координатах (x^i) эти уравнения примут следующий вид:

$$\xi^p \partial_p g_{ij} + \partial_i \xi^p g_{pj} + \partial_j \xi^p g_{ip} = 0, \tag{1.1}$$

$$\xi^p \partial_p T_{ijk} + \partial_i \xi^p T_{pjk} + \partial_j \xi^p T_{ipk} + \partial_k \xi^p T_{ijp} = 0, \tag{1.2}$$

где ξ^i — компоненты векторного поля X, определяющего однопараметрическую подгруппу $\varphi_t = \exp tX$ группы автоморфизмов, g_{ij} — компоненты метрического тензора g, $T_{ijk} = T_{ij}{}^p g_{kp}$ — ковариантные компоненты тензора деформации T, $\partial_i = \partial/\partial x^i$, $i, j, k, \dots = \overline{1, n}$.

Уравнения (1.1) и (1.2) запишем в ковариантных производных:

$$\xi_{ij} + \xi_{ji} = 0, \tag{1.3}$$

$$\xi^p \nabla_p T_{ijk} + \nabla_i \xi^p T_{pjk} + \nabla_j \xi^p T_{ipk} + \nabla_k \xi^p T_{ijp} = 0, \tag{1.4}$$

где $\xi_{ij} = \xi_i^p g_{pj}$, $\xi_i^j = \nabla_i \xi^j$. Уравнения (1.4) перепишем в виде

$$\xi^p \nabla_p T_{ijk} + \xi_{rq} \Big\{ \delta_i^r g^{qp} T_{pjk} + \delta_j^r g^{qp} T_{ipk} + \delta_k^r g^{qp} T_{ijp} \Big\} = 0, \tag{1.5}$$

где δ_i^k — символы Кронекера (единичная матрица), g^{ij} — контравариантные компоненты метрического тензора g: $g_{ip} g^{pj} = \delta_i^j$.

Пусть метрически-аффинное пространство $(M, g, \widehat{\nabla})$ допускает группу автоморфизмов максимальной размерности $r = n(n+1)/2$. Тогда уравнения (1.5) должны обращаться в тождество при любых ξ^p и ξ_{rq}, удовлетворяющих уравнениям (1.3). Поэтому из (1.5) вытекают уравнения

$$\nabla_p T_{ijk} = 0, \tag{1.6}$$

$$\delta_i^r g^{qp} T_{pjk} + \delta_j^r g^{qp} T_{ipk} + \delta_k^r g^{qp} T_{ijp} - \delta_i^q g^{rp} T_{pjk} - \delta_j^q g^{rp} T_{ipk} - \delta_k^q g^{rp} T_{ijp} = 0. \tag{1.7}$$

Перепишем уравнения (1.7) в виде

$$\delta_i^r T^q{}_{jk} + \delta_j^r T_i{}^q{}_k + \delta_k^r T_{ij}{}^q - \delta_i^q T^r{}_{jk} - \delta_j^q T_i{}^r{}_k - \delta_k^q T_{ij}{}^r = 0. \tag{1.8}$$

1.2. Предположим, что связность $\widehat{\nabla}$ не имеет кручения. Тогда компоненты тензора деформации симметричны по нижним индексам, т.е. $T_{ij}^k = T_{ji}^k$. Свернув в (1.8) индексы i и r и учитывая указанную симметрию, получим

$$n T^q{}_{jk} + T_k{}^q{}_j - \delta_j^q T_s{}^s{}_k - \delta_k^q T_{sj}{}^s = 0. \tag{1.9}$$

Пусть теперь $\widehat{\nabla}$ — связность Вейля. Постулат Вейля в локальных координатах имеет вид

$$\widehat{\nabla}_k g_{ij} = 2\omega_k g_{ij}, \tag{1.10}$$

откуда

$$T_{ij}{}^k = \omega^k g_{ij} - \omega_i \delta_j^k - \omega_j \delta_i^k, \quad \omega^k = \omega_p g^{kp}, \tag{1.11}$$

$$T_{ijk} = \omega_k g_{ij} - \omega_i g_{jk} - \omega_j g_{ik}. \tag{1.12}$$

Подставляя $T^q{}_{jk}$, $T_k{}^q{}_j$, $T_s{}^s{}_k$, $T_{sj}{}^s$ в (1.9), получим

$$(n-1)\omega^q g_{kj} - \omega_k \delta_j^q + \omega_j \delta_k^q = 0. \tag{1.13}$$

Свернув в (1.13) индексы k и q, находим, что $2(n-1)\omega_j = 0$, т.е. $\omega_j = 0$, и пространство Вейля является римановым. Таким образом справедлива следующая теорема.

Теорема 1.2. *Не существует n-мерных пространств Вейля, допускающих группу автоморфизмов максимальной размерности $n(n+1)/2$.*

Из теорем 1.1 и 1.2 следует, что *если g — положительно определенная метрика, то размерность группы Ли автоморфизмов n-мерного ($n \neq 4$) пространства Вейля не превосходит $n(n-1)/2+1$.*

1.3. Пусть теперь связность $\widehat{\nabla}$ удовлетворяет условию Кодацци, т.е. метрически-аффинное пространство является статистическим многообразием. В этом случае ковариантные компоненты T_{ijk} тензора деформации симметричны по всем индексам. Опустив в (1.9) верхний индекс, получим

$$(n+1)T_{ijk} - g_{ij}T^s_{sk} - g_{ik}T^s_{sj} = 0. \tag{1.14}$$

Циклируя (1.14) и складывая полученные равенства, находим

$$(n+1)T_{ijk} - 2g_{ij}T^s_{sk} = 0 \quad\Longleftrightarrow\quad (n+1)T^i_{jk} - 2\delta^i_j T^s_{sk} = 0.$$

Свернув i иj, получим $(1-n)T^s_{sk} = 0$ и, следовательно, $T_{ijk} = 0$, т.е. метрически-аффинное многообразие является римановым. Поэтому справедлива следующая теорема.

Теорема 1.3. *Не существует n-мерных статистических многообразий, допускающих группу автоморфизмов максимальной размерности $n(n+1)/2$.*

Из теорем 1.1 и 1.3 следует, что *размерность группы Ли автоморфизмов n-мерного ($n \neq 4$) статистического многообразия не превосходит $n(n-1)/2+1$.*

1.4. Пусть связность $\widehat{\nabla}$ метрически-аффинного пространства имеет кручение $S \neq 0$. Тогда уравнениям (1.8) должна удовлетворять кососимметрическая часть $\breve{T}$ тензора деформации T. Учитывая косую симметрию, уравнения (1.8) для $\breve{T}$ запишем в следующем виде:

$$\delta^r_i \breve{T}^q{}_{jk} - \delta^r_j \breve{T}^q{}_{ik} + \delta^r_k \breve{T}_{ij}{}^q - \delta^q_i \breve{T}^r{}_{jk} + \delta^q_j \breve{T}^r{}_{ik} - \delta^q_k \breve{T}_{ij}{}^r = 0. \tag{1.15}$$

Свернув в (1.15) индексы r и k, получим

$$\breve{T}^q{}_{ji} - \breve{T}^q{}_{ij} + n\breve{T}_{ji}{}^q - \delta^q_i \breve{T}^s{}_{js} + \delta^q_j \breve{T}^s{}_{is} - \breve{T}_{ij}{}^q = 0$$

или

$$(n-1)\breve{T}_{ij}{}^q + \breve{T}^q{}_{ji} - \breve{T}^q{}_{ij} - \delta^q_i \breve{T}^s{}_{js} + \delta^q_j \breve{T}^s{}_{is} = 0. \tag{1.16}$$

Опустив в (1.16) верхний индекс, находим

$$(n-1)\breve{T}_{ijk} + \breve{T}_{kji} - \breve{T}_{kij} - g_{ik}\breve{T}^s{}_{js} + g_{jk}\breve{T}^s_{is} = 0. \tag{1.17}$$

Циклируя в (1.17), индексы i, j, k, будем иметь еще два равенства:

$$(n-1)\breve{T}_{jki} + \breve{T}_{ikj} - \breve{T}_{ijk} - g_{ji}\breve{T}^s{}_{ks} + g_{ki}\breve{T}^s_{js} = 0, \tag{1.18}$$

$$(n-1)\breve{T}_{kij} + \breve{T}_{jik} - \breve{T}_{jki} - g_{kj}\breve{T}^s{}_{is} + g_{ij}\breve{T}^s{}_{ks} = 0. \tag{1.19}$$

Складывая (1.17), (1.18) и (1.19), учитывая косую симметрию по первым двум индексам, получаем

$$(n-3)(\breve{T}_{ijk} + \breve{T}_{jki} + \breve{T}_{kij}) = 0 \tag{1.20}$$

и, если $n \neq 3$,

$$\breve{T}_{ijk} + \breve{T}_{jki} + \breve{T}_{kij} = 0. \tag{1.21}$$

Выразив из (1.21) T_{kij} и подставив в (1.17), получим

$$n\breve{T}_{ijk} - g_{ik}\breve{T}^s{}_{js} + g_{jk}\breve{T}^s{}_{is} = 0 \tag{1.22}$$

или, умножив на g^{il},

$$n\breve{T}^l{}_{jk} - \delta^l_k \breve{T}^s{}_{js} + g^{il}g_{jk}\breve{T}^s{}_{is} = 0. \tag{1.23}$$

Свернув индексы l и k, будем иметь

$$n\breve{T}^s{}_{js} - n\breve{T}^s{}_{js} + \breve{T}^s{}_{js} = 0,$$

т.е. $\breve{T}^s{}_{js} = 0$; следовательно, согласно (1.22), $\breve{T}_{ijk} = 0$ и, значит, $S = 0$.

Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 1.4. *Не существует n-мерных ($n \neq 3$) метрически-аффинных пространств с кручением, допускающих группу автоморфизмов максимальной размерности $n(n+1)/2$.*

Из теорем 1.1 и 1.4 следует, что *если g — положительно определенная метрика, то размерность группы Ли автоморфизмов n-мерного ($n \neq 3, 4$) метрически-аффинного пространства с кручением не превосходит $n(n-1)/2 + 1$.*

Если $n = 3$, то непосредственной проверкой убеждаемся, что уравнения (1.7) выполняются тождественно тогда и только тогда, когда тензор деформации T_{ijk} кососимметричен по всем индексам, т.е. T является внешней дифференциальной 3-формой, и метрически-аффинное пространство является пространством Римана—Картана. В этом случае

$$T = s\sqrt{\det\|g_{ij}\|}dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3, \tag{1.24}$$

где g_{ij} — компоненты метрического тензора (псевдо)риманова пространства постоянной секционной кривизны k, а постоянная s определяет кручение пространства.

2. Пространства Вейля—Картана

2.1. Метрически-аффинное пространство $(M, g, \bar{\nabla})$ называется *пространством Вейля—Картана*, если тензор деформации T является суммой тензора Вейля W и тензора Картана C, т.е.

$$T_{ij}{}^k = W_{ij}{}^k + C_{ij}{}^k, \quad W \neq 0,\ C \neq 0, \tag{2.1}$$

где

$$W_{ij}{}^k = \omega^k g_{ij} - \omega_i \delta^k_j - \omega_j \delta^k_i, \quad \omega^k = \omega_p g^{kp}, \tag{2.2}$$

$$C_{ijk} + C_{ikj} = 0, \quad C_{ijk} = C_{ij}{}^p g_{kp}. \tag{2.3}$$

Тензор кручения S связности Вейля—Картана определяется тензором Картана и наоборот:

$$S_{ij}{}^k = C_{ij}{}^k - C_{ji}{}^k, \tag{2.4}$$

$$C_{ij}{}^k = \frac{1}{2}\left(S_{ij}{}^k + S^k{}_{ij} - S_j{}^k{}_i\right). \tag{2.5}$$

Так как связности Леви-Чивита и Картана являются метрическими, то постулат Вейля выполняется и для связности Вейля—Картана и, следовательно, при параллельном перенесении сохраняются углы между векторами.

2.2. Диффеомеорфизм $\varphi : M \to M$ называется *автоморфизмом пространства Вейля—Картана*, если он оставляет инвариантными метрику и связность. Так как из инвариантности метрики следует инвариантность связности Леви-Чивита, а из инвариантности связности Вейля—Картана следует инвариантность ее тензора кручения, то φ является автоморфизмом пространства Вейля—Картана тогда и только тогда, когда φ оставляет инвариантыми и тензор Вейля W и тензор Картана C. Имеет место следующая теорема.

Теорема 2.1. *Размерность группы Ли автоморфизмов n-мерного пространства Вейля—Картана не превосходит $n(n-1)/2 + 1$.*

Доказательство. Пусть g — (псевдо)риманова метрика произвольной сигнатуры пространства Вейля—Картана, $\mathbb{G}$ — его r-мерная группа автоморфизмов. Стационарная подгруппа $\mathbb{G}_0$ точки $x_0 \in M$ индуцирует группу изотропии $\mathbb{G}'_0$ в касательном пространстве $\mathbb{E} = T_{x_0}M$. Векторное пространство $\mathbb{E} = \mathbb{E}^n_{p,q}$ является n-мерным (псевдо)евклидовым пространством с (p, q)-сигнатурой $(+, \ldots, +, -, \ldots, -)$. Значение тензорного поля деформации $T(T_{ij}{}^k)$ в точке x_0 является ненулевым тензором на $\mathbb{E}$. Рассмотрим T как билинейное отображение $\mathbb{E} \times \mathbb{E} \to \mathbb{E}$. Группа изотропий $\mathbb{G}'_0$ является подгруппой группы (псевдо)ортогональных преобразований пространства $\mathbb{E}$, оставляющей тензор T инвариантным. Пусть ξ — элемент алгебры Ли группы Ли (псевдо)отогональных преобразований пространства $\mathbb{E}$, а $\varphi_t = \exp t\xi$ — однопараметрическая подгруппа преобразований, порожденная ξ. Тогда ξ принадлежит алгебре Ли $\mathfrak{g}'_0$ группы Ли $\mathbb{G}'_0$, если и только если φ_t оставляет инвариантым тензор T, т.е.

$$T(\varphi_t u, \varphi_t v) = \varphi_t T(u, v). \tag{2.6}$$

Дифферецируя (2.6) по t при $t = 0$, получаем

$$T(\xi u, v) + T(u, \xi v) = \xi T(u, v). \tag{2.7}$$

Пусть $(e_1, \ldots, e_n)$ — ортонормированный базис в $\mathbb{E}$ и $g_{ij} = g(e_i, e_j) = \pm\delta_{ij}$, ${T_{ij}}^k$ и ξ_i^j — компоненты g, T и ξ в этом базисе. Тогда уравнения (2.7) примут вид

$$ {T_{sj}}^k \xi_i^s + {T_{is}}^k \xi_j^s - {T_{ij}}^r \xi_r^k = 0$$

или

$$\left({T_{sj}}^k \delta_i^r + {T_{is}}^k \delta_j^r - {T_{ij}}^r \delta_s^k\right) \xi_r^s = 0. \tag{2.8}$$

Подставив в (2.8) компоненты тензора деформации Вейля, определенные формулой (2.2), получим

$$\left[\left(\delta_j^k \delta_i^r + \delta_i^k \delta_j^r\right) \omega_s - \left(g_{sj} \delta_i^r \omega^k + g_{is} \delta_j^r \omega^k - g_{ij} \delta_s^k \omega^r\right)\right] \xi_r^s = 0. \tag{2.9}$$

Алгебра Ли группы Ли (псевдо)ортогональных преобразований состоит из матриц вида

$$\begin{pmatrix} B & C \\ C^T & D \end{pmatrix},$$

где B — кососимметрическая матрица размера $p \times p$, D — кососимметрическая матрица размера $q \times q$, C^T — матрица, транспонированная к C. Поэтому $\xi_1^1 = \xi_2^2 = \cdots = \xi_n^n = 0$, $\xi_r^s = \pm\xi_s^r$. Таким образом, мы имеем линейную однородную систему (2.9) из $n(n+1)/2 + n$ уравнений, занумерованных индексами i, j, k относительно $(n^2 - n)/2$ неизвестных ξ_r^s. Докажем, что эта система имеет как минимум $n - 1$ линейно независимых уравнений. Действительно, так как 1-форма ω ненулевая, то хотя бы одна из ее координат не равна нулю. Пусть $\omega_s \neq 0$, s фиксировано. Рассмотрим подсистему, состоящую из $n - 1$ уравнений, занумерованных индексами $i = k = s$, $j = 1, \ldots, n$, $j \neq s$. Эта подсистема имеет следующий вид:

$$\cdots + \left[\left(\delta_j^s \delta_s^r + \delta_s^s \delta_j^r\right)\omega_s - \left(g_{sj} \delta_s^r \omega^s + g_{ss} \delta_j^r \omega^s - g_{sj} \delta_s^s \omega^r\right)\right] \xi_r^s +$$
$$+ \left[\left(\delta_j^s \delta_s^s + \delta_s^s \delta_j^s\right)\omega_r - \left(g_{rj} \delta_s^s \omega^s + g_{sr} \delta_j^s \omega^s - g_{sj} \delta_r^s \omega^s\right)\right] \xi_r^s + \cdots = 0.$$

Так как $\delta_j^s = 0$ $(g_{sj} = 0,\ j \neq s)$, а $g_{ss} g^{ss} = 1$, то в первых квадратных скобках получим $\delta_j^r \omega_s - \delta_j^r \omega_s = 0$, а во вторых квадратных скобках $-g_{rj} g^{ss} \omega_s = \pm\delta_{rj}\omega_s$. Поэтому выделенная подсистема примет вид

$$\cdots \pm \delta_{rj} \omega_s \xi_s^r + \cdots = 0 \quad r \neq s,\ j \neq s,$$

и является линейно независимой, так как $\det(\pm\delta_{rj}\omega_s) = \pm\omega_s^{n-1} \neq 0$.

Это означает, что размерность группы изотропий $\mathbb{G}'_0$ не превосходит $(n^2 - n)/22 - (n - 1)$, а размерность всей группы $\mathbb{G}$ не превосходит $(n^2 - n)/2 - (n - 1) + n = n(n - 1)/2 + 1$. □

2.3. Для доказательства точности указанной границы достаточно привести пример пространства Вейля—Картана с группой автоморфизмов рамерности $n(n - 1)/2 + 1$. Рассмотрим (псевдо)риманово пространство (M^n, ds^2), $n \geqslant 3$, с метрикой

$$ds^2 = {dx^1}^2 + e^{2x^1}\left(\epsilon_2 {dx^2}^2 + \cdots + \epsilon_n {dx^n}^2\right), \tag{2.10}$$

где $\epsilon_\alpha = \pm 1$, $\alpha = 2, \ldots, n$. Вычисляя тензор кривзны этого пространства, убеждаемся в справедливости равенства

$$R_{ijkl} = -(g_{il} g_{jk} - g_{ik} g_{jl}),$$

откуда следует, что мы имеем пространство постоянной секционной кривизны $k = -1$ и, следовательно, группа изометрий этого пространства имеет максимальную размерность $n(n + 1)/2$.

Рассмотрим замкнутую подгруппу этой группы, содержащую все изометрии, оставляющие единичное векторное поле, ортогональное (псевдо)евклидову подпространству $\mathbb{E}^{n-1}$: $x^1 = \mathrm{const}$ с метрикой

$$d\sigma^2 = \epsilon_2 dx^{2^2} + \cdots + \epsilon_n dx^{n2}. \tag{2.11}$$

Базисные операторы этой подгруппы имеют вид

$$\partial_\alpha, \quad -\epsilon_\alpha x^\beta \partial_\alpha + \epsilon_\beta x^\alpha \partial_\beta, \quad -\partial_1 + x^\alpha \partial_\alpha. \tag{2.12}$$

В (2.12) первые $n(n-1)/2$ векторных полей являются базисными операторами группы Ли движений (псевдо)евклидова пространства $\mathbb{E}^{n-1}$ с метрикой (2.10), а последнее поле определяется условием инвариантности относительно него метрики (2.10) и единичного векторного поля, ортогонального $\mathbb{E}^{n-1}$.

Интегрируя уравнения инвариантности (1.2) для ковариантного тензора деформации Вейля W относительно группы с операторами (2.12), находим

$$W = a\Big\{ -dx^1 \otimes dx^1 \otimes dx^1 + \\ + e^{2x^1} \sum_{\alpha=2}^{n} \epsilon_\alpha \Big(dx^\alpha \otimes dx^\alpha \otimes dx^1 - dx^\alpha \otimes dx^1 \otimes dx^\alpha - dx^1 \otimes dx^\alpha \otimes dx^\alpha \Big)\Big\},$$

а для ковариантного тензора деформации Картана —

$$C = be^{2x^1} \sum_{\alpha=2}^{n} \epsilon_\alpha dx^\alpha \otimes dx^\alpha \wedge dx^1,$$

где $a \neq 0$, $b \neq 0$ — произвольные постоянные.

Таким образом справедлива следующая теорема.

Теорема 2.2. *Максимальная размерность группы Ли автоморфизмов n-мерного пространства Вейля—Картана равна $n(n-1)/2+1$.*

3. Пространства Римана—Картана

3.1. В [3, 10] изучались специальные классы пространств Римана—Картана с положительно определенной метрикой (см. обзор [20]). Найдены геометрические характеристики некоторых из этих классов, а также условия, которые препятствуют их существованию. Установлена связь выделенных классов с известными классами почти эрмитовых структур. Исследованы пространства Римана—Картана, несущие псевдокиллинговы и псевдогармонические векторные поля. Получены условия, препятствующие существованию «в целом» этих полей на компактных пространствах Римана—Картана.

В [18] исследовались структуры Римана—Картана на нечетномерных сферах S^{2n+1} как однородных пространствах специальных унитарных групп $SU(n+1)$, представляя $S^{2n+1} = SU(n+1)/SU(n)$, $n \geqslant 1$. Особое внимание уделяется описанию $SU(n+1)$-инвариантных метрических связностей с кососимметрическим кручением. В частности, установлено, что множество таких связностей на S^{2n+1} имеет один свободный параметр, за исключением S^5 и S^7: в этих случаях таких параметров три. В случае S^5 при помощи структуры Сасаки найдены явные выражения инвариантных связностей. Наиболее интересные связности возникают на сфере S^7. В частности, на S^7 найдены семейства неплоских инвариантных связностей с кососимметрическим кручением, удовлетворяющих условию Эйнштейна (см. [16]). Отметим также статью [15] по однородным пространствам Римана—Картана, которая содержит много примеров метрических связностей с кручением и описаний их физических аспектов.

3.2. В [6,7,23,24] изучались пространства Римана—Картана $(M^n, g, \widetilde{\nabla})$ с полусимметрической или кососимметрической связностью $\widetilde{\nabla}$.

Для полусимметрической связности $\widetilde{\nabla}(\widetilde{\Gamma}_{ij}^k)$ ковариантный тензор деформации T_{ijk} имеет вид

$$T_{ijk} = \frac{1}{1-n}\left(g_{ij}\eta_k - g_{ik}\eta_j\right),$$

где $\eta_j = S_{pj}{}^p$ — след тензора кручения

$$S_{ij}{}^k = \frac{1}{n-1}\left(\delta_i^k \eta_j - \delta_j^k \eta_i\right).$$

В [23] доказано, что максимальная размерность группы Ли автоморфизмов n-мерного пространства Римана—Картана с полусимметрической связностью равна $n(n-1)/2+1$. Примером пространства с такой группой может служить вещественное расширение единичной сферы: $M^n = \mathbb{R}\times\mathbb{S}^{n-1}$. В естественных локальных координатах риманова метрика, базисные векторные поля (операторы) группы и ковариантный тензор деформации имеют вид

$$ds^2 = (dx^1)^2 + \frac{(dx^2)^2 + \cdots + (dx^n)^2}{\left[1 + \frac{1}{4}\left((x^2)^2 + \cdots + (x^n)^2\right)\right]^2},$$

$$\partial_1, \quad \left[1 - \frac{1}{4}Q_\alpha\right]\partial_\alpha + \frac{1}{2}x^\alpha x^\gamma \partial_\gamma, \quad -x^\beta\partial_\alpha + x^\alpha\partial_\beta, \quad \alpha,\beta,\gamma = 2,\ldots,n, \quad \alpha<\beta, \quad \alpha\neq\gamma,$$

$$Q_\alpha = (x^2)^2 + \cdots + (x^{\alpha-1})^2 - (x^\alpha)^2 + (x^{\alpha+1})^2 + \cdots + (x^n)^2,$$

$$T = \frac{s\sum\limits_{\alpha=2}^{n} dx^\alpha \otimes dx^\alpha \wedge dx^1}{\left[1 + \frac{1}{4}\left((x^2)^2 + \cdots + (x^n)^2\right)\right]^2}, \quad s = \mathrm{const}.$$

3.3. В [4,7] изучались трехмерные пространства Римана—Картана M^3 с кососимметрической связностью $\widetilde{\nabla}$. В этом случае тензор деформации T_{ijk} кососимметричен по всем индексам и, следовательно, $T_{ijk} = \frac{1}{2}S_{ijk}$. Обозначим через

$$\Omega = \frac{1}{2}S_{123}dx^1\wedge dx^2\wedge dx^3, \quad \Omega_0 = \sqrt{\det g}\,dx^1\wedge dx^2\wedge dx^3$$

соответственно фундаментальную форму кручения и форму объема. Пусть D — ограниченная область в M. Тогда определены интегралы

$$\upsilon = \int\limits_D \Omega, \quad \upsilon_0 = \int\limits_D \Omega_0.$$

Объемным кручением назовем отношение $\upsilon/\upsilon_0 = \upsilon_k$, а *скалярным кручением* — отношение плотностей $\dfrac{1}{2}\dfrac{S_{123}}{\sqrt{\det g}} = s_k$. Объемное кручение является функционалом, заданным на множестве всех областей интегрирования, а скалярное кручение есть функция точки. Связь введенных таким образом инвариантов устанавливает следующее утверждение (см. [7]): *если область интегрирования D стягивать в точку $x_0\in D$, то в пределе объемное кручение совпадает со скалярным кручением в точке x_0.*

Действительно, по теореме о среднем имеем

$$\upsilon = \int\limits_D \frac{1}{2}\frac{S_{123}}{\sqrt{\det g}}\cdot\sqrt{\det g}\,dx^1\wedge dx^2\wedge dx^3 = \int\limits_D s_k(x)\cdot\Omega_0 = s_k(x^*)\upsilon_0,$$

где x^* — некоторая точка области D. Поэтому

$$\upsilon_k = \frac{\upsilon}{\upsilon_0} = s_k(x^*), \quad \lim_{D\to x_0}\upsilon_k = \lim_{x^*\to x_0} s_k(x^*) = s_k(x_0).$$

Отсюда следует, что если пространство Римана—Картана M^3 имеет постоянное объемное кручение, то является постоянным и скалярное кручение, и наоборот, причем $\upsilon_k = s_k = s = \text{const}$. В этом случае постоянную s естественно назвать *кручением* пространства, а M^3 — *пространством постоянного кручения.*

Максимальная размерность группы Ли автоморфизмов трехмерного многообразия Римана—Картана равна 6. В локальных координатах метрика, операторы группы и тензор деформации имеют соответственно вид (см. [7])

$$ds^2 = \frac{(dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2}{\Big[1 + \frac{k}{4}\big((x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2\big)\Big]^2}, \tag{3.1}$$

$$\begin{aligned}
X_1 &= \left[1 - \frac{k}{4}\Big(-(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2\Big)\right]\partial_1 + \frac{k}{2}x^1x^2\partial_2 + \frac{k}{2}x^1x^3\partial_3,\\
X_2 &= \frac{k}{2}x^2x^1\partial_1 + \left[1 - \frac{k}{4}\Big((x^1)^2 - (x^2)^2 + (x^3)^2\Big)\right]\partial_2 + \frac{k}{2}x^2x^3\partial_3,\\
X_3 &= \frac{k}{2}x^3x^1\partial_1 + \frac{k}{2}x^3x^2\partial_2 + \left[1 - \frac{k}{4}\Big((x^1)^2 + (x^2)^2 - (x^3)^2\Big)\right]\partial_3,\\
X_{12} &= -x^2\partial_1 + x^1\partial_2, \quad X_{13} = -x^3\partial_1 + x^1\partial_3, \quad X_{23} = -x^3\partial_2 + x^2\partial_3,
\end{aligned}$$

$$T = \frac{c_{ijk}dx^i \wedge dx^j \wedge dx^k}{\Big[1 + \frac{k}{4}\big((x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2\big)\Big]^3}, \tag{3.2}$$

где c_{ijk} — постоянные, из которых, в силу кососимметричности, существенной является лишь одна, а k — кривизна пространства.

Для метрики (3.1)

$$\sqrt{\det g} = \left[1 + \frac{k}{4}\Big((x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2\Big)\right]^{-3}, \quad S_{123} = 2c_{123}\left[1 + \frac{k}{4}\Big((x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2\Big)\right]^{-3}.$$

Поэтому

$$\upsilon_k = \frac{\upsilon}{\upsilon_0} = \frac{1}{2}\frac{S_{123}}{\sqrt{\det g}} = s_k = c_{123} \equiv s = \text{const}\,.$$

Таким образом, *пространство Римана—Картана* $(M^3, g, \widetilde{\nabla})$ *с метрикой* (3.1) *и тензором деформации* (3.2) *имеет постоянную кривизну Римана* k *и постоянное кручение Картана* s*, т.е. является пространством постоянной кривизны и постоянного кручения.*

Нетрудно убедиться, что в этом случае тензор кручения пространства ковариантно постоянен как в связности Леви-Чивита ∇, так и в связности Картана $\widetilde{\nabla}$: $\nabla_l S^k_{ij} = \widetilde{\nabla}_l S^k_{ij} = 0$.

3.4. Компоненты тензора кривизны $\widetilde{R}$ пространства Римана—Картана вычисляются по следующей формуле (см. [7]):

$$\widetilde{R}_{ijk}{}^l = R_{ijk}{}^l + \frac{1}{2}\left[\nabla_i S_{jk}{}^l - \nabla_j S_{ik}{}^l + \frac{1}{2}\Big(S_{ip}{}^l S_{jk}{}^p - S_{jp}{}^l S_{ik}{}^p\Big)\right],$$

где $R_{ijk}{}^l$ — компоненты тензора кривизны R риманова пространства (M^n, g). Для пространства Римана—Картана (M^3, g, T) с метрикой (3.1) и тензором деформации (3.2) имеем (см. [7])

$$\begin{aligned}
S_{ij}{}^k &= 2\left(1 + \frac{k}{4}z\right)^{-1} c_{ij}{}^k, \quad c_{ij}{}^k = c_{ijp}\delta^{kp},\\
\widetilde{R}_{ijk}{}^l &= R_{ijk}{}^l + \left(1 + \frac{k}{4}z\right)^{-2}\Big(c_{ip}{}^l c_{jk}{}^p - c_{jp}{}^l c_{ik}{}^p\Big),\\
\widetilde{R}_{ijkl} &= R_{ijkl} + \left(1 + \frac{k}{4}z\right)^{-2}\Big(c_{ipl} c_{jk}{}^p - c_{jpl} c_{ik}{}^p\Big),
\end{aligned}$$

где $z = (x^1)^2 + \cdots + (x^n)^2$.

Тензоры кривизны $\widetilde{R}_{ijkl}$ и $\widetilde{R}_{ijk}{}^l$ обладают следующими свойствами (см. [7]):

$$(1)\ \widetilde{R}_{jikl} = -\widetilde{R}_{ijkl}, \quad (2)\ \widetilde{R}_{ijlk} = -\widetilde{R}_{ijkl}, \quad (3)\ \widetilde{R}_{klij} = \widetilde{R}_{ijkl}, \quad (4)\ \widetilde{R}_{ijk}{}^l + \widetilde{R}_{jki}{}^l + \widetilde{R}_{kij}{}^l = 0.$$

Свойства (1) и (2) тензора кривизны $\widetilde{R}_{ijkl}$ имеют место в любом многообразии Римана—Картана M^4, а (3) и (4) являются характерными свойствами рассматриваемого пространства M^3.

Свойства (1)–(4) тензора кривизны пространства Римана—Картана M^3 позволяют ввести секционную кривизну, аналогично тому, как это делается в римановых пространствах. Имеет место следующая теорема.

Теорема 3.1 (см. [7]). *Секционная кривизна пространства Римана—Картана M^3 является постоянной и определяется формулой $\tilde{k} = k - s^2$, где k — кривизна риманова пространства (M^3, g), а s — кручение пространства Римана—Картана (M^3, g, T).*

Непосредственным подсчетом можно убедиться, что тензор кривизны пространства Римана—Картана M^3 является ковариантно постоянным как в связности ∇, так и в связности $\widetilde{\nabla}$, т.е.

$$\nabla_m \widetilde{R}_{ijk}{}^l = 0, \quad \widetilde{\nabla} \widetilde{R}_{ijk}{}^l = 0.$$

3.5. Для тензора Риччи $\widetilde{R}_{jk} = \widetilde{R}_{sjk}{}^s$ и скалярной кривизны $\widetilde{R} = g^{jk}\widetilde{R}_{jk}$ находим:

$$\widetilde{R}_{jk} = R_{jk} + \left(1 + \frac{k}{4}\right)^{-2} c_{jp}{}^s c_{ks}{}^p, \tag{3.3}$$

$$\widetilde{R} = R + \delta^{jk} c_{jp}{}^s c_{ks}{}^p, \tag{3.4}$$

где R_{jk} и R — тензор Риччи и скалярная кривизна риманова пространства (M^3, g). Из (3.3) следует, что тензор Риччи пространства Римана—Картана M^3 является симметрическим. Так как (M^3, g) является римановым пространством постоянной кривизны k, то

$$R_{ijk}{}^l = k\left(1 + \frac{k}{4}z\right)^{-2}\left(\delta_i^l \delta_{jk} - \delta_j^l \delta_{ik}\right), \quad R_{jk} = 2k\left(1 + \frac{k}{4}z\right)^{-2}\delta_{jk}, \quad R = 6k.$$

Кроме того,

$$\delta^{jk} c_{jp}{}^s c_{ks}{}^p = -6s^2.$$

Поэтому

$$\widetilde{R}_{jk} = \left(1 + \frac{k}{4}z\right)^{-2}\left(2k\delta_{jk} + c_{jp}{}^s c_{ks}{}^p\right), \quad \widetilde{R} = 6(k - s^2). \tag{3.5}$$

Из второго равенства (3.5) следует, что $\widetilde{R} \leqslant R$ и $\widetilde{R} = R$ тогда и только тогда, когда $s = 0$ и, следовательно, $\widetilde{\nabla} = \nabla$. Далее, нетрудно убедиться, что

$$c_{jp}{}^s c_{ks}{}^p v^j v^k = -2s^2\big((v^1)^2 + (v^2)^2 + (v^3)^2\big)$$

и, следовательно, квадратичная форма Риччи $\widetilde{\varphi} = \widetilde{R}_{jk} v^j v^k$ имеет вид

$$\widetilde{\varphi} = 2(k - s^2)\left(1 + \frac{k}{4}z\right)^{-2}\big((v^1)^2 + (v^2)^2 + (v^3)^2\big).$$

Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 3.2 (см. [7]). *Квадратичная форма $\widetilde{\varphi}$ пространства Римана—Картана M^3, является положительно (отрицательно) определенной тогда и только тогда, когда $k > s^2$ ($k < s^2$) и равна нулю, когда $k = s^2$, где k — кривизна риманова пространства (M^3, g), а s — кручение.*

3.6. Хорошо известно, что причиной включения Λ-члена в уравнения гравитационного поля Эйнштейна—Гильберта явилось желание Эйнштейна построить статическую модель Вселенной. Прямая подстановка статической (независимой от времени) метрики g_{ij} в уравнения поля приводит к противоречию. Уравнения поля с Λ-членом

$$R_{ij} - \frac{1}{2}Rg_{ij} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{ij} + \Lambda g_{ij}$$

уже имеют статические решения, в частности, решение с замкнутым пространственным сечением, которое пытался найти Эйнштейн.

Уравнения гравитационного поля с Λ-членом имеют и достаточно простое решение де Ситтера

$$ds^2 = (dx^0)^2 - e^{2Hx^0}\Big((dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2\Big),$$

которое определяет стационарную (не статическую) модель Вселенной. В отличие от фридмановских, это решение не имеет сингулярности. Тем не менее, метрика стационарной модели описывает расширение Вселенной, которое происходит неограниченно во времени, как в прошлом, так и в будущем. При этом постоянная Хаббла H красного смещения спектральных линий не меняется в ходе эволюции Вселенной, а космологическая постоянная $\Lambda = 3H/c^2$. Пространственным сечением ($x^0 = ct = \mathrm{const}$) является евклидово пространство, т.е. в этой модели мир плоский без материи и, следовательно, теория стационарной Вселенной не применима к Вселенной с материей. Однако, наделяя стационарную модель дополнительными структурами, как это делается, например, в теории компенсаций, возможно, удастся решить некоторые проблемы, существующие в рамках теории стационарной Вселенной.

В [6] построена структура Римана—Картана на пространственно-временном многообразии M^4 с такой метрикой стационарной модели Вселенной, что ее группа автоморфизмов имеет максимальную размерность. Вычисляя тензор кривизны пространства M^4, нетрудно убедиться, что M^4 является пространством постоянной секционной кривизны $k = -H^2$. Это означает, что группа изометрий псевдориманова пространства M^4 имеет максимальную размерность $10 = n(n+1)/2$.

Эта группа имеет семимерную замкнутую подгруппу, содержащую все изометрии пространственного сечения $\mathbb{E}^3$ и оставляющую инвариантным единичное векторное поле, ортогональное $\mathbb{E}^3$. Базисные операторы этой подгруппы имеют вид (см. [6])

$$\partial_\alpha, \quad -x^\beta\partial_\alpha + x^\alpha\partial_\beta, \quad -\frac{1}{H}\partial_0 + x^\alpha\partial_\alpha, \quad \alpha < \beta, \quad \alpha, \beta = 1, 2, 3.$$

Интегрируя уравнение инвариантности тензора деформации относительно этой группы, находим

$$T = a \cdot e^{2Hx^0}\sum_\alpha dx^\alpha \otimes dx^\alpha \wedge dx^0 + b \cdot e^{3Hx^0}dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3.$$

Если $a = 0$, то T_{ijk} кососимметричен по всем индексам, и мы имеем кососимметрическую связность. Если $b = 0$, то связность $\widetilde{\nabla}$ является полусимметрической. Группа автоморфизмов структуры Римана—Картана является полной и имеет максимальную размерность, так как имеет место следующая теорема.

Теорема 3.3 (см. [24]). *Размерность группы автоморфизмов пространственно-временного многообразия с полусимметрической или кососимметрической связностью не превосходит* 7.

В пространственном сечении ($x^0 = \mathrm{const}$), которое является евклидовым пространством $\mathbb{E}^3$, тензор деформации имеет вид

$$T = sdx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3, \quad s = \mathrm{const}\,.$$

Уравнения параллельного переноса

$$\frac{dv^k}{dt} + \widetilde{\Gamma}^k_{ij}\frac{dx^i}{dt}v^j = 0$$

вектора $v^k = v^k(t)$ вдоль кривой $x^k = x^k(t)$ примут вид

$$\frac{dv^1}{dt} + s\left(\frac{dx^2}{dt}v^3 - \frac{dx^3}{dt}v^2\right) = 0, \quad \frac{dv^2}{dt} + s\left(\frac{dx^3}{dt}v^1 - \frac{dx^1}{dt}v^3\right) = 0, \quad \frac{dv^3}{dt} + s\left(\frac{dx^1}{dt}v^2 - \frac{dx^2}{dt}v^1\right) = 0.$$

Параллельное пересение, например, вектора $v(1,0,0)$ вдоль кривой $x^1 = 0$, $x^2 = 0$, $x^3 = t$, т.е. вдоль оси x^3 прямоугольной декартовой системы координат в $\mathbb{E}^3$, определяется уравнениями

$$\frac{dv^1}{dt} - sv^2 = 0, \quad \frac{dv^2}{dt} + sv^1 = 0, \quad \frac{dv^3}{dt} = 0.$$

Интегрируя данную систему при заданных начальных условиях, заключаем, что при параллельном переносе конец вектора v описывает винтовую линию (см. [6])

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}\big\{\cos(st),\ \sin(st),\ t\big\},$$

лежащую на прямом геликоиде. В этом случае кручение s определяет угловую скорость вращения вектора v при параллельном переносе его вдоль прямой.

3.7. В [5] предложено финслерово обобщение пространств Римана—Картана следующим образом. Пусть $F^n = (M, g^*)$ — финслерово пространство или пространство финслерова типа (см. [22]), ∇^* — связность Картана. Коэффициенты Γ^{*k}_{ij} этой связности симметричны по нижним индексам $\Gamma^{*k}_{ij} = \Gamma^{*k}_{ji}$, т.е. связность ∇^* не имеет кручения. Пусть теперь на M задана связность $\widetilde{\nabla}^*$ картановского типа с кручением, т.е.

$$\widetilde{S}^k_{ij} = \widetilde{\Gamma}^{*k}_{ij} - \widetilde{\Gamma}^{*k}_{ji} \neq 0,$$

где $\widetilde{\Gamma}^{*k}_{ij}$ — коэффициенты этой связности, $\widetilde{S}^k_{ij}$ — компоненты тензора кручения. При этом, как и в случае связности Картана, мы требуем согласованности $\widetilde{\nabla}^*$ с g^*: $\widetilde{\nabla}^* g^* = 0$.

Многообразие , наделенное метрическим тензором g^* и связностью $\widetilde{\nabla}^*$ будем называть *многообразием (пространством) Римана—Картана—Финслера*, а пару $(g^*, \widetilde{\nabla}^*)$ — *структурой Римана—Картана—Финслера.*

Условие согласованности связности $\widetilde{\nabla}^*$ с метрическим тензором g^* означает, что ковариантная производная от g^* в этой связности обращается в нуль. В естественных локальных координатах (x^i, y^i) имеем

$$\partial_i g^*_{jk} - \widetilde{\Gamma}^{*s}_{ip} y^p \dot{\partial}_s g^*_{jk} - \widetilde{\Gamma}^{*p}_{ij} g^*_{pk} - \widetilde{\Gamma}^{*p}_{ik} g^*_{jp} = 0, \tag{3.6}$$

где $\dot{\partial}_i = \partial/\partial y^i$, $g^*_{ij} = g^*_{ij}(x,y)$, $\Gamma^{*k}_{ij} = \Gamma^{*k}_{ij}(x,y)$.

Очевидно, коэффициенты $\widetilde{\Gamma}^{*k}_{ij}$ связности $\widetilde{\nabla}^*$ можно представить в виде

$$\widetilde{\Gamma}^{*k}_{ij} = \widetilde{\Gamma}^{*k}_{(ij)} + \frac{1}{2}\widetilde{S}^k_{ij}, \tag{3.7}$$

где

$$\widetilde{\Gamma}^{*k}_{(ij)} = \frac{1}{2}\Big(\widetilde{\Gamma}^{*k}_{ij} + \widetilde{\Gamma}^{*k}_{ji}\Big)$$

— симметрическая часть связности, определяющая сопутствующую симметрическую связность.

С другой стороны,

$$\widetilde{\Gamma}^{*k}_{ij} = \Gamma^{*k}_{ij} + \widetilde{T}^k_{ij}, \tag{3.8}$$

где $\widetilde{T}^k_{ij}$ — компоненты тензора деформации связности Картана ∇^*. Подставив (3.8) в (3.6) и учитывая, что ковариантная производная от g^* в связности Картана равна нулю, получим

$$\widetilde{T}^s_{ip} y^p \dot{\partial}_s g^*_{jk} + \widetilde{T}^p_{ij} g^*_{pk} + \widetilde{T}^p_{ik} g^*_{jp} = 0. \tag{3.9}$$

Таким образом, *для того чтобы связность $\widetilde{\nabla}^*$ была согласована с метрикой g^*, необходимо и достаточно, чтобы компоненты тензора деформации удовлетворяли алгебраическим соотношениям* (3.9).

Из (3.8) следует, что

$$\widetilde{S}^k_{ij} = \widetilde{T}^k_{ij} - \widetilde{T}^k_{ji}. \tag{3.10}$$

Если, в частности, сопутствующая симметрическая связность совпадает со связностью Картана ∇^*, то как следует из (3.7) и (3.8),

$$\widetilde{T}^k_{ij} = \frac{1}{2}\widetilde{S}^k_{ij}. \tag{3.11}$$

В качестве примера рассмотрим обобщенное финслерово пространство F^n с локально конической метрикой Тамма (см. [8])

$$g^*_{ij}(x, y) = g_{ij} + a\frac{y_i y_j}{y_p y^p}, \quad y_i = g_{ip}y^p, \quad a = a(x). \tag{3.12}$$

Компоненты связности Картана ∇^* метрики (3.12) имеют вид (см. [8])

$$\Gamma^{*k}_{ij} = \Gamma^k_{ij} + \frac{1}{2(a+1)y_p y^p}\Big(y^k y_j \partial_i a + y^k y_i \partial_j a - y_i y_j g^{kp}\partial_p a\Big), \tag{3.13}$$

где Γ^k_{ij} — коэффициенты связности Леви-Чивита ∇ римановой метрики g.

Для построения связности $\widetilde{\nabla}^*$ тензор деформации возьмем в виде

$$\widetilde{T}^k_{ij} = \frac{b}{(n-1)\sqrt{y_p y^p}}\big(\delta^k_i y_j - g_{ij}y^k\big), \tag{3.14}$$

где $b = b(x)$ — скалярная функция. Непосредственной проверкой убеждаемся, что тензор деформации (3.14) удовлетворяет условию (3.9), т.е. построенная связность согласована с метрикой. Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 3.4. *Локально коническая метрика* g^* (*см.* (3.12)) *вместе со связностью* ∇^* (*см.* (3.13)) *и тензором деформации* $\widetilde{T}$ (*см.* (3.14)) *задает структуру Римана—Картана—Финслера.*

Тензор кручения построенной связности имеет вид

$$\widetilde{S}^k_{ij} = \frac{b}{(n-1)\sqrt{y_p y^p}}\big(\delta^k_i y_j - \delta^k_j y_i\big). \tag{3.15}$$

Из алгебраической структуры тензора кручения (3.15) следует, что построенная связность $\widetilde{\nabla}^*$ является аналогом классической линейной полусимметрической связности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бабурова О. В., Фролов Б. Н.* Математические основы современной теории гравитации. — М.: МПГУ, 2012.
2. *Вейль Г.* Пространство. Время. Материя. — М.: Едиториал УРСС, 2004.
3. *Гордеева И. А.* О некоторых классах пространств Вейтценбека// Изв. Пенз. гос. пед. ун-та. Физ.-мат. техн. науки. — 2011. — *26*, № 1. — С. 70–75.
4. *Паньженский В. И.* Максимально подвижные римановы пространства с кручением// Мат. заметки. — 2009. — *85*, № 5. — С. 754–757.
5. *Паньженский В. И.* Финслерово обобщение структуры Римана—Картана// Изв. Пенз. гос. пед. ун-та. Физ.-мат. техн. науки. — 2011. — *26*, № 1. — С. 155–159.
6. *Паньженский В. И.* Стационарная модель Вселенной с кручением// Теор. мат. физ. — 2013. — *177*, № 1. — С. 151–162.
7. *Паньженский В. И.* Автоморфизмы многообразий Римана—Картана// Мат. заметки. — 2015. — *98*, № 4. — С. 544–556.
8. *Паньженский В. И., Сурина О. П.* Финслерово обобщение метрики Тамма// Теор. мат. физ. — 2016. — *189*, № 2. — С. 186–197.
9. *Рылов А. А.* Связности Амари—Ченцова на логистической модели. // Изв. Пенз. гос. пед. ун-та. Физ.-мат. техн. науки. — 2011. — *26*, № 1. — С. 195–206.
10. *Степанов С. Е., Гордеева И. А.* Псевдокиллинговы и псевдогармонические векторные поля на многообразии Римана—Картана// Мат. заметки. — 2010. — *87*, № 2. — С. 267–279.
11. *Степанов С. Е., Степанова Е. С., Шандра И. Г.* Сопряженные связности на статистических многообразиях// Изв. вузов. Мат. — 2007. — № 10. — С. 90–98.

12. *Степанова Е. С., Цыганок И. И.* Сопряженное Риччи-симметрическое статистическое многообразие// Тез. докл. Междунар. конф.по диффер. уравн. и динамич. сист. — Владимир: Владимир. гос. ун-т, 2006. — С. 207–208.
13. *Степанова Е. С., Цыганок И. И.* Статистические многообразия с эквиаффинными связностями// Математика в образовании: 200 лет высшему математическому образованию России/ Сб. статей под ред И. С. Емельяновой. — Чебоксары: Изд-во Чуваш. ун-та, 2005. — С. 246–250.
14. *Ченцов Н. Н.* Статистические решающие правила и оптимальные выводы. — М.: Наука, 1972.
15. *Agricola I.* Nonintegrable geometries, torsion, and holonomy// в кн.: Handbook of Pseudo-Riemannian Geometry and Supersymmetry/ IRMA Lect. Math. Theor. Phys. — Zürich: Eur. Math. Soc., 2010. — *16.* — С. 277–346.
16. *Agricola I., Ferreira A. C.* Einshtein manifolds with skew-torsion// Quart. J. Math. — 2014. — *65.* — С. 717–741.
17. *Amari S. I.* Differential-geometrical methods in statistics/ Lect. Notes Stat. — Berlin: Springer-Verlag, 1985. — *28.*
18. *Draper C., Garvin A., Palomo F. J.* Invariant affine connections on odd-dimensional spheres// Ann. Glob. Anal. Geom. — 2016. — *49.* — С. 213–251.
19. *Draper C., Palomo F. J.* Homogeneous Riemann–Cartan spheres// в кн.: Pure and Applied Differential Geometry: PADGE 2012. In memory of Franki Dillen (J. Van der Veken et al, eds.)/ Proc. Int. Conf. Leuven, Belgium, August 27–30, 2012. — Aachen: Shaker, 2013. — С. 126–135.
20. *Gordeeva I. A, Panzhensky V. I., Stepanov S. E.* Riemann—Cartan manifolds// J. Math. Sci. — 2009. — *169*, № 3. — С. 342–361.
21. *Montgomery D., Samelson H.* Transformation groups of spheres// Ann. Math. (2). — 1943. — *44.* — С. 454–470.
22. *Panzhenskii V. I.* Infinitesimal automorphisms of metric structures of Finsler type// J. Math. Sci. — 2010. — *169*, № 3. — С. 297–313.
23. *Panzhensky V. I.* Automorphisms of Riemann–Cartan manifolds with semi-symmetric connection// J. Math. Phys. Anal. Geom. — 2014. — *10*, № 2. — С. 233–239.
24. *Panzhenskii V. I., Surina O. P.* Automorphisms of spacetime manifold with torsion// Acta Univ. Palacki. Olomuc., Fac. Rerum Nat., Math. — 2016. — *55*, № 1. — С. 87–94.
25. *Rao C. R.* Information and accuracy attainable in the of statistical parameters// Bull. Calcutta Math. Soc. — 1945. — *37.* — С. 81–89.

В. И. Паньженский
Пензенский государственный университет, Пенза
E-mail: kaf-geom@yandex.ru

С. Е. Степанов
Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации, Москва;
Всероссийский институт научной и технической информации
Российской академии наук (ВИНИТИ РАН), Москва
E-mail: s.e.stepanov@mail.ru

М. В. Сорокина
Пензенский государственный университет, Пенза
E-mail: sorokina_m@list.ru

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 146 (2018). С. 103–112

УДК 514.82

О ГЕОМЕТРИЧЕСКОМ АНАЛИЗЕ ДИНАМИКИ ОБЪЕМНОГО РАСШИРЕНИЯ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯХ В ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

© 2018 г. **С. Е. СТЕПАНОВ, И. Е. ДЕНЕЖКИНА, А. В. ОВЧИННИКОВ**

Аннотация. В работе обсуждаются глобальные аспекты геометрической динамики объемного расширения и ее приложения к задаче о существовании в пространстве-времени компактных и полных пространственноподобных гиперповерхностей и к глобальной геометрии обобщенных пространств-времен Робертсона—Уокера.

Ключевые слова: объемное расширение, векторное поле, поток, пространство-время, пространственноподобная гиперповерхность.

AMS Subject Classification: 53C25, 53Z05

1. Введение. В большинстве работ и монографий, посвященных математическим моделям гидродинамики, рассматривается динамика идеальной (несжимаемой и невязкой) однородной жидкости. Например, в известной монографии [1] В. И. Арнольда и Б. А. Хесина изучаются потоки, порожденные бездивергентными векторными полями; по определению, такие потоки оставляют инвариантным элемент объема. В настоящей работе мы продолжаем разрабатывать теорию динамики потоков жидкости и анализируем скорость изменения элемента объема многообразия вдоль линий тока потока, порожденного произвольным (не обязательно бездивергентным) дифференцируемым векторным полем. Кроме того, мы обсуждаем глобальный аспект динамики объемного расширения и его связь с проблемой существования пространственноподобных замкнутых и полных гиперповерхностей в пространстве-времени. Эта проблема интересна по нескольким причинам. Во-первых, многообразия, которые допускают глобальную пространственноподобную гиперповерхность, имеют большее отношение к физике, чем те, в которых не может существовать такая гиперповерхность (см. [5, т. 2, с. 207]. Во-вторых, вопрос существования замкнутых пространственноподобных гиперповерхностей (см. [14], [6, с. 164]) связан с ускоренным расширением Вселенной (см. [26]). При получении этих результатов авторы использовали технику Бохнера, которая в настоящее время довольно модна, но все еще не стала широко распространенной в приложениях (см., например, [7, 8, 22, 26]).

В разделе 2 приведены основные определения и элементарные факты динамики объемного расширения в отсутствие метрики; здесь изложение следует работе [7] одного из авторов. В разделах 3 и 4 обсуждаются приложения динамики объемного расширения к вопросу о существовании компактных и полных пространственноподобных гиперповерхностей в лоренцевых многообразиях и в пространстве-времени. В частности, рассматривается приложение нашей теории к глобальной геометрии обобщенного пространства-времени Робертсона—Уокера.

Особый интерес для космологии представляют результаты, предполагающие, что замкнутые вселенные не могут обладать глобально определенными времениподобными векторными полями с положительным ускорением объемного расширения. Кроме того, отметим, что Нобелевская премия по физике 2011г. была присуждена за открытие ускоренного расширения Вселенной.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты №. 16-01-00756-а и 16-01-00053-а).

ISSN 0233–6723

2. Геометрический анализ динамики объемного расширения в отсутствие метрики. Пусть M — дифференцируемое многообразие размерности n ($n \geqslant 2$) с элементом объема ω, i.e., n-формой ω, которая отлична от нуля всюду на M. Известно, что связное многообразие M допускает такую n-форму тогда и только тогда, когда оно ориентируемо. Поэтому в дальнейшем будем предполагать, что n-форма ω удовлетворяет условию

$$\omega\left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}\right) > 0$$

для произвольной локальной системы координат $x^1, \dots, x^n$, согласованной с ориентацией на M (см [4, с. 281], [15, с. 86]).

Наличие элемента объема ω на многообразии M позволяет определить интеграл $\int_M f := \int_M f\omega$ от любой имеющей компактный носитель в M дифференцируемой функции $f : M \to \mathbb{R}$ (см [15, с. 87]). В частности, если многообразие M замкнуто (т.е. компактно и не имеет границы), то можно определить его *объем* следующим образом (см [15, с. 87]):

$$\mathrm{Vol}_\omega(M) := \int\limits_M 1 = \int\limits_M \omega > 0.$$

Пусть ξ — дифференцируемое векторное поле на M. Хорошо известно (см. [4, с. 12-14], [27, с. 140], [20, с. 27, 29]), что в окрестности U каждой точки многообразия M поле ξ порождает *локальный поток*, представляющий собой локальную однопараметрическую группу инфинитезимальных диффеоморфизмов или, иначе, преобразований $\phi_t(x) : U \to M$. Такие преобразования задаются формулами

$$\phi_t(x^k) = \bar{x}^k = x^k + t\xi^k$$

в произвольной локальной системе координат $x^1, \dots, x^n$ в окрестности U, где $t \in (-\varepsilon, +\varepsilon) \subset \mathbb{R}$ — параметр и $\xi = \xi^k \partial_k$. Верно и обратное (см. [4, с. 21-22], [27, с. 140]), а именно, локальный поток, или, иными словами, локальная однопараметрическая группа инфинитезимальных преобразований многообразия M, состоящая из диффеоморфизмов $\phi_t(x) : U \to M$, для некоторого открытого множества $U \subset M$, интервала $(-\varepsilon, +\varepsilon) \subset \mathbb{R}$ и произвольных $t \in (-\varepsilon, +\varepsilon)$ и $x \in U$ индуцирует векторное поле ξ на U следующим образом. В каждой точке $x \in U$ определим такой касательный вектор ξ_x к кривой $x(t) = \phi_t(x)$, что $\xi^k = dx^i/dt$ для $k = 1, \dots, n$ в локальной системе координат $x^1, \dots, x^n$ в U. Кривая $x(t) = \phi_t(x)$ называется *траекторией* потока. Если группа преобразований *глобальная*, то порождаемое ею векторное поле ξ называется *полным* (см. [4, с. 13], [20, с. 29]). В частности, на компактном многообразии M каждое дифференцируемое векторное поле ξ является полным (см. [4, с. 14]). Имеется взаимно однозначное соответствие между глобальными потоками и полными векторными полями на многообразии.

Замечание 1. В контексте вышеизложенного напомним, что *динамическая система* на некомпактном многообразии — это векторное поле, порождающее глобальный поток на этом многообразии (см [19, с. 47]). Далее мы будем заниматься динамическими системами на многообразиях, не несущих метрики, а затем — на лоренцевых многообразиях.

Векторное поле ξ называют также *векторным полем скоростей* (или просто вектором скорости) потока. Для произвольного дифференцируемого тензорного поля T можно рассмотреть его *производную Ли* вдоль траекторий потока с вектором скорости ξ:

$$L_\xi T := \frac{d}{dt}\,(\phi_t^* T)_{|t=0}$$

(см. [4, с. 28-29], [15, с. 71]). Известно (см. [19, с. 207]), что производная Ли $L_\xi T$ измеряет *скорость изменения тензора* T при деформациях, задаваемых однопараметрической группой дифференцируемых преобразований ϕ_t, порожденных векторным полем ξ. В частности, скорость $L_\xi \omega$ изменения элемента объема ω или, иначе, *скорость объемного расширения* при деформациях, задаваемых однопараметрической группой дифференцируемых преобразований ϕ_t, порождаемой полем ξ, вычисляется по формуле (см. [4, с. 281], [19, с. 212])

$$L_\xi \omega := \big(\operatorname{div}_\omega \xi\big) \cdot \omega. \tag{1}$$

В соответствии с (1) функция $\operatorname{div}_\omega \xi$ называется *логарифмической скоростью изменения объема* (или просто *скоростью объемного расширения*) вдоль потока, порождаемого полем ξ (см. [20, с. 195]). С другой стороны, для векторного поля ξ, имеющего компактный носитель в M, выполняется *теорема Грина* (см. [4, с. 259]):

$$\int\limits_M \big(\operatorname{div}_\omega \xi\big) \cdot \omega = 0. \tag{2}$$

Очевидно, условия $\operatorname{div}_\omega \xi > 0$ и $\operatorname{div}_\omega \xi < 0$ противоречат (2). Если же $\operatorname{div}_\omega \xi \geqslant 0$ или $\operatorname{div}_\omega \xi \leqslant 0$, то из (2) следует, что $\operatorname{div}_\omega \xi = 0$. Это означает, что $L_\xi \omega = 0$, т.е. однопараметрическая группа дифференцируемых преобразований ϕ_t оставляет ω инвариантным, а векторное поле ξ является *инфинитезимальным автоморфизмом* структуры объема (см. [3, с. 6]). В гидродинамике (даже в отсутствие матрики) такое векторное поле ξ называют *бездивергентным*, а порождаемый им поток — *несжимаемым* (см. [2, с. 125]).

Поскольку производная Ли $L_\xi \omega$ элемента объема ω измеряет скорость его изменения под действием группы дифференцируемых преобразований ϕ_t, порожденной полем ξ, то производная Ли $L_\xi(L_\xi \omega)$, в свою очередь, измеряет *ускорение* объемного расширения, т.е. *ускорение* изменения элемента объема ω вдоль траекторий потока с вектором скорости ξ. При этом справедливы соотношения

$$L_\xi(L_\xi\omega) = L_\xi\big((\operatorname{div}_\omega \xi)\cdot\omega\big) = \big(L_\xi(\operatorname{div}_\omega \xi)\big)\cdot\omega + (\operatorname{div}_\omega \xi)\cdot L_\xi\omega = \Big(L_\xi(\operatorname{div}_\omega \xi) + (\operatorname{div}_\omega \xi)^2\Big)\cdot\omega; \tag{3}$$

здесь функция $L_\xi(\operatorname{div}_\omega \xi)$ характеризует скорость изменения логарифмической скорости объемного расширения $\operatorname{div}_\omega \xi$ вдоль траекторий потока, порожденного полем ξ.

Векторное поле $(\operatorname{div}_\omega \xi)\xi$ называется *вектором логарифмической скорости объемного расширения.* Пользуясь равенством (3), мы можем доказать следующее утверждение.

Лемма 1. *Пусть на связном дифференцируемом многообразии (M, ω) с элементом объема ω задан такой поток с вектором скорости ξ, что вектор логарифмической скорости объемного расширения $(\operatorname{div}_\omega \xi)\xi$ имеет компактный носитель в M. Скорость объемного расширения такого потока не может возрастать вдоль траекторий. Если скорость $L_\xi\omega$ объемного расширения вдоль траекторий потока является неубывающей функцией, то поток имеет постоянную скорость объемного расширения. В частности, если логарифмическая скорость объемного расширения $\operatorname{div}_\omega \xi$ является неубывающей функцией вдоль траекторий потока, то поток несжимаем, а его скорость объемного расширения $L_\xi\omega$ равна нулю.*

Доказательство. Пусть M — дифференцируемое многообразие с элементом объема ω. Во-первых, отметим, что для векторного поля $(\operatorname{div}_\omega \xi)\xi$, имеющего компактный носитель в M, теорема Грина имеет вид

$$\int\limits_M \operatorname{div}\big((\operatorname{div}_\omega \xi)\xi\big)\cdot\omega = \int\limits_M \Big(L_\xi(\operatorname{div}_\omega \xi) + (\operatorname{div}_\omega \xi)^2\Big)\cdot\omega = 0. \tag{4}$$

Во-вторых, из (3) нетрудно видеть, что неравенство

$$L_\xi(L_\xi\omega) > 0,$$

справедливое всюду на M, влечет неравенство

$$L_\xi(\operatorname{div}_\omega \xi) + (\operatorname{div}_\omega \xi)^2 > 0,$$

что противоречит (4). Аналогичным образом, из (3) заключаем, что неравенство

$$L_\xi(L_\xi\omega) \geqslant 0,$$

справедливое всюду на M, влечет неравенство

$$L_\xi(\operatorname{div}_\omega \xi) + (\operatorname{div}_\omega \xi)^2 \geqslant 0.$$

Таким образом, из (4) получаем

$$L_\xi(\operatorname{div}_\omega \xi) + (\operatorname{div}_\omega \xi)^2 = 0$$

и, следовательно,

$$L_\xi(L_\xi\omega) = 0.$$

В частности, при $L_\xi(\operatorname{div}_\omega \xi) \geqslant 0$ из (4) заключаем, что $\operatorname{div}_\omega \xi = 0$, так что имеет место равенство $L_\xi\omega = 0$. □

Справедливо следующее утверждение.

Следствие 1. *На замкнутом (т.е. компактном без границы) дифференцируемом многообразии (M,ω) с элементом объема ω не существует потока с вектором скорости ξ и неубывающей вдоль потока логарифмической скоростью объемного расширения $\operatorname{div}_\omega \xi$, если ускорение положительно, т.е. $L_\xi(\operatorname{div}_\omega \xi) > 0$, хотя бы в одной его точке.*

Это утверждение верно, поскольку приведенные требования на скалярные функции $\operatorname{div}_\omega \xi$ и $L_\xi(\operatorname{div}_\omega \xi)$ вступают в противоречие с равенством (4), которое всегда имеет место на любом замкнутом (т.е. компактном без границы) многообразии M.

3. Геометрический анализ динамики объемного расширения на лоренцевых многообразиях. Пусть M — n-мерное ($n \geqslant 3$) гладкое многообразие, g — метрика лоренцевой сигнатуры $(- + \ldots +)$ на M. Пара (M,g) называется *лоренцевым многообразием* (см. [10, с. 55]). Обозначим через ∇ связность Леви-Чивиты на (M,g). Канонический элемент объема (M,g) имеет вид $dv = \sqrt{|\det g|}dx^1\wedge\cdots\wedge dx^n$ в произвольной ориентированной локальной системе координат $x^1,\ldots,x^n$ на M. В этом случае $\operatorname{div}\xi = \operatorname{trace}(\nabla\xi)$ для произвольного гладкого векторного поля ξ на (M,g).

Если на n-мерном ($n \geqslant 3$) лоренцевом многообразим (M,g) задано полное единичное времениподобное векторное поле ξ, то (M,g) называют *ориентированным во времени посредством поля* ξ. Как и ранее, векторное поле ξ на M порождает поток как гладкую однопараметрическую группу локальных диффеоморфизмов, линии тока которой представляют собой интегральные кривые поля ξ.

Пусть M' — *пространственноподобная гиперповерхность* в (M,g) с положительно определенным метрическим тензором g'. Если гиперповерхность M' ортогональна траекториям потока, порожденного единичным времениподобным векторным полем ξ, то существует корректно определенная в каждой точке $x\in M'$ ортогональная проекция $h: T_xM \to T_xM'$, обладающая свойством $hX = X + g(X,\xi)\xi$. где X — произвольное векторное поле на M'. В этом случае связность Леви-Чивиты ∇ на (M,g) индуцирует связность Леви-Чивиты ∇' на M' по формуле $\nabla'_XY = h(\nabla_XY)$ для произвольных векторных полей X and Y, касательных к M' (см. [10, с. 92]). Это означает, что $\nabla'g' = 0$ для $g' = g(h,h)$.

Вектор ускорения потока, порожденного единичным времениподобным векторным полем ξ — это векторное поле $\dot\xi = \nabla_\xi\xi$; его длина $\|\dot\xi\|$ называется *ускорением* потока. Нетрудно проверить, что $\dot\xi$ — касательный вектор к M' в каждой точке $x\in M'$. Подытоживая сказанное, можем записать формулу

$$\operatorname{div}_{M'}\dot\xi = \operatorname{trace}_{g'}\nabla'\dot\xi = \operatorname{trace}_g\nabla\dot\xi + g(\nabla_\xi\dot\xi,\xi);$$

легко доказать, что

$$g(\nabla_\xi\dot\xi,\xi) = -g(\dot\xi,\dot\xi) \leqslant 0.$$

Кроме того, вдоль M' выполнятс следующее соотношение (см. также [26]):

$$\operatorname{trace}_g\nabla\dot\xi = \operatorname{Ric}(\xi,\xi) + \|\sigma\|^2 + (n-1)^{-1}(\operatorname{div}\xi)^2 + L_\xi(\operatorname{div}\xi), \tag{5}$$

где Ric — тензор Риччи многообразия (M,g), а $\|\sigma\|^2 = g(\sigma,\sigma) \geqslant 0$ — квадрат бесследовой части *второй фундаментальной формы* гиперповерхности M' (см. [10, с. 93]). Таким образом, вдоль M' справедлива следующая формула:

$$\operatorname{div}_{M'}\dot\xi = \operatorname{Ric}(\xi,\xi) + \|\sigma\|^2 + (n-1)^{-1}(\operatorname{div}\xi)^2 + L_\xi(\operatorname{div}\xi) - \|\dot\xi\|^2, \tag{6}$$

где $\|\dot\xi\|^2 = g(\dot\xi,\dot\xi) \geqslant 0$. Теперь мы можем сформулировать и доказать следующую теорему.

Теорема 1. *Пусть (M, g) — n-мерное ($n \geqslant 3$) лоренцево многообразие, ориентированное во времени посредством единичного векторного поля ξ. Предположим, что существует пространственноподобная гиперповерхность M', ортогональная полю ξ в каждой точке, причем $\mathrm{Ric}(\xi, \xi) \geqslant 0$ всюду на M' и логарифмическая скорость объемного расширения $\operatorname{div}\xi$ и ускорение $\|\dot{\xi}\|$ потока, порожденного полем ξ, удовлетворяют неравенству $L_\xi(\operatorname{div}\xi) \geqslant \|\dot{\xi}\|^2$ в каждой точке гиперповерхности M'. Тогда справедливы следующие соотношения*:

(i) *если M' — замкнутое подмногообразие в (M, g), то оно является M' вполне геодезическим подмногообразием в (M, g)*;

(ii) *если $L_\xi(\operatorname{div}\xi) > \|\dot{\xi}\|^2$ по крайней мере в одной точке гиперповерхности M', то M' не может быть замкнутым подмногообразием в (M, g).*

Доказательство. Предположим, что гиперповерхность M' является замкнутым пространственноподобным подмногообразием многообразия (M, g), ортогональным в каждой точке некоторому единичному времениподобному векторному полю ξ. Применяя классическую теорему Грина (см [4, с. 281]) к вектору ускорения $\dot{\xi}$, который является касательным к M', получим интегральное соотношение

$$\int_{M'} \Big(\mathrm{Ric}(\xi, \xi) + \|\sigma\|^2 + (n-1)^{-1}(\operatorname{div}\xi)^2 + L_\xi(\operatorname{div}\xi) - \|\dot{\xi}\|^2 \Big)\, dv' = 0, \tag{7}$$

где dv' — канонический элемент объема, определенный метрикой g'. Если наложить условия $\mathrm{Ric}(\xi, \xi) \geqslant 0$ и $L_\xi(\operatorname{div}\xi) \geqslant \|\dot{\xi}\|^2$ всюду на M', то в силу (6) заключаем, что $\sigma = 0$ и $\operatorname{div}\xi = 0$. Это означает, что вторая фундаментальная форма гиперповерхности M' равга нулю, т.е. гиперповерхность M' является *вполне геодезическим подмногообразием* многообразия (M, g), т.е. любая геодезическая на M' является также и геодезической в (M, g) (см. [10, с. 93-94]). С другой стороны, условия $\mathrm{Ric}(\xi, \xi) \geqslant 0$ и $L_\xi(\operatorname{div}\xi) \geqslant \|\dot{\xi}\|^2$, выполненные всюду на M', и неравенство $L_\xi(\operatorname{div}\xi) > \|\dot{\xi}\|^2$, справедливое хотя бы в одной точке гиперповерхности M', противоречат интегральному соотношению (7). ☐

Следующая теорема доказывается аналогично.

Теорема 2. *Пусть (M, g) — n-мерное ($n \geqslant 3$) лоренцево многообразие, ориентированное во времени посредством единичного векторного поля ξ, и M' — пространственноподобная гиперповерхность, ортогональная в каждой точке полю ξ и удовлетворяющая условиям $\mathrm{Ric}(\xi, \xi) \geqslant 0$ и $L_\xi(\operatorname{div}\xi) \geqslant 0$ всюду на M'/ Предположим, что логарифмическая скорость объемного расширения $\operatorname{div}\xi$ и ускорение $\|\dot{\xi}\|$ потока порожденного полем ξ satisfy, удовлетворяют неравенству $\sqrt{n-1}\operatorname{div}\xi \geqslant \|\dot{\xi}\|$ в каждой точке многообразия M'. Тогда справедливы следующие утверждения*:

(i) *если M' — замкнутое подмногообразие в (M, g), то оно является вполне геодезическим подмногообразием в (M, g)*;

(ii) *если одно из неравенств $L_\xi(\operatorname{div}\xi) > 0$ или $\sqrt{n-1}\operatorname{div}\xi > \|\dot{\xi}\|$ справедливо по крайней мере в одной точке гиперповерхности M', то M' не может быть замкнутым подмногообразием в (M, g).*

Замечание 2. Напомним следубщий классический результат (см. [14]): в n-мерном ($n \geqslant 3$) компактном пространстве-времени с тензором Риччи, удовлетворяющим условию $\mathrm{Ric}(X, X) > 0$ для всех векторов $X \neq 0$, не являющихся пространственноподбными, не существует замкнутых (т.е. компактных без границы) пространственноподобных гиперповерхностей.

Пусть замкнутая пространственноподобная гиперповерхность M' — граница ориентированного компактного n-мерного подмногообразия N в n-мерном лоренцевом многообразии (M, g). Предположим, что M' снабжена естественной ориентацией, определенной единичным времениподобным векторным полем $\mathcal{N}$, направленным наружу в каждой точке $x \in M'$. Далее, определим единичное времениподобное векторное поле ξ на N, которое ортогонально границе $\partial N = M'$ в каждой граничной точке. Это означает, что $\xi = \varepsilon\mathcal{N}$ для $\varepsilon = \pm 1$ в произвольной точке $x \in M'$. В таком случае имеем интегральную формулу (см. [8])

$$\int\limits_N \Big(L_\xi\big(\operatorname{div}\xi\big) + \big(\operatorname{div}\xi\big)^2\Big)\,dv = (n-1)\int\limits_{M'} H'\,dv', \tag{8}$$

где H' — *средняя кривизна* гиперповерхности M'. Кроме того, в [8] было доказано, что $\operatorname{div}\xi = -\varepsilon(n-1)H'$ всюду на M'.

Определим скалярный инвариант

$$H'(M') = \int\limits_{M'} H'\,dv'$$

— *полную среднюю кривизну* замкнутой гиперповерхности M'. Тогда из (8) заключаем, что $H'(M') \geqslant 0$, если $L_\xi(\operatorname{div}\xi) \geqslant 0$ всюду на N. В частности, если $H'(M') = 0$ и $L_\xi(\operatorname{div}\xi) \geqslant 0$, то из (8) получаем, что $\operatorname{div}\xi = 0$ на N. С другой стороны, классическая теорема Стокса для векторного поля ξ имеет вид (см. [28])

$$\int\limits_N \big(\operatorname{div}\xi\big)\,dv = -\int\limits_{M'} g(\xi,\mathcal{N})\,dv'.$$

Если $\operatorname{div}\xi$ тождественно равно нулю на N, то из этой формулы заключаем, что $\xi = 0$ всюду на M'. Последнее равенство противоречит сделанному выше предположению относительно векторного поля ξ.

В качестве примера, в котором $H'(M') = 0$, приведем *максимальную гиперповерхность* M', которая по определению удовлетворяет условию $H' = 0$ в каждой точке $x \in M'$ (см. [21,23]).

Сформулируем следующее утверждение.

Теорема 3. *Пусть замкнутая пространственноподобная гиперповерхность M' является границей ориентированного компактного n-мерного подмногообразия N в n-мерном лоренцевом многообразии (M,g). Предположим, что единичное времениподобное векторное поле ξ, определенное на N, ортогонально гиперповерхности M'. Если $L_\xi(\operatorname{div}\xi) \geqslant 0$ всюду на N, то полная средняя кривизна $H'(M')$ гиперповерхности M' удовлетворяет неравенству $H'(M') > 0$. В частности, если $L_\xi(\operatorname{div}\xi) \geqslant 0$, то M' не может быть максимальной.*

Если предположить, что пространственноподобная гиперповерхности M' является полным некомпактным ориентированным римановым многообразием, то при помощи обобщенной теоремы Грина (см. [11,12]) можно доказать следующее утверждение.

Теорема 4. *Предположим, что в n-мерном $(n \geqslant 3)$ лоренцевом многообразим (M,g) существует пространственноподобная полная (некомпактная) ориентированная гиперповерхность M' и такой ортогональный ей поток с единичным времениподобным вектором скорости ξ, что $|\dot{\xi}| \in L^1(M',g')$. Если $\operatorname{Ric}(\xi,\xi) \geqslant 0$ и логарифмическая скорость объемного расширения $\operatorname{div}\xi$ удовлетворяет неравенству $L_\xi(\operatorname{div}\xi) \geqslant \|\dot{\xi}\|^2$ в каждой точке гиперповерхности M', то M' — вполне геодезическое подмногообразие в (M,g).*

Доказательство. По условию теоремы, векторное поле $\dot{\xi} = \nabla_\xi\xi$ является касательным к полному некомпактному ориентированному риманову многообразию M', на котором выполнено условие (6). Если потребовать выполнения условий $\operatorname{Ric}(\xi,\xi) \geqslant 0$ и $L_\xi(\operatorname{div}\xi) \geqslant \|\xi\|^2$ всюду на M', то в силу (6) получим, что неравенство $\operatorname{div}\dot{\xi} \geqslant 0$ также выполнено. В этом случае благодаря обобщенной теореме Грина заключаем, что $\operatorname{div}\dot{\xi} = 0$, если $|\dot{\xi}| \in L^1(M',g')$. Тогда, в частности, из (6) заключаем, что $\operatorname{div}\xi = \sigma = 0$. Это означает, что вторая фундаментальная форма гиперповерхности M' обращается в нуль и, следовательно, сама гиперповерхность M' является *вполне геодезическим подмногообразием в* (M,g). $\square$

Следующая теорема доказывается аналогично.

Теорема 5. *Пусть (M,g) — n-мерное ($n \geqslant 3$) лоренцево многообразие, ориентированное во времени посредством единичного векторного поля ξ. Предположим, что существует такая ориентированная полная пространственноподобная гиперповерхность M', ортогональная полю ξ, что $\mathrm{Ric}(\xi,\xi) \geqslant 0$ и $L_\xi(\operatorname{div}\xi) \geqslant 0$ всюду на M'. Если, кроме того, логарифмическая скорость объемного расширения $\operatorname{div}\xi$ и ускорение $\|\dot{\xi}\|$ потока, порожденного полем ξ, удовлетворяют условиям $\sqrt{n-1}\operatorname{div}\xi \geqslant \|\dot{\xi}\|$ в каждой точке гиперповерхности M' и $\|\dot{\xi}\| \in L^1(M',g')$, то M' — вполне геодезическое подмногообразие в (M,g).*

4. Обобщенное пространство-время Робертсона—Уокера. В качестве примера рассмотрим *обобщенное пространство-время Робертсона—Уокера*, которое является искривленным произведением $I \times_f \bar{M}$ с одномерной базой (I, dt^2), где $I = (a,b) \subset \mathbb{R}$ — интервал, $(n-1)$-мерным слоем $(\bar{M}, g)$, где $\bar{g}$ — риманова метрика, $f : I \to \mathbb{R}$ — положительная функция искривления; $g = -dt^2 + f^2(t)\bar{g}$ — лоренцева метрика (см. [9]).

Замечание 3. Обобщенные пространства-времена Робертсона—Уокера включают пространства-времена Эйнштейна—де Ситтера, космологические модели Фридмана, статическое пространство-время Эйнштейна и пространство-время де Ситтера. Хорошо известно, что любое пространство-время Робертсона—Уокера является пространством-временем идеальной жидкости и что в размерности $n = 4$ обобщенное пространство-время Робертсона—Уокера является пространством-временем идеальной жидкости тогда и только тогда, когда оно является пространством-временем Робертсона—Уокера (см., например, [9, 17, 25]).

Для обобщенного пространства-времени Робертсона—Уокера $I \times_f \bar{M}$ векторное поле $\xi = \partial/\partial t$ обладает следующими свойствами (см. [25]):

(i) оно *единичное и времениподобное*, т.е. удовлетворяет равенству $g(\xi,\xi) = -1$. В случае $n = 4$ векторное поле ξ рассматривается как вектор 4-скорости релятивистской жидкости в общей теории относительности (см. [5, с. 566]);

(ii) оно *геодезическое*, т.е. удовлетворяет уравнению $\nabla_\xi \xi = 0$. В случае $n = 4$ это условие эквивалентно обращению к нуль 4-ускорения $\dot{\xi}$ релятивистской жидкости с вектором 4-скорости ξ (см. [5, с. 566]);

(iii) оно является *почти конформным полем Киллинга* (см. [26]), т.е. порождает однопараметрическую группу локальных *ортогонально конформных преобразований.* Это означает, что $(L_\xi g)(X,Y) = 2\rho g(X,Y)$ для любых $X, Y \in \xi^\perp$. В случае $n = 4$ это условие эквивалентно обращению в нуль *тензора сдвига* σ вектора 4-скорости ξ релятивистской жидкости (см. [5, с. 566]);

(iv) оно *не имеет вращения*: распределение $\xi^\perp$, ортогональное к ξ, интегрируемо. В случае $n = 4$ это условие эквивалентно обращению в нуль *завихренности* или 2-*формы вращения* ω вектора 4-скорости ξ релятивистской жидкости (см. [5, с. 566]);

(v) *его дивергенция зависит от g не пространственноподобным образом*: $\operatorname{grad}(\operatorname{div}\xi)$ поточечно параллелен ξ.

Принимая во внимание эти свойства, мы можем сформулировать следующее утверждение.

Следствие 2. *Пусть (M,g) — полное некомпактное лоренцево многообразие размерности $n \geqslant 3$ и ξ — непараллельное векторное поле, обладающее свойствами* (i)–(v). *Если поток с вектором скорости ξ имеет логарифмическую скорость объемного расширения, которая не убывает вдоль траекторий потока, т.е. $L_\xi \operatorname{div}\xi \geqslant 0$, то (M,g) глобально является обобщенным пространством-временем Робертсона—Уокера.*

Доказательство. Во-первых, напомним следующую теорему (см. [17, теорема 3.2]). Пусть (M,g) — полное некомпактное лоренцево многообразие размерности $\dim M \geqslant 3$ и ξ — такое непараллельное единичное времениподобное векторное поле на (M,g), что ξ замкнуто и ортогонально конформно и $\operatorname{grad}(\operatorname{div}\xi)$ поточечно параллельно полю ξ. Если, кроме того, $\mathrm{Ric}(\xi,\xi) \leqslant 0$, то многообразие (M,g) глобально является обобщенным пространством-временем Робертсона—Уокера. Во-вторых, покажем, что свойства (ii) и (iv) эквивалентны условию $d\theta = 0$, где $\theta(X) = g(\xi, X)$, т.е. векторное поле ξ *замкнуто*. В-третьих, из (6) получаем

$$\mathrm{Ric}(\xi,\xi) = -L_\xi(\operatorname{div}\xi) - \frac{1}{n-1}(\operatorname{div}\xi)^2. \tag{9}$$

Далее из (9) заключаем, что если $L_\xi \operatorname{div}\xi \geqslant 0$, то $\mathrm{Ric}(\xi,\xi) \leqslant 0$. Из этих трех утверждений вытекает справедливость следствия 2. □

Докажем также следующее утверждение.

Следствие 3. *Пусть (M,g) — полное лоренцево многообразие и ξ — непараллельное векторное поле, обладающее свойствами* (i)–(v). *Если поток с вектором скорости ξ имеет логарифмическую скорость объемного расширения, не убывающую вдоль траекторий потока, т.е. $L_\xi \operatorname{div}\xi \geqslant 0$, то существует такое векторное поле V, что $V = |V|\xi$ и $L_V \operatorname{div} V \leqslant 0$, т.е. поток с вектором скорости V имеет логарифмическую скорость объемного расширения, которая не возрастает вдоль траекторий потока.*

Доказательство. Пусть (M,g) — полное лоренцево многообразие и ξ — векторное поле, обладающее свойствами (i)–(v). Тогда существует такое конциркулярное векторное поле V, что $\xi = V/|V|$ (см. [17, Lemma 2.8]). В таком случае имеем равенство

$$L_V \operatorname{div} V = -\frac{n}{n-1}\,|V|^2\,\mathrm{Ric}(\xi,\xi),$$

где $|V|^2 < 0$. Следовательно, из неравенства $L_\xi \operatorname{div}\xi \geqslant 0$ получаем, что $L_V \operatorname{div} V \leqslant 0$. □

В заключение докажем следующее утверждение.

Следствие 4. *Пусть (M,g) — обобщенное пространство-время Робертсона—Уокера $\mathbb{R}\times_f \bar{M}$ с лоренцевой метрикой $g = -dt^2 + f^2(t)\,\bar{g}$. Если логарифмическая скорость объемного расширения $\operatorname{div}\xi$ удовлетворяет неравенству $L_\xi \operatorname{div}\xi \leqslant -(n-1)^{-1}(\operatorname{div}\xi)^2$ при $\xi = \partial/\partial t$, то f постоянна, $f = C$, и многообразие (M,g) iзометрично прямому произведению $M = \mathbb{R}\times\bar{M}$ с метрикой $g = -dt^2 + \tilde{g}$, где $\tilde{g} = C^2\cdot\bar{g}$.*

Доказательство. При помощи (9) неравенство $L_\xi\xi \leqslant -(n-1)^{-1}(\operatorname{div}\xi)^2$ можно переписать в виде $\mathrm{Ric}(\xi,\xi) \geqslant 0$. В таком случае либо f является постоянной, $f = C$, либо $I = (a,b) \neq \mathbb{R}$ (см. [25]). Однако условия следствия 4 иcлючают второй случай. □

5. Геометричекий анализ динамики объемного расширения в пространстве-времени. Напомним, что *пространство-время* — это связное четырехмерное ориентированное лоренцево многообразие (M,g) (см. [24, с. 27]). В случае $n = 4$ уравнение (5) вытекает из уравнения Ландау—Райчаудхури (см. [24, с. 97–98]), описывающего динамику потоков космологической жидкости в пространстве-времени. Линии тока этой жидкости являются траекториями потока, порожденного единичным времениподобным векторным полем ξ (см. [24, с. 92]). Гидродинамический смысл переменных, входящих в уравнение (5), следующий (см. [5, с. 566] и [24, с. 96]): σ — тензор трансверсального сдвига, θ — объемная дивергенция, $\dot{\xi} = \nabla_\xi\xi$ — векторное поле 4-ускорения космологической жидкости. В случае *идеальной жидкости* имеем $\mathrm{Ric}(\xi,\xi) = 4\pi(\mu + 3\rho)$, где μ — плотность энергии, ρ — давление. Кроме того, в случае $n = 4$, следуя С. Хокингу и Р. Пенроузу (см. [18, с. 539]), неравенство $\mathrm{Ric}(X,X) \geqslant 0$, справедливое для всех единичных времениподобных векторов X, назовем *энергетическим условием* для пространства-времени.

Напомним также, что возрастание логарифмической скорости объемного расширения влечет возрастание скорости объемного расширения; это прямо связано с проблемой ускоренного расширения Вселенной. В случае четырехмерного пространства-времени последние две теоремы приобретают физическое содержание. Справедливы следующие два утверждения (ср. [6, 14]).

Следствие 5. *Предположим, что в пространстве-времени (M,g), удовлетворяющем энергетическому условию, существует пространственноподобная гиперповерхность M' и поток космологической жидкости с вектором скорости ξ, ортогональным гиперповерхности M'. Если логарифмическая скорость объемного расширения $\operatorname{div}\xi$ и ускорение $\|\dot{\xi}\|$ потока удовлетворяют неравенству $L_\xi(\operatorname{div}\xi) \geqslant \|\dot{\xi}\|^2$ в каждой точке гиперповерхности M' и неравенство*

$L_\xi(\operatorname{div}\xi) > \|\dot{\xi}\|^2$ *выполняется по крайней мере в одной точке* M', *то* M' *не может быть замкнутым подмногообразием многообразия* (M, g).

Следствие 6. *Предположим, что в пространстве-времени* (M, g), *удовлетворяющем энергетическому условию, существует ориентированная полная пространственноподобная гиперповерхность* M' *и поток космологической жидкости с вектором скорости* ξ, *ортогональным гиперповерхности* M'. *Если логарифмическая скорость объемного расширения* $\operatorname{div}\xi$ *и ускорение* $\|\dot{\xi}\|$ *потока удовлетворяют неравенству* $L_\xi(\operatorname{div}\xi) \geqslant \|\dot{\xi}\|^2$ *в каждой точке гиперповерхности* M', *то* M' *является вполне геодезическим подмногообразием многообразия* (M, g).

Следующие утверждения непосредственно вытекают из теоремы 4.

Следствие 7. *Предположим, что в пространстве-времени* (M, g), *удовлетворяющем энергетическому условию, существует ориентированная полная пространственноподобная гиперповерхность* M' *и поток космологической жидкости с вектором скорости* ξ, *ортогональным к* M' *в каждой точке. Если, кроме того,* $L_\xi(\operatorname{div}\xi) \geqslant 0$ *всюду на* M' *и логарифмическая скорость объемного расширения* $\operatorname{div}\xi$ *и ускорение* $\|\dot{\xi}\|$ *потока удовлетворяют условиям* $\sqrt{3}\operatorname{div}\xi \geqslant \|\dot{\xi}\|$ *в каждой точке гиперповерхности* M' *и* $\|\dot{\xi}\| \in L^1(M', g')$, *то* M' *является вполне геодезическим подмногообразием в* (M, g).

Каждое замкнутое ориентированное трехмерное многообразие M' является границей некоторого четырехмерного многообразия (см. [13,16]). В нашем случае это означает, что для замкнутой ориентированной пространственноподобной гиперповерхности M' существует такое четырехмерное подмногообразие $N \subset M$, что $\partial N = M'$. В этом случае справедливо следующее утверждение, вытекающее из теоремы 3.

Следствие 8. *Пусть замкнутая пространственноподобная гиперповерхность* M' *является границей ориентированного компактного четырехмерного подмногообразия* N *в пространстве-времени* (M, g). *Предположим, что поток космологической жидкости с вектором скорости* ξ, *определенный на* N, *ортогонален к* M'. *Если логарифмическая скорость объемного расширения* $\operatorname{div}\xi$ *удовлетворяет неравенству* $L_\xi(\operatorname{div}\xi) \geqslant 0$ *всюду на* N, *то*

$$\int_{M'} (\operatorname{div}\xi)\, dv' > 0.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Арнольд В. И., Хесин Б. А.* Топологические методы в гидродинамике. — М.: МЦНМО, 2007.
2. *Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т.* Современная геометрия: методы и приложения. — М.: Наука, 1986.
3. *Кобаяси Ш.* Группы преобразований в дифференциальной геометрии. — М.: Наука, 1986.
4. *Кобаяси Ш., Номидзу К.* Основы дифференциальной геометрии. Т. 1. — М.: Наука, 1981.
5. *Мизнер Ч., Торн К., Уилер Дж.* Гравитация. Т. 1-3. — М.: Мир, 1977.
6. *Пенроуз Р.* Структура пространства-времени. — М.: Мир, 1972.
7. *Степанов С. Е.* Техника Бохнера для m-мерного компактного многообразия с $\mathrm{SL}(m, \mathbb{R})$-структурой// Алгебра и анализ. — 1998. — *10*, № 4. — С. 192–209.
8. *Степанов С. Е.* Об одном аналитическом методе общей теории относительности// Теор. мат. физ. — 2000. — *122*, № 3. — С. 482–496.
9. *Alias L. J., Romero A., Sánchez M.* Uniqueness of complete spacelike hypersurfaces of constant mean curvature in generalized Robertson–Walker spacetimes// Gen. Relat. Grav. — 1995. — *27*. — С. 71–84.
10. *Beem J. K., Ehrlich P. E., Easley K. L.* Global Lorentzian geometry. — New York: Marcel Dekker, 1996.
11. *Caminha A.* The geometry of closed conformal vector fields on Riemannian spaces// Bull. Braz. Math. Soc. New Ser. — 2011. — *42*, № 2. — С. 277–300.
12. *Caminha A., Souza P., Camargo F.* Complete foliations of space forms by hypersurfaces// Bull. Braz. Math. Soc. New Ser. — 2010. — *41*, № 3. — С. 339–353.
13. *Costantino F., Thurston D.* 3-Manifolds efficiently bound 4-manifolds// J. Topol. — 2008. — *1*, № 3. — С. 703–745.
14. *Galloway G. J.* Some global aspects of compact space-times// Arch. Math. — 1984. — *42*, № 2. — С. 168–172.

15. *Godinho L., Natario J.* An introduction to Riemannian geometry with applications to mechanics and relativity. — Heidelberg–New York–London: Springer-Verlag, 2014.
16. *Guillou L., Marin A.* A la Recherche de la Topologie Perdue. — Boston–Basel–Stuttgart: Birkhäuser, 1986.
17. *Gutierres M., Olea B.* Global decomposition of a Lorentzian manifold as a generalized Robertson–Walker space// Differ. Geom. Appl. — 2009. — *27*. — С. 145–156.
18. *Hawking S. W., Penrose R.* The singularities of gravitational collapse and cosmology// Proc. Roy. Soc. A. — 1970. — *314*. — С. 529–548.
19. *Markus L.* Parallel dynamic systems// Topology. — 1969. — *8*. — С. 47–57.
20. *O'Neil B.* Semi-Riemannian geometry with applications to relativity. — San Diego: Academic Press, 1983.
21. *Nishikawa S.* On maximal spacelike hypersurfaces in Lorentzian manifold// Nagoya Math. J. — 1984. — *95*. — С. 117–124.
22. *Romero A.* The introduction of Bochner's technique on Lorentzian manifolds// Nonlin. Anal. — 2001. — *47*, № 5. — С. 3047–3059.
23. *Romero A., Rubio R. M., Salamanka J. J.* Uniqueness of complete maximal hypersurfaces in spatially parabolic generalized Robertson–Walker spacetimes// Class. Quantum Grav. — 2013. — *30*. — 115007.
24. *Sachs R. K., Wu H.* General Relativity for Mathematicians. — New York: Springer-Verlag, 1977.
25. *Sánchez M.* On the geometry of generalized Robertson–Walker spacetimes: geodesics// Gen. Relat. Grav. — 1998. — *30*, № 6. — С. 915–932.
26. *Stepanov S. E., Mikeš J.* The generalized Landau–Raychaudhuri equation and its applications// Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys. — 2015. — *12*, № 8. — 1560026.
27. *Tu L. W.* An introduction to manifolds. — New York: Springer Science+Business Media, 2008.
28. *Unal B.* Divergence theorems in semi-Riemannian geometry// Acta Appl. Math. — 1995. — *40*. — С. 173–178.

С. Е. Степанов
Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации, Москва;
Всероссийский институт научной и технической информации
Российской академии наук (ВИНИТИ РАН), Москва
E-mail: `s.e.stepanov@mail.ru`

И. Е. Денежкина
Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации, Москва
E-mail: `yned@mail.ru`

А. В. Овчинников
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова;
Всероссийский институт научной и технической информации
Российской академии наук (ВИНИТИ РАН), Москва
E-mail: `ovchinnikov@viniti.ru`

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 146 (2018). С. 113–136

УДК 512.54, 512.64

ТАБЛИЦЫ ЮНГА И ПРОЕКЦИИ ТЕНЗОРОВ

© 2018 г. **М. ЮКЛ, Л. ЮКЛОВА, Й. МИКЕШ**

Аннотация. Статья посвящена диаграммам Юнга и L_n^1-эквивариантным проекциям тензорных пространств. Изложена теория представления конечных групп, разработанная в соответствии с работами Г. Вейля и Г. Бернера.

Ключевые слова: диаграмма Юнга, конечная группа, представление.

AMS Subject Classification: 20C30, 15A69

СОДЕРЖАНИЕ

Введение 113
1. Диаграммы Юнга 114
2. Проекции тензоров 123
3. Проекции тензоров типа $(1, k)$ 131
4. Проекции симметрических и антисимметрических тензоров типа (r, k) 132
Список литературы 135

Введение

Статья посвящена диаграммам Юнга и L_n^1-эквивариантным проекциям тензорных пространств. В работе изложена теория представления конечных групп, разработанная в соответствии с работами Вейля [1–3] и Бернера [5].

В начале двадцатого века А. Юнг ввел в рассмотрение таблицы (диаграммы) схематического построения минимальных идемпотентов для симметрических групповых алгебр. Затем Г. Вейль построил теорию представлений и, по словам А. Юнга, построил идемпотенты и с их помощью классы симметрий. А. Юнг разработал различные способы построения неприводимых представлений симметрических групп S_n на основе предложенных им диаграмм и установил, что стандартные диаграммы могут служить для вычисления размерностей представлений S_n, индексируемых по основной диаграмме.

Таблицы Юнга связаны с проекциями тензоров типа $(0, k)$ по Вейлю и позволяют получать разложения тензорных пространств на неприводимые подпространства и вычислять L_n^1-эквивариантные проекции. В данной работе представлены также проекции тензоров других типов. В работе [13] Д. Крупки и Й. Янышки приведены проекции тензоров типа $(1, k)$, симметричные по индексам. Существуют две ненулевые и нетождественные проекции пространства, определяющие разложение в прямую сумму тензорного пространства $\mathbb{R}^n \otimes S^k\mathbb{R}^{n*}$. В работе [15] Л. Юкловой (Лакомой) исследованы проекции тензоров типа $(1, k)$, обладающие симметриями (антисимметриями), определенными диаграммой Юнга. Разработаны методы вычисления этих проекций. Указанные методы были также использованы в [15] для вычисления проекций тензоров типа (r, k), которые симметричны или антисимметричны по верхним или нижним индексам. Эти методы могут также использоваться для вычисления проекций тензоров общего типа, которые

Работа выполнена при поддержке гранта IGA PrF 2017012 Университета Палацкого в г. Оломоуце (Чешская Республика).

обладают симметриями (антисимметриями) верхних и нижних индексов, заданными диаграммами Юнга.

Далее мы вычисляем L^1_n-эквивариантные проекции тензорных пространств, вычисляем абсолютные инварианты тензоров и приводим некоторые их важные свойства.

Вышеперечисленные результаты о проекциях тензоров были использованы нами в теории тензорных разложений (см. [9, 10, 12, 16–20]).

1. Диаграммы Юнга

Основная цель этого раздела заключается в том, чтобы описать неприводимые представления группы S_N. Мы вводим понятие представления и получаем разложения этих представлений. Далее описаны групповые кольца, регулярные представления и их свойства. Изучается разложение группового кольца в прямую сумму простых двусторонних идеалов; это разложение дает систему классов неприводимых представлений. В конце раздела при помощи указанного разложения приведены представления симметрической группы, определяемые диаграммами Юнга. В конце раздела рассматривается проблема существования и эквивалентности диаграмм Юнга. Основные понятия и приведенные результаты этой части обоснованны в [1, 4, 5, 21].

1.1. Представления.

Определение 1.1. Пусть G — конечная группа, V — n-мерное векторное пространство над полем K и $GL(V)$ — группа линейных отображений $f : V \to V$. Гомоморфизм $F : G \to GL(V)$ называют *n-мерным представлением* группы G в пространстве V.

После выбора базиса $\mathcal{B}$ в V каждому элементу s, принадлежащему группе G, ставится в соответствие $(n \times n)$-матрица $\boldsymbol{F}(s)$ гомоморфизма F в базисе $\mathcal{B}$, причем умножению элементов группы соответствует умножение матриц:

$$\boldsymbol{F}(st) = \boldsymbol{F}(s)\boldsymbol{F}(t), \quad \boldsymbol{F}(1) = \boldsymbol{E}_n. \tag{1.1}$$

Определение 1.2. Пусть $F : G \to GL(V)$ и $F' : G \to GL(V')$ — два n-мерных представления группы G. Эти представления называются *эквивалентными*, если существует такой изоморфизм $S : V \to V'$, что $F' \circ S = S \circ F$.

С точки зрения матриц $\boldsymbol{F}$ и $\boldsymbol{F}'$ представления эквивалентны, если существует такая невырожденная $(n \times n)$-матрица $\boldsymbol{S}$, что $\boldsymbol{F}' = \boldsymbol{S}\boldsymbol{F}\boldsymbol{S}^{-1}$.

Размерность n пространства представлений также называют *степенью* представления.

Пример 1.1. Представление симметрической группы S_n. Симметрическая группа S_n является группой всех $n!$ перестановок множества $\mathcal{M} = \{1, 2, \dots n\}$. Каждой перестановке $\rho \in S_n$ поставим в соответствие ее знак:

$$\rho \mapsto \varepsilon^\rho = \pm 1.$$

Определение 1.3. Представление называется *точным*, если гомоморфизм F является взаимно однозначным, т.е. если различные элементы группы отображаются в разные матрицы.

Из (1.1) вытекает, что матрицы $\boldsymbol{F}(s)$ образуют группу G', причем отображение G на G' является гомоморфизмом. Ядро этого гомоморфизма — нормальная подгруппа N из G, элементы которой отображаются в единичную матрицу $\boldsymbol{E}_n$. Все элементы класса N представляются одной и той же матрицей, и в качестве точного представления фактор-группы G/N можно взять $\boldsymbol{F}(s)$. Можно сказать, что представление $F(s)$ группы G принадлежит нормальной подгруппе N. Представление точное, если подгруппа N содержит только единицу группы. Если группа G проста, т.е. не имеет нормальных подгрупп, отличных от G, то каждое представление является точным. Исключением являются тривиальные представления, которые каждому элементу группы ставят в соответствие единичную матрицу.

Пусть $\boldsymbol{A}(s)$ — система матриц гомоморфизмов пространства V. Система $\boldsymbol{A}(s)$ называется *приводимой*, если в V существует собственное инвариантное подпространство W_1. Тогда матрицу

$\boldsymbol{A}(s)$ можно записать в виде

$$\boldsymbol{A}(s) = \left(\begin{array}{c|c} \boldsymbol{A}_1(s) & \boldsymbol{K}(s) \\ \hline 0 & \boldsymbol{A}_2(s) \end{array}\right). \tag{1.2}$$

Если матрица $\boldsymbol{A}(s)$ не является приводимой, то ее называют неприводимой.

Предположим существование второго инвариантного подпространства W_2, удовлетворяющего условию $V = W_1 \oplus W_2$. Тогда

$$\boldsymbol{A}(s) = \left(\begin{array}{c|c} \boldsymbol{A}_1(s) & \boldsymbol{O} \\ \hline \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}_2(s) \end{array}\right) = \boldsymbol{A}_1(s) + \boldsymbol{A}_2(s), \tag{1.3}$$

где $\boldsymbol{A}_1(s)$ и $\boldsymbol{A}_2(s)$ — гомоморфизмы в подпространствах. В этом случае будем говорить, что система $\boldsymbol{A}(s)$ является *разложимой*, и писать $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}_1 + \boldsymbol{A}_2$.

Расширим это понятие на случай нескольких инвариантных подпространств. Если в пространстве V существуют k инвариантных подпространств $W_1, W_2, \ldots, W_k$, удовлетворяющие условию $V = W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_k$, то

$$\boldsymbol{A}(s) = \left(\begin{array}{c|c|c|c} \boldsymbol{A}_1(s) & \boldsymbol{O} & \ldots & \boldsymbol{O} \\ \hline \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}_2(s) & \ldots & \boldsymbol{O} \\ \hline \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \hline \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \ldots & \boldsymbol{A}_k(s) \end{array}\right) = \boldsymbol{A}_1(s) + \boldsymbol{A}_2(s) + \cdots + \boldsymbol{A}_k(s), \tag{1.4}$$

где $\boldsymbol{A}_1(s), \boldsymbol{A}_2(s), \ldots, \boldsymbol{A}_k(s)$ — гомоморфизмы инвариантных подпространств. Система $\boldsymbol{A}(s)$ разлагается следующим образом:

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}_1 + \boldsymbol{A}_2 + \cdots + \boldsymbol{A}_k.$$

Определение 1.4. Представление F, соответствующее матрице $\boldsymbol{F}(s)$, называют *приводимым*, *неприводимые* и *разложимым*, если матрица $\boldsymbol{F}(s)$ является соответственно приводимой, неприводимой и разложимой.

Определение 1.5. След матрицы $\boldsymbol{F}(s)$ называют *характером* представления.

Эквивалентные представления имеют одинаковые характеры.

Две следующие леммы известны как леммы Шура.

Лемма 1.1. *Пусть G — группа, F и F' — два неприводимых представления группы G в векторных пространствах V и V', n и n' — размерности этих представлений. Если существует такая $(n \times n')$-матрица $\boldsymbol{S}$, что*

$$\boldsymbol{S}\boldsymbol{F}(s) = \boldsymbol{F}'(s)\boldsymbol{S} \tag{1.5}$$

для всех $s \in G$, то либо $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{O}$, либо $n = n'$ и матрица $\boldsymbol{S}$ невырождена.

Лемма 1.2. *Пусть $\boldsymbol{F}$ — n-мерное неприводимое представление группы G в векторном пространстве V. Если существует такая $(n \times n)$-матрица $\boldsymbol{S}$, что*

$$\boldsymbol{S}\boldsymbol{F}(s) = \boldsymbol{F}(s)\boldsymbol{S} \tag{1.6}$$

для всех $s \in G$, то матрица $\boldsymbol{S}$ кратна единичной $\boldsymbol{E}_n$.

Из второй леммы Шура непосредственно вытекает следующее утверждение.

Лемма 1.3. *Все неприводимые представления абелевой группы имеют степень* 1.

Следующая теорема известна как теорема Машке. Из этой теоремы следует, что приводимость представления конечных групп эквивалентна их разложимости.

Теорема 1.1. *Каждое приводимое представление конечной группы разложимо.*

Если представление конечной группы приводимо, то оно является прямой суммой не менее чем двух инвариантных подпространств f_1 и f_2. Тогда либо f_1 неприводимо, либо оно является прямой суммой инвариантных подпространств; это же верно и для пространства f_2. Продолжая процесс, мы за конечное число шагов получим чисто неприводимые подпространства. Таким образом, доказана следующая теорема для представлений конечных групп.

Теорема 1.2. *Для каждого представления конечной группы пространство представлений является прямой суммой неприводимых подпространств:*

$$\mathbb{F} = f_1 \oplus f_2 \oplus \cdots \oplus f_k. \tag{1.7}$$

1.2. Групповое кольцо и регулярные представления. В этом разделе рассматривается линейное замыкание множества матриц $\boldsymbol{F}(s)$ представлений конечной группы G. Это замыкание состоит из всех матриц $\sum\limits_s \mu(s)\boldsymbol{F}(s)$, где $\mu(s)$ — числовые коэффициенты. Эта совокупность матриц представляет собой векторное пространство, размерность которого не превосходит числа g, которое достигается тогда и только тогда, когда g матриц линейно независимы.

По данной группе построим групповое кольцо.

Определение 1.6. Пусть G — конечная группа. *Групповым кольцом* $\mathcal{O}$ (или *групповой алгеброй*) $\mathcal{O}_G$ называется множество формальных сумм

$$a = \sum_{s\in G} \alpha(s) \cdot s = \sum_{s\in G} s \cdot \alpha(s), \tag{1.8}$$

где $\alpha(s)$ — произвольные числовые коэффициенты. Элементы $a, b, \ldots$ группового кольца называются групповыми числами.

Групповое число $\lambda a = a\lambda$ имеет коэффициенты $\lambda\alpha(s)$; $a + b$ имеет коэффициенты $\alpha(s) + \beta(s)$. Произведение получим из группового произведения

$$c = ab = \sum_t \alpha(t) \cdot t \sum_r \beta(r) \cdot r = \sum_{t,r} \alpha(t)\beta(r) \cdot tr = \sum_s \gamma(s) \cdot s, \tag{1.9}$$

где коэффициенты определены следующим образом:

$$\gamma(s) = \sum_{tr=s} \alpha(t)\beta(r) = \sum_t \alpha(t)\beta(t^{-1}s) = \sum_r \alpha(sr^{-1})\beta(r).$$

В общем случае вышеуказанное произведение не является коммутативным. Из равенства $a = 0$ вытекает $\alpha(s) = 0$ для всех s, т.е. групповые элементы являются линейно независимыми и образуют базис группового кольца. Для каждого представления группы G существует только одно представление $\mathcal{O}$, построенное так, что a соответствует матрице $\sum\limits_s \alpha(s)\boldsymbol{F}(s)$. Очевидно, что эквивалентность представлений сохраняется этим вложением. Подпространство, инвариантное относительно $\mathcal{O}$, также инвариантно относительно G, а подпространство, инвариантное относительно G, инвариантно относительно $\mathcal{O}$. Если представление неприводимо, приводимо или разложимо как представление G, то как представление $\mathcal{O}$ оно имеет те же свойства и наоборот.

Определение 1.7. *Левый идеал* $\mathcal{O}$ — это линейное подпространство $\mathcal{I}$, которое вместе с каждым элементом x содержит все элементы ax, $a \in \mathcal{O}$. Символически это можно записать следующим образом: для любого $x \in \mathcal{I}$ имеем $\mathcal{O}x \subseteq \mathcal{I}$.

Правый и двусторонний идеалы определяют подобным же образом. Левый (правый) идеал называется *минимальным*, если он не содержит никакого левого (правого) идеала, кроме самого себя и нулевого идеала. Двусторонний идеал, который не содержит никакого двустороннего идеала, кроме самого себя и нулевого идеала, называется *простым*.

Левое умножение $x' = ax$ при фиксированном кольцевом элементе a является гомоморфизмом векторного пространства $\mathcal{O}$. Если $x = \sum\limits_s \xi(s) \cdot s$ и $x' = \sum\limits_s \xi'(s) \cdot s$, то $\xi'(s) = \sum\limits_t \alpha(st^{-1})\xi(t)$. Эти гомоморфизмы складываются и умножаются, как кольцевые элементы: $(a + b)x = ax + bx$, $(ab)x = a(bx)$. Тождественное отображение соответствует 1. Это представление $\mathcal{O}$ называется *регулярным представлением*. Элемент s представлен матрицей $A(a)$ с элементами $\alpha(s, t) = \alpha(st^{-1})$. Инвариантными подпространствами для этого представления являются, очевидно, левые идеалы, а неприводимыми подпространствами — минимальные левые идеалы. Эквивалентность для левых идеалов определяется следующим образом: эквивалентное отображение из $\mathcal{I}$ на $\mathcal{I}'$ является взаимно однозначным гомоморфизмом, который коммутирует с левым произведением. Если x

отображается на x', то ax отображается на ax', где $x \in \mathcal{I}$, $x' \in \mathcal{I}'$ и a — произвольный элемент $\mathcal{O}$. Правое произведение на любой элемент b является гомоморфизмом, который обладает свойством $x' = xb$, и коммутирует с левым умножением: $(ax)b = a(xb)$.

Таким образом, в регулярном представлении групповое кольцо является пространством представления, и мы можем переформулировать теоремы 1.1 и 1.2 для левых идеалов.

Теорема 1.3. *Пусть $\mathcal{O}$ — групповое кольцо. Если $\mathcal{I}$ — левый идеал $\mathcal{O}$, то существует такой левый идеал $\mathcal{I}'$, что $\mathcal{O}$ является прямой суммой $\mathcal{I}$ и $\mathcal{I}'$.*

Теорема 1.4. *Групповое кольцо $\mathcal{O}$ является прямой суммой минимальных левых идеалов*:

$$\mathcal{O} = \mathcal{I}_1 \oplus \mathcal{I}_2 \oplus \cdots \oplus \mathcal{I}_k. \tag{1.10}$$

Это разложение единственно с точностью до перестановок и эквивалентности.

Следующая теорема показывает, что всевозможные неразложимые представления содержатся в регулярных представлениях, т.е. появляются между представлениями, образованных левыми идеалами $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2, \ldots, \mathcal{I}_k$.

Теорема 1.5. *Произвольное неразложимое представление содержится в регулярном представлении.*

Вообще, для каждого представления справедлива следующая теорема.

Теорема 1.6. *Если $F = F_1 + F_2 + \cdots + F_k$ является разложением представления F (соответствующего матрице $\boldsymbol{F}(s)$) на неразложимые части, то $\boldsymbol{F}(x) = 0$, если x принадлежит минимальному левому идеалу $\mathcal{I}$, у которого часть регулярного представления не эквивалентна $F_1, F_2, \ldots, F_k$.*

Теперь рассмотрим структуру группового кольца. Если c — элемент кольца, то множество произведений xc для произвольного x является левым идеалом, порожденным c; обозначим его через $\mathcal{O}c$. Очевидно, семейство решений уравнения $xc = 0$ является левым идеалом. Рассмотрим элементы c, обладающие свойством идемпотентности, т.е. $c^2 = c$.

Следующие две теоремы эквивалентны друг другу.

Теорема 1.7. *В каждом левом идеале $\mathcal{I}$ группового кольца $\mathcal{O}$ существует хотя бы один идемпотентный элемент e, называемый генерирующей единицей $\mathcal{I}$, порождающий идеал $\mathcal{I}$: $\mathcal{I} = \mathcal{O}e$.*

Теорема 1.8. *Если $\mathcal{I}$ — левый идеал группового кольца $\mathcal{O}$, то существует элемент e со следующими свойствами*: *гомоморфизм $x' = xe$ отображает каждый элемент x $\mathcal{O}$ на элемент $\mathcal{I}$ и оставляет элементы $\mathcal{I}$ без изменений*:

(a) *xe всегда лежит в $\mathcal{I}$,*
(b) *$x = xe$ для $x \in \mathcal{I}$.*

Это означает, что правое умножение на e является проекцией на $\mathcal{I}$.

Если $xc = 0$ для всех $x \in \mathcal{I}$ (в символической записи $\mathcal{I}c = 0$), то будем говорить, что $\mathcal{I}$ *аннулируется* справа элементом c. Пусть $\mathcal{I}$ — заданный левый идеал в групповом кольце $\mathcal{O}$. Согласно теореме 1.3 существует еще один такой левый идеал $\mathcal{I}'$, что $\mathcal{O}$ является их прямой суммой. Таким образом, получаем следующую теорему.

Теорема 1.9. *Если групповое кольцо $\mathcal{O}$ является прямой суммой двух левых идеалов,*

$$\mathcal{O} = \mathcal{I} \oplus \mathcal{I}', \tag{1.11}$$

то $\mathcal{I}$ порождается единицей e и $\mathcal{I}'$ порождается единицей e', так что $\mathcal{I}$ аннулируется справа e' и $\mathcal{I}'$ аннулируется справа e; *в частности,*

$$ee' = e'e = 0. \tag{1.12}$$

Непосредственным обобщением является следующая теорема.

Теорема 1.10. *Пусть $\mathcal{O}$ — групповое кольцо и пусть дано его разложение в сумму левых идеалов*

$$\mathcal{O} = \mathcal{I}_1 \oplus \mathcal{I}_2 \oplus \cdots \oplus \mathcal{I}_k. \tag{1.13}$$

При помощи разложения единицы получим совокупность $e_1, e_2, \ldots, e_k$ генерирующих единиц для этих левых идеалов. Идеал $\mathcal{I}_i$ генерируется e_i и аннулируется справа e_j, $j \neq i$; в частности,

$$e_i e_j = 0 \quad \text{для } i \neq j. \tag{1.14}$$

Определение 1.8. Идемпотентный элемент называют *примитивным*, если не существует разложения вида

$$e = e_1 + e_2, \tag{1.15}$$

где

$$e_1 e_2 = e_2 e_1 = 0, \quad e_1^2 = e_1, \quad e_2^2 = e_2, \quad e_1 \neq 0, \quad e_2 \neq 0.$$

Теорема 1.11. *Пусть $\mathcal{O}$ — групповое кольцо, e — идемпотентный элемент. Если e — примитивный элемент, то левый идеал $\mathcal{I} = \mathcal{O}e$, порожденный e, является минимальным. Если $\mathcal{I}$ — минимальный, то всякая его генерирующая единица e является примитивной.*

Следующая теорема решает проблему эквивалентности двух левых идеалов.

Теорема 1.12. *Пусть $\mathcal{O}$ — групповое кольцо, $\mathcal{I}$ и $\mathcal{I}'$ — левые идеалы $\mathcal{O}$. Если идеалы $\mathcal{I}$ и $\mathcal{I}'$ эквивалентны, то каждое эквивалентное отображение $\mathcal{I}$ на $\mathcal{I}'$ является правым произведением $x' = xb$.*

С другой стороны, для минимальных идеалов верна следующая теорема.

Теорема 1.13. *Пусть $\mathcal{I}$ и $\mathcal{I}'$ — два минимальных левых идеала группового кольца $\mathcal{O}$. Пусть e и e' — две генерирующие единицы этих идеалов соответственно. Тогда правое умножение на любым элементом $exe' \neq 0$ определяет эквивалентное отображение из $\mathcal{I}$ на $\mathcal{I}'$.*

Мы можем суммировать эти результаты в следующей теореме.

Теорема 1.14. *Два минимальных левых идеала $\mathcal{I}$ и $\mathcal{I}'$ группового кольца $\mathcal{O}$ с генерирующими единицами e и e' эквивалентны тогда и только тогда, когда существуют ненулевые элементы exe'. Эквивалентные отображения $\mathcal{I}$ на $\mathcal{I}'$ задаются умножением справа на эти элементы.*

Используя теорему 1.14, можно доказать наиболее важные свойства примитивных идемпотентов.

Теорема 1.15. *Пусть $\mathcal{O}$ — групповое кольцо и e — генерирующая единица идеала $\mathcal{I} = \mathcal{O}e$. Элемент e является примитивным идемпотентом тогда и только тогда, когда exe можно записать в виде ke для всех x, где k — число.*

Далее мы изучим свойства двусторонних идеалов ${}^i\boldsymbol{a}$ группового кольца $\mathcal{O}$.

Теорема 1.16. *Пусть $\mathcal{O}$ — групповое кольцо, ${}^1\boldsymbol{a}$ и ${}^2\boldsymbol{a}$ — двусторонние идеалы в $\mathcal{O}$. Если $\mathcal{O} = {}^1\boldsymbol{a} \oplus {}^2\boldsymbol{a}$, то ${}^1\boldsymbol{a}$ и ${}^2\boldsymbol{a}$ взаимно аннулируются, т.е.*

$${}^1a\,{}^2a = {}^2a\,{}^1a = 0 \tag{1.16}$$

для всех ${}^1a \in {}^1\boldsymbol{a}$, ${}^2a \in {}^2\boldsymbol{a}$. Генерирующие единицы ${}^1e$, ${}^2e$ из ${}^1\boldsymbol{a}$, ${}^2\boldsymbol{a}$ соответственно однозначно определены и коммутируют со всеми элементами кольца.

Теорема 1.17. *Пусть $\mathcal{O}$ — групповое кольцо, $\boldsymbol{a}$ — двусторонний идеал в $\mathcal{O}$, $\mathcal{I}$ — минимальный левый идеал в $\mathcal{O}$ и e — генерирующая единица $\mathcal{I}$. Тогда либо $\mathcal{I}$ содержится в $\boldsymbol{a}$, либо $\boldsymbol{a}$ аннулируется справа e, т.е. $ae = 0$ для всех $a \in \boldsymbol{a}$.*

Если данное разложение $\mathcal{O} = {}^1\boldsymbol{a} \oplus {}^2\boldsymbol{a}$, то каждый минимальный левый идеал лежит либо в ${}^1\boldsymbol{a}$, либо в ${}^2\boldsymbol{a}$.

Теорема 1.18. *Пусть $\boldsymbol{a}$ — двусторонний идеал группового кольца $\mathcal{O}$. Если минимальный левый идеал $\mathcal{I}$ лежит в $\boldsymbol{a}$, то любой левый идеал $\mathcal{I}'$, эквивалентный $\mathcal{I}$, тоже лежит в $\boldsymbol{a}$.*

Определение 1.9. Пусть $\boldsymbol{a}$ — двусторонний идеал группового кольца $\mathcal{O}$. Назовем этот идеал *простым*, если он не содержит никакого двустороннего идеала, кроме самого себя и нулевого.

Следующая теорема дает единственность разложения $\mathcal{O}$ в прямую сумму простых двусторонних идеалов.

Теорема 1.19. *Пусть $\mathcal{O}$ — групповое кольцо. Тогда существует не более одного разложения $\mathcal{O} = {}^1\boldsymbol{a} \oplus {}^2\boldsymbol{a} \oplus \cdots \oplus {}^r\boldsymbol{a}$, где ${}^i\boldsymbol{a}$ — простые двусторонние идеалы.*

1.3. Система классов неприводимых представлений. Теорема 1.4 дает разложение группового кольца $\mathcal{O}$ в левые идеалы. Введем обозначения

$$ {}^1\boldsymbol{a} = {}^1\mathcal{I}_1 \oplus {}^1\mathcal{I}_2 \oplus \cdots \oplus {}^1\mathcal{I}_{m_1}, \quad {}^2\boldsymbol{a} = {}^2\mathcal{I}_1 \oplus {}^2\mathcal{I}_2 \oplus \cdots \oplus {}^2\mathcal{I}_{m_2}, \quad \ldots, \quad {}^r\boldsymbol{a} = {}^r\mathcal{I}_1 \oplus {}^r\mathcal{I}_2 \oplus \cdots \oplus {}^r\mathcal{I}_{m_r} \tag{1.17} $$

где ${}^i\mathcal{I}_j$ — левые идеалы. Идеалы с одинаковыми верхними индексами эквивалентны, а те, у которых верхние индексы различны, — не эквивалентны. Согласно теореме 1.4

$$ \mathcal{O} = {}^1\boldsymbol{a} \oplus {}^2\boldsymbol{a} \oplus \cdots \oplus {}^r\boldsymbol{a}, \tag{1.18} $$

и верна следующая теорема.

Теорема 1.20. *Идеалы ${}^i\boldsymbol{a}$ из* (1.18) *являются простыми двусторонними идеалами.*

Следующая теорема известна как теорема Веддерберна.

Теорема 1.21. *Простое кольцо $\boldsymbol{a}$ изоморфно полному кольцу $(m \times m)$-матриц.*

Пусть $\mathcal{O}$ — групповое кольцо, которое является прямой суммой простых двусторонних идеалов ${}^i\boldsymbol{a}$. Тогда для каждого ${}^i\boldsymbol{a}$ имеет место теорема 1.21, и таким образом мы получаем следующую теорему.

Теорема 1.22. *Групповое кольцо является прямой суммой полных колец матриц.*

Размерность ${}^i\boldsymbol{a}$ равна m_i^2. Таким образом, порядок g группового кольца $\mathcal{O}$ равен

$$ g = m_1^2 + m_2^2 + \cdots + m_r^2. \tag{1.19} $$

Каждый элемент $a \in \mathcal{O}$ разлагается на r компонент $a = {}^1a + {}^2a + \cdots + {}^ra$. Каждой компоненте ${}^ia \in {}^i\boldsymbol{a}$ соответствует $(m_i \times m_i)$-матрица ${}^i\boldsymbol{A}$. Элементу a поставим в соответствие матрицу

$$ \boldsymbol{A} = \left(\begin{array}{c|c|c|c} {}^1\boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} & \ldots & \boldsymbol{O} \\ \hline \boldsymbol{O} & {}^2\boldsymbol{A} & \ldots & \boldsymbol{O} \\ \hline \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \hline \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \ldots & {}^r\boldsymbol{A} \end{array} \right). \tag{1.20} $$

Следующая теорема известна как теорема Бернсайда.

Теорема 1.23. *Представление конечной группы порядка m неприводимо тогда и только тогда, когда оно содержит m^2 линейно независимых матриц.*

Свяжем число r классов неприводимых представлений со структурой всей группы. Для этого понадобится понятие центра группового кольца. Центр $\boldsymbol{z}$ группового кольца состоит из всех элементов, которые коммутируют со всеми элементами кольца. Отсюда понятно, что $\boldsymbol{z}$ является коммутативным кольцом, содержащим единицу и генерирующие единицы

$$ {}^ie = {}^ie_{11} + {}^ie_{22} + \cdots + {}^ie_{m_im_i} \tag{1.21} $$

двусторонних идеалов ${}^i\boldsymbol{a}$.

Теорема 1.24. *Центр $\boldsymbol{z}$ группового кольца $\mathcal{O}$ состоит из элементов*

$$ z = {}^1\zeta^1e + {}^2\zeta^2e + \cdots + {}^r\zeta^re, \tag{1.22} $$

где ${}^i\zeta$ — произвольные числа. Его размерность равна числу r неприводимых представлений.

Пусть F — представление группы G с матрицей $\boldsymbol{F}(s)$. Определим характер χ представления следующим образом:

$$\chi(s) = \operatorname{tr} \boldsymbol{F}(s). \tag{1.23}$$

Характер неприводимого представления назовем *простым.*

Так как эквивалентные матрицы имеют одинаковый след, справедливо следующее утверждение.

Лемма 1.4. *Эквивалентные представления имеют одинаковый характер.*

Пусть $\boldsymbol{F}(s)$ — разложимое представление $\boldsymbol{F}(s) = \boldsymbol{F}_1(s)+\boldsymbol{F}_2(s)$. Если $\chi(s)$ — характер представления $\boldsymbol{F}(s)$, то $\chi(s) = \chi_1(s)+\chi_2(s)$, где $\chi_1(s)$ и $\chi_2(s)$ являются соответственно характерами $\boldsymbol{F}_1(s)$ и $\boldsymbol{F}_2(s)$.

1.4. Таблицы Юнга. В этой части построим представления симметрической группы S_n. В [5] приводятся следующие факты. Каждое представление, не являющееся точным, соответствует нетривиальной нормальной подгруппе. Наибольшая нормальная подгруппа — это сама группа; она соответствует тождественному представлению, которое отвечает единичному элементу 1. Каждая симметричная группа S_n имеет в качестве нормальной подгруппы знакопеременную группу A_n. Фактор-группа S_n/A_n изоморфна S_2. Группа S_2 обладает двумя неприводимыми представлениями, каждое степени 1: тождественное представление и точное представление, в котором тождественная перестановка представлена 1, а транспозиция (12) представлена -1. Таким образом, существует неприводимое представление S_n, которое принадлежит A_n. Оно имеет степень 1 и ставит в соответствие 1 четным перестановкам и -1 — нечетным перестановкам. Знакопеременная группа A_n является единственной собственной нормальной подгруппой S_n для $n \neq 4$. При $n = 4$ существует другая нормальная подгруппа G, причем факторгруппа S_4/G изоморфна группе S_3. Группа S_3 обладает следующими неприводимыми представлениями: тождественное представление, знакопеременное представление (оба степени 1), и одно точное представление степени 2 (это представление принадлежит G). Все остальные неприводимые представления всех симметрических групп S_n точны.

Диаграмма Юнга — это конечный набор ячеек или клеток, выровненных по левой границе, в котором длины строк $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ образуют невозрастающую последовательность (каждая строка имеет такую же длину, как предыдущая, или короче). Набор чисел, состоящий из длин строк, задает разбиение неотрицательного целого числа n, которое равно общему количеству ячеек диаграммы:

$$\ydiagram{5,3,1,1} \qquad \begin{array}{c} \lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \dots \lambda_r \geqslant 0, \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_r = n. \end{array} \tag{1.24}$$

Заполняя ячейки диаграммы числами от 1 до n в любом порядке, получим таблицу, называемую *таблицей Юнга. Стандартная таблица* — это таблица, в которой значения увеличиваются слева направо в каждой строке и сверху вниз в каждом столбце. Приведем пример диаграммы Юнга и три соответствующих стандартных таблицы:

$$\ydiagram{3,1} \qquad \begin{ytableau} 1 & 2 & 3 \\ 4 \end{ytableau} \qquad \begin{ytableau} 1 & 2 & 4 \\ 3 \end{ytableau} \qquad \begin{ytableau} 1 & 3 & 4 \\ 2 \end{ytableau} \tag{1.25}$$

Для таблиц Юнга рассмотрим два специальных типа перестановок. Через π обозначим любую перестановку, которая не меняет элементы, стоящие в разных строках диаграммы и через ϑ — любую перестановку, которая не меняет элементы, стоящие в разных столбцах. Мы будем назвать эти перестановки горизонтальной и вертикальной соответственно. Пусть

$$P = \sum_{\pi} \pi, \quad Q = \sum_{\vartheta} \varepsilon_{\vartheta} \vartheta, \tag{1.26}$$

где $\varepsilon_{\vartheta} = \pm 1$ в зависимости от четности перестановки ϑ.

Будем называть оператор $e = PQ$ *оператором Юнга* данной таблицы. Ниже мы докажем следующие утверждения: $e = PQ$ — идемпотентный оператор, а левый идеал $\mathcal{O}e$, порожденный e, дает неприводимое представление симметрической группы S_n. Различные диаграммы Юнга дают неэквивалентные представления, а представления, принадлежащие разным таблицам с одной и той же диаграммой, эквивалентны.

Пусть T — таблица и ρ — перестановка. Обозначим через $T' = \rho T$ таблицу (с той же диаграммой Юнга), порожденную таблицей T при помощи перестановки ρ ее элементов. Связь между двумя перестановками σ и σ', $\sigma' = \rho\sigma\rho^{-1}$ (σ используется для таблицы T, а σ' — для таблицы T') задается следующим образом: если после перестановки σ число на пересечении i-й строки с k-м столбцом в T переходит в число на пересечении i_1-й строки с k_1-м столбцом, то число на пересечении i-й строки с k-м столбцом в T' делает то же самое в результате перестановки σ'.

Скажем, что перестановка σ' *соответствует* σ для T'. Горизонтальные перестановки π и вертикальные перестановки ϑ образуют соответственно группы P и Q. Тогда

$$P' = \rho P\rho^{-1}, \quad Q' = \rho Q\rho^{-1}. \tag{1.27}$$

Пусть $e = PQ$. Перейдем к изучению отдельных членов двойной суммы

$$e = \sum_{\pi}\sum_{\vartheta}\pi\vartheta.$$

Пусть π, π_1 — горизонтальные и ϑ, ϑ_1 — вертикальные перестановки, обладающие свойством

$$\pi\vartheta = \pi_1\vartheta_1.$$

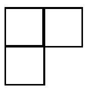
Тогда

$$\pi_1^{-1}\pi = \vartheta_1\vartheta^{-1}.$$

Перестановка, которая принадлежит обоим P и Q является тождественной перестановкой. Поэтому $\pi = \pi_1$ и $\vartheta = \vartheta_1$, и можно записать

$$e = \sum_{\pi\vartheta}\varepsilon_{\vartheta}\pi\vartheta, \tag{1.28}$$

где сумма берется по всем перестановкам, которые могут быть записаны в виде $\pi\vartheta$. Например, группа S_3 имеет шесть элементов. Но для диаграммы



каждая из групп P и Q состоит из единицы и одной транспозиции. Таким образом, существуют четыре элемента, которые можно записать в виде $\pi\vartheta$, и два элемента, которые не выражаются в такой форме.

Применим перестановку $\pi\vartheta$ к таблице T следующим образом: сначала применим горизонтальную перестановку π, а затем вертикальную ϑ, то для полученной таблицы имеет место равенство $\vartheta' = \pi\vartheta\pi^{-1}$. Действительно, $(\pi\vartheta\pi^{-1})\pi = \pi\vartheta$. Мы можем переписать этот результат в формуле

$$T' = \pi\vartheta T = \vartheta'\pi T. \tag{1.29}$$

Лемма 1.5. *Два числа, которые находятся в одной строке в таблице T, не могут находиться в одном столбце таблицы $T' = \pi\vartheta T$.*

Обратное утверждение также справедливо.

Лемма 1.6. *Если два числа, встречающиеся в одной строке таблицы T, не находятся в одном столбце таблицы $T' = \rho T$, то $\rho = \pi\vartheta$, где π и ϑ — соответственно горизонтальная и вертикальная перестановки для T.*

Из предыдущих определений вытекает, что диаграмма Юнга характеризуется системой целых чисел $(\lambda) = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r)$, удовлетворяющих (1.24). Запишем $(\lambda) > (\lambda')$, если первая ненулевая разница $\lambda_i - \lambda_i'$ положительна. Тогда справедлива следующая лемма.

Лемма 1.7. *Если таблицы T и T' соответствуют наборам (λ) и (λ') и $(\lambda) > (\lambda')$, то существуют два числа, которые встречаются в одной и той же строке в T и в одном и том же столбце в T'.*

Очевидно, что для групп P и Q справедливы следующие соотношения:

$$\pi P = P\pi = P, \quad \vartheta Q = Q\vartheta = \varepsilon_\vartheta Q, \quad \pi e\vartheta = \varepsilon_\vartheta e. \tag{1.30}$$

При помощи этих формул доказываются следующие леммы.

Лемма 1.8. *Если существуют два числа, которые встречаются в одной строке таблицы T и в одном столбце таблицы T', то*

$$Q'P = 0 \quad \text{и, следовательно,} \quad e'e = 0. \tag{1.31}$$

Лемма 1.9. *Пусть $T' = \rho T$ и $\rho = \pi\vartheta$. Тогда $Q'\rho P = \varepsilon_\vartheta Q'P$.*

Лемма 1.10. *Если σ не является композицией некоторых горизонтальной и вертикальной перестановок, то существуют такие транспозиции $\pi \in P$ и $\vartheta \in Q$, что $\sigma = \pi\sigma\vartheta$.*

Согласно (1.30) элемент

$$e = \sum_{\pi\vartheta} \pi\vartheta,$$

принадлежащий данной таблице T, обладает свойством

$$\pi e\vartheta = \varepsilon_\vartheta e$$

для всех π и ϑ. Произведение ke обладает аналогичным свойством. Имеет место обратное утверждение.

Лемма 1.11. *Пусть элемент $a = \sum\limits_\sigma \alpha(\sigma)\sigma$ группового кольца $\mathcal{O}_n$ обладает свойством*

$$\pi a\vartheta = \varepsilon_\vartheta a \tag{1.32}$$

для всех π, ϑ. Тогда существует такое число k, что $a = ke$.

С помощью предыдущих лемм можно доказать следующие две теоремы.

Теорема 1.25. *Пусть T — таблица Юнга и P и Q — группы горизонтальных и вертикальных перестановок, заданных таблицей T. Тогда элемент*

$$e = \sum_{\pi\vartheta} \pi\vartheta \tag{1.33}$$

является идемпотентным, а левый идеал $\mathcal{O}e$, порожденный e, — минимальным. Это дает неприводимое представление $\mathcal{O}$ или S_n. Размерность $\mathcal{O}e$ и, следовательно, степень представления равны $n!$.

Таким образом, каждая таблица Юнга дает неприводимое представление.

Теорема 1.26. *Таблицы, определяемые одной и той же диаграммой Юнга, соответствуют эквивалентным представлениям, а таблицы с разными диаграммами Юнга — неэквивалентным представлениям.*

В предыдущем разделе мы показали, что групповое кольцо $\mathcal{O}$ является прямой суммой простых двусторонних идеалов ${}^i\boldsymbol{a}$, где каждый идеал ${}^i\boldsymbol{a}$ принадлежит одному классу неприводимых представлений, и теперь речь идет об одной диаграмме. Она содержит левые идеалы $\mathcal{O}e$, определенные $n!$ соответствующих таблиц, и все левые идеалы им эквивалентны.

Теорема 1.27. *$n!$ левых идеалов, определяемых таблицей T одной диаграммы Юнга, охватывают весь соответствующий двусторонний идеал $\boldsymbol{a}$.*

Далее символ m' обозначает количество стандартных таблиц, принадлежащих данной диаграмме Юнга.

Теорема 1.28. *Количество стандартных таблиц, принадлежащих данной диаграмме Юнга с длинами строк* $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ ($\lambda_1 + \dots + \lambda_r = n$) *равно*

$$m' = \frac{n!}{s_1!\ s_2! \dots s_r!} \cdot \prod_{i<j} (s_i - s_j), \tag{1.34}$$

где $s_1 = \lambda_1 + r - 1$, $s_2 = \lambda_2 + r - 2$, $\dots$, $s_r = \lambda_r$.

Характеризацию различных диаграмм с n ячейками при помощи индексов k дает следующая теорема.

Теорема 1.29.

$$\sum_k m_k'^2 = n!. \tag{1.35}$$

Пусть $e_1, \dots, e_{m'}$ — генерирующие идемпотенты, определенные стандартным путем стандартными таблицами в лексикографическом упорядочении.

Теорема 1.30. *Левые идеалы* $\mathcal{O}e_1, \dots, \mathcal{O}e_{m'}$, *полученные из стандартных таблиц, линейно независимы.*

Из предыдущей теоремы следует, что $m' \leqslant m$, поскольку мы знаем, что существует не более m линейно независимых левых идеалов в полном кольце $\boldsymbol{a}$, состоящем из $(m \times m)$-матриц. Если рассмотреть совокупность диаграмм Юнга с разными индексами k и n ячейками, то $m_k' \leqslant m_k$ для всех k. Если по крайней мере для одного индекса k выполняется неравенство $m_k' < m_k$, то

$$\sum_k m_k'^2 < \sum_k m_k^2,$$

и формулы

$$\sum_k m_k'^2 = n!, \quad \sum_k m_k^2 = n!$$

являются противоречивыми. Поэтому $m_k' = m_k$ для всех k, и мы получаем следующую теорему.

Теорема 1.31. *Левые идеалы, соответствующие стандартным таблицам, полученным из одной и той же диаграммы Юнга, линейно независимы и охватывают соответствующее кольцо* $\boldsymbol{a}$. *Их число равно степени соответствующего неприводимого представления.*

2. Проекции тензоров

В этом разделе вычислены L_n^1-эквивариантные проекции тензорных пространств. Найдены первые абсолютные инвариантные тензоры и их свойства, после чего изложены методы вычисления L_n^1-эквивариантных проекций, а также некоторые результаты для некоторых специальных типов тензоров, в частности, тензоров типа $(1, k)$, которые обладают симметриями (антисимметриями) по индексам, определяемыми таблицами Юнга, и тензоров типа (r, k), которые обладают симметриями (антисимметриями) по верхним и нижним индексам.

Результаты этой части в основном взяты из монографии [13] и диссертаций [14, 21].

2.1. Абсолютно инвариантные тензоры. Сначала рассмотрим абсолютно инвариантные тензоры и их свойства.

Пусть V — векторное пространство и $V^\star$ — сопряженное пространство; тогда $T_k^r V$ — обозначать векторное пространство тензоров типа (r, k) на V:

$$T_k^r V = \underbrace{V \otimes V \otimes \dots \otimes V}_{r \text{ раз}} \otimes \underbrace{V^\star \otimes V^\star \otimes \dots \otimes V^\star}_{k \text{ раз}}.$$

Пусть (e_i), $i = 1, 2, \dots, n$, — базис векторного пространства V и (e^i) — сопряженный базис пространства V^*. Для $\boldsymbol{A} \in GL(V)$ вводим матрицу (A_j^i) следующим образом:

$$\boldsymbol{A} \cdot e_j = A_j^i e_i; \tag{2.1}$$

это матрица линейного отображения $\boldsymbol{A}$ относительно базиса (e_i). Действие группы $GL(V)$ на V^* определено соотношением

$$\boldsymbol{A}\cdot e^j = B^j_i e^i, \tag{2.2}$$

где B^j_i — обратная матрица к A^i_j. Можем определить действие $GL(V)$ на $T^r_k V$ следующим отношением:

$$\boldsymbol{A}\cdot\Big(e_{i_1}\otimes e_{i_2}\otimes\dots\otimes e_{i_r}\otimes e^{j_1}\otimes e^{j_2}\otimes\dots\otimes e^{j_k}\Big) = \\ = (\boldsymbol{A}\cdot e_{i_1})\otimes(\boldsymbol{A}\cdot e_{i_2})\otimes\dots\otimes(\boldsymbol{A}\cdot e_{i_r})\otimes(\boldsymbol{A}\cdot e^{j_1})\otimes(\boldsymbol{A}\cdot e^{j_2})\otimes\dots\otimes(\boldsymbol{A}\cdot e^{j_k}). \tag{2.3}$$

Пусть $\xi\in T^r_k V$ тензор. Тогда

$$\xi = \xi^{i_1 i_2\dots i_r}_{j_1 j_2\dots j_k} e_{i_1}\otimes e_{i_2}\otimes\dots\otimes e_{i_r}\otimes e^{j_1}\otimes e^{j_2}\otimes\dots\otimes e^{j_k}. \tag{2.4}$$

Действие $GL(V)$ на $T^r_k V$ выражается следующим образом:

$$\boldsymbol{A}\cdot\xi = \bar\xi^{p_1 p_2\dots p_r}_{q_1 q_2\dots q_k} e_{p_1}\otimes e_{p_2}\otimes\dots\otimes e_{p_r}\otimes e^{q_1}\otimes e^{q_2}\otimes\dots\otimes e^{q_k}, \tag{2.5}$$

где

$$\bar\xi^{p_1 p_2\dots p_r}_{j_1 j_2\dots j_k} = A^{p_1}_{i_1}A^{p_2}_{i_2}\dots A^{p_r}_{i_r}B^{j_1}_{q_1}B^{j_2}_{q_2}\dots B^{j_k}_{q_k}\xi^{i_1 i_2\dots i_r}_{j_1 j_2\dots j_k}. \tag{2.6}$$

Определение 2.1. Пусть ξ — тензор из $T^r_k V$. Тензор ξ называется *абсолютно инвариантным* (кратко *инвариантным*), если для каждого $\boldsymbol{A}\in GL(V)$ имеет место равенство

$$\boldsymbol{A}\cdot\xi = \xi. \tag{2.7}$$

Тензор ξ абсолютно инвариантен тогда и только тогда, когда для каждого отображения $\boldsymbol{A}$ из $GL(V)$ верно соотношение

$$\xi^{p_1 p_2\dots p_r}_{j_1 j_2\dots j_k} = A^{p_1}_{i_1}A^{p_2}_{i_2}\dots A^{p_r}_{i_r}B^{j_1}_{q_1}B^{j_2}_{q_2}\dots B^{j_k}_{q_k}\xi^{i_1 i_2\dots i_r}_{j_1 j_2\dots j_k}. \tag{2.8}$$

Известно, что компоненты абсолютно инвариантного тензора не зависят от выбора базиса. Если (e_i) и $(\bar e_i)$ — базисы V, то

$$\xi = \xi^{i_1 i_2\dots i_r}_{j_1 j_2\dots j_k} e_{i_1}\otimes e_{i_2}\otimes\dots\otimes e_{i_r}\otimes e^{j_1}\otimes e^{j_2}\otimes\dots\otimes e^{j_k} = \\ = \bar\xi^{i_1 i_2\dots i_r}_{j_1 j_2\dots j_k} \bar e_{i_1}\otimes \bar e_{i_2}\otimes\dots\otimes \bar e_{i_r}\otimes \bar e^{j_1}\otimes \bar e^{j_2}\otimes\dots\otimes \bar e^{j_k}. \tag{2.9}$$

Существует единственный такой элемент $\boldsymbol{A}\in GL(V)$, что $\bar e_j = A^i_j e_i$. Следовательно, тензор ξ инвариантен и

$$\bar\xi^{i_1 i_2\dots i_r}_{j_1 j_2\dots j_k} = \xi^{i_1 i_2\dots i_r}_{j_1 j_2\dots j_k}.$$

Каждые два n-мерные пространства над $\mathbb{R}$ изоморфны. Далее будем изучать инвариантные тензоры над пространством $\mathbb{R}^n$.

Пример 2.1. Тензор Кронекера $\delta = \delta^i_j$ является абсолютно инвариантным тензором типа $(1,1)$, что вытекает из соотношения (2.6).

Теорема 2.1. *Пусть $\xi\in T^r_k\mathbb{R}^n$ — тензор. Справедливы следующие утверждения.*

(1) *Для $r\neq k$ тензор ξ абсолютно инвариантен тогда и только тогда, когда $\xi=0$.*
(2) *Для $r=k$ следующие условия равносильны*:
   (i) *ξ — абсолютно инвариантный тензор*;
   (ii) *$A\cdot\xi=\xi$ для всех $A\in GL^{(+)}_n(\mathbb{R})$*;
   (iii) *для всех i, j, m_1, $m_2,\dots,m_r$, q_1, $q_2,\dots,q_r = 1,2,\dots,n$ имеем*

$$\delta^{m_1}_i\xi^{j m_2\dots m_r}_{q_1 q_2\dots q_r} + \delta^{m_2}_i\xi^{m_1 j m_3\dots m_r}_{q_1 q_2\dots q_r} + \dots + \delta^{m_r}_i\xi^{m_1 m_2\dots m_{r-1} j}_{q_1 q_2\dots q_r} - \\ - \delta^j_{q_1}\xi^{m_1 m_2\dots m_r}_{i q_2\dots q_r} - \delta^j_{q_2}\xi^{m_1 m_2\dots m_r}_{q_1 i q_3\dots q_r} - \dots - \delta^j_{q_r}\xi^{m_1 m_2\dots m_r}_{q_1 q_2\dots q_{r-1} i} = 0; \tag{2.10}$$

(iv) $\xi = (\xi^{m_1 m_2 \dots m_r}_{q_1 q_2 \dots q_r})$, *где*

$$\xi^{m_1 m_2 \dots m_r}_{q_1 q_2 \dots q_r} = \sum_{\sigma \in S_r} c_\sigma \cdot \delta^{m_1}_{q_{\sigma_1}} \delta^{m_2}_{q_{\sigma_2}} \dots \delta^{m_r}_{q_{\sigma_r}} \tag{2.11}$$

для некоторых $c_\sigma \in \mathbb{R}$.

Из данной теоремы вытекает следующее утверждение.

Следствие 2.1. *Любой инвариантный тензор* $\xi = (\xi^m_q)$ *типа* $(1,1)$ *является кратным тензора Кронекера* δ, *т.е.* $\xi^m_q = c\delta^m_q$.

Следствие 2.2. *Любой инвариантный тензор* $\xi = (\xi^{m_1 m_2}_{q_1 q_2})$ *типа* $(2,2)$ *имеет вид*

$$\xi^{m_1 m_2}_{q_1 q_2} = c_1 \delta^{m_1}_{q_1} \delta^{m_2}_{q_2} + c_2 \delta^{m_1}_{q_2} \delta^{m_2}_{q_1} = \frac{c_1'}{2} \Big(\delta^{m_1}_{q_1} \delta^{m_2}_{q_2} + \delta^{m_1}_{q_2} \delta^{m_2}_{q_1} \Big) + \frac{c_2'}{2} \Big(\delta^{m_1}_{q_1} \delta^{m_2}_{q_2} - \delta^{m_1}_{q_2} \delta^{m_2}_{q_1} \Big), \tag{2.12}$$

где $c_1, c_2, c_1', c_2' \in \mathbb{R}$ *и* $c_1 = \frac{1}{2}(c_1' + c_2')$, $c_2 = \frac{1}{2}(c_1' - c_2')$.

Следствие 2.3. *Пусть* (e_i) — *базис векторного пространства* $\mathbb{R}^n$, (e^i) — *сопряженный базис пространства* $\mathbb{R}^{n*}$. *Тензор* $\xi \in T^r_r \mathbb{R}^n$ *абсолютно инвариантен тогда и только тогда, когда он может быть представлен в виде следующей линейной комбинации*:

$$\xi_\sigma = \sum e_{i_{\sigma(1)}} \otimes e_{i_{\sigma(2)}} \otimes \dots e_{i_{\sigma(r)}} \otimes e^{i_1} \otimes e^{i_2} \otimes \dots e^{i_r}, \tag{2.13}$$

где σ *пробегает группу* S_r.

Следствие 2.4. *Пусть* $\xi = (\xi^{m_1 m_2 \dots m_r}_{q_1 q_2 \dots q_r})$ — *абсолютно инвариантный тензор. Тогда для каждой перестановки* $\mu \in S_r$ *справедливо равенство*

$$\xi^{m_1 m_2 \dots m_r}_{q_1 q_2 \dots q_r} = \xi^{m_{\mu_1} m_{\mu_2} \dots m_{\mu_r}}_{q_{\mu_1} q_{\mu_2} \dots q_{\mu_r}}. \tag{2.14}$$

Следующая теорема является приложением теории инвариантных тензоров к линейным $GL_n(\mathbb{R})$-эквивариантным отображениям тензорных пространств.

Теорема 2.2. *Пусть* $f : T^{r_1}_{k_1} \mathbb{R}^n \to T^{r_2}_{k_2} \mathbb{R}^n$ — *линейное отображение и*

$$\xi^{m_1 m_2 \dots m_{r_2}}_{q_1 q_2 \dots q_{k_2}} = f^{m_1 m_2 \dots m_{r_2} p_1 p_2 \dots p_{r_1}}_{q_1 q_2 \dots q_{k_2} s_1 s_2 \dots s_{k_1}} \zeta^{p_1 p_2 \dots p_{r_1}}_{s_1 s_2 \dots s_{k_1}} \tag{2.15}$$

— *его представление относительно некоторого базиса пространства* $\mathbb{R}^n$. *Отображение* f *является* $GL_n(\mathbb{R})$-*эквивариантным тогда и только тогда, когда коэффициенты* $f^{m_1 m_2 \dots m_{r_2} p_1 p_2 \dots p_{r_1}}_{q_1 q_2 \dots q_{k_2} s_1 s_2 \dots s_{k_1}}$ *являются компонентами абсолютно инвариантного тензора.*

Из теорем 2.1 и 2.2 непосредственно вытекает следующее утверждение.

Следствие 2.5. *Нетривиальное* $GL_n(\mathbb{R})$-*эквивариантное отображение* $f : T^{r_1}_{k_1} \mathbb{R}^n \to T^{r_2}_{k_2} \mathbb{R}^n$ *существует тогда и только тогда, когда* $r_1 + k_2 = r_2 + k_1$.

Следствие 2.6. *Рассмотрим множество* $\mathbb{R}$ *вместе с тривиальным действием* $\boldsymbol{A} \mapsto 1$ *группы* $GL_n(\mathbb{R})$. *Тогда любое* $GL_n(\mathbb{R})$-*эквивариантное отображение* $f : T^1_1 \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *имеет форму* $\xi \mapsto c \cdot \xi^i_i$, *где* $c \in \mathbb{R}$ — *некоторая постоянная. Любое* $GL_n(\mathbb{R})$-*эквивариантное отображение* $f : \mathbb{R} \to T^1_1 \mathbb{R}^n$ *имеет вид* $a \mapsto c\delta^i_j \cdot a$, *где* $c \in \mathbb{R}$ — *постоянная.*

2.2. Проекции тензоров типа $(0,k)$**.** Пусть S_k — группа перестановок на множестве $\{1, 2, \dots, k\}$ и $\mathcal{O}_k$ — групповое кольцо группы S_k. Приведем соответствие между левыми идеалами кольца $\mathcal{O}_k$ и классами симметрии тензорного пространства $T^0_k \mathbb{R}^n$. Это соотношение выражается таблицей Юнга.

Пусть $\xi = (\xi_{q_1 q_2 \dots q_k})$ — тензор типа $(0,k)$. Семейство преобразований его компонент задается действием общей линейной группы $GL_n(\mathbb{C})$ на $T^0_k \mathbb{R}^n$ и является представлением группы $GL_n(\mathbb{C})$. Для тензора типа $(0,2)$ видим, что это представление приводимо. Симметрические тензоры преобразуются всегда в симметрические тензоры, а антисимметрические тензоры — в антисимметрические. Каждый из этих двух классов тензоров является линейным подпространством тензорного пространства $T^0_2 \mathbb{R}^n$, и пространство $T^0_2 \mathbb{R}^n$ является их прямой суммой, т.е.

$$T^0_2 \mathbb{R}^n = S^2 \mathbb{R}^{n*} \oplus A^2 \mathbb{R}^{n*}, \quad \frac{1}{2}\big(\xi_{ij} + \xi_{ji}\big) \in S^2 \mathbb{R}^{n*}, \quad \frac{1}{2}\big(\xi_{ij} - \xi_{ji}\big) \in A^2 \mathbb{R}^{n*}. \tag{2.16}$$

Каждая замена двух индексов генерирует новый тензор. Обозначим через σ преобразование $\sigma(\xi_{ij}) = \pm\xi_{ji}$. Это преобразование образует группу перестановок индексов тензора, которая изоморфна симметрической группе S_2. Для любых числовых коэффициентов α, β можно записать

$$\alpha\xi + \beta\sigma\xi = \big(\alpha(1) \pm \beta\sigma\big)\xi.$$

Каждому элементу $a = \alpha(1) \pm \beta\sigma$ группового кольца $\mathcal{O}_2$ группы S_2 соответствует операция $\xi \mapsto a\xi$ на пространстве тензоров. Для любого тензора ξ тензор $\frac{1}{2}\big((1) + \sigma\big)\xi$ симметричен, а тензор $\frac{1}{2}\big((1) - \sigma\big)\xi$ антисимметричен. Элементы кольца $\frac{1}{2}\big((1) + \sigma\big)$ и $\frac{1}{2}\big((1) - \sigma\big)$ определяют два класса симметрии тензорного пространства, которые являются инвариантны относительно группы $GL_n(\mathbb{C})$. Напомним, что они являются генерирующими идемпотентами двух минимальных левых идеалов кольца $\mathcal{O}_2$; значит, имеются два неприводимых представления группы S_2, а именно, тождественное и знакопеременное.

Подобно этому мы можем найти для любого тензора типа $(0, k)$ соответствие между неприводимым представлением симметрической группы S_k и неприводимыми компонентами тензорного пространства $T^0_k\mathbb{R}^n$ по отношению общей линейной группы $GL_n(\mathbb{C})$.

Действие общей линейной группы $GL_n(\mathbb{C})$ на $T^0_k\mathbb{R}^n$ определено соотношением (2.6). В общем случае можно записать $\bar{\xi} = \boldsymbol{A} \cdot \xi$. Перепишем отношение (2.6) для тензоров типа $(0, k)$:

$$\bar{\xi} = B^{j_1}_{q_1} B^{j_2}_{q_2} \dots B^{j_k}_{q_k} \xi_{j_1 j_2 \dots j_k}. \tag{2.17}$$

Преобразования $\boldsymbol{A}$ перестановочны с операциями $\xi \mapsto \sigma\xi$ (которые также являются линейными преобразованиями).

Соотношение (2.17) можно также переписать в виде

$$\bar{\xi}_{(q)} = B^{(j)}_{(q)} \xi_{(j)}. \tag{2.18}$$

Определение 2.2. Линейное преобразование тензорного пространства $T^0_k\mathbb{R}^n$ вида (2.18)) называют *бисимметрическим*, если равенство $B^{\sigma(j)}_{\sigma(q)} = B^{(j)}_{(q)}$ выполняется для всех перестановок $\sigma \in S_k$.

Бисимметрическое преобразование можем в общем случае записать в форме $\bar{\xi} = \boldsymbol{A}' \cdot \xi$. Сложение, умножение и скалярное произведение бисимметрического преобразования является тоже бисимметрическим преобразованием, и они образуют матричную алгебру, которую обозначаем $\mathcal{A}_k$.

Расширим систему линейных операций σ на их линейную оболочку, так что переходим от симметрической группы S_k к ее групповому кольцу $\mathcal{O}_k$ с элементами a:

$$a\xi = \sum_{\sigma} \alpha(\sigma) \cdot \sigma\xi. \tag{2.19}$$

Эти операции коммутируют со всеми бисимметрическими преобразованиями и образуют матричную алгебру, которую обозначим $\mathcal{C}_k$. Операции $\xi \mapsto \sigma\xi$ являют представлением группы перестановок S_k, а линейная оболочка $\mathcal{C}_k$ образует соответствующее представление группового кольца $\mathcal{O}_k$. Система бисимметрических преобразований изоморфна прямой сумме полных матричных колец, и поэтому указанное представление вполне приводимо.

Изучим разложения тензорного пространства $T^0_k\mathbb{R}^n$ в подпространствах, инвариантных относительно группы $GL_n(\mathbb{C})$. Эти подпространства называются *классами симметрий.*

Напомним разложение (1.17)) группового кольца $\mathcal{O}_k$ группы S_k, где каждый простой двусторонний идеал ${}^i\boldsymbol{a}$ изоморфен полному матричному кольцу и минимальный левый идеал ${}^i\mathcal{I}_j$ соответствует столбцу матрицы.

Пусть $\mathcal{O}_0$ — множество элементов y кольца, которые аннулируют все тензоры ξ, т.е. $y\xi = 0$ для всех $\xi \in T^0_k\mathbb{R}^n$. $\mathcal{O}_0$ является двусторонним идеалом кольца $\mathcal{O}_k$ и, очевидно, линейным подпространством. Групповое кольцо $\mathcal{O}_k$ можно разложить в сумму двух подпространств

$$\mathcal{O}_k = \mathcal{O}_{\mathcal{C}} \oplus \mathcal{O}_0. \tag{2.20}$$

Любая операция на $\mathcal{O}_k$ генерируется одним элементом из $\mathcal{O}_c$. Подпространства тензорного пространства, которые инвариантны относительно бисимметрических преобразований, содержат генерирующие идемпотенты. Пусть R_1 — такое подпространство. Поскольку система $\mathcal{A}_k$ вполне приводима, тензорное пространство $T^0_k\mathbb{R}^n$ является прямой суммой R_1 и некоторого инвариантного подпространства R_2:

$$T^0_k\mathbb{R}^n = R_1 \oplus R_2. \tag{2.21}$$

Обозначим через f проекцию тензорного пространства на R_1 параллельно R_2. Если $\xi = {}^1\xi + {}^2\xi$ — разложение некоторого тензора относительно (2.21), то $f(\xi) = {}^1\xi$, $f({}^1\xi) = {}^1\xi$, $f({}^2\xi) = 0$; следовательно, f является идемпотентом. Свойства проекций и идеалов кольца эндоморфизмов изучаются, например, в [8].

Проекция f принадлежит $\mathcal{C}_k$ и генерируется однозначно определенным идемпотентом e, принадлежащим $\mathcal{O}_{\mathcal{C}}$. Элемент e называют *генерирующим идемпотентом* подпространства R_1. Элемент e обладает двумя характеристическими свойствами (аналогично и для левых идеалов):

(1) $e\xi$ принадлежит R_1 для всех ξ,
(2) $e\xi = \xi$ для $\xi \in R_1$.

Следующая теорема устанавливает биекцию между правыми идеалами в $\mathcal{O}_k$ и подпространствами в $T^0_k\mathbb{R}^n$, которые инвариантны относительно системы бисимметрических преобразований $\mathcal{A}_k$.

Теорема 2.3. *Пусть $\mathcal{J}$ — правый идеал $\mathcal{O}_{\mathcal{K}}$ и $T^0_k\mathbb{R}^n$ — тензорное пространство. Обозначим через R множество тензоров вида $y\xi$, где $y \in \mathcal{J}$ и ξ — произвольный тензор. Тогда R — подпространство, инвариантное относительно системы бисимметрических преобразований $\mathcal{A}_k$. Любой генерирующий идемпотент идеала $\mathcal{J}$ порождает также R.*

Подпространство R из теоремы 2.3 называется *классом симметрии.*

Теорема 2.4. *Пусть $T^0_k\mathbb{R}^n$ — тензорное пространство и R — его подпространство, инвариантное относительно бисимметрических преобразований. Обозначим через $\mathcal{J}$ множество таких элементов $y \in \mathcal{O}_{\mathcal{C}}$, что $y\xi \in R$ для всех $\xi \in T^0_k\mathbb{R}^n$. Тогда $\mathcal{J}$ является правым идеалом $\mathcal{O}_k$. Любой из генерирующих идемпотентов подпространства R также порождает $\mathcal{J}$.*

Приведем соответствие между классами симметрий и левыми идеалами, впервые описанное Г. Вейлем.

Пусть

$$a = \sum_\sigma \alpha(\sigma)\cdot\sigma^{-1}$$

— элемент группового кольца $\mathcal{O}_k$. Обозначим через $\tilde{a}$ элемент, σ-компонентами которого являются $\alpha(\sigma^{-1})$:

$$\tilde{a} = \sum_\sigma \alpha(\sigma^{-1})\cdot\sigma.$$

Кроме того,

$$\tilde{a} = \sum_\sigma \alpha(\sigma)\cdot\sigma^{-1}.$$

Очевидно, $\tilde{\tilde{a}} = a$. Соответствие $y \to \tilde{y}$ является биекцией группового кольца на себя. Левый идеал порожден идемпотентом e и соответствует правому идеалу, порожденному $\tilde{e}$; с другой стороны, правый идеал, порожденный e? соответствует левому идеалу, порожденному $\tilde{e}$.

Бернер ввел в рассмотрение следующее понятие. Пусть $\xi \in T^0_k\mathbb{R}^n$ — тензор. Рассмотрим для фиксированной компоненты $\xi_{q_1q_2\ldots q_k} = \xi_{(q)}$ этого тензора $k!$ чисел $\sigma\xi_{(q)}$ в качестве компонент элемента кольца, который обозначим $\tilde{\xi}_{(q)}$; назовем эти числа *компонентами кольцевого тензора.* Кольцевой тензор $\tilde{\xi}$, поставленный в соответствие ξ, определяется при помощи $k!$ элементов $\tilde{\xi}_{(q)}$ кольца $\mathcal{O}_k$.

Теорема 2.5. *Пусть $T^0_k\mathbb{R}^n$ — тензорное пространво, R — класс симметрий, $\mathcal{I}$ — правый идеал, поставленный в соответствие R согласно теореме 2.4, и $\tilde{\mathcal{I}}$ — левый идеал группового кольца $\mathcal{O}_k$, соответствующий идеалу $\mathcal{I}$ в отображении $y \to \tilde{y}$. Тогда R содержит только такие тензоры, для которых компоненты кольцевого тензора принадлежат $\tilde{\mathcal{I}}$. Обратно, $\tilde{\mathcal{I}}$ является* *наименьшим левым идеалом, содержащим все компоненты кольцевых тензоров из R, т.е. он представляет собой пересечение всех левых идеалов, обладающих данным свойством.*

Пример 2.2. Рассмотрим случай $k = 2$. Группа S_2 образована двумя элементами (1) и $\sigma = (12)$. Для любого y имеет место равенство $\tilde{y} = y$. Два левых идеала группового кольца порождены идемпотентами $\frac{1}{2}((1) \pm \sigma)$, т.е. они состоят из скалярных произведений этих идемпотентов (то же самое верно и для правых идеалов).

Один из них преобразует каждый тензор в симметрический тензор, а второй — в антисимметрический тензор. Другими словами, для симметрического тензора компоненты кольцевого тензора принадлежат одному из левых идеалов, а для антисимметрического — во втором.

Заметим, что существует такое соответствие левых идеалов определенной части $\mathcal{O}_{\mathcal{C}}$ группового кольца $\mathcal{O}_k$ группы S_k и классов симметрий тензорного пространства, что класс симметрий, порожденный идемпотентом e, соответствует левому идеалу, порожденному $\tilde{e}$. Ограничимся неприводимыми представлениями; в качестве $\tilde{e}$ можем взять генерирующие идемпотенты, полученные вышепри помощи таблиц Юнга.

Пусть $(\lambda) = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r)$, $\lambda_i \geqslant \lambda_{i+1}$, $\sum\limits_{i=1}^{r} \lambda_i = k$ — диаграмма Юнга. Записав числа $1, 2, \dots, k$ в произвольном порядке, получим таблицу Юнга. Обозначим через π и ϑ вертикальную и горизонтальную перестановки и положим

$$\tilde{e} = \sum_{\pi\vartheta} \varepsilon_\vartheta \pi\vartheta = PQ = \sum_{\sigma} \tilde{\varepsilon}(\sigma) \cdot \sigma, \tag{2.22}$$

где

$$P = \sum_{\pi} \pi, \quad Q = \sum_{\vartheta} \varepsilon_\vartheta \vartheta$$

и $\varepsilon_\vartheta = \pm 1$ в зависимости от четности перестановки ϑ. Как известно, $\tilde{\varepsilon}(\sigma) = 0$ для $\sigma \neq \pi\vartheta$ и $\tilde{\varepsilon}(\sigma) = \varepsilon_\vartheta$ для $\sigma = \pi\vartheta$. Если $\sigma = \pi\vartheta$, то $\sigma^{-1} = \vartheta^{-1}\pi^{-1}$ и $\varepsilon(\sigma) = \tilde{\varepsilon}(\sigma^{-1})$. Поэтому

$$e = \sum_{\vartheta\pi} \varepsilon_\vartheta \vartheta\pi = QP. \tag{2.23}$$

Пусть $\xi \in T^0_k\mathbb{R}^n$ — тензор типа $(0, k)$. Тензор $\xi' = e\xi$ получим следующим образом. Сначала применением перестановки π его индексов получим тензор $\pi\xi$, а затем применим перестановку ϑ. Для диаграммы $(2, 1)$ и таблицы $\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1}\end{array}$. мы можем записать тензор $\xi = \xi_{ijk}$ в виде $\xi_{\substack{ij \\ k}}$.

Имеем $P = \{(1), (12)\}$ и $Q = \{(1), (13)\}$. Можно записать

$$PQ\xi_{\substack{ij \\ k}} = Q\left(\xi_{\substack{ij \\ k}} + \xi_{\substack{ji \\ k}}\right) = \xi_{\substack{ji \\ k}} - \xi_{\substack{kj \\ i}} + \xi_{\substack{ji \\ k}} - \xi_{\substack{ki \\ j}}. \tag{2.24}$$

В этом случае $e = (1) - (13) + (12) - (132)$.

В общем мы будем компоненты тензора обозначать ξ^J. Диаграмма индексов образована диаграммой Юнга с числами $1, 2, \dots, n$, которые не обязательно различны. Перестановка σ преобразует J в σJ. Например, для компоненты $\xi_{\substack{13 \\ 2}}$ (т.е. $i = 1$, $j = 3$, $k = 2$, и тогда $n \geqslant 3$) перестановка $\vartheta = (13)$ переводит $\xi_{\substack{13 \\ 2}}$ в $\xi_{\substack{23 \\ 1}}$.

Тензор называется *симметрическим в строках диаграммы*, если он не меняется при проведении горизонтальных перестановок π: $\pi\xi = \xi$. Тензор $P\xi$ является симметрическим в строках. Аналогично, тензор называется *антисимметрическим в столбцах диаграммы*, если он не меняется (с точностью до знака) при выполнении вертикальных перестановок ϑ: $\vartheta\xi = \pm\xi$. Тензор $Q\xi$ является антисимметрическим в столбцах. Тензор $e\xi$ в общем случае не является симметрическим в строках, а симметрия тензора $P\xi$ исчезает после применения Q, но после действия Q на $P\xi$ получим тензор, антисимметрический в столбцах.

Пусть $\mathcal{O}_k$ — групповое кольцо. Существует ли в нем ненулевой элемент, аннулирующий все тензоры? Другими словами, являются ли кольца $\mathcal{O}_0$ и $\mathcal{O}_{\mathcal{C}}$ из (2.20) собственными подкольцами в $\mathcal{O}_k$ и тождественны ли кольца $\mathcal{O}_\mathcal{C}$ и $\mathcal{O}_k$. Из предыдущего вытекает, что кольцо $\mathcal{O}_0$, если оно существует, состоит из некоторых простых двусторонних идеалов ${}^i\boldsymbol{a}$. Это означает, что если существует ненулевой элемент в ${}^i\boldsymbol{a}$, который аннулирует (не аннулирует) все тензоры, то ${}^i\boldsymbol{a}$ принадлежит (не принадлежит) кольцу $\mathcal{O}_0$. В предыдущем разделе мы тоже видели, что один из простых двусторонних идеалов принадлежит каждой диаграмме, и все левые идеалы, которые мы получим из таблиц этой диаграммы, лежат в двустороннем идеале, который им соответствует.

Теорема 2.6. *Пусть $T^0_k\mathbb{R}^n$ — тензорное пространство, $\mathcal{O}_k$ — групповое кольцо группы S_k и $\mathcal{O}_0$, $\mathcal{O}_\mathcal{C}$ — его подкольца согласно* (2.20)*. Пусть $(\lambda) = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r)$ — диаграмма Юнга с r строками и ${}^i\boldsymbol{a}$ — двусторонний идеал, принадлежащий этой диаграмме. Если $r > n$, то ${}^i\boldsymbol{a}$ лежит в $\mathcal{O}_0$, а если $r \leqslant n$, то ${}^i\boldsymbol{a}$ лежит в $\mathcal{O}_\mathcal{C}$. Поэтому для $k \leqslant n$ заключаем, что $\mathcal{O}_\mathcal{C}$ тождественно совпадает с $\mathcal{O}_k$ и $\mathcal{O}_0$ содержит только нулевой элемент. Если $k > n$, то $\mathcal{O}_\mathcal{C}$, а $\mathcal{O}_0$ является собственным подкольцом в $\mathcal{O}_k$.*

Пусть T — таблица Юнга с n строками. Построим соответствующий элемент кольца $e = QP$. Совокупность ненулевых тензоров $\zeta = e\xi$ образует неприводимый класс симметрий R. Таким образом, R является подпространством пространства $T^0_k\mathbb{R}^n$, которое инвариантно относительно преобразований $\boldsymbol{A}$ общей линейной группы $GL_n(\mathbb{C})$; R является неприводимым представлением групп $GL_n(\mathbb{C})$ и S_k. Чтобы получить матрицу этого представления, нужно построить базис R и найти линейно независимые компоненты тензора ζ.

Теорема 2.7. *Линейно независимые компонентами ζ^J являются те компоненты, диаграммы которых удовлетворяют следующему условию: числа в каждой строке диаграммы J не уменьшаются слева направо, а в каждом столбце возрастают сверху вниз.*

Эти диаграммы назовем *стандартными диаграммами*, а и соответствующее компоненты — *стандартными компонентами*.

Пример 2.3. Рассмотрим тензор $\xi = \xi^{q_1 q_2}_{q_3}$, имеющий симметрии и антисимметрии индексов, заданные диаграммой Юнга $\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \\ \cline{1-1}\end{array}$, где числа $1, 2, 3$ обозначают соответственно индексы q_1, q_2, q_3.

Вычислим L^1_n-эквивариантные проекции этого тензора. Предположим, что $f : T^0_k\mathbb{R}^n \to T^0_k\mathbb{R}^n$ является L^1_n-эквивариантной проекцией относительно канонического базиса пространства $T^0_k\mathbb{R}^n$, определенной выражением
$$\bar{\xi}_{q_1 q_2 q_3} = t^{p_1 p_2 p_3}_{q_1 q_2 q_3} \cdot \xi_{p_1 p_2 p_3}, \tag{2.25}$$
где t является абсолютно инвариантным тензором (см. теорему 2.2):
$$t^{p_1 p_2 p_3}_{q_1 q_2 q_3} = c \sum_\sigma \delta^{p_1}_{q_{\sigma_1}} \delta^{p_2}_{q_{\sigma_2}} \delta^{p_3}_{q_{\sigma_3}}; \tag{2.26}$$
перестановка σ задана таблицей Юнга, $\sigma \in \{(1), (12), (13), (132)\}$. Так как f — проекция, то $f \circ f = f$; следовательно,
$$t^{p_1 p_2 p_3}_{q_1 q_2 q_3} \cdot t^{i_1 i_2 i_3}_{p_1 p_2 p_3} = t^{i_1 i_2 i_3}_{q_1 q_2 q_3}. \tag{2.27}$$
После подстановки (2.26) получим
$$c \sum_\sigma \delta^{p_1}_{q_{\sigma_1}} \delta^{p_2}_{q_{\sigma_2}} \delta^{p_3}_{q_{\sigma_3}} \cdot c \sum_\sigma \delta^{i_1}_{p_{\sigma_1}} \delta^{i_2}_{p_{\sigma_2}} \delta^{i_3}_{p_{\sigma_3}} = c \sum_\sigma \delta^{i_1}_{q_{\sigma_1}} \delta^{i_2}_{q_{\sigma_2}} \delta^{i_3}_{q_{\sigma_3}}. \tag{2.28}$$
Это соотношение можно записать в виде
$$\begin{aligned} c\Big(&\delta^{p_1}_{q_1}\delta^{p_2}_{q_2}\delta^{p_3}_{q_3} + \delta^{p_1}_{q_2}\delta^{p_2}_{q_1}\delta^{p_3}_{q_3} - \delta^{p_1}_{q_3}\delta^{p_2}_{q_2}\delta^{p_3}_{q_1} - \delta^{p_1}_{q_3}\delta^{p_2}_{q_1}\delta^{p_3}_{q_2}\Big) \cdot \\ &\cdot c\Big(\delta^{i_1}_{p_1}\delta^{i_2}_{p_2}\delta^{i_3}_{p_3} + \delta^{i_1}_{p_2}\delta^{i_2}_{p_1}\delta^{i_3}_{p_3} - \delta^{i_1}_{p_3}\delta^{i_2}_{p_2}\delta^{i_3}_{p_1} - \delta^{i_1}_{p_3}\delta^{i_2}_{p_1}\delta^{i_3}_{p_2}\Big) = \\ &= c\Big(\delta^{i_1}_{q_1}\delta^{i_2}_{q_2}\delta^{i_3}_{q_3} + \delta^{i_1}_{q_2}\delta^{i_2}_{q_1}\delta^{i_3}_{q_3} - \delta^{i_1}_{q_3}\delta^{i_2}_{q_2}\delta^{i_3}_{q_1} - \delta^{i_1}_{q_3}\delta^{i_2}_{q_1}\delta^{i_3}_{q_2}\Big). \end{aligned} \tag{2.29}$$
Сравнивая левую и правую части, получим $c = 1/3$.

С другой стороны, если отображение f определено уравнением (2.25), где

$$t^{i_1 i_2 i_3}_{q_1 q_2 q_3} = \frac{1}{3}\Big(\delta^{i_1}_{q_1}\delta^{i_2}_{q_2}\delta^{i_3}_{q_3} + \delta^{i_1}_{q_2}\delta^{i_2}_{q_1}\delta^{i_3}_{q_3} - \delta^{i_1}_{q_3}\delta^{i_2}_{q_2}\delta^{i_3}_{q_1} - \delta^{i_1}_{q_3}\delta^{i_2}_{q_1}\delta^{i_3}_{q_2}\Big), \tag{2.30}$$

и согласно теореме 2.1 заключаем, что L^1_n-эквивариантно. Следовательно, отображение задано соотношением

$$\bar{\xi}_{q_1 q_2 q_3} = \frac{1}{3}\Big(\delta^{i_1}_{q_1}\delta^{i_2}_{q_2}\delta^{i_3}_{q_3} + \delta^{i_1}_{q_2}\delta^{i_2}_{q_1}\delta^{i_3}_{q_3} - \delta^{i_1}_{q_3}\delta^{i_2}_{q_2}\delta^{i_3}_{q_1} - \delta^{i_1}_{q_3}\delta^{i_2}_{q_1}\delta^{i_3}_{q_2}\Big)\xi_{i_1 i_2 i_3} = \frac{1}{3}\Big(\xi_{q_1 q_2 q_3} + \xi_{q_2 q_1 q_3} - \xi_{q_3 q_2 q_1} - \xi_{q_3 q_1 q_2}\Big). \tag{2.31}$$

Чтобы установить, что данное отображение является проекцией, достаточно убедиться, что $\bar{\bar{\xi}}_{q_1 q_2 q_3} = \bar{\xi}_{q_1 q_2 q_3}$. Вычислим $\bar{\bar{\xi}}_{q_1 q_2 q_3}$:

$$\bar{\bar{\xi}}_{q_1 q_2 q_3} = \frac{1}{3}\Big(\bar{\xi}_{q_1 q_2 q_3} + \bar{\xi}_{q_2 q_1 q_3} - \bar{\xi}_{q_3 q_2 q_1} - \bar{\xi}_{q_3 q_1 q_2}\Big). \tag{2.32}$$

Поскольку $\bar{\xi}_{q_1 q_2 q_3}$ известно, можно найти остальные компоненты $\bar{\xi}_{q_2 q_1 q_3}$, $\bar{\xi}_{q_3 q_2 q_1}$, $\bar{\xi}_{q_3 q_1 q_2}$ и подставить их в формулу (2.32):

$$\begin{aligned}
\bar{\xi}_{q_2 q_1 q_3} &= \frac{1}{3}\Big(\xi_{q_2 q_1 q_3} + \xi_{q_1 q_2 q_3} - \xi_{q_3 q_1 q_2} - \xi_{q_3 q_2 q_1}\Big),\\
\bar{\xi}_{q_3 q_2 q_1} &= \frac{1}{3}\Big(\xi_{q_3 q_2 q_1} + \xi_{q_2 q_3 q_1} - \xi_{q_1 q_2 q_3} - \xi_{q_1 q_3 q_2}\Big),\\
\bar{\xi}_{q_3 q_1 q_2} &= \frac{1}{3}\Big(\xi_{q_3 q_1 q_2} + \xi_{q_1 q_3 q_2} - \xi_{q_2 q_1 q_3} - \xi_{q_2 q_3 q_1}\Big).
\end{aligned} \tag{2.33}$$

После подстановки $\bar{\bar{\xi}}_{q_1 q_2 q_3} = \bar{\xi}_{q_1 q_2 q_3}$, поэтому данное отображение является проекцией.

Обозначим полученную проекцию через f_1 и положим $M_1 = f_1(T^0_k\mathbb{R}^n)$. Подобным образом можем получить проекции f_2, f_3, f_4, f_5, f_6 тензоров, которые имеют симметрии и антисимметрии, определяемые следующими таблицами Юнга:

$$\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 3\\\hline 2 \\\cline{1-1}\end{array}\quad \begin{array}{|c|c|}\hline 2 & 1\\\hline 3 \\\cline{1-1}\end{array}\quad \begin{array}{|c|c|}\hline 3 & 1\\\hline 2 \\\cline{1-1}\end{array}\quad \begin{array}{|c|c|}\hline 2 & 3\\\hline 1 \\\cline{1-1}\end{array}\quad \begin{array}{|c|c|}\hline 3 & 2\\\hline 1 \\\cline{1-1}\end{array}$$

Положим $M_1 = f_1(T^0_k\mathbb{R}^n)$, $1 = 2,\dots,6$. Найдя эти проекции, убедимся, что M_1 и M_2 — неприводимы, $M_6 = M_1$, $M_5 = M_2$, а пространства M_3 и M_4 являются прямой суммой пространств M_1 и M_2. Обозначим через π_1 и π_2 проекции, соответствующие диаграммам Юнга

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 3\\\hline\end{array}\qquad \begin{array}{|c|}\hline 1\\\hline 2\\\hline 3\\\hline\end{array} \tag{2.34}$$

Если $\pi_1(T^0_k\mathbb{R}^n) = S$ и $\pi_2(T^0_k\mathbb{R}^n) = A$, то π_1, π_2, f_1 и f_2 разлагают тензорное пространство $T^0_3\mathbb{R}^n$ на четыре неприводимых подпространства. Эти подпространства определены таблицами Юнга

$$\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2\\\hline 3 \\\cline{1-1}\end{array}\quad \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 3\\\hline 2 \\\cline{1-1}\end{array}\quad \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 3\\\hline\end{array}\quad \begin{array}{|c|}\hline 1\\\hline 2\\\hline 3\\\hline\end{array} \tag{2.35}$$

Замечание. Проекции $f_i, i = 1, 2, \dots 6$, являются представлениями группы $GL_n(\mathbb{R})$. Подобным способом можно вычислить все проекции тензоров типа $(0, 3)$. Эти проекции можно вычислить при помощи соотношения

$$\bar{\xi}_{q_1 q_2 q_3} = \sum_{\sigma} c_\sigma \xi_{q_{\sigma_1} q_{\sigma_2} q_{\sigma_3}}, \tag{2.36}$$

где суммирование производится по всем перестановкам $\sigma \in S_3$. Получим шесть уравнений с шестью неизвестными, решая которые, найдем все проекции над $GL_n(\mathbb{R})$.

3. Проекции тензоров типа $(1,k)$

В этом разделе найдем проекции тензоров типа $(1,k)$ (см. также [13, 14]).

Сначала рассмотрим тензоры, симметрические по нижним индексам, а затем — тензоры, имеющие симметрии и антисимметрии, заданные таблицами Юнга. Для тензоров, симметрических только по нижним индексам, справедлива следующая теорема.

Теорема 3.1. *Пусть $\mathbb{R}^n \otimes S^k\mathbb{R}^{n*}$ — тензорное пространство тензоров типа $(1,k)$, симметрических по нижним индескам. Тогда любая L^1_n-эквивариантная проекция $f : \mathbb{R}^n \otimes S^k\mathbb{R}^{n*} \to \mathbb{R}^n \otimes S^k\mathbb{R}^{n*}$ задана следующим соотношением:*

$$\bar{\xi}^m_{q_1q_2\dots q_k} = t^{mp_1p_2\dots p_k}_{q_1q_2\dots q_k s} \cdot \xi^s_{p_1p_2\dots p_k} \tag{3.1}$$

где

$$t^{mp_1p_2\dots p_k}_{q_1q_2\dots q_k s} = \frac{1}{k!}\sum_\sigma \Bigg[c_0 \cdot \delta^m_s \delta^{p_1}_{q_{\sigma_1}} \delta^{p_2}_{q_{\sigma_2}} \dots \delta^{p_k}_{q_{\sigma_k}} + \\ + c_1 \cdot \left(\delta^{p_1}_s \delta^m_{q_{\sigma_1}} \delta^{p_2}_{q_{\sigma_2}} \dots \delta^{p_k}_{q_{\sigma_k}} + \delta^{p_2}_s \delta^{p_1}_{q_{\sigma_1}} \delta^m_{q_{\sigma_2}} \dots \delta^{p_k}_{q_{\sigma_k}} + \dots + \delta^{p_k}_s \delta^{p_1}_{q_{\sigma_1}} \delta^{p_2}_{q_{\sigma_2}} \dots \delta^m_{q_{\sigma_k}} \right) \Bigg], \tag{3.2}$$

и коэффициенты c_0, c_1 удовлетворяют ровно одному из следующих условий:

$$\begin{aligned} &(1) \quad c_0 = 0, \quad c_1 = 0,\\ &(2) \quad c_0 = 0, \quad c_1 = \frac{1}{n+k-1},\\ &(3) \quad c_0 = 1, \quad c_1 = 0,\\ &(4) \quad c_0 = 1, \quad c_1 = \frac{-1}{n+k-1}. \end{aligned}$$

Пусть E^1_k — тензорное пространство тензоров следующего типа. Тензор $\xi^m_{q_1q_2\dots q_k}$ имеет тип $(1,k)$ и симметриии и антисимметрии по нижним индексам, заданные диаграммой Юнга. Пусть b — некоторое число, определенное следующим способом. Пусть $\mathcal{B}$ — система перестановок набора чисел $\{1;2;\dots;k\}$, заданная диаграммой Юнга. Пусть $a_i \circ \mathcal{B} = \{a_i \circ b_j;\ b_j \in \mathcal{B}\}$, где $a_i \in \mathcal{B}$, $i, j = 1, 2, \dots h$б и h — количество элементов множества $\mathcal{B}$. Тогда b является количеством тождественных перестановок в $\bigcup\limits_i (a_i \circ \mathcal{B})$.

Имеет место следующая теорема.

Теорема 3.2. *Пусть E^1_k — пространство тензоров типа $(1,k)$, имеющих симметрии и антисимметрии по нижним индексам, заданные при помощи некоторой диаграммы Юнга, и пусть b — число, определенное выше. Тогда любая L^1_n-эквивариантная проекция $f : E^1_k \to E^1_k$ задается соотношением*

$$\bar{\xi}^m_{q_1q_2\dots q_k} = t^{mp_1p_2\dots p_k}_{q_1q_2\dots q_k s} \cdot \xi^s_{p_1p_2\dots p_k}, \tag{3.3}$$

где

$$t^{mp_1p_2\dots p_k}_{q_1q_2\dots q_k s} = \frac{1}{b}\sum_\sigma \Bigg[c_0 \cdot \varepsilon_\sigma \cdot \delta^m_s \delta^{p_1}_{q_{\sigma_1}} \delta^{p_2}_{q_{\sigma_2}} \dots \delta^{p_k}_{q_{\sigma_k}} + c_1 \Big(\varepsilon_\sigma \cdot \delta^{p_1}_s \delta^m_{q_{\sigma_1}} \delta^{p_2}_{q_{\sigma_2}} \dots \delta^{p_k}_{q_{\sigma_k}} + \\ + \varepsilon_\sigma \cdot \delta^{p_2}_s \delta^{p_1}_{q_{\sigma_1}} \delta^m_{q_{\sigma_2}} \delta^{p_3}_{q_{\sigma_3}} \dots \delta^{p_k}_{q_{\sigma_k}} + \dots + \varepsilon_\sigma \cdot \delta^{p_k}_s \delta^{p_1}_{q_{\sigma_1}} \delta^{p_2}_{q_{\sigma_2}} \dots \delta^{p_{k-1}}_{q_{\sigma_{k-1}}} \delta^m_{q_{\sigma_k}} \Big) \Bigg], \tag{3.4}$$

σ является перестановкой множества $\{1, 2, \dots, k\}$, определенная диаграммой Юнга, ε_σ — знак перестановки σ, а коэффициенты c_0, c_1 удовлетворяют одному из следующих соотношений:

$$\begin{aligned} &(1) \quad c_0 = 0, \quad c_1 = 0,\\ &(2) \quad c_0 = 0, \quad c_1 = \frac{1}{n+k_r-k_c}, \end{aligned}$$

$$(3)\quad c_0 = 1, \quad c_1 = 0,$$
$$(4)\quad c_0 = 1, \quad c_1 = \frac{-1}{n + k_r - k_c},$$

где k_r и k_c — количества ячеек первой строки и первого столбца диаграммы Юнга соответственно.

ввв

4. Проекции симметрических и антисимметрических тензоров типа (r, k)

В работах Л. Юкловой (Лакомой) [14, 15] изучаются вопросы о проекции симметрических и антисимметрических тензоров типа (r, k).

Теорема 4.1 (см. [14, 15]). *Пусть $S^r\mathbb{R}^n \otimes S^k\mathbb{R}^{n*}$ — пространство тензоров типа (r, k), симметрических по верхним и нижним индексам. Тогда любая L^1_n-эквивариантная проекция $f : S^r\mathbb{R}^n \otimes S^k\mathbb{R}^{n*} \to S^r\mathbb{R}^n \otimes S^k\mathbb{R}^{n*}$ определена соотношением*

$$\bar{\xi}^{m_1 m_2 \dots m_r}_{q_1 q_2 \dots q_k} = t^{m_1 m_2 \dots m_r p_1 p_2 \dots p_k}_{q_1 q_2 \dots q_k s_1 s_2 \dots s_r} \cdot \xi^{s_1 s_2 \dots s_r}_{p_1 p_2 \dots p_k}, \tag{4.1}$$

где

$$\begin{aligned}
t^{m_1 m_2 \dots m_r p_1 p_2 \dots p_k}_{q_1 q_2 \dots q_k s_1 s_2 \dots s_r} = \frac{1}{r!}\frac{1}{k!}\sum_{\rho}\sum_{\sigma}\Bigg[& c_0 \delta^{m_1}_{s_{\rho(1)}} \delta^{m_2}_{s_{\rho(2)}} \dots \delta^{m_r}_{s_{\rho(r)}} \delta^{p_1}_{q_{\sigma(1)}} \delta^{p_2}_{q_{\sigma(2)}} \dots \delta^{p_k}_{q_{\sigma(k)}} + \\
& + c_1 \Big(\delta^{p_1}_{s_{\rho(1)}} \delta^{m_2}_{s_{\rho(2)}} \dots \delta^{m_r}_{s_{\rho(r)}} \delta^{m_1}_{q_{\sigma(1)}} \delta^{p_2}_{q_{\sigma(2)}} \dots \delta^{p_k}_{q_{\sigma(k)}} + \\
& + \delta^{p_2}_{s_{\rho(1)}} \delta^{m_2}_{s_{\rho(2)}} \dots \delta^{m_r}_{s_{\rho(r)}} \delta^{p_1}_{q_{\sigma(1)}} \delta^{m_1}_{q_{\sigma(2)}} \delta^{p_3}_{q_{\sigma(3)}} \dots \delta^{p_k}_{q_{\sigma(k)}} + \dots + \\
& + \delta^{p_k}_{s_{\rho(1)}} \delta^{m_2}_{s_{\rho(2)}} \dots \delta^{m_r}_{s_{\rho(r)}} \delta^{p_1}_{q_{\sigma(1)}} \delta^{p_2}_{q_{\sigma(2)}} \dots \delta^{p_{k-1}}_{q_{\sigma(k-1)}} \delta^{m_1}_{q_{\sigma(k)}} + \\
& + \delta^{m_1}_{s_{\rho(1)}} \delta^{p_1}_{s_{\rho(2)}} \delta^{m_3}_{s_{\rho(3)}} \dots \delta^{m_r}_{s_{\rho(r)}} \delta^{m_2}_{q_{\sigma(1)}} \delta^{p_2}_{q_{\sigma(2)}} \dots \delta^{p_k}_{q_{\sigma(k)}} + \\
& + \delta^{m_1}_{s_{\rho(1)}} \delta^{p_2}_{s_{\rho(2)}} \delta^{m_3}_{s_{\rho(3)}} \dots \delta^{m_r}_{s_{\rho(r)}} \delta^{p_1}_{q_{\sigma(1)}} \delta^{m_2}_{q_{\sigma(2)}} \delta^{p_3}_{q_{\sigma(3)}} \dots \delta^{p_k}_{q_{\sigma(k)}} + \dots + \\
& + \delta^{m_1}_{s_{\rho(1)}} \delta^{p_k}_{s_{\rho(2)}} \delta^{m_3}_{s_{\rho(3)}} \dots \delta^{m_r}_{s_{\rho(r)}} \delta^{p_1}_{q_{\sigma(1)}} \delta^{p_2}_{q_{\sigma(2)}} \dots \delta^{p_{k-1}}_{q_{\sigma(k-1)}} \delta^{m_2}_{q_{\sigma(k)}} + \dots + \\
& + \delta^{m_1}_{s_{\rho(1)}} \delta^{m_2}_{s_{\rho(2)}} \dots \delta^{m_{r-1}}_{s_{\rho(r-1)}} \delta^{p_1}_{s_{\rho(r)}} \delta^{m_r}_{q_{\sigma(1)}} \delta^{p_2}_{q_{\sigma(2)}} \dots \delta^{p_k}_{q_{\sigma(k)}} + \\
& + \delta^{m_1}_{s_{\rho(1)}} \delta^{m_2}_{s_{\rho(2)}} \dots \delta^{m_{r-1}}_{s}{}_{\rho(r-1)} \delta^{p_2}_{s_{\rho(r)}} \delta^{p_1}_{q_{\sigma(1)}} \delta^{m_r}_{q_{\sigma(2)}} \delta^{p_3}_{q_{\sigma(3)}} \dots \delta^{p_k}_{q_{\sigma(k)}} + \dots + \\
& + \delta^{m_1}_{s_{\rho(1)}} \delta^{m_2}_{s_{\rho(2)}} \dots \delta^{m_{r-1}}_{s_{\rho(r-1)}} \delta^{p_k}_{s_{\rho(r)}} \delta^{p_1}_{q_{\sigma(1)}} \delta^{p_2}_{q_{\sigma(2)}} \dots \delta^{p_{k-1}}_{q_{\sigma(k-1)}} \delta^{m_r}_{q_{\sigma(k)}} \Big) + \\
& + c_2 \Big(\delta^{p_1}_{s_{\rho(1)}} \delta^{p_2}_{s_{\rho(2)}} \delta^{m_3}_{s_{\rho(3)}} \dots \delta^{m_r}_{s_{\rho(r)}} \delta^{m_1}_{q_{\sigma(1)}} \delta^{m_2}_{q_{\sigma(2)}} \delta^{p_3}_{q_{\sigma(3)}} \dots \delta^{p_k}_{q_{\sigma(k)}} + \\
& + \delta^{p_1}_{s_{\rho(1)}} \delta^{p_3}_{s_{\rho(2)}} \delta^{m_3}_{s_{\rho(3)}} \dots \delta^{m_r}_{s_{\rho(r)}} \delta^{m_1}_{q_{\sigma(1)}} \delta^{p_2}_{q_{\sigma(2)}} \delta^{m_2}_{q_{\sigma(3)}} \delta^{p_4}_{q_{\sigma(4)}} \dots \delta^{p_k}_{q_{\sigma(k)}} + \dots + \\
& + \delta^{p_1}_{s_{\rho(1)}} \delta^{p_k}_{s_{\rho(2)}} \delta^{m_3}_{s_{\rho(3)}} \dots \delta^{m_r}_{s_{\rho(r)}} \delta^{m_1}_{q_{\sigma(1)}} \delta^{p_2}_{q_{\sigma(2)}} \dots \delta^{p_{k-1}}_{q_{\sigma(k-1)}} \delta^{m_2}_{q_{\sigma(k)}} + \dots + \\
& + \delta^{p_{k-1}}_{s_{\rho(1)}} \delta^{p_k}_{s_{\rho(2)}} \delta^{m_3}_{s_{\rho(3)}} \dots \delta^{m_r}_{s_{\rho(r)}} \delta^{p_1}_{q_{\sigma(1)}} \dots \delta^{p_{k-2}}_{q_{\sigma(k-2)}} \delta^{m_1}_{q_{\sigma(k-1)}} \delta^{m_2}_{q_{\sigma(k)}} + \\
& + \delta^{m_1}_{s_{\rho(1)}} \dots \delta^{m_{r-2}}_{s_{\rho(r-2)}} \delta^{p_1}_{s_{\rho(r-1)}} \delta^{p_2}_{s_{\rho(r)}} \delta^{m_{r-1}}_{q_{\sigma(1)}} \delta^{m_r}_{q_{\sigma(2)}} \delta^{p_3}_{q_{\sigma(3)}} \dots \delta^{p_k}_{q_{\sigma(k)}} + \\
& + \delta^{m_1}_{s_{\rho(1)}} \dots \delta^{m_{r-2}}_{s_{\rho(r-2)}} \delta^{p_1}_{s_{\rho(r-1)}} \delta^{p_3}_{s_{\rho(r)}} \delta^{m_{r-1}}_{q_{\sigma(1)}} \delta^{p_2}_{q_{\sigma(2)}} \delta^{m_r}_{q_{\sigma(3)}} \delta^{p_4}_{q_{\sigma(4)}} \dots \delta^{p_k}_{q_{\sigma(k)}} + \dots + \\
& + \delta^{m_1}_{s_{\rho(1)}} \dots \delta^{m_{r-2}}_{s_{\rho(r-2)}} \delta^{p_1}_{s_{\rho(r-1)}} \delta^{p_k}_{s_{\rho(r)}} \delta^{m_{r-1}}_{q_{\sigma(1)}} \delta^{p_2}_{q_{\sigma(2)}} \dots \delta^{p_{k-1}}_{q_{\sigma(k-1)}} \delta^{m_r}_{q_{\sigma(k)}} + \\
& + \delta^{m_1}_{s_{\rho(1)}} \dots \delta^{m_{r-2}}_{s_{\rho(r-2)}} \delta^{p_{k-1}}_{s_{\rho(r-1)}} \dots \delta^{p_k}_{s_{\rho(r)}} \delta^{p_1}_{q_{\sigma(1)}} \dots \delta^{p_{k-2}}_{q_{\sigma(k-2)}} \delta^{m_{r-1}}_{q_{\sigma(k-1)}} \delta^{m_r}_{q_{\sigma(k)}} \Big) + \dots + \\
& + c_r \Big(\delta^{p_1}_{s_{\rho(1)}} \delta^{p_2}_{s_{\rho(2)}} \dots \delta^{p_r}_{s_{\rho(r)}} \delta^{m_1}_{q_{\sigma(1)}} \delta^{m_2}_{q_{\sigma(2)}} \dots \delta^{m_r}_{q_{\sigma(r)}} \delta^{p_{r+1}}_{q_{\sigma(r+1)}} \dots \delta^{p_k}_{q_{\sigma(k)}} + \dots + \\
& + \delta^{p_{k-r+1}}_{s_{\rho(1)}} \delta^{p_{k-r+2}}_{s_{\rho(2)}} \dots \delta^{p_k}_{s_{\rho(r)}} \delta^{p_1}_{q_{\sigma(1)}} \delta^{p_2}_{q_{\sigma(2)}} \dots \delta^{p_{k-r}}_{q_{\sigma(k-r)}} \delta^{m_1}_{q_{\sigma(k-r+1)}} \dots \delta^{m_r}_{q_{\sigma(k)}} \Big) \Bigg]
\end{aligned} \tag{4.2}$$

для $r \leqslant k$ и

$$
\begin{aligned}
t^{m_1 m_2 \dots m_r p_1 p_2 \dots p_k}_{q_1 q_2 \dots q_k s_1 s_2 \dots s_r} = \frac{1}{r!}\frac{1}{k!}\sum_{\rho}\sum_{\sigma}\Big[& c_0 \delta^{m_1}_{s_{\rho(1)}} \delta^{m_2}_{s_{\rho(2)}} \dots \delta^{m_r}_{s_{\rho(r)}} \delta^{p_1}_{q_{\sigma(1)}} \delta^{p_2}_{q_{\sigma(2)}} \dots \delta^{p_k}_{q_{\sigma(k)}} + \\
& + c_1 \Big(\delta^{p_1}_{s_{\rho(1)}} \delta^{m_2}_{s_{\rho(2)}} \dots \delta^{m_r}_{s_{\rho(r)}} \delta^{m_1}_{q_{\sigma(1)}} \delta^{p_2}_{q_{\sigma(2)}} \dots \delta^{p_k}_{q_{\sigma(k)}} + \\
& + \delta^{p_2}_{s_{\rho(1)}} \delta^{m_2}_{s_{\rho(2)}} \dots \delta^{m_r}_{s_{\rho(r)}} \delta^{p_1}_{q_{\sigma(1)}} \delta^{m_1}_{q_{\sigma(2)}} \delta^{p_3}_{q_{\sigma(3)}} \dots \delta^{p_k}_{q_{\sigma(k)}} + \dots + \\
& + \delta^{p_k}_{s_{\rho(1)}} \delta^{m_2}_{s_{\rho(2)}} \dots \delta^{m_r}_{s_{\rho(r)}} \delta^{p_1}_{q_{\sigma(1)}} \delta^{p_2}_{q_{\sigma(2)}} \dots \delta^{p_{k-1}}_{q_{\sigma(k-1)}} \delta^{m_1}_{q_{\sigma(k)}} + \\
& + \delta^{m_1}_{s_{\rho(1)}} \delta^{p_1}_{s_{\rho(2)}} \delta^{m_3}_{s_{\rho(3)}} \dots \delta^{m_r}_{s_{\rho(r)}} \delta^{m_2}_{q_{\sigma(1)}} \delta^{p_2}_{q_{\sigma(2)}} \dots \delta^{p_k}_{q_{\sigma(k)}} + \\
& + \delta^{m_1}_{s_{\rho(1)}} \delta^{p_2}_{s_{\rho(2)}} \delta^{m_3}_{s_{\rho(3)}} \dots \delta^{m_r}_{s_{\rho(r)}} \delta^{p_1}_{q_{\sigma(1)}} \delta^{m_2}_{q_{\sigma(2)}} \delta^{p_3}_{q_{\sigma(3)}} \dots \delta^{p_k}_{q_{\sigma(k)}} + \dots + \\
& + \delta^{m_1}_{s_{\rho(1)}} \delta^{p_k}_{s_{\rho(2)}} \delta^{m_3}_{s_{\rho(3)}} \dots \delta^{m_r}_{s_{\rho(r)}} \delta^{p_1}_{q_{\sigma(1)}} \delta^{p_2}_{q_{\sigma(2)}} \dots \delta^{p_{k-1}}_{q_{\sigma(k-1)}} \delta^{m_2}_{q_{\sigma(k)}} + \dots + \\
& + \delta^{m_1}_{s_{\rho(1)}} \delta^{m_2}_{s_{\rho(2)}} \dots \delta^{m_{r-1}}_{s_{\rho(r-1)}} \delta^{p_1}_{s_{\rho(r)}} \delta^{m_r}_{q_{\sigma(1)}} \delta^{p_2}_{q_{\sigma(2)}} \dots \delta^{p_k}_{q_{\sigma(k)}} + \\
& + \delta^{m_1}_{s_{\rho(1)}} \delta^{m_2}_{s_{\rho(2)}} \dots \delta^{m_{r-1}}_{s}{}_{\rho(r-1)} \delta^{p_2}_{s_{\rho(r)}} \delta^{p_1}_{q_{\sigma(1)}} \delta^{m_r}_{q_{\sigma(2)}} \delta^{p_3}_{q_{\sigma(3)}} \dots \delta^{p_k}_{q_{\sigma(k)}} + \dots + \\
& + \delta^{m_1}_{s_{\rho(1)}} \delta^{m_2}_{s_{\rho(2)}} \dots \delta^{m_{r-1}}_{s_{\rho(r-1)}} \delta^{p_k}_{s_{\rho(r)}} \delta^{p_1}_{q_{\sigma(1)}} \delta^{p_2}_{q_{\sigma(2)}} \dots \delta^{p_{k-1}}_{q_{\sigma(k-1)}} \delta^{m_r}_{q_{\sigma(k)}} \Big) + \\
& + c_2 \Big(\delta^{p_1}_{s_{\rho(1)}} \delta^{p_2}_{s_{\rho(2)}} \delta^{m_3}_{s_{\rho(3)}} \dots \delta^{m_r}_{s_{\rho(r)}} \delta^{m_1}_{q_{\sigma(1)}} \delta^{m_2}_{q_{\sigma(2)}} \delta^{p_3}_{q_{\sigma(3)}} \dots \delta^{p_k}_{q_{\sigma(k)}} + \\
& + \delta^{p_1}_{s_{\rho(1)}} \delta^{p_3}_{s_{\rho(2)}} \delta^{m_3}_{s_{\rho(3)}} \dots \delta^{m_r}_{s_{\rho(r)}} \delta^{m_1}_{q_{\sigma(1)}} \delta^{p_2}_{q_{\sigma(2)}} \delta^{m_2}_{q_{\sigma(3)}} \delta^{p_4}_{q_{\sigma(4)}} \dots \delta^{p_k}_{q_{\sigma(k)}} + \dots + \\
& + \delta^{p_1}_{s_{\rho(1)}} \delta^{p_k}_{s_{\rho(2)}} \delta^{m_3}_{s_{\rho(3)}} \dots \delta^{m_r}_{s_{\rho(r)}} \delta^{m_1}_{q_{\sigma(1)}} \delta^{p_2}_{q_{\sigma(2)}} \dots \delta^{p_{k-1}}_{q_{\sigma(k-1)}} \delta^{m_2}_{q_{\sigma(k)}} + \dots + \\
& + \delta^{p_{k-1}}_{s_{\rho(1)}} \delta^{p_k}_{s_{\rho(2)}} \delta^{m_3}_{s_{\rho(3)}} \dots \delta^{m_r}_{s_{\rho(r)}} \delta^{p_1}_{q_{\sigma(1)}} \dots \delta^{p_{k-2}}_{q_{\sigma(k-2)}} \delta^{m_1}_{q_{\sigma(k-1)}} \delta^{m_2}_{q_{\sigma(k)}} + \\
& + \delta^{m_1}_{s_{\rho(1)}} \dots \delta^{m_{r-2}}_{s_{\rho(r-2)}} \delta^{p_1}_{s_{\rho(r-1)}} \delta^{p_2}_{s_{\rho(r)}} \delta^{m_{r-1}}_{q_{\sigma(1)}} \delta^{m_r}_{q_{\sigma(2)}} \delta^{p_3}_{q_{\sigma(3)}} \dots \delta^{p_k}_{q_{\sigma(k)}} + \\
& + \delta^{m_1}_{s_{\rho(1)}} \dots \delta^{m_{r-2}}_{s_{\rho(r-2)}} \delta^{p_1}_{s_{\rho(r-1)}} \delta^{p_3}_{s_{\rho(r)}} \delta^{m_{r-1}}_{q_{\sigma(1)}} \delta^{p_2}_{q_{\sigma(2)}} \delta^{m_r}_{q_{\sigma(3)}} \delta^{p_4}_{q_{\sigma(4)}} \dots \delta^{p_k}_{q_{\sigma(k)}} + \dots + \\
& + \delta^{m_1}_{s_{\rho(1)}} \dots \delta^{m_{r-2}}_{s_{\rho(r-2)}} \delta^{p_1}_{s_{\rho(r-1)}} \delta^{p_k}_{s_{\rho(r)}} \delta^{m_{r-1}}_{q_{\sigma(1)}} \delta^{p_2}_{q_{\sigma(2)}} \dots \delta^{p_{k-1}}_{q_{\sigma(k-1)}} \delta^{m_r}_{q_{\sigma(k)}} + \\
& + \delta^{m_1}_{s_{\rho(1)}} \dots \delta^{m_{r-2}}_{s_{\rho(r-2)}} \delta^{p_{k-1}}_{s_{\rho(r-1)}} \dots \delta^{p_k}_{s_{\rho(r)}} \delta^{p_1}_{q_{\sigma(1)}} \dots \delta^{p_{k-2}}_{q_{\sigma(k-2)}} \delta^{m_{r-1}}_{q_{\sigma(k-1)}} \delta^{m_r}_{q_{\sigma(k)}} \Big) + \dots + \\
& + c_k \Big(\delta^{p_1}_{s_{\rho(1)}} \delta^{p_2}_{s_{\rho(2)}} \dots \delta^{p_k}_{s_{\rho(k)}} \delta^{m_{k+1}}_{s_{\rho(k+1)}} \dots \delta^{m_r}_{s_{\rho(r)}} \delta^{m_1}_{q_{\sigma(1)}} \delta^{m_2}_{q_{\sigma(2)}} \dots \delta^{m_k}_{q_{\sigma(k)}} + \dots + \\
& + \delta^{m_1}_{s_{\rho(1)}} \dots \delta^{m_{r-k}}_{s_{\rho(r-k)}} \delta^{p_1}_{s_{\rho(r-k+1)}} \dots \delta^{p_k}_{s_{\rho(r)}} \delta^{m_{r-k+1}}_{q_{\sigma(1)}} \dots \delta^{m_r}_{q_{\sigma(k)}} \Big) \Big]
\end{aligned} \tag{4.3}
$$

для $k < r$, а коэффициенты $c_0, \dots, c_h$, $h = 1, \dots, \min\{r, k\}$, удовлетворяют одному из следующих условий:

$$
\begin{aligned}
(1)\quad & c_0 = c_1 = \dots = c_{i-1} = 0, && i = 2, 3, \dots, \min\{r, k\} + 1, \\
& c_h = \frac{(-1)^{h-i} i(i+1)(i+2)\dots(h-1)\cdot h!}{(h-i)!(x-i-1)(x-i-2)\dots(x-i-h)}, && h = i-1, i, \dots, \min\{r, k\},
\end{aligned} \tag{4.4}
$$

или

$$
\begin{aligned}
(2)\quad & c_0 = 1, \quad c_1 = \dots = c_{i-1} = 0, && i = 2, 3 \dots, \min\{r, k\} + 1, \\
& c_h = \frac{(-1)^{h-i+1} i(i+1)(i+2)\dots,(h-1)\cdot h!}{(h-i)!(x-i-1)(x-i-2)\dots(x-i-h)}, && h = i-1, i, \dots, \min\{r, k\},
\end{aligned} \tag{4.5}
$$

а $x = n + k + r$.

Теорема 4.1 дает представление о проекциях тензоров, симметрических по верхним и нижним индексам. В следующей теореме описаны свойства тензоров, антисимметрических по верхним и нижним индексам.

Теорема 4.2 (см. [14,15]). *Пусть $A^r\mathbb{R}^n \otimes A^k\mathbb{R}^{n*}$ — пространство тензоров типа (r,k), антисимметрических по верхним и нижним индексам. Тогда любая L^1_n-эквивариантная проекция $f : A^r\mathbb{R}^n \otimes A^k\mathbb{R}^{n*} \to A^r\mathbb{R}^n \otimes A^k\mathbb{R}^{n*}$ определена следующим соотношением:*

$$\bar{\xi}^{m_1m_2\dots m_r}_{q_1q_2\dots q_k} = t^{m_1m_2\dots m_rp_1p_2\dots p_k}_{q_1q_2\dots q_ks_1s_2\dots s_r}\cdot \xi^{s_1s_2\dots s_r}_{p_1p_2\dots p_k}, \tag{4.6}$$

где

$$\begin{aligned}
t^{m_1m_2\dots m_rp_1p_2\dots p_k}_{q_1q_2\dots q_ks_1s_2\dots s_r} = \frac{1}{r!}\frac{1}{k!}\sum_\rho\sum_\sigma\Big[&c_0\varepsilon^\rho\varepsilon^\sigma\delta^{m_1}_{s_{\rho(1)}}\delta^{m_2}_{s_{\rho(2)}}\dots\delta^{m_r}_{s_{\rho(r)}}\delta^{p_1}_{q_{\sigma(1)}}\delta^{p_2}_{q_{\sigma(2)}}\dots\delta^{p_k}_{q_{\sigma(k)}}+\\
&+c_1\Big(\varepsilon^\rho\varepsilon^\sigma\delta^{p_1}_{s_{\rho(1)}}\delta^{m_2}_{s_{\rho(2)}}\dots\delta^{m_r}_{s_{\rho(r)}}\delta^{m_1}_{q_{\sigma(1)}}\delta^{p_2}_{q_{\sigma(2)}}\dots\delta^{p_k}_{q_{\sigma(k)}}+\\
&+\varepsilon^\rho\varepsilon^\sigma\delta^{p_2}_{s_{\rho(1)}}\delta^{m_2}_{s_{\rho(2)}}\dots\delta^{m_r}_{s_{\rho(r)}}\delta^{p_1}_{q_{\sigma(1)}}\delta^{m_1}_{q_{\sigma(2)}}\delta^{p_3}_{q_{\sigma(3)}}\dots\delta^{p_k}_{q_{\sigma(k)}}+\dots+\\
&+\varepsilon^\rho\varepsilon^\sigma\delta^{p_k}_{s_{\rho(1)}}\delta^{m_2}_{s_{\rho(2)}}\dots\delta^{m_r}_{s_{\rho(r)}}\delta^{p_1}_{q_{\sigma(1)}}\delta^{p_2}_{q_{\sigma(2)}}\dots\delta^{p_{k-1}}_{q_{\sigma(k-1)}}\delta^{m_1}_{q_{\sigma(k)}}+\\
&+\varepsilon^\rho\varepsilon^\sigma\delta^{m_1}_{s_{\rho(1)}}\delta^{p_1}_{s_{\rho(2)}}\delta^{m_3}_{s_{\rho(3)}}\dots\delta^{m_r}_{s_{\rho(r)}}\delta^{m_2}_{q_{\sigma(1)}}\delta^{p_2}_{q_{\sigma(2)}}\dots\delta^{p_k}_{q_{\sigma(k)}}+\\
&+\varepsilon^\rho\varepsilon^\sigma\delta^{m_1}_{s_{\rho(1)}}\delta^{p_2}_{s_{\rho(2)}}\delta^{m_3}_{s_{\rho(3)}}\dots\delta^{m_r}_{s_{\rho(r)}}\delta^{p_1}_{q_{\sigma(1)}}\delta^{m_2}_{q_{\sigma(2)}}\delta^{p_3}_{q_{\sigma(3)}}\dots\delta^{p_k}_{q_{\sigma(k)}}+\dots+\\
&+\varepsilon^\rho\varepsilon^\sigma\delta^{m_1}_{s_{\rho(1)}}\delta^{p_k}_{s_{\rho(2)}}\delta^{m_3}_{s_{\rho(3)}}\dots\delta^{m_r}_{s_{\rho(r)}}\delta^{p_1}_{q_{\sigma(1)}}\delta^{p_2}_{q_{\sigma(2)}}\dots\delta^{p_{k-1}}_{q_{\sigma(k-1)}}\delta^{m_2}_{q_{\sigma(k)}}+\dots+\\
&+\varepsilon^\rho\varepsilon^\sigma\delta^{m_1}_{s_{\rho(1)}}\delta^{m_2}_{s_{\rho(2)}}\dots\delta^{m_{r-1}}_{s_{\rho(r-1)}}\delta^{p_1}_{s_{\rho(r)}}\delta^{m_r}_{q_{\sigma(1)}}\delta^{p_2}_{q_{\sigma(2)}}\dots\delta^{p_k}_{q_{\sigma(k)}}+\\
&+\varepsilon^\rho\varepsilon^\sigma\delta^{m_1}_{s_{\rho(1)}}\delta^{m_2}_{s_{\rho(2)}}\dots\delta^{m_{r-1}}_{s}{}_{\rho(r-1)}\delta^{p_2}_{s_{\rho(r)}}\delta^{p_1}_{q_{\sigma(1)}}\delta^{m_r}_{q_{\sigma(2)}}\delta^{p_3}_{q_{\sigma(3)}}\dots\delta^{p_k}_{q_{\sigma(k)}}+\dots+\\
&+\varepsilon^\rho\varepsilon^\sigma\delta^{m_1}_{s_{\rho(1)}}\delta^{m_2}_{s_{\rho(2)}}\dots\delta^{m_{r-1}}_{s_{\rho(r-1)}}\delta^{p_k}_{s_{\rho(r)}}\delta^{p_1}_{q_{\sigma(1)}}\delta^{p_2}_{q_{\sigma(2)}}\dots\delta^{p_{k-1}}_{q_{\sigma(k-1)}}\delta^{m_r}_{q_{\sigma(k)}}\Big)+\\
&+c_2\Big(\varepsilon^\rho\varepsilon^\sigma\delta^{p_1}_{s_{\rho(1)}}\delta^{p_2}_{s_{\rho(2)}}\delta^{m_3}_{s_{\rho(3)}}\dots\delta^{m_r}_{s_{\rho(r)}}\delta^{m_1}_{q_{\sigma(1)}}\delta^{m_2}_{q_{\sigma(2)}}\delta^{p_3}_{q_{\sigma(3)}}\dots\delta^{p_k}_{q_{\sigma(k)}}+\\
&+\varepsilon^\rho\varepsilon^\sigma\delta^{p_1}_{s_{\rho(1)}}\delta^{p_3}_{s_{\rho(2)}}\delta^{m_3}_{s_{\rho(3)}}\dots\delta^{m_r}_{s_{\rho(r)}}\delta^{m_1}_{q_{\sigma(1)}}\delta^{p_2}_{q_{\sigma(2)}}\delta^{m_2}_{q_{\sigma(3)}}\delta^{p_4}_{q_{\sigma(4)}}\dots\delta^{p_k}_{q_{\sigma(k)}}+\dots+\\
&+\varepsilon^\rho\varepsilon^\sigma\delta^{p_1}_{s_{\rho(1)}}\delta^{p_k}_{s_{\rho(2)}}\delta^{m_3}_{s_{\rho(3)}}\dots\delta^{m_r}_{s_{\rho(r)}}\delta^{m_1}_{q_{\sigma(1)}}\delta^{p_2}_{q_{\sigma(2)}}\dots\delta^{p_{k-1}}_{q_{\sigma(k-1)}}\delta^{m_2}_{q_{\sigma(k)}}+\\
&+\varepsilon^\rho\varepsilon^\sigma\delta^{p_{k-1}}_{s_{\rho(1)}}\delta^{p_k}_{s_{\rho(2)}}\delta^{m_3}_{s_{\rho(3)}}\dots\delta^{m_r}_{s_{\rho(r)}}\delta^{p_1}_{q_{\sigma(1)}}\dots\delta^{p_{k-2}}_{q_{\sigma(k-2)}}\delta^{m_1}_{q_{\sigma(k-1)}}\delta^{m_2}_{q_{\sigma(k)}}+\\
&+\varepsilon^\rho\varepsilon^\sigma\delta^{m_1}_{s_{\rho(1)}}\dots\delta^{m_{r-2}}_{s_{\rho(r-2)}}\delta^{p_1}_{s_{\rho(r-1)}}\delta^{p_2}_{s_{\rho(r)}}\delta^{m_{r-1}}_{q_{\sigma(1)}}\delta^{m_r}_{q_{\sigma(2)}}\delta^{p_3}_{q_{\sigma(3)}}\dots\delta^{p_k}_{q_{\sigma(k)}}+\\
&+\varepsilon^\rho\varepsilon^\sigma\delta^{m_1}_{s_{\rho(1)}}\dots\delta^{m_{r-2}}_{s_{\rho(r-2)}}\delta^{p_1}_{s_{\rho(r-1)}}\delta^{p_3}_{s_{\rho(r)}}\delta^{m_{r-1}}_{q_{\sigma(1)}}\delta^{p_2}_{q_{\sigma(2)}}\delta^{m_r}_{q_{\sigma(3)}}\delta^{p_4}_{q_{\sigma(4)}}\dots\delta^{p_k}_{q_{\sigma(k)}}+\dots+\\
&+\varepsilon^\rho\varepsilon^\sigma\delta^{m_1}_{s_{\rho(1)}}\dots\delta^{m_{r-2}}_{s_{\rho(r-2)}}\delta^{p_1}_{s_{\rho(r-1)}}\delta^{p_k}_{s_{\rho(r)}}\delta^{m_{r-1}}_{q_{\sigma(1)}}\delta^{p_2}_{q_{\sigma(2)}}\dots\delta^{p_{k-1}}_{q_{\sigma(k-1)}}\delta^{m_r}_{q_{\sigma(k)}}+\\
&+\varepsilon^\rho\varepsilon^\sigma\delta^{m_1}_{s_{\rho(1)}}\dots\delta^{m_{r-2}}_{s_{\rho(r-2)}}\delta^{p_{k-1}}_{s_{\rho(r-1)}}\dots\delta^{p_k}_{s_{\rho(r)}}\delta^{p_1}_{q_{\sigma(1)}}\dots\delta^{p_{k-2}}_{q_{\sigma(k-2)}}\delta^{m_{r-1}}_{q_{\sigma(k-1)}}\delta^{m_r}_{q_{\sigma(k)}}\Big)+\dots+\\
&+c_r\Big(\varepsilon^\rho\varepsilon^\sigma\delta^{p_1}_{s_{\rho(1)}}\delta^{p_2}_{s_{\rho(2)}}\dots\delta^{p_r}_{s_{\rho(r)}}\delta^{m_1}_{q_{\sigma(1)}}\delta^{m_2}_{q_{\sigma(2)}}\dots\delta^{m_r}_{q_{\sigma(r)}}\delta^{p_{r+1}}_{q_{\sigma(r+1)}}\dots\delta^{p_k}_{q_{\sigma(k)}}+\dots+\\
&+\varepsilon^\rho\varepsilon^\sigma\delta^{p_{k-r+1}}_{s_{\rho(1)}}\delta^{p_{k-r+2}}_{s_{\rho(2)}}\dots\delta^{p_k}_{s_{\rho(r)}}\delta^{p_1}_{q_{\sigma(1)}}\delta^{p_2}_{q_{\sigma(2)}}\dots\delta^{p_{k-r}}_{q_{\sigma(k-r)}}\delta^{m_1}_{q_{\sigma(k-r+1)}}\dots\delta^{m_r}_{q_{\sigma(k)}}\Big)\Big]
\end{aligned}\tag{4.7}$$

для $r \leqslant k$ и

$$\begin{aligned}
t^{m_1m_2\dots m_rp_1p_2\dots p_k}_{q_1q_2\dots q_ks_1s_2\dots s_r} = \frac{1}{r!}\frac{1}{k!}\sum_\rho\sum_\sigma\Big[&c_0\varepsilon^\rho\varepsilon^\sigma\delta^{m_1}_{s_{\rho(1)}}\delta^{m_2}_{s_{\rho(2)}}\dots\delta^{m_r}_{s_{\rho(r)}}\delta^{p_1}_{q_{\sigma(1)}}\delta^{p_2}_{q_{\sigma(2)}}\dots\delta^{p_k}_{q_{\sigma(k)}}+\\
&+c_1\Big(\varepsilon^\rho\varepsilon^\sigma\delta^{p_1}_{s_{\rho(1)}}\delta^{m_2}_{s_{\rho(2)}}\dots\delta^{m_r}_{s_{\rho(r)}}\delta^{m_1}_{q_{\sigma(1)}}\delta^{p_2}_{q_{\sigma(2)}}\dots\delta^{p_k}_{q_{\sigma(k)}}+\\
&+\varepsilon^\rho\varepsilon^\sigma\delta^{p_2}_{s_{\rho(1)}}\delta^{m_2}_{s_{\rho(2)}}\dots\delta^{m_r}_{s_{\rho(r)}}\delta^{p_1}_{q_{\sigma(1)}}\delta^{m_1}_{q_{\sigma(2)}}\delta^{p_3}_{q_{\sigma(3)}}\dots\delta^{p_k}_{q_{\sigma(k)}}+\dots+\\
&+\varepsilon^\rho\varepsilon^\sigma\delta^{p_k}_{s_{\rho(1)}}\delta^{m_2}_{s_{\rho(2)}}\dots\delta^{m_r}_{s_{\rho(r)}}\delta^{p_1}_{q_{\sigma(1)}}\delta^{p_2}_{q_{\sigma(2)}}\dots\delta^{p_{k-1}}_{q_{\sigma(k-1)}}\delta^{m_1}_{q_{\sigma(k)}}+\\
&+\varepsilon^\rho\varepsilon^\sigma\delta^{m_1}_{s_{\rho(1)}}\delta^{p_1}_{s_{\rho(2)}}\delta^{m_3}_{s_{\rho(3)}}\dots\delta^{m_r}_{s_{\rho(r)}}\delta^{m_2}_{q_{\sigma(1)}}\delta^{p_2}_{q_{\sigma(2)}}\dots\delta^{p_k}_{q_{\sigma(k)}}+
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\varepsilon^{\rho}\varepsilon^{\sigma}\delta^{m_1}_{s_{\rho(1)}}\delta^{p_2}_{s_{\rho(2)}}\delta^{m_3}_{s_{\rho(3)}}\ldots\delta^{m_r}_{s_{\rho(r)}}\delta^{p_1}_{q_{\sigma(1)}}\delta^{m_2}_{q_{\sigma(2)}}\delta^{p_3}_{q_{\sigma(3)}}\ldots\delta^{p_k}_{q_{\sigma(k)}}+\cdots+\\
&+\varepsilon^{\rho}\varepsilon^{\sigma}\delta^{m_1}_{s_{\rho(1)}}\delta^{p_k}_{s_{\rho(2)}}\delta^{m_3}_{s_{\rho(3)}}\ldots\delta^{m_r}_{s_{\rho(r)}}\delta^{p_1}_{q_{\sigma(1)}}\delta^{p_2}_{q_{\sigma(2)}}\ldots\delta^{p_{k-1}}_{q_{\sigma(k-1)}}\delta^{m_2}_{q_{\sigma(k)}}+\cdots+\\
&+\varepsilon^{\rho}\varepsilon^{\sigma}\delta^{m_1}_{s_{\rho(1)}}\delta^{m_2}_{s_{\rho(2)}}\ldots\delta^{m_{r-1}}_{s_{\rho(r-1)}}\delta^{p_1}_{s_{\rho(r)}}\delta^{m_r}_{q_{\sigma(1)}}\delta^{p_2}_{q_{\sigma(2)}}\ldots\delta^{p_k}_{q_{\sigma(k)}}+\\
&+\varepsilon^{\rho}\varepsilon^{\sigma}\delta^{m_1}_{s_{\rho(1)}}\delta^{m_2}_{s_{\rho(2)}}\ldots\delta^{m_{r-1}}_{s}{}_{\rho(r-1)}\delta^{p_2}_{s_{\rho(r)}}\delta^{p_1}_{q_{\sigma(1)}}\delta^{m_r}_{q_{\sigma(2)}}\delta^{p_3}_{q_{\sigma(3)}}\ldots\delta^{p_k}_{q_{\sigma(k)}}+\cdots+\\
&+\varepsilon^{\rho}\varepsilon^{\sigma}\delta^{m_1}_{s_{\rho(1)}}\delta^{m_2}_{s_{\rho(2)}}\ldots\delta^{m_{r-1}}_{s_{\rho(r-1)}}\delta^{p_k}_{s_{\rho(r)}}\delta^{p_1}_{q_{\sigma(1)}}\delta^{p_2}_{q_{\sigma(2)}}\ldots\delta^{p_{k-1}}_{q_{\sigma(k-1)}}\delta^{m_r}_{q_{\sigma(k)}}\Big)+\\
&+c_2\Big(\varepsilon^{\rho}\varepsilon^{\sigma}\delta^{p_1}_{s_{\rho(1)}}\delta^{p_2}_{s_{\rho(2)}}\delta^{m_3}_{s_{\rho(3)}}\ldots\delta^{m_r}_{s_{\rho(r)}}\delta^{m_1}_{q_{\sigma(1)}}\delta^{m_2}_{q_{\sigma(2)}}\delta^{p_3}_{q_{\sigma(3)}}\ldots\delta^{p_k}_{q_{\sigma(k)}}+\\
&+\varepsilon^{\rho}\varepsilon^{\sigma}\delta^{p_1}_{s_{\rho(1)}}\delta^{p_3}_{s_{\rho(2)}}\delta^{m_3}_{s_{\rho(3)}}\ldots\delta^{m_r}_{s_{\rho(r)}}\delta^{m_1}_{q_{\sigma(1)}}\delta^{p_2}_{q_{\sigma(2)}}\delta^{m_2}_{q_{\sigma(3)}}\delta^{p_4}_{q_{\sigma(4)}}\ldots\delta^{p_k}_{q_{\sigma(k)}}+\cdots+\\
&+\varepsilon^{\rho}\varepsilon^{\sigma}\delta^{p_1}_{s_{\rho(1)}}\delta^{p_k}_{s_{\rho(2)}}\delta^{m_3}_{s_{\rho(3)}}\ldots\delta^{m_r}_{s_{\rho(r)}}\delta^{m_1}_{q_{\sigma(1)}}\delta^{p_2}_{q_{\sigma(2)}}\ldots\delta^{p_{k-1}}_{q_{\sigma(k-1)}}\delta^{m_2}_{q_{\sigma(k)}}+\\
&+\varepsilon^{\rho}\varepsilon^{\sigma}\delta^{p_{k-1}}_{s_{\rho(1)}}\delta^{p_k}_{s_{\rho(2)}}\delta^{m_3}_{s_{\rho(3)}}\ldots\delta^{m_r}_{s_{\rho(r)}}\delta^{p_1}_{q_{\sigma(1)}}\ldots\delta^{p_{k-2}}_{q_{\sigma(k-2)}}\delta^{m_1}_{q_{\sigma(k-1)}}\delta^{m_2}_{q_{\sigma(k)}}+\\
&+\varepsilon^{\rho}\varepsilon^{\sigma}\delta^{m_1}_{s_{\rho(1)}}\ldots\delta^{m_{r-2}}_{s_{\rho(r-2)}}\delta^{p_1}_{s_{\rho(r-1)}}\delta^{p_2}_{s_{\rho(r)}}\delta^{m_{r-1}}_{q_{\sigma(1)}}\delta^{m_r}_{q_{\sigma(2)}}\delta^{p_3}_{q_{\sigma(3)}}\ldots\delta^{p_k}_{q_{\sigma(k)}}+\\
&+\varepsilon^{\rho}\varepsilon^{\sigma}\delta^{m_1}_{s_{\rho(1)}}\ldots\delta^{m_{r-2}}_{s_{\rho(r-2)}}\delta^{p_1}_{s_{\rho(r-1)}}\delta^{p_3}_{s_{\rho(r)}}\delta^{m_{r-1}}_{q_{\sigma(1)}}\delta^{p_2}_{q_{\sigma(2)}}\delta^{m_r}_{q_{\sigma(3)}}\delta^{p_4}_{q_{\sigma(4)}}\ldots\delta^{p_k}_{q_{\sigma(k)}}+\cdots+\\
&+\varepsilon^{\rho}\varepsilon^{\sigma}\delta^{m_1}_{s_{\rho(1)}}\ldots\delta^{m_{r-2}}_{s_{\rho(r-2)}}\delta^{p_1}_{s_{\rho(r-1)}}\delta^{p_k}_{s_{\rho(r)}}\delta^{m_{r-1}}_{q_{\sigma(1)}}\delta^{p_2}_{q_{\sigma(2)}}\ldots\delta^{p_{k-1}}_{q_{\sigma(k-1)}}\delta^{m_r}_{q_{\sigma(k)}}+\\
&+\varepsilon^{\rho}\varepsilon^{\sigma}\delta^{m_1}_{s_{\rho(1)}}\ldots\delta^{m_{r-2}}_{s_{\rho(r-2)}}\delta^{p_{k-1}}_{s_{\rho(r-1)}}\ldots\delta^{p_k}_{s_{\rho(r)}}\delta^{p_1}_{q_{\sigma(1)}}\ldots\delta^{p_{k-2}}_{q_{\sigma(k-2)}}\delta^{m_{r-1}}_{q_{\sigma(k-1)}}\delta^{m_r}_{q_{\sigma(k)}}\Big)+\cdots+\\
&+c_k\Big(\varepsilon^{\rho}\varepsilon^{\sigma}\delta^{p_1}_{s_{\rho(1)}}\delta^{p_2}_{s_{\rho(2)}}\ldots\delta^{p_k}_{s_{\rho(k)}}\delta^{m_{k+1}}_{s_{\rho(k+1)}}\ldots\delta^{m_r}_{s_{\rho(r)}}\delta^{m_1}_{q_{\sigma(1)}}\delta^{m_2}_{q_{\sigma(2)}}\ldots\delta^{m_k}_{q_{\sigma(k)}}+\cdots+\\
&\qquad+\varepsilon^{\rho}\varepsilon^{\sigma}\delta^{m_1}_{s_{\rho(1)}}\ldots\delta^{m_{r-k}}_{s_{\rho(r-k)}}\delta^{p_1}_{s_{\rho(r-k+1)}}\ldots\delta^{p_k}_{s_{\rho(r)}}\delta^{m_{r-k+1}}_{q_{\sigma(1)}}\ldots\delta^{m_r}_{q_{\sigma(k)}}\Big)\Big]
\end{aligned}
\tag{4.8}
$$

для $k < r$*, а коэффициенты* $c_0, \ldots, c_h$*,* $h = 1, \ldots, \min\{r, k\}$*, удовлетворяют одному из условий:*

$$
\begin{aligned}
&(1)\quad c_0 = c_1 = \cdots = c_{i-1} = 0, && i = 2, 3, \ldots, \min\{r, k\} + 1,\\
&\qquad c_h = \frac{(-1)^{h-i} i(i+1)(i+2)\ldots(h-1)\cdot h!}{(h-i)!(y+i+1)(y+i+2)\ldots(y+i+h)}, && h = i-1, i, \ldots, \min\{r, k\},
\end{aligned}
\tag{4.9}
$$

или

$$
\begin{aligned}
&(2)\quad c_0 = 1, \quad c_1 = \cdots = c_{i-1} = 0, && i = 2, 3, \ldots, \min\{r, k\} + 1,\\
&\qquad c_h = \frac{(-1)^{h-i+1} i(i+1)(i+2)\ldots(h-1)\cdot h!}{(h-i)!(y+i+1)(y+i+2)\ldots(y+i+h)}, && h = i-1, i, \ldots, \min\{r, k\},
\end{aligned}
\tag{4.10}
$$

где $y = n + r - k$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Вейль Г.* Классические группы, их инварианты и представления. — М.: ГИИЛ, 1947.
2. *Вейль Г.* Математика. Теоретическая физика. — М.: Наука, 1984.
3. *Вейль Г.* Теория групп и квантовая механика. — М.: Наука, 1986.
4. *Кэртис Ч., Райнер И.* Теория представлений конечных групп и ассоциативных алгебр. — М.: Наука, 1969.
5. *Boerner H.* Representations of Groups. — Amsterdam: North-Holland, 1963.
6. *Conlon L.* Differentiable Manifolds: A First Course. — Birkhäuser, 1993.
7. *Hall G. G.* Matrices and Tensors. — Pergamon Press, 1963.
8. *Jukl M.* Galois triangle theory for direct summands of modules// Acta Univ. Palack. Olomuc. Math. — 2000. — *39*. — C. 67–71.
9. *Jukl M., Juklová L.* On decomposition problems on manifolds with a special differential operator// Miskolc. Math. Notes. — 2013. — *14*, № 2. — C. 591–599.
10. *Jukl M., Juklová L., Mikeš J.*, The decomposition of tensor spaces with quaternionic structure// APLIMAT. — 2007. — C. 217–222.

11. *Jukl M., Juklová L., Mikeš J.* Some applications of local algebras on differentiable manifolds// J. Math. Sci. — 2015. — *207*, № 3. — С. 485–511.
12. *Jukl M., Lakomá L., Mikeš J.* The decomposition of tensor spaces with almost complex structure// APLIMAT. — 2006. — Part II. — С. 99–104.
13. *Krupka D., Janyška J.* Lectures on Differential Invariants. — Brno: Univ. J. E. Purkyně, 1990.
14. *Lakomá L.* Young tableaux and decomposition of tensor spaces/ Ph.D. Thesis. — Silezian Univ., Opava, 1999.
15. *Lakomá L.* Projections of tensor spaces// Acta Univ. Palack. Olomuc. Math. — 1999. — *38*. — С. 87–93.
16. *Lakomá L., Mikeš J.* On the special trace decomposition problem on quaternionic structure// Proc. 3d Int. Workshop on Differ. Geom. and Its Appl. — Sibiu, Romania, 1997.— С. 225–229.
17. *Lakomá L., Mikeš J., Mikušová L.* Decomposition of tensor spaces// Proc. Conf. — Brno, 1998.
18. *Mikeš J.* On general trace decomposition problem// Proc. Conf. — Brno, 1995. — С. 45–50.
19. *Mikeš J. et al.* Differential Geometry of Special Mappings. — Olomouc: Palacky Univ. Press, 2015.
20. *Mikeš J., Jukl M., Juklová L.* Some results on traceless decomposition of tensors// J. Math. Sci. — 2011. — *174*, № 5. — С. 627–640.
21. *Welsh T. A.* Young tableaux and modules of groups and Lie algebras/ Ph.D. Thesis. — Fac. Math. Stud., Univ. Southampton, 1992.

M. Jukl
Университет Палацкого, Оломоуц, Чешская республика
E-mail: marek.jukl@upol.cz

L. Juklová
Университет Палацкого, Оломоуц, Чешская республика
E-mail: lenka.juklova@upol.cz

J. Mikeš
Университет Палацкого, Оломоуц, Чешская республика
E-mail: josef.mikes@upol.cz