ISSN 0233-6723

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ

СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Тематические обзоры

Том 144

Москва 2018

ISSN 0233–6723

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

ВСЕРОССИЙСКИЙ ИНСТИТУТ
НАУЧНОЙ И ТЕХНИЧЕСКОЙ ИНФОРМАЦИИ
(ВИНИТИ РАН)

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ

СЕРИЯ
СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

ТЕМАТИЧЕСКИЕ ОБЗОРЫ

Том 144

МАТЕРИАЛЫ НАУЧНОЙ КОНФЕРЕНЦИИ
«ПРОБЛЕМЫ СОВРЕМЕННОЙ ТОПОЛОГИИ
И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ»
11–12 МАЯ 2017 г.,
ТАШКЕНТ, УЗБЕКИСТАН

Москва 2018

СОДЕРЖАНИЕ

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 144 (2018). С. 3–16

УДК 512.74

ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ ПУТЕЙ В ГЕОМЕТРИИ ГАЛИЛЕЯ

© 2018 г. **В. И. ЧИЛИН, К. К. МУМИНОВ**

Аннотация. Приведено явное описание конечного базиса трансцендентности в дифференциальном поле дифференциальных рациональных функций, инвариантных относительно действия группы преобразований Галилея в конечномерном действительном пространстве. Установлены необходимые и достаточные условия эквивалентности путей в n-мерном пространстве Галилея.

***Ключевые слова*:** пространство Галилея, дифференциальный инвариант, базис трансцендентности, путь в конечномерном пространстве.

***AMS Subject Classification*:** 53A15, 53A55, 53B30

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение

При решении задачи об эквивалентности путей и кривых, лежащих в конечномерных пространствах, как правило, используется теория инвариантов линейных групп. Основы этой теории были заложены в работах Д. Гильберта [7], Г. Вейля [27], Ж. Дьедонне, Дж. Керрела [18], Х. Крафта [22], Д. Мамфорда [23], Д. Мамфорда, Дж. Фогарти [24]. С классической точки зрения, теория инвариантов исследует вопросы классификации элементов конечномерного линейного пространства V над полем $\mathbb{P}$ по отношению к действию той или иной подгруппы G группы $GL(V)$ всех обратимых линейных преобразований пространства V.

При этом, под инвариантами, как правило, понимаются полиномиальные или же рациональные функции, заданные на V и постоянные на орбитах группы G.

Полиноминальные (соответственно, рациональные) инварианты группы G образуют подалгебру $\mathbb{P}[V]^G$ (соответственно, подполе $\mathbb{P}(V)^G$) в алгебре $\mathbb{P}[V]$ (в поле $\mathbb{P}(V)$) всех полиномиальных (рациональных) функций на V. Основной задачей теории инвариантов является нахождение образующих алгебры $\mathbb{P}[V]^G$ (поля $\mathbb{P}(V)^G$) и установление определяющих соотношений между ними. В частности, проблема, связанная с конечной порождаемостью алгебры $\mathbb{P}[V]^G$, известна как 14 проблема Гильберта. Для общих алгебраических линейных групп $G \subset GL(V)$ эта проблема Гильберта имеет отрицательное решение (пример Нагаты, см. [18,25]). В то же время, для редуктивных групп теорема Гильберта—Нагаты—Мамфорда дает положительное решение указанной проблемы [18].

В простейшей ситуации, основная задача теории инвариантов для линейных пространств формулируется в следующем виде. Пусть даны две конечные системы $\{x_i\}_{i=1}^k$, $\{y_i\}_{i=1}^k$ элементов из конечномерного линейного пространства V. Требуется определить необходимые и достаточные

ISSN 0233–6723

условия, при выполнении которых заданные наборы $\{x_i\}_{i=1}^k$ и $\{y_i\}_{i=1}^k$ являются G-эквивалентными при действии подгруппы $G \subset GL(V)$, т. е. $y_i = g(x_i)$ для всех $i = \overline{1,k}$ и некоторого $g \in G$. В работах [5, 6, 18, 23] предлагается метод решения этой задачи, при реализации которого необходимо, с одной стороны, установление конечной порождаемости алгебры $\mathbb{P}[V]^G$, а с другой стороны, нахождение явного вида конечного рационального базиса соответствующего поля $\mathbb{P}(V)^G$. Таким образом, решение задачи о G-эквивалентности конечных наборов элементов из V дается с помощью G-инвариантных рациональных функций.

Похожая ситуация возникает при решении следующей задачи дифференциальной геометрии кривых. Пусть V — конечномерное евклидово пространство, G — подгруппа группы $GL(V)$, γ и β — две гладкие кривые в V. Требуется найти необходимые и достаточные условия, обеспечивающие G-эквивалентность кривых γ и β, т. е. выполнение равенства $\beta = g(\gamma)$ для некоторого $g \in G$.

Вариант такой задачи был поставлен еще Э. Картаном в начале XX в. и известен он в настоящее время как проблема Картана (проблема равенства), состоящая в нахождении всех тех перемещений, которые совмещают заданные кривые γ и β (см. [8]). Глубокое исследование этой проблемы равенства было проведено самим Э. Картаном с помощью метода подвижного репера (см. [8, 9]). Геометрический подход к решению указанной проблемы рассматривался в монографиях [2, 4, 15, 26]. Отметим также работы И. М. Яглома [16, 17], посвященные решению задачи эквивалентности пары кривых для действия симплектической группы.

При решении задачи о G-эквивалентности систем достаточно большого числа кривых использовать геометрические методы становится затруднительным. Это обстоятельство приводит к необходимости привлечения методов теории инвариантов в решении указанных задач. Такой подход, в частности, оказался полезным и при решении задачи о G-эквивалентности конечных систем путей (бесконечно дифференцируемых вектор-функций). Для этого необходимо определить конечную порождаемость дифференциального поля всех G-инвариантных дифференциальных рациональных функций и найти явный вид рационального базиса в таких полей. Эта задача является «дифференциальным» аналогом 14-й проблемы Гильберта. Такая постановка задачи рассматривалась в [3, 10, 14, 20] для действий различных классических групп преобразований и подробно обсуждалась в монографиях [11, 13]. В частности, в этих работах с помощью явно описанных конечных систем образующих дифференциальных полей G-инвариантных дифференциальных рациональных функций получены эффективные критерии G-эквивалентности путей для действий некоторых классических групп $G \subset GL(V)$, как, например, ортогональных, симплектических и псевдоортогональных групп.

Хорошо известно, что группы симметрий в механике Ньютона и в принципе относительности Галилея существенно отличаются от групп движений в евклидовом пространстве. Поэтому теория инвариантов движений в механике не вытекает непосредственно из теории инвариантов движений в евклидовом пространстве.

В настоящей работе решается задача об эквивалентности путей, лежащих в конечномерном пространстве Галилея. Устанавливается конечная порождаемость дифференциального поля всех дифференциальных рациональных функций, инвариантных относительно действия группы Галилея $\Gamma(n, \mathbb{R})$ линейных преобразований действительного n-мерного пространства. С помощью найденного конечного базиса трансцендентности этого дифференциального поля доказываются необходимые и достаточные условия, обеспечивающие $\Gamma(n, \mathbb{R})$-эквивалентность путей, лежащих в n-мерном пространстве, снабженных метрикой Галилея.

2. Предварительные сведения

В обозначениях и терминологии, касающихся дифференциальных алгебр, будем, в основном, придерживаться монографий [19, 21].

1. Дифференциальные поля дифференциальных рациональных функций. Пусть $\mathbb{K}$ — коммутативное кольцо с единицей и $\mathbb{K}[x_1,\dots,x_n]$ — кольцо многочленов от n переменных $x_1,\dots,x_n$ с коэффициентами из кольца $\mathbb{K}$.

Каждый многочлен f из кольца $\mathbb{K}[x_1,\dots,x_n]$ состоит из конечного числа слагаемых-одночленов, имеющих вид $\alpha_{i_1\dots i_n}x_1^{i_1}\dots x_n^{i_n}$, где коэффициенты $\alpha_{i_1\dots i_n}$ принадлежат кольцу $\mathbb{K}$ при всех значениях индексов $i_1,\dots,i_n\in\mathbb{Z}_+:=\{0,1,\dots\}$.

Если $\mathbb{K}$ — целостное кольцо, то и кольцо $\mathbb{K}[x_1,\dots,x_n]$ также является целостным. В частности, кольцо многочленов от n переменных над любым полем $\mathbb{P}$ является целостным.

Полем рациональных функций от n переменных $x_1,\dots,x_n$ с коэффициентами из поля $\mathbb{P}$ называется поле частных кольца многочленов $\mathbb{P}[x_1,\dots,x_n]$ (это поле обозначается через $\mathbb{P}(x_1,\dots,x_n)$). Его элементы называются рациональными функциями от n переменных $x_1,\dots,x_n$ с коэффициентами из поля $\mathbb{P}$. Каждую такую рациональную функцию можно представить в виде $\dfrac{f(x_1,\dots,x_n)}{g(x_1,\dots,x_n)}$, где $f,g\in\mathbb{P}[x_1,\dots,x_n]$, $g\neq 0$.

Отображение $d:\mathbb{K}\to\mathbb{K}$ называется дифференцированием в коммутативном кольце $\mathbb{K}$, если для любых элементов $x,y\in\mathbb{K}$ выполняются следующие равенства:

$$\begin{aligned} d(x+y)&=d(x)+d(y),\\ d(x\cdot y)&=d(x)\cdot y+x\cdot d(y). \end{aligned}$$

Известно (см. [19]), что любое дифференцирование в произвольной области целостности $\mathbb{K}$ допускает единственное продолжение до дифференцирования на соответствующее поле частных. При этом, дифференцирование в поле частных задается следующим равенством:

$$d(x,y^{-1})=\big(d(x)y-xd(y)\big)\big(y^{-1}\big)^2\quad \text{для любых } x,y\in\mathbb{K},\ y\neq 0.$$

Коммутативное кольцо $\mathbb{K}$ с единицей (соответственно, поле $\mathbb{P}$), в котором задано фиксированное дифференцирование d, называется дифференциальным кольцом (d-кольцом) (соответственно, дифференциальным полем (d-полем)). Подполе $\mathbb{F}$ в d-поле $\mathbb{P}$ называют d-подполем, если $d(\mathbb{F})\subset\mathbb{F}$.

Приведем нужные для нас примеры d-колец и d-полей. Зафиксируем натуральное число $n\in\mathbb{N}$ и рассмотрим кольцо многочленов следующего вида:

$$\mathbb{R}[x_1^{(0)},\dots,x_n^{(0)},x_1^{(1)},\dots,x_n^{(1)},\dots,x_1^{(m)},\dots,x_n^{(m)},\dots]$$

с коэффициентами из поля действительных чисел $\mathbb{R}$ от счетного числа переменных $x_1^{(0)},\dots,x_n^{(0)}$, $x_1^{(1)},\dots,x_n^{(1)}$, $\dots$, $x_1^{(m)},\dots,x_n^{(m)}$, $\dots$, $m\in\mathbb{Z}_+$, которое обозначается через $\mathbb{R}[x_1,\dots,x_n]$ (считаем, что $x_i=x_i^{(0)}$, $i=1,\dots,n$). Очевидно, что

$$\mathbb{R}[x_1,\dots,x_n]=\bigcup_{m=1}^{\infty}\mathbb{R}\Big[x_1^{(0)},\dots,x_n^{(0)},x_1^{(1)},\dots,x_n^{(1)},\dots,x_1^{(m)},\dots,x_n^{(m)}\Big].$$

Положим $d(x_i^{(m)})=x_i^{(m+1)}$, $d(\alpha)=0$ и $\alpha\in\mathbb{R}$ для всех $i=1,\dots,n$, $m=0,1,\dots$.

Отображение d однозначно продолжается до дифференцирования δ в кольце $\mathbb{R}[x_1,\dots,x_n]$, наделяя это кольцо структурой дифференциального кольца (см. [19]).

Обозначим через $\mathbb{R}\langle x_1,\dots,x_n\rangle$ поле частных для кольца $\mathbb{R}[x_1,\dots,x_n]$, т. е. $\mathbb{R}\langle x_1,\dots,x_n\rangle$ является полем всех рациональных функций от тех же переменных $x_i^{(m)}$, $m\in\mathbb{Z}_+$, $i=1,\dots,n$.

Как уже отмечалось, дифференцирование δ естественным образом продолжается с кольца $\mathbb{R}[x_1,\dots,x_n]$ до дифференцирования на поле $\mathbb{R}\langle x_1,\dots,x_n\rangle$, превращая это поле в дифференциальное поле.

Элементы из d-кольца $\mathbb{R}[x_1,\dots,x_n]$ (d-поля $\mathbb{R}\langle x_1,\dots,x_n\rangle$) называют d-многочленами (или d-рациональными функциями) и записывают в виде $f[\boldsymbol{x}] = f[x_1,\dots,x_n]$ (соответственно, $f\langle \boldsymbol{x}\rangle = f\langle x_1,\dots,x_n\rangle$, где $\boldsymbol{x} = \{x_j\}_{j=1}^n \in \mathbb{R}^n$).

Элементы $\alpha_1,\dots,\alpha_m$ из d-поля $\mathbb{P}$ называют d-алгебраически зависимыми над d-подполем $\mathbb{F}$, если существует такой ненулевой d-многочлен $f[x_1,\dots,x_m]$ из $\mathbb{F}[x_1,\dots,x_m]$, что $f[\alpha_1,\dots,\alpha_m] = 0$. В противном случае система элементов $\alpha_1,\dots,\alpha_m$ называется d-алгебраически независимой над d-подполем $\mathbb{F}$.

Дифференциальное поле $\mathbb{P}$ называют d-конечно порожденным над d-подполем $\mathbb{F}$, если существует такая конечная система элементов $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ из $\mathbb{P}$, что $\mathbb{P} = \mathbb{F}\langle\alpha_1,\dots,\alpha_n\rangle$. В этом случае, говорят, что эта система элементов $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ является дифференциальным рациональным базисом (d-рациональным базисом) d-поля $\mathbb{P}$ над d-подполем $\mathbb{F}$, а элементы $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ называют d-образующими d-поля $\mathbb{P}$ над $\mathbb{F}$.

Подмножество L элементов d-поля $\mathbb{P}$ называют d-алгебраически независимым над d-подполем $\mathbb{F}$, если любое конечное подмножество из L является d-алгебраически независимым над $\mathbb{F}$. Любое максимальное d-алгебраически независимое над $\mathbb{F}$ множество элементов d-поля $\mathbb{P}$ называют базисом d-трансцендентности d-поля $\mathbb{P}$ над d-подполем $\mathbb{F}$. В силу леммы Цорна, в d-поле $\mathbb{P}$ всегда существует базис d-трансцендентности над $\mathbb{F}$.

Если d-поле $\mathbb{P}$ является d-конечно порожденным полем над $\mathbb{F}$, то базис d-трансцендентности $\mathbb{P}$ над $\mathbb{F}$ имеет конечное число элементов, при этом сам этот базис d-трансцендентности является d-рациональным базисом в $\mathbb{P}$ над $\mathbb{F}$. Обратное, вообще говоря, неверно, т. е., конечный d-рациональный базис d-поля $\mathbb{P}$ над $\mathbb{F}$ не обязательно образует базис d-трансцендентности $\mathbb{P}$ над $\mathbb{F}$.

Известна следующая теорема, описывающая свойства базисов d-трансцендентности.

Теорема 1 (см. [21]). *Пусть $\mathbb{F}$ — d-подполе в d-поле $\mathbb{P}$ и $\mathbb{E}$ — d-подполе в d-поле $\mathbb{F}$.*

(i) *Все базисы d-трансцендентности в d-поле $\mathbb{P}$ над $\mathbb{F}$ имеют одну и ту же мощность.*
(ii) *Если L — базис d-трансцендентности в d-поле $\mathbb{P}$ над $\mathbb{F}$ и M — базис d-трансцендентности в d-поле $\mathbb{F}$ над $\mathbb{E}$, то $L\cap M = \emptyset$ и $L\cup M$ является базисом d-трансцендентности $\mathbb{P}$ над $\mathbb{E}$.*

Общее кардинальное число различных базисов d-трансцендентности d-поля $\mathbb{P}$ над $\mathbb{F}$ называется степенью d-трансцендентности $\mathbb{P}$ над d-подполем $\mathbb{F}$ и обозначается через ст. d"=тр. $\mathbb{P}/\mathbb{F}$.

Следствие 1. *Если выполнены условия теоремы* 1, *то верно равенство*

$$\text{ст. } d\text{"=тр. } \mathbb{P}/\mathbb{E} = \text{ст. } d\text{"=тр. } \mathbb{P}/\mathbb{F} + \text{ст. } d\text{"=тр. } \mathbb{F}/\mathbb{E}.$$

Отметим также следующее свойство d-поля $\mathbb{R}\langle x_1,\dots,x_n\rangle$ всех дифференциальных рациональных функций от n переменных над полем констант $\mathbb{R}$.

Теорема 2. *Дифференциальное поле $\mathbb{R}\langle x_1,\dots,x_n\rangle$ является d-конечно порожденным над $\mathbb{R}$ со степенью d-трансцендентности, равной n.*

Обозначим через $GL(n,\mathbb{R})$ группу всех обратимых линейных преобразований в $\mathbb{R}^n$. Элементы из $\mathbb{R}^n$ будем представлять в виде n-мерных вектор-столбцов $\boldsymbol{x} = \{x_j\}_{j=1}^n$, а преобразования $g \in GL(n,\mathbb{R})$ — в виде $n\times n$-матриц $(g_{ij})_{i,j=1}^n$, где $x_j, g_{ij} \in \mathbb{R}$, $i,j = 1,\dots,n$. При этом, действие $g \in GL(n,\mathbb{R})$ в $\mathbb{R}^n$ отождествляется с обычным умножением матрицы g на вектор-столбец $\boldsymbol{x}$ (обозначается через $g\boldsymbol{x}$).

Если G — подгруппа в $GL(n,\mathbb{R})$ и $f\langle g\boldsymbol{x}\rangle = f\langle\boldsymbol{x}\rangle$ для всех $g\in G$, то d — G-инвариантная рациональная функция $f\langle\boldsymbol{x}\rangle \in \mathbb{R}\langle x_1,\dots,x_n\rangle$. Множество всех G-инвариантных d-рациональных функций обозначается через $\mathbb{R}\langle x_1,\dots,x_n\rangle^G$. Известно, что $\mathbb{R}\langle x_1,\dots,x_n\rangle^G$ является дифференциальным подполем в дифференциальном поле $\mathbb{R}\langle x_1,\dots,x_n\rangle$ (см. [13]).

Рассмотрим в $\mathbb{R}^n$ билинейную форму $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = x_1y_1+\dots+x_ny_n$ и соответствующую этой форме следующую евклидову метрику:

$$\rho(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \sqrt{\sum_{j=1}^{n}\left(x_j-y_j\right)^2}.$$

Обозначим через I единицу группы $GL(n,\mathbb{R})$. Ортогональная подгруппа $O(n,\mathbb{R})$ в $GL(n,\mathbb{R})$ определяется следующим равенством:

$$O(n,\mathbb{R}) = \left\{g\in GL(n,\mathbb{R}) : g^Tg = I\right\},$$

где g^T — транспонированная матрица к матрице g. Очевидно,

$$O(n,\mathbb{R}) = \Big\{g\in GL(n,\mathbb{R}) : (g\boldsymbol{x},g\boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \text{ для любых } \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^n\Big\}.$$

Через $SO(n,\mathbb{R})$ обозначается специальная ортогональная подгруппа в $GL(n,\mathbb{R})$:

$$SO(n,\mathbb{R}) = \left\{g\in O(n,\mathbb{R}) : \det g = 1\right\}.$$

Для каждого $\boldsymbol{x} = \{x_j\}_{j=1}^n\in\mathbb{R}^n$ положим, что $\boldsymbol{x}^{(k)} = \{x_j^{(k)}\}_{j=1}^n$ и через $M(\boldsymbol{x})$ обозначим $(n\times n)$-матрицу $\left(x_i^{(j-1)}\right)_{i,j=1}^n$, где j-й столбец имеет координаты $x_i^{(j-1)}$, $i=1,\dots,n$.

Следующая теорема дает примеры базисов d-трансцендентности дифференциальных полей $\mathbb{R}\langle x_1,\dots,x_n\rangle^{O(n,\mathbb{R})}$ и $\mathbb{R}\langle x_1,\dots,x_n\rangle^{SO(n,\mathbb{R})}$ над полем $\mathbb{R}$ (см. [11,13]).

Теорема 3. *В d-поле $\mathbb{R}\langle x_1,\dots,x_n\rangle^{O(n,\mathbb{R})}$ его базис d-трансцендентности над полем $\mathbb{R}$ образуют d-многочлены $\left(\boldsymbol{x}^{(k)},\boldsymbol{x}^{(k)}\right)$, $k=0,1,\dots,n-1$, а в d-поле $\mathbb{R}\langle x_1,\dots,x_n\rangle^{SO(n,\mathbb{R})}$ базисом d-трансцендентности над полем $\mathbb{R}$ являются d-многочлены $\det M(\boldsymbol{x})$ и $\left(\boldsymbol{x}^{(k)},\boldsymbol{x}^{(k)}\right)$, $k=0,\dots,n-2$.*

Зафиксируем натуральное число $p\in\{1,\dots,n-1\}$ и рассмотрим в n-мерном пространстве $\mathbb{R}^n$ следующую билинейную симметрическую форму:

$$[\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}]_p = x_1y_1+\dots+x_py_p-x_{p+1}y_{p+1}-\dots-x_ny_n.$$

Псевдоортогональная подгруппа $O(n,p,\mathbb{R})$ в группе $GL(n,\mathbb{R})$ определяется таким равенством:

$$O(n,p,\mathbb{R}) = \Big\{g\in GL(n,\mathbb{R}) : [g\boldsymbol{x},g\boldsymbol{y}]_p = [\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}]_p \text{ для любых } \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^n\Big\}.$$

Вариантом теоремы 3 для группы $O(n,p,\mathbb{R})$ является следующее описание базиса d-трансцендентности дифференциального поля $\mathbb{R}\langle x_1,\dots,x_n\rangle^{O(n,p,\mathbb{R})}$ над полем $\mathbb{R}$ (см. [11]).

Теорема 4. *В d-поле $\mathbb{R}\langle x_1,\dots,x_n\rangle^{O(n,p,\mathbb{R})}$ его базис d-трансцендентности над полем $\mathbb{R}$ образуют d-многочлены $[\boldsymbol{x}^{(k)},\boldsymbol{x}^{(k)}]$, $k=0,1,\dots,n-1$.*

2. Эквивалентность путей относительно действия классических групп. Вектор-функция $\boldsymbol{x}(t) = \{x_j(t)\}_{j=1}^n : (0,1)\longrightarrow\mathbb{R}^n$ называется путем в $\mathbb{R}^n$, если все ее координатные функции $x_j(t) : (0,1)\longrightarrow\mathbb{R}$ являются бесконечно дифференцируемыми. Производная k-го порядка от пути $\boldsymbol{x}(t) = \{x_j(t)\}_{j=1}^n$ является следующей вектор-функцией:

$$\boldsymbol{x}^{(k)}(t) = \left\{x_j^{(k)}(t)\right\}_{j=1}^n,$$

где $x_j^{(k)}(t)$ — k-я производная координатной функции $x_j(t)$, $t\in(0,1)$, $j=1,\dots,n$, $k=1,2,\dots$. Вектор-функция $\boldsymbol{x}^{(k)}(t)$ также является путем при всех $k=1,2,\dots$.

Для каждого пути $\boldsymbol{x}(t) = \{x_j(t)\}_{j=1}^n$ рассмотрим матрицу $M(\boldsymbol{x}(t))$ и через $M'(\boldsymbol{x}(t))$ обозначим матрицу $\left(x_i^{(j)}(t)\right)_{i,j=1}^n$. Путь $\boldsymbol{x}(t)$ называется сильно регулярным, если определитель $\det M(\boldsymbol{x}(t))$ не равен нулю при всех $t\in(0,1)$. Каждый сильно регулярный путь $\boldsymbol{x}(t)$, очевидно, является регулярным путем, т. е. $\boldsymbol{x}^{(1)}(t)\neq 0$ для всех $t\in(0,1)$.

Пусть G — произвольная подгруппа группы $GL(n,\mathbb{R})$. Два пути $\boldsymbol{x}(t)$ и $\boldsymbol{y}(t)$ называют G-эквивалентными, если существует такой элемент $g \in G$, что $\boldsymbol{y}(t) = g\boldsymbol{x}(t)$ для всех $t \in (0,1)$. В этом случае, очевидно, что $\boldsymbol{y}^{(k)}(t) = g\boldsymbol{x}^{(k)}(t)$, $k = 1,2,\ldots$, и поэтому G-эквивалентность путей $\boldsymbol{x}(t)$ и $\boldsymbol{y}(t)$ равносильна выполнению равенства $M(\boldsymbol{y})(t) = gM(\boldsymbol{x})(t)$ при всех $t \in (0,1)$.

Известны следующие необходимые и достаточные условия G-эквивалентности сильно регулярных путей $\boldsymbol{x}(t)$ и $\boldsymbol{y}(t)$, описываемые с помощью матриц $M(\boldsymbol{x}(t))$ и $M(\boldsymbol{y}(t))$, в случае, когда G является группой $O(n,\mathbb{R})$ или $SO(n,\mathbb{R})$ (см. [14]).

Теорема 5. *Два сильно регулярных пути $\boldsymbol{x}(t)$ и $\boldsymbol{y}(t)$ являются $O(n,\mathbb{R})$-эквивалентными тогда и только тогда, когда выполнены равенства*:
$$\Big(M(\boldsymbol{x}(t))\Big)^{-1}(t)M'(\boldsymbol{x}(t)) = \Big(M(\boldsymbol{y}(t))\Big)^{-1}M'(\boldsymbol{y}(t)), \tag{1}$$
$$M^T(\boldsymbol{x}(t))M(\boldsymbol{x}(t)) = M^T(\boldsymbol{y}(t))M(\boldsymbol{y}(t)) \tag{2}$$
для всех $t \in (0,1)$.

Два сильно регулярных пути $\boldsymbol{x}(t)$ и $\boldsymbol{y}(t)$ являются $SO(n,\mathbb{R})$-эквивалентными тогда и только тогда, когда выполнены равенства (1) *и* (2) *и равенство* $\det M(\boldsymbol{x}(t)) = \det M(\boldsymbol{y}(t))$ *для всех* $t \in (0,1)$.

В следующей теореме приводится известный критерий $O(n,\mathbb{R})$-эквивалентности ($SO(n,\mathbb{R})$-эквивалентности) путей, использующий билинейную форму $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ (см., например, [3,14]).

Теорема 6. *Два сильно регулярных пути $\boldsymbol{x}(t)$ и $\boldsymbol{y}(t)$ являются $O(n,\mathbb{R})$-эквивалентными тогда и только тогда, когда для всех $t \in (0,1)$, $k = 0,1,\ldots,n-1$ выполнены следующие равенства*:
$$\Big(\boldsymbol{x}^{(k)}(t),\boldsymbol{x}^{(k)}(t)\Big) = \Big(\boldsymbol{y}^{(k)}(t),\boldsymbol{y}^{(k)}(t)\Big). \tag{3}$$
Аналогично, два сильно регулярных пути $\boldsymbol{x}(t)$ и $\boldsymbol{y}(t)$ являются $SO(n,\mathbb{R})$-эквивалентными тогда и только тогда, когда для всех $t \in (0,1)$, $k = 0,1,\ldots,n-2$ выполнены равенства (3) *и равенство* $\det M(\boldsymbol{x}(t)) = \det M(\boldsymbol{y}(t))$.

Обозначим через $\mathrm{Aff}(\mathbb{R}^n)$ группу всех аффинных преобразований пространства $\mathbb{R}^n$. Каждое преобразование из $\mathrm{Aff}(\mathbb{R}^n)$ является суперпозицией линейного невырожденного преобразования $g \in GL(n,\mathbb{R})$ и сдвига, порожденного элементом $\boldsymbol{u} = \{u_i\}_{i=1}^n$ из $\mathbb{R}^n$, т. е., аффинное преобразование $(\boldsymbol{u},g) \in \mathrm{Aff}(\mathbb{R}^n)$ действует в $\mathbb{R}^n$ по правилу: $(\boldsymbol{u},g)(\boldsymbol{x}) = g\boldsymbol{x} + \boldsymbol{u}$, где $\boldsymbol{x},\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n$, $g \in GL(n,\mathbb{R})$.

Операция умножения в группе $\mathrm{Aff}(\mathbb{R}^n)$ определяется равенством $(\boldsymbol{u},g)(\boldsymbol{v},h) = (\boldsymbol{u}+g\boldsymbol{v},gh)$, где $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$, $g,h \in GL(n,\mathbb{R})$. В этом случае, говорят, что группа $\mathrm{Aff}(\mathbb{R}^n)$ есть полупрямое произведение групп $\mathbb{R}^n$ и $GL(n,\mathbb{R})$, что записывается следующим образом:
$$\mathrm{Aff}(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n \lhd GL(n,\mathbb{R}).$$
Если G — подгруппа в $GL(n,\mathbb{R})$, то следующее множество является подгруппой в $\mathbb{R}^n \lhd GL(n,\mathbb{R})$, которую называют полупрямым произведением групп $\mathbb{R}^n$ и G:
$$\mathbb{R}^n \lhd G = \Big\{(\boldsymbol{u},g) \in \mathbb{R}^n \lhd GL(n,\mathbb{R}) : g \in G\Big\}.$$
Известно (см., например, [1]), что группа $\mathbb{R}^n \lhd O(n,\mathbb{R})$ совпадает с группой всех движений евклидова пространства $(\mathbb{R}^n,(\cdot,\cdot))$, т. е. с группой всех биекций U из $\mathbb{R}^n$ на $\mathbb{R}^n$, для которых выполнено следующее:
$$\rho(U\boldsymbol{x},U\boldsymbol{y}) = \rho(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \sqrt{\sum_{j=1}^n (x_j-y_j)^2} \quad \text{при всех} \quad \boldsymbol{x} = \{x_j\}_{j=1}^n,\ \boldsymbol{y} = \{y_j\}_{j=1}^n \in \mathbb{R}^n.$$

Пути $\boldsymbol{x}(t)$ и $\boldsymbol{y}(t)$ в $\mathbb{R}^n$ называют эквивалентными относительно действия подгруппы H в группе $\mathbb{R}^n \lhd GL(n,\mathbb{R})$ (H-эквивалентными), если существует такое $(\boldsymbol{u},g) \in H$, что для всех $t \in (0,1)$ выполнено следующее:
$$\boldsymbol{y}(t) = g\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{u}$$

Следующая теорема сводит задачу о $\mathbb{R}^n \lhd G$-эквивалентности путей $\boldsymbol{x}(t)$ и $\boldsymbol{y}(t)$ к задаче G-эквивалентности путей $\boldsymbol{x}^{(1)}(t)$ и $\boldsymbol{y}^{(1)}(t)$.

Теорема 7 (см. [14])**.** *Пусть G — произвольная подгруппа в $GL(n,\mathbb{R})$. Тогда пути $\boldsymbol{x}(t)$ и $\boldsymbol{y}(t)$ в $\mathbb{R}^n$ являются $\mathbb{R}^n \lhd G$-эквивалентными в том и только том случае, когда пути $\boldsymbol{x}^{(1)}(t)$ и $\boldsymbol{y}^{(1)}(t)$ являются G-эквивалентными.*

3. Пространство Галилея. Рассмотрим в $\mathbb{R}^n$ метрику Галилея $d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$, определяемую следующим равенствами (см., например, [12]):

$$d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \begin{cases} \sqrt{\displaystyle\sum_{j=1}^{n-1}(x_j - y_j)^2}, & \text{если } x_n = y_n, \\ |x_n - y_n| & \text{если } x_n \neq y_n. \end{cases}$$

Заметим, что при $n \geqslant 2$ неравенство треугольника $d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \leqslant d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z}) + d(\boldsymbol{z},\boldsymbol{y})$ для метрики $d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$, вообще говоря, неверно. Пару $(\mathbb{R}^n, d)$ обычно называют пространством Галилея (обозначается через $\Gamma(\mathbb{R}^n)$).

Пусть $\boldsymbol{e}_i = (0,\ldots,0,1,0,\ldots,0)$ — векторы стандартного базиса в $\mathbb{R}^n$, $i = 1,\ldots,n$ (единица стоит на i-м месте). Если $g = (g_{ij})_{i,j=1}^n \in GL(n,\mathbb{R})$, то $g_{ij} = (g\boldsymbol{e}_j, \boldsymbol{e}_i)$ для любых $i,j = 1,\ldots,n$. Рассмотрим в $\mathbb{R}^n$ два линейных подпространства

$$U_n = \mathrm{Lin}\left(\{\boldsymbol{e}_i\}_{i=1}^{n-1}\right) = \left\{\sum_{i=1}^{n-1}\alpha_i\boldsymbol{e}_i :\ \alpha_i \in \mathbb{R},\ i = 1,\ldots,n-1\right\},$$
$$V_n = \big\{\alpha_n\boldsymbol{e}_n : \alpha_n \in \mathbb{R}\big\}.$$

Очевидно, что $U_n \oplus V_n = \mathbb{R}^n$ и $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = 0$ для всех $\boldsymbol{x} \in U_n,\ \boldsymbol{y} \in V_n$. При этом, в силу определения метрики Галилея, для любых $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z} \in U_n$ (соответственно $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z} \in V_n$) неравенство треугольника для метрики $d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ выполняется.

Рассмотрим в псевдоортогональной группе $O(n,n-1,\mathbb{R})$ следующую подгруппу:

$$\Gamma(n,\mathbb{R}) = \Big\{g \in O(n,n-1,\mathbb{R}) :\ gV_n = V_n,\ g_{nn} = \pm 1\Big\}.$$

Для каждого элемента $g = (g_{ij})_{i,j=1}^n \in \Gamma(n,\mathbb{R})$ получим $ge_n = \{0,\ldots,0,y_n\} \in V_n$, т.е.

$$g_{in} = (g\boldsymbol{e}_n, \boldsymbol{e}_i) = 0 \quad \text{при } i = 1,\ldots,n-1.$$

Поэтому матрица $g \in \Gamma(n,\mathbb{R})$ обязательно имеет следующий вид:

$$g = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1,n-1} & 0 \\ g_{21} & g_{22} & \cdots & g_{2,n-1} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ g_{n-1,1} & g_{n-1,2} & \cdots & g_{n-1,n-1}, & 0 \\ g_{n1} & g_{n2} & \cdots & g_{n,n-1} & g_{nn} \end{pmatrix},\ g_{nn} = \pm 1$$

Поскольку $\Gamma(n,\mathbb{R})$ является подгруппой в $O(n,n-1,\mathbb{R})$, то сужение $g|_{U_n}$ преобразования $g \in \Gamma(n,\mathbb{R})$ на подпространство U_n является ортогональным преобразованием. Взяв в U_n базис $\boldsymbol{e}_1,\ldots,\boldsymbol{e}_{n-1}$ и отождествив U_n с $\mathbb{R}^{n-1}$, получим, что для любого $g \in \Gamma(n,\mathbb{R})$ преобразование $h = (h_{ij})_{i,j=1}^{n-1} = g|_{U_n}$ является элементом группы $O(n-1,\mathbb{R})$; при этом

$$h_{ij} = (h\boldsymbol{e}_j, \boldsymbol{e}_i) = (g\boldsymbol{e}_j, \boldsymbol{e}_i) = g_{ij} \quad \text{для всех } i,j = 1,\ldots,n-1.$$

Таким образом,

$$g_{|U_n} = \begin{pmatrix} g_{11} & \cdots & g_{1,n-1} \\ \dots & \dots & \dots \\ g_{n-1,1} & \cdots & g_{n-1,n-1} \end{pmatrix} \in O(n-1,\mathbb{R}).$$

Следовательно,

$$\Gamma(n,\mathbb{R}) = \Big\{ g = (g_{ij})_{i,j}^{n} \in GL(n,\mathbb{R}): \ g_{nn} = \pm 1, \ g_{in} = 0, \ i = \overline{1, n-1}, \\ g(U_n) = U_n, \ (g_{ij})_{i,j=1}^{n-1} \in O(n-1,\mathbb{R}) \Big\}.$$

При этом для любых $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in U_n$ и $g \in \Gamma(n,\mathbb{R})$ верны равенства

$$d(g\boldsymbol{x}, g\boldsymbol{y}) = \rho(g\boldsymbol{x}, g\boldsymbol{y}) = \rho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}). \tag{4}$$

Группу $\Gamma(n,\mathbb{R})$ называют галилеевой группой линейных преобразований в пространстве Галилея $\Gamma(\mathbb{R}^n)$, а группу $\mathbb{R}^n \lhd \Gamma(n,\mathbb{R})$ — галилеевой группой движений в $\Gamma(\mathbb{R}^n)$.

Следующее множество является подгруппой в $\Gamma(n,\mathbb{R})$, которую называют специальной галилеевой группой:

$$S\Gamma(n,\mathbb{R}) = \Big\{ g = (g_{ij})_{i,j=1}^{n} \in \Gamma(n,\mathbb{R}): \ g_{11} = 1, \ g|_{U_n} \in SO(n-1,\mathbb{R}) \Big\}.$$

Утверждение 1. Если $g = (g_{ij})_{i,j=1}^{n} \in O(n, n-1, \mathbb{R})$, $gV_n = V_n$, то $g \in \Gamma(n,\mathbb{R})$ в том и только том случае, когда $d(g\boldsymbol{x}, g\boldsymbol{y}) = d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ для всех $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$.

Доказательство. Пусть $g = (g_{ij})_{i,j=1}^{n} \in O(n, n-1, \mathbb{R})$, $gV_n = V_n$ и $d(g\boldsymbol{x}, g\boldsymbol{y}) = d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ для всех $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$. Поскольку $g\{0, \dots, 0, x_n\} = \{0, \dots, 0, y_n\}$, то $g_{1n} = g_{2n} = \dots = g_{n-1,n} = 0$. Для $\boldsymbol{x} = \{0, \dots, 0, x_n\}$, $\boldsymbol{z} = \{0, \dots, 0, z_n\} \in V_n$ имеем следующие тождества:

$$|x_n - z_n| = d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) = d(g\boldsymbol{x}, g\boldsymbol{z}) = |g_{nn}x_n - g_{nn}z_n| = |g_{nn}||x_n - z_n|.$$

Следовательно, взяв $x_n = 0$, $z_n = 1$, получим, что $g_{nn} = \pm 1$.

Пусть верно следующее:

$$g = \big(g_{ij}\big)_{i,j=1}^{n} \in \Gamma(n,\mathbb{R}), \quad \boldsymbol{x} = \{x_i\}_{i=1}^{n}, \quad \boldsymbol{y} = \{y_i\}_{i=1}^{n} \in \mathbb{R}^n,$$
$$\boldsymbol{u_1} = \{x_1, \dots, x_{n-1}, 0\}, \quad \boldsymbol{v_1} = \{0, \dots, 0, x_n\},$$
$$\boldsymbol{u_2} = \{y_1, \dots, y_{n-1}, 0\}, \quad \boldsymbol{v_2} = \{0, \dots, 0, y_n\}.$$

Тогда очевидно, что

$$g\boldsymbol{x} = g\boldsymbol{u_1} + g\boldsymbol{v_1}, \quad g\boldsymbol{y} = g\boldsymbol{u_2} + g\boldsymbol{v_2}, \quad g\boldsymbol{u_i} \in U_n, \quad i = 1, 2,$$
$$g\boldsymbol{v_1} = \{0, \dots, 0, \pm x_n\}, \quad g\boldsymbol{v_2} = \{0, \dots, 0, \pm y_n\}$$

Если $x_n \neq y_n$, то $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = |x_n - y_n|$, при этом $g\boldsymbol{v_1} \neq g\boldsymbol{v_2}$. Поскольку $g\boldsymbol{u_i} \in U_n$, $i = 1, 2$, то n-я координата вектора $g\boldsymbol{x}$ (соответственно, $g\boldsymbol{y}$) совпадает с n-й координатой вектора $g\boldsymbol{v_1}$ (соответственно, $g\boldsymbol{v_2}$). Следовательно,

$$d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = |x_n - y_n| = d(g\boldsymbol{x}, g\boldsymbol{y}).$$

Если же $x_n = y_n$, то n-е координаты векторов $g\boldsymbol{x}$ и $g\boldsymbol{y}$ совпадают, и поэтому (см. (4)):

$$d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = d(\boldsymbol{u_1}, \boldsymbol{u_2}) = \rho(g\boldsymbol{u_1}, g\boldsymbol{u_2}) = d(g\boldsymbol{x}, g\boldsymbol{y}).$$ □

3. Базис трансцендентности в дифференциальном поле дифференциальных рациональных функций, инвариантных относительно действия группы Галилея

Обозначим через $\mathbb{R}\langle x_1, \dots, x_n\rangle^{\Gamma(n,\mathbb{R})}$ (соответственно, $\mathbb{R}\langle x_1, \dots, x_n\rangle^{S\Gamma(n,\mathbb{R})}$) дифференциальное поле всех $\Gamma(n,\mathbb{R})$-инвариантных (соответственно, $S\Gamma(n,\mathbb{R})$-инвариантных) d-рациональных функций. Для каждого $\boldsymbol{x} = \{x_j\}_{j=1}^{n-1} \in \mathbb{R}^{n-1}$ предположим, что

$$M_{n-1}(\boldsymbol{x}) = \Big(x_i^{(j-1)}\Big)_{i,j=1}^{n-1}$$

Следующая теорема описывает конечный d-рациональный базис в дифференциальном поле $\mathbb{R}\langle x_1,\dots,x_n\rangle^{\Gamma(n,\mathbb{R})}$ (соответственно, d-поле $\mathbb{R}\langle x_1,\dots,x_n\rangle^{S\Gamma(n,\mathbb{R})}$).

Теорема 8. *В d-поле $\mathbb{R}\langle x_1,\dots,x_n\rangle^{\Gamma(n,\mathbb{R})}$ его d-рациональный базис образуют многочлены*

$$\varphi_k(x_1,\dots,x_n)=\sum_{i=1}^{n-1}(x_i^{(k)})^2,\quad k=0,\dots,n-2, \tag{5}$$

$$\psi(x_1,\dots,x_n)=x_n. \tag{6}$$

В d-поле $\mathbb{R}\langle x_1,\dots,x_n\rangle^{S\Gamma(n,\mathbb{R})}$ его d-рациональный базис составляют многочлены $\det M_{n-1}(x)$, *$\psi(x_1,\dots,x_n)$ и $\varphi_k(x_1,\dots,x_n)$, $k=0,\dots,n-3$.*

Доказательство. Докажем утверждение относительно d-поля $\mathbb{R}\langle x_1,\dots,x_n\rangle^{\Gamma(n,\mathbb{R})}$; оставшаяся часть теоремы доказывается аналогично.

Согласно предложению 1 из [18] (см. также доказательство теоремы 2.1.1 из [11]) имеем, что любая $\Gamma(n,\mathbb{R})$-инвариантная d-рациональная функция является отношением двух $\Gamma(n,\mathbb{R})$-инвариантных d-многочленов. Поэтому для доказательства теоремы 8 достаточно установить, что любой $\Gamma(n,\mathbb{R})$-инвариантный d-многочлен выражается через d-многочлены (5) и (6) с помощью конечного числа операций d-поля $\mathbb{R}\langle x_1,\dots,x_n\rangle^{\Gamma(n,\mathbb{R})}$.

Каждый d-многочлен $p(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}\langle x_1,\dots,x_n\rangle^{\Gamma(n,\mathbb{R})}$ является конечной суммой d-многочленов следующего вида:

$$q(x_1,\dots,x_n)=(x_n^{(i_1)}\cdot\dots\cdot x_n^{(i_k)})\varphi(x_1,\dots,x_{n-1}),$$

где $0\leqslant i_1<i_2<\dots<i_k$ и $\varphi(x_1,\dots,x_{n-1})$ — d-многочлен от переменных $x_1,\dots,x_{n-1}$.

Положив

$$r(x_n)=x_n^{(i_1)}\cdot\dots\cdot x_n^{(i_k)}, \tag{7}$$

получим

$$q(x_1,\dots,x_n)=r(x_n)\cdot\varphi(x_1,\dots,x_{n-1}),$$

т.е. дифференциальный многочлен $p(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}\langle x_1,\dots,x_n\rangle^{\Gamma(n,\mathbb{R})}$ можно представить в виде

$$p(x_1,\dots,x_n)=\sum_{s=1}^{m}r_s(x_n)\cdot\varphi_s(x_1,\dots,x_{n-1}), \tag{8}$$

где $\varphi_s(x_1,\dots,x_{n-1})\in\mathbb{R}\langle x_1,\dots,x_{n-1}\rangle$ и $r_s(x_n)$ имеют вид (7), $s=1,\dots,m$, $m\in\mathbb{N}$.

Пусть $g=(g_{ij})_{i,j=1}^{n}\in\Gamma(n,\mathbb{R})$, где $g_{nn}=1$ и $h=(g_{ij})_{i,j=1}^{n-1}\in O(n-1,\mathbb{R})$. Поскольку $gU_n=U_n$, $gV_n=V_n$, то $g\{x_1,\dots,x_n\}=\{y_1,\dots,y_{n-1},x_n\}$, где $\{y_1,\dots,y_{n-1}\}=h\{x_1,\dots,x_{n-1}\}$.

Используя $\Gamma(n,\mathbb{R})$-инвариантность d-многочлена $p(x_1,\dots,x_n)$, согласно (8), получим следующее:

$$\sum_{s=1}^{m}r_s(x_n)\cdot\varphi_s(x_1,\dots,x_{n-1})=p(x_1,\dots,x_n)=p(g\{x_1,\dots,x_n\})=p(y_1,\dots,y_{n-1},x_n)=$$

$$=\sum_{s=1}^{m}r_s(x_n)\cdot\varphi_s(y_1,\dots,y_{n-1})=\sum_{s=1}^{m}r_s(x_1)\cdot\varphi_s(h\{x_1,\dots,x_{n-1}\}). \tag{9}$$

Поскольку равенство (9) верно для любых значений $x_1,\dots,x_n$, то

$$\varphi_s(x_1,\dots,x_{n-1})=\varphi_s(h\{x_1,\dots,x_{n-1}\})\ \text{ при каждом }\ h\in O(n-1,\mathbb{R}).$$

Следовательно, $\varphi_s\in\mathbb{R}\langle x_1,\dots,x_{n-1}\rangle^{O(n-1,\mathbb{R})}$ для всех $s=1,\dots,m$. Согласно теореме 6 d-многочлены $\varphi_s(x_1,\dots,x_{n-1})$, $s=1,\dots,m$ выражаются через многочлены (5) с помощью конечного числа операций d-поля:

$$\mathbb{R}\langle x_1,\dots,x_{n-1}\rangle^{O(n-1,\mathbb{R})}\subset\mathbb{R}\langle x_1,\dots,x_n\rangle^{\Gamma(n,\mathbb{R})}.$$

Поэтому из равенства (8) следует, что d-многочлен $p(x_1,\ldots,x_n)$ выражается через многочлены (5) и (6) с помощью конечного числа операций d-поля $\mathbb{R}\langle x_1,\ldots,x_n\rangle^{\Gamma(n,\mathbb{R})}$. Это означает, что система d-многочленов (5) и (6) является конечным d-рациональным базисом в d-поле $\mathbb{R}\langle x_1,\ldots,x_n\rangle^{\Gamma(n,\mathbb{R})}$. $\square$

В следующей теореме устанавливается, что конечный d-рациональный базис в дифференциальном поле $\mathbb{R}\langle x_1,\ldots,x_n\rangle^{\Gamma(n,\mathbb{R})}$, описанный в теореме 8, образует конечный базис d-трансцендентности d-поля $\mathbb{R}\langle x_1,\ldots,x_k\rangle^{\Gamma(n,\mathbb{R})}$ над полем $\mathbb{R}$.

Теорема 9. *Система дифференциальных многочленов* (5) *и* (6) *является базисом d-трансцендентности дифференциального поля $\mathbb{R}\langle x_1,\ldots,x_n\rangle^{\Gamma(n,\mathbb{R})}$ над полем $\mathbb{R}$ со степенью d-трансцендентности, равной n .*

Доказательство. Поскольку степень d-трансцендентности поля $\mathbb{R}\langle x_1,\ldots,x_n\rangle$ над полем $\mathbb{R}$ равна n (см. теорему 2) и верно следующее:

$$\mathbb{R}\subset\mathbb{R}\langle x_1,\ldots,x_n\rangle^{\Gamma(n,\mathbb{R})}\subset\mathbb{R}\langle x_1,\ldots,x_n\rangle,$$

то, в силу следствия 1, достаточно показать, что справедливо равенство:

$$\text{ст. } d\text{"=тр.}\,\mathbb{R}\langle x_1,\ldots,x_n\rangle/\mathbb{R}\langle x_1,\ldots,x_n\rangle^{\Gamma(n,\mathbb{R})}=0.$$

Для этого необходимо установить, что все многочлены $q_i[x_1,\ldots,x_n]=x_i$, $i=1,\ldots,n$, являются алгебраическими элементами над d-полем $\mathbb{R}\langle x_1,\ldots,x_n\rangle^{\Gamma(n,\mathbb{R})}$, т. е., существует такой d-многочлен $\psi[y]$ с коэффициентами из дифференциального поля $\mathbb{R}\langle x_1,\ldots,x_n\rangle^{\Gamma(n,\mathbb{R})}$, что $\psi[x_i]=0$.

Заметим, что многочлен $q_n[x_1,\ldots,x_n]=x_n$ принадлежит d-полю $\mathbb{R}\langle x_1,\ldots,x_n\rangle^{\Gamma(n,\mathbb{R})}$ (см. теорему 8).

Зафиксируем номер $i\in\{1,\ldots,n-1\}$ и положим

$$\boldsymbol{x}_0=\{0,\ldots,0,1,0,\ldots,0\}\in\mathbb{R}^{n-1},\ \text{число 1 стоит на } i\text{-м месте.}$$

Рассмотрим такие $(n-1)$-мерные векторы, что

$$\boldsymbol{x}_0^{(0)}=\left\{x_1^{(0)},\ldots,x_{n-1}^{(0)}\right\},\ \boldsymbol{x}_0^{(1)}=\left\{x_1^{(1)},\ldots,x_{n-1}^{(1)}\right\},\ \ldots,\ \boldsymbol{x}_0^{(n-2)}=\left\{x_1^{(n-2)},\ldots,x_{n-1}^{(n-2)}\right\}.$$

Для двух одинаковых наборов из n штук $(n-1)$-мерных векторов $\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{x}_0^{(0)},\boldsymbol{x}_0^{(1)},\ldots,\boldsymbol{x}_0^{(n-2)}$ верно следующее тождество (см., например, [27]):

$$0=\begin{vmatrix}(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{x}_0) & (\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{x}_0^{(0)}) & \cdots & (\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{x}_0^{(n-2)})\\ (\boldsymbol{x}_0^{(0)},\boldsymbol{x}_0) & (\boldsymbol{x}_0^{(0)},\boldsymbol{x}_0^{(0)}) & \cdots & (\boldsymbol{x}_0^{(0)},\boldsymbol{x}_0^{(n-2)})\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ (\boldsymbol{x}_0^{(n-2)},\boldsymbol{x}_0) & (\boldsymbol{x}_0^{(n-2)},\boldsymbol{x}_0^{(0)}) & \cdots & (\boldsymbol{x}_0^{(n-2)},\boldsymbol{x}_0^{(n-2)})\end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix}1 & x_i^{(0)} & \cdots & x_i^{(n-2)}\\ x_i^{(0)} & (\boldsymbol{x}_0^{(0)},\boldsymbol{x}_0^{(0)}) & \cdots & (\boldsymbol{x}_0^{(0)},\boldsymbol{x}_0^{(n-2)})\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ x_i^{(n-2)} & (\boldsymbol{x}_0^{(n-2)},\boldsymbol{x}_0^{(0)}) & \cdots & (\boldsymbol{x}_0^{(n-2)},\boldsymbol{x}_0^{(n-2)})\end{vmatrix}.$$

Из этого тождества и теоремы 3 следует, что многочлены $q_i[x_1,\ldots,x_n]=x_i=x_i^{(0)}$, $i=1,\ldots,n-1$, являются алгебраическими элементами над d-полем $\mathbb{R}\langle x_1,\ldots,x_n\rangle^{\Gamma(n,\mathbb{R})}$. $\square$

Повторяя доказательство теоремы 9, получаем следующий ее вариант для дифференциального поля $\mathbb{R}\langle x_1,\ldots,x_n\rangle^{S\Gamma(n,\mathbb{R})}$.

Теорема 10. *Система дифференциальных многочленов*

$$\det M_{n-1}(x),\quad \psi(x_1,\ldots,x_n)=x_n,\quad \varphi_k(x_1,\ldots,x_n)=\sum_{i=1}^{n-1}(x_i^{(k)})^2,\quad k=0,\ldots,n-3,$$

является базисом d-трансцендентности дифференциального поля $\mathbb{R}\langle x_1,\ldots,x_n\rangle^{S\Gamma(n,\mathbb{R})}$ *над полем* $\mathbb{R}$ *со степенью d-трансцендентности, равной n.*

4. Эквивалентность путей относительно действии группы Галилея

В этом разделе решается основная задача настоящей работы: устанавливаются необходимые и достаточные условия для эквивалентность путей, лежащих в $\Gamma(\mathbb{R}^n)$, относительно действия групп $\Gamma(n,\mathbb{R})$, $S\Gamma(n,\mathbb{R})$, $\mathbb{R}^n \lhd \Gamma(n,\mathbb{R})$ и $\mathbb{R}^n \lhd S\Gamma(n,\mathbb{R})$.

Рассмотрим произвольный путь $\boldsymbol{x}(t) = \{x_j(t)\}_{j=1}^n$, $t \in (0,1)$, в пространстве Галилея $\Gamma(\mathbb{R}^n)$ и положим
$$M_{n-1}(\boldsymbol{x}(t)) = \left(x_i^{(j-1)}(t)\right)_{i,j=1}^{n-1}.$$
Назовем путь $\boldsymbol{x}(t)$ является Γ_n-регулярным, если $\det M_{n-1}(\boldsymbol{x}(t)) \neq 0$ при всех $t \in (0,1)$.

Следующая теорема является вариантом теоремы 5 для групп $\Gamma(n,\mathbb{R})$ и $S\Gamma(n,\mathbb{R})$.

Теорема 11. *Γ_n-Регулярные пути $\boldsymbol{x}(t)$ и $\boldsymbol{y}(t)$ в пространстве Галилея $\Gamma(\mathbb{R}^n)$ являются $\Gamma(n,\mathbb{R})$-эквивалентными (соответственно, $S\Gamma(n,\mathbb{R})$-эквивалентными) тогда и только тогда, когда выполнены следующие равенства (для всех $t \in (0,1)$):*
$$y_n(t) = \pm x_n(t), \tag{10}$$
$$M_{n-1}^{-1}(\boldsymbol{x}(t))M_{n-1}'(\boldsymbol{x}(t)) = M_{n-1}^{-1}(\boldsymbol{y}(t))M_{n-1}'(\boldsymbol{y}(t)), \tag{11}$$
$$M_{n-1}^{T}(\boldsymbol{x}(t))M_{n-1}(\boldsymbol{x}(t)) = M_{n-1}^{T}(\boldsymbol{y}(t))M_{n-1}(\boldsymbol{y}(t)) \tag{12}$$
или, соответственно, выполнены равенства (11) *и* (12)*, а также следующие равенства (для всех $t \in (0,1)$):*
$$y_n(t) = x_n(t), \tag{13}$$
$$\det M_{n-1}(\boldsymbol{x}(t)) = \det M_{n-1}(\boldsymbol{y}(t)). \tag{14}$$

Доказательство. Пусть пути $\boldsymbol{x}(t)$ и $\boldsymbol{y}(t)$ являются $\Gamma(n,\mathbb{R})$-эквивалентными, т.е. существует такое $g = (g_{ij})_{i,j=1}^n \in \Gamma(n,\mathbb{R})$, что $\boldsymbol{y}(t) = g\boldsymbol{x}(t)$ для всех $t \in (0,1)$. Так как $g_{nn} = \pm 1$, $g_{in} = 0$ для всех $i = 1,\ldots,n-1$, и $gU_n = U_n$, то
$$g\Big\{0,\ldots,0,x_n(t)\Big\} = \Big\{0,\ldots,0,\pm x_n(t)\Big\},$$
$$g\Big\{x_1(t),\ldots,x_{n-1}(t),0\Big\} = \Big\{z_1(t),\ldots,z_{n-1}(t),0\Big\}.$$
Поэтому верно тождество
$$\begin{aligned} y(t) = \Big\{y_1(t),y_2(t),\ldots,y_n(t)\Big\} &= g\Big\{x_1(t),x_2(t),\ldots,x_n(t)\Big\} = \\ &= g\Big\{0,\ldots,0,x_n(t)\Big\} + g\Big\{x_1(t),\ldots,x_{n-1}(t),0\Big\} = \\ &= \Big\{0,\ldots,0,\pm x_n(t),\Big\} + \Big\{z_1(t),\ldots,z_{n-1}(t),0\Big\} = \\ &= \Big\{z_1(t),\ldots,z_{n-1}(t),\pm x_n(t)\Big\}. \end{aligned}$$
Это означает, что $y_n(t) = \pm x_n(t)$ для всех $t \in (0,1)$ и
$$\Big\{y_1(t),y_2(t),\ldots,y_{n-1}(t)\Big\} = h\Big\{x_1(t),\ldots,x_{n-1}(t)\Big\},$$
где $h = (g_{ij})_{i,j=1}^{n-1} \in O(n-1,\mathbb{R})$. Используя теперь теорему 5, получим справедливость следующих равенств (для всех $t \in (0,1)$):
$$M_{n-1}^{-1}(\boldsymbol{x}(t))M_{n-1}'(\boldsymbol{x}(t)) = M_{n-1}^{-1}(\boldsymbol{y}(t))M_{n-1}'(\boldsymbol{y}(t)),$$
$$M_{n-1}^{T}(\boldsymbol{x}(t))M_{n-1}(\boldsymbol{x}(t)) = M_{n-1}^{T}(\boldsymbol{y}(t))M_{n-1}(\boldsymbol{y}(t)).$$

Пусть теперь выполнены равенства (10)–(12). Из теоремы 5 и равенств (11)–(12) вытекает существование такого ортогонального преобразования

$$h = \begin{pmatrix} g_{11} & \cdots & g_{1,n-1} \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ g_{n-1,1} & \cdots & g_{n-1,n-1} \end{pmatrix} \in O(n-1,\mathbb{R}),$$

для которого

$$\Big\{y_1(t),\dots,y_{n-1}(t)\Big\} = h\Big(\Big\{x_1(t),\dots,x_{n-1}(t)\Big\}\Big),$$

причем $g \in \Gamma(n,\mathbb{R})$, если

$$g = (g_{ij})_{i,j=1}^n = \begin{pmatrix} g_{11} & \cdots & g_{1,n-1} & 0 \\ g_{21} & \cdots & g_{2,n-1} & 0 \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ g_{n-1,1} & \cdots & g_{n-1,n-1} & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \pm 1 \end{pmatrix}.$$

При этом

$$g\Big(\Big\{x_1(t),\dots,x_n(t)\Big\}\Big) = \left\{\sum_{j=1}^n g_{ij}x_j(t)\right\}_{i=1}^n = \Big\{y_1(t),\dots,y_{n-1}(t),\pm x_n(t)\Big\}.$$

Согласно равенству (10) получим, что $y_n(t) = \pm x_n(t)$. Если $y_n(t) = -x_n(t)$, то берем $g_{nn} = -1$; если же $y_1(t) = x_1(t)$, то полагаем, что $g_{nn} = 1$.

В обоих случаях получим, что $g \in \Gamma(n,\mathbb{R})$ и $\boldsymbol{y}(t) = g\boldsymbol{x}(t)$ для всех $t \in (0,1)$.

Доказательство теоремы 11 для группы $S\Gamma(n,\mathbb{R})$ аналогично предыдущему доказательству. $\square$

С помощью теорем 6 и 11 устанавливаются следующие необходимые и достаточные условия $\Gamma(n,\mathbb{R})$-эквивалентности Γ_n-регулярных путей, использующие билинейную форму $\sum\limits_{i=1}^{n-1} x_i y_i$.

Теорема 12. *Γ_n-Регулярные пути $\boldsymbol{x}(t)$ и $\boldsymbol{y}(t)$ в пространстве Галилея $\Gamma(\mathbb{R}^n)$ являются $\Gamma(n,\mathbb{R})$-эквивалентными (соответственно, $S\Gamma(n,\mathbb{R})$-эквивалентными) в том и только том случае, когда для всех $t \in (0,1)$ и $m = 0,1,\dots,n-2$ выполнено равенство* (10) *и равенства*

$$\sum_{i=1}^{n-1}\left(x_i^{(m)}(t)\right)^2 = \sum_{i=1}^{n-1}\left(y_i^{(m)}(t)\right)^2 \tag{15}$$

(*соответственно, для всех $t \in (0,1)$ и $m = 0,1,\dots,n-3$ выполнены равенства* (13)–(15)).

Доказательство. Пусть пути $\boldsymbol{x}(t)$ и $\boldsymbol{y}(t)$ $\Gamma(n,\mathbb{R})$-эквивалентны, т.е. существует такое преобразование $g = (g_{ij})_{i,j=1}^n \in \Gamma(n,\mathbb{R})$, что $\boldsymbol{y}(t) = g\boldsymbol{x}(t)$. Поскольку $h = (g_{ij})_{i,j=1}^{n-1} \in O(n-1,\mathbb{R})$ и

$$\{y_1(t),\dots,y_{n-1}(t)\} = h(\{x_1(t),\dots,x_{n-1}(t)\}), \tag{16}$$

то, в силу теоремы 6, верны равенства (15) для всех $t \in (0,1)$, $m = 0,1,\dots,n-2$. Кроме того, согласно теореме 11, справедливо равенство (10).

Обратно, пусть верны равенства (10) и (15). В силу теоремы 6 существует такое преобразование $h = (h_{ij})_{i,j=1}^{(n-1)} \in O(n-1,\mathbb{R})$, что выполнено (16). Равенство $\boldsymbol{y}(t) = g\boldsymbol{x}(t)$ верно при всех $t \in (0,1)$ для следующей матрицы:

$$g = (g_{ij})_{i,j=1}^n = \begin{pmatrix} h_{11} & \cdots & h_{1,n-1} & 0 \\ h_{21} & \cdots & h_{2,n-1} & 0 \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ h_{n-1,1} & \cdots & h_{n-1,n-1} & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \pm 1 \end{pmatrix} \in \Gamma(n,\mathbb{R}).$$

Доказательство теоремы 12 в случае группы $S\Gamma(n,\mathbb{R})$ использует теоремы 6 и 11 и повторяет предыдущее доказательство для группы $\Gamma(n,\mathbb{R})$. $\square$

Из теорем 7 и 12 вытекает следующий критерий $\mathbb{R}^n \lhd \Gamma(n,\mathbb{R})$-эквивалентности ($\mathbb{R}^n \lhd S\Gamma(n,\mathbb{R})$-эквивалентности) путей.

Теорема 13. *Пусть $\boldsymbol{x}(t)$ и $\boldsymbol{y}(t)$ — такие пути в пространстве Галилея $\Gamma(\mathbb{R}^n)$, для которых пути $\boldsymbol{x}^{(1)}(t)$ и $\boldsymbol{y}^{(1)}(t)$ Γ_n-регулярны. Пути $\boldsymbol{x}(t)$ и $\boldsymbol{y}(t)$ являются $\mathbb{R}^n \lhd \Gamma(n,\mathbb{R})$-эквивалентными тогда и только тогда, когда для всех $t \in (0,1)$ и $m = 1,\ldots,n-1$ выполнены равенства*

$$y_n^{(1)}(t) = \pm x_n^{(1)}(t), \quad \sum_{i=1}^{n-1} \left(x_i^{(m)}(t)\right)^2 = \sum_{i=1}^{n-1} \left(y_i^{(m)}(t)\right)^2. \tag{17}$$

Пути $\boldsymbol{x}(t)$ и $\boldsymbol{y}(t)$ являются $\mathbb{R}^n \lhd S\Gamma(n,\mathbb{R})$-эквивалентными тогда и только тогда, когда при $m = 1,\ldots,n-2$ выполнены равенства (17) и при каждом $t \in (0,1)$ справедливы равенства

$$y_n^{(1)}(t) = x_n^{(1)}(t), \quad \det M'_{n-1}(\boldsymbol{x})(t) = \det M'_{n-1}(\boldsymbol{y})(t).$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Александров П. С.* Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. — М.: Наука, 1979.
2. *Аминов Ю. А.* Дифференциальная геометрия и топология. — М.: Наука, 1987.
3. *Арипов Р. Г., Хаджиев Дж.* Полная система глобальных дифференциальных и интегральных инвариантов кривой в евклидовой геометрии// Изв. вузов. Мат. — 2007. — *542*, № 7. — С. 1–14.
4. *Бляшке В.* Дифференциальная геометрия и геометрические основы теории относительности Эйнштейна. — М.-Л.: ОНТИ, 1935.
5. *Вейль Г.* Избранные труды. Математика. Теоретическая физика. — М.: Наука, 1984.
6. *Винберг Э. Б., Попов В. Л.* Теория инвариантов// Итоги науки и техн. Сер. Совр. пробл. мат. Фундам. напр. — М.: ВИНИТИ, 1998. — *55*. — С. 137–309.
7. *Гильберт Д.* Избранные труды. Теория инвариантов. Теория чисел. Алгебра. Геометрия. Основания математики. — М.: Факториал, 1998.
8. *Картан Э.* Теория конечных непрерывных групп и дифференциальная геометрия, изложенная методом подвижного репера. — Волгоград: ПЛАТОН, 1998.
9. *Картан Э.* Избранные труды. — М.: МЦНМО, 1998.
10. *Муминов К. К.* Эквивалентность путей относительно действия симплектической группы// Изв. вузов. Мат. — 2002. — № 7. — С. 27–38.
11. *Муминов К. К., Чилин В. И.* Эквивалентность кривых в конечномерных пространствах. — LAP LAMBERT Academic Publ., 2015.
12. *Розенфельд Б. А.* Неевклидовы пространства. — М.: Наука, 1969.
13. *Хаджиев Дж.* Приложение теории инвариантов к дифференциальной геометрии кривых. — Ташкент: ФАН, 1988.
14. *Чилин В. И., Муминов К. К.* Полная система дифференциальных инвариантов кривой в псевдоевклидовом пространстве// Динам. сист. — 2013. — *31*, № 3. — С. 135–149.
15. *Широков П. А., Широков А. П.* Аффинная дифференциальная геометрия. — М.: Физматлит, 1959.
16. *Яглом И. М.* Квадратичные и кососимметрические билинейные формы в вещественном симплектическом пространстве// Тр. семин. по вект. и тенз. анал. — 1950. — *8*. — С. 119–138.
17. *Яглом И. М.* Кривые в симплектическом пространстве// Тр. семин. по вект. и тенз. анал. — 1956. — *10*. — С. 119–137.
18. *Diedonne J. A., Carrell J. B.* Invariant Theory. — N.Y.–London: Academic Press, 1971.
19. *Kaplansky I.* An Introduction to Differential Algebra. — Paris: Hermann, 1957.
20. *Khadjiev Dj., Peksen O.* The complete system of global integral and differential invariants for equiaffine curves// Diff. Geom. Appl. — 2004. — *20*. — C. 167–175.
21. *Kolchin E. R.* Differential Algebra and Algebraic Groups. — N.Y.–London: Academic Press, 1973.
22. *Kraft H.* Geometrische Methoden in der Invariantentheorie. — Braunschweig Wiesbaden: Vieweg, 1985.
23. *Mumford D.* Geometric Invariant Theory. — Berlin: Springer-Verlag, 1965.
24. *Mumford D., Fogarty J.* Geometric Invariant Theory. — Berlin: Springer-Verlag, 1982.
25. *Nagata M.* On the Fourteenth problem of Hilbert/ Lect. Tata Inst. Fundam. Res. — Bombey, 1963.

26. *Pommaret J. F.* Differential Galois Theory. — N.Y.: Gordon and Breach, 1983.
27. *Weyl H.* The Classical Groups. Their Invariants and Representations. — Princeton Univ. Press, 1997.

В. И. Чилин
Национальный университет Узбекистана им. М. Улугбека, Ташкент, Узбекистан
E-mail: `vladimirchil@gmail.com`

К. К. Муминов
Национальный университет Узбекистана им. М. Улугбека, Ташкент, Узбекистан
E-mail: `m.muminov@rambler.ru`

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 144 (2018). С. 17–29

УДК 510.5, 512.57, 515.12

ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА НАД АЛГОРИТМИЧЕСКИМИ ПРЕДСТАВЛЕНИЯМИ УНИВЕРСАЛЬНЫХ АЛГЕБР

© 2018 г. **Н. Х. КАСЫМОВ, И. А. ХОДЖАМУРАТОВА**

Посвящается памяти академика Т. Н. Кары-Ниязова

Аннотация. Изучаются топологические пространства, эффективно определимые над фактор-множествами по модулю эквивалентностей на множестве натуральных чисел. Формулируется критерий вычислимой (эффективной) отделимости топологических пространств в терминах аппроксимируемости соответствующих алгебр негативными (равномерно эффективно отделимыми). Приведено сравнение негативных и позитивных представлений алгебр с точки зрения строения соответствующих эффективных пространств. Для эффективных бесконечных топологических пространств доказано существование их бесконечных эффективных компактных расширений.

Ключевые слова: нумерация, позитивность, негативность, алгоритмические представления алгебр, вычислимые и эффективные пространства.

AMS Subject Classification: 03D45, 08A70, 54A05

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение

Идеи использования топологических понятий в теории абстрактной вычислимости восходят к В. А. Успенскому (см. [16, 17]). Общая теория нумераций, созданная Ю. Л. Ершовым (см. [2]), и вычислимых нумерованных алгебр, основы которой заложены А. И. Мальцевым в [14] и изложены Ю. Л. Ершовым и С. С. Гончаровым в [1, 3], также регулярно обращались к топологическим концепциям. Тесные и плодотворные связи между вычислимой отделимостью нумерованных универсальных алгебр и их негативными аппроксимациями приведены в обзорной работе [12], в которой освещены основы структурной теории таких алгебр и вычислимых пространств над их вычислимо отделимыми представлениями, имеющими неожиданные приложения, как, собственно, в теории вычислимости, так и в теоретической информатике.

В предлагаемой статье рассматриваются вычислимые и эффективные топологические пространства, определенные на множестве классов эквивалентностей натуральных чисел по модулям заданных эквивалентностей на ω (множестве натуральных чисел), проводится сравнение их топологических свойств.

Работа выполнена при поддержке научно-методического центра «Наследие академика Т. Н. Кары-Ниязова».

Всюду далее мы безоговорочно используем тезис Черча о частичной рекурсивности всякой интуитивно вычислимой функции.

Как обычно, всюду определенная функция из множества натуральных чисел ω в ω называется вычислимой, если существует алгоритм ее вычисления. Подмножество ω называется вычислимым, если вычислима его характеристическая функция. Эти определения естественным образом обобщаются на многоместные функции и подмножества декартовых степеней ω.

Определение 1. Подмножество ω называется эффективным, если оно является областью значений подходящей вычислимой функции.

Равносильно (и менее формально), множество эффективно, если оно порождается некоторым алгоритмом. Это определение также естественным образом обобщается на многоместные отношения.

Важно отметить, что всякое вычислимое множество является эффективным, в то же время, фундаментальным фактом теории алгоритмов является существование эффективных невычислимых множеств (см., например, [15]).

Если свойством P обладает дополнение множества α^n до ω^n, то будем говорить, что α^n является ко-P-множеством.

2. Вычислимые пространства

1. Нумерации и эквивалентности. Пусть N — не более, чем счетное множество. Сюръективное отображение $\nu : \omega \to N$ называется нумерацией множества N, а ядро этой нумерации (т.е. множество $\{\langle x, y\rangle | \nu x = \nu y\}$) — нумерационной эквивалентностью нумерации ν. При этом, пара (N, ν) называется нумерованным множеством. Подмножество N_0 множества N называется ν-вычислимым (ν-эффективным), если вычислимо (эффективно) множество всех ν-номеров множества N_0, т.е. полный ν-прообраз N_0 ($\nu^{-1}N_0 = \{x|\nu x \in N_0\}$). Далее, если из контекста будет ясно о какой нумерации ν идет речь, будем называть подмножества нумерованного множества просто вычислимыми (эффективными), без приставки ν. Поскольку пересечение конечного числа вычислимых (эффективных) подмножеств нумерованного множества (N, ν) является таковым же, то семейство вычислимых (эффективных) подмножеств N образует базу естественной топологии на N, которую будем называть вычислимой (эффективной) топологией, а соответствующее топологическое пространство — вычислимым (эффективным) пространством.

Пусть (M, μ) и (N, ν) — нумерованные множества и $F : M \to N$ — отображение из M в N. F называется морфизмом, если оно «поддерживается» вычислимой функцией на номерах, т.е. существует такая вычислимая функция f, что $F\mu = \nu f$. Иными словами, морфизмами являются в точности те отображения, для которых по любому μ-номеру всякого элемента множества M можно вычислить некоторый ν-номер F-образа этого элемента в множестве N. Отображения, рассматриваемые в общей теории нумерация, являются именно морфизмами (см. [2]).

Заметим, что всякий морфизм двух нумерованных множеств является непрерывным отображением соответствующих вычислимых (эффективных) топологических пространств, т. к. прообраз вычислимого (эффективного) множества является вычислимым (соответственно, эффективным).

Под словом эквивалентность, если не оговорено противное, понимается эквивалентность на множестве натуральных чисел ω. Пусть η — эквивалентность. Множество $\alpha \subseteq \omega$ называется η-замкнутым (не в топологическом смысле!), если α вместе с каждым числом содержит и все ему η-эквивалентные, т.е. $x \in \alpha \wedge x = y \pmod{\eta} \to y \in \alpha$.

Определение 2. Эквивалентность η называется вычислимо (эффективно) отделимой, если всякая пара различных смежных классов этой эквивалентности отделяется подходящим η-замкнутым вычислимым (эффективным) множеством.

Каждой нумерации некоторого множества однозначно соответствует его нумерационная эквивалентность. Обратно, каждой эквивалентности η однозначно соответствует естественная нумерация (проекция) π фактор-множества ω/η, определенная правилом $\pi(n) = \{n\}/\eta$. Для наших рассмотрений удобнее будет использовать второй подход, т.е. двойственный к основной проблематике теории нумераций, когда «первичным» понятием объявляется не множество с его нумерацией, а эквивалентность, расматриваемая как «источник», порождающий различные пространства и алгебры.

Так же, как и в случае нумерованных множеств, на фактор-множестве ω/η можно ввести вычислимое (эффективное) топологическое пространство, порожденное всеми вычислимыми (эффективными) η-замкнутыми подмножествами ω. Для заданной эквивалентности η будем называть топологическое пространство $(\omega/\eta;\tau)$, где τ — база топологии, состоящая из всех η-замкнутых вычислимых (эффективных) множеств, вычислимым или вычислимо порожденным (эффективным или эффективно порожденным). Будем также называть первое из этих пространств $\mathrm{comp}(\eta)$-пространством, второе — $\mathrm{eff}(\eta)$-пространством.

Далее для краткости вычислимо отделимые эквивалентности будем называть c-эквивалентностями, а эффективно отделимые эквивалентности — e-эквивалентностями.

Бесконечной будем называть эквивалентность с бесконечным числом смежных классов. Для двух эквивалентностей будем называть первую расщеплением второй, а вторую — расширением первой, если первая из них содержится во второй.

Пусть $\alpha \subseteq \omega$. Определим $\eta(\alpha) = \alpha^2 \cup \mathrm{id}\,\omega$.

Предложение 1 (см. [9]). *Эквивалентность η является e-эквивалентностью тогда и только тогда, когда $\mathrm{eff}(\eta)$-пространство есть T_0-пространство.*

Заметим, что в этом предложении нельзя заменить T_0-отделимость на T_1-отделимость. В самом деле, пусть α — невычислимое эффективное множество и $\eta = \alpha^2 \cup (\omega \setminus \alpha)^2$.

Тогда $\mathrm{eff}(\eta)$-пространство гомеоморфно связному двоеточию и потому не яляется T_1-пространством. Отметим, что эта же эквивалентность дает пример связного $\mathrm{eff}(\eta)$-пространства. В то же время, в $\mathrm{comp}(\eta)$-пространстве нет нетривиальных открытых подмножеств.

Понятие вычислимо отделимой эквивалентности позволяет дать весьма сильную топологическую характеризацию c-эквивалентностей:

Предложение 2 (см. [9]). *Для произвольной эквивалентности η на ω следующие условия равносильны*:

1) *η является c-эквивалентностью*;
2) *$\mathrm{comp}(\eta)$-пространство совершенно нормально и вполне несвязно.*

Следствие 1. *Если η является c-эквивалентностью, то $\mathrm{comp}(\eta)$-пространство является T_i-пространством для каждого $i \in \{0,1,2,3,4\}$.*

Определение 3. Эквивалентность η на ω называется вычислимой (позитивной, негативной), если множество $\{\langle x,y\rangle | x = y \pmod{\eta}\}$ является вычислимым (эффективным, коэффективным).

Так как каждое вычислимое множество эффективно, то $\mathrm{eff}(\eta)$-топология, вообще говоря, сильнее $\mathrm{comp}(\eta)$-топологии. Приведем пример максимальногоо различия между этими топологиями. Пусть η — такая неединичная позитивная эквивалентность, что никакое собственное η-замкнутое подмножество ω не является вычислимым (примеры таких эквивалентностей можно найти в [2]). Тогда $\mathrm{comp}(\eta)$-пространство — пространство слипшихся точек, а $\mathrm{eff}(\eta)$-пространство дискретно.

Частными случаями c-эквивалентностей (e-эквивалентностей) являются эквивалентности с вычислимыми (эффективными) смежными классами, следующая характеризация которых очевидна.

Предложение 3 (см. [9]). *Эквивалентность η обладает вычислимыми (эффективными) смежными классами тогда и только тогда, когда $\mathrm{comp}(\eta)$-пространство ($\mathrm{eff}(\eta)$-пространство) дискретно.*

2. Алгоритмические представления универсальных алгебр.

Определение 4. Пусть η — произвольная эквивалентность. Универсальная алгебра (далее — просто алгебра) A сигнатуры Σ называется определимой над η, если существует такая вычислимая Σ-алгебра $(\omega; \Im)$ с основным множеством ω и семейством $\Im$ вычислимых Σ-операций, что η является конгруэнцией вычислимой алгебры $(\omega; \Im)$, фактор-алгебра которой по конгруэнции η изоморфна A (т.е. выполнено $A \cong (\omega/\eta; \Im)$).

Это определение равносильно существованию нумерации алгебры A с нумерационной эквивалентностью равной η. Подчеркнем, что для каждой абстрактной операции алгебры A требуется существование представляющей вычислимой функции, согласованной с нумерационной эквивалентностью. В случае бесконечной сигнатуры обычно требуется также вычислимость семейства $\Im$ в том смысле, что предполагается наличие некоторого эффективного множества α номеров вычислимых функций и регулярной вычислительной процедуры, сопоставляющей каждому имени из α алгоритм вычисления соответствующей функции из $\Im$ (см. [3]). Однако, для большей части наших целей можно не требовать эффективности семейства $\Im$. Те случаи, когда семейство $\Im$ должно быть эффективным будут оговариваться отдельно.

Отметим, что всякая не более чем счетная алгебра эффективной сигнатуры определима над некоторой эквивалентностью, т.е. имеет нумерацию. Например, индуцированную вычислимой геделевской нумерацией γ абсолютно свободной алгебры данной сигнатуры от вычислимого множества порождающих, т.к. всякая алгебра данной сигнатуры является гомоморфным образом абсолютно свободной. Если φ — соответствующий гомоморфизм, то композиция $\varphi\gamma$ и есть искомая нумерация.

Нумерацию алгебры далее будем называть ее алгоритмическим представлением и, для краткости, алгоритмические представления будем называть просто представлениями. Ниже будет показано, что если алгебра A определима над эквивалентностью η (т.е. $A \cong (\omega/\eta; \Im)$) и $\pi(n) = \{n\}/\eta$ есть алгоритмическое представление алгебры A, то все операции, действующие на A, непрерывны как в $\mathrm{comp}(\eta)$-топологии, так и в $\mathrm{eff}(\eta)$-топологии.

Далее, опять-таки для краткости, всякую алгебру, определимую над эквивалентностью η, будем называть η-алгеброй.

Покажем, что классы алгебр, определимых над различными эквивалентостями, также существенно различны. Для этого обозначим через K_η — тип изоморфизмов η-алгебр (сигнатура не фиксирована!) и определим множество $D = \{K_\eta | \eta \text{ бесконечна}\}$.

Теорема 1 (см. [12]). *В $\langle D; \subseteq \rangle$ существует наименьший элемент.*

Суть этой теоремы в следующем. Всякая эквивалентность согласована с функциями константами и проектирующими функциями. Существует такая бесконечная эквивалентность η_0, что всякая вычислимая функция, согласованная с ней, действует на η_0-классах либо как проектирующая, либо как константа. Более того, η_0 не просто существует, но даже позитивна (см. [2]).

Среди алгоритмических представлений алгебр важнейшими являются позитивные и негативные. Например, всякая алгебра, конечно определенная в конечно аксиоматизируемом классе алгебр является позитивной, что равносильно перечислимости проблемы равенства для этой алгебры. При этом, алгоритм перечисления равных слов задается самой системой аксиом и определяющих соотношений, в то время как для вычислимых алгебр, вообще говоря, невозможно получить алгоритм разрешения для равенства слов, исходя из аксиом и определяющих соотношений (см. [15]). Негативные алгебры также весьма естественны и распространены, хотя гораздо менее изучены. Негативны, например, конечно-порожденные группы вычислимых перестановок натурального ряда, вычислимые нумерации семейств вычислимых функций (см. [2]) и многие другие. Однако, с точки зрения определимости алгебр над эквивалентностями, негативные алгебры образуют более богатый класс.

Так, из теоремы 1 следует существование бесконечной позитивной эквивалентности, над которой определимы только абсолютно тривиальные алгебры. Для многих других позитивных эквивалентностей определимые над ними алгебры также образуют довольно обозримые классы. В то же время, над любой негативной эквивалентностью, к примеру, определима конечно-порожденная конгруэнц-простая алгебра (см. [11]). Это обстоятельство обуславливает целесообразность более глубокого изучения негативных систем, особенно на фоне того факта, что вычислимые пространства над негативными представлениями обладают целым рядом замечательных свойств.

3. Структурная характеризация вычислимо отделимых алгебр. Пусть (A,μ) — алгебра вместе с ее представлением μ и K — класс алгебр (однотипных с A) с их представлениями.

Определение 5. Алгебра (A,μ) называется аппроксимируемой K-алгебрами, если для любых двух различных элементов a_0, a_1 алгебры A найдутся такая K-алгебра (B,ν) и гомоморфизм $\varphi : A \to B$, являющийся морфизмом, который различает элементы a_0, a_1 (т.е. $\varphi(a_0) \neq \varphi(a_1)$).

Еще раз подчеркнем, что все рассматриваемые нами гомоморфизмы поддерживаются вычислимыми на номерах функциями, т.е. в определении аппроксимируемости требуется существование такой вычислимой функции f, что $\varphi\mu = \nu f$.

Представление алгебры называется позитивным (негативным, вычислимо отделимым, эффективно отделимым и т. д.), если такова соответствующая представлению эквивалентность.

Теорема 2 (см. [7, 12]). *Алгебра (A,μ) вычислимо отделима тогда и только тогда, когда она аппроксимируется негативными алгебрами.*

Следствие 2. *Всякое вычислимо отделимое представление подпрямо неразложимой алгебры является негативным.*

Следствие 3. *Если η — негативная эквивалентность, то $\mathrm{comp}(\eta)$-пространство вычислимо отделимо и является совершенным T_4-пространством.*

Для позитивных эквивалентностей соответствующие вычислимые пространства, как упоминалось выше, могут быть пространствами слипшихся точек.

Следствие 4. *Пусть A — конгруэнц-простая алгебра и μ — ее представление. Тогда либо μ негативно, либо $\mathrm{comp}(\eta)$-пространство антидискретно ($\eta = \{\langle x, y\rangle | \mu x = \mu y\}$).*

Отметим, что связка «или» в этом предложении является взаимоисключающей (для неодноэлементных алгебр).

Характеристической трансверсалью эквивалентности η называется множество минимальных представителей ее смежных классов, т.е.

$$\mathrm{tr}(\eta) = \big\{x | x = y \pmod{\eta} \to x \leqslant y\big\}.$$

Бесконечное множество α называется иммунным, если оно не содержит бесконечного эффективного подмножества. Иммунные множества и некоторые их важные подклассы являются алгоритмическими аналогами почти-конечности. Оказалось, что они тесно связаны со свойством компактности соответствующих топологических пространств.

Следствие 5. *Всякая алгебра, обладающая вычислимо отделимым представлением с иммунной характеристической трансверсалью является финитно аппроксимируемой* (*т.е. аппроксимируется конечными алгебрами*).

Представление называется эффективно бесконечным, если существует бесконечное эффективное множество, пересечение которого с каждым смежным классом нумерационной эквивалентности не более чем одноэлементно. Бесконечная эквивалентность, не являющаяся эффективно бесконечной, называется неэффективно бесконечной.

Важными объектами общей теории нумераций являются предполные эквивалентности, характеризующиеся тем, что всякая вычислимая функция имеет неподвижную точку по модулю этой эквивалентности (см. [2]).

Предложение 4. *Характеристическая трансверсаль бесконечной предполной эквивалентности иммунна.*

Действительно, если η — бесконечная предполная эквивалентность, а $tr(\eta)$ содержит бесконечное вычислимое подмножество α, то вычислимая функция f, определенная следующими инструкциями, не имеет неподвижной точки по модулю η:

$$f(n) = \min\big\{x \mid x \in \alpha \wedge n < x\big\}.$$

Если же η — предполная и позитивная, то она эффективно бесконечна (см. [12]). Таким образом, даже иммунность $tr(\eta)$ не является достаточным условием неэффективной бесконечности η.

Следствие 6 (см. [6])**.** *Решетка конгруэнций всякой алгебры, определимой над предполной позитивной эквивалентностью η, является континуальной. При этом соответствующее вычислимое пространство тривиально (открытыми в котором являются только $\varnothing$ и ω/η), а эффективное пространство — дискретно.*

Следствие 7. *Пусть A — алгебра и μ — ее вычислимо отделимое представление. Тогда либо A финитно аппроксимируема, либо η эффективно бесконечна ($\eta = \big\{\langle x, y\rangle \mid \mu x = \mu y\big\}$).*

Назовем эквивалентность η вычислимо простой, если не существует нетривиальных η-замкнутых вычислимых подмножеств ω. Соответствено, нумерованная алгебра вычислимо проста, если таково ядро ее представления.

Следствие 8. *Нееединичная эквивалентность η вычислимо проста тогда и только тогда, когда никакая η-алгебра не имеет нетривиальной негативной фактор-алгебры.*

Таким образом, вычислимо простые алгебры и только они являются негативно простыми (т.е. никакой гомоморфный образ, порождаемый морфизмом, не является негативным).

Следствие 9. *Нумерованная конгруэнц-простая алгебра негативна тогда и только тогда, когда она имеет собственное вычислимое подмножество.*

Сказанное в текущем разделе подтверждает исключительную роль негативных алгебр в теории вычислимо отделимых алгебр и вычислимых пространств над представлениями этих алгебр.

4. Примеры вычислимых компактов. Покажем, как можно характеризовать в топологических и алгебраических терминах чисто алгоритмические понятия на примере эквивалентностей следующего вида:

$$\eta(\alpha) = \alpha^2 \cup \mathrm{id}\,\omega.$$

Эквивалентности вида $\eta(\alpha)$ для подходящих коиммунных α оказались весьма полезны как для решения некоторых чисто внутренних вопросов теории вычислимых представлений алгебр, так и с точки зрения приложений в рамках компьютерных наук.

Например, в [14] А. И. Мальцевым была показана вычислимость всякой позитивной конечно порожденной алгебры, обладающей нетривиальными конгруэнциями только конечного индекса. В [5] описано строение невычислимых позитивных универсальных алгебр (в частности, их локальная конечность и гипериммунность характеристической трансверсали), обладающих ненулевыми конгруэнциями лишь конечного индекса, и предъявлены примеры таких алгебр, которые оказались $\eta(\alpha)$-алгебрами для подходящих гиперпростых α. Заметим, что для простых негиперпростых α решетка конгруэнций $\eta(\alpha)$-алгебры континуальна (см. [8]) и потому заведомо не может быть нетеровой (тем более, обладать конгруэнциями только конечного индекса). Отметим почти очевидный факт: для вычислимости позитивной эквивалентности η необходимо и достаточно существование η-алгебры с конечной решеткой конгруэнций.

Другое применение эквивалентностей типа $\eta(\alpha)$ — известная проблема эквациональной специфицируемости в теории абстрактных типов данных, которая формулируется следующим образом (см. [12]): «Всякая ли позитивно представимая конечно порожденная алгебра имеет обогащение, являющееся свободной алгеброй в некотором конечно базируемом многообразии?» В [4] построен пример конечно порожденной $\eta(\alpha)$-алгебры для подходящего эффективного коиммунного α. Поскольку всякое позитивно представимое обогащение такой алгебры финитно аппроксимируемо (см. следствие 5) и, в силу конечной порожденности, а значит и рекурсивной устойчивости, эта алгебра обладает единственным (с точностью до вычислимого изоморфизма) позитивным представлением. Поэтому, последовательно рассматривая все конечные алгебры сигнатуры обогащения на предмет быть моделью конечной системы тождеств, получим вычислимость исходной алгебры, что, разумеется, неверно.

Таким образом, упомянутый пример дал отрицательное решение проблемы эквациональной специфицируемости, показав, что язык тождеств, даже при допущении использования новых вычислимых функций, является недостаточно выразительным для адекватного описания всех абстрактных структур данных. Общий метод построения таких алгебр приведен в [10].

Другие приложения эквивалентностей вида $\eta(\alpha)$ можно найти в [2, 12].

Сказанное подтверждает важность и полезность эквивалентностей вида $\eta(\alpha)$, в особенности для коиммунных α.

В приведенных выше примерах алгебр принципиально важна их финитная аппроксимируемость, что обеспечивается почти-конечностью иммунных множеств. Это алгоритмическое понятие оказалось равносильным компактности соответствующего вычислимого пространства.

Теорема 3 (см. [9, 12]). *Для произвольного $\alpha \subseteq \omega$ следующие условия эквивалентны*:

1) *α коконечно или коиммунно*;
2) *Всякая $\eta(\alpha)$-алгебра финитно аппроксимируема*;
3) $\mathrm{comp}\,\big(\eta(\alpha)\big)$*-пространство — компакт.*

3. Эффективные пространства

1. Эффективные топологические пространства Зарисского. Легко понять, что фундаментальное различие между $\mathrm{comp}(\eta)$-пространством и $\mathrm{eff}(\eta)$-пространством заключается в том простом факте, что дополнения вычислимых множеств также вычислимы, и это обуславливает наличие для вычислимой топологии базы, состоящей из открыто-замкнутых η-замкнутых подмножеств ω. Иное дело — эффективные топологии. Упомянутый выше классический пример связного двоеточия показывает, что эффективно отделимые пространства могут быть даже не T_1-отделимыми, в отличие от вычислимо отделимых пространств, которые всегда нормальны.

Будем понимать под пространством Зарисского счетно-бесконечное множество (т. к. все рассматриваемые нами множества и алгебры не более чем счетны), в котором открытыми являются $\varnothing$ и все коконечные подмножества основного множества. Разумеется, $\mathrm{comp}(\eta)$-пространство не может быть пространством Зарисского ни для какой c-эквивалентности η, хотя бы потому, что оно T_2-отделимо. Для e-эквивалентностей ситуация противоположная.

Теорема 4 (см. [12]). *Существует бесконечная эквивалентность η, обладающая следующим свойством: всякое непустое η-замкнутое подмножество ω эффективно тогда и только тогда, когда его дополнение состоит из конечного числа классов η-эквивалентности.*

Следствие 10. *Существует T_1-отделимое нехаусдорфово $\mathrm{eff}(\eta)$-пространство для подходящей e-эквивалентности η.*

В связи с этим фактом возникает естественный вопрос о существовании такой e-эквивалентности η, что $\mathrm{eff}(\eta)$-пространство является хаусдорфовым, но нерегулярным.

Поскольку рассматриваемые нами объекты счетны, то всякое T_3-пространство является также и T_4-пространством.

Таким образом, в случае эффективно отделимых эквивалентностей можно указать эффективно отделимые пространства, являющиеся T_0-, но не T_1-пространствами (связное двоеточие) и T_1-отделимые нехаусдорфовы пространства. T_3-пространства в рассматриваемых нами случаях всегда будут T_4-пространствами, а вопрос о существовании хаусдорфовых нерегулярных пространств в настоящее время открыт.

2. Непрерывность. Очевидно, что все одноместные операции нумерованной алгебры, представляемые в данной нумерации подходящими одноместными вычислимыми функциями, являются непрерывными как в вычислимой, так и в эффективной топологии, т.к. прообраз вычислимого (эффективного) множества является таковым же. Точно так же непрерывен любой гомоморфизм нумерованных алгебр (являющийся морфизмом).

Непрерывность многоместных операций не столь очевидна. Однако, имеет место следующая теорема.

Теорема 5. *Операции любой нумерованной алгебры непрерывны в вычислимо (эффективно) порожденном пространстве.*

Доказательство. Пусть $(\omega/\eta;\Im)$ — произвольная η-алгебра (т.е. алгебра, определимая над η). Заметим, что мы не предполагаем эффективности семейства $\Im$ вычислимых функций, для которых η является конгруэнцией. Допустим, что $f \in \Im$ и число аргументов n операции f не меньше 2. Зафиксируем набор $\overline{x} = \langle x_1, \dots, x_n\rangle$. Нужно показать, что для любого η-замкнутого вычислимого (эффективного) множества Y, содержащего число $f(x_1, \dots, x_n)$, существуют такие η-замкнутые вычислимые (соответственно эффективные) множества $X_1 \ni x_1, \dots, X_n \ni x_n$, что $f(X_1, \dots, X_n) \subseteq Y$. Для этого возьмем полный f-прообраз X множества Y, т.е. $X = \{\overline{u} | f(\overline{u}) \in Y\}$. Очевидно, что X — непустое вычислимое (эффективное) множество кортежей длины n, если вычислимо (соответственно, эффективно) множество Y. Зафиксируем любую геделевскую нумерацию всех наборов из ω^n.

Рассмотрим сначала случай вычислимого Y. Будем строить множества $X_1, \dots, X_n$ и $Z \subseteq X$ следующим образом:

Шаг 0. $X_1^0 = \{x_1\}, \dots, X_n^0 = \{x_n\}$ и $Z^0 = \varnothing$.

Шаг $s+1$. Пусть $\overline{z} = \langle z_1, \dots, z_n\rangle$ — первый кортеж из множества X, не принадлежащий множеству $X_1^s \times \dots \times X_n^s \cup Z^s$. Если

$$(X_1^s \cup \{z_1\}) \times \dots \times (X_n^s \cup \{z_n\}) \subseteq X,$$

то полагаем

$$X_1^{s+1} = X_1^s \cup \{z_1\}, \quad \dots, \quad X_n^{s+1} = X_n^s \cup \{z_n\}, \quad Z^{s+1} = Z^s.$$

При этом, может оказаться, что $X_i^{s+1} = X_i^s \cup \{z_i\}$ для некоторых $1 \leqslant i \leqslant n$; в противном случае $X_1^{s+1} = X_1^s, \dots, X_n^{s+1} = X_n^s$ и $Z^{s+1} = Z^s \cup \{\overline{z}\}$. Конец шага $s+1$.

Теперь положим

$$X_k = \bigcup_{s\in\omega} X_k^s, \quad 1 \leqslant k \leqslant n, \qquad Z = \bigcup_{s\in\omega} Z^s.$$

По построению, вычислимое множество X распадается на две перечислимые дизъюнктные части — $X_1 \times \dots \times X_n$ и Z, откуда следует вычислимость прямого произведения. Заметим, что оба эти множества η-замкнуты, при этом, если какой-то набор $\langle z_1, \dots, z_n\rangle$ на некотором шаге распределяется по X_k, $1 \leqslant k \leqslant n$ (т.е. $z_1 \in X_1, \dots, z_n \in X_n$), то все наборы, η-эквивалентные этому набору, появляющиеся на более поздних шагах, распределяются таким же образом. Корректность конструкции легко показать индукцией по шагам построения.

Для эффективного Y ситуация несколько сложнее, так как в этом случае нужно учитывать тот факт, что наборы из $\omega^n \setminus X$ эффективно не распознаваемы, однако, общая идея такая же, как и в вычислимом случае.

Будем говорить, что набор $\overline{z} = \langle z_1, \dots, z_n \rangle$ использовался до шага $s+1$, если

$$\overline{z} \in X_1^s \times \dots \times X_n^s \subseteq X^s,$$

где X^s обозначает первые s элементов множества X в некотором фиксированном эффективном пересчете этого множества. В противном случае, набор назовем не использованным до шага $s+1$.

Шаг 0. $X_1^0 = \{x_1\}, \dots, X_n^0 = \{x_n\}$.

Шаг $s+1$. Берем все наборы $\overline{z} = \langle z_1, \dots, z_n \rangle$ из X^{s+1}, не использованные до шага $s+1$, и проверяем каждый из них на наличие следующего свойства:

$$(X_1^s \cup \{z_1\}) \times \dots \times (X_n^s \cup \{z_n\}) \subseteq X^{s+1}.$$

Если такие наборы есть, то выбираем из них набор с наименьшим номером, скажем, $\langle z_1^*, \dots, z_n^* \rangle$, и полагаем, так же, как и в вычислимом случае,

$$X_1^{s+1} = X_1^s \cup \{z_1^*\}, \quad \dots, \quad X_n^{s+1} = X_n^s \cup \{z_n^*\};$$

иначе переходим к следующему шагу. Конец шага $s+1$.

Как и для вычислимого случая, определим предельные множества. Далее, используя свойства построения и индукцию по шагам, нетрудно заметить, что эффективно строящиеся множества $X_1, \dots, X_n$ таковы, что каждое из них η-замкнуто, а их прямое произведение лежит в X и потому переводится функцией f в множество Y. □

Следовательно, все операции любой алгебры, заданной любым представлением, непрерывны и относительно вычислимой, и относительно эффективной топологий. При этом, перечислимость семейства представляющих вычислимых функций не предполагается.

3. Характеризация эффективно отделимых алгебр. В этом разделе семейство вычислимых функций, представляющих операции нумерованной алгебры в данном представлении, предполагается перечислимым, т.е. по номеру/имени функции можно автоматически на основе некоторой заранее заданной эффективной процедуры, переходить к алгоритму ее вычисления (мы намеренно называем это семейство перечислимым, чтобы не перегружать текст выражениями типа «эффективное семейство вычислимых функций, эффективно представляющих операции алгебры в вычислимой нумерации», поскольку вездесущие прилагательные «вычислимый» и «эффективный» используются в теории алгоритмов в различных смыслах).

Пусть задано семейство эффективных множеств Ω. Будем называть его перечислимым, если существует такая его нумерация $\chi : \omega \to \Omega$, что множество $\{\langle x, n \rangle | x \in \chi(n)\}$ является эффективным. Иными словами, неформально, имея номер множества из семейства Ω мы фактически получаем алгоритм порождения элементов этого множества.

Определение 6. Представление μ с нумерационной эквивалентностью η алгебры A называется равномерно эффективно отделимым, если существует такое перечислимое семейство эффективных η-замкнутых множеств, что для всякой пары различных элементов алгебры A найдется множество из этого семейства, μ-образ которого содержит один из этих элементов и не содержит другой.

Очевидно, что из равномерно эффективной отделимости следует эффективная отделимость. Обратное, разумеется, неверно. Отметим, что несмотря на внешнее сходство определений эффективная отделимость и равномерно эффективная отделимость принципиально различные понятия. Так, например, для всякого α, отличного от ω, эквивалентность $\eta(\alpha)$ вычислимо (тем более эффективно) отделима, поэтому число таких эквивалентностей — континуум. Равномерно эффективно отделимых эквивалентностей же не больше, чем соответствующих отделяющих перечислимых семейств, которых, в свою очередь, не более нежели определяющих их алгоритмов. Число последних есть ω. Более того, в арифметической иерархии (сложности алгоритмов) позитивные нумерации задаются проекциями подходящих вычислимых отношений (т.е. $\exists$-формулами), негативные — дополнениями позитивных ($\forall$-формулами), а равномерно эффективно отделимые являются собственным подклассом индуктивного Π^0_2-класса (задаются $\forall\exists$-формулами). В частности, и позитивные, и негативные эквивалентности являются равномерно эффективно отделимыми. Поэтому равномерно эффективно отделимых эквивалентностей не просто счетное число, они к тому же расположены на самых нижних этажах арифметической иерархии (см. [2]).

Следующий факт сводит изучение эффективно отделимых нумераций алгебр к их равномерно эффективно отделимым гомоморфным образам.

Теорема 6 (см. [13]). *Нумерованная алгебра эффективно отделима тогда и только тогда, когда она аппроксимируется равномерно эффективно отделимыми алгебрами.*

Напомним, что все рассматриваемые нами гомоморфизмы являются эффективными на номерах.

Таким образом, роль и место равномерно эффективно отделимых алгебр в классе эффективно отделимых родственна роли и месту негативных алгебр в классе рекурсивно отделимых. При этом, как показывает теорема 6, наиболее общая концепция эффективной отделимости, определяемая теоремой Ю. Л. Ершова о вычислимых нумерациях (см. [2]), дает готовый математический аппарат для развития структурной теории эффективно отделимых алгебр.

Следствие 11. *Эффективно отделимая нумерация подпрямо неразложимой алгебры равномерно эффективно отделима.*

Определение 7. Нееденичная эквивалентность η на ω называется квазисовершенной, если не существует собственных η-замкнутых эффективных подмножеств множества ω.

На языке эффективно порожденных пространств квазисовершенность означает, что соответствующее эффективно порожденное пространство (с естественной нумерацией — каждое число нумерует содержащий его класс эквивалентности) является пространством слипшихся точек. Точно так же, вычислимая простота эквивалентности равносильна тому, что соответствующее вычислимо порожденное пространство антидискретно.

Следствие 12. *Неединичная эквивалентность квазисовершенна тогда и только тогда, когда никакая определимая над ней алгебра не обладает равномерно эффективно отделимой фактор-алгеброй.*

Предложение 5. *Нумерованная простая алгебра равномерно эффективно отделима тогда и только тогда, когда она имеет собственное перечислимое подмножество.*

Следствие 13. *Всякая нумерация простой алгебры либо квазисовершенна, либо ядро ее нумерации совпадает с ядром некоторой вычислимой (в смысле Ю. Л. Ершова) нумерации.*

Следствие 14. *Для нумерованной простой алгебры эффективная отделимость перечислимого топологического пространства равносильна его нетривиальности.*

Завершим подраздел следующим неожиданным фактом.

Теорема 7 (см. [13]). *Всякое эффективно отделимое представление алгебры с артиновой решеткой конгруэнций является равномерно эффективно отделимым.*

Отметим, что для алгебр с нетеровыми решетками конгруэнций эта теорема не имеет места.

4. Равномерно эффективная T_1-отделимость. Рассмотрим некоторые усиления условия эффективной отделимости нумерации, которые, во многих естественных случаях, оказываются достаточными для ее равномерно эффективной отделимости и даже негативности.

Выше мы рассматривали эффективно отделимые представления, которые естественно назвать эффективно T_0-отделимыми. Попытка усиления понятия эффективной отделимости приводит к следующему определению.

Определение 8. Нумерация называется эффективно T_1-отделимой (T_2-отделимой), если для всякой пары натуральных чисел, различных по модулю ее нумерационной эквивалентности, найдется эффективная окрестность первого числа, не содержащая второе, и эффективная окрестность второго, не содержащая первое (найдутся непересекающиеся эффективные окрестности этих чисел).

Определение 9. Нумерация называется равномерно эффективно T_1-отделимой (T_2-отделимой), если для нее существует перечислимое семейство T_1-отделяющих (T_2-отделяющих) множеств.

Для T_1-отделимых (T_2-отделимых) нумераций естественно возникает вопрос о справедливости усиленных аналогов теоремы 6:

Всякая ли эффективно T_1-отделимая (T_2-отделимая) нумерованная алгебра аппроксимируется равномерно эффективно T_1-отделимыми (T_2-отделимыми)?

Теорема 8 (см. [13]). *Существует эффективно T_1-отделимое, но не T_2-отделимое нумерованное множество, никакое фактор-множество которого не является равномерно эффективно T_1-отделимым.*

Простейшими примерами эффективно T_2-отделимых нумераций являются позитивные и негативные нумерации.

Предложение 6 (см. [13]). *Существует эффективно T_2-отделимое нумерованное множество, никакое фактор-множество которого не является равномерно эффективно T_2-отделимым.*

Два последних следствия дополнительно подчеркивают фундаментальную роль теоремы Ю. Л. Ершова о вычислимых нумерациях с точки зрения теории нумерованных алгебр, т. к. для приведенных выше естественных усилений аксиом отделимости теорема об аппроксимации эффективно T_1-отделимых (T_2-отделимых) алгебр равномерно эффективно T_1-отделимыми (T_2-отделимыми) неверна. Заметим, что нумерованные множества, построенные выше, тривиально аппроксимируются равномерно эффективно T_0-отделимыми — связными двоеточиями.

4. Эффективность и компактность

1. Бесконечные компактные расширения. Следующее утверждение полезно для обозрения всех η_1-замкнутых расширений эквивалентности η_0.

Предложение 7. *Если α является η_1-замкнутым множеством и η_1 является расширением η_0, то α и η_0-замкнуто (т.е. свойство замкнутости наследуемо «вниз» относительно «расщеплений» эквивалентностей).*

В самом деле, если α является η_1-замкнутым, $x \in \alpha$ и $x = y \pmod{\eta_0}$, то, поскольку $\eta_0 \subseteq \eta_1$, получим, что $y \in \alpha$.

Априори, эффективно отделимые компактные пространства казались довольно редкими объектами. Следующее утверждение показывает, что это не так.

Теорема 9. *Всякая бесконечная эквивалентность на ω имеет такое бесконечное расширение, эффективное (вычислимое) фактор-пространство по модулю которого является компактным.*

Доказательство. Пусть η — бесконечная эквивалентность. Обозначим через $\{t_0 < t_1 < \dots\}$ ее характеристическую трансверсаль, выписанную в порядке строгого возрастания. Положим $\alpha_0 = \{t_0\}/\eta$, т.е. α_0 — это смежный η-класс, содержащий число 0.

Определение 10 (см. [2]). η-Замкнутое множество называется η-бесконечным (η-конечным), если оно состоит из бесконечного (конечного) числа смежных классов эквивалентности η.

Следующее утверждение представляет самостоятельный интерес.

Лемма 1. *Пусть Σ — счетное семейство η-замкнутых множеств, их дополнения η-бесконечны. Тогда существует такое бесконечное расширение η^* эквивалентности η, что никакое η^*-замкнутое надмножество α_0 не является Σ-множеством (т.е. множеством из Σ).*

Доказательство. Пусть $\Sigma = \{\sigma_0, \sigma_1, \dots\}$. Будем строить возрастающую последовательность η-замкнутых и η-конечных множеств $\delta_0, \delta_1, \dots$ следующим образом.

Шаг 0. Так как σ_0 является η-кобесконечным, то существуют такие k и l, что $t_k \notin \sigma_0 \wedge t_l \notin \sigma_0$. Выберем среди таких чисел наименьшее (t_{k_0}) и следующее после наименьшего (t_{l_0}) и определим $\delta_0 = \alpha_0 \cup \{t_{k_0}\}/\eta$ (сразу отметим, что t_{l_0} никогда не попадет в строящееся объединение $\bigcup\limits_{n\in\omega} \sigma_n$).

Шаг $n+1$. Этот шаг посвящен добавлению некоторого η-класса, являющегося подмножеством $\omega \setminus \sigma_{n+1}$ в $\bigcup\limits_{n\in\omega} \sigma_n$ с гарантированным невключением в это объединение какого-то другого η-класса, входящего в $\omega \setminus \sigma_{n+1}$ (последнее нужно, чтобы η^* имела бесконечное число смежных классов). Пусть $\big\{\langle t_{k_0}, t_{l_0}\rangle, \dots, \langle t_{k_n}, t_{l_n}\rangle\big\}$ — все упорядоченные пары трансверсальных чисел, использовавшихся для включения (t_{k_i}) в построенные $\sigma_0, \dots, \sigma_n$. Выберем такие $t_{k_{n+1}} < t_{l_{n+1}}$, что оба эти числа трансверсальны, принадлежат $\omega \setminus \sigma_{n+1}$ и $t_{k_{n+1}}$ больше всех ранее использованных. Положим теперь $\delta_{n+1} = \delta_n \cup \{t_{k_{n+1}}\}/\eta$. Конец шага $n+1$.

Введем обозначение $\delta = \bigcup\limits_{n\in\omega} \sigma_n$. Пусть выполнено равенство

$$\eta^* = \eta \cup \{\langle x, y\rangle | x, y \in \delta\}.$$

Конструкция обеспечивает «склейку» бесконечного числа η-классов в один η^*-класс, содержащий число t_0 ($= 0$). При этом, все η^*-классы вне множества δ совпадают с η-классами и число этих классов бесконечно. Наконец, никакое η^*-замкнутое расширение класса $\{t_0\}/\eta^* = \delta$ не является Σ-расширением, т. к. δ имеет непустое пересечение с дополнением каждого $\sigma_m \in \Sigma, m \in \omega$. □

Согласно этой лемме, например, для семейства всех η-перечислимых кобесконечных множеств можно построить такое бесконечное расширение η^* для η, что все η-перечислимые расширения некоторого η^*-класса β будут η^*-коконечны, т.е. η^*/ω-пространство будет компактным. При этом, все η-замкнутые перечислимые кандидаты на окрестности β с бесконечными дополнениями нами ликвидированы, а новым η^*-замкнутым множествам взяться неоткуда, т.к. всякое η^*-замкнутое множество является одновременно и η-замкнутым (из предложения 7). Таким образом, фактор-пространство ω/η^* компактно относительно топологии, порожденной эффективными множествами. Для вычислимо порожденных топологий ситуация аналогичная. □

Заметим, что эффективное η^*-пространство, являющееся компактным, может и не быть компактом (например, эффективное пространство Зарисского).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гончаров С. С., Ершов Ю. Л.* Конструктивные модели. — Новосибирск: Научная книга, 1999.
2. *Ершов Ю. Л.* Теория нумераций. — М.: Наука, 1977.
3. *Ершов Ю. Л.* Проблемы разрешимости и конструктивные модели. — М.: Наука, 1980.
4. *Касымов Н. Х.* Об алгебрах с финитно аппроксимируемыми позитивно представимыми обогащениями// Алгебра и логика. — 1987. — *26*, № 6. — С. 715–730.
5. *Касымов Н. Х.* Позитивные алгебры с конгруэнциями конечного индекса// Алгебра и логика. — 1991. — *30*, № 3. — С. 293–305.
6. *Касымов Н. Х.* Позитивные алгебры со счетными решетками конгруэнций// Алгебра и логика. — 1992. — *31*, № 1. — С. 21–37.
7. *Касымов Н. Х.* О гомоморфизмах на негативные алгебры// Алгебра и логика. — 1992. — *31*, № 2. — С. 132–144.

8. *Касымов Н. Х.* О числе конгруэнций алгебр над простыми множествами// Мат. заметки. — 1992. — *51*, № 3. — С. 150–152.
9. *Касымов Н. Х.* Аксиомы отделимости и разбиения натурального ряда// Сиб. мат. ж. — 1993. — *34*, № 3. С. 81–85.
10. *Касымов Н. Х.* Нумерованные алгебры с равномерно рекурсивно отделимыми классами// Сиб. мат. ж. — 1993. — *34*, № 5. — С. 85–102.
11. *Касымов Н. Х.* Об алгебрах над негативными эквивалентностями// Алгебра и логика. — 1994. — *33*, № 1. — С. 76–80.
12. *Касымов Н. Х.* Рекурсивно отделимые нумерованные алгебры// Усп. мат. наук. — 1996. — *51*, № 3. — С. 145–176.
13. *Касымов Н. Х.* О гомоморфизмах на эффективно отделимые алгебры// Сиб. мат. ж. — 2016. — *57*, № 1. — С. 47–66.
14. *Мальцев А. И.* Конструктивные алгебры (I)// Усп. мат. наук. — 1961. — *16*, № 3. — С. 3–60.
15. *Мальцев А. И.* Алгоритмы и рекурсивные функции. — М.: Наука, 1986.
16. *Успенский В. А.* О вычислимых операциях// Докл. АН СССР. — *103*, № 5. — С. 773–776.
17. *Успенский В. А.* Системы перечислимых множеств и их нумерации// Докл. АН СССР. — 1955. — *105*, № 6. — С. 1155–1158.

Н. Х. Касымов
Национальный университет Узбекистана им. М. Улугбека, Ташкент, Узбекистан
E-mail: `nadim59@mail.ru`

И. А. Ходжамуратова
Национальный университет Узбекистана им. М. Улугбека, Ташкент, Узбекистан
E-mail: `indiraazatovna@mail.ru`

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 144 (2018). С. 30–38

УДК 517.956.32

РАЗРЕШИМОСТЬ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ С ИНТЕГРАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

© 2018 г. **О. С. ЗИКИРОВ, Д. К. ХОЛИКОВ**

Аннотация. В работе исследуется разрешимость смешанной задачи с интегральным условием для уравнения третьего порядка с волновым оператором в главной части. С помощью метода Римана доказаны существование и единственность классического решения исследуемой задачи.

Ключевые слова: функция Римана, задача Гурса, нелокальное условие, гиперболическое уравнение, интегральное уравнение, условия разрешимости.

AMS Subject Classification: 35K25, 35K70, 35R35

1. Введение. В данной работе изучается нелокальная задача с интегральным условием для линейных гиперболических уравнений третьего порядка с переменными коэффициентами. Доказательство существования классического решения поставленной задачи осуществляется методом Римана.

В области $D = \{(x,y):\ 0 < x < l,\ 0 < y < h\}$ рассмотрим гиперболическое уравнение третьего порядка

$$Mu \equiv \left(\alpha\frac{\partial}{\partial x} + \beta\frac{\partial}{\partial y}\right)u_{xy} + Lu = g(x,y), \tag{1}$$

где α, β — заданные постоянные числа, причем $\alpha^2+\beta^2 \neq 0$, а L — линейное дифференциальное выражение вида

$$Lu \equiv a(x,y)u_{xx} + 2b(x,y)u_{xy} + c(x,y)u_{yy} + d(x,y)u_x + e(x,y)u_y + f(x,y)u,$$

которое относится к третьему каноническому виду относительно старших производных, указанных в [5], так как семейства характеристик уравнения (1) являются действительными и различными. Этот фактор существенно влияет как на корректность постановки задач, так и на их разрешимость.

Заметим, что уравнения в частных производных третьего порядка лежат в основе математических моделей различных физических явлений и процессов. Многие задачи, связанные с динамикой почвенной влаги и грунтовой воды [1, 6], распространением акустических волн в слабонеоднородных средах [14] приводятся к краевым задачам для гиперболического уравнения третьего порядка.

Например, уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \rho\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t)$$

описывает распространение линейных акустических волн в среде с дисперсией [3], где ρ — числовой параметр, принадлежащий интервалу $(0,1)$.

Уравнение (1) представляет собой объединение в виде одной формулы двух вариантов обобщенного псевдопараболического уравнения Аллера, частные случаи которого исследовались, например, в работах [2, 7, 11, 15].

Смешанные задачи с интегральными условиями для уравнений в частных производных гиперболического типа были рассмотрены в работах [10–12], но при этом, в основном исследовались уравнения второго порядка, как в одномерных [12], так и многомерных [10] областях.

В настоящей работе изучается смешанная задача с интегральным условием для линейных гиперболических уравнений третьего порядка с переменными коэффициентами.

Без ограничения общности, будем считать, что $\alpha > 0$ и $\beta > 0$. Действительно, если $\alpha < 0,\ \beta > 0$ или $\alpha > 0,\ \beta < 0$, то заменив независимую переменную x на $1-\xi$ или y на $1-\eta$, можно редуцировать рассматриваемые выражения к случаю $\alpha > 0$ и $\beta > 0$.

2. Постановка задачи и основные результаты. Для уравнения (1) изучается следующая задача.

Задача 1. Найти в области D решение $u(x,y)$ уравнения (1), удовлетворяющее начальным

$$u(x,0) = \varphi_1(x), \quad u_y(x,0) = \varphi_2(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{2}$$

и интегральным условиям

$$u(0,y) = \lambda(y)\int\limits_0^l u(x,y)dx + \int\limits_0^y \rho(y,\eta)u(l,\eta)d\eta + \mu_1(y), \quad 0 \leqslant y \leqslant h, \tag{3}$$

и условию Неймана при $x = 0$, т.е.

$$u_x(0,y) = \mu_2(y), \quad 0 \leqslant y \leqslant h, \tag{4}$$

где $\varphi_i(x)$, $\mu_i(y)$, $i = 1,2$, $\lambda(y)$ и $\rho(y,\eta)$ — заданные функции, удовлетворяющие условиям согласования:

$$\varphi_1'(0) = \mu_2(0), \quad \varphi_1(0) = \lambda(0)\int\limits_0^l \varphi_1(x)dx + \mu_1(0),$$

$$\varphi_2(0) = \lambda'(0)\int\limits_0^l \varphi_1(x)dx + \lambda(0)\int\limits_0^l \varphi_2(x)dx + \rho(0,0)\varphi_1(l) + \mu_1'(0).$$

В поставленной задаче в краевых условиях содержится нелокальность по времени, впервые рассмотренная в [9]. Введем некоторые необходимые для дальнейшего обозначения и определения. Через $C^{k,l}(D)$ обозначен класс функций $u(x,y)$, непрерывных вместе со своими частными производными порядка $\partial^{m+n}u(x,y)/\partial x^m \partial y^n$ для всех $m = \overline{0,k}$, $n = \overline{0,l}$, $C^{k,0}(D) = C^{0,k}(D) = C^k(D)$ и $C^{0,0}(D) = C(D)$. Под классом $C^{(k,\nu)}(D)$ понимаются определенные в области D функции, у которых все частные производные порядка k существуют и удовлетворяют условию Гельдера с показателем ν, $0 < \nu < 1$.

Определение 1. Регулярным в области D решением уравнения (1) называется действительная функция $u(x,y)$, из класса $C^{2,1}(D) \cap C^{1,2}(D) \cap C^{1,1}(\overline{D})$, удовлетворяющая ему в обычном смысле.

Задачу (1)–(4) исследуем в пространстве $C^{2,1}(D) \cap C^{1,2}(D) \cap C^{1,1}(\overline{D})$; при этом будем требовать выполнения следующих условий.

Условие 1. Коэффициенты уравнения (1) удовлетворяют условиям

$$a(x,y) \in C^{1,0}(\overline{D}) \cap C^{2,0}(D), \quad b(x,y) \in C^{1,0}(\overline{D}) \cap C^{0,1}(\overline{D}) \cap C^{1,1}(D),$$
$$c(x,y) \in C^{0,1}(\overline{D}) \cap C^{0,2}(D), \quad d(x,y) \in C^{0,0}(\overline{D}) \cap C^{1,0}(D),$$
$$e(x,y) \in C^{0,0}(\overline{D}) \cap C^{0,1}(D), \quad f(x,y) \in C^{0,0}(D);$$

кроме того, $d(x,y) < 0$, $e(x,y) < 0$ для любых $(x,y) \in D$.

Условие 2. Заданные функции $\varphi_i(x)$, $\mu_i(y)$, $(i=1,2)$ и $g(x,y)$ удовлетворяют условиям

$$\varphi_i(x)\in C^2[0,l], \mu_i(y)\in C^1[0,h], (i=1,2); \quad \lambda(y)<0, \forall y\in[0,h]; \quad g(x,y)\in C^{(1,\nu)}(\overline{D});$$

кроме того, $g(x,0)=g(0,y)=0$.

Ключевой в работе является следующая теорема о разрешимости нелокальной задачи (1)–(4).

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* 1 *и* 2. *Тогда нелокальная задача* (1)–(4) *разрешима и притом единственным образом.*

Доказательство теоремы (1) использует методики исследования краевых задач для псевдопараболических уравнений, изложенные в [2, 15].

3. Функция Римана и ее некоторые свойства. Рассмотрим оператор M^*, сопряженный с оператором M:

$$M^*v \equiv -\left(\alpha\frac{\partial}{\partial x}+\beta\frac{\partial}{\partial y}\right)v+L^*v, \tag{5}$$

где

$$L^*v\equiv (av)_{xx}+(2bv)_{xy}+(cv)_{yy}-(dv)_x-(ev)_y+fv=0.$$

Очевидно, что оператор M^* определен на функциях $v(x,y)$, имеющих следующую гладкость $v(x,y)\in C^{1,1}(\overline{D})$, $v(x,y)\in C^{2,1}(D)$ и $v(x,y)\in C^{1,2}(D)$.

Определение 2. *Функцией Римана* $v(x,y)=v(x,y;\xi,\eta)$ для уравнения (1) называется функция, являющаяся регулярным решением следующей задачи:

$$M^*v \equiv -\left(\alpha\frac{\partial}{\partial x}+\beta\frac{\partial}{\partial y}\right)v+L^*v=0, \tag{6}$$

$$v(\xi,y;\xi,\eta)=\omega_1(\xi,y), \quad v_x(\xi,y;\xi,\eta)=\exp\left(-\frac{1}{\alpha}\int\limits_{\eta}^{y}a(\xi,t)dt\right), \tag{7}$$

$$v(x,\eta;\xi,\eta)=\omega_2(x,\eta), \quad v_y(x,\eta;\xi,\eta)=\exp\left(-\frac{1}{\beta}\int\limits_{\xi}^{x}c(t,\eta)dt\right); \tag{8}$$

здесь (ξ,η) — произвольная фиксированная точка из замкнутой области D, а функции $\omega_1(\xi,y)$ и $\omega_2(x,\eta)$ являются решениями следующих задач Коши соответственно:

$$\beta\omega_{1tt}(\xi,y)-b(\xi,y)\omega_{1t}(\xi,y)+d(\xi,y)\omega_1(\xi,y)=0, \quad \omega_1(\xi,y)|_{y=\eta}=0, \quad \beta\omega_{1y}(\xi,y)|_{y=\eta}=1; \tag{9}$$

$$\alpha\omega_{2xx}(x,\eta)-b(x,\eta)\omega_{2x}(x,\eta)+e(x,\eta)\omega_2(x,\eta)=0, \quad \omega_2(x,\eta)|_{x=\xi}=0, \quad \alpha\omega_{2x}(x,\eta)|_{x=\xi}=1. \tag{10}$$

Очевидно, задачи (9) и (10) однозначно разрешимы.

Теорема 2. *Если выполнено условие* 1, *то функция Римана* $v(x,y)=v(x,y;\xi,\eta)$ *уравнения* (1) *существует и единственна.*

Доказательство. Пусть решение задачи (6)–(10) — функция $v(x,y)$ — существует. Интегрируя уравнение (7) по x в пределах от ξ до x, по y от η до y, и пользуясь первыми условиями из (7), (8), а также условиями (9) и(10), имеем

$$-\left(\alpha\frac{\partial}{\partial x}+\beta\frac{\partial}{\partial y}\right)v(x,y)+\int\limits_{\xi}^{x}\int\limits_{\eta}^{y}L^*v(\xi_1,\eta_1)d\eta_1 d\xi_1=\alpha+\beta. \tag{11}$$

Некоторые слагаемые в левой части (11) преобразуем интегрированием по частям и пользуясь равенствами

$$\alpha v_{xy}+a(x,y)v_x=0; \quad \beta v_{xy}+c(x,y)v_t=0,$$

которые следуют из равенств (7), (8), после чего получим

$$\left(\alpha\frac{\partial}{\partial x}+\beta\frac{\partial}{\partial y}\right)v(x,y)=\frac{1}{2}\,K_0v(x,y)+\gamma(x,y); \tag{12}$$

здесь

$$K_0v(x,y)=2b(x,y)v(x,y)+\int\limits_{\xi}^{x}\left[c_\xi(\xi_1,y)-e(\xi_1,y)\right]v(\xi_1,y)d\xi_1+$$

$$+\int\limits_{\eta}^{y}\left[a_x(x,\eta_1)-d(x,\eta_1)\right]v(x,\eta_1)d\eta_1+\int\limits_{\xi}^{x}\int\limits_{\eta}^{y}f(\xi_1,\eta_1)v(\xi_1,\eta_1)d\xi_1d\eta_1,$$

$$\gamma(x,y)=-(\alpha+\beta)+\alpha\exp\left(-\frac{1}{\alpha}\int\limits_{\eta}^{y}a(\xi,\eta_1)d\eta_1\right)+\beta\exp\left(-\frac{1}{\beta}\int\limits_{\xi}^{x}c(\xi_1,\eta)d\xi_1\right).$$

Основываясь на представлении общего решения уравнения (12), для определения функции $v(x,t)$ приходим к интегральному уравнению

$$v(x,y)=\frac{1}{2(\alpha^2+\beta^2)}\int\limits_{\beta x-\alpha y}^{\alpha x+\beta y}K_0v(\bar{x}(s),\bar{t}(s))ds+\gamma_1(x,y), \tag{13}$$

где

$$\bar{x}(s)=\frac{1}{\alpha^2+\beta^2}\left(\beta^2x-\alpha\beta y+\alpha s\right),\quad \bar{y}(s)=\frac{1}{\alpha^2+\beta^2}\left(-\alpha\beta x+\alpha^2y+\beta s\right),$$

$\gamma_1(x,y)$ — известная функция. Таким образом, задача (7)–(10) для уравнения (6) эквивалентна интегральному уравнению (13).

Нетрудно убедиться, что интегральный оператор

$$Kv=\frac{1}{2(\alpha^2+\beta^2)}\int\limits_{\beta x-\alpha y}^{\alpha x+\beta y}K_0v(\bar{x}(s),\bar{t}(s))ds+\gamma(x,y)$$

действует из $C(\overline{D})$ в $C(\overline{D})$ с нормой $\|v\|=\max\limits_{\overline{D}}|v(x,t)|$.

Введем обозначение $N=max\{k_1,\ k_2,\ k_3,\ k_4\}$, где

$$k_1=\max_{\overline{D}}|c_y(x,y)-e(x,y)|,\quad k_2=\max_{\overline{D}}|a_x(x,y)-d(x,y)|,$$

$$k_3=\max_{\overline{D}}|f(x,y)|,\quad k_4=\max_{\overline{D}}|2b(x,y)|.$$

Если $v_1(x,y)$ и $v_2(x,y)$ — произвольные элементы из $C(\overline{D})$, то для $v(x,y)=v_1(x,y)-v_2(x,y)$ верна оценка

$$|Kv|\leqslant\frac{1}{2(\alpha^2+\beta^2)}\ N\ (\alpha x+\beta y)[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2]\|v\|.$$

Далее,

$$|K^2v|\leqslant\frac{1}{2^2(\alpha^2+\beta^2)^2}\ \frac{N^2}{2!}(\alpha x+\beta y)^2[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2]^2\|v\|.$$

Продолжая этот процесс, для n-й степени оператора K получим

$$|K^nv|\leqslant\frac{1}{2^n(\alpha^2+\beta^2)^n}\ \frac{N^n}{n!}\,(\alpha x+\beta y)^n[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2]^n\|v\|.$$

Выберем такое n, что

$$\frac{1}{2^n(\alpha^2+\beta^2)^n}\frac{N^n}{n!}\,(\alpha l+\beta h)^n(l^n+h^n)<1.$$

Следовательно, оператор K, в соответствии с обобщенным принципом сжатых отображений, всегда имеет, и притом единственную неподвижную точку. Эта неподвижная точка и есть решение уравнения (13). $\square$

Для функции Римана $v(x, y; \xi, \eta)$ справедливо следующее утверждение.

Лемма 1. *Если $d(x, y) < 0$, $e(x, y) < 0$ для всех $(x, y) \in D$, то функция $v(x, y; \xi, \eta)$ удовлетворяет неравенствам*

$$v(x, \eta; l, \eta) < 0 \ \forall x \in [0, l), \quad \alpha v_x(0, \eta; l, \eta) > 1, \tag{14}$$

$$v(\xi, y; \xi, h) < 0 \ \forall t \in [0, h), \quad \beta v_y(\xi, 0; \xi, h) > 1. \tag{15}$$

Доказательство. Следуя рассуждениям [15], рассмотрим задачу

$$\alpha v_{xx}(x, \eta; l, \eta) - b(x, \eta) v_x(x, \eta; l, \eta) + e(x, \eta) v(x, \eta; l, \eta) = 0; \tag{16}$$

$$\tag{17}$$

$$v(x, \eta; l, \eta)\big|_{x=l} = 0, \quad \alpha v_x(x, \eta; l, \eta)\big|_{x=l} = 1. \tag{18}$$

Уравнение (16) запишем в виде

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\alpha p(x; l, \eta)\frac{\partial v(x, \eta; l, \eta)}{\partial x}\right] + q(x, \eta) v(x, \eta; l, \eta) = 0, \tag{19}$$

где

$$p(x; l, \eta) = \exp\left[\int\limits_x^l b(\xi, \eta) d\xi\right], \quad q(x, \eta) = p(x; l, \eta) e(x, \eta).$$

Пусть $v = v(x, \eta; l, \eta)$, $0 \leqslant x < l$, — решение уравнения (19), удовлетворяющее условиям (18). Тогда, в силу принципа максимума и принципа Заремба—Жиро, из (19) получим $v(x, \eta; l, \eta) < 0$ для всех $x \in [0, l)$.

Интегрируя уравнение (19) в пределах от 0 до l и учитывая условия (18), имеем

$$\alpha p(x; l, \tau) v_x(0, \eta; l, \eta) = 1 + \int\limits_0^l q(\xi, \eta) v(\xi, \eta; l, \eta) d\xi.$$

Так как $v(x, \eta; l, \eta) < 0$ и $e(x, \eta) < 0$, то из последнего равенства следует $\alpha v_x(0, \eta; l, \eta) > 1$. Аналогично доказывается и неравенство (15). $\square$

4. Задача Гурса. Теперь рассмотрим характеристическую задачу: найти функцию $u(x, y)$, являющуюся в области D решением уравнения (1), а также удовлетворяющую начальным условиям (2) и граничным условиям

$$u(0, y) = \mu(y), \quad u_x(0, y) = \mu_2(y), \quad 0 \leqslant y \leqslant h, \tag{20}$$

где $\mu(y)$ — пока неизвестная функция. Предположим также выполнение следующих условий согласования:

$$\varphi_1(0) = \mu(0), \quad \varphi_1^{'}(0) = \mu_2(0), \quad \varphi_2(0) = \mu^{'}(0), \quad \varphi_2^{'}(0) = \mu_2^{'}(0).$$

Пусть $u(x, y)$, $v(x, y) \in C^{2,1}(D) \cap C^{1,2}(D) \cap C^{1,1}(\overline{D})$. Тогда имеет место равенство

$$vMu - uM^* v = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}, \tag{21}$$

где

$$P = \alpha v u_{xy} - \alpha v_{xy} u - \beta v_y u_y + (av) u_x - (av)_x u + (bv) u_y - (bv)_y u + (dv) u,$$

$$Q = \beta v u_{xy} - \beta v_{xy} u - \alpha v_x u_x + (bv) u_x - (bv)_x u + (cv) u_y - (cv)_y u + (ev) u.$$

Предположим, что P, Q непрерывны в области $\overline{D}$, а P_x, Q_y непрерывны и ограничены в D. Проинтегрируем тождество (21) по области $D_0 = \{(\xi,\eta):\ x_0 < \xi < x,\ y_0 < \eta < y\}$. Имеем

$$\int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{y_0}^{y}(vMu - uM^*v)d\xi_1 d\eta_1 = \int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{y_0}^{y}\Big(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}\Big)d\xi_1 d\eta_1. \tag{22}$$

С помощью функции Римана $v(x,y;\xi,\eta)$ из формулы (22) получим интегральное представление для решения $u(x,y)$ уравнения (1) в области D:

$$\begin{aligned} u(x,y) = {} & \alpha v_x(0,y;x,y)u(x_0,y) + \beta v_y(x,y_0;x,y)u(x,y_0) - \\ & - \int\limits_{x_0}^{x}\Big[\beta v(\xi,y_0;x,y)u_{xy}(\xi,y_0) + c(\xi,y_0)v(\xi,y_0;x,y)u_y(\xi,y_0) + \\ & \qquad + A(\xi;x,y)u_x(\xi,y_0) + B(\xi;x,y)u(\xi,y_0)\Big]d\xi - \\ & - \int\limits_{y_0}^{y}\Big[\alpha v(x_0,\eta;x,y)u_{xy}(x_0,\eta) + a(x_0,\eta)v(x_0,\eta;x,y)u_x(x_0,\eta) + \\ & \qquad + A_1(\eta;x,y)u_y(x_0,\eta) + B_1(\eta;x,y)u(x_0,\eta)\Big]d\eta + \\ & + \int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{e_0}^{e} v(\xi,\eta;x,y)g(\xi,\eta)d\xi d\eta; \end{aligned} \tag{23}$$

здесь

$$\begin{aligned} A(\xi,x,y) &= -\alpha v_x(\xi,y_0;x,y) + b(\xi,y_0)v(\xi,y_0;x,y); \\ B(\xi;x,y) &= -\beta v_{xy}(\xi,y_0;x,y) - b(\xi,y_0)v_x(\xi,y_0;x,y) - \\ &\quad - c(\xi,y_0)v_t(\xi,y_0;x,y) - [b_x(\xi,y_0) + c(\xi,y_0) - e(\xi,y_0)]v(\xi,y_0;x,y); \\ A_1(\eta;x,y) &= -\beta v_y(x_0,\eta;x,y) + b(x_0,\eta)v(x_0,\eta;x,y); \\ B_1(\eta x,y) &= -\alpha v_{xy}(x_0,\eta;x,y) - a(x_0,\eta)v_x(x_0,\eta;x,y) - \\ &\quad - b(x_0,\eta)v_y(x_0,\eta;x,y) - [a_x(x_0,\eta) + b_y(x_0,\eta) - d(x_0,\eta)]v(x_0,\eta;x,y). \end{aligned}$$

Формулу (23) можно рассматривать как представление общего решения уравнения (1), если считать, что $u(x_0,y)$, $u_x(x_0,y)$, $u(x,y_0)$ и $u_y(x,y_0)$ — произвольные непрерывно дифференцируемые функции.

Используя интегральное представление (23) при $x_0 = y_0 = 0$, и учитывая условия (2) и (20), получим

$$\begin{aligned} u(x,y) = {} & \alpha v_x(0,y;x,y)\mu(y) + \beta v_y(x,0;x,y)\varphi_1(x) - \\ & - \int\limits_{0}^{x}\Big[\beta v(x,0;\xi,y)\varphi_2'(\xi) + c(\xi,0)v(\xi,0;x,y)\varphi_2(\xi) + A(\xi;x,y)\varphi_1'(\xi) + B(\xi;x,y)\varphi_1(\xi)\Big]d\xi - \\ & - \int\limits_{0}^{y}\Big[\alpha v(0,\eta;x,y)\mu_2'(\eta) + a(0,\eta)v(0,\eta;x,y)\mu_2(\eta) + A_1(\eta;x,y)\mu'(\eta) + B_1(\eta;x,y)\mu(\eta)\Big]d\eta + \\ & + \int\limits_{0}^{x}\int\limits_{0}^{y} v(\xi,\eta;x,y)g(\xi,\eta)d\xi d\eta. \end{aligned} \tag{24}$$

Представление (24) получено в предположении существования решения задачи Гурса (2) и (20) для уравнения (1).

Заметим, что достаточно установить существование решения уравнения (1) при однородных краевых условиях $\mu(t) = \mu_2(y) = 0$, $\varphi_i(x) = 0$, $i = 1, 2$. В самом деле, введя новую неизвестную функцию $z(x, y)$ по формуле $z(x, y) = u(x, y) - u_0(x, y)$, где

$$u_0(x,y) = \mu(y) + x[\mu_2(y) - \varphi_1'(0)] + \varphi_1(x) + y[\varphi_2(x) - \varphi_2(0)] - \varphi_2'(0)xy - \varphi_1(0),$$

которая удовлетворяет уравнению (1) с другой правой частью и однородными условиями

$$z(0, y) = z_x(0, y) = z(x, 0) = z_y(x, 0) = 0.$$

Пользуясь свойством функции Римана, непосредственной проверкой легко убедиться, что функция определенная формулой (24), удовлетворяет уравнению (1) и однородным граничным условиям.

Таким образом, доказана однозначная разрешимость задачи Гурса (2) и (20) для гиперболического уравнения третьего порядка (1).

5. Сведение задачи (1)–(4) **к интегральным уравнениям.** Представление (24) после некоторых преобразований запишем в виде

$$u(x,y) = [\alpha v_x(0,y;x,y) - A_1(y;x,y)]\mu(y) + \int_0^y \Big[A_{1y}(\eta;x,y) - B_1(\eta;x,y)\Big]\mu(\eta)d\eta + F(x,y), \quad (25)$$

где

$$\begin{gathered} F(x,y) = -\alpha v(0,y;x,y)\mu_2(y) + \int_0^y \Big[\alpha v_y(0,\eta;x,y) - a(0,\eta)v(0,\eta;x,y)\Big]\mu_2(\eta)d\eta + \\ + \Big[\beta v_y(x,0;x,y) - A(x;x,y)\Big]\varphi_1(x) - \beta v_x(x,0;x,y)\varphi_2(x) + \beta v(0,0;x,y)\psi_2(0) + \\ + \alpha v(0,0;x,y)\varphi_1'(0) + \Big[A_1(0;x,y) + A(0;x,y)\Big]\varphi_1(0) + \\ + \int_0^x \Big[A_x(\xi;x,y) - B(\xi;x,y)\Big]\varphi_1(\xi)d\xi + \int_0^x \Big[\beta v_x(\xi,0;x,y) - c(\xi,0)v(\xi,0;x,y)\Big]\varphi_2(\xi)d\xi + \\ + \int_0^x\int_0^y v(\xi,\eta;x,y)g(\xi,\eta)d\xi d\eta. \end{gathered}$$

Выясним, можно ли найти $\mu(y)$ так, чтобы решение задачи Гурса удовлетворяло условию (3). В этом случае, решение задачи (1)–(4) можно представить в виде (24).

В силу(3) находим неизвестную функцию $\mu(y)$, удовлетворяющую условию

$$\mu(y) = \lambda(y)\int_0^l u(x,y)dx + \int_0^y \rho(y,\eta)u(l,\eta)d\eta + \mu_1(y), \quad 0 \leqslant y \leqslant h. \quad (26)$$

Для этого сначала проинтегрируем (25) по x от 0 до l и после несложных преобразований получим

$$\begin{gathered} \int_0^l u(x,y)dx = \left[\alpha v(0,y;l,y) - \int_0^l A_1(y;x,y)dx\right]\mu(y) + \\ + \int_0^y \left\{\int_0^l \Big[A_{1y}(\eta;x,y) - B_1(\eta;x,y)\Big]dx\right\}\mu(\eta)d\eta + \int_0^l F(x,y)dx. \quad (27) \end{gathered}$$

В формуле (25) положим $x = l$ и умножим ее на $\rho(y,\eta)$. Полученное при этом выражение интегрируем по η в пределах от 0 до y

$$\int\limits_0^y \rho(y,\eta)u(l,\eta)d\eta = \int\limits_0^y \rho(y,\eta)\Big[\alpha v(0,\eta;l,y) - A_1(y;l,\eta)\Big]\mu(\eta)d\eta +$$
$$+\int\limits_0^y \mu(\eta)d\eta \int\limits_\eta^y \rho(y,\eta)\Big[A_{1y}(s;l,y) - B_1(s;l,y)\Big]ds + \int\limits_0^l F(x,y)dx. \quad (28)$$

Теперь собирая все слагаемые, отвечающие условию (3) в точке $x = 0$, получим интегральное уравнение относительно функции $\mu(y)$ в виде

$$\sigma(y)\mu(y) = \int\limits_0^y K(y,\eta)\mu(\eta)d\eta + F_0(y); \quad (29)$$

здесь

$$\sigma(y) = 1 - \lambda(y)\Big[\alpha v(0,y;l,y) - \int\limits_0^l A_1(x;x,y)dx\Big];$$

$$K(y,\eta) = \lambda(y)\int\limits_0^l \Big[A_{1y}(\eta;x,y) - B_1(\eta;x,y)\Big]dx + \rho(y,\eta)\Big[\alpha v_x(0,\eta;l,y) - A_1(\eta;l,y)\Big] +$$
$$+\int\limits_\eta^y \rho(y,s)\Big[A_{1y}(s;l,y) - B_1(s;l,y)\Big]ds,$$

$$F_0(y) = \lambda(y)\int F(x,y)dx + \int\limits_0^y \rho(y,\eta)F(l,\eta)d\eta + \mu_1(y).$$

Таким образом, разрешимость смешанной задачи (1)–(4) сведена к разрешимости интегрального уравнения (29).

На основании доказанной леммы 1 легко убедиться, что если $\lambda(y) < 0$ для любого $y \in [0,h]$, то множитель $\sigma(y)$ нигде в $[0,h]$ не обращается в нуль.

Следуя [15], заключаем, что функция $v(0,y;l,y)$ на $[0,h]$ не обращается в нуль, если нуль не является собственным значением следующей задачи:

$$\alpha v_{xx}(x,y;l,y) - b(x,y)v_x(x,y;l,y) + e(x,y)v(x,y;l,y) = 0, \quad v(0,y;l,y) = 0, \quad \alpha v(l,y;l,y) = 0. \quad (30)$$

Так будет, например, в случае $e(x,y) \leqslant 0$. В самом деле, если при каком–либо $y \in [0,h]$ функция $v(0,y;l,y) = 0$, то задача (30) имеет только тривиальное решение $v(x,y;l,y) \equiv 0$, значит, $v_x(x,y;l,y) = 0$, что противоречит условию $\alpha v_x(l,y;l,y) = 1$.

Интегральное уравнение (29) есть интегральное уравнение Вольтерра второго рода, которое безусловно разрешимо. Таким образом, из интегрального уравнения (29) находим $\mu(y) \in C^1[0,h]$. Подставив $\mu(y)$ в представление (24) найдем решение исходной нелокальной задачи (1)–(4), что и завершает доказательство теоремы 1.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Баренблатт Г. Н., Желтов Ю. П., Кочина И. Н.* Об основных представлениях теории фильтрации однородных жидкостей в трещиноватых породах// Прикл. мат. мех. — 1960. — *24*, № 5. — С. 852–864.
2. *Бештоков М. Х.* Метод Римана для решения нелокальных краевых задач для псевдопараболических уравнений третьего порядка// Вестн. Самар. гос. техн. ун-та. Сер. физ.-мат. науки. — 2013. — *33*, № 4. — С. 15–24.

3. *Варламов В. В.* К вопросу о распространении нестационарных акустических волн в релаксирующей среде// Журн. вычисл. мат. и мат. физики. — 1990. — *30*, № 2. — С. 328–332.
4. *Джохадзе О. М.* Влияние младших членов на корректность постановки характеристических задач для гиперболических уравнений третьего порядка// Мат. заметки. — 2003. — *74*, № 4. — С. 517–528.
5. *Джураев Т. Д., Попелек Я.* О классификации и приведении к каноническому виду уравнений с частными производными третьего порядка// Дифференц. уравнения. — 1991. — *27*, № 10. — С. 1734–1745.
6. *Дзекцер Е. С.* Уравнения подземных вод со свободной поверхностью в многослойных средах// Докл. АН СССР. — 1975. — *220*, № 3. — С. 540–543.
7. *Жегалов В. И., Миронов А. Н.* Дифференциальные уравнения со старшими частными производными. — Казань: Казан. мат. об-во, 2001.
8. *Керефев А. А., Плотникова Е. В.* Нелокальные задачи для одного уравнения третьего порядка// Владикавказ. мат. ж. — 2005. — *7*, № 1. — С. 51–60.
9. *Кожанов А. И.* Об одной нелокальной краевой задаче с переменными коэффициентами для уравнения теплопроводности и Аллера// Дифференц. уравн. — 2004. — *6*, № 40. — С. 763–774.
10. *Кожанов А. И., Пулькина Л. С.* О разрешимости краевых задач с нелокальными граничными условиями интегрального вида для многомерных гиперболических уравнений// Дифференц. уравн. — 2006. — *42*, № 9. — С. 1166–1179.
11. *Нахушев А. М.* Задачи со смещением для уравнений в частных производных. — М.: Наука, 2006.
12. *Пулькина Л. С.* Нелокальная задача с интегральными условиями для гиперболического уравнения// Дифференц. уравн. — 2004. — *40*, № 7. — С. 887–892.
13. *Пулькина Л. С.* Задачи с неклассическими условиями для гиперболических уравнений. — Самара: Изд-во Самар. ун-та, 2012.
14. *Руденко О. В., Солуян С. Н.* Теоретические основы нелинейной акустики. — М.: Наука, 1975.
15. *Шхануков М. Х.* О некоторых краевых задачах для уравнения третьего порядка, возникаюших при моделировании фильтрации жидкости в пористых средах// Дифференц. уравнения. — 1982. — *18*, № 4. — С. 689–699.

О. С. Зикиров
Национальный университет Узбекистана имени М. Улугбека, Ташкент, Узбекистан
E-mail: `zikirov@yandex.ru`

Д. К. Холиков
Ташкентский архитектурно-строительный институт, Ташкент, Узбекистан
E-mail: `xolikov23@mail.ru`

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 144 (2018). С. 39–46

УДК 517.977

К ТЕОРИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИГР ПРЕСЛЕДОВАНИЯ ПО ПОЗИЦИИ

© 2018 г. **М. Ш. МАМАТОВ, Х. Х. СОБИРОВ**

Аннотация. Статья посвящена изучению задачи преследования по позиции, описываемой линейными дифференциальными уравнениями первого порядка. Получены достаточные условия возможности завершения преследования для таких управляемых систем. Для нахождения значения управления преследующего игрока в каждый момент времени разрешается использовать значения вектора фазовых переменных в дискретные моменты времени.

Ключевые слова: преследующий, убегающий, управление преследования, управление убегания, позиционное управление.

AMS Subject Classification: 35K25, 35K70, 35R35

1. Введение. Многие прикладные и теоретические задачи современного естествознания приводят к дифференциальным играм: задачи информационных технологий, задачи военного характера, задачи в области экономики, планирования, технические задачи и т. д.

Теория дифференциальных игр систематически стала развиваться сравнительно недавно. Однако отдельные задачи, которые мы сейчас могли бы с полным правом включить в теорию дифференциальных игр, рассматривались в механике уже несколько веков назад. Некоторые проблемы постановки задач в теории дифференциальных игр можно проиллюстрировать на примере движения двух управляемых объектов, один из которых, преследующий, стремится догнать другого, а второй (убегающий), уйти от преследователя. Суть задачи, возникающей в теории дифференциальных игр, в следующем: «Пусть на плоскости движется два объекта, которые могут управлять в каждый момент времени своими скоростями. Эти скорости ограничены по величине, причем первый объект может развивать большую скорость. Спрашивается, как должен двигаться первый объект, чтобы догнать второй?».

Эта задача хорошо известна, и в общих случаях она называется задачей преследования. Она решается достаточно просто при условии, что преследующий знает в каждый момент времени как свои координаты, так и координаты противника или управления убегающего. Отказ от предположения об информированности преследующего резко усложняет задачу. В этом случае, решение задачи поимки противника и время преследования будут зависеть от того, как ведет себя убегающий игрок. Задача убегания или уклонения от встречи состоит в выяснении вопроса о том, при каких условиях у второго игрока имеется такая стратегия, которая позволяет ему не дать совершиться поимке при любых начальных позициях игроков.

Для определения конкретного движения объекта нужно задавать его начальное состояние $z|_{t=t_0} = z(t_0)$ в начальный момент времени t_0, а затем с течением времени определять значения управляющих параметров u и v.

Задание значений управляющих параметров u и v может осуществляться различными способами. В конечном счете, параметры u и v оказываются функциями t. Значения параметров могут определяться как по изменениям t, так и задаваться непосредственно как функция t: $u = u(t)$, $v = v(t)$ или как функция другого управления $u = u\big(v(t), t\big)$, $v = v(t)$, от состояния объекта в этот момент времени: $u = u\big(z(t), t\big)$, $v = v(t)$, а также могут определяться в зависимости от каких-либо внешних факторов, например, от поведения другого объекта.

Настоящая работа посвящена получению достаточных условий для возможности завершения преследования по позиции в дифференциальных играх, описываемых линейными дифференциальными уравнениями.

Дифференциальным играм посвящено много работ (см., например, [1–25]). Следует отметить, что дифференциальные игры в классе позиционных стратегий рассматривались для различных классов систем в работах [1, 5–7, 10, 11]. В частности, в [1, 5–7] задача преследования изучается в формализации, восходящей к работам Н. Н. Красовского и Ю. С. Осипова.

Настоящая статья примыкает к работам [2, 3, 5–7, 10, 11, 14–19]. Заметим, что мы придерживаемся формализации, несколько отличающейся от упомянутой выше. Кроме того, наш метод исследования задач преследования отличается от методов работ [1, 5–7, 10, 11].

2. Постановка задачи и формулировка основных результатов. Рассматривается дифференциальная игра, в которой движение объекта z в конечномерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ описывается уравнением:

$$\dot{z} = Cz - Bu + Dv, \tag{1}$$

где C, B, D — постоянные матрицы соответствующих размерностей, $u \in P$ и $v \in Q$ — управляющие параметры, P и Q — непустые компактные подмножества $\mathbb{R}^n$.

В $\mathbb{R}^n$ выделено следующее терминальное множество:

$$M = M_0 + lS,$$

где M_0 — линейное подпространство пространства $\mathbb{R}^n$, lS — замкнутый шар радиуса $l > 0$ с центром в начале координат пространства $L = M_0^{\perp}$ ортогонального дополнения M_0 в $\mathbb{R}^n$.

Игра начинается из положения $z(0) = z_0 \notin M$ и считается законченной в тот момент времени t_1, когда $z(t_1) \in M$.

Определение 1. Будем говорить, что из точки $z_0 \in \mathbb{R}^n \setminus M$ возможно завершение преследования по позиции, если существует такое число $T(z_0) \geqslant 0$, что по любому измеримому изменению $v(t)$, $0 \leqslant t \leqslant T(z_0)$, параметра v можно построить такое измеримое изменение $u(t)$, $0 \leqslant t \leqslant T(z_0)$, параметра u, что решение $z(t)$, $0 \leqslant t \leqslant T(z_0)$, уравнения $\dot{z} = Cz - Bu(t) + Dv(t)$, $z(0) = z_0$, попадает на множество M за время, не превосходящее числа $T(z_0)$.

При этом, для нахождения значения параметра $u(t)$ в каждый момент времени $t \in [0, T(z_0)]$ разрешается использовать значения $z(s_i)$ вектора фазовых переменных z в дискретные моменты времени $s_1, s_2, \ldots, s_k \in [0, t]$.

Пусть π — оператор ортогонального проектирования из $\mathbb{R}^n$ на L. Для числа $\tau \geqslant 0$ положим (см. [8, 9, 11, 12]):

$$W_1(\tau) = \int_0^{\tau} \pi e^{rC} BP dr, \quad W_2(\tau) = \int_0^{\tau} \pi e^{rC} DQ dr. \tag{2}$$

Предположение 1. Существует такое положительное число d, что для любых $z \in \mathbb{R}^n$ и $\tau \geqslant 0$ выполнено следующее неравенство:

$$\left|\pi e^{\tau C} z\right| \leqslant d|\pi z|. \tag{3}$$

Предположение 2. $W_1(\tau)$ — шар с центром в начале координат, радиус которого — монотонно возрастающая функция; существует такое число μ, что $0 < \mu d < 1$ и выполнено вложение

$$W_2(\tau) \subset \mu d W_1(\tau).$$

Предположение 3. Следующее включение справедливо для некоторого значения $\tau = \tau_0 \geqslant 0$:

$$\pi e^{\tau C} z_0 \in W_1(\tau) \tag{4}$$

Теорема 1. *Пусть для игры* (1) *и точки* $z(0) = z_0 \notin M$ *выполнены предположения* 1–3. *Тогда в игре* (1) *из начального положения* z_0 *возможно завершение преследования по позиции.*

Доказательство. В силу [6] предположения 3, получаем:

$$\pi e^{\tau_0 C} z_0 \in W_1(\tau_0). \tag{5}$$

Следовательно, в силу включения [18] и леммы Филиппова, существует измеримая функция $u_0(t)$, $0 \leqslant t \leqslant \tau_0$, $u_0(t) \in P$, для которой выполнено следующее:

$$\pi e^{\tau_0 C} z_0 = \int\limits_0^{\tau_0} \pi e^{(\tau_0 - s)C} B u_0(s) ds \in W_1(\tau_0). \tag{6}$$

Пусть $v_0(t)$, $0 \leqslant t \leqslant \tau_0$, — произвольная измеримая функция $v_0(t) \in Q$, $0 \leqslant t \leqslant \tau_0$. Для решения $z(t)$, $0 \leqslant t \leqslant \tau_0$, уравнения (1), соответствующего измеримым функциям

$$u = u_0(t), \quad v = v_0(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant \tau_0, \tag{7}$$

получим, что

$$\pi z(\tau_0) = \pi e^{\tau_0 C} z_0 + \int\limits_0^{\tau_0} \pi e^{(\tau_0 - s)C} \Big[- B u_0(s) + D v_0(s) \Big] ds = \int\limits_0^{\tau_0} \pi e^{(\tau_0 - s)C} D v_0(s) ds. \tag{8}$$

Из [2, 3, 5, 20] и предположения 2 следуют включения

$$\pi z(\tau_0) \in W_2(\tau_0) \subset \mu d W_1(\tau_0).$$

Отсюда, в силу [21] и предположений 1–2, получим следующие соотношения:

$$\pi e^{\tau_1 C} z_1 \in W_1(\tau_1) = \mu d W_1(\tau_0),$$

где $z_1 = z(\tau_0)$.

Значит, для точки z_1 выполняются предположения 1–3. Применив эту процедуру к точке z_1, получим:

$$\pi e^{\tau_2 C} z_2 \in W_1(\tau_2) = \mu d W_1(\tau_1) = (\mu d)^2 W_1(\tau_0),$$

где $z_2 = z(\tau_1)$.

Продолжим этот процесс до тех пор, пока не будут выполнены включения

$$\pi z(\tau_k) \in W_1(\tau_k) = (\mu d)^k W_1(\tau_0) \subset lS.$$

Эти включения выполнены для некоторого конечного k, ибо $0 < \mu d < 1$. Отсюда следует, что $\pi z(\tau_k) \in lS$, значит $z(\tau_k) \in M$. Теорема 1 доказана. $\square$

Предположение 4. Существуют такие положительные числа d и $T \geqslant 0$, что для любых $z \in \mathbb{R}^n$ и $\tau \in [0, T]$ выполнено неравенство

$$\left| \pi e^{\tau C} z \right| \leqslant d |\pi z|.$$

Предположение 5. $W_1(\tau)$, $\tau \in [0, T]$, — шар с центром в начале координат, радиус которого — монотонно возрастающая функция; существует такое число μ, что $0 < \mu d < 1$:

$$W_2(\tau) \subset \mu d W_1(\tau), \ \tau \in [0, T].$$

Предположение 6. Следующее включение справедливо для некоторого $\tau = \tau_0 \in [0, T]$:

$$\pi e^{\tau C} z_0 \in W_1(\tau).$$

Теорема 2. *Пусть для игры* (1) *и точки* $z(0) = z_0 \notin M$ *выполнены предположения* 4–6*. Тогда в игре* (1) *из начального положения* z_0 *возможно завершение преследования по позиции.*

Теорема 2 доказывается аналогично теореме 1.

Пусть теперь $M = M_0 + M_1 + \varepsilon S$, M_1 — подмножество L. Для числа $\tau \geqslant 0$ положим, что верно следующее:

$$W_1(\tau) = M_1 + \int\limits_0^\tau \pi e^{rC} BPdr, \quad W_2(\tau) = \int\limits_0^\tau \pi e^{rC} DQdr. \tag{9}$$

Предположение 7. Существует такое положительное число d, что для любых $z \in \mathbb{R}^n$ и $\tau \geqslant 0$ выполнено неравенство:

$$\left|\pi e^{\tau C} z\right| \leqslant d|\pi z|.$$

Предположение 8. $W_1(\tau)$ — шар с центром в начале координат, радиус которого — монотонно возрастающая функция; существует такое число μ, что $0 < \mu d < 1$:

$$W_2(\tau) \subset \mu d W_1(\tau).$$

Предположение 9. Следующее включение справедливо при некотором $\tau = \tau_0 \geqslant 0$:

$$\pi e^{\tau C} z_0 \in W_1(\tau). \tag{10}$$

Теорема 3. *Пусть для игры* (1) *и точки* $z(0) = z_0 \notin M$ *выполнены предположения* 7–9. *Тогда в игре* (1) *из начального положения* z_0 *возможно завершение преследования по позиции.*

Доказательство. В силу [17] предположения 9 получаем

$$\pi e^{\tau_0 C} z_0 \in W_1(\tau_0).$$

Поэтому, согласно лемме Филиппова, существует точка $m \in M_1$ и измеримая функция $u_0(t)$, $0 \leqslant t \leqslant \tau_0$, $u_0(t) \in P$, для которых

$$\pi e^{\tau_0 C} z_0 = m + \int\limits_0^{\tau_0} \pi e^{(\tau_0 - s)C} Bu_0(s)ds \in W_1(\tau_0). \tag{11}$$

Пусть $v_0(t)$ — произвольная измеримая функция $v_0(t) \in Q$, $0 \leqslant t \leqslant \tau_0$. Для решения $z(t)$, $0 \leqslant t \leqslant \tau_0$, уравнения (1), соответствующего (см. [22]) измеримым функциям $u = u_0(t)$, $v = v_0(t)$, $0 \leqslant t \leqslant \tau_0$, получаем

$$\pi z(\tau_0) = \pi e^{\tau_0 C} z_0 - m + \int\limits_0^{\tau_0} \pi e^{(\tau_0 - s)C}\big[- Bu_0(s) + Dv_0(s)\big]ds = \int\limits_0^{\tau_0} \pi e^{(\tau_0 - s)C} Dv_0(s)ds. \tag{12}$$

Из [14–16, 23] и предположения 9 получаем следующие включения:

$$\pi z(\tau_0) \in W_2(\tau_0) \subset \mu d W_1(\tau_0).$$

В силу предположений 7 и 8, получим следующие соотношения $\big(z_1 = z(\tau_0)\big)$:

$$\pi e^{\tau_1 C} z_1 \in W_1(\tau_1) = \mu d W_1(\tau_0).$$

Значит, для точки z_1 выполняются предположения 7–9. Применив эту процедуру к точке z_1, получим

$$\pi e^{\tau_2 C} z_2 \in W_1(\tau_2) = \mu d W_1(\tau_1) = (\mu d)^2 W_1(\tau_0)$$

$(z_2 = z(\tau_1))$. Продолжим этот процесс до тех пор, пока не будут выполнены включения

$$\pi z(\tau_k) \in W_1(\tau_k) = (\mu d)^k W_1(\tau_0) \subset lS.$$

Эти включения выполнены для некоторого конечного k, ибо $0 < \mu d < 1$. Отсюда следует, что $\pi z(\tau_k) \in lS$, следовательно $z(\tau_k) \in M$. Теорема 3 доказана. □

3. Случай разнотипных ограничений на управление игроков. В этом пункте рассматривается дифференциальная игра (1) с ограничениями на управление игроков в следующем виде:

$$u \in P \subset \mathbb{R}^p, \ \|v(\cdot)\|_{L_2} \leqslant \sigma, \tag{13}$$

где $\sigma > 0$. Терминальное множество имеет вид $M = M_0 + M_1 + lS$.

В дальнейшем, измеримые функции $u = u(\tau)$, $v = v(\tau)$, $0 \leqslant \tau < \infty$, удовлетворяющие ограничениям [24], назовем допустимыми управлениями преследователя и убегающего. Как и в предыдущем пункте, можно дать определения возможности завершения преследования в данном смысле.

Предположение 10. Существует такое положительное число d, что для всех $\tau \geqslant 0$ выполнено неравенство

$$\|\pi e^{\tau C}\| \leqslant d.$$

Предположение 11. $W_1(\tau)$ — шар с центром в начале координат. Существуют такие положительная константа μ и функция $T(z) \geqslant 0$, что для любых $z \in \mathbb{R}^n \setminus M$ при некотором $T = T(z) \leqslant \mu|\pi z|$ справедливо включение

$$\pi e^{TC} z_0 \in W_1(T).$$

Теорема 4. *Пусть для игры* (1) *и точки* $z(0) = z_0 \notin M$ *выполнены предположения* 10, 11. *Тогда в игре* (1) *из начального положения* z_0 *возможно завершение преследования по позиции.*

Доказательство. Пусть $v(t)$, $t \geqslant 0$, — произвольная измеримая функция, $\|v(\cdot)\| \leqslant \sigma$. В силу [8] и предположения 11 имеем тождество

$$\pi e^{\tau_0 C} z_0 \in W_1(\tau_0) = M_1 + \int_0^{\tau_0} \pi e^{rC} BP dr,$$

где $\tau_0 = T(z_0) \leqslant \mu|\pi z_0|$.

Согласно лемме Филиппова, существует точка $m \in M_1$ и измеримая функция $u_0(t)$, $0 \leqslant t \leqslant \tau_0$, $u_0(t) \in P$, для которой

$$\pi e^{\tau_0 C} z_0 = m + \int_0^{\tau_0} \pi e^{(\tau_0 - s)C} B u_0(\tau_0 - s) ds \in W_1(\tau_0). \tag{14}$$

Для решения $z(t)$, $0 \leqslant t \leqslant \tau_0$, уравнения (1), соответствующего измеримым функциям $u = u_0(t)$, $v = v_0(t)$, $0 \leqslant t \leqslant \tau_0$, имеем следующее тождество (см. [9]):

$$\pi z(\tau_0) = \pi e^{\tau_0 C} z_0 - m + \int_0^{\tau_0} \pi e^{(\tau_0 - s)C} \big[- B u_0(\tau_0 - s) + D v_0(s) \big] ds = \int_0^{\tau_0} \pi e^{(\tau_0 - s)C} D v_0(s) ds. \tag{15}$$

Поэтому справедливо тождество

$$\pi z_1 = \pi z(\tau_0) = \int_0^{\tau_0} \pi e^{(\tau_0 - s)C} D v_0(s) ds.$$

Предположим, что $\pi z_1 \notin M_1 + lS$, т.е. $z_1 \notin M$. Оценивая $|\pi z_1|$, используя [12] и неравенство Коши—Буняковского, имеем равенство

$$l < |\pi z_1| = \left| \int_0^{\tau_0} \pi e^{(\tau_0 - s)C} D v_0(s) ds \right| \leqslant d\sqrt{\tau_0} \|D\| \cdot \sqrt{\int_0^{\tau_0} v_0^2(s) ds} \leqslant d\mu^{\frac{1}{2}} \|D\| |\pi z_0|^{\frac{1}{2}} \sigma_1, \tag{16}$$

где

$$\sigma_1 = \sqrt{\int\limits_0^{\tau_0} v_0^2(s)ds}.$$

Из условий теоремы получим

$$\pi e^{(\tau_1-\tau_0)C} z_0 \in W_1(\tau_1-\tau_0) = M_1 + \int\limits_0^{\tau_1-\tau_0} \pi e^{rC} BPdr,$$

где $\tau_1 - \tau_0 = T(z_1) \leqslant \mu|\pi z_1|$. Значит, существует такое измеримое управление $u_1(t)$, $0 \leqslant t \leqslant \tau_1-\tau_0$, $u_1(t) \in P$, что

$$\pi e^{(\tau_1-\tau_0)C} z_0 = m + \int\limits_0^{\tau_1-\tau_0} \pi e^{rC} Bu_1(r)ds = m + \int\limits_{\tau_0}^{\tau_1} \pi e^{(\tau_1-s)C} Bu_1(\tau_1-s)ds. \tag{17}$$

Применив предыдущие рассуждения к точке z_1 и имея в виду [25], получим:

$$l < |\pi z_2| = \left| \int\limits_{\tau_0}^{\tau_1} \pi e^{(\tau_1-s)C} Dv_1(s)ds \right| \leqslant d\sqrt{\tau_1-\tau_0}\|D\| \cdot \sqrt{\int\limits_{\tau_0}^{\tau_1} v_1^2(s)ds} \leqslant d\mu^{\frac{1}{2}}\|D\||\pi z_1|^{\frac{1}{2}}\sigma_2,$$

где

$$\sigma_2 = \sqrt{\int\limits_{\tau_0}^{\tau_1} v_1^2(s)ds}.$$

Следовательно,

$$l < d\mu^{1/2}\|D\||\pi z_1|^{1/2}\sigma_2 = d\mu^{1/2}\|D\|\Big(d\mu^{1/2}\|D\||\pi z_0|^{1/2}\sigma_1\Big)^{1/2}\sigma_2 = d^{1+1/2}\mu^{1/2+1/4}\|D\|^{1+1/2}|\pi z_0|^{1/4}\sigma_1^{1/2}\sigma_2.$$

С помощью элементарных вычислений можно показать, что для некоторого k, $1 \leqslant k \leqslant N$, имеет место включение $z(\tau_k) \in M$, где

$$\tau_k = \tau_{k-1} + T(z_{k-1}) = T(z_0) + T(z_1) + \ldots + T(z_{k-1}) \leqslant m\big(|\pi z_0| + |\pi z_1| + \ldots + |\pi z_{k-1}|\big).$$

Отсюда, применяя неравенство из [13], получим, что

$$\tau_k = \mu|\pi z_0| + (k-1)d^2\mu^2K\theta^2 \leqslant \mu|\pi z_0| + (N-1)d^2\mu^2\|D\|^2K\theta^2,$$

где

$$N = \left[\frac{d^2\mu\|D\|^2(|\pi z_0| + \sigma^2)}{l}\right],$$

$K = \max(|\pi z_0|, 1)$, $\theta = \max(\sigma, 1)$, $[a]$ — целая часть числа a. Таким образом, $z(\tau_k) \in M$. Теорема 4 доказана. □

4. Примеры. Рассмотрим дифференциальную игру (1), для которой z, u, $v \in \mathbb{R}^2$ и существует матрица $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $|u| \leqslant \rho$, $|v| \leqslant \sigma$, $M_0 = \{0\}$, $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Легко проверить, что если $\rho > \sigma$, то все условия теоремы 1 выполнены. Значит, в рассматриваемой игре из всех точек $z_0 \in \mathbb{R}^2$ возможно завершение преследования по позиции.

Рассмотрим дифференциальную игру $\dot{z} = \lambda z - u + v$, где $z, u, v \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}^1$, $\lambda \leqslant 0$, $|u| \leqslant \rho$, $|v| \leqslant \sigma$, $M_0 = \{0\}$, $\pi = E$ — единичная матрица. Легко показать, что если $\rho > \sigma$, то все условия теоремы 1 выполнены. Значит, в этой игре из всех точек $z_0 \in \mathbb{R}^n$ возможно завершение преследования по позиции.

Рассмотрим дифференциальную игру $\dot{z} = \lambda z - u + v$, где $z, u, v \in \mathbb{R}^1$, $\lambda \in \mathbb{R}^1$, $\lambda > 0$, $|u| \leqslant \rho$, $|v| \leqslant \sigma$, $M_0 = \{0\}$. Нетрудно убедиться, что при $\rho > \sigma$ все условия теоремы 2 выполнены, но не выполнены условия теоремы 1.

Рассмотрим дифференциальную игру (1), для которой $z, u, v \in \mathbb{R}^3$ и существуют матрицы $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $|u| \leqslant 1$, $v(\cdot)\| \leqslant \sigma$, $M = \{z : |\pi z| \leqslant l\}$, $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Легко проверить, что, все условия теоремы 4 выполнены. Значит, в рассматриваемой игре из всех точек $z_0 \in \mathbb{R}^3 \setminus M$ возможно завершение преследования по позиции.

5. Заключение. Резюмируя полученные результаты, приходим к выводу, что дифференциальная игра преследования (1), начинающаяся из начального положения $z(0) = z_0$ в указанных дополнительных условиях, может быть закончена за время, не превосходящее T. В теоремах 1–3 получены достаточные условия для решения задачи преследования (1).

Здесь условие предположения 1, данное неравенством $|\pi e^{rC} z| \leqslant d\,|\pi z|$, играет главную роль при решении поставленной задачи. Остальные условия достаточно естественны и выполняются во многих примерах естествознания. В примере из предыдущего пункта матрица C — поворот на $\pi/4$, и потому для него предположение 1 выполняется.

В теоремах 1–2 точка z_0 приводится на ε-окрестности подпространства M_0, а в теореме 3 начальная точка z_0 приводит к ε-окрестности множества $M_0 + M_1$. Таким образом, теорема 3 обобщает теоремы 1 и 2. Теорема 4 посвящена решению задачи преследования, когда управляющим параметром игры налагается разнотипные ограничения.

В известных работах по дифференциальным играм, как правило, пользуются двумя типами информированности:

1) построение управления преследующего $u = u_0(t)$, $0 \leqslant t \leqslant \tau_0$, $u_0(t) \in P$ использует в каждый момент времени t или на отрезке $[0, \varepsilon]$ управления убегающего $v(t)$ (см. [8, 9]);
2) построение управления преследующего $u = u_0(t)$, $0 \leqslant t \leqslant \tau_0$, $u_0(t) \in P$ использует в каждый момент времени t значение $z(t)$ (см. [1, 5, 6]).

В данной работе для построения управления преследующего $u(t)$ в каждый момент времени $t \in [0, T(z_0)]$ разрешается использовать значения $z(s_i)$ вектора фазовых переменных z в дискретные моменты времени $s_1, s_2, \ldots, s_k \in [0, t]$.

В таком смысле полученные в этой работе результаты даже в простом преследовании являются новыми.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Красовский Н. Н., Субботин А. И.* Позиционные дифференциальные игры. — М: Наука, 1974.
2. *Маматов М. Ш.* К теории дифференциальных игр преследования в системах с распределенными параметрами// Автомат. вычисл. техника. — 2009. — № 1. — С. 5–14.
3. *Маматов М. Ш.* О применении метода конечных разностей к решению задача преследования в системах с распределенными параметрами// Автомат. телемех. — 2009. — № 8. — С. 123–132.
4. *Мищенко Е. Ф., Сатимов Н. Ю.* Задача уклонения от встречи в критическом случае// Диффер. уравн. — 1983. — *19*, № 2. — С. 220–229.
5. *Осипов Ю. С.* Позиционное управление в параболических системах// Прикл. мат. мех. — 1977. — *41*. — С. 195–201.
6. *Осипов Ю. С., Короткий А. И.* Аппроксимация в задачах позиционного управления параболическими системами// Прикл. мат. мех. — 1978. — *42*, № 4. — С. 599–605.
7. *Осипов Ю. С., Пандольфи Л., Максимов В. И.* Задача робастного граничного управления: случай краевых условий Дирихле// Докл. РАН. — 2000. — *374*, № 3. — С. 310–312.
8. *Понтрягин Л. С.* Линейные дифференциальные игры преследования// Мат. сб. — 1980. — *112*, № 3. — С. 307–330.

9. *Понтрягин Л. С., Мищенко Е. Ф.* Задача об уклонении от встречи в линейных дифференциальных играх// Диффер. уравн. — 1971. — *7*, № 3. — С. 436–445.
10. *Понтрягин Л. С., Мищенко А. С.* Линейная дифференциальная игра преследования. Аналитическая теория// Мат. сб. — 1986. — *131*, № 2. — С. 131–158.
11. *Сатимов Н. Ю.* О задаче преследования по позиции в дифференциальных играх// Докл. АН СССР. — 1976. — *229*, № 4. — С. 808–811.
12. *Сатимов Н. Ю.* Об одном способе уклонения от встречи в дифференциальных играх// Мат. сб. — 1976. — *99*, № 3. — С. 380–393.
13. *Сатимов Н. Ю., Маматов М. Ш.* Об одном классе линейных дифференциальных и дискретных игр между группами преследователей и убегающих// Диффер. уравн. — 1990. — *26*, № 9. — С. 1541–1551.
14. *Сатимов Н. Ю., Тухтасинов М.* Об игровых задачах на фиксированном отрезке в управляемых эволюционных уравнениях первого порядка// Мат. заметки. — 2006. — *80*, № 4. — С. 613–625.
15. *Тухтасинов М., Маматов М. Ш.* О задачах перехода в управляемых системах// Диффер. уравн. — 2009. — *45*, № 3. — С. 425–430.
16. *Тухтасинов М., Маматов М. Ш.* О задачах преследования в управляемых распределенных системах// Мат. заметки. — 2008. — *84*, № 2. — С. 273–280.
17. *Mamatov M. Sh., Alimov H. N.* Solution of the problem of persecution in games distributed systems of higher order// Sib. Adv. Math. — 2013. — *16*, № 2. — С. 229–239.
18. *Mamatov M. Sh., Alimov H. N.* By solving the problem of harassment described by differential equations of fractional order// in: Proc. 7th Int. Conf. on Theoretical and Applied Sciences in the USA. — New York, 2016. — С. 6–10.
19. *Mamatov M. Sh., Alimov H. N.* The pursuit problem described by differential equations of fractional order// in: Proc. 6th Int. Conf. on European Applied Sciences: Challenges and Solutions. — Stuttgart, 2016. — С. 14–18.
20. *Mamatov M. Sh., Durdiev D. K., Alimov H. N.* Fractional integro-differential calculation and its appendices in the theory of differential games of prosecution of the fractional order// Am. Sci. J. — 2016. — *4*. — С. 72–77.
21. *Mamatov M. Sh., Durdiev D. K., Alimov H. N.* On the theory of fractional order differential games of pursuit// J. Appl. Math. Phys. — 2016. — *4*. — С. 1335–1362.
22. *Mamatov M. Sh., Tukhtasinov M.* Pursuit problem in distributed control systems// Cyber. Syst. Anal. — 2009. — *45*, № 2. — С. 297–302.
23. *Mamatov M. Sh., Tashmanov E. B., Alimov H. N.* Differential games of pursing in the systems with distributed parameters and geometrical restrictions// Am. J. Comput. Math. — 2013. — *3*. — С. 56–61.
24. *Mamatov M. Sh., Tashmanov E. B., Alimov H. N.* Quasilinear discrete games of pursuit described by higher-order equations// Automat. Control Comput. Sci. — 2015. — *49*, №3. — С. 148–152.
25. *Warga J.* Optimal Control of Differential and Functional Equations. — New York: Academic Press, 1972.

М. Ш. Маматов
Национальный университет Узбекистана им. М. Улугбека, Ташкент, Узбекистан
E-mail: `mamatovmsh@mail.ru`

Х. Х. Собиров
Ташкентский университет информационных технологий им. Мухаммада ал-Хоразмий,
Ташкент, Узбекистан
E-mail: `hhsobirov@gmail.com`

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 144 (2018). С. 47–55

УДК 519.24

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ОЦЕНОК БАЙЕСОВСКОГО ТИПА В МОДЕЛИ КОНКУРИРУЮЩИХ РИСКОВ ПРИ СЛУЧАЙНОМ ЦЕНЗУРИРОВАНИИ

© 2018 г. **А. А. АБДУШУКУРОВ, Н. С. НУРМУХАМЕДОВА**

Аннотация. Доказана асимптотическая нормальность оценок байесовского типа в модели конкурирующих рисков при случайном цензурировании с двух сторон.

Ключевые слова: локальная асимптотическая нормальность, статистика отношения правдоподобия, асимптотическая эффективность, модель конкурирующих рисков, случайное цензурирование.

AMS Subject Classification: 62B15

1. Введение. Статистика отношения правдоподобия (СОП) играет фундаментальную роль в теории принятия решений, в особенности, в теории проверки статистических гипотез. Среди разнообразных критериев следует особо выделить критерии, основанные на СОП. Они активно используются в теории проверки гипотез. Согласно лемме Неймана—Пирсона, критерии, основанные на СОП являются оптимальными по сравнению с другими критериями, построенными на основе других статистик. Интересные задачи возникают, когда альтернативы H_1 зависят от n и являются «близкими» к H_0, т.е. $H_1 = H_1 n \to H_0$ при $n \to \infty$.

В таких ситуациях проявляются асимптотические свойства СОП, полезные в теории оценивания неизвестных параметров и проверки гипотез. Наиболее важным свойством статистических моделей является свойство локальной асимптотической нормальности (ЛАН) СОП регулярного статистического эксперимента.

Суть ЛАН заключается в том, что СОП модели допускает аппроксимацию функциями следующего вида:

$$\exp\left\{u\omega_{n,\theta} - \frac{1}{2}u^2\right\},$$

где $\omega_{n,\theta}$ — асимптотически (при $n \to \infty$) нормальные случайные величины с параметрами $(0,1)$. Свойства экспериментов, удовлетворяющих условию ЛАН в случае независимых и одинаково распределенных наблюдений изучали А. Вальд, Л. Ле Кам и Я. Гаек (см. [4, 5, 7–10]). В [2, 6] установлены результаты аппроксимации СОП стохастическими интегралами в моделях конкурирующих рисков (МКР) при случайном цензурировании наблюдений справа и с двух сторон. Такой вариант ЛАН обобщает классические результаты ЛАН. В настоящей работе, используя свойство ЛАН в общей статистической модели, исследуются асимптотические свойства оценки байесовского типа для неизвестного параметра, а также доказана её асимптотическая эффективность.

2. Предварительные сведения. Рассмотрим модель конкурирующих рисков (МКР), следуя [1]. Пусть X — случайная величина, определенная на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ со значениями в измеримом пространстве $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$. Рассмотрим совместные свойства случайных пар $(X, A^{(i)})$, $i = \overline{1,k}$, где $A^{(1)}, \dots, A^{(k)}$ — такие попарно несовместные события, что $P\Big(\bigcup\limits_{i=1}^{k} A^{(i)}\Big) = 1$.

Реально это соответствует случаю, когда объект (техническое устройство, индивидум) с временем безотказной работы X подвергается k конкурирующим рискам и выходит из строя при осуществлении одного из событий $A^{(i)}$, $i=\overline{1,k}$. Пусть $\delta^{(i)}=I\big(A^{(i)}\big)$ — индикатор события $A^{(i)}$, $i=\overline{1,k}$, и совместное распределение случайного вектора $\big(X,\delta^{(1)},\ldots,\delta^{(k)}\big)$ задано с точностью до параметра $\theta\in\Theta$:

$$Q_\theta(x,y^{(1)},\ldots,y^{(k)})=P\Big(X\leqslant x,\ \delta^{(1)}=y^{(1)},\ldots,\delta^{(k)}=y^{(k)}\Big),$$

где $x\in\mathbb{R}^1=(-\infty;+\infty)$, $y^{(i)}\in\{0,1\}$, $i=\overline{1,k}$; Θ — открытое множество в $\mathbb{R}^1$. В частности, определим маргинальные распределения $H(x;\theta)=P(X\leqslant x)$ и предположим, что выполнено следующее:

$$H^{(i)}(x;\theta)=P\Big(X\leqslant x,\ \delta^{(i)}=1\Big),\quad i=\overline{1,k}.$$

Легко видеть, что $\delta^{(1)}+\ldots+\delta^{(k)}=1$ и для субраспределений $H^{(i)}(x;\theta)$, $i=\overline{1,k}$, равенство

$$H^{(1)}(x;\theta)+\ldots+H^{(k)}(x;\theta)=H(x;\theta)\tag{1}$$

справедливо для всех $(x;\theta)\in\mathbb{R}^1\times\Theta$.

Предположим, что распределения $H(x;\theta)$ и $H^{(i)}(x;\theta)$, $i=\overline{1,k}$, абсолютно непрерывны. Определим интегральные функции интенсивности

$$\Lambda(x;\theta)=\int\limits_{-\infty}^{x}\frac{dH(u;\theta)}{1-H(u;\theta)}=-\log[1-H(x;\theta)],$$

$$\Lambda^{(i)}(x;\theta)=\int\limits_{-\infty}^{x}\frac{dH^{(i)}(u;\theta)}{1-H(u;\theta)},\ i=\overline{1,k}.$$

Легко видеть, что $\Lambda^{(1)}(x;\theta)+\ldots+\Lambda^{(k)}(x;\theta)=\Lambda(x;\theta)$; отсюда следует, что

$$1-H(x;\theta)=\exp\left\{-\sum_{i=1}^{k}\Lambda^{(i)}(x;\theta)\right\}=\prod_{i=1}^{k}[1-F^{(i)}(x;\theta)],\tag{2}$$

где $F^{(i)}(x;\theta)=1-\exp\{\Lambda^{(i)}(x;\theta)\}$, $i=\overline{1,k}$.

В [1] установлено, что функции $F^{(i)}(x;\theta)$, $i=\overline{1,k}$, обладают свойствами субраспределений.

В дальнейшем рассмотрим такую статистическую схему, согласно которой в рассматриваемой модели совокупность $(X,A^{(1)},\ldots,A^{(k)})$ подвергается случайному цензурированию справа и слева случайными величинами Y и L соответственно с абсолютно непрерывными неизвестными функциями распределения $K(y)$, $y\in\mathbb{R}^1$ и $L(y)$, $y\in\mathbb{R}^1$.

Наблюдению доступна совокупность $\Big(Z;D^{(-1)},D^{(0)},D^{(1)},\ldots,D^{(k)}\Big)$, где

$$\begin{aligned}
&Z=\max(L,\min(X,Y))=L\vee(X\wedge Y),\\
&D^{(-1)}=\{\omega: X(\omega)\wedge Y(\omega)<L(\omega)\},\\
&D^{(0)}=\{\omega: L(\omega)\leqslant Y(\omega)<X(\omega)\},\\
&D^{(i)}=A^{(i)}\cap\{\omega: L(\omega)\leqslant X(\omega)\leqslant Y(\omega)\},\quad i=\overline{1,k}.
\end{aligned}$$

Заметим, что события $\{D^{(-1)},D^{(0)},D^{(1)},\ldots,D^{(k)}\}$ также обладают свойствами событий $A^{(1)},\ldots,A^{(k)}$. В данной модели случайные величины Y,L и функции распределения K,L считаются мешающими.

Пусть $\Big\{X_j,L_j,Y_j;D^{(-1)},D^{(0)},D^{(1)},\ldots,D^{(k)}\Big\}_{j=1}^{\infty}$ — последовательность независимых копий совокупности $\Big(X,L,Y;D^{(-1)},D^{(0)},D^{(1)},\ldots,D^{(k)}\Big)$ и в n-м шаге эксперимента наблюдается выборка объема n:

$$\tilde Z^{(n)}=(\tilde Z_1,\tilde Z_2,\ldots,\tilde Z_n),\tag{3}$$

где

$$\tilde{Z}_j = \Big(Z_j; \Delta_j^{(-1)}, \Delta_j^{(0)}, \Delta_j^{(1)}, \ldots, \Delta_j^{(k)}\Big), \quad Z_j = L_j \vee (X_j \wedge Y_j), \quad \Delta_j^{(i)} = I(D_j^{(i)}), \quad i = \overline{1,k}.$$

Заметим, что в выборке (3) интересующие нас пары $(X_j; A_j^{(i)})$ наблюдаемы лишь в случае $\Delta_j^{(i)} = 1$, $i = \overline{1,k}$. Легко видеть, что наблюдаемые случайные величины Z_j имеют следующую функцию распределения:

$$N(x;\theta) = L(x)(1 - (1 - K(x))(1 - H(x;\theta))).$$

Введем субраспределения $T^{(i)}(x;\theta) = P(Z_j \leqslant x; D_j^{(i)})$, $i = \overline{-1,k}$, где имеет место тождество

$$T^{(-1)}(x;\theta) + T^{(0)}(x;\theta) + T^{(1)}(x;\theta) + \ldots + T^{(k)}(x;\theta) = N(x;\theta);$$

здесь

$$T^{(-1)}(x;\theta) = P(X_j \wedge Y_j < L_j; L_j \leqslant x) = \int\limits_{-\infty}^{x} \Big(1 - \big(1 - K(u)\big)\big(1 - H(u;\theta)\big)\Big) dL(u),$$

$$T^{(0)}(x;\theta) = P(L_j \leqslant Y_j < X_j; Y_j \leqslant x) = \int\limits_{-\infty}^{x} L(u)(1 - H(u;\theta))dK(u), \tag{4}$$

$$T^{(i)}(x;\theta) = P(L_j \leqslant X_j \leqslant Y_j; X_j \leqslant x; A_j^{(i)}) = \int\limits_{-\infty}^{x} L(u)\big(1 - K(u)\big)dH(u;i).$$

Ввиду присутствия цензурирования слева вместо $\Lambda^{(i)}(x;\theta)$ приходится иметь дело с усеченными на некотором уровне τ вариантами интегральных функции интенсивности (τ выбирается надлежащим образом):

$$\Lambda_\tau^{(i)}(x;\theta) = \Lambda^{(i)}(x;\theta) - \Lambda^{(i)}(\tau;\theta).$$

В этом случае, согласно (4), как легко видеть,

$$\Lambda_\tau^{(i)}(x;\theta) = \int\limits_{\tau}^{x} \frac{dT^{(i)}(u;\theta)}{L(u)(1 - K(u))(1 - H(u;\theta))}, \; i = \overline{1,k}. \tag{5}$$

Следовательно, вместо $1 - F_\tau(i)(x;\theta)$ можно рассматривать следующее тождество:

$$1 - F_\tau^{(i)}(x;\theta) = (1 - F^{(i)}(x;\theta))(1 - F^{(i)}(\tau;\theta))^{-1} = \exp\Big\{-\sum_{i=1}^{k} \Lambda_\tau^{(i)}(x;\theta)\Big\}, \quad i = \overline{1,k}.$$

Пусть $\Big(\mathcal{Y}^{(n)},\ \mathcal{U}^{(n)},\ \tilde{Q}_\theta^{(n)}\Big)$ — последовательность статистических экспериментов, порожденных наблюдениями (3). Обозначив через $\tilde{Z}$ множество значений случайной величины Z, получим соотношение

$$\mathcal{Y}^{(n)} = \Big\{\tilde{Z} \times \{0,1\}^{(k+2)}\Big\}^{(n)} = \overbrace{\Big\{\tilde{Z} \times \{0,1\}^{(k+2)}\Big\} \times \ldots \times \Big\{\tilde{Z} \times \{0,1\}^{(k+2)}\Big\}}^{n},$$

где $\{0,1\}^{(k+2)} = \overbrace{\{0,1\}\times\ldots\times\{0,1\}}^{k+2}$; $\mathcal{U}^{(n)}$ — σ-алгебра борелевских множеств в $\mathcal{Y}^{(n)}$; $\tilde{Q}_\theta^{(n)}$ — распределение на $\bigl(\mathcal{Y}^{(n)},\mathcal{U}^{(n)}\bigr)$, являющееся n-кратным прямым произведением следующих «одномерных» распределений:

$$\tilde{Q}_\theta\Bigl(x,\ y^{(-1)},\ y^{(0)},\ y^{(1)},\ \ldots,\ y^{(k)}\Bigr) = \\ = P\left(Z_j \leqslant x,\ \Delta_j^{(-1)} = y^{(-1)},\ \Delta_j^{(0)} = y^{(0)},\ \Delta_j^{(1)} = y^{(1)},\ \ldots,\ \Delta_j^{(k)} = y^{(k)}\right).$$

Пусть $f^{(i)}(x;\theta)$ — плотность субраспределения $F^{(i)}(x;\theta)$, $i = \overline{1,k}$. Тогда распределение $\tilde{Q}_\theta^{(n)}$ является абсолютно непрерывным относительно меры $\nu^{(n)}$, ее плотность при каждом $\theta\in\Theta$ определена на выборочном пространстве $\mathcal{Y}^{(n)}$ и задается следующей формулой:

$$\frac{d\tilde{Q}_\theta^{(n)}(\tilde{z}^{(n)})}{d\nu^{(n)}(\tilde{z}^{(n)})} = p_n(\tilde{z}^{(n)}\theta) = \\ = \prod_{m=1}^{n}\prod_{i=1}^{k}\left\{l(z_m)\Bigl(1-(1-(K(z_m))(1-H(z_m;\theta))\Bigr)\right\}^{y_m^{(-1)}} \times \\ \times\left\{L(z_m)(1-K(z_m))f^{(i)}(z_m;\theta)\cdot\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{k}[1-F^{(j)}(z_m;\theta)]\right\}^{y_m^{(i)}} \times \\ \times\Bigl\{L(z_m)k(z_m)(1-H(z_m;\theta))\Bigr\}^{y_m^{(0)}},\ \tilde{z}^{(n)}\in\mathcal{Y}^{(n)}, \quad (6)$$

где $k(x) = K'(x)$, $l(x) = L'(x)$, $d\nu^{(n)}(\tilde{z}^{(n)}) = d\nu(\tilde{z}_1)\times\ldots\times d\nu(\tilde{z}_n)$, $d\nu(\tilde{z}_m) = \varepsilon_{y_m^{(i)}}\times dx_m$, $i=\overline{1,k}$, $m=\overline{1,n}$; $\varepsilon_{y_m^{(i)}}$ — считающая мера, сосредоточенная в точке $y_m^{(i)}\in\{0,1\}$.

Пусть выполнено условие

$$h^{(i)}(x;\theta) = f^{(i)}(x;\theta)\prod_{j\neq i}(1-F^{(j)}(x;\theta)), \quad i=\overline{1,k},$$

где θ_0 — истинное значение параметра θ, $\gamma(x;\theta) = 1-(1-K(x))(1-H(x;\theta))$.

При $u\in\mathbb{R}^1$ справедливо тождество

$$\theta_0 + \frac{u}{\sqrt{n}} = \theta_n \in \Theta.$$

Согласно (6), зададимся СОП

$$\frac{d\tilde{Q}_{\theta_n}^{(n)}(\tilde{Z}^{(n)})}{d\tilde{Q}_{\theta_0}^{(n)}(\tilde{Z}^{(n)})} = \frac{p_n(\tilde{Z}^{(n)};\theta_n)}{p_n(\tilde{Z}^{(n)};\theta_0)} = \prod_{m=1}^{n}\Bigl\{\prod_{i=1}^{k}\Bigl[\frac{h^{(i)}(z_m;\theta_n)}{h^{(i)}(z_m;\theta_0)}\Bigr]\Bigr\}^{y_m^{(i)}}\Bigl\{\frac{\gamma(z_m;\theta_n)}{\gamma(z_m;\theta_0)}\Bigr\}^{y_m^{(-1)}}\Bigl\{\frac{1-H(z_m;\theta_n)}{1-H(z_m;\theta_0)}\Bigr\}^{y_m^{(0)}}.$$

Прологарифмируем СОП:

$$L_n(u) = \log\Bigl\{\frac{d\tilde{Q}_{\theta_n}^{(n)}(\tilde{Z}^{(n)})}{d\tilde{Q}_{\theta_0}^{(n)}(\tilde{Z}^{(n)})}\Bigr\} = n\sum_{i=1}^{k}\int_{-\infty}^{+\infty}\log\Bigl[\frac{h^{(i)}(x;\theta_n)}{h^{(i)}(x;\theta_0)}\Bigr]dT_n^{(i)}(x) + \\ + \int_{-\infty}^{+\infty}\log\Bigl[\frac{\gamma(x;\theta_n)}{\gamma(x;\theta_0)}\Bigr]dT_n^{(-1)}(x) + \int_{-\infty}^{+\infty}\log\Bigl[\frac{1-H(x;\theta_n)}{1-H(x;\theta_0)}\Bigr]dT_n^{(0)}(x). \quad (7)$$

При $u \in \mathbb{R}^1$ определим «близкую альтернативу» $\theta_0 + u/\sqrt{n} = \theta_n \in \Theta$, где θ_0 — истинное значение параметра θ. Теперь сформулируем условия регулярности, при справедливости которых будет установлена ЛАН семейства распределений $\{\widetilde{Q}_\theta^{(n)}, \theta \in \Theta\}$ в точке $\theta = \theta_0$.

Условие 1. Носители $N^{(i)} = \{x : f^{(i)}(x;\theta) > 0\}$, $i = \overline{1,k}$, не зависят от θ, а множество $\bigcap\limits_{i=1}^{k} N^{(i)}$ непусто.

Условие 2. Для любых двух точек $\theta_1, \theta_2 \in \Theta$, $\theta_1 \neq \theta_2$, и $x \in N^{(i)}$, выполняется неравенство $f^{(i)}(x;\theta_1) \neq f^{(i)}(x;\theta_2)$, $i = 1, \ldots, k$.

Условие 3. Существуют и конечны для всех x производные $\partial^l f^{(i)}(x;\theta)/\partial\theta^l$, $l = 1, 2$, $i = 1, \ldots, k$; при этом

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\partial^l f^{(i)}(x;\theta)}{\partial\theta^l} \right| dx < \infty, \quad l = 1, 2, \quad i = 1, \ldots, k.$$

Условие 4. Производные $\dfrac{\partial \log f^{(i)}(x;\theta_0)}{\partial\theta}$ и $\dfrac{\partial \log h^{(i)}(x;\theta_0)}{\partial\theta}$, $i = \overline{1,k}$, являются функциями ограниченной вариации.

Условие 5. Функции информации Фишера являются конечными и положительными в точке $\theta = \theta_0$:

$$J^{(i)}(\theta) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \Big(\frac{\partial \log h^{(i)}(x;\theta)}{\partial\theta}\Big)^2 dT^{(i)}(x;\theta) + \int\limits_{-\infty}^{\infty} \Big(\frac{\partial \log(1 - H(x;\theta))}{\partial\theta}\Big)^2 dT^{(-1)}(x;\theta) + \\ + \int\limits_{-\infty}^{\infty} \Big(\frac{\partial \log(1 - H(x;\theta))}{\partial\theta}\Big)^2 dT^{(0)}(x;\theta), \quad i = \overline{1,k}.$$

Введем обозначение $J(\theta) = J^{(1)}(\theta) + \ldots + J^{(k)}(\theta)$ и заметим, что фишеровская информация, содержащаяся в выборке (3), равна $nJ(\theta)$. Верна следующая теорема.

Теорема 1 (см. [6])**.** *Пусть справедливы условия* 1–5*. Тогда при каждом* $u \in \mathbb{R}^1$ *для СОП имеет место представление*

$$\frac{d\widetilde{Q}_{\theta_n}^{(n)}(\widetilde{Z}^{(n)})}{d\widetilde{Q}_{\theta_0}^{(n)}(\widetilde{Z}^{(n)})} = \exp\left\{ uW_n - \frac{u^2}{2} J(\theta_0) + R_n(u) \right\},$$

где

$$W_n = \sum_{i=1}^{k} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \log h^{(i)}(x;\theta_0)}{\partial\theta} dn^{-1/2} \widetilde{W}_i\Big(T^{(i)}(x); n\Big) + \\ + \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \log(1 - H(x;\theta_0))}{\partial\theta} dn^{-1/2} \widetilde{W}_i\Big(T^{(-1)}(x); n\Big) + \\ + \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \log(1 - H(x;\theta_0))}{\partial\theta} dn^{-1/2} \widetilde{W}_i\Big(T^{(0)}(x); n\Big),$$

$R_n(u) \to 0$ *при* $n \to \infty$ *по* $\widetilde{Q}_{\theta_0}^{(n)}$*-вероятности. Здесь* $\widetilde{W}_i(y; n)$ *— двупараметрические винеровские процессы на* $[0,1] \times (0, \infty)$*, причем компоненты вектора* $(\widetilde{W}_1, \ldots, \widetilde{W}_k)$ *являются независимыми.*

Замечание 1. Ввиду свойств процессов $\widetilde{W}_i$, случайная величина W_n — сумма независимых стохастических интегралов Ито, каждый из которых по распределению совпадает с соответствующей нормально распределенной случайной величиной $N(0, J^{(i)}(\theta_0))$, $i = \overline{1,k}$. Следовательно,

$$W_n \stackrel{D}{=} N(0, J(\theta_0)). \tag{8}$$

Учитывая соотношение (8), утверждение теоремы 1 можно записать в виде

$$L_n(u) = uJ^{1/2}(\theta_0)\zeta - \frac{u^2}{2}J(\theta_0) + R_n(u) \tag{9}$$

при каждом $u \in \mathbb{R}^1$. Здесь ζ — стандартная нормальная случайная величина, равенство понимается в смысле распределения $\widetilde{Q}_{\theta_0}^{(n)}$. Свойство (9) называется ЛАН для СОП.

3. Основной результат. Пусть $\{\pi(u),\ u \in \Theta\}$ — неотрицательная измеримая функция и $l(d;\theta) = (d-\theta)^2$ — функция потерь на множестве $D \times \Theta$, где D — множество возможных оценок для θ.

Рассмотрим оценки $\theta_n \in D$, определяемые следующим соотнощением:

$$\hat{\theta}_n = \arg\min_{d\in D} \frac{\int\limits_\Theta l(d;\theta)p_n(\tilde{Z}^{(n)};\theta)\pi(\theta)d\theta}{\int\limits_\Theta p_n(\tilde{Z}^{(n)};\theta)\pi(\theta)d\theta}. \tag{10}$$

Заметим, что если θ — случайная величина с априорной плотностью π, то θ_n является байесовской оценкой для θ. Докажем асимптотическую нормальность оценок θ_n, предельные распределения которых не зависят от функций π.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия регулярности* 1–5, *функция* $\pi(\theta)$ *непрерывна в окрестности точки* θ_0 *и* $\pi(\theta_0) \neq 0$. *Тогда*

$$\sqrt{n}(\theta_n - \theta_0) \Rightarrow N(0, (J(\theta_0))^{-1}) \quad \textit{при } n \to \infty.$$

Доказательство. В условиях 1–5 из теоремы 1 следует ЛАН (9). Согласно определению (10), оценка $\hat{\theta}_n$ имеет следующее представление:

$$\hat{\theta}_n = \frac{\int\limits_\Theta \theta p_n(\tilde{Z}^{(n)};\theta)\pi(\theta)d\theta}{\int\limits_\Theta p_n(\tilde{Z}^{(n)};\theta)\pi(\theta)d\theta}. \tag{11}$$

В интегралах (11) переменное θ заменим на близкую альтернативу $\theta_0 + u/\sqrt{n} = \theta_n \in \Theta$, $u \in \mathbb{R}^1$. Используя $L_n(u)$, получим следующее:

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta_0) = \frac{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} u\exp(L_n(u))\pi\Big(\theta_0 + \frac{u}{\sqrt{n}}\Big)du}{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \exp(L_n(u))\pi\Big(\theta_0 + \frac{u}{\sqrt{n}}\Big)du}. \tag{12}$$

Пусть

$$L(u) = uJ^{1/2}(\theta_0)\zeta - \frac{u^2}{2}J(\theta_0).$$

Тогда, согласно (9), для любого $u \in \mathbb{R}^1$ заключаем, что $\exp(L_n(u)) \Rightarrow \exp(L(u))$ при $n \to \infty$. Отсюда следует, что конечномерные распределения процесса $L_n(u)$ сходятся к конечномерным распределениям процесса $L(u)$. Формально переходя к пределу под знаком интеграла в (12), получим

$$\zeta J^{1/2}(\theta_0) = \frac{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} u \exp(L(u))du}{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \exp(L(u))du}. \tag{13}$$

Для обоснования такого предельного перехода выберем фиксированное число $C > 0$ и для $u \in [-C, C]$ покажем непрерывность процесса $L_n(u)$. Пусть числа u_1 и u_2 таковы, что $\theta_0 + u_j \in [-C, C]$, $j = 1, 2$. Покажем, что при достаточно больших n выполнено следующее:

$$M_{\theta_0}\Big(L_n(u_1) - L_n(u_2)\Big)^2 \leqslant \alpha(u_1 - u_2)^2, \quad \alpha > 0. \tag{14}$$

Поскольку

$$\sum_{i=1}^{k} \Delta_m^{(i)} + \Delta_m^{(-1)} + \Delta_m^{(0)} = 1, \quad m = \overline{1, n},$$

то справедливы следующие выкладки:

$$\begin{aligned}
M_{\theta_0}\Big(L_n(u_1) - L_n(u_2)\Big)^2 = M_{\theta_0}\left\{\sum_{m=1}^{n}\left\{\Delta_m^{(-1)}\left[\log\gamma\left(Z_m;\theta_0+\frac{u_1}{\sqrt{n}}\right) - \log\gamma\left(Z_m;\theta_0+\frac{u_2}{\sqrt{n}}\right)\right] + \right.\right.\\
+\sum_{i=1}^{k}\Delta_m^{(i)}\left[\log h^{(i)}\left(Z_m;\theta_0+\frac{u_1}{\sqrt{n}}\right) - \log h^{(i)}\left(Z_m;\theta_0+\frac{u_2}{\sqrt{n}}\right)\right] + \\
\left.\left.+\Delta_m^{(0)}\left[\log\left(1-H\left(Z_m;\theta_0+\frac{u_1}{\sqrt{n}}\right)\right) - \log\left(1-H\left(Z_m;\theta_0+\frac{u_2}{\sqrt{n}}\right)\right)\right]\right\}\right\}^2 \leqslant \\
\leqslant n\left\{\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left[\log\gamma\left(x;\theta_0+\frac{u_1}{\sqrt{n}}\right) - \log\gamma\left(x;\theta_0+\frac{u_2}{\sqrt{n}}\right)\right]^2 dT^{(-1)}(x;\theta_0) + \right.\\
+\sum_{i=1}^{k}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left[\log h^{(i)}\left(x;\theta_0+\frac{u_1}{\sqrt{n}}\right) - \log h^{(i)}\left(x;\theta_0+\frac{u_2}{\sqrt{n}}\right)\right]^2 dT^{(i)}(x;\theta_0) + \\
\left.+\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left[\log\left(1-H\left(x;\theta_0+\frac{u_1}{\sqrt{n}}\right)\right) - \log\left(1-H\left(x;\theta_0+\frac{u_2}{\sqrt{n}}\right)\right)\right]^2 dT^{(0)}(x;\theta_0)\right\} = \\
= J(\theta_0)(u_1-u_2)^2, \quad (15)
\end{aligned}$$

что доказывает (14). Таким образом, согласно (15), процесс $\{L_n(u),\ u \in [-C, C]\}$ является элементом пространства $\mathbb{C}[-C; C]$.

С другой стороны, при любых t_1 и t_2 следующий функционал является непрерывным по ψ:

$$\Phi(\psi) = t_1 \int\limits_{-C}^{C} u\,\psi(u)du + t_2 \int\limits_{-C}^{C} u\,\psi(u)du.$$

Согласно теореме Крамера—Уолда, ввиду непрерывности $L_n(u)$ и условия (7), из [3] следует, что распределения случайных векторов

$$\left(\int\limits_{-C}^{C} u\exp(L_n(u))\pi\left(\theta_0+\frac{u}{\sqrt{n}}\right)du,\ \int\limits_{-C}^{C}\exp(L_n(u))\pi\left(\theta_0+\frac{u}{\sqrt{n}}\right)du\right)$$

сходятся к распределению вектора

$$\left(\pi(\theta_0)\int\limits_{-C}^{C} u\exp(L(u))du,\ \pi(\theta_0)\int\limits_{-C}^{C}\exp(L(u))du\right).$$

С другой стороны, для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что верны следующие соотношения:

$$P\left(\pi(\theta_0)\int\limits_{|u|>C} u\exp(L(u))du > \delta\right) < \varepsilon, \tag{16}$$

$$P\left(\pi(\theta_0)\int\limits_{|u|>C}\exp(L(u))du > \delta\right) < \varepsilon. \tag{17}$$

При достаточно больших n неравенства типа (16) и (17) имеют места также и для $L_n(u)$. Более того, при достаточно больших C и n имеет место неравенство

$$\begin{aligned} &P\left(t_1\int\limits_{|u|>C} u\exp(L_n(u))\pi\Big(\theta_0+\frac{u}{\sqrt{n}}\Big)du + t_2\int\limits_{|u|>C}\exp(L_n(u))\pi\Big(\theta_0+\frac{u}{\sqrt{n}}\Big)du > \frac{1}{C^N}\right) \leqslant \\ &\leqslant \sum_{|l|>C} P\left(\int\limits_{l}^{l+1}(|u|+1)\exp(L_n(u))\pi\Big(\theta_0+\frac{u}{\sqrt{n}}\Big)du > \frac{1}{l^N(t_1\vee t_2)}\right) \leqslant \\ &\leqslant \sum_{|l|>C} P\left(\max_{u\in[l,l+1]}\Big\{\exp(L_n(u))\Big\} > \frac{l^{-(N+M+2)}}{(t_1\vee t_2)}\right) \leqslant \frac{\lambda_N}{C^N}. \end{aligned} \tag{18}$$

Ввиду (17), при больших n имеем

$$\sqrt{n}(\hat\theta_n-\theta_0) = \frac{\int\limits_{-C}^{C} u\exp(L_n(u))du}{\int\limits_{-C}^{C}\exp(L_n(u))du} + r_n(C),$$

где $P\Big(|r_n(C)| > \delta\Big) < \varepsilon$. Таким образом, равенство (13) имеет место, и теорема доказана. $\square$

Замечание 2. Благодаря теореме 2, согласно определению Фишера [4], оценку $\hat\theta_n$ можно считать асимптотически эффективной.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Абдушукуров А. А.* Статистика неполных наблюдений. — Ташкент: Университет, 2009.
2. *Абдушукуров А. А., Нурмухамедова Н. С.* Локальная асимптотическая нормальность в модели конкурирующих рисков// Узбек. мат. ж. — 2012. — № 2. — С. 5–12.
3. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Введение в теорию случайных процессов. — М.: Наука, 1977.
4. *Ибрагимов И. А., Хасьминский Р. З.* Асимптотическая теория оценивания. — М.: Наука, 1979.
5. *Русас Дж.* Континуальность вероятностных мер. — М.: Мир, 1975.
6. *Abdushukurov A. A., Nurmuhamedova N. S.* Local approximate normality of likelihood ratio statistics in competing ricks model under random censorship fromboth sides// Far East J. Theor. Stat. — 2013. — *42*, № 2. — С. 107–122.
7. *Hajek J.* Local asymptotic minimax and admissibility in estimation // Proc. 6th Berkeley Symp. on Math. Statist. Prob. — 1972. — *1* — С. 175–194.

8. *Le Cam L.* On some asymptotic properties of the maximum likelihood estimates and related Bayes estimates.// Univ. California Publ. Statist. — 1953. — *1* — С. 277–330.
9. *Van der Vaart A. W.* Asymptotic Statistics. — Cambridge Univ. Press, 1998.
10. *Wald A.* Tests of statistical hypothesis concerning several parameters, when the number of observations is large// Trans. Am. Math. Soc. — 1943. — *54* — С. 426–482.

А. А. Абдушукуров
Национальный университет Узбекистана им. М. Улугбека, Ташкент, Узбекистан
E-mail: a_abdushukurov@rambler.ru

Н. С. Нурмухамедова
Национальный университет Узбекистана им. М. Улугбека, Ташкент, Узбекистан
E-mail: rasulova_nargiza@mail.ru

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 144 (2018). С. 56–64

УДК 517.55

ВЫЧЕТ И ПРИНЦИП АРГУМЕНТА ДЛЯ $A(z)$-АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

© 2018 г. **Ж. К. ТИШАБАЕВ, Т. У. ОТАБОЕВ, Ш. Я. ХУРСАНОВ**

Аннотация. В работе получены формулы вычисления вычета для $A(z)$-аналитических функций, доказаны аналоги принципа аргумента и теоремы Руше.

Ключевые слова: $A(z)$-аналитическая функция, ядро типа Коши, $A(z)$-лемниската.

AMS Subject Classification: 35K25, 35K70, 35R35

1. Введение. Пусть $A(z)$ — антианалитическая функция, т.е. $\partial A/\partial z = 0$ в области $D \subset \mathbb{C}$, причем $|A(z)| \leqslant C < 1$ для всех $z \in D$. Функция $f(z)$ называется *$A(z)$-аналитической в области D,* если для любого $z \in D$ выполняется следующее равенство:

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = A(z)\frac{\partial f}{\partial z}. \tag{1}$$

Класс всех $A(z)$-аналитических функций, заданных в области D, обозначим через $O_A(D)$. Так как антианалитческая функция является бесконечно гладкой, то $O_A(D) \subset C^{\infty}(D)$ (см. [3]).

Теорема 1 (см. [10], аналог теоремы Коши)**.** *Если $f \in O_A(D) \cap C(\bar{D})$, где $D \subset \mathbb{C}$ — область со спрямляемой границей ∂D, то имеет место тождество*

$$\int\limits_{\partial D} f(z)(dz + A(z)d\bar{z}) = 0.$$

Пусть $D \subset \mathbb{C}$ — выпуклая область и $\xi \in D$ — фиксированная точка. Рассмотрим ядро типа Коши

$$K(\xi, z) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \frac{1}{\xi - z + \overline{\int\limits_{\gamma(z,\xi)} \bar{A}(\tau)d\tau}}, \tag{2}$$

где $\gamma(\xi, z)$ — гладкая или кусочно гладкая кривая, соединяющая точки $\xi, z \in D$. Так как функция $\bar{A}(z)$ аналитична, а область D односвязна, то интеграл

$$I(z) = \int\limits_{\gamma(\xi,z)} \bar{A}(\tau)d\tau$$

не зависит от пути интегрирования; он совпадает с первообразной: $I'(z) = \bar{A}(z)$.

Теорема 2 (см. [10, теорема 5])**.** *Ядро Коши $K(z, \xi)$ является $A(z)$-аналитической функцией вне точки $z = \xi$, т.е. $K \in O_A(D \setminus \{\xi\})$. Кроме того, в точке $z = \xi$ функция $K(z, \xi)$ имеет полюс первого порядка.*

Согласно теореме 2 из [10], функция

$$\psi(z, \xi) := z - \xi + \overline{\int\limits_{\gamma(\xi,z)} \bar{A}(\tau)d\tau}$$

ISSN 0233–6723

является $A(z)$-аналитической функцией.

Следующее множество представляет собой открытое подмножество в D:

$$L(\xi, r) = \left\{ z \in D: \ |\psi(z,\xi)| = \left| z - \xi + \overline{\int\limits_{\gamma(\xi,z)} \bar{A}(\tau) d\tau} \right| < r \right\}.$$

Для достаточно малых $r > 0$ это множество компактно принадлежит $L(\xi, r) \Subset D$ и содержит точку ξ. Это множество называется $A(z)$-*лемнискатой* с центром в точке ξ и обозначается $L(\xi, r)$. Лемниската $L(\xi, r)$ является односвязным множеством (см. [10]).

Теорема 3 (см. [10], формула Коши)**.** *Пусть $D \subset \mathbb{C}$ — выпуклая область, и $G \Subset D$ — произвольная подобласть с гладкой или кусочно гладкой границей ∂G, которая компактно лежит в D. Тогда для любой функции $f(z) \in O_A(G) \bigcap C(\bar{G})$ имеет место формула*

$$f(z) = \int\limits_{\partial G} K(\xi, z) f(\xi)(d\xi + A(\xi) d\bar{\xi}), \quad z \in G. \tag{3}$$

Заметим, что аналогом степенных рядов для $A(z)$-аналитических функций будут следующие ряды:

$$\sum_{j=0}^{\infty} c_j \left(z - a + \overline{\int\limits_{\gamma(a,z)} \bar{A}(\tau) d\tau} \right)^j, \quad a \in D, \quad c_j \text{ — константы.} \tag{4}$$

Областью сходимости ряда (4) будет лемниската $L(a, r) = \{|\psi(z, a)| < r\}$, где радиус сходимости r находится по формуле Коши—Адамара:

$$\frac{1}{r} = \varlimsup_{j \to \infty} \sqrt[j]{|c_j|}.$$

Теорема 4 (см. [10], разложение в ряд Лорана)**.** *Пусть $f(z)$ — $A(z)$-аналитическая в кольце из лемнискат*:

$$f \in O_A\big(L(a, R) \setminus L(a, r)\big), \quad r < R.$$

Тогда $f(z)$ разлагается в этом кольце в ряд Лорана:

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \psi^k(z, a). \tag{5}$$

Ряд (5) сходится равномерно внутри следующего кольца:

$$L(a, R) \setminus L(a, r) = \Big\{ z \in D: \ r < |\psi(z, a)| < R \Big\}.$$

Определение 1. Изолированная особая точка a функции $f(z)$ называется:

(1) *устранимой особой точкой*, если существует конечный предел $\lim\limits_{z \to a} f(z) = B$;

(2) полюсом, если $\lim\limits_{z \to a} f(z) = \infty$;

(3) существенно особой точкой, если предел $f(z)$ при $z \to a$ не существует.

Пусть функция $f(z)$ является $A(z)$-аналитической в $L(a, r) \setminus \{a\}$, а точка $z = a$ является её особой точкой. Если точка a является нулем $A(z)$-аналитической функции $f(z)$, не равной нулю тождественно ни в какой окрестности $L(a, r)$, то существует такое натуральное число n, что выполнено тождество

$$f(z) = \left(z - a + \overline{\int\limits_{\gamma(z,a)} \overline{A(\tau)} d\tau} \right)^n \cdot \varphi(z),$$

где функция $\varphi(z)$ является $A(z)$-аналитической в точке a и отличной от нуля в некоторой окрестности этой точки. Изолированная особая точка $a \in \mathbb{C}$ функции $f(z)$ является устранимой в том и только том случае, когда лорановское разложение $f(z)$ в окрестности a не содержит главной части, т.е.

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k\left(z-a+\overline{\int\limits_{\gamma(z,a)}\overline{A(\tau)}d\tau}\right)^k.$$

В настоящей работе получены следующие результаты.

1. Изолированная особая точка $a\in\mathbb{C}$ $A(z)$-аналитической функции $f(z)$ является полюсом в том и только том случае, если главная часть лорановского разложения $A(z)$-аналитической функции $f(z)$ в окрестности точки a содержит лишь конечное (и положительное) число отличных от нуля членов, т.е.

$$f(z)=\sum_{k=-n}^{\infty}c_k\left(z-a+\overline{\int\limits_{\gamma(z,a)}\overline{A(\tau)}d\tau}\right)^k.$$

2. Если функция $f(z)$ является $A(z)$-мероморфной в области $D\subset\mathbb{C}$ и $G\Subset D$ — область, ориентированная граница ∂G которой является непрерывной кривой, не содержащей ни нулей, ни полюсов функции $f(z)$, то

$$N-P=\frac{1}{2\pi}\Delta_{\partial G}\arg f(z),$$

(аналог принципа аргумента).

3. Если функции $f(z)$ и $g(z)$ являются $A(z)$-аналитическими в замкнутой области $\bar{G}$ с непрерывной границей ∂G и выполнено соотношение

$$|f(z)|>|g(z)|\ \text{для всех}\ z\in\partial G,$$

то функции $f(z)$ и $f(z)+g(z)$ имеют в G одинаковое число нулей (аналог теоремы Руше).

2. Вычеты $A(z)$-аналитических функций. Пусть $f(z)$ — $A(z)$-аналитическая функция в $D\setminus\{a_1,a_2,\dots,a_n\}$, непрерывная на ∂D, где $a_1,a_2,\dots,a_n$ — изолированные особые точки. Тогда существует такое число $r>0$, что $L(a_k,r)\cap L(a_l,r)=\varnothing$ при $k\neq l$.

Пусть справедливы следующие соотношения:

$$G_r=\big\{z\in D:|z-\xi|>r\ \text{для всех}\ \xi\in\partial D\big\};\qquad \bigcup_{k=1}^{n}L(a_k,r)\subset G_r,$$

где ∂G_r — произвольный кусочно гладкий замкнутый контур, содержащий внутри себя точки $a_1,a_2,\dots,a_n$ и целиком лежащий в области D. Так как функция $f(z)$ является $A(z)$-аналитической в каждой точке замкнутой области, ограниченной сложным контуром

$$\partial G_r\cup\sum_{k=1}^{n}\partial L(a_k,r),$$

то, по теореме Коши, имеет место равенство

$$\oint\limits_{\partial G_r}f(\xi)\omega(\xi)=\sum_{k=1}^{n}\oint\limits_{\partial L(a_k,r)}f(\xi)\omega(\xi),\tag{6}$$

где $\omega(z)=dz+A(z)d\,\bar{z}$

Определение 2. *Вычетом* $A(z)$-аналитической функции $f(z)$ в точке a называется значение интеграла от функции $f(z)$ по достаточно малой $A(z)$-лемнискате $L(a,r)$, деленное на $2\pi i$:

$$\operatorname*{res}_{z=a}{}_A f(z):=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\partial L(a,r)}f(\xi)\omega(\xi).\tag{7}$$

Имеет место следующий аналог теоремы Коши о вычетах.

Теорема 5. *Пусть функция $f(z)$ является $A(z)$-аналитической всюду, за исключением изолированного множества особых точек области $G \Subset D$, а ее граница ∂G не содержит особых точек. Тогда*

$$\oint\limits_{\partial G} f(\xi)\omega(\xi) = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{res}_A z = a_k f(z). \tag{8}$$

Доказательство теоремы следует непосредственно из формулы (6) и определения 2.

Пример 1. Фиксируем $\xi \in D$ и рассмотрим ядро

$$K_n(\xi, z) = \frac{n!}{2\pi i} \cdot \frac{1}{\psi(\xi, z)^{n+1}}.$$

Тогда

$$\operatorname*{res}_{A\atop z=a} K_n(\xi, z) = \begin{cases} 0, & n \neq 1, \\ 1, & n = 0. \end{cases} \tag{9}$$

Пусть в точке $z = a$ функция $f(z)$ разлагается в ряд Лорана:

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \left(z - a + \overline{\int\limits_{\gamma(a,z)} \overline{A(\tau)} d\tau} \right)^k. \tag{10}$$

Теорема 6. *Вычет $A(z)$-аналитической функции $f(z)$ в изолированной особой точке $a \in \mathbb{C}$ равен коэффициенту при минус первой степени $\psi(z, a)$ в ее лорановском разложении в окрестности $A(z)$-лемнискаты $L(a, r)$ в точке a:*

$$\operatorname*{res}_{A\atop z=a} f(z) = c_{-1}. \tag{11}$$

Доказательство. Равенство (11) получается из равенства (10) с помощью почленного интегрирования по лемнискате $\partial L(a, r)$ при использовании (9):

$$\operatorname*{res}_{A\atop z=a} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \oint\limits_{\partial L(a,r)} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \left(z - a + \overline{\int\limits_{\gamma(a,z)} \overline{A(\tau)} d\tau} \right)^k \omega(\xi) =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \oint\limits_{\partial L(a,r)} \left(z - a + \overline{\int\limits_{\gamma(a,z)} \overline{A(\tau)} d\tau} \right)^k \omega(\xi) = \frac{1}{2\pi i} 2\pi i c_{-1} = c_{-1}.$$

□

Определение 3. Точка $z = a$ называется *нулем* $A(z)$-аналитической функции $f(z)$ порядка n, если

$$f(z) = \left(z - a + \overline{\int\limits_{\gamma(a,z)} \overline{A(\tau)} d\tau} \right)^n \cdot g(z), \tag{12}$$

где $g(a) \neq 0$ и $g(z) \in O_A(D)$.

Определение 4. Точка $z = a$ называется *полюсом* $A(z)$-аналитической функции $f(z)$ порядка n, если точка a является нулем функции $1/f(z)$ порядка n.

Теорема 7. *Изолированная особая точка $a \in \mathbb{C}$ для $A(z)$-аналитической функции $f(z)$ является полюсом в том и только том случае, если главная часть лорановского разложения $f(z)$ в* *окрестности $A(z)$-лемнискаты $L(a,r)$ в точке a содержит лишь конечное число отличных от нулях членов, т.е. справедливо равенство*

$$f(z)=\sum_{k=-n}^{\infty} c_k\left(z-a+\overline{\int\limits_{\gamma(a,z)} \overline{A(\tau)}d\tau}\right)^k, \quad n\geqslant 1.$$

Доказательство. ($\Rightarrow$) Пусть a — полюс; так как $\lim\limits_{z\to a} f(z)=\infty$, то существует проколотая окрестность точки a, в которой $f(z)$ является $A(z)$-аналитична и отлична от нуля. В этой окрестности функция $g(z)=1/f(z)$ является $A(z)$-аналитической, причем существует предел $\lim\limits_{z\to a} g(z)=0$. Следовательно, a является устранимой точкой (нулем) функции $g(z)$, в нашей окрестности $L(a,r)$ справедливо разложение

$$g(z)=\sum_{k=n}^{\infty} b_k\left(z-a+\overline{\int\limits_{\gamma(z,a)} \overline{A(\tau)}d\tau}\right)^k.$$

Но тогда в той же окрестности получим тождество

$$f(z)=\frac{1}{g(z)}=\frac{1}{\left(z-a+\overline{\int\limits_{\gamma(z,a)} \overline{A(\tau)}d\tau}\right)^n}\cdot\frac{1}{b_n+b_{n+1}\left(z-a+\overline{\int\limits_{\gamma(z,a)} \overline{A(\tau)}d\tau}\right)+\ldots}.$$

Второй множитель является $A(z)$-аналитической функцией в точке a, а значит, допускает тейлоровское разложение:

$$\frac{1}{b_n+b_{n+1}\left(z-a+\overline{\int\limits_{\gamma(z,a)} \overline{A(\tau)}d\tau}\right)+\ldots}=c_0+c_1\left(z-a+\overline{\int\limits_{\gamma(z,a)} \overline{A(\tau)}d\tau}\right)+\ldots.$$

Подставляя это разложение, получим:

$$f(z)=\sum_{k=-n}^{\infty} c_k\left(z-a+\overline{\int\limits_{\gamma(z,a)} \overline{A(\tau)}d\tau}\right)^k.$$

Это лорановское разложение $f(z)$ в окрестности точки $L(a,r)\setminus\{a\}$, и мы видим, что его главная часть содержит конечное число членов.

($\Leftarrow$) Пусть $f(z)$ в окрестности точки $L(a,r)\setminus\{a\}$ представляется лорановским разложением, главная часть которого содержит конечное число членов; пусть $c_n\neq 0$. Тогда $f(z)$ является $A(z)$-аналитической в этой окрестности, так же, как и функция $g(z)=\psi(z,a)^n\cdot f(z)$.

Последняя функция в нашей окрестности представляется следующим разложением:

$$g(z)=c_{-n}+c_{-n+1}\left(z-a+\overline{\int\limits_{\gamma(z,a)} \overline{A(\tau)}d\tau}\right)+c_{-n+2}\left(z-a+\overline{\int\limits_{\gamma(z,a)} \overline{A(\tau)}d\tau}\right)^2\ldots.$$

Из этого равенства видно, что a является устранимой точкой и существует $\lim\limits_{z\to a} g(z)=c_{-n}\neq 0$. Но тогда функция $f(z)=g(z)/\psi(z,a)^n$ стремится к бесконечности при $z\to a$, т.е. a является полюсом. Теорема доказана. $\square$

Теорема 8. *Пусть точка $z=a$ является полюсом порядка n для $A(z)$-аналитической функции $f(z)$. Тогда справедлива следующая формула*:

$$\operatorname*{res}_{z=a}{}_A f(z)=\frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to a}\frac{\partial^{n-1}}{\partial z^{n-1}}\left[f(z)\left(z-a+\overline{\int\limits_{\gamma(a,z)} \overline{A(\tau)}d\tau}\right)^n\right]. \tag{13}$$

Доказательство. На основании теоремы 7, $A(z)$-аналитическая функция $f(z)$ имеет вид

$$f(z) = \sum_{k=-n}^{\infty} c_k \left(z - a + \overline{\int_{\gamma(a,z)} \overline{A(\tau)} d\tau} \right)^k.$$

Умножив обе стороны этого равенства на $\left(z - a + \overline{\int_{\gamma(a,z)} \overline{A(\tau)} d\tau} \right)^n$, получаем:

$$f(z) \left(z - a + \overline{\int_{\gamma(a,z)} \overline{A(\tau)} d\tau} \right)^n = c_{-n} + c_{-n+1}\psi(z,a) + \cdots + c_{-1}\psi(z,a)^{n-1} + \psi(z,a)^n h(z); \quad (14)$$

здесь $h(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \psi(z,a)^k$. Возьмем частную производную от функции $\psi(z,a)$:

$$\frac{\partial \psi^k}{\partial z} = k\psi^{k-1} \frac{\partial \psi}{\partial z} = k\psi^{k-1}. \quad (15)$$

Используя это равенство, из (14) получаем следующее:

$$\frac{\partial^{n-1}}{\partial z^{n-1}} \left[f(z) \left(z - a + \overline{\int_{\gamma(a,z)} \overline{A(\tau)} d\tau} \right)^n \right] = (n-1)! c_{-1} + \psi(z,a) h_1(z), \quad (16)$$

где

$$h_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!} c_k \psi(z,a)^k.$$

Если в равенстве (16) перейти к пределу при $z \to a$, то получается формула (13). Теорема доказана. □

3. Принцип аргумента для $A(z)$-аналитических функций.

Определение 5. $A(z)$-аналитическая функция $f(z)$, не имеющая в области D других особенностей, кроме полюсов, называется $A(z)$-*мероморфной* в области D.

Пусть функция $f \in O_A(0 < |\psi(z,a)| < R)$, $0 < R$, не обращается в нуль в проколотой окрестности точки a. Назовем $A(z)$-*логарифмическим вычетом* в точке a $A(z)$-аналитической функции $f(z)$ вычет логарифмической производной в точке a:

$$\frac{\partial f(z)/\partial z}{f(z)} (dz + A(z) d\bar{z}) = d \operatorname{Ln} f(z). \quad (17)$$

Можно показать, что верно следующее:

$$d(\operatorname{Ln} f(z)) = \frac{1}{f(z)} \left(\frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z} \right) = \frac{1}{f(z)} \left(\frac{\partial f}{\partial z} dz + A \frac{\partial f}{\partial z} d\bar{z} \right) = \frac{\partial f(z)/\partial z}{f(z)} (dz + A(z) d\bar{z}).$$

Пусть $a \in \mathbb{C}$ является нулем порядка n для $A(z)$-аналитической функции $f(z)$. Тогда в некоторой $A(z)$-лемнискатической окрестности $L(a,r)$ имеем равенство $f(z) = \psi(z,a)^n h(z)$, где $h(z) \in O_A(D)$, $h(a) \neq 0$. Поэтому в $A(z)$-лемнискате $L(a,r)$ имеет место равенство

$$\frac{\partial f(z)/\partial z}{f(z)} = \frac{n}{\psi(z,a)} + \frac{\partial h(z)/\partial z}{h(z)}. \quad (18)$$

Если $b \in \mathbb{C}$ — полюс функции $f(z)$ порядка m, то $f(z) = g(z)/\psi^n(z,b)$, где $g(z) \in O_A(D)$, $g(b) \neq \infty$. Поэтому в $A(z)$-лемнискате $L(b,r)$ выполнено равенство

$$\frac{\partial f(z)/\partial z}{f(z)} = \frac{\partial g(z)/\partial z}{g(z)} - \frac{m}{\psi(z,b)}. \quad (19)$$

Теорема 9. *Пусть функция $f(z)$ является $A(z)$-мероморфной в области $D \subset \mathbb{C}$, а $G \Subset D$ — область, граница ∂G которой является непрерывной кривой, не содержащей ни нулей, ни полюсов $A(z)$-мероморфной функции $f(z)$. Тогда имеет место следующее равенство:*

$$N - P = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\partial G} \frac{\partial f(z)/\partial z}{f(z)} (dz + A(z) d\bar{z}), \tag{20}$$

где N и P — число нулей и число полюсов функции $f(z)$ в области G, ∂G — ориентированная граница.

Доказательство. Пусть $g(z) = \big(\partial f(z)/\partial z\big)/f(z)$ — $A(z)$-аналитическая в окрестности ∂G. Используя теорему 8 в точках $z = a$ и $z = b$ соответственно, а также формулы (18) и (19), вычислим логарифмические вычеты:

$$\operatorname*{res_A}_{z=a} \frac{\partial f(z)/\partial z}{f(z)} = \lim_{z \to a} \frac{\partial f(z)/\partial z}{f(z)} \psi(z, a) = n, \tag{21}$$

$$\operatorname*{res_A}_{z=b} \frac{\partial f(z)/\partial z}{f(z)} = \lim_{z \to b} \frac{\partial f(z)/\partial z}{f(z)} \psi(z, b) = -m. \tag{22}$$

Пусть теперь $a_1, a_2, \ldots, a_s$ — нули порядков $n_1, n_2, \ldots, n_s$ соответственно, и $b_1, b_2, \ldots, b_l$ — полюсы порядков $p_1, p_2, \ldots, p_l$ соответственно функции $f(z)$ в области G. Применяя к этой функции аналог теоремы Коши о вычетах (теорема 5) и равенства (21) и (21), получим:

$$\int\limits_{\partial G} \frac{\partial f(z)/\partial z}{f(z)} (dz + A(z) d\bar{z}) = 2\pi i \left[\sum_{k=1}^{s} \operatorname*{res_A}_{z=a_k} g(z) + \sum_{k=1}^{l} \operatorname*{res_A}_{z=b_k} g(z) \right] =$$

$$= 2\pi i \left[\sum_{k=1}^{s} n_k + \sum_{k=1}^{l} (-m_k) \right] = 2\pi i (N - P),$$

где $N = \sum\limits_{k=1}^{s} n_k$ и $P = \sum\limits_{k=1}^{l} m_k$. Теорема доказана. □

Теорема 10. *Пусть функция $f(z)$ является $A(z)$-мероморфной в области $D \subset \mathbb{C}$, а $G \Subset D$ — область, граница ∂G которой является непрерывной кривой, не содержащей ни нулей, ни полюсов $A(z)$-мероморфной функции $f(z)$. Тогда*

$$N - P = \frac{1}{2\pi} \Delta_{\partial G} \arg f(z), \quad \partial G \text{ — ориентированная граница.}$$

Доказательство. Пусть граница ∂G задается уравнением $z = z(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$. Используя формулу (20), получим:

$$\int\limits_{\partial G} \frac{\partial f(z)/\partial z}{f} (z)(dz + A(z) d\bar{z}) = \int\limits_{\partial G} d(\operatorname{Ln} f(z)) = \operatorname{Ln} f(z(t)) \Big|_a^b =$$

$$= \ln |z(t)| \Big|_a^b + i \arg f(z) \Big|_a^b = 0 + i \Delta_{\partial G} \arg f(z).$$

Согласно этому равенству и теореме 10 имеем следующее равенство:

$$i \Delta_{\partial G} \arg f(z) = 2\pi i (N - P).$$

Теорема доказана. □

Используя доказанный принцип аргумента, аналогично классическому случаю, получаем следующее утверждение.

Теорема 11. *Пусть функции $f(z)$ и $g(z)$ являются $A(z)$-аналитическими функциями в замкнутой области $\bar{G}$ с непрерывной границей ∂G, и для всех $z \in \partial G$ выполняется неравенство*

$$|f(z)| > |g(z)|. \tag{23}$$

Тогда функции $f(z)$ и $f(z)+g(z)$ имеют в G одинаковое число нулей.

Доказательство. Из (20) видно, что $f(z)$ и $f(z)+g(z)$ не равны нулю на ∂G, поэтому к ним применим принцип аргумента. Так как $f(z) \neq 0$ на ∂G, то

$$f(z)+g(z) = f(z)\left(1+\frac{g(z)}{f}(z)\right);$$

следовательно, при надлежащем выборе значений аргументов можно получить следующее равенство:

$$\arg \Delta_{\partial G}(f(z)+g(z)) = \arg \Delta_{\partial G} f(z) + \arg \Delta_{\partial G}\left(1+\frac{g(z)}{f(z)}\right). \tag{24}$$

Но так как $|g(z)/f(z)| < 1$ на ∂G, то при любой фиксированной точке $z \in \partial G$ имеем

$$\frac{g(z)}{f(z)} = re^{i\theta}, \quad r < 1.$$

Оценим вещественную часть:

$$\operatorname{Re}\left(1+\frac{g(z)}{f(z)}\right) = 1+\operatorname{Re}\frac{g(z)}{f(z)} = 1+r\cos\theta > 1-r > 0.$$

Тогда имеет место соотношение

$$\left\{1+\frac{f(z)}{g(z)} : \ z \in \partial G\right\} \subset \left\{\operatorname{Re} z > 0\right\} = \left\{-\frac{\pi}{2} < \arg z < \frac{\pi}{2}\right\},$$

откуда получаем

$$-\pi \leqslant \arg \Delta_{\partial G}\left(1+\frac{g(z)}{f(z)}\right) \leqslant \pi.$$

Отсюда и из формулы (24) следует справедливость следующего соотношения:

$$N_{f(z)+g(z)} = N_{f(z)} + \frac{1}{2\pi}\arg \Delta_{\partial G}\left(1+\frac{g(z)}{f(z)}\right),$$

$$N_{f(z)} - \frac{1}{2} \leqslant N_{f(z)+g(z)} \leqslant N_{f(z)} + \frac{1}{2}.$$

Так как $N_{f(z)}$ и $N_{f(z)+g(z)}$ — целые числа, то верно равенство $N_{f(z)+g(z)} = N_{f(z)}$. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бухгейм А. Л* Формулы обращения в обратных задачах. — М.: Наука, 1991.
2. *Бухгейм А. Л., Казанцев С. Г.* Эллиптические системы типа Бельтрами и задачи томографии// Докл. АН СССР. — 1990. — *315*, № 1. — С. 15–19.
3. *Векуа И. Н.* Обобщенные аналитические функции. — М.: Наука, 1988.
4. *Жабборов Н. М., Имомназаров Х. Х.* Некоторые начально-краевые задачи механики двухскоростных сред. — Ташкент: Изд-во НУУз им. М. Улугбека, 2012.
5. *Жабборов Н. М., Отабоев Т. У.* Теорема Коши для $A(z)$-аналитических функций// Узбек. мат. ж. — 2014. — No 1. — С. 15–18.
6. *Жабборов Н. М., Отабоев Т. У.* Аналог интегральной формулы Коши для A-аналитических функций// Узбек. мат. ж. — 2016. — № 4. — С. 50–59.
7. *Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.* Методы теории функций комплексного переменного. — М.: Физматгиз, 1958.
8. *Ahlfors L.* Lectures on quasiconformal mappings. — New York: Van Nostrand, 1966.
9. *Gutlyanski V., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* The Beltrami equation: A geometric approach. — Springer-Verlag, 2011.

10. *Sadullaev A., Jabborov N. M.* On a class of A-analytic functions// J. Sib. Federal Univ. Math. Phys. — 2016. — *3*, № 9. — С. 374–383.

Ж. К. Тишабаев
Национальный университет Узбекистана им. М. Улугбека, Ташкент, Узбекистан
Т. У. Отабоев
Национальный университет Узбекистана им. М. Улугбека, Ташкент, Узбекистан
E-mail: tolib.fgi@gmail.com; tolib_f@mail.ru

Ш. Я. Хурсанов
Национальный университет Узбекистана им. М. Улугбека, Ташкент, Узбекистан
E-mail: shohruhmath@mail.ru; shohruhmath@gmail.com

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 144 (2018). С. 65–73

УДК 512.554.38

ЛОКАЛЬНЫЕ И 2-ЛОКАЛЬНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ p-ФИЛИФОРМНЫХ АЛГЕБР ЛЕЙБНИЦА

© 2018 г. **Ш. А. АЮПОВ, К. К. КУДАЙБЕРГЕНОВ, Б. Б. ЮСУПОВ**

Аннотация. Настоящая работа посвящена изучению локальных и 2-локальных дифференцирований p-филиформных алгебр Лейбница. Приведено описание всех локальных дифференцирований p-филиформных не-лиевых алгебр Лейбница. Показано, что на этих алгебрах существуют 2-локальные дифференцирования, не являющиеся дифференцированиями.

Ключевые слова: алгебра Лейбница, p-филиформная алгебра Лейбница, дифференцирование, локальное дифференцирование, 2-локальное дифференцирование.

AMS Subject Classification: 17A32, 17B10, 17B20

1. Введение. Локальные дифференцирования были впервые рассмотрены Р. Кэдисоном в [8] в 1990 г. и (независимо) в [10]. В этих работах были получены некоторые условия, при которых локальное дифференцирование является дифференцированием. В своей работе Кэдисон рассматривал локальные дифференцирования на алгебрах фон Неймана и в некоторых полиномиальных алгебрах. Было доказано, что каждое непрерывное локальное дифференцирование из алгебры фон Неймана в дуальный бимодуль является дифференцированием.

В 1997 г. П. Шемрл ввел понятие 2-локального дифференцирования [11]. Он описал 2-локальные дифференцирования алгебры $B(H)$ всех ограниченных линейных операторов на бесконечномерном сепарабельном гильбертовом пространстве H. Аналогичное описание для конечномерного случая появилось позже в 2003 г. в [9].

Пусть $\mathcal{L}$ — алгебра Ли. Линейный оператор d на $\mathcal{L}$ называется *дифференцированием*, если выполнено равенство

$$d([x,y]) = [d(x),y] + [x,d(y)] \quad \text{для всех } x,y \in \mathcal{L}.$$

Исследование локальных и 2-локальных дифференцирований конечномерных алгебр Ли было проведено в работах Ш. А. Аюпова, К. К. Кудайбергенова и И. С. Рахимова [3,4,6]. В [7] З. Чен и Д. Ванг изучили 2-локальные автоморфизмы конечномерных алгебр Ли и доказали, что если $\mathcal{L}$ — простая алгебра Ли типа A_l ($l \geqslant 1$), D_l ($l \geqslant 4$) или E_k ($k = 6,7,8$) над алгебраически замкнутым полем, то всякий 2-локальный автоморфизм на $\mathcal{L}$ является автоморфизмом.

В [4] этот результат был расширен для произвольных конечномерных полупростых алгебр Ли над алгебраически замкнутым полем. Локальные и 2-локальные дифференцирования конечномерных алгебр Лейбница до сих пор не исследованы. Локальные и 2-локальные дифференцирования некоторых филиформных алгебр Лейбница были исследовоны в [1]. В [5] были изучены локальные и 2-локальные дифференцирования, а также автоморфизмы простых алгебр Лейбница над полем комплексных чисел.

Настоящая работа посвящена изучению локальных и 2-локальных дифференцирований p-филиформных алгебр Лейбница.

2. p-Филиформные алгебры Лейбница и их дифференцирования. В этом разделе приведены некоторые свойства p-филиформных алгебр Лейбница и их дифференцирований.

Алгебра $\mathcal{L}$ над полем $\mathbb{F}$ называется *алгеброй Лейбница*, если для любых $x, y, z \in \mathcal{L}$ выполняется тождество

$$\big[x,[y,z]\big] = \big[[x,y],z\big] - \big[[x,z],y\big],$$

где $[\cdot,\cdot]$ — умножение на $\mathcal{L}$.

Пусть $\mathcal{L}$ — нильпотентная алгебра. Для элемента $x \in \mathcal{L} \setminus [\mathcal{L},\mathcal{L}]$ рассмотрим оператор правого умножения $R_x : \mathcal{L} \to \mathcal{L}$, определенный по правилу

$$R_x(y) = [y,x], \quad y \in \mathcal{L}.$$

Известно, что каждый линейный оператор на конечномерном пространстве имеет жорданову нормальную форму. Используя порядок жордановых ячеек жордановой нормальной формы данного линейного оператора, запишем последовательность размерностей жордановых клеток $C(x) = \{n_1, n_2, \ldots, n_k\}$ в убывающем порядке. Установим лексикографический порядок на множестве всех таких последовательностей. *Характеристической последовательностью* алгебры $\mathcal{L}$ называется следующая последовательность:

$$C(\mathcal{L}) = \max_{x \in \mathcal{L}\setminus[\mathcal{L},\mathcal{L}]} C(x).$$

Если характеристическая последавательность n-мерной алгебры Лейбница $\mathcal{L}$ равна $C(\mathcal{L}) = (n-p, \underbrace{1,\ldots,1}_{p})$, то она называется *$p$-филиформной алгеброй Лейбница*.

Линейный оператор $d : \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ называется *дифференцированием*, если

$$d([x,y]) = [d(x),y] + [x,d(y)] \quad \text{для всех } x, y \in \mathcal{L}.$$

В [2] было доказано, что если $\mathcal{L}$ — градуированная p-филиформная неразложимая не-лиева алгебра Лейбница, то $\mathcal{L}$ изоморфна одной из следующих не изоморфных между собой алгебр ($n-p \geqslant 4$):

(1) если число $p = 2k$ четно, то

$$\mu_1 : \begin{cases} [e_i,e_1] = e_{i+1}, & 1 \leqslant i \leqslant n-2k-1, \\ [e_1,f_j] = f_{k+j}, & 1 \leqslant j \leqslant k; \end{cases} \qquad \mu_2 : \begin{cases} [e_i,e_1] = e_{i+1}, & 1 \leqslant i \leqslant n-2k-1, \\ [e_1,f_1] = e_2 + f_{k+1}, & \\ [e_i,f_1] = e_{i+1}, & 2 \leqslant i \leqslant n-2k-1, \\ [e_1,f_j] = f_{k+j}, & 2 \leqslant j \leqslant k; \end{cases}$$

(2) если число $p = 2k+1$ нечетно, то

$$\mu_3 : \begin{cases} [e_1,e_1] = e_3, & \\ [e_i,e_1] = e_{i+1}, & 2 \leqslant i \leqslant n-2k-1, \\ [e_1,f_j] = f_{k+j}, & 1 \leqslant j \leqslant k, \\ [e_2,f_j] = f_{k+j}, & 1 \leqslant j \leqslant k, \end{cases}$$

где $\{e_1, e_2, \ldots, e_{n-p}, f_1, f_2, \ldots, f_p\}$ — базис алгебры; отсутствующие произведения равны нулю.

Далее приведем описание дифференцирований этих алгебр (см. [2]).

Введем обозначения $\mathcal{L}_1 = \operatorname{span}\{e_1, e_2, \ldots, e_{e-p}\}$ и $\mathcal{L}_2 = \operatorname{span}\{f_1, f_2, \ldots, f_p\}$. Всякое дифференцирование алгебры μ_1 имеет вид

$$\mathbb{D} = \begin{pmatrix} D_{1,1} & D_{1,2} \\ D_{2,1} & D_{2,2} \end{pmatrix},$$

где

$$D_{1,1} = \sum_{i=1}^{n-2k} i a_1 e_{i,i} + \sum_{i=1}^{n-2k-1} \sum_{j=i+1}^{n-2k} a_{j-i+1} e_{j,i} \in M_{n-2k,n-2k}, \quad D_{1,2} = \sum_{i=1}^{k} c_i e_{n-2k,i} \in M_{n-2k,2k},$$

$$D_{2,1} = \sum_{i=1}^{2k} b_i e_{i,1} + \sum_{i=1}^{k} b_i e_{k+i,2} \in M_{2k,n-2k}, \quad D_{2,2} = \begin{pmatrix} D_{2,2}^{(1)} & 0 \\ D_{2,2}^{(2)} & a_1\mathbb{E} + D_{2,2}^{(1)} \end{pmatrix}, \quad D_{2,2}^{(1)}, D_{2,2}^{(2)}, \mathbb{E} \in M_{k,k}.$$

Пусть $\{e_{i,j} : 1 \leqslant i, j \leqslant n\}$ — система матричных единиц, т.е. $(n \times n)$-матрица $e_{i,j}$ такова, что (i,j)-я компонента равна 1, а остальные — нулю. При этом D_{ij} отображает $\mathcal{L}_j$ в $\mathcal{L}_i$, $1 \leqslant i, j \leqslant 2$.

Всякое дифференцирование алгебры μ_2 имеет вид

$$\mathbb{D} = \begin{pmatrix} D_{1,1} & D_{1,2} \\ D_{2,1} & D_{2,2} \end{pmatrix},$$

где

$$D_{1,1} = \sum_{i=1}^{n-2k} (ia_1 + (i-1)b_1)e_{i,i} + \sum_{i=1}^{n-2k-1} \sum_{j=i+1}^{n-2k} a_{j-i+1} e_{j,i} \in M_{n-2k,n-2k},$$

$$D_{2,1} = \sum_{i=1}^{2k} b_i e_{i,1} + \sum_{i=1}^{k} b_i e_{k+i,2} \in M_{2k,n-2k}, \quad D_{1,2} = \sum_{i=1}^{k} c_i e_{n-2k,i} \in M_{n-2k,2k},$$

$$D_{2,2} = \begin{pmatrix} D_{2,2}^{(1)} & 0 \\ D_{2,2}^{(2)} & D_{2,2}^{(3)} \end{pmatrix}, \quad D_{2,2}^{(1)} = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=2}^{k} d_{j,i} e_{j,i} + (a_1 + b_1)e_{1,1}, \quad D_{2,2}^{(3)} = D_{2,2}^{(1)} + a_1 \mathbb{E} - \sum_{j=1}^{k} b_j e_{j,1},$$

$$D_{2,2}^{(1)}, D_{2,2}^{(2)}, D_{2,2}^{(3)}, \mathbb{E} \in M_{k,k}.$$

Всякое дифференцирование алгебры μ_3 имеет вид

$$\mathbb{D} = \begin{pmatrix} D_{1,1} & D_{1,2} \\ D_{2,1} & D_{2,2} \end{pmatrix},$$

где

$$D_{1,1} = \sum_{i=1}^{n-2k} ((i-1)a_1 + a_2)e_{i,i} + \sum_{i=2}^{n-2k} a_i e_{i,1} + \\ + \sum_{i=3}^{n-2k-1} a_i e_{i,2} + \beta e_{n-2k,2} + \sum_{i=3}^{n-2k-1} \sum_{j=i+1}^{n-2k} a_{j-i+2} e_{j,i} \in M_{n-2k,n-2k},$$

$$D_{2,1} = \sum_{i=1}^{2k} b_{i,1} e_{i,1} + \sum_{i=1}^{k} b_{i,2} e_{k+i,2} + \sum_{i=1}^{k} b_{i,1} e_{k+i,3} \in M_{2k,n-2k}, \quad D_{1,2} = \sum_{i=1}^{k} c_i e_{n-2k,i} \in M_{n-2k,2k},$$

$$D_{2,2} = \begin{pmatrix} D_{2,2}^{(1)} & 0 \\ D_{2,2}^{(2)} & (a_1 + a_2)\mathbb{E} + D_{2,2}^{(1)} \end{pmatrix}, \quad D_{2,2}^{(1)}, D_{2,2}^{(2)}, \mathbb{E} \in M_{k,k}.$$

Замечание 1. Для алгебры $\mathcal{L}$ через $\mathrm{Der}(\mathcal{L})$ обозначим пространство всех дифференцирований на $\mathcal{L}$. Размерность пространства дифференцирований следующая ($k \in \mathbb{N}$ и $n \geqslant 2k+4$):

$$\dim \mathrm{Der}(\mu_1) = n + 2k^2 + k,$$
$$\dim \mathrm{Der}(\mu_2) = n + 2k^2 + 1,$$
$$\dim \mathrm{Der}(\mu_3) = n + 2k^2 + 2k + 1.$$

3. Локальные дифференцирования p-филиформных алгебр Лейбница. В этом разделе изучим локальные дифференцирования p-филиформных алгебр Лейбница.

Пусть $\Delta : \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ — линейный оператор. Если для произвольного элемента $x \in \mathcal{L}$ найдется такое дифференцирование $D_x : \mathcal{L} \to \mathcal{L}$, что $\Delta(x) = D_x(x)$, то Δ называется локальным дифференцированием.

Теорема 1. *Пусть Δ — линейный оператор на μ_1. Тогда Δ является локальным дифференцированием тогда и только тогда, когда его матрица имеет вид*

$$\Delta = \begin{pmatrix} \Delta_{1,1} & \Delta_{1,2} \\ \Delta_{2,1} & \Delta_{2,2} \end{pmatrix}, \tag{1}$$

где

$$\Delta_{1,1}=\sum_{j=1}^{n-2k}\sum_{i=j}^{n-2k}\gamma_{i,j}e_{i,j},\quad \Delta_{2,1}=\sum_{i=n-2k+1}^{n}\gamma_{i,1}e_{i,1}+\sum_{i=n-k+1}^{n}\gamma_{i+1,2}e_{i+1,2},$$

$$\Delta_{1,2}=\sum_{i=n-2k+1}^{n-k}\gamma_{n-2k,i}e_{n-2k,i},\quad \Delta_{2,2}=\begin{pmatrix}\Delta_{2,2}^{(1)} & 0\\ \Delta_{2,2}^{(2)} & \Delta_{2,2}^{(3)}\end{pmatrix},$$

$$\Delta_{2,2}^{(1)}=\sum_{j=n-2k+1}^{n-k}\sum_{j=n-2k+1}^{n-k}\gamma_{i,j}e_{i,j},\quad \Delta_{2,2}^{(2)}=\sum_{j=n-2k+1}^{n-k}\sum_{j=n-k+1}^{n}\gamma_{i,j}e_{i,j},\quad \Delta_{2,2}^{(3)}=\sum_{j=n-k+1}^{n}\sum_{j=n-k+1}^{n}\gamma_{i,j}e_{i,j}.$$

Доказательство. ($\Rightarrow$) Пусть Δ — локальное дифференцирование алгебры μ_1:

$$\Delta=\begin{pmatrix}\Delta_{1,1} & \Delta_{1,2}\\ \Delta_{2,1} & \Delta_{2,2}\end{pmatrix},$$

где

$$\Delta_{1,1}=\sum_{j=1}^{n-2k}\sum_{i=1}^{n-2k}\gamma_{i,j}e_{i,j},\quad \Delta_{2,1}=\sum_{i=n-2k+1}^{n}\sum_{j=1}^{n-2k}\gamma_{i,j}e_{i,j},$$

$$\Delta_{1,2}=\sum_{j=n-2k+1}^{n}\sum_{i=1}^{n-2k}\gamma_{i,j}e_{i,j},\quad \Delta_{2,2}=\sum_{j=n-2k+1}^{n}\sum_{j=n-2k+1}^{n}\gamma_{i,j}e_{i,j}.$$

Возьмем такое дифференцирование D_{e_2}, что $\Delta(e_2)=D_{e_2}(e_2)$. Тогда

$$\Delta(e_2)=\sum_{j=1}^{n-2k}\gamma_{j,2}e_2+\sum_{j=n-2k+1}^{n}\gamma_{j,2}f_{j-n+2k},\quad D_{e_2}(e_2)=2a_1e_2+\sum_{j=3}^{n-2k-1}a_je_j+\sum_{j=1}^{k}b_jf_{k+j}.$$

Сравнив правые части, мы получим, что $\gamma_{1,2}=\gamma_{n-2k+i,2}=0$ для всех $1\leqslant i\leqslant k$.

Теперь пусть i — такой индекс, что $3\leqslant i\leqslant n-2k$. Возьмем такое дифференцирование D_{e_i}, что $\Delta(e_i)=D_{e_i}(e_i)$. Тогда

$$\Delta(e_i)=\sum_{j=1}^{n-2k}\gamma_{j,i}e_j+\sum_{j=n-2k+1}^{n}\gamma_{j,i}f_{j-n+2k},\quad D_{e_i}(e_i)=ia_1e_i+\sum_{j=i}^{n-2k-1}a_je_{j+1}.$$

Сравнив коэффициенты при базисных элементах для $\Delta(e_i)$ и $D_{e_i}(e_i)$, получим тождество

$$\gamma_{t,j}=\gamma_{n-2k+i,j}=0,$$

где $3\leqslant j\leqslant n-2k,\ 1\leqslant i\leqslant 2k,\ 1\leqslant t\leqslant n-2k-1$.

Пусть i — такой индекс, что $1\leqslant i\leqslant k$. Возьмем такое дифференцирование D_{f_i}, что $\Delta(f_i)=D_{f_i}(f_i)$. Тогда

$$\Delta(f_i)=\sum_{j=1}^{n-2k}\gamma_{j,n-2k+i}e_j+\sum_{j=n-2k+1}^{n}\gamma_{j,n-2k+i}f_{j-n+2k},$$

$$D_{f_i}(f_i)=c_ie_{n-2k}+\sum_{j=1}^{2k}d_{i,j}f_j.$$

Сравнив коэффициенты при базисных элементах для $\Delta(f_i)$ и $D_{f_i}(f_i)$, получим тождество

$$\gamma_{j,i}=\gamma_{j,n-2k+i}=0,$$

где $1\leqslant j\leqslant n-2k-1,\ 1\leqslant i\leqslant k-1$.

Пусть i — такой индекс, что $k+1 \leqslant i \leqslant 2k$. Возьмем такое дифференцирование D_{f_i}, что $\Delta(f_i) = D_{f_i}(f_i)$. Тогда

$$\begin{aligned}\Delta(f_i) &= \sum_{j=1}^{n-2k} \gamma_{j,n-2k+i} e_j + \sum_{j=n-2k+1}^{n} \gamma_{j,n-2k+i} f_{j-n+2k},\\ D_{f_i}(f_i) &= \sum_{j=1}^{k} d_{i-k,j} f_j.\end{aligned}$$

Приравнивая коэффициенты при базисных элементах, получим, что $\gamma_{j,i} = 0$, где $1 \leqslant j \leqslant n-k$, $n-k+1 \leqslant i \leqslant n$.

($\Leftarrow$) Пусть оператор Δ имеет вид (1). Возьмем произвольный элемент

$$x = \sum_{i=1}^{n-2k} \xi_i e_i + \sum_{i=1}^{2k} \zeta_i f_i.$$

Координаты элемента $D(x)$ суть

$$\begin{aligned}
D(x)_{e_1} &= a_1\xi_1,\\
D(x)_{e_i} &= a_i\xi_1 + \sum_{j=1}^{i-2} a_{i-j+1}\xi_{j+1} + i a_1 \xi_i, \quad 2 \leqslant i \leqslant n-2k-1,\\
D(x)_{e_{n-2k}} &= a_{n-2k}\xi_1 + \sum_{j=1}^{n-2k-2} a_{n-2k-j}\xi_{j+1} + (n-2k)a_1\xi_{n-2k} + \sum_{j=1}^{k} c_j\zeta_j,\\
D(x)_{f_i} &= b_i\xi_1 + \sum_{j=1}^{k} d_{j,i}\zeta_j, \quad 1 \leqslant i \leqslant k,\\
D(x)_{f_i} &= b_i\xi_1 + b_{i-k}\xi_2 + \sum_{j=1}^{k} d_{j,i}\zeta_j + \sum_{j=1}^{k} d_{j,i-k}\zeta_{k+j} + a_1\zeta_i, \quad k+1 \leqslant i \leqslant 2k,
\end{aligned}$$

а координаты элемента $\Delta(x)$ —

$$\begin{aligned}
\Delta(x)_{e_1} &= \gamma_{11}\xi_1,\\
\Delta(x)_{e_i} &= \sum_{j=1}^{i} \gamma_{i,j}\xi_j, \quad 2 \leqslant i \leqslant n-2k-1,\\
\Delta(x)_{e_{n-2k}} &= \sum_{j=1}^{n-2k} \gamma_{n-2k,j}\xi_j + \sum_{j=1}^{k} \gamma_{n-2k,n-2k+j}\zeta_j,\\
\Delta(x)_{f_i} &= \gamma_{n-2k+i,1}\xi_1 + \sum_{j=1}^{k} \gamma_{n-2k+i,n-2k+j}\zeta_j, \quad 1 \leqslant i \leqslant k,\\
\Delta(x)_{f_i} &= \gamma_{n-2k+i,1}\xi_1 + \gamma_{n-2k+i,2}\xi_2 + \sum_{j=1}^{2k} \gamma_{n-2k+i,n-2k+j}\zeta_j, \quad k+1 \leqslant i \leqslant 2k.
\end{aligned}$$

Сравнив координаты $\Delta(x)$ и $D(x)$, получим:

$$a_1\xi_1 = \gamma_{11}\xi_1, \tag{2a}$$

$$a_i\xi_1 + \sum_{j=1}^{i-2} a_{i-j+1}\xi_{j+1} + i a_1\xi_i = \sum_{j=1}^{i} \gamma_{i,j}\xi_j, \quad 2 \leqslant i \leqslant n-2k-1, \tag{2b}$$

$$a_{n-2k}\xi_1 + \sum_{j=1}^{n-2k-2} a_{n-2k-j}\xi_{j+1} + (n-2k)a_1\xi_{n-2k} + \sum_{j=1}^{k} c_j\zeta_j = \\ = \sum_{j=1}^{n-2k} \gamma_{n-2k,j}\xi_j + \sum_{j=1}^{k} \gamma_{n-2k,n-2k+j}\zeta_j, \quad (2c)$$

$$b_i\xi_1 + \sum_{j=1}^{k} d_{j,i}\zeta_j = \gamma_{n-2k+i,1}\xi_1 + \sum_{j=1}^{k} \gamma_{n-2k+i,n-2k+j}\zeta_j, \quad 1 \leqslant i \leqslant k, \quad (2d)$$

$$b_i\xi_1 + b_{i-k}\xi_2 + \sum_{j=1}^{k} d_{j,i}\zeta_j + \sum_{j=1}^{k} d_{j,i-k}\zeta_{k+j} + a_1\zeta_i = \\ = \gamma_{n-2k+i,1}\xi_1 + \gamma_{n-2k+i,2}\xi_2 + \sum_{j=1}^{2k} \gamma_{n-2k+i,n-2k+j}\zeta_j, \quad k+1 \leqslant i \leqslant 2k. \quad (2e)$$

Покажем разрешимость этой системы уравнений относительно a_i, b_i, c_i, $d_{i,j}$. Рассмотрим возможные пять случаев.

1. Пусть $\xi_1 \neq 0$. В этом случае положим $c_i = d_{i,j} = 0$, $1 \leqslant i \leqslant k$, $1 \leqslant j \leqslant k$. Остальные a_1, a_2, …, a_{n-2k}, b_1, b_2, …, b_{2k} определяются однозначно из системы (2).
2. Пусть $\xi_1 = 0$ и $\xi_2 \neq 0$. Тогда положим $a_1 = c_i = d_{i,j} = 0$, $1 \leqslant i \leqslant k$, $1 \leqslant j \leqslant k$. Остальные a_2, …, a_{n-2k}, b_1, b_2, …, b_k определяются однозначно.
3. Пусть $\xi_1 = \xi_2 = \ldots = \xi_{r-1} = 0$ и $\xi_r \neq 0$, $3 \leqslant r \leqslant n-2k$. Тогда положим
$$a_1 = \ldots = a_{n-2k-m} = b_1 = \ldots = c_1 = \ldots = d_{t,j} = 0, \quad 1 \leqslant t \leqslant k, \quad 1 \leqslant j \leqslant k.$$
Неизвестные $a_{n-2k-m+1}$, $i \leqslant m \leqslant n-2k$, определяются однозначно из (2).
4. Пусть $\xi_1 = \ldots = \xi_{n-2k} = \zeta_1 = \ldots = \zeta_{r-1} = 0$ и $\zeta_r \neq 0$, $1 \leqslant r \leqslant k$. Положим
$$a_1 = \ldots = b_1 = \ldots = 0, \quad c_i = 0, \quad i \neq r, \quad d_{j,i} = 0, \quad j \neq r.$$
Неизвестные c_r, $d_{r,i}$, $1 \leqslant i \leqslant k$, определяются однозначно.
5. Пусть $\xi_1 = \ldots = \xi_{n-2k} = \zeta_1 = \ldots = \zeta_{k+r-1} = 0$ и $\zeta_{k+r} \neq 0$, $1 \leqslant r \leqslant k$. Положим
$$a_1 = \ldots = b_1 = \ldots = c_1 = \ldots = 0, \quad d_{j,i} = 0, \quad r \neq k+r.$$
Неизвестные $d_{k+r,i}$, $k+1 \leqslant i \leqslant 2k$, определяются однозначно из (2).

Теорема доказана. □

Случай алгебр μ_2 и μ_3 аналогичны случаю μ_1, они приведены в следующих двух теоремах.

Теорема 2. *Линейный оператор Δ на μ_2 является локальным дифференцированием тогда и только тогда, когда его матрица имеет следующий вид:*

$$\Delta = \begin{pmatrix} \Delta_{1,1} & \Delta_{1,2} \\ \Delta_{2,1} & \Delta_{2,2} \end{pmatrix},$$

где

$$\Delta_{1,1}=\sum_{j=1}^{n-2k}\sum_{i=j}^{n-2k}\alpha_{j,i}e_{j,i},\quad \Delta_{2,1}=\sum_{i=1}^{2k}\beta_{n-2k+i,1}e_{n-2k+i,1}+\sum_{i=1}^{k}b_{n-2k+i,2}e_{n-2k+i,2},$$

$$\Delta_{1,2}=\sum_{i=1}^{k}\gamma_{n-2k,n-2k+i}e_{n-2k,n-2k+i},\quad \Delta_{2,2}=\begin{pmatrix}\Delta_{2,2}^{(1)} & 0\\ \Delta_{2,2}^{(2)} & \Delta_{2,2}^{(3)}\end{pmatrix},$$

$$\Delta_{2,2}^{(1)}=\delta_{n-2k+1,n-2k+1}e_{n-2k+1,n-2k+1}+\sum_{i=n-2k+1}^{n-k}\sum_{j=n-2k+2}^{n-k}\delta_{j,i}e_{j,i},\quad \Delta_{2,2}^{(2)}=\sum_{i=n-k+1}^{n-k}\sum_{j=n-k+1}^{n}\delta_{j,i}e_{j,i},$$

$$\Delta_{2,2}^{(3)}=\delta_{n-k+1,n-k+1}e_{n-k+1,n-k+1}+\sum_{i=n-k+1}^{n}\sum_{j=n-k+2}^{n}\delta_{j,i}e_{j,i}.$$

Теорема 3. *Линейный оператор Δ на μ_3 является локальным дифференцированием тогда и только тогда, когда его матрица имеет вид*

$$\Delta=\begin{pmatrix}\Delta_{1,1} & \Delta_{1,2}\\ \Delta_{2,1} & \Delta_{2,2}\end{pmatrix},$$

где

$$\Delta_{1,1}=\sum_{j=1}^{n-2k}\sum_{i=j}^{n-2k}\alpha_{j,i}e_{j,i},\quad \alpha_{i,1}=\alpha_{i,2},\quad \alpha_{2,2}=\alpha_{1,1}+\alpha_{2,1},\quad 3\leqslant i\leqslant n-2k-1,$$

$$\Delta_{2,1}=\sum_{i=1}^{2k}\beta_{n-2k+i,1}e_{n-2k+i,1}+\sum_{i=1}^{k}b_{n-2k+i,2}e_{n-2k+i,2}+\sum_{i=1}^{k}b_{n-2k+i,3}e_{n-2k+i,3},$$

$$\Delta_{1,2}=\sum_{i=1}^{k}\gamma_{n-2k,n-2k+i}e_{n-2k,n-2k+i},\quad \Delta_{2,2}=\begin{pmatrix}\Delta_{2,2}^{(1)} & 0\\ \Delta_{2,2}^{(2)} & \Delta_{2,2}^{(3)}\end{pmatrix},$$

$$\Delta_{2,2}^{(1)}=\sum_{i=n-2k+1}^{n-k}\sum_{j=n-2k+1}^{n-k}\delta_{j,i}e_{j,i},\quad \Delta_{2,2}^{(2)}=\sum_{i=n-k+1}^{n-k}\sum_{j=n-k+1}^{n}\delta_{j,i}e_{j,i},\quad \Delta_{2,2}^{(3)}=\sum_{i=n-k+1}^{n}\sum_{j=n-k+1}^{n}\delta_{j,i}e_{j,i}.$$

Замечание 2. Для алгебры $\mathcal{L}$ через $\operatorname{Loc}\operatorname{Der}(\mathcal{L})$ обозначим пространство всех локальных дифференцирований на $\mathcal{L}$. Размерность пространства всех локальных дифференцирований следующая:

$$\dim\operatorname{Loc}\operatorname{Der}(\mu_1)=\frac{n^2+10k^2-4kn+n+6k}{2},$$
$$\dim\operatorname{Loc}\operatorname{Der}(\mu_2)=\frac{n^2+10k^2-4kn+n+2k+4}{2},$$
$$\dim\operatorname{Loc}\operatorname{Der}(\mu_3)=\frac{n^2+10k^2-4kn-n+12k+4}{2},$$

где $k\in\mathbb{N}$ и $n\geqslant 2k+4$.

Замечания 1 и 2 показывают, что размерность пространства всех локальных дифференцирований алгебры μ_i, $i=1,2,3$, строго больше, чем размерность пространства всех дифференцирований μ_i. Поэтому имеет место следующий результат.

Следствие 1. *Алгебры μ_1,μ_2 и μ_3 допускают локальные дифференцирования, не являющиеся дифференцированиями.*

4. 2-Локальные дифференцирования p-филиформных алгебр Лейбница. В этом разделе мы изучаем 2-локальные дифференцирования p-филиформных алгебр Лейбница.

Пусть $\nabla : \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ — некоторое отображение (не обязательно линейное). Если для произвольных элементов $x, y \in \mathcal{L}$ найдется такое дифференцирование $D_{x,y} : \mathcal{L} \to \mathcal{L}$, что $\nabla(x) = D_{x,y}(x)$ и $\nabla(y) = D_{x,y}(y)$, то ∇ называется 2-локальным дифференцированием.

Теорема 4. *Алгебры μ_1, μ_2 и μ_3 допускают 2-локальные дифференцирования, не являющиеся дифференцированиями.*

Доказательство. Приведем доказательство для алгебры μ_1; для μ_2 и μ_3 доказательства аналогичны. Возьмем на $\mathbb{C}^2$ однородную, но не аддитивную функцию, например,

$$f(z_1, z_2) = \begin{cases} z_1^2/z_2, & \text{если } z_2 \neq 0, \\ 0, & \text{если } z_2 = 0. \end{cases}.$$

Рассмотрим отображение $\nabla : \mathcal{L} \to \mathcal{L}$, определенное по следующему правилу:

$$\nabla(x) = f(\xi_1, \zeta_1) e_{n-2k}, \quad x = \sum_{i=1}^{n-2k} \xi_i e_i + \sum_{i=1}^{2k} \zeta_i f_i \in \mathcal{L}.$$

Так как f не является аддитивным, то ∇ не является дифференцированием.

Покажем, что ∇ является 2-локальным дифференцированием. Положим

$$x = \sum_{i=1}^{n-2k} \xi_i^{(x)} e_i + \sum_{i=1}^{2k} \zeta_i^{(x)} f_i \quad y = \sum_{i=1}^{n-2k} \xi_i^{(y)} e_i + \sum_{i=1}^{2k} \zeta_i^{(y)} f_i$$

Дифференцирование D будем искать в виде

$$D = \begin{pmatrix} D_{1,1} & D_{1,2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где $D_{1,1} = a_{n-2k} e_{n-2k,1}$, $D_{1,2} = c_1 e_{n-2k,n-2k+1}$.

Предположим, что $\nabla(x) = D(x)$ и $\nabla(y) = D(y)$. Тогда получим следующую систему уравнений относительно a_{n-2k} и c_1:

$$\begin{cases} \xi_1^{(x)} a_{n-2k} + \zeta_1^{(x)} c_1 = f\big(\xi_1^{(x)}, \zeta_1^{(x)}\big), \\ \xi_1^{(y)} a_{n-2k} + \zeta_1^{(y)} c_1 = f\big(\xi_1^{(y)}, \zeta_1^{(y)}\big). \end{cases} \tag{3}$$

Рассмотрим два случая:

1) $\xi_1^{(x)} \zeta_1^{(y)} - \xi_1^{(y)} \zeta_1^{(x)} = 0$; в этом случае, так как правая часть системы (3) однородна, то она имеет бесконечно много решений;
2) $\xi_1^{(x)} \zeta_1^{(y)} - \xi_1^{(y)} \zeta_1^{(x)} \neq 0$; в этом случае система (3) имеет единственное решение.

Теорема доказана. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Аюпов Ш. А., Кудайбергенов К. К., Юсупов Б. Б.* Локальные и 2-локальные дифференцирования некоторых филиформных алгебр Лейбница// Узбек. мат. ж. — 2017. — № 1. — С. 44–54.
2. *Adashev J. Q., Ladra M., Omirov B. A.* Solvable Leibniz algebras with naturally graded non-Lie p-filiform nilradicals// Commun. Alg. — 2017. — *45*, № 10. — С. 4329–4347.
3. *Ayupov Sh. A., Kudaybergenov K. K.* Local derivations on finite-dimensional Lie algebras// Lin. Alg. Appl. — 2016. — *493*. — С. 381–398.
4. *Ayupov Sh. A., Kudaybergenov K. K.* 2-Local automorphisms on finite-dimensional Lie algebras// Lin. Alg. Appl. — 2016. — *507*. — С. 121–131.
5. *Ayupov Sh. A., Kudaybergenov K. K., Omirov A. B.* Local and 2-local derivations and automorphisms on simple Leibniz algebras// `arXiv:1703.10506`

6. *Ayupov Sh. A., Kudaybergenov K. K., Rakhimov I. S.* 2-Local derivations on finite-dimensional Lie algebras// Lin. Alg. Appl. — 2015. — *474*. — C. 1–11.
7. *Chen Z., Wang D.* 2-Local automorphisms of finite-dimensional simple Lie algebras// Lin. Alg. Appl. — 2015. — *486*. — C. 335–344.
8. *Kadison R. V.* Local derivations// J. Algebra. — 1990. — *130*. — C. 494–509.
9. *Kim S. O., Kim J. S.* Local automorphisms and derivations on M_n// Proc. Am. Math. Soc. — 2004. — *132*. — C. 1389–1392.
10. *Larson D. R., Sourour A. R.* Local derivations and local automorphisms of $B(X)$// Proc. Symp. Pure Math. — 1990. — *51* — C. 187–194.
11. *Šemrl P.* Local automorphisms and derivations on $B(H)$// Proc. Am. Math. Soc. — 1997. — *125* — C. 2677–2680.

Ш. А. Аюпов
Институт математики им. В. И. Романовского АН РУз, Ташкент, Узбекистан
E-mail: sh_ayupov@mail.ru

К. К. Кудайбергенов
Каракалпакский государственный универститет им. Бердаха, Нукус, Узбекистан
E-mail: karim2006@mail.ru

Б. Б. Юсупов
Национальный университет Узбекистана им. М. Улугбека, Ташкент, Узбекистан
E-mail: baxtiyor_yusupov_93@mail.ru

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 144 (2018). С. 74–80

УДК 515.142.275

РАЗМЕРНОСТЬ ЭКСТРЕМАЛЬНОЙ ГРАНИЦЫ ПРОСТРАНСТВА ПОЛУАДДИТИВНЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ

© 2018 г. **Г. Ф. ДЖАББАРОВ**

Аннотация. Изучается экстремальная граница пространства слабо аддитивных, сохраняющих порядок, нормированных, положительно-однородных, полуаддитивных функционалов на компакте. Найдена размерность экстремальной границы выпуклого компакта $OS(\boldsymbol{n})$.

Ключевые слова: слабо аддитивный функционал, размерность, функтор.

AMS Subject Classification: 54F15, 54F45

Пусть G — счетная абелева группа, w — ее автоморфизм, для которого $w^M = \mathrm{Id}$, и $F \subset G$ — подгруппа. Определим

$$M(G, w, F) = \Big\{ \#\big(\{w^i\chi : \ i \in \mathbb{Z}\} \cap F\big) : \ \chi \in F \setminus \{0\} \Big\}.$$

Доказано, что каждое конечное множество вида $M(G, w, F) \cup \{2\}$ реализуется как множество существенных значений функции кратности оператора Копмана некоторого слабо перемешивающего автоморфизма.

1. Введение. Пространство $P(X)$ всех вероятностных мер на компакте X хорошо исследовано. В [9] автор ввел пространство $O(X)$ всех слабо аддитивных, сохраняющих порядок нормированных функционалов на компакте X. Топологические и геометрические свойства слабо аддитивных, сохраняющих порядок, нормированных функционалов были изучены в [1, 2, 5–7]. Хорошо известно, что экстремальная граница пространства всех вероятностных мер на компакте состоит из мер Дирака и гомеоморфна исходному компакту. Это свойство играет важную роль при изучении геометрических свойств пространства всех вероятностных мер на компакте.

Настоящая работа посвящена изучению экстремальной границы пространства слабо аддитивных, сохраняющих порядок, нормированных, положительно-однородных, полуаддитивных функционалов на компакте. Найдена размерность экстремальной границы выпуклого компакта $OS(\boldsymbol{n})$.

2. Предварительные сведения. В этом разделе приведены необходимые определения и факты о функторе слабо аддитивных, сохраняющих порядок, нормированных, положительно-однородных функционалов из [5, 9].

Пусть X — компактное пространство. Через $C(X)$ обозначим пространство всех вещественнозначных непрерывных функций $\varphi : X \to \mathbb{R}$ с поточечными алгебраическими операциями и sup-нормой, т.е. с нормой

$$\|\varphi\| = \max\{|\varphi(x)| : \ x \in X\}.$$

Для каждого $c \in \mathbb{R}$ через c_X обозначим постоянную функцию $c_X(x) = c$, $x \in X$. Пусть $\varphi, \psi \in C(X)$. Неравенство $\varphi \leqslant \psi$ означает, что $\varphi(x) \leqslant \psi(x)$ при всех $x \in X$.

Функционал $\nu : C(X) \to \mathbb{R}$ (см. [9]) называется:

(1) *слабо аддитивным*, если $\nu(\varphi + c_X) = \nu(\varphi) + c\nu(1_X)$ для всех $\varphi \in C(X)$ и $c \in \mathbb{R}$;
(2) *сохраняющим порядок*, если для всех $\varphi, \psi \in C(X)$ из $\varphi \leqslant \psi$ следует, что $\nu(\varphi) \leqslant \nu(\psi)$;
(3) *нормированным*, если $\nu(1_X) = 1$;
(4) *положительно-однородным*, если $\nu(t\varphi) = t\nu(\varphi)$ для всех $\varphi \in C(X)$, $t \in \mathbb{R}$, $t \geqslant 0$;

(5) *однородным*, если $\nu(t\varphi) = t\nu(\varphi)$ для всех $\varphi \in C(X), t \in \mathbb{R}$;
(6) *полуаддитивным*, если $\nu(\varphi + \psi) \leqslant \nu(\varphi) + \nu(\psi)$ для всех $\varphi, \psi \in C(X)$.

Для каждого компакта X положим

$$V(X) = \prod_{\varphi \in C(X)} \big[\min \varphi,\ \max \varphi\big].$$

Для всякого отображения $f : X \to Y$ через $V(f)$ обозначим отображение из $V(X)$ в $V(Y)$, определенное по правилу

$$V(f)(\nu)(\varphi) = \nu(\varphi \circ f), \quad \nu \in V(X),\ \varphi \in C(X).$$

Для компакта X введем следующие обозначения:

(1) $O(X)$ — множество всех слабо аддитивных, сохраняющих порядок, нормированных функционалов на $C(X)$;
(2) $OH(X)$ — множество всех положительно-однородных функционалов из $O(X)$;
(3) $S(X)$ — множество всех однородных функционалов из $O(X)$;
(4) $OS(X)$ — множество всех полуаддитивных функционалов из $OH(X)$;
(5) $P(X)$ — множество всех положительных нормированных линейных функционалов на $C(X)$.

Пусть множество $\mathcal{F} = \{O, OH, OS, P\}$ как подпространство пространства $V(X)$, снабженное топологией поточечной сходимости, в которой базу окрестностей нуля функционала $\nu \in \mathcal{F}(X)$ образуют множества следующего вида:

$$\big\langle \nu;\ \varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_k, \varepsilon \big\rangle = \big\{\nu' \in \mathcal{F}(X) :\ |\nu'(\varphi_i) - \nu(\varphi_i)| < \varepsilon,\ i \in \overline{1, \ldots, k}\big\},$$

где $\varepsilon > 0$, $\varphi_i \in C(X)$, $i \in \overline{1, \ldots, k}$, $k \in \mathbb{N}$.

Для каждого компакта X пространство $\mathcal{F}(X)$ является выпуклым компактом.

Пусть X и Y — компакты, а $f : X \to Y$ является непрерывным отображением. Следующее отображение определяется как сужение $V(f)$ на $\mathcal{F}(X)$:

$$\mathcal{F}(f) : \mathcal{F}(X) \to \mathcal{F}(Y), \quad \mathcal{F} = \{O, OH, S, OS, P\}.$$

Функтор O впервые был рассмотрен Т. Радулом в [9], функторы OH и OS были изучены в [4,6].

Пусть F — замкнутое подмножество в X. Функционал $\nu \in OS(X)$ называется *сосредоточенным на* F, если $\nu(f) = \nu(g)$ для всех $f, g \in C(X)$ с условием $f|_F = g|_F$. Наименьшее замкнутое подмножество $F \subset X$, на котором сосредоточен функционал μ, называется *носителем* $\nu \in OS(X)$ и обозначается через $\operatorname{supp} \nu$, т.е.

$$\operatorname{supp} \nu = \bigcap \{F : \nu \text{ сосредоточен на } F\}.$$

Для выпуклого компакта K через $\mathrm{cc}(K)$ обозначим пространство всех выпуклых замкнутых подмножеств K, снабженное топологией Вьеториса. Напомним (см. [3]), что базу окрестностей этой топологии образуют множества следующего вида:

$$\big\langle U_1, \ldots, U_n \big\rangle = \big\{A \subseteq \mathrm{cc}(K) : A \subseteq U_1 \cup \cdots \cup U_n,\ A \cap U_i \neq \emptyset \text{ для всех } i\big\},$$

где $U_1, \ldots, U_n$ пробегают все открытые подмножества K, $n \in \mathbb{N}$.

Для $A \in \mathrm{cc}\big(P(X)\big)$ положим

$$\nu_A(\varphi) = \sup\big\{\mu(\varphi) : \mu \in A\big\}, \quad \varphi \in C(X). \tag{1}$$

Тогда $\nu_A \in OS(X)$. В [4] было доказано, что всякий функционал из $OS(X)$ представляется в виде (1); более того, следующее отображение является аффинным гомеоморфизмом между пространствами $\mathrm{cc}(P(X))$ и $OS(X)$ (см. [4]):

$$A \in \mathrm{cc}\big(P(X)\big) \mapsto \nu_A \in OS(X). \tag{2}$$

Пусть X и Y — топологические пространства, а $f : X \to Y$ — непрерывное отображение.

Отображение $\mathcal{F}(f) : \mathcal{F}(X) \to \mathcal{F}(Y)$, где $\mathcal{F} = \{OS, P\}$, определяется как сужение $V(f)$ на $\mathcal{F}(X)$.

В [4] было доказано равенство

$$OS(f)(\nu_A) = \nu_{P(f)(A)}. \tag{3}$$

Заметим, что для n-точечного компакта $\boldsymbol{n} = \{0, 1, \ldots, n-1\}$, $n \in \mathbb{N}$, пространство $C(\boldsymbol{n})$ гомеоморфно пространству $\mathbb{R}^n$, причем гомеоморфизм задается следующим образом:

$$\varphi \in C(\boldsymbol{n}) \to \big(\varphi(0), \varphi(1), \ldots, \varphi(n-1)\big) \in \mathbb{R}^n.$$

В [4] доказано, что пространство $OS(\mathbf{2})$ аффинно гомеоморфно следующему треугольнику:

$$\triangle = \big\{(\alpha, \beta) : \alpha,\ \beta \in \mathbb{R},\ 0 \leqslant \alpha \leqslant \beta \leqslant 1\big\}.$$

Изоморфизм задается по следующему правилу:

$$(\alpha, \beta) \mapsto \lambda = \alpha\delta_0 + (1-\beta)\delta_1 + (\beta - \alpha)\delta_0 \vee \delta_1,$$

где δ_i — функционал Дирака в точке i, функционал $\delta_0 \vee \delta_1 \in OS(\mathbf{2})$ определяется следующим образом:

$$(\delta_0 \vee \delta_1)(f) = \max\{\delta_0(f), \delta_1(f)\}, \quad f \in C(\mathbf{2}).$$

Пусть K — выпуклое компактное подмножество локально выпуклого пространства E. Напомним, что операция Минковского определяется следующим образом:

$$\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 = \big\{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 : x_1 \in A_1,\ x_2 \in A_2\big\},$$

где $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $A_1, A_2 \in \mathrm{cc}(K)$. Следуя [3], рассмотрим отношение эквивалентности $\sim$ на $\mathrm{cc}(E) \times \mathrm{cc}(E)$, определенное следующим образом:

$$(A, B) \sim (C, D) \quad \text{только и только тогда, когда} \quad A + D = B + C.$$

Обозначим через L постранство классов эквивалентности относительно $\sim$; пусть $[A, B]$ — класс, содержащий (A, B). Известно, что L — линейное пространство относительно естественных алгебрических операции. Для выпуклой окрестности нуля U положим

$$U^* = \big\{[A, B] :\ A \subset B + U,\ B \subset A + U\big\}.$$

Множества вида U^* образуют базу окрестностей нуля в L. Отображение $\pi : \mathrm{cc}(K) \to L$, определенное как $\pi(A) = [A, \{0\}]$, является вложением; при этом

$$\pi(\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2) = \lambda_1 \pi(A_1) + \lambda_2 \pi(A_2)$$

для всех $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $A_1, A_2 \in \mathrm{cc}(K)$.

Рассмотрим на $C(\mathbf{3})$ функционалы следующего вида:

$$\nu_1(f) = f(0), \tag{4}$$

$$\nu_2(f) = \max\Big\{f(0),\ tf(1) + (1-t)f(2),\ \alpha f(0) + \beta f(1) + \gamma f(2)\Big\}, \tag{5}$$

где $0 \leqslant t \leqslant 1$, $\alpha + \beta + \gamma = 1$, $\alpha, \beta, \gamma \geqslant 0$,

$$\nu_3(f) = \max\Big\{\alpha f(0) + (1-\alpha)f(1),\ \beta f(1) + (1-\beta)f(2),\ \gamma f(2) + (1-\gamma)f(0)\Big\}, \tag{6}$$

где $0 < \alpha, \beta, \gamma < 1$.

Функционалы $\mu, \nu \in OS(X)$ назовем *подобными*, если найдется такой гомеоморфизм $\Phi : X \to X$, что $\nu = \mu \circ \Phi$.

Множества $A, B \subseteq P(X)$ назовем *подобными*, если существует такой гомеоморфизм $\tau : X \to X$, что $A = P(\tau)(B)$.

Пусть K — выпуклое множество. Точка $x \in K$ называется *крайней* (или *экстремальной*) точкой K, если из равенства $x = (y+z)/2$, $y, z \in K$ следует, что $x = y = z$.

Множество всех экстремальных точек множества K называется ее экстремальной границей K и обозначается через $\partial_e(K)$.

В [7] был получен общий вид крайних полуаддитивных точек выпуклого компакта на трехточечном компакте: было показано, что функционал $\nu \in OS(\mathbf{3})$ является крайней точкой в $OS(\mathbf{3})$ тогда и только тогда, когда ν подобен одному из функционалов вида (4)–(6).

3. Основной результат. Следующая теорема является основным результатом работы.

Теорема 1. *Пусть X — непустой компакт. Тогда экстремальная граница $\partial_e\big(OS(X)\big)$ выпуклого компакта $OS(X)$ является компактом, причем*

1) $\dim \partial_e\big(OS(\mathbf{3})\big) = 3$;
2) $\dim \partial_e\big(OS(X)\big) = \infty$ *для* $|X| \geqslant 4$.

Для доказательства этой теоремы нам потребуются вспомогательные леммы.

Лемма 1. $\partial_e \operatorname{cc}\big(P(X)\big)$ *является замкнутым подмножеством в* $\operatorname{cc}\big(P(X)\big)$.

Доказательство. Покажем, что $\operatorname{cc}(P(X)) \setminus \partial_e \operatorname{cc}(P(X))$ является открытым подмножеством в $\operatorname{cc}\big(P(X)\big)$. Возьмем произвольный $A \in \operatorname{cc}\big(P(X)\big) \setminus \partial_e \operatorname{cc}\big(P(X)\big)$. Тогда найдутся такие $B, C \in \operatorname{cc}\big(P(X)\big)$, $B \neq C$, что $A = (B+C)/2$.

Выберем дизъюнктные окрестности U и V точек B и C соответственно в $P(X)$. Положим

$$\langle U\rangle = \big\{D \subseteq \operatorname{cc}(P(X)) : D \subseteq U\big\}, \quad \langle V\rangle = \big\{D \subseteq \operatorname{cc}(P(X)) : D \subseteq V\big\}, \quad W = \frac{1}{2}\langle U\rangle + \frac{1}{2}\langle V\rangle.$$

Очевидно, что W является открытой окрестностью точки A в $\operatorname{cc}\big(P(X)\big)$. Пусть $D \in W$; тогда $D = D_1 + D_2$, где $D_1 \in \langle U\rangle$, $D_2 \in \langle V\rangle$. Так как U и V дизъюнктны, то $D_1 \neq D_2$. Следовательно,

$$A \in W \subset \operatorname{cc}\big(P(X)\big) \setminus \partial_e \operatorname{cc}\big(P(X)\big).$$

Это означает, что $\partial_e \operatorname{cc}\big(P(X)\big)$ является открытым множеством. □

Лемма 2. *Пусть*

$$A = \operatorname{co}\{\delta_n, K\}, \tag{7}$$

где $K \in \operatorname{cc}\big(P(\boldsymbol{n-1})\big)$. *Тогда A является крайней точкой в* $\operatorname{cc}\big(P(\boldsymbol{n})\big)$.

Доказательство. Пусть $A = (B+C)/2$, где $B, C \in \operatorname{cc}\big(P(\boldsymbol{n})\big)$. Поскольку $\delta_n \in A$, найдутся такие $\mu_1 \in B$, $\mu_2 \in C$, что $\delta_n = (\mu_1+\mu_2)/2$. Тогда $\mu_1 = \mu_2 = \delta_n$, поскольку δ_n — крайняя точка в $P(\boldsymbol{n})$. Отсюда следует, что $\delta_n \in B$, $\delta_n \in C$. Положим

$$B_0 = B \cap P(\boldsymbol{n-1}), \quad C_0 = C \cap P(\boldsymbol{n-1}).$$

Так как $P(\boldsymbol{n-1})$ — грань в $P(\boldsymbol{n})$, то $K = (B_0 + C_0)/2$.

Пусть $\lambda \in B_0$. Поскольку $(\delta_n + \lambda)/2 \in A$, найдутся такие $\mu \in K$ и $t \in [0,1]$, что справедливо равенство

$$\frac{\delta_n + \lambda}{2} = t\delta_n + (1-t)\mu.$$

Возьмем характеристическую функцию $\chi_{\boldsymbol{n-1}}$ множества $\boldsymbol{n-1}$, т.е.

$$\chi_{\boldsymbol{n-1}}(i) = \begin{cases} 1, & i \in \boldsymbol{n-1}, \\ 0, & i \notin \boldsymbol{n-1}. \end{cases}$$

Из равенства

$$\frac{1}{2}\big(\delta_n(\chi_{\boldsymbol{n-1}}) + \lambda(\chi_{\boldsymbol{n-1}})\big) = t\delta_n(\chi_{\boldsymbol{n-1}}) + (1-t)\mu(\chi_{\boldsymbol{n-1}})$$

следует, что $t = 1/2$; тогда $\lambda = \mu$. Это означает, что $B_0 \subseteq K$. Аналогично проверяется, что $C_0 \subseteq K$. Отсюда следует, что

$$B \subseteq A, \quad C \subseteq A.$$

Пусть $\mu \in A$ — произвольная крайняя точка в A. Так как $A = (B+C)/2$, то найдутся такие $\lambda \in B$, $\nu \in C$, что $\mu = (\lambda + \nu)/2$. Так как μ является крайней точкой в A, то получим, что $\lambda = \nu = \mu$. Таким образом, $\mu \in B$ и $\mu \in C$. Из произвольности μ следует, что

$$A \subseteq B, \quad A \subseteq C.$$

Отсюда $B = C = A$. □

Лемма 3. $\dim \partial_e OS(\mathbf{4}) = \infty$.

Доказательство. Покажем, что имеет место вложение

$$OS(\mathbf{3}) \hookrightarrow \partial_e OS(\mathbf{4}).$$

Положим, что выполнено вложение

$$\nu_A \in OS(\mathbf{3}) \hookrightarrow \nu_{\mathrm{co}\{\delta_3, A\}} \partial_e OS(\mathbf{4}).$$

Из леммы 2 вытекает, что это отображение является вложением. Из [8] следует, что $\mathrm{cc}\big(P(\mathbf{3})\big)$ является бесконечномерным пространством. Отсюда следует, что $\partial_e OS(X)$ также является бесконечномерным при $|X| \geqslant 4$. □

Лемма 4. *δ_0, δ_1, δ_2 являются изолированными точками в $\partial_e OS(\mathbf{3})$.*

Доказательство. Возьмем такую открытую окрестность U функционала $\{\delta_0\}$ в $P(X)$, что $U \cap [\delta_1, \delta_2] = \emptyset$. Предположим, что выполнено равенство

$$\langle U \rangle = \big\{D \subseteq \mathrm{cc}\big(P(X)\big) : D \subseteq U\big\}.$$

Проверим, что

$$\langle U \rangle \cap \partial_e OS(\mathbf{3}) = \{\delta_0\}.$$

Пусть $\nu_A \in \langle U \rangle \cap \partial_e OS(\mathbf{3})$. Тогда ν_A представляется в виде (5) или (6). Это означает, что выполнено равенство $\nu_A = \delta_0$. □

Лемма 5. *$\partial_e OS(\mathbf{3}) \setminus \{\delta_0, \delta_1, \delta_2\}$ — трехмерное тело, являющееся фактор-множеством трехмерного куба.*

Доказательство. Отождествим трехмерный куб $[0,1]^3$ с телом, изображенным на из рис. 1. Далее, отождествив точки $(0,0,0)$ и $(1,1,1)$ с точками O_1 и O_2 соответственно, получим тело, изображенное на рис. 2.

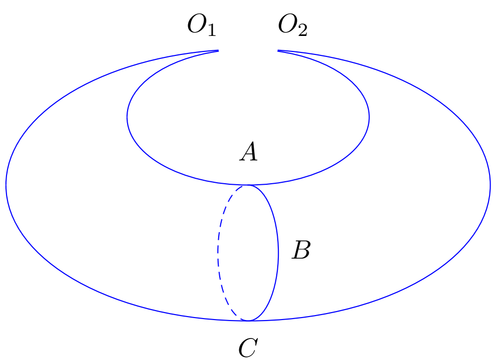


Рис. 1

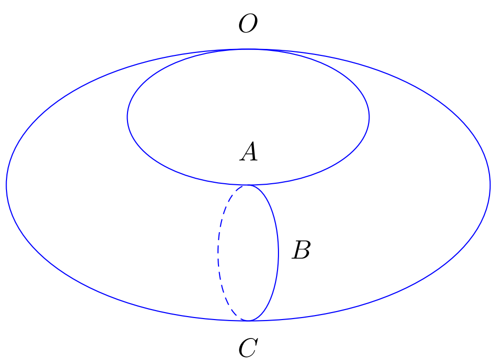
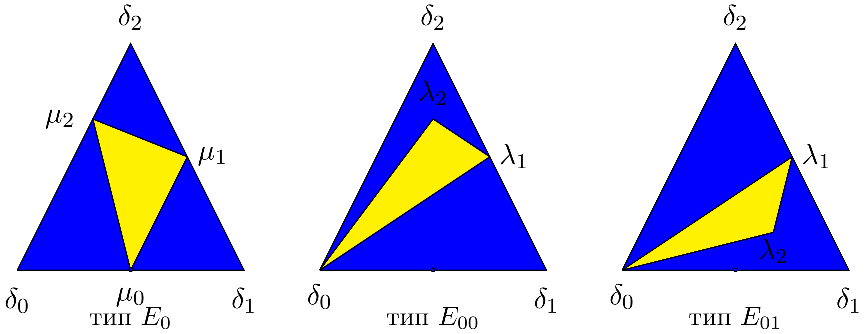


Рис. 2

Крайние точки вида (5) и (6) разделим на типы E_0, E_{00}, E_{01}, как на следующей диаграмме:



тип E_0 тип E_{00} тип E_{01}

Покажем, что множество всех экстремальных точек типа E_0 гомеоморфно трехмерному телу, изображенному на рис. 2. Отображение $\jmath_0 : [0,1]^3 \to E_0$ определим следующим образом:

$$\jmath_0(t_0, t_1, t_2) = \mathrm{co}\{\mu_0, \mu_1, \mu_2\},$$

где $\mu_0 = t_0\delta_0 + (1-t_0)\delta_1$, $\mu_1 = t_1\delta_1 + (1-t_1)\delta_2$, $\mu_2 = t_2\delta_2 + (1-t_2)\delta_0$. Очевидно,

$$\jmath_0(0,0,0) = \jmath_0(1,1,1) = \mathrm{co}\{\delta_0, \delta_1, \delta_2\}, \quad \jmath_0(1,1,0) = \jmath_0(t_0,1,0) = \mathrm{co}\{\delta_0, \delta_1\}.$$

Пусть точки A, B, C отождествлены с точками $(1,1,0)$, $(0,1,1)$, $(1,0,1)$ соответственно. Покажем, что множество всех экстремальных точек вида E_{00} гомеоморфно фактор-множеству множества

$$I_{00} = \Big\{(t_1, t_2, t_3) : \ 0 \leqslant t_1, t_2, t_3 \leqslant 1, \ t_3 \geqslant t_1, \ t_2 + t_3 \leqslant 1\Big\}.$$

Отображение $\jmath_{00} : I_{00} \to E_{00}$ определим формулой

$$\jmath_{00}(t_1, t_2, t_3) = \mathrm{co}\{\delta_0, \lambda_1, \lambda_2\},$$

где $\lambda_1 = t_1\delta_1 + (1-t_1)\delta_2$, $\lambda_2 = t_2\delta_0 + t_3\delta_1 + (1-t_2-t_3)\delta_2$. Очевидно,

$$\jmath_{00}(0,0,0) = \jmath_{00}(1,1,1) = \mathrm{co}\{\delta_0, \delta_1, \delta_2\},$$

$$\jmath_{00}(t_1,1,0) = \jmath_{00}(t_1, 1-t_1, t_1) = \jmath_{00}\big(t_1, t_2, (1-t_2)t_1\big) = \mathrm{co}\{\delta_0, \lambda_1\},$$

где $\lambda_1 = t_1\delta_1 + (1-t_1)\delta_1$. Заметим, что пересечение множеств E_0 и E_{00} состоит из точек вида $\mathrm{co}\{\delta_0, \lambda_1, \lambda_2\}$, причем $\lambda_1 = t_1\delta_1 + (1-t_1)\delta_2$, $\lambda_2 = t_2\delta_0 + (1-t_2)\delta_2$.

Аналогично, множество всех экстремальных точек вида E_{01} гомеоморфно фактор-множеству

$$I_{01} = \Big\{(t_1, t_2, t_3) : \ 0 \leqslant t_1, t_2, t_3 \leqslant 1, \ t_3 \leqslant t_1, \ t_2 + t_3 \leqslant 1\Big\}.$$

Теперь склеим тела I_{00} и I_{01} к E_0 слева по треугольной поверхности OAB и справа по треугольной поверхности OAB соответственно. Полученное тело гомеоморфно E_0.

Пусть E_{i0}, E_{i1}, $i = 1, 2,$ — множество экстремальных точек, полученное из E_{00}, E_{01} подобным преобразованием, переставляющим вершины δ_0 и δ_i, $i = 1, 2$. Как и выше, приклеив тела E_1 и E_2 к E_0, получим тело, гомеоморфное телу E_0. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Albeverio S., Ayupov Sh. A., Zaitov A. A.* On certain properties of the space of order-preserving functionals// Topol. Appl. — 2008. — *155.* — C. 1792–1799.
2. *Ayupov Sh. A., Zaitov A. A.* Functor of weakly additive τ-smooth functionals and mappings// Ukr. J. Math. — 2009. — *61.* — C. 1380–1386.
3. *Bazylevich L., Repovs D., Zarichniy M.* Hyperspace of convex compacta of nonmetrizable compact convex subspaces of locally convex spaces// Topolю Applю — 2008. — *155.* — C. 764–772.
4. *Davletov D. E., Djabbarov G. F.* Functor of semi-additive functionals// Meth. Funct. Anal. Appl. — 2008. — *14,* № 4. — C. 317–322.
5. *Djabbarov G. F.* Description of extremal points of the space of weakly additive positively-homogeneous functionals of the two-point set// Uzbek. Math. J. — 2005. — № 3. — C. 17–25.
6. *Djabbarov G. F.* Categorical properties of the functor of weakly additive positively-homogeneous functionals// Uzbek. Math. J. — 2006. — № 2. — C. 20–28.

7. *Djabbarov G. F.* Extreme boundary of the space of semi-additive functionals on three-point set// Contemp. Math. AMS. — 2016. — *672.* — C. 159–167.
8. *Nadler S. B. Jr., Quinn J., Stravakas N. M.* Hyperspaces of compact convex sets// Pac. J. Math. — 1979. — *83.* — C. 441–462.
9. *Radul T.* On the functor of order-preserving functionals// Comment. Math. Univ. Carol. — 1998. — *39*, № 3. — C. 609–615.

Г. Ф. Джаббаров
Ташкентский государственный педагогический университет им. Низами, Ташкент, Узбекистан
E-mail: gayrat_77@bk.ru

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 144 (2018). С. 81–87

УДК 517.936, 517.925.53

О ГЕОМЕТРИИ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ

© 2018 г. А. Я. НАРМАНОВ, С. С. САИТОВА

Аннотация. Хорошо известно, что задача о геометрии и топологии множества достижимости семейства векторных полей является одной из основных задач качественной теории управления и тесно связана с геометрией орбит векторных полей. В данной статье обсуждаются результаты авторов по геометрии множества достижимости семейства векторных полей: излагаются результаты по геометрии множеств T-достижимости и изучается геометрия орбит векторных полей Киллинга.

Ключевые слова: векторное поле, орбита, множество достижимости, векторное поле Киллинга, эйлерова характеристика.

AMS Subject Classification: 37C10, 57R27

1. Введение. Предметом настоящей работы являются геометрия орбиты семейства гладких векторных полей, заданных на гладком многообразии, и геометрия множества достижимости. В настоящей статье дается обзор результатов авторов, опубликованных в [3, 4].

Изучению структуры орбиты семейства гладких векторных полей посвящены исследования многих математиков в связи с ее важностью в приложениях, в теории оптимального управления, динамических системах, в геометрии и в теории слоений (см. [1, 3, 8, 12, 16, 17]).

В качественной теории управления множество управляемости (или множество достижимости) системы управления на гладком многообразии в классе кусочно постоянных управлений совпадает с отрицательной (положительной) орбитой семейства векторных полей, которое определяется системой управления однозначно. В случае симметричных систем множество управляемости (и также множество достижимости) совпадает с орбитой.

С другой стороны, любое семейство векторных полей определяет некоторую динамическую полисистему. Таким образом, изучение структуры множества управляемости тесно связано с изучением структуры орбиты семейства векторных полей. Хорошо известно, что множество управляемости является одним из основных объектов качественной теории оптимального управления.

При изучении качественных свойств системы управления на гладком многообразии (например, вопросы управляемости), возникает возможность применения дифференциально-геометрических методов. О дифференциально-геометрических методах в теории оптимального управления можно прочитать в [8].

2. Предварительные сведения. Пусть M — гладкое (класса C^∞) многообразие размерности n, $V(M)$ — множество всех гладких (класса C^∞) векторных полей, определенных на M. Обозначим через $[X, Y]$ скобку Ли векторных полей $X, Y \in V(M)$. Относительно скобки Ли множество $V(M)$ является алгеброй Ли.

Рассмотрим множество $D \subset V(M)$. Через $V(D)$ обозначим наименьшую подалгебру Ли, содержащую множество D, через $L(x)$ — орбиту семейства D, содержащую точку $x \in M$.

Обозначим через $P(x)$ линейную оболочку множества векторов $D(x) = \{X(x) : X \in D\}$ и введем следующее подпространство касательного пространства T_xM в точке x:

$$V_x(D) = \{X(x) : X \in V(D)\}.$$

Рассмотрим отображения $P : x \to P(x)$ и $P_D : x \to V_x(D)$, ставящие в соответствие точке x подпространства $P(x)$ и $V_x(D)$ касательного пространства T_xM соответственно. Такие отображения называются *распределениями*.

Р. Германн первым указал на важность следующего результата Чжоу, представленного в [9], в теории управления (этот результат почти одновременно был доказан П. Рашевским в [7]).

Предложение 1. Если размерности $\dim P(x)$ и $\dim V_x(D)$ не зависят от x, то для каждой точки x множество $L(x)$ является интегральным подмногообразием распределения P_D.

В случае, когда размерность линейного пространства $V_x(D)$ не постоянна, Р. Германн получил достаточные условия, при выполнении которых для каждой точки $x \in M$ орбита $L(x)$ является интегральным подмногообразием вполне интегрируемого распределения $x \to V_x(D)$.

Фундаментальным результатом в этом направлении стала следующая теорема Сусманна.

Теорема 1 (см. [17]). *Если многообразие M и векторные поля из D принадлежат классу C^∞, то для каждого $x \in M$ орбита $L(x)$ является погруженным подмногообразием M.*

Иными словами, существует вполне интегрируемое распределение на M, притом для каждой точки $x \in M$ орбита $L(x)$ совпадает с максимальным интегральным подмногообразием этого распределения, проходящего через точку x.

П. Стефан доказал этот результат в случае, когда M и векторные поля из D имеют гладкость класса C^r, $r \geqslant 1$ (см. [16]). Известно, что в случае, если векторные поля из D принадлежат классу C^0, орбита не является многообразием. Примером может служить непрерывное векторное поле, когда нет единственности решения соответствующего дифференциального уравнения.

Из результатов, изложенных в [14], следует, что если M и векторные поля из D аналитичны, то распределение $P_D : x \to V_x(D)$ вполне интегрируемо, причем каждая орбита является интегральным подмногообразием для P_D. Таким образом, в этом случае размерность орбиты $L(x)$ равна $\dim V_x(D)$ для всех $x \in M$. В общем случае имеет место следующее соотношение для всех $x \in M$:

$$\dim V_x(D) \leqslant \dim L(x).$$

3. Геометрия множества достижимости векторных полей. Рассмотрим множество $D \subset V(M)$, которое может содержать конечное или бесконечное число гладких векторных полей.

Для точки $x \in M$ через $t \to X^t(x)$ обозначим интегральную кривую векторного поля X, проходящую через точку x при $t = 0$. Отображение $t \to X^t(x)$ определено в некоторой области $I(x) \subset \mathbb{R}$, которая в общем случае зависит от поля X и от начальной точки x.

В дальнейшем всюду в формулах вида $X^t(x)$ будем считать, что $t \in I(x)$. Если для всех точек $x \in M$ область определения $I(x)$ кривой $t \to X^t(x)$ совпадает с числовой осью, то векторное поле X называется *полным векторным полем*. В этом случае поток векторного поля порождает динамическую систему.

Определение 1. *Орбита* $L(x)$ семейства D векторных полей, проходящая через точку x, определяется как множество таких точек y из M, для которых существуют действительные числа $t_1, t_2, \dots, t_k$ и векторные поля $X_1 X_2, \dots, X_k$ из D, $k \in \mathbb{N}$, удовлетворяющие условию

$$y = X_k^{t_k}\Big(X_{k-1}^{t_{k-1}}\big(\dots(X_1^{t_1}(x))\dots\big)\Big). \tag{1}$$

Определение 2. Точка $y \in L(x)$ из уравнения (1) называется *T-достижимой из точки $x \in M$*, если $\sum\limits_i t_i = T$.

Обозначим через $A_x(T)$ множество точек, которые T-достижимы из точки x.

Напомним, что подмногообразие $N \subset M$ называется погруженным в M, если каноническая инъекция $i : N \to M$ является дифференцируемым отображением максимального ранга.

Топология орбиты $L(x)$ (топология Суссмана) вводится как сильнейшая топология, для которой непрерывными являются все отображения следующего вида:

$$\big(t_1, t_2, \dots, t_k\big) \in \mathbb{R}^k \to X_k^{t_k}\Big(X_{k-1}^{t_{k-1}}\big(\dots(X_1^{t_1}(x))\dots\big)\Big),$$

где $t_1, t_2, \dots, t_k$ — действительные числа, $X_1, X_2, \dots, X_k$ — векторные поля из семейства D.

Собственная топология орбиты как погруженного подмногообразия является более сильной, чем топология, индуцированная из M. Например, для иррациональной обмотки тора для всех траекторий эти топологии различны.

Используя идею работы [17], в которой доказано, что орбита является гладким многообразием, авторы данной статьи в [4] доказали следующую теорему о геометрии множества T-достижимых точек.

Теорема 2. *Множество $A_x(T)$ для каждого $x \in M$ при любом T является погруженным подмногообразием орбиты $L(x)$ коразмерности 1 или 0.*

Еще одним существенным вкладом Г. Суссманна в изучение геометрии множества достижимости является следующая теорема.

Теорема 3 (см. [13]). *Пусть M — гладкое связное многообразие размерности n. Существует такая система D, состоящая из двух векторных полей, что $L^+(x) = M$ для каждой точки $x \in M$.*

Использование теоремы 3 в [4] позволило доказать следующую теорему.

Теорема 4. *Пусть M — гладкое связное многообразие размерности $n \geqslant 2$. Существует такая система D, состоящая из трех векторных полей, что $A_x(0) = M$ для каждой точки $x \in M$.*

Для многообразий с ненулевой эйлеровой характеристикой получен следующий результат.

Теорема 5 (см. [4]). *Пусть M — гладкое компактное связное многообразие размерности $n \geqslant 2$, эйлерова характеристика которого отлична от нуля. Существует такая система D, состоящая из двух векторных полей, что $A_x(0) = M$ для каждой точки $x \in M$.*

Следующий пример показывает, что на компактном связном многообразии M с нулевой эйлеровой характеристикой также может существовать система D, состоящая из двух векторных полей, притом $A_x(0) = M$ для каждой точки $x \in M$.

Пусть трехмерная сфера $S^3 \subset \mathbb{R}^4$ задана уравнением

$$x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 1,$$

где x, y, z, w — декартовы координаты в $\mathbb{R}^4$. Рассмотрим систему на S^3, состоящую их двух векторных полей:

$$X = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y} - w\frac{\partial}{\partial z} + z\frac{\partial}{\partial z}, \quad Y = -z\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial z}.$$

Нетрудно проверить, что эти векторные поля являются полями Киллинга, т.е. локальные диффеоморфизмы $x \to X^t(x)$, $x \to Y^t(x)$ при каждом t являются изометриями сферы S^3.

Скобка Ли $[X, Y]$ векторных полей X, Y имеет следующий вид:

$$[X, Y] = -w\frac{\partial}{\partial x} - z\frac{\partial}{\partial y} + y\frac{\partial}{\partial z} + x\frac{\partial}{\partial w}.$$

Векторные поля X, Y, $[X, Y]$ принадлежат подалгебре Ли $V(D)$, которая является минимальной подалгеброй Ли алгебры Ли $V(M)$, содержащей множество D.

В точке $p(1, 0, 0, 0) \in S^3$ векторы $X(p)$, $Y(p)$, $[X, Y](p)$ линейно независимы, т.е. подпространство $V_p(D) = \{X(p) : X \in V(D)\}$ трехмерно. Поэтому орбита $L(p)$ является трехмерной. В силу того, что X, Y являются векторными полями Киллинга, орбита $L(p)$ является замкнутым подмножеством пространства $\mathbb{R}^4$ (следовательно, в S^3; см. [3]. С другой стороны, как вытекает из доказательства теоремы 1, в силу максимальности размерности, орбита $L(p)$ является открытым подмножеством S^3. Следовательно, орбита сопадает с S^3.

Теперь рассмотрим множества $A_q(0)$ для $q \in S^3$. Если множества A_q являются подмногообразиями коразмерности 1, в силу того, что векторные поля X, Y являются векторными полями Киллинга, они порождают двумерное риманово слоение на S^3 (см. [3]). Как следует из результатов работы [6], на трехмерной сфере не существует двумерных римановых слоений. Следовательно, множество $A_q(0)$ совпадает с S^3 для всех $q \in S^3$.

Для симметричных система имеет место следующая теорема.

Теорема 6 (см. [4])**.** *Пусть система D симметрична и содержит полное векторное поле. Тогда для каждого $T \in \mathbb{R}$ и для каждой точки $x \in M$ имеет место равенство*

$$A_x(T) = L(x).$$

Заметим, что система векторных полей D называется *симметричной*, если из $X \in D$ следует, что $-X \in D$.

В следующем примере множества $A_q(0)$ являются подмногообразиями орбиты $L(p)$ коразмерности 1.

Пусть $M = \mathbb{R}^3$, D состоит из векторных полей

$$X = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}, \quad Y = \frac{\partial}{\partial z}.$$

В этом случае для каждой такой точки $p(x, y, z) \in M$, что $x^2 + y^2 > 0$, орбита $L(p)$ является цилиндром, а множество $A_q(0)$ для каждой точки $q \in L(p)$ является винтовой линией, касательным полем которой является векторное поле

$$Z = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial z}.$$

Для точек оси OZ орбиты $L(p)$ и множества $A_q(0)$ совпадает с осью OZ.

4. Геометрия векторных полей Киллинга. Теперь перейдем к изучению геометрии векторных полей Киллинга. В этой части излагаются результаты, полученные в [3].

Напомним, что векторное поле X на M называется *векторным полем Киллинга*, если однопараметрическая группа локальных преобразований $x \to X^t(x)$, порожденная полем X, состоит из изометрий.

Напомним, что отображение P, ставящее в соответствие каждой точке $x \in M$ некоторое подпространство $P(x) \subset T_xM$, называется распределением. Если $\dim P(x) = k$ для всех $x \in M$, то P называется k-мерным распределением.

Семейство D гладких векторных полей естественным образом порождает гладкое распределение, которое каждой точке $x \in M$ ставит в соответствие подпространство $P(x)$ касательного пространство T_xM, порожденное множеством векторов

$$D(x) = \{X(x) : X \in D\}.$$

Разумеется, размерности подпространств $P(x)$ могут меняться от точки к точке.

Связное подмногообразие N многообразия M называется *интегральным подмногообразием* распределения P (или P_D), если для каждой точки $x \in N$ имеет место равенство

$$T_xN = P(x) \quad \big(T_xN = A_x(D)\big).$$

Распределение P называется *вполне интегрируемым*, если для каждой точки $x \in M$ существует такое подмногообразие N_x многообразия M, что $T_yN_x = P(y)$ для всех $y \in N_x$. Подмногообразие N_x называется *интегральным подмногообразием* распределения P.

Для векторного поля X будем писать $X \in P$, если $X(x) \in P(x)$ для всех $x \in M$. Распределение P называется *инволютивным*, если из условия $X, Y \in P$ следует, что $[X, Y] \in P$, где $[X, Y]$ — скобка Ли векторных полей X, Y.

Необходимое и достаточное условие вполне интегрируемости распределения постоянной размерности дано в теореме 7.

Теорема 7 (см. 7). *Для того, чтобы распределение P на многообразии M было вполне интегрируемым, необходимо и достаточно, чтобы оно было инволютивным.*

Покажем, что если множество D состоит из векторных полей Киллинга, то распределение $P_D : x \to V_x(D)$ вполне интегрируемо и в случае, когда $M = \mathbb{R}^n$, орбиты семейства D являются замкнутыми подмножествами.

Отметим, что скобка Ли двух полей Киллинга дает опять поле Киллинга и линейная комбинация полей Киллинга над полем действительных чисел тоже является полем Киллинга. Поэтому множество всех векторных полей Киллинга на многообразии M, обозначаемое через $K(M)$, образует алгебру Ли над полем действительных чисел. Кроме того, известно, что алгебра Ли $K(M)$ векторных полей Киллинга связного риманова многообразия M имеет размерность, не превышающую $n(n+1)/2$, $n = \dim M$. Если $\dim K(M) = n(n+1)/2$, то M является многообразием постоянный кривизны (см. [2]).

Обозначим через $A(D)$ наименьшую подалгебру Ли алгебры $K(M)$, содержащую множество D. Так как алгебра $K(M)$ конечномерна, то существуют такие векторные поля $X_1, X_2, \ldots, X_m$ из $A(D)$, что векторы $X_1(x), X_2(x), \ldots, X_m(x)$ образуют базис подпространства $V_x(D)$ для каждого $x \in M$.

Теорема Фробениуса, обобщенная Германном для распределений непостоянной размерности, дает необходимое и достаточное условие для вполне интегрируемости семейства векторных полей, состоящее из конечного числа векторных полей.

Теорема 8 (см. [10]). *Пусть $D = \{X_1, X_2, \ldots, X_k\}$ — семейство векторных полей на многообразии M. Семейство D порождает вполне интегрируемое распределение тогда и только тогда, когда оно инволютивно.*

Инволютивность семейства векторных полей $D = \{X_1, X_2, \ldots, X_k\}$ означает следующее: для любых $X, Y \in D$ существуют такие гладкие функции $f^l(x)$, $x \in M$, $l = \overline{1,k}$, что выполнено равенство

$$[X, Y] = \sum_{l=1}^{k} f^l(x) X_l.$$

Таким образом, в случае, когда семейство D состоит из векторных полей Киллинга, из теоремы 8 вытекает следующее утверждение.

Теорема 9. *Каждая орбита семейства D является интегральным подмногообразием вполне интегрируемого распределения $P_D : x \to V_x(D)$.*

Теорема 10. *Пусть $M = \mathbb{R}^n$ и множество Dсостоит из векторных полей Киллинга. Тогда каждая орбита семейства D является замкнутым подмножеством.*

Напомним некоторые понятия из теории слоений.

Пусть $f : M \to N$ — дифференцируемое отображение максимального ранга, где M — гладкое риманово многообразие размерности m, N — гладкое риманово многообразие размерности n, где $n > m$. Тогда для каждой точки $q \in N$ множество $L_q = \{p \in M : f(p) = q\}$ является многообразием размерности $n - m$, и разбиение M на многообразия L_q является k-мерным слоением, где $k = n - m$.

Пусть L — слой слоения F (орбита семейства D), $x \in L$, T_xL — касательное пространство L в точке x, $H(x)$ — ортогональное дополнение T_xL.

Возникают два подрасслоения $TF : x \longrightarrow T_xL$ и $H : x \longrightarrow H(x)$ касательного расслоения TM многообразия M. В этом случае каждое векторное поле $X \in V(M)$ можно представить в виде $X = X_F + X_H$, где X_F, X_H — ортогональные проекции X на TF и H соответственно. Если $X_H = 0$, то оно называется *вертикальным полем* (*касательным к* F), а если $X_F = 0$, то X называется *горизонтальным полем.*

Отображение $f : M \to N$ называется *римановой субмерсией*, если дифференциал df отображения f сохраняет длину горизонтальных векторов (см. [15]).

Обозначим через $B = M/F$ множество слоев F, наделенное фактор-топологией. Рассмотрим отображение $\pi : M \to F$, при котором $\pi(x) = L(x)$, где $L(x)$ — слой, содержащий точку x. Следующая теорема показывает, что орбиты являются слоями римановой субмерсии.

Теорема 11. *Пусть* $M = \mathbb{R}^n$, *множество* D *состоит из векторных полей Киллинга и* $\dim V_x(D) = k$ *для всех* $x \in M$, *где* $0 < k < n$. *Тогда множество слоев* $B = M/F$, *наделенное фактор-топологией, обладает такой дифференциальной структурой гладкого* $(n-k)$*-мерного многообразия, что отображение* $\pi : M \to B$ *является гладкой римановой субмерсией.*

Следствие 1. *Многообразие* B *является многообразием неотрицательной кривизны.*

Теорема 12. *В условиях теоремы* 11 *орбиты семейства* D *являются параллельными плоскостями тогда и только тогда, когда многообразие* $B = M/F$ *является многообразием нулевой кривизны.*

Следующий пример показывает, что в общем случае распределение $H : x \to H(x)$ не всегда вполне интегрируемо даже в случае $M = \mathbb{R}^n$. Рассмотрим векторное поле в $M = \mathbb{R}^3$:

$$X = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}.$$

Это поле является векторным полем Киллинга, его интегральными кривыми являются винтовые линии.

Ортогональное распределение $H : p \to H(p)$ в каждой точке задаётся следующими горизонтальными векторными полями:

$$Y = \frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial z}, \quad Z = \frac{\partial}{\partial y} - x\frac{\partial}{\partial z}.$$

Рассмотрим векторные поля $Y_* = d\pi(Y)$, $Z_* = d\pi(Z)$ на $B = M/F$. В силу того, что отображение $\pi : M \to B$ имеет максимальный ранг, векторные поля Y_*, Z_* линейно независимы в каждой точке многообразия $B = M/F$.

Вычислим секционную кривизну многообразия $B = M/F$ в двумерном направлении, определенного векторами $Y_*(q)$, $Z_*(q)$ в точке $q \in B$. По формуле О'Нейла, если (x, y, z) — декартовы координаты точки $p \in \pi^{-1}(q)$, то для вертикальной компоненты $[Y, Z]^v$ скобки Ли $[Y, Z]$ векторных полей имеет место равенство

$$[Y, Z]^v(p) = \lambda X(p),$$

где $\lambda = (x^2 + y^2 + 1)^{-1}$. Отсюда получим следующее выражение для кривизны:

$$K_*(Y_*, Z_*)(q) = \frac{3}{(x^2 + y^2 + 1)^2}.$$

Таким образом, в этом случае многообразие $B = M/F$ является двумерным многообразием строго положительной кривизны. В этом примере все интегральные кривые (орбиты), кроме одной, проходящей через начало координат, не являются одномерными плоскостями.

Из теоремы 2 вытекает, что многообразия $A_y(0)$ для точек $y \in L(x)$ либо совпадают с $L(x)$, либо они порождают слоение коразмерности 1 на $L(x)$. Это позволяет привлечь методы теории слоений для изучения геометрии многообразий $A_y(0)$. Известно, что если система состоит из векторных полей Киллинга, то это слоение является римановым (о геометрии орбит векторных полей Киллинга см. в [3]).

Напомним, что слоение F называется *римановым*, если каждая геодезическая, ортогональная в некоторой своей точке к слою слоения F, остается ортогональной ко всем слоям F во всех своих точках (см. [3]).

Теорема 13. *Пусть $M = \mathbb{R}^n$, D состоит из векторных полей Киллинга, и для точки $p \in M$ орбита $L(p)$ является k-мерной плоскостью, где $0 \leqslant k \leqslant n$. Тогда для всех точек $q \in L(p)$ множества $A_q(0)$ либо совпадают с $L(p)$, либо являются параллельными гиперплоскостями в $L(p)$.*

Действительно, если подмногообразия $A_q(0)$ не совпадают с орбитой $L(p)$, то они порождают риманово слоение коразмерности один на $L(p)$ (см. [3]). Как следует из результатов работы [5], риманово слоение коразмерности 1 евклидова пространства состоит из параллельных плоскостей.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Азамов А. А., Нарманов А. Я.* О предельных множествах орбит систем векторных полей// Диффер. уравн. — 2004. — *40*, № 2. — С. 257–260.
2. *Кобаяси Ш., Номидзу К.* Основы дифференциальной геометрии. Т. 1, 2. — М.: Наука, 1981.
3. *Нарманов А. Я., Саитова С.* О геометрии орбит векторных полей Киллинга// Диффер. уравн. — 2014. — *50*, № 12. — С. 1582–1589.
4. *Нарманов А. Я., Саитова С.* О геометрии множества достижимости векторных полей// Диффер. уравн. — 2017. — *53*, № 3. — С. 321–326.
5. *Нарманов А. Я., Касымов О.* О геометрии сингулярных римановых слоений// Узбек. мат. ж. — 2011. — № 3. — С. 113–121.
6. *Нарманов А. Я., Касымов О.* О геометрии римановых слоений сфер малых размерностей// Докл. АН РУз. — 2013. — № 2. — С. 6–7.
7. *Рашевский П. К.* О соединимости любых двух точек вполне неголономного пространства допустимой линией// Уч. зап. Моск. пед. ин-та им. К. Либкнехта. Сер. физ.-мат. наук. — 1938. — № 2. — С. 83–94.
8. *Agrachev A. A., Sachkov Y.* Control Theory from the Geometric Viewpoint. — Berlin: Springer-Verlag, 2004.
9. *Chow W. L.* Über Systeme von linearen partiellen Differentialgleinchungen ester Ordnung// Math. Ann. — 1939. — № 117. — С. 98–105.
10. *Hermann R.* The differential geometry of foliations// J. Math. Mech. — 1962. — *2*, № 11. — С. 305–315.
11. *R. Hermann* A sufficient condition that a mapping of Riemannian manifolds be a fiber bundle// Proc. Am. Math. Soc. — 1960. — *11*. — С. 236–242.
12. *Jurdjevich V.* Attainable sets and controllability: a geometry approach// Lect. Notes Econ. Math. Syst. — 1974. — *106*. — С. 219–251.
13. *Levitt N., Sussmann H.* On controllability by means of two vector fields// SIAM J. Control. — 1975. — *13*, № 6. — С. 1271–1281.
14. *Nagano T.* Linear differential systems with singularities and application to transitive Lie algebras// J. Math. Soc. Jpn. — 1968. — *18*, № 4. — С. 338–404.
15. *O'Neil B.* The fundamental equations of a submersion// Michigan Math. J. — 1966. — *13*. — С. 459–469.
16. *Stefan P.* Accessible sets, orbits, and foliations with singularities// Proc. London Math. Soc. — 1974. — *29*. — С. 694–713.
17. *Sussmann H.* Orbits of family of vector fields and integrability of systems with singularities// Bull. Am. Math. Soc. — 1973. — *79*. — С. 197–199.

А. Я. Нарманов
Национальный университет Узбекистана им. М. Улугбека, Ташкент, Узбекистан
E-mail: narmanov@yandex.ru

С. С. Саитова
Национальный университет Узбекистана им. М. Улугбека, Ташкент, Узбекистан
E-mail: saitova@email.com

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 144 (2018). С. 88–95

УДК 515.12

О ПРОЕКТИВНО ИНДУКТИВНО ЗАМКНУТЫХ ПОДФУНКТОРАХ ФУНКТОРА P ВЕРОЯТНОСТНЫХ МЕР

© 2018 г. **Ш. А. АЮПОВ, Т. Ф. ЖУРАЕВ**

Аннотация. Работа посвящена изучению топологических и размерностных свойств метрических, тихоновских, компактных C-пространств при воздействии ковариантного подфунктора P_f функтора P вероятностных мер в категории метрических, компактных, паракомпактных пространств и непрерывных отображений в себя. Рассмотрены геометрические свойства пространств при действии подфунктора P_f функтора P вероятностных мер. Показано, что этот функтор P_f является открытым и σ-p.i.c. функтором и сохраняет мягкие отображения и различные типы топологических пространств.

Ключевые слова: функтор, вероятностная мера, мера Дирака, мягкое отображение, C-пространство, индуктивно замкнутый функтор, сигма индуктивно замкнутый функтор, компакт Дугунджи.

AMS Subject Classification: 54B15, 54B30, 54B35, 54C05, 54C15, 54C60, 54030

1. Введение. Пусть $F : \mathrm{Comp} \to \mathrm{Comp}$ — функтор. Через $C(X, Y)$ обозначим пространство всех непрерывных отображений из X в Y с компактно-открытой топологией. В частности, $C\big(\{k\}, Y\big)$ естественно гомеоморфно k-й степени Y^k пространства Y. Отображению $\xi : \{k\} \to Y$ ставится в соответствие точка $(\xi(0), \xi(1), \dots, \xi(k_1)) \in Y^k$, где $\{k\}$ — k-элементное множество $\{0, 1, 2, \dots, k\}$.

Для функтора F, компакта X и натурального числа $k \in \mathbb{N}$ определим отображение

$$\pi_{X,F,k} : C\big(\{k\}, X\big) \times F(\{k\}) \to F(X), \quad (\xi, a) \mapsto F(\xi)(a), \quad \xi \in C\big(\{k\}, X\big).$$

Пусть $X \in \mathrm{Comp}$, $F : \mathrm{Comp} \to \mathrm{Comp}$ и $\psi \in F(X)$. *Степенью* $\deg(\psi)$ *точки* ψ называется такое наименьшее натуральное число, что ψ принадлежит образу $F(f)$ для некоторого отображения $f : k \to X$ для n-точечного пространства K. Если такое конечное число n не существует, то степень считается бесконечной. *Степенью* $\deg F$ *функтора* $F : \mathrm{Comp} \to \mathrm{Comp}$ является максимум степеней всевозможных точек $\psi \in F(X)$ для всевозможных компактов X (см. [8]).

Определение 1 (см. [4]). Эпиморфизм $f : X \to Y$ называется *индуктивно замкнутым*, если существует такое замкнутое множество A в X, что $f(A) = Y$, $f|_A$ — замкнутое отображение.

Для тихоновского пространства X и ковариантного функтора $F : \mathrm{Comp} \to \mathrm{Comp}$ через $F_\beta(X)$ обозначается пространство $\big\{\psi \in F(\beta X) : \sup p_F(a) \subset X\big\}$.

Функтор F_β называется *проективно индуктивно замкнутым* (p.i.c.), если отображение $\pi_{F_\beta,X,k}$ индуктивно замкнуто для каждого тихоновского пространства X и каждого положительного целого числа k.

Финитные нормальные функторы и функтор $\exp_n$ для любого $k \in \omega$ являются проективно индуктивно замкнутыми функторами (см. [14]).

Работа выполнена при поддержке гранта ОТ-Ф-4-42 РУз.

Определение 2 (см. [3])**.** Пусть функтор F действует в категории $C \subset \mathrm{Top}$ и пусть G — подфунктор функтора F. Функтор G называется *замкнутым подфунктором* функтора F (обозначение $G \subset_{cl} F$), если для каждого $X \in O(C)$ пространство $G(X)$ является замкнутым подпространством пространства $F(X)$.

Пусть $F : \mathrm{Tych} \to \mathrm{Tych}$ — функтор и $F^n \subset_{cl} F$ для каждого $n \in \omega$. Говорят, что F является *объединением* F^n (обозначение $F = \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} F^n$), если $F(X) = \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} F^n(X)$ для каждого тихоновского пространства (см. [11,13]).

Определение 3. Функтор $F : \mathrm{Tych} \to \mathrm{Tych}$ называется *сигма проективно индуктивно замкнутым* (σ-p.i.c.) *функтором*, если $F = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} (F^n)_\beta$, где каждое F^n — p.i.c. конечной степени, т.е. F является счетным объединением проективно индуктивно замкнутых функторов конечной степени.

Функтор $\exp_\omega = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \exp_n$ является σ-p.i.c. функтором.

Определение 4. Функтор F называется *конечно открытым*, если для каждого положительно целого числа k множество $F_k(\widetilde{k+1})$ открыто в $F(\widetilde{k+1})$ или $F(\widetilde{k+1}) \setminus F_k(\widetilde{k+1})$ замкнуто в $F(\widetilde{k+1})$.

Теорема 1 (см. [14])**.** *Каждый непрерывный конечно открытый, сохраняющий пустое множество и прообразы функтор является p.i.c. функтором.*

Пусть X — компакт и P — функтор вероятностных мер. $P(X)$ — выпуклое подмножество линейного пространства $M(X)$, сопряженного с пространством $C(X)$ непрерывных функций на X, взятого в слабой топологии, состоящее из всех неотрицательных функционалов μ (т.е. $\mu(\varphi) \geqslant 0$) для всякой неотрицательной функции $\varphi \in C(X)$ с единичной нормой). Пространство $P(X)$ естественно вложено в $R^{C(X)}$ (см. [5,6]). Поэтому базу окрестностей меры $\mu \in P(X)$ образуют все возможные множества вида

$$O(\mu, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k, \varepsilon) = \Big\{\mu' \in P(X) : \ \big|\mu(\varphi_i) - \mu'(\varphi_i)\big| \leqslant \varepsilon, \ i = \overline{1,k}, \ \varepsilon \geqslant 0, \ \varphi_i \in C(X)\Big\}.$$

В случае бесконечного компакта X пространство $P(X)$ содержит симплексы сколь угодно большого числа измерений. По теореме Кэли (см. [10]) выпуклый компакт $P(X) \subset R^{C(X)}$ аффинно вкладывается в гильбертово пространство ℓ_2. Следовательно, по теореме Келлера (см. [9]) компакт $P(X)$ гомеоморфен гильбертовому кубу $Q = \prod\limits_{i=1}^{\infty} [-1,1]_i$ как бесконечномерный выпуклый компакт, лежащий в ℓ_2, где $[-1,1]_i$ — отрезок прямой $\mathbb{R}$.

Для $n \in N$ и компакта X через $P_n(X)$ обозначается подпространство

$$\Big\{\mu \in P(X) : |\sup p\mu \leqslant n|\Big\},$$

где $P_1(X) = \delta(X)$ — пространство мер Дирака.

Для компакта X положим $P_\omega(X) = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} P_n(X)$. Заметим, что $P_\omega(X)$ — счетное объединение компактов $P_n(X)$ и $P_\omega(X)$ всюду плотно в $P(X)$, т.е. $P_\omega(X)$ состоит из всех вероятностных мер $\mu \in P(X)$ с конечными носителями.

Функтор P_k является σ-p.i.c. функтором для любого k (см. [14]).

2. О подфункторе P_f функтора P вероятностных мер. Е. В. Щепин в [8] ввел один интересный подфунктор P_f функтора P, обладающий следующим свойством: если носитель меры μ состоит из n точек $x_1, x_2, \ldots, x_n$, то мера по крайней мере одной из этих точек не меньше $1 - 1/(n+1)$.

Для компакта X пространство $P_f(X)$ является счетным объединением компактов $P_{f,n}(X)$, где $P_{f,n}(X) = \Big\{\mu \in P_f(X) : |\operatorname{sup} p\mu| \leqslant n\Big\}$ и $n \in N$, т.е.

$$P_f(X) = \bigcup_{n=1}^{\infty} P_{f,n}(X), \quad P_{f,1}(X) = \delta(X), \quad P_{f,n}(X) \subseteq P_n(X).$$

Функтор P_f интересен тем, что является функтором с конечными носителями, не имеющими конечной степени.

С другой стороны, для функторов P_f и P верны следующие утверждения:

(1) функторы P и P_f не имеют конечной степени;
(2) функторы P и P_f переводят бесконечные компакты в бесконечномерные (в смысле их степени) компакты;
(3) функторы P и P_f являются открытыми функторами;
(4) функторы P и P_f переводят гильбертов куб в гильбертов куб;
(5) функторы P и P_f переводят мягкие отображения в мягкие отображения.

Непрерывное отображение $f : X \to Y$ называется *n-обратимым*, если для любого паракомпакта Z размерности $\dim Z \leqslant n$ и непрерывного $g : Z \to Y$ найдется непрерывное отображение $\varphi : Z \to X$, для которого выполнено соотношение $f \circ \varphi = g$ (отображение φ в этом случае называется *поднятием* отображения g), т.е. имеет место диаграмма

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] & Y \\
 & Z \arrow[u, "g"'] \arrow[ul, "\varphi"]
\end{tikzcd}$$

Если в этом определении не накладывать условия на размерности пространства Z, то отображение f называется *обратимым*.

Функторы P и P_f переводят обратимые отображения в обратимые.

Для бесконечного кардинала τ через D^τ обозначается обобщенный канторов дисконтинуум веса τ. Непрерывные образы D^τ называются *диадическими компактами*.

Компактные подпространства банаховых пространств в слабой топологии называют *компактами Эберлейна*, а компакты, лежащие в Σ-произведениях метрических пространств, называются *компактами Корсона*.

Регулярный оператор $u : C(X) \to C(Y)$ называется *регулярным опусом* для отображения $f : X \to Y$, если $f^* \circ u \circ f^* = f^*$. Если при этом f является вложением, то u называется *регулярным оператором продолжения*. Если f — эпиморфизм , то u называется *регулярным оператором усреднения*. Бикомпакт X называется *пространством Милютина*, если существует эпиморфизм $f : D^\tau \to X$, допускающий регулярный оператор усреднения. Бикомпакт X называется *пространством Дугунджи*, если всякое вложение $f : X \to Y$ в бикомпакт Y допускает регулярный оператор продолжения. Линейный оператор $u : C(X) \to C(Y)$ называется *регулярным*, если $|u| = 1$ и $u(1_X) = 1_Y$.

Функторы P и P_f сохраняют диадические компакты, компакты Дугунджи, компакты Эберлейна, Корсона и Милютина (см. [2, 3]).

3. Некоторые категорные свойства функтора P_f. Пусть A — направленное множество, т.е. такое частично упорядоченное множество, что для любых двух его элементов $a, b \in A$ существует элемент $c \in A$, удовлетворяющий соотношениям $c \geqslant a$ и $c \geqslant b$.

Пусть τ — бесконечное множество. Направленное множество A называется *τ-полным*, если любая цепь его элементов, содержащая не более τ членов, имеет в A точную верхнюю грань. *Цепью* в множестве A называют такое подмножество, любые два элемента которого сравнимы между собой. Непрерывной спектр, заданный над τ-полным направленным множеством, называется *τ-полным*.

Обратный спектр называется *τ-спектром*, если он τ-полон и веса всех входящих в него пространств не превосходят τ. Для χ_0-спектра и χ_0-полноты употребляется название *σ-спектра*.

Спектр $\left\{X_\alpha : p_\alpha^\beta\right\}$, в котором открыты проекции p_α^β, называется *открытым спектром*. В [8] замечено, что у открытого спектра все предельные проекции p_α являются открытыми отображениями, и наоборот, если открыты все предельные проекции спектра, то открыты и все остальные проекции.

Определение 5. Бикомпакт, гомеоморфный предельному пространству некоторого σ-спектра с открытыми проекциями, называется *открыто-порожденным*.

Непосредственно из определения открыто-порожденных бикомпактов следует, что если функтор открыт, непрерывен и сохраняет вес, то он переводит открыто-порожденные бикомпакты в открыто-порожденные.

Функторы P и P_f сохраняют открыто-порожденные компакты.

Функтор $F : \mathrm{Comp} \to \mathrm{Comp}$ называется *открытым*, если для любого сюръективного открытого отображения $\varphi : X \to Y$ компакта X на компакт Y отображение $F(\varphi) : F(X) \to F(Y)$ открыто и сюръективно.

Известно, что функторы exp, P и SP^n открыты для любого n.

Заметим, что если пространство $P_f(X)$ — открыто-порожденный компакт, а пространство $\delta(X)$ совершенно каппа-нормально, то $\delta(X)$ открыто-порождено.

Теорема 2. *Функтор P_f является открытым функтором в категории* Comp *и непрерывных отображений в себя.*

Доказательство. Пусть X и Y — бесконечные компакты, и $\varphi : X \to Y$ — сюръективное открытое отображение. В силу нормальности подфунктора P_f отображение $P_f(\varphi) : P_f(X) \to P_f(Y)$ сюръективно. В этом случае имеет место следующая коммутативная диаграмма:

$$\begin{array}{lc} P_f(\varphi): & \begin{tikzcd} P_f(X) \arrow[r] \arrow[d, "r_f^X"] & P_f(Y) \arrow[d, "r_f^Y"] \\ \delta(X) \arrow[r] & \delta(Y) \end{tikzcd} \\ \varphi: & \end{array} \tag{1}$$

В диаграмме r_f^X и r_f^Y — непрерывные открытые ретракции (см. [2]). Замечено, что для любых различных x_1 и x_2 пространства $r_f^{-1}(\delta_{x_1})$ и $r_f^{-1}(\delta_{x_2})$ гомеоморфны, каждый слой $r_f^{-1}(\delta_x)$ ретракции клеточноподобен. В силу коммутативности диаграммы (1) и открытости отображений φ, r_f^X и r_f^Y, рассуждая как при доказательстве леммы 2 в [4], получаем, что отображение $P_f(\varphi)$ открыто. Теорема доказана. □

Определение 6. Непрерывное отображение $f : X \to Y$ называется *мягким*, если для всякого компакта Z, всякого непрерывного отображения $g : Z \to X$ и всякого непрерывного отображения $h : A \to X$ замкнутого подмножества $A \subset Z$ с коммутативной диаграммой

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "h"] \arrow[d, phantom, "\cup"] & X \arrow[d, "f"] \\ Z \arrow[ur, "k"] \arrow[r, "g"'] & Y \end{tikzcd} \tag{2}$$

существует такое продолжение $k : Z \to X$ отображения h, что $g = f \circ k$.

Теорема 3. *Функтор P_f сохраняет мягкие отображения в категории* Comp *и непрерывных отображений в себя.*

Доказательство. Пусть $\varphi : X \to Y$ — мягкое отображение между компактами X и Y. Рассмотрим следующую диаграмму:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "h"] & P_f(X) \arrow[r, "r_F^X"] \arrow[d, "P_f(\varphi)"] & \delta(X) \arrow[d, "\varphi"] \\ Z \arrow[ur, "\cup k"] \arrow[r, "g"'] & P_f(Y) \arrow[r, "r_f^Y"] & \delta(Y) \end{tikzcd} \tag{3}$$

В силу открытости отображений f, r_f^X и r_f^Y существует такое отображение $K' : Z \to \delta(X)$, что диаграмма (3) коммутативна.

Возьмем отображение $P_f(K') : P_f(Z) \to P_f(X)$ и получим следующую коммутативную диаграмму:

$$\begin{tikzcd} P_f(Z) \arrow[r, "P_f(K')"] \arrow[d, "r_f^Z"'] & P_f(X) \arrow[d, "r_f^X"] \\ Z \arrow[ur, "K"] \arrow[r, "K'"'] & X \end{tikzcd} \tag{4}$$

В силу открытости отображений r_f^X и r_f^Y существует отображение $K : Z \to P_f(X)$, оставляющее диаграмму 4 коммутативной. Теорема доказана. □

Теорема 4. *Если $\varphi : X \to Y$ — открытое сюръективное отображение между компактами X и Y. Тогда отображение $P_f(\varphi) : P_f(X) \to P_f(Y)$ мягкое.*

Теорема 4 доказывается аналогично теореме 3.

В [13] доказаны следующие результаты.

Теорема 5 (см. [13])**.** *Для любого $k \in N$ функтор P_k является σ-p.i.c. функтором.*

Предложение 1 (см. [9])**.** *Если $F = \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} F^n$, где каждое F^n является σ-p.i.c. функтором, то F является σ-p.i.c. функтором.*

Из теоремы 5, предложения 1 и равенства $P_f(X) = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} P_{f,n}$ получаем следующую теорему.

Теорема 6. *Функтор P_f является σ-p.i.c. функтором.*

4. C-пространства и размерностные свойства функтора P_f.

Определение 7 (см. [6])**.** Топологическое пространство X называется *C-пространством* (обозначение $X \in C$), если для всякой последовательности $\{U_i : i \in N\}$ открытых покрытий существует такая последовательность $\{V_i : i \in N\}$ дизъюнктных семейств открытых подмножеств X, что каждое V_i вписано в U_i и $\bigcup\{V_i : i \in N\}$ является покрытием пространства X. В этом случае говорят также, что последовательность $\{U_i : i \in N\}$ (бесконечная или конечная) *несущественна.*

Определение 8 (см. [6])**.** Пусть Q — класс открытых покрытий топологических пространств. Нормальное пространство X называется *Q-C-пространством* ($X \in Q$-C), если всякая последовательность $\{u_i\}$, $i \in \omega$, его покрытий из класса Q несущественна.

Возникают следующие классы пространств:

(1) k-C-пространства, $k \in \mathbb{N}$, $k \geqslant 2$; Q состоит из покрытий, содержащих не более чем k элементов (всякое нормальное пространство является 1-C-пространством);
(2) ∞-C-пространства, Q состоит из всех конечных покрытий;
(3) ω_0-C-пространства, Q состоит из всех счетных покрытий;
(4) Sf-C-пространства, Q состоит из всех звездно конечных покрытий;
(5) lf-C-пространства, Q состоит из всех локально конечных покрытий;

(6) Qf-C-пространства, Q состоит из всех точечно конечных покрытий.

Кроме конечности и счетности, можно рассматривать и другие ограничения на мощность покрытий, комбинируя их с ограничениями типов (4)–(6).

Имеет место очевидное предложение.

Предложение 2. *Если $Q1$, $Q2$ — классы покрытий и $Q1 \subset Q2$,то $Q1$-$C \subset Q2$-C.*

Таким образом, возникает следующая цепочка классов пространств:

$$C \subset \omega_0\text{-}C \subset \infty\text{-}C \subset \ldots \subset k\text{-}C \subset \ldots \subset 2\text{-}C.$$

Наибольший член этой последовательности, как мы видели, совпадает с классом wid-пространств (слабо бесконечномерные пространства).

Теорема 7. *Функтор P_f сохраняет* wid*-пространства, т.е. P_f сохраняет слабо бесконечномерные пространства.*

Доказательство. Пусть X — слабо бесконечномерное пространство, т.е. $X = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} X_i$ слабо бесконечномерное пространство, $\dim X_i < \infty$. Можем считать, что $X_i \subseteq X_{i+1}$ для каждого i. В этом случае имеет место равенство

$$P_f(X) = \bigcup_{i=1}^{\infty} P_f(X_i) = P_f\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty}(X_i)\Big) = \bigcup_{i=1}^{\infty}\bigcup_{n=1}^{\infty} P_{f,n}(X_i).$$

Известно, что $P_{f,n}(X_i) \subset P_n(X_i)$. В силу конечномерности X_i, пространство $P_n(X_i)$ тоже конечномерно и, следовательно, $P_{f,n}(X_i)$ тоже конечномерно. Более того,

$$\dim P_{f,n}(X_i) \leqslant n \dim(X_i) + \dim P_{f,n}(\widetilde{n}), \quad \dim P_{f,n}(\tilde{n}) \leqslant n-1.$$

Значит, для любых $i \in \mathbb{N}$ и $n \in \mathbb{N}$ пространство $P_{f,n}(X_i)$ конечномерно. Следовательно, пространство $P_f(X)$ — счетное объединение конечномерных пространств, т.е. $P_f(X)$ является wid-пространством. Теорема доказана. □

Теорема 8. *Функтор P_f сохраняет метрические компактные C-пространства и пространства, приведенные в определении* 8.

Доказательство. Пусть X — метрическое компактное C-пространство. Пусть $\{U_i : i \in N\}$ — последовательность открытых покрытый пространства $P_f(X)$. Тогда $\Big\{\nu_i = r_f^X(U_i) : i \in N\Big\}$ является последовательностью открытых покрытий пространства $\delta(X)$, так как r_f^X — открытое отображение. Так как X является C-пространством, существует такая последовательность дизъюнктных семейств $\{O_i : i \in N\}$ открытых подмножеств пространства X, что каждое O_i вписано в ν_i, а $\bigcup\{O_i : i \in N\}$ является покрытием пространства X. В этом случае, в силу непрерывности r_f^X, следующее семейство является дизъюнктным:

$$\Big\{(r_f^X)^{-1}(O_i) = W_i : i \in N\Big\}.$$

Более того, это семейство вписано в $\{U_i : i \in N\}$, и $\bigcup\{W_i : i \in N\}$ является покрытием пространства X, так как $\bigcup\{O_i : i \in N\}$ — покрытие пространства X.

Остальная часть данной теоремы для пространств, удовлетворяющих условиям из определения 8 доказываются аналогично. Теорема доказана. □

Теорема 9. *Для бесконечных компактов X и Y пространства X и Y гомеоморфны тогда и только тогда, когда пространства $P_f(X) \setminus \delta(X)$ и $P_f(Y) \setminus \delta(Y)$ гомеоморфны.*

Доказательство. Пусть X и Y — бесконечные компакты (в случае, когда X и Y — конечные множества, утверждение теоремы верно). Пусть $h : X \to Y$ — гомеоморфизм. В этом случае отображение $P_f(h) : P_f(X) \to P_f(Y)$ тоже будет гомеоморфизмом, так как P_f является нормальным функтором. Тогда сужение $P_f(h)\big|_{P_f(X)\setminus\delta(X)}$ будет гомеоморфизмом, т.е.

$$P_f(h)\Big|_{P_f(X)\setminus\delta(X)} : P_f(X) \setminus \delta(X) \to P_f(Y) \setminus \delta(Y).$$

Пусть X и Y — бесконечные компакты, тогда компакты $P(X)$ и $P(Y)$ гомеоморфны гильбертовому кубу Q, т.е. $P(X) \simeq P(Y)$.

Теперь пусть $P_f(X)\setminus\delta(X) \overset{h}{\simeq} P_f(Y)\setminus\delta(Y)$, т.е. существует гомеоморфизм h, для которого имеет место равенство

$$h\big(P_f(X) \setminus \delta(X)\big) = P_f(Y) \setminus \delta(Y).$$

Выше было отмечено, что слои $(r_f^X)^{-1}(\delta_{x_1})$ и $(r_f^X)^{-1}(\delta_{x_2})$ взаимно гомеоморфны. Значит, для любых $x \in X$ и $y \in Y$ слои $(r_f^X)^{-1}(\delta_x)\setminus\delta_x$ и $(r_f^Y)^{-1}(\delta_y)\setminus\delta_y$ гомеоморфны, т.е. для гомеоморфизма h верно равенство

$$h\Big((r_f^X)^{-1}(\delta_x) \setminus \delta_x\Big) = (r_f^Y)^{-1}(\delta_y) \setminus \delta_y.$$

В этом случае положим $h(x) = y$. Если $x_1 \neq x_2$, то $h(x_1) \neq h(x_2)$. Другими словами, пространства X и Y гомеоморфны. Теорема доказана. $\square$

Теорема 10. *Для бесконечных компактов X и Y имеет место равенство*

$$P(X) \setminus P_f(X) \simeq P(Y) \setminus P_f(X) \text{ тогда и только тогда, когда } \operatorname{sh} P_f(X) = \operatorname{sh} P_f(Y).$$

Доказательство. Пусть X и Y — бесконечные компакты; тогда пространство $P(X)$ и $P(Y)$ гомеоморфны гильбертому кубу Q.

В [3] было доказано, что для любого компакта X пространство $P_f(X)$ является Z-множеством в $P(X)$. С другой стороны, было показано, что пространство всех мер Дирака $\delta(X)$ (см. [3]) является сильным деформационным ретрактом пространства $P_f(X)$. В этом случае применение теоремы 9 завершает доказательство данной теоремы. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Аюпов Ш. А., Жураев Т. Ф.* Пространства и ковариантные функторы конечной степени// в кн.: Проблемы современной топологии и ее приложения. — Ташкент, 2016. — С. 14–20.
2. *Жураев Т. Ф.* Некоторые геометрические свойства подфункторов функтора P вероятностных мер. — М.: МГУ, 1989/ Деп. в ВИНИТИ АН СССР 5 июля 1989 г. № 4471-В89.
3. *Жураев Т. Ф.* Некоторые геометрические свойства функтора вероятностных мер и его подфункторов/ Дисс. на соиск. уч. степ. канд. физ.-мат. наук. — М.: МГУ, 1989.
4. *Успенский В. В.* Топологические группы и компакты Дугунджи// Мат. сб. — 1989. — *180*, № 8. — С. 1092–1118.
5. *Федорчук В. В.* Вероятностные меры в топологии// Усп. мат. наук. — 1991. — *46*, № 1. — С. 109–164.
6. *Федорчук В. В.* Слабо бесконечномерные пространства// Усп. мат. наук. — 2007. — *62*, № 2. — С. 109–164.
7. *Чепмэн Т.* Лекции о многообразиях. — М.: Мир, 1981.
8. *Щепин Е. В.* Функторы и несчетные степени компактов// Усп. мат. наук. — 1981. — *36*, № 3. — С. 3–62.
9. *Keller O. H.* O. H. Keller, Die Homeomorphie der kompakten konvexen Mengen in Hilbertschen Raum// Math. Ann. — 1931. — *105*, № 1. — С. 748–758.
10. *Klee V.* Some topological properties of convex sets// Trans. Am. Math. Soc. — 1995. — *78*, № 1. — С. 30–45.
11. *Zhuraev T. F.* On dimension and p.i.c.-functors// Math. Aeterna. — 2014. — *4*, № 6. — С. 577–596.
12. *Zhuraev T. F.* On paracompact spaces and projectively inductively closed functors// Gen. Topol. Appl. — 2002. — *3*, № 1. — С. 33–44.
13. *Zhuraev T. F.* On paracompact spaces, projectively inductively closed functors and dimension// Math. Aeterna. — 2015. — *5*, № 1. — С. 175–189.

14. *Zhuraev T. F.* On projectively quotient functors// Math. Univ. Corolinae. — 2001. — *42*, № 3. — С. 561–573

Ш. А. Аюпов
Институт математики им. В. И. Романовского АН РУз, Ташкент, Узбекистан
E-mail: sh_ayupov@mail.ru

Т. Ф. Жураев
Ташкентский государственный педагогический университет им. Низами, Ташкент, Узбекистан
E-mail: tursunzhuraev@mail.ru

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 144 (2018). С. 96–103

УДК 517.12

КАТЕГОРНЫЕ И КАРДИНАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ГИПЕРПРОСТРАНСТВА С КОНЕЧНЫМ ЧИСЛОМ КОМПОНЕНТ

© 2018 г. Р. Б. БЕШИМОВ, Н. К. МАМАДАЛИЕВ, Ш. Х. ЭШТЕМИРОВА

Аннотация. Исследуются категорные и кардинальные свойства гиперпространства с конечным числом компонентов. Доказано, что функтор C_n : Comp $\to$ Comp не является нормальным, т.е. не сохраняет эпиморфизмов непрерывных отображений. Также изучаются плотность, калибр и число Шанина пространства $C_n(X)$.

***Ключевые слова*:** категория, функтор, гиперпространство, компонента связности, плотность, калибр.

***AMS Subject Classification*:** 18B20, 18A05, 46A63, 46E27, 54A25

1. Введение. В последнее время вх [8, 10] появились понятия гиперпространства, элементы которых состоят из конечного числа компонентов. Для пространства X через $C_n(X)$ обозначим множество всех замкнутых подмножеств, состоящих не более чем из n компонент. Это пространство интересно тем, что оно содержит гиперпространства $\exp_n(X)$ замкнутых множеств, мощность которых не превышает n элементов, и гиперпространства $\exp^c(X)$ замкнутых связных множеств.

Пусть X — топологическое T_1-пространство. Множество всех непустых замкнутых подмножеств топологического пространства X обозначим через $\exp(X)$. Семейство всех множеств вида

$$O\langle U_1,\dots,U_n\rangle=\left\{F:\ F\in\exp(X),\ F\subset\bigcup_{i=1}^{n}U_i,\ F\cap U_i\neq\varnothing,\ i=1,\dots,n\right\},$$

где $U_1,\dots,U_n$ — последовательность открытых подмножеств пространства X, порождает топологию на множестве $\exp(X)$. Эта топология называется *топологией Виеториса.* Множество $\exp(X)$ с топологией Виеториса называется *экспоненциальным пространством* или *гиперпространством* пространства X (см. [2]). Положим

$$\exp_n(X)=\Big\{F\in\exp(X):|F|\leqslant n\Big\},\quad \exp_\omega(X)=\bigcup\Big\{\exp_n(X):n=1,2,\dots\Big\},$$
$$\exp^c(X)=\Big\{F\in\exp(X):F\text{ связно в }X\Big\}.$$

Очевидно, что $\exp^c(X)\subset C_n(X)\subset\exp(X)$ для любого топологического пространства X. В $C_n(X)$ рассматривается топология, индуцированная из гиперпространства $\exp(X)$. Заметим, что $\exp_n(X)=C_n(X)$ для дискретного пространства X.

Замечание 1. Рассмотрим подмножество $F=[0,1]\cup[2,3]$ числовой прямой R с обычной топологией. Тогда $F\in C_n(R)$ для $n\geqslant 2$, но множество $F\notin\exp_n(R)$ при $n\geqslant 2$, так как $|F|=c>n$ и $F\notin\exp^c(X)$.

Работа выполнена при поддержке гранта ОТ-Ф-4-42 РУз.

2. Категорные свойства функтора C_n. В этом разделе исследуем категорные свойства функтора C_n в категории Comp компактов и их непрерывных отображений.

Напомним, что ковариантный функтор $F : \mathrm{Comp} \to \mathrm{Comp}$ называется *нормальным*, если он непрерывен, сохраняет вес, пересечения и прообразы, мономорфен, эпиморфен и переводит одноточечное пространство в одноточечное, а пустое множество — в пустое (см. [3]).

Пусть $X, Y \in \mathrm{Comp}$, $f : X \to Y$ — непрерывное отображение между компактами X и Y. Для любого $F \in C_n(X)$ положим

$$C_n(f)\,(F) = f(F).$$

Тогда $C_n(f) : C_n(X) \to C_n(Y)$ является непрерывным отображением. Таким образом, конструкция C_n образует ковариантный функтор в категории компактов Comp.

Пусть $S = \{X_\alpha : \pi^\alpha_{\alpha^1}\}$ — непрерывный спектр. Тогда $C_n(S) = \{C_n(X_\alpha) : C_n(\pi^\alpha_{\alpha^1})\}$ — также обратный спектр. Обозначим его сквозные проекции за $\pi^\alpha_{\alpha'}$.

Функтор F называется *непрерывным* (см. [2]), если $F(\lim S) = \lim F(S)$ для всякого спектра S. Более того, это означает, что существует гомеоморфизм $f : F(\lim S) \to \lim F(S)$, для которого

$$F(\pi_\alpha) = \pi^F_\alpha \circ f. \tag{1}$$

Утверждение 1. *Функтор C_n: Comp $\to$ Comp непрерывен.*

Доказательство. Пусть $X = \lim S$. Достаточно показать, что отображение

$$f = \lim C_n(\pi_\alpha\}\colon\ \lim C_n(X) \to \lim C_n(S)$$

взаимно однозначно и сюръективно.

Пусть $F_1, F_2 \in C_n(X)$ и $F_1 \neq F_2$. Тогда существует такой индекс α, что $\pi_\alpha(F_1) \neq \pi_\alpha(F_2)$. Тогда из условия (1) получим, что $f(F_1) \neq f(F_2)$. Значит, отображение f взаимно однозначно.

Пусть теперь $F \in \lim C_n(S)$. Положим $D = \bigcap\limits_\alpha C_n(\pi_\alpha)^{-1}$. Тогда $D \in C_n(X^\alpha)$ и $f(D) = F$. Утверждение 1 доказано. ☐

Утверждение 2. *Функтор $\exp_n$ — подфунктор функтора C_n.*

Доказательство. Для компакта X рассмотрим пространства $\exp_n(X)$ и $C_n(X)$. Положим $f_X(F) = F$ для любого $F \in \exp_n(X)$. Тогда $f_X(F) \in C_n(X)$, т.е. следующее отображение является вложенным:

$$f_X : \exp_n(X) \to C_n(X).$$

Коммутативность следующей диаграммы очевидна:

$$\begin{array}{ccc} \exp_n(X) & \xrightarrow{f_X} & C_n(X) \\ {\scriptstyle \exp_n(f)}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle C_n(f)} \\ \exp_n(Y) & \xrightarrow[f_Y]{} & C_n(Y) \end{array}$$

$f : X \to Y$ — непрерывное отображение, $X, Y \in \mathrm{Comp}$. Утверждение 2 доказано. ☐

Утверждение 3. *Функтор C_n: Comp $\to$ Comp является подфунктором для функтора* exp: Comp $\to$ Comp.

Доказательство. Для компакта X рассмотрим пространства $C_n(X)$ и $\exp X$. Положим $f_X(F) = F$ для любого $F \in C_n(X)$. Тогда очевидно, что $f_X(F) \in \exp X$, т.е. отображение $f_X : C_n(X) \to \exp X$ является вложением. Следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{array}{ccc} C_n(X) & \xrightarrow{f_X} & \exp(X) \\ {\scriptstyle C_n(f)}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \exp(f)} \\ C_n(Y) & \xrightarrow[f_Y]{} & \exp(Y) \end{array}$$

$f : X \to Y$ — непрерывное отображение, $X, Y \in \mathrm{Comp}$. Утверждение 3 доказано. □

Утверждение 4. *Функтор* $C_n : \mathrm{Comp} \to \mathrm{Comp}$ *мономорфен.*

Доказательство. Пусть $f : X \to Y$ — взаимно однозначное отображение из X в Y. Докажем, что отображение $C_n(f) : C_n(X) \to C_n(Y)$ также взаимно однозначно. Рассмотрим такие произвольные множества $F_1, F_2 \in C_n(X)$, что $F_1 \neq F_2$. Так как отображение f взаимно однозначно, то $C_n(f)(F_1) = f(F_1) \neq f(F_2) = C_n(f)(F_2)$. Значит, отображение $C_n(f)$ взаимно однозначно. Утверждение 4 доказано. □

Утверждение 5. *Функтор* C_n *сохраняет пересечения замкнутых подмножеств, т.е.*

$$C_n\Big(\bigcap_{\alpha} X_\alpha\Big) = \bigcap_{\alpha}(C_n(X_\alpha)) \tag{2}$$

для замкнутых множеств $X_\alpha \subset X$.

Доказательство. Следующее включение очевидно:

$$C_n\Big(\bigcap_{\alpha} X_\alpha\Big) \subset \bigcap_{\alpha}(C_n(X_\alpha)).$$

Остается доказать включение

$$C_n\Big(\bigcap_{\alpha} X_\alpha\Big) \supset \bigcap_{\alpha}(C_n(X_\alpha)).$$

Берем произвольный элемент $F \in \bigcap\limits_{\alpha}(C_n(X_\alpha))$. Тогда для всякого α имеем $F \in C_n(X_\alpha)$. Отсюда получим, что $F \subset X_\alpha$ и пространство X_α состоит не более чем из n компонент связности для всякого α. Поэтому $F \subset \bigcap\limits_{\alpha} X_\alpha$ и количество компонент связности в пространстве $\bigcap\limits_{\alpha} X_\alpha$ не превосходит n. Значит, $F \in C_n\Big(\bigcap\limits_{\alpha} X_\alpha\Big)$, что и требовалось доказать. Утверждение 5 доказано. □

Утверждение 6. *Функтор* $C_n : \mathrm{Comp} \to \mathrm{Comp}$ *сохраняет вес бесконечных компактных пространств, т.е.* $w(X) = w(C_n(X))$.

Доказательство. Очевидно, что для любого пространства $X \subset \exp_n(X) \subset C_n(X) \subset \exp(X)$. Так как вес любого подпространства не превосходит веса самого пространства, получим, что $w(X) \leqslant w\,(C_n(X))$. И наоборот, для любого бесконечного компакта X имеет место равенство $w(X) = w(\exp(X))$ и $C_n(X) \subset \exp(X)$ для любого $n \in N$. Поэтому $w(C_n(X)) \leqslant w(X) = w(\exp(X))$. Утверждение 6 доказано. □

Утверждение 7. *Функтор* $C_n : \mathrm{Comp} \to \mathrm{Comp}$ *сохраняет прообразы непрерывных отображений, т.е.* $C_n(f^{-1}(A)) = C_n(f^{-1})(C_n(A))$ *для всякого замкнутого подмножества* $A \subset Y$.

Доказательство. Возьмем произвольный элемент $F \in C_n(f^{-1}(A))$. Тогда $F \subset f^{-1}(A)$ состоит не более чем из n компонент. Далее, $f(F) \subset A$, $f(F)$ также состоит не более чем из n компонент. Поэтому $f(F) \in C_n(A)$. Но $f(F) \in C_n(f)(F)$, так что $C_n(f)(F) \in C_n(A)$. Отсюда $F \in C_n(f)^{-1}\big(C_n(A)\big)$. Значит, $C_n(f^{-1}(A)) \subset C_n(f)^{-1}(C_n(A))$.

Докажем обратное включение. Пусть $B \in C_n(f)^{-1}(C_n(A))$. Тогда $C_n(f)(B) \in C_n(A)$. С другой стороны $C_n(f)(B) = f(B)$. Тогда $f(B) \subset A$ и состоит не более, чем из n компонент. Следовательно, $B \subset f^{-1}(A)$. Значит, $B \in C_n(f^{-1}(A))$. Утверждение 7 доказано. □

Пример 1. Рассмотрим множества $X = [-3, -1] \cup [1, 3]$ и $Y = [-2, 2]$. В этих множествах рассмотрим топологию, индуцированную из евклидовой прямой R. Построим отображение $f : X \to Y$ следующим образом:

$$f(x) = \begin{cases} x + 1, & \text{если } x \in [-3, -1], \\ x - 1, & \text{если } x \in [1, 3]. \end{cases}$$

Тогда отображение $f : X \to Y$ непрерывно и сюръективно.

Множество $F = [-1, 1] \subset Y$ состоит из одной компоненты связности ($n = 1$) и, следовательно, $F \in C_1(Y)$. Притом никакой элемент из $C_1(X)$ не переходит на множество F при отображении $C_1(f) : C_1(X) \to C_1(Y)$. Тогда отображение $C_1(f) : C_1(X) \to C_1(Y)$ не является сюръективным.

Таким образом, функтор $C_n : \mathrm{Comp} \to \mathrm{Comp}$ не сохраняет эпиморфизм непрерывных отображений. Из утверждений 1–7 вытекает следующая теорема.

Теорема 1. *Функтор* $C_n : \mathrm{Comp} \to \mathrm{Comp}$ *удовлетворяет всем условиям нормальности, кроме сохранения эпиморфизмов.*

3. Кардинальные свойства функтора C_n. Множество $A \subset X$ называется всюду плотным в X, если $[A] = X$. Плотность пространства X определяется как наименьшее кардинальное число вида $|A|$, где A — всюду плотное подмножество пространства X. Это кардинальное число обозначается $d(X)$. Если $d(X) \leqslant \aleph_0$, то говорят, что пространство X сепарабельно (см. [4]).

Пусть $O = O\langle U_1, \ldots, U_n\rangle$ — непустой открытый базисный элемент гиперпространства $\exp X$. Под *остовом* базисного элемента O в X понимается семейство $K(O) = \{U_1, \ldots, U_n\}$, где $O = O\langle U_1, \ldots, U_n\rangle$; будем обозначать его через $K(O)$.

Теорема 2. *Пусть X — бесконечное T_1-пространство. Тогда* $d(X) = d(C_n(X))$.

Доказательство. Сначала покажем справедливость неравенства $d(C_n(X)) \leqslant d(X)$. Пусть M — всюду плотное подмножество в X:

$$M = \Big\{b_\alpha : \alpha \in A,\ |A| = \tau\Big\}.$$

Множество всех конечных подмножеств множества M обозначим через Σ:

$$\Sigma = \big\{E : E \subset M,\ |E| < \infty\big\}.$$

Тогда $|\Sigma| = \tau$ и $E \in C_n(X)$ для некоторого $n \in N$. Покажем, что Σ — всюду плотное подмножество в $C_n(X)$. Пусть $O\langle U_1, U_2, \ldots, U_n\rangle$ — произвольное непустое открытое подмножество в $C_n(X)$, где $U_1, U_2, \ldots, U_n$ — непустые открытые подмножества в X. Тогда существуют элементы $b_1, b_2, \ldots, b_n$, притом $b_1 \in U_1, \ldots, b_n \in U_n$. Положим $E = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$. Тогда множество E состоит из n компонент, т.е. $E \in C_n(X) \cap \Sigma$.

Покажем, что обратное неравенство $d(X) \leqslant d(C_n(X))$ также верно. Пусть M — всюду плотное множество в $C_n(X)$:

$$\mu = \Big\{F^n_\alpha : \alpha \in A,\ |A| = \tau,\ n \in N\Big\}.$$

Каждое множество $F^n_\alpha = \big\{F^1_\alpha, F^2_\alpha, \ldots, F^n_\alpha\big\}$ состоит из непустых замкнутых связных подмножеств F^1_α, $F^2_\alpha, \ldots,$ F^n_α для каждого $\alpha \in A$. Из каждого множества F^n_α выбираем по точке x^i_α для каждого $i = 1, \ldots, n$, $\alpha \in A$. Положим $M = \big\{x^i_\alpha :\ i = 1, \ldots, n,\ \alpha \in A\big\}$, тогда мощность $|M| = \tau$. Покажем, что M всюду плотно в X. Пусть U — произвольное непустое открытое подмножество в X. Выбираем произвольный элемент $x \in U$. Тогда $\{x\} \in C_n(X)$ и $O\langle U\rangle$ — непустое открытое подмножество в $C_n(X)$. Так как μ всюду плотно в $C_n(X)$, то существует такой элемент $F^n_\alpha \in \mu$, что $F^n_\alpha \in O\langle U\rangle$. Согласно выбору $x^i_\alpha \in F^n_\alpha$, $i = 1, \ldots, n$; тогда $x^i_\alpha \in M \cap U$. Мы доказали, что множество M всюду плотно в X. Таким образом, получено равенство $d(C_n(X)) = d(X)$. Теорема 2 доказана. $\square$

Следствие 1. *Пусть X — бесконечное T_1-пространство. Тогда*

$$d(X) = d(C_n(X)) = d(\exp_n(X)) = d(\exp(X)).$$

Определение 1. Говорят, что *слабая плотность топологического пространства равна* $\tau \geqslant \aleph_0$, если τ — такое наименьшее кардинальное число, что в X существует π-база, распадающаяся на τ центрированных систем открытых множеств, т.е. $B = \bigcup\{B_\alpha : \alpha \in A\}$ — π-база, где B_α — центрированная система открытых множеств для каждого $\alpha \in A$, $|A| = \tau$ (см. [1]).

Слабая плотность топологического пространства X обозначается через $wd(X)$. Если $wd(X) = \aleph_0$, то топологическое пространство X называется *слабо сепарабельным* (см. [6]).

Утверждение 8 (см. [7]). *Для любого топологического пространства X верны неравенства*

$$c(X) \leqslant wd(X) \leqslant d(X).$$

Теорема 3 (см. [7]). *Пусть X — метрическое пространство и τ — произвольный бесконечный кардинал. Тогда следующие условия эквивалентны*:

(1) *пространство X имеет π-сеть мощности $\leqslant \tau$;*
(2) *пространство X имеет π-базу мощности $\leqslant \tau$;*
(3) *пространство X имеет базу мощности $\leqslant \tau$;*
(4) *пространство X имеет сеть мощности $\leqslant \tau$;*
(5) *каждое открытое покрытие пространства X имеет подпокрытие мощности $\leqslant \tau$;*
(6) *каждое замкнутое дискретное подпространство пространства X имеет мощность $\leqslant \tau$;*
(7) *каждое дискретное подпространство пространства X имеет мощность $\leqslant \tau$;*
(8) *каждое семейство попарно не пересекающихся непустых открытых подмножеств пространства X имеет мощность $\leqslant \tau$;*
(9) *пространство X имеет слабую плотность мощности $\leqslant \tau$;*
(10) *пространство X имеет всюду плотное подмножество мощности $\leqslant \tau$.*

Пример 2. Существует такое бесконечное T_0-пространство, что

$$wd(X) = d(X) < d(C_1(X)) = wd(C_1(X)).$$

Доказательство. Пусть X — бесконечное множество. Зафиксируем точку $x_0 \in X$. Топологию на X определим следующим образом:

$$\tau = \Big\{U \subset X \text{ открыто тогда и только тогда, когда } x_0 \in U \text{ или } U = \varnothing\Big\}.$$

Тогда τ является топологией на X; также (X,τ) является T_0-пространством, но не является T_1-пространством.

Действительно, пусть $x_0 \neq x_1$. Тогда $O\langle x_0\rangle = \{x_0\}$. Но $\{x_0\} \in O\langle x_1\rangle$ для любой окрестности x_1, где $x_1 \in X\backslash\{x_0\}$. Поэтому (X,τ) является T_0-пространством, но не является T_1-пространством. В этой топологии пространство (X,τ) является связным. □

Напомним, что окрестность точки X в $\exp X$ — это множество

$$O\langle U, X\rangle = \Big\{F \in \exp X : \ F \cap U \neq \varnothing\Big\}.$$

Рассмотрим одноточечное замкнутое подмножество пространства X. Тогда $\exp_1(X) = X\backslash\{x_0\}$. Покажем, что $C_1(X) = \exp_1(X) \cup \{X\}$ дискретно и $|C_1(X)| = |X|$.

Действительно, пусть $O\langle x_n\rangle = \{x_0\}\cup\{x_n\}$ для каждого $x_n \in X\backslash x_0$. Тогда $O\langle x_n\rangle \cap C_1(X) = \{x_n\}$ для каждого $x_n \in X\backslash x_0$.

Рассмотрим открытое множество $U = \{x_0\}$. Тогда $O\langle U, X\rangle = O\langle\{x_0\}, X\rangle$ является окрестностью точки X в $\exp X$. Рассмотрим пересечение

$$O\langle U, X\rangle \cap C_1(X) = O\langle\{x_0\}, X\rangle \cap C_1(X) = X.$$

Итак, $\{X\}$ является изолированной точкой. Тогда $C_1(X)$ — дискретное множество мощности $|X|$.

Очевидно, что $d(X) = 1$, т.е. в этой топологии множество $A = \{x_0\}$ является всюду плотным в (X,τ). Всякое дискретное пространство является метризуемым пространством, поэтому $wd(C_1(X)) = d\,(C_1(X)) = |X|$ в силу теоремы 3, а в силу утверждения 8 получаем

$$1 = wd(X) = d(X) < d(C_1(X)) = wd(C_1(X)) = |X| \geqslant \aleph_0.$$

Кардинал $\tau > \aleph_0$ называется *калибром* пространства X, если для любого семейства $\mu = \{U_\alpha : \alpha \in A\}$ непустых открытых в X множеств с условием $|A| = \tau$ найдется $B \subset A$, для которого $|B| = \tau$, и $\bigcap\{U_\alpha : \alpha \in B\} \neq \varnothing$.

Положим $k(X) = \{\tau : \tau$ — калибр $X\}$. Кардинал $\min\{\tau : \tau^+$ — калибр $X\}$ называется *числом Шанина* пространства X и обозначается $sh(X)$.

Теорема 4. *Пусть X — бесконечное T_1-пространство. Тогда $k(X) = k(C_n(X))$.*

Доказательство. Сначала докажем включение $k(X) \subset k(C_n(X))$. Пусть калибр τ пространства удовлетворяет условию $\tau \in k(X)$. Рассмотрим произвольную систему открытых множеств в $C_n(X)$:

$$O\langle\mu\rangle = \Big\{O\langle U_1^\alpha, U_2^\alpha, \dots, U_s^\alpha\rangle : \ \alpha \in A\Big\}, \quad |A| = \tau,$$

где $U_1^\alpha, U_2^\alpha, \dots, U_s^\alpha$ — непустые открытые подмножества в X для каждого $\alpha \in A$. Рассмотрим след системы $O\langle\mu\rangle$ в X. Тогда

$$\mu = \Big\{U_1^\alpha, U_2^\alpha, \dots, U_s^\alpha : \ \alpha \in A\Big\}, \quad |A| = \tau.$$

Так как $\tau \in k(X)$, то существует подмножество $B \subset A$, $|B| = \tau$, причем следующая система имеет непустое пересечение:

$$\mu_1 = \Big\{ U_i^\alpha : \alpha \in B, , i \in N\Big\}, \quad \bigcap \Big\{U_i^\alpha : \ \alpha \in B, \ i \in N\Big\} \neq \varnothing.$$

Рассмотрим систему

$$O\langle\mu_1\rangle = \Big\{O\langle U_1^\alpha, U_2^\alpha, \dots, U_s^\alpha\rangle : \ \alpha \in B, \ s \in N\Big\}.$$

Пересечение этих множеств непусто:

$$\bigcap \Big\{ O\langle U_1^\alpha, U_2^\alpha, \dots, U_s^\alpha\rangle : \ \alpha \in B, \ s \in N\Big\} \neq \varnothing.$$

Таким образом, $\tau \in k(C_n(X))$.

Покажем обратное включение $k(C_n(X)) \subset k(X)$. Предположим $k(C_n(X)) = \tau \geqslant \aleph_0$. Пусть $\gamma = \Big\{U_i^\alpha : \alpha \in A, \ i \in N\Big\}$ — семейство произвольных непустых открытых подмножеств пространства X мощности $|A| = \tau$. Рассмотрим систему открытых подмножеств в $C_n(X)$:

$$O\langle\gamma\rangle = \Big\{ O\langle U_1^\alpha, U_2^\alpha, \dots, U_s^\alpha\rangle : \ \alpha \in A, \ s \in N\Big\}.$$

Тогда $|O\langle\gamma\rangle| = \tau$. Так как τ — калибр пространства $C_n(X)$, то существует подмножество $B \subset A$ мощности $|B| = \tau$:

$$O\langle\gamma_1\rangle = \Big\{ O\langle U_1^\alpha, U_2^\alpha, \dots, U_s^\alpha\rangle : \ \alpha \in B, \ s \in N\Big\}.$$

Пересечение этих множеств непусто:

$$\bigcap \Big\{O\langle U_1^\alpha, U_2^\alpha, \dots, U_s^\alpha\rangle : \ \alpha \in B, \ s \in N\Big\} \neq \varnothing.$$

Рассмотрим след $O\langle\gamma_1\rangle$ в X, т.е. $\gamma_1 = \Big\{\{U_1^\alpha, U_2^\alpha, \dots, U_s^\alpha\} : \ \alpha \in B, \ s \in N\Big\}$. Пусть

$$F \in \bigcap \Big\{O\langle U_1^\alpha, U_2^\alpha, \dots, U_s^\alpha\rangle : \ \alpha \in B, \ s \in N\Big\}.$$

Тогда очевидно, что $F \in O\langle U_1^\alpha, U_2^\alpha, \dots, U_s^\alpha\rangle$ для каждого $\alpha \in B$. Отсюда следует, что

$$F \subset U_1^\alpha \cup U_2^\alpha \cup \dots \cup U_s^\alpha \quad \text{и} \quad F \cap U_i^\alpha \neq \varnothing, \ i = 1, \dots, s, \ \alpha \in B. \tag{3}$$

Фиксируем произвольную точку $x \in F$. Согласно (3), $x \in U_1^\alpha$ для некоторого U_1^α и любого $\alpha \in B$. Значит, $x \in \bigcap\{U_1^\alpha : \alpha \in B\}$ и $\tau \in k(X)$. Из предыдущих выкладок получим равенство $k(X) = k(C_n(X))$. Теорема 4 доказана. □

Из теоремы 4 вытекает следующее утверждение.

Следствие 2. *Пусть X — бесконечное T_1-пространство. Тогда $sh(X) = sh(C_n(X))$.*

Пусть φ — какой-нибудь кардинальный инвариант, через $h\varphi$ обозначим новый кардинальный инвариант, полученный следующим образом:

$$4h\varphi(X) = \sup\Big\{\varphi(Y): \ Y \subset X\Big\}.$$

Инварианты $hc(X)$, $hd(X)$, $h\pi w(X)$, $hsh(X)$ означают наследственное число Суслина (или наследственную клеточность), наследственную плотность, наследственный π-вес и наследственное число Шанина пространства X, соответственно. Спрэд $s(X)$ пространства X есть наименьший бесконечный кардинал τ, притом мощность дискретного подпространства X не превосходит τ, т.е. $s(X) = \sup\Big\{\tau: \ \tau = |Y|, \ Y \subset X\Big\}$, Y дискретно в X. Легко видеть, что наследственное число Суслина $hc(X)$ пространства X совпадает с его спрэдом $s(X)$.

Известно, что на числовой прямой R обычная топология вводится следующим образом: для любой точки $x \in R$ множество $\Big\{(x-\varepsilon, x+\varepsilon) : \varepsilon > 0\Big\}$ является базой окрестностей точки x.

В 1929 г. П. С. Александров в [5] ввел понятие стрелки Александрова следующим образом. Рассмотрим полуинтервал $[0,1)$ на числовой прямой. Введем в $[0,1)$ следующую топологию: по определению, все полуинтервалы $[\alpha,\beta)$, $0 \leqslant \alpha < 1$, $0 < \beta \leqslant 1$ образуют базу этой топологии. Полученное топологическое пространство называется *стрелкой Александрова*.

В 1947 г. Зоргенфрей [11] ввел топологию на числовой прямой следующим образом. Пусть $\mathfrak{R}$ — семейство всех интервалов $[x,r)$, где $x, r \in R$, $x < r$ и r — рациональное число. Легко проверить, что семейство $\mathfrak{R}$ обладает свойствами баз (B1)–(B2) (см. [4]). Элементы $\mathfrak{R}$ являются открыто-замкнутыми множествами относительно топологии, порожденной базой $\mathfrak{R}$. Ясно, что $w(R) = c$ (см. [4]). Такое пространство называется *прямой Зоргенфрея*.

В 2010 г. Е. Хаттори ввел топологию на числовой прямой следующим образом. Пусть R — числовая прямая и $A \subseteq R$. Топология $\tau(A)$ в R относительно подмножества $A \subseteq R$ определяется в [9] следующим образом:

1) база окрестностей точки x определяется для любой точки $x \in A$ множествами вида
$$\Big\{(x-\varepsilon, x+\varepsilon) : \varepsilon > 0\Big\};$$
2) для любой точки $x \in R \backslash A$ базу ее окрестностей определят множества вида
$$\Big\{[x, x+\varepsilon) : \varepsilon > 0\Big\}.$$

Числовая прямая с этой топологией называется *пространством Хаттори* для каждого $A \subseteq R$.

Пусть τ_E — евклидова топология в R. Для любых подмножеств $A, B \subseteq R$ выполнено отношение $A \supseteq B$ тогда и только тогда, когда $\tau(A) \subseteq \tau(B)$; в частности,

$$\tau(R) = \tau_E \subseteq \tau(A), \quad \tau(B) \subseteq \tau(\varnothing) = \tau_S.$$

Положим $P_{\mathrm{top}}(R) = \{\tau(A) : A \subseteq R\}$.

Отметим, что топология Хаттори на числовой прямой обобщает топологию Зоргенфрея, топологию П. С. Александрова и обычную топологию. Верна следующая теорема.

Теорема 5. *Пусть $A \subset R$ — такое подмножество числовой прямой R, что* $\mathrm{int}(R \setminus A) \neq \varnothing$*. Тогда для пространства Хаттори* $-(R, \tau(A))$ *на числовой прямой R имеем*:

(1) $s(R,\tau(A)) \neq s(C_n(R,\tau(A)))$;
(2) $hd(R,\tau(A)) \neq hd(C_n(R,\tau(A)))$;
(3) $h\pi w(R,\tau(A)) \neq h\pi w(C_n(R,\tau(A)))$;
(4) $hsh(R,\tau(A)) \neq hsh(C_n(R,\tau(A)))$;
(5) $hc(R,\tau(A)) \neq hc(C_n(R,\tau(A)))$;
(6) $hk(R,\tau(A)) \neq hk(C_n(R,\tau(A)))$;
(7) $hpk(R,\tau(A)) \neq hpk(C_n(R,\tau(A)))$;
(8) $hpsh(R,\tau(A)) \neq hpsh(C_n(R,\tau(A)))$;
(9) $hwd(R,\tau(A)) \neq hwd(C_n(R,\tau(A)))$;

(10) $hl(R, \tau(A)) \neq hl(C_n(R, \tau(A)))$;
(11) $he(R, \tau(A)) \neq he(C_n(R, \tau(A)))$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бешимов Р. Б.* Слабая плотность и гиперпространства// Узбек. мат. ж. — 2000. — № 4. — С. 3–7.
2. *Федорчук В. В., Филиппов В. В.* Общая топология. Основные конструкции. — М., 2014.
3. *Щепин Е. В.* Функторы и несчетные степени компактов// Усп. мат. наук. — 1981. — *36*, № 3. — С. 3–62.
4. *Энгелькинг Р.* Общая топология. — М.: Мир, 1986.
5. *Alexandroff P. S., Urysohn P. S.* Memoire sur les espaces topologiques compacts// Verh. Akad. Wetensch. Amsterdam. — 1929. — № 14.
6. *Beshimov R. B.* A note on weakly separable spaces// Math. Moravica. — 2002. — *6*. — С. 9–19.
7. *Beshimov R. B.* Some cardinal properties of topological spaces connected with weakly density// Meth. Funct. Anal. Topol. — 2004. — *10*, № 3. — С. 17–22.
8. *Camargo J., Macias S.* Quotients of n-fold hyperspaces// Topology Appl. — 2016. — *197*. — С. 154–166.
9. *Hattory Y.* Order and topological structures of posets of the formal balls on metric spaces// Mem. Fac. Sci. Eng. Shimane Univ. Ser. B. Math. Sci. — 2010. — *43*. — С. 13–26.
10. *Macias S.* On n-fold hyperspaces of a continua// Glas. Mat. — 2009. — *64*, № 44. — С. 479–492.
11. *Sorgenfrey R. H.* On the topological product of paracompact spaces// Bull. Am. Math. Soc. — 1947. — *53*. — С. 631–632.

Р. Б. Бешимов
Национальный университет Узбекистана им. М. Улугбека, Ташкент, Узбекистан
E-mail: rbeshimov@mail.ru

Н. К. Мамадалиев
Институт математики им. В. И. Романовского АН РУз, Ташкент, Узбекистан
E-mail: nodir_88@bk.ru

Ш. Х. Эштемирова
Национальный университет Узбекистана им. М. Улугбека, Ташкент, Узбекистан
E-mail: ms.eshtemirova@mail.ru

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 144 (2018). С. 104–108

УДК 517.98

ДИНАМИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА КВАДРАТИЧНЫХ ГОМЕОМОРФИЗМОВ КОНЕЧНОМЕРНОГО СИМПЛЕКСА

© 2018 г. Р. Н. ГАНИХОДЖАЕВ, М. А. ТАДЖИЕВА, Д. Б. ЭШМАМАТОВА

Аннотация. В работе описан класс всех квадратичных гомеоморфизмов конечномерного симплекса, изучены асимптотические поведения положительных и отрицательных траекторий таких гомеоморфизмов.

Ключевые слова: квадратичное отображение Лотки—Вольтерры, симплекс, турнир, функция Ляпунова, карта неподвижных точек.

AMS Subject Classification: 37B25, 37C25, 37C27

1. Введение. В задачах популяционной генетики появляется необходимость изучения эволюции биологической системы во времени. Во многих случаях эволюция системы описывается квадратичными отображениями симплекса в себя. С биологической точки зрения гомеоморфизм оператора эволюции означает возможность восстановления предыстории биологической системы, зная состояние системы в данный момент. Квадратичный вариант отображения Лотки—Вольтерры для симплекса является частным случаем квадратичных гомеоморфизмов.

2. Квадратичные отображения Лотки—Вольтерры на симплексе S^{m-1}. Рассмотрим $(m-1)$-мерный симплекс

$$S^{m-1} = \left\{ x = (x_1, \dots, x_m): \ x_i \geqslant 0, \ \sum_{i=1}^{m} x_i = 1 \right\} \subset \mathbb{R}^m$$

Пусть $\{P_{ij,k}\}$ — набор чисел, удовлетворяющих условиям

$$P_{ij,k} \geqslant 0, \quad P_{ij,k} = P_{ji,k}, \quad \sum_{k=1}^{m} P_{ij,k} = 1, \quad i,j,k = 1, \dots, m. \tag{1}$$

Отображение $V: x \mapsto x'$ называется *квадратичным*, если выполнено равенство

$$x'_k = \sum_{i,j=1}^{m} P_{ij,k}\, x_i\, x_j, \quad k = 1, \dots, m. \tag{2}$$

Легко заметить, что при выполнении условий (1) имеем

$$V: S^{m-1} \to S^{m-1}. \tag{3}$$

Ближайшая задача состоит в нахождении дополнительных условий для коэффициентов $\{P_{ij,k}\}$, при выполнении которых отображение (3) является гомеоморфизмом.

Если $P_{ij,k} = 0$, $k \notin \{i,j\}$, то V называется *квадратичным отображением Лотки—Вольтерры* на симплексе S^{m-1}.

Пусть

$$a(i,j) = \begin{cases} 2P_{ij,j} - 1, & \text{если } i \neq j, \\ 0, & \text{если } i = j. \end{cases}$$

ISSN 0233–6723

Тогда из условия (1) получим $P_{ij,i} + P_{ij,j} = 1$, $P_{ij,i} = P_{ji,i}$. Следовательно, $a_{ij} = -a_{ji}$, причем $|a_{ij}| \leqslant 1$.

Учитывая, что $\sum\limits_{i=1}^{m} x_i = 1$, равенство (2) можно переписать в виде

$$x'_i = x_i \left(1 + \sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_j\right), \quad i = 1, \ldots, m. \tag{4}$$

Лемма 1. *Пусть $A = (a_{ij})$ — кососимметрическая матрица и $b_1, \ldots, b_m > 0$. Тогда*

$$\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & b_2 & \ldots & a_{2m} \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & b_m \end{vmatrix} \geqslant b_1 \cdot b_2 \cdots b_m.$$

Доказательство леммы легко получается индукцией по m.

Точку $x = (x_1, \ldots, x_m)$ будем называть *относительно внутренней* точкой симплекса S^{m-1}, если $x_i > 0$, $i = 1, \ldots, m$.

Используя лемму, получаем, что якобиан отображения (4) во всех относительно внутренних точках симплекса положителен. Следовательно, квадратичное отображение Лотки—Вольтерры является локальным гомеоморфизмом в окрестности любой относительно внутренней точки S^{m-1}. Так как S^{m-1} является компактом, то из локальной гомеоморфности следует гомеоморфность.

Теорема 1. *Квадратичное отображение Лотки—Вольтерры является гомеоморфизмом симплекса S^{m-1}.*

Другое доказательство теоремы 1 приведено в [1].

Пусть $X = \{x \in S^{m-1} : Vx = x\}$ — множество неподвижных точек квадратичных отображений Лотки—Вольтерры. Очевидно, $X \neq \varnothing$, но легко найти примеры, где X — бесконечное множество.

Определение 1. Кососимметрическую матрицу $A = (a_{ij})$ будем называть *матрицей общего положения*, если все главные миноры четного порядка положительны.

Пусть U — множество всех кососимметрических матриц $A = (a_{ij})$, $i, j = 1, \ldots, m$, удовлетворяющих следующим условиям:

$$|a_{ij}| \leqslant 1, \quad U_0 \subset U \text{ — подмножество матриц общего положения.}$$

Теорема 2. *U_0 образует открытое и всюду плотное подмножество в U в естественной топологии конечномерного пространства.*

Теорема 3. *Если A — кососимметрическая матрица общего положения, то множество неподвижных точек V — конечное множество.*

Пусть $I = \{1, 2, \ldots, m\}$, $e_k = (\delta_{1k}, \ldots, \delta_{mk})$ — вершины симплекса, где δ_{ik} — символ Кронекера, $\Gamma_\alpha = \operatorname{co}\{e_k\}_{k \in \alpha}$, $\alpha \subset I$, — грань симплекса S^{m-1}. Легко заметить, что любая грань Γ_α инвариантна, т.е. $V(\Gamma_\alpha) \subset \Gamma_\alpha$; в частности, все вершины симплекса S^{m-1} являются неподвижными точками.

Предложение 1. *Сужение квадратичного отображения Лотки—Вольтерры на любую грань симплекса также является квадратичным отображением Лотки—Вольтерры.*

Для $x^0 \in S^{m-1}$ определим $x^{(n+1)} = Vx^{(n)}$, $n = 0, 1, \ldots$, и $\{x^{(n)}\}$ — траектория, начинающаяся из точки x^0.

Непрерывный функционал $\varphi : S^{m-1} \to \mathbb{R}$ называется *функцией Ляпунова* для $V : S^{m-1} \to S^{m-1}$, если для любой точки $x^{(0)} \in S^{m-1}$ существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi\bigl(x^{(n)}\bigr)$.

Лемма 2. *Если* $A' = -A$ *и* $|a_{ij}| \leqslant 1$*, то*

$$P = \{x \in S^{m-1} : Ax \geqslant 0\} \neq \varnothing, \quad Q = \{x \in S^{m-1} : Ax \leqslant 0\} \neq \varnothing.$$

Доказательство леммы легко следует из комбинаторной теоремы Шпернера (см. [3]).

Теорема 4. *Если* $p = (p_1, \dots, p_m) \in P$*, то функция*

$$\varphi(x) = x_1^{p_1} x_2^{p_2} \dots x_m^{p_m}$$

является монотонно убывающей вдоль любой траектории функцией Ляпунова. Иными словами,

$$\varphi(Vx) \leqslant \varphi(x), \quad x \in S^{m-1}.$$

Доказательство. Используя неравенство Юнга и кососимметричность A, получаем:

$$\varphi(Vx) = \varphi(x) \prod_{i=1}^{m} \left(1 + \sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_j\right)^{p_i} \leqslant \varphi(x) \sum_{i=1}^{m} p_i \left(1 + \sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_j\right) =$$

$$= \varphi(x) \left(\sum_{i=1}^{m} p_i + \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} a_{ij} p_i x_j\right) = \varphi(x) \left(1 - \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ji} p_i\right) x_j\right) \leqslant \varphi(x). \quad \square$$

Следствие 1. *Если* $x^0 \notin X$*, то*

$$\lim_{n\to\infty} \varphi(x^{(n)}) = 0.$$

Пусть ∂S^{m-1} — относительная граница S^{m-1}, $\omega(x^0) = \left\{x^0, x^{(1)}, \dots, x^{(n)}, \dots\right\}'$ — множество предельных точек положительной траектории, $\alpha(x^0) = \left\{x^0, x^{(-1)}, \dots, x^{(-n)}, \dots\right\}'$ — множество предельных точек отрицательной траектории.

Предложение 2. *Пусть* $\omega(x^0) \subset \partial S^{m-1}$ *и* $\alpha(x^0)$ *состоит из одной точки, т.е. все отрицательные траектории сходятся. Тогда*

$$\alpha(x^0) \cap \omega(x^0) = \varnothing.$$

Заметим, что квадратичное отображение Лотки—Вольтерры не имеет периодических траекторий.

Так как $A' = -A$ является матрицей общего положения, то $a_{ij} \neq 0$ при $i \neq j$.

Наряду с квадратичным отображение Лотки—Вольтерры рассмотрим полный граф G_m с m вершинами. Пусть вершины G_m пронумерованы числами $1, 2, \dots, m$. На ребрах графа зададим направления следующим образом: ребро, соединяющее вершины i и j, направлено от i-й вершины к j-й, если $a_{ij} < 0$, и имеет обратное направление, если $a_{ij} > 0$. Так как $a_{ij} = -a_{ji}$ и $a_{ij} \neq 0$ при $i \neq j$, то направления на всех ребрах графа G_m однозначно определяются заданием кососимметрической матрицы общего положения. Полученный полный ориентированный граф называется *турниром*, соответствующим отображению Лотки—Вольтерры, и обозначается T_m.

Турнир называется *сильным*, если из любой вершины можно пройти к любой другой, следуя ориентации. *Транзитивность* турнира означает, что любой подтурнир из трех вершин не является сильным. Турнир, имеющий менее трех вершин, считается транзитивным по определению.

Легко доказать, что в случае транзитивного турнира любая траектория сходится к одной из вершин симплекса.

Как известно (см. [5]), если турнир не сильный, то множество его вершин можно разбить на два класса I и II таким образом, что из $i \in \mathrm{I}$ и $j \in \mathrm{II}$ следует, что ребро, соединяющее их, всегда направлено из j в i.

Предложение 3. *Если турнир* T_m *не сильный, то для любого* $j \in \mathrm{II}$ *имеем*

$$\lim_{n\to\infty} x_j^{(n)} = 0.$$

Если T_m — сильный турнир и $x^0 \notin X$, то, как правило, $\omega(x^0)$ — бесконечное множество.

Теорема 5. *Если $\omega(x^0)$ — бесконечное множество, то оно содержит не менее трех неподвижных точек.*

Пусть выполнено равенство

$$\omega(x^0) \cap X = \{z_1, \ldots, z_t\},$$

$U_1, \ldots, U_t$ — попарно не пересекающиеся окрестности неподвижных точек $z_1, \ldots, z_t$ и $U = \bigcup_{i=1}^{t} U_i$. Обозначим через $n(U)$ число точек начального отрезка траектории $\{x^0, x^{(1)}, \ldots, x^{(n)}\}$, попавших в U.

Теорема 6. *Траектория подавляющую часть времени находится в окрестности U, т.е.*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n_U}{n} = 1.$$

Таким образом, траектория, попав в какую-либо из окрестностей U_i, через некоторое число шагов переходит в другую окрестность U_j. Порядок следования этих окрестностей будем называть *маршрутом* траектории. К настоящему времени неизвестно, всегда ли маршрут является периодическим. Для некоторых конкретных случаев доказана периодичность маршрута. В общем случае задача остается открытой.

3. Карта неподвижных точек. Пусть $\alpha \subset I = \{1, 2, \ldots, m\}$, T_α — подтурнир T_m, имеющий α в качестве множества своих вершин, Γ_α — минимальная грань S^{m-1}, содержащая вершины $\{e_i\}_{i\in\alpha}$ и сужение V_α отображения Лотки—Вольтерры на грань Γ_α, A_α — кососимметрическая матрица, соответствующая V_α.

Пусть $\mathrm{supp}(x) = \{i : x_i \neq 0\}$ — носитель точки $x \in \mathbb{R}^m$. Неподвижную точку $x \in X$ с носителем α обозначим через $x(\alpha)$.

Теорема 7. *Любая неподвижная точка имеет лишь нечетное число ненулевых координат.*

Элементы X изобразим в виде точек на плоскости. Затем точку, изображающую $x(\alpha)$, соединим с точкой $x(\beta)$ дугой, направленной от $x(\alpha)$ к $x(\beta)$, если существует такое $\gamma \subset I$, что

$$\gamma \supset \alpha \cup \beta, \quad A_\gamma x(\alpha) \geqslant 0, \quad A_\gamma x(\beta) \leqslant 0.$$

Полученный ориентированный граф называется картой неподвижных точек отображения V и обозначается через G_V. Легко заметить, что G_V содержит подграф, изоморфный T_m. Граф G_V изоморфен T_m тогда и только тогда, когда T_m транзитивен.

Определение 2. Вершина $x(\alpha)$ карты G_V называется *висячей*, если G_V не содержит дуг, входящих в $x(\beta)$.

Теорема 8. *Карта неподвижных точек имеет единственную висячую вершину.*

Висячая вершина определяет функцию Ляпунова, т.е., если $p = (p_1, \ldots, p_m)$ — висячая вершина, то функция

$$\varphi(x) = x_1^{p_1} x_2^{p_2} \ldots x_m^{p_m}$$

является функцией Ляпунова для $V : S^{m-1} \to S^{m-1}$ (здесь предполагается, что $0^0 = 1$).

Заметим, что для любого $\alpha \subset I$ может существовать не более одной неподвижной точки.

Определение 3. Турнир T_m называется *однородным*, если любой подтурнир является либо сильным, либо транзитивным.

Пусть $|\alpha|$ — количество элементов множества $\alpha \subset I$.

Теорема 9. *Если турнир однороден, а неподвижные точки $x(\alpha)$ и $x(\beta)$ соединены дугой, то $|\alpha| = |\beta|$. Напротив, если $|\alpha| \neq |\beta|$, то не существует дуги, соединяющей $x(\alpha)$ и $x(\beta)$.*

Таким образом, карта неподвижных точек в случае сильного однородного турнира не связна. Пусть $x(\alpha)$ и $x(\beta)$ — неподвижные точки, причем $|\alpha| = |\beta|$; тогда $x(\alpha)$ и $x(\beta)$ в карте неподвижных точек G_V имеют одинаковое число инцидентных дуг.

4. Общий вид квадратичных гомеоморфизмов симплекса S^{m-1}. Пусть π — некоторая перестановка на множестве $I = \{1, \dots, m\}$, $\pi(x)$ — перестановка координат точки $x \in S^{m-1}$.

Очевидно, $\pi \circ V : S^{m-1} \to S^{m-1}$, где V — отображение Лотки—Вольтерры, является квадратичным гомеоморфизмом симплекса S^{m-1}.

Теорема 10. *Любой квадратичный гомеоморфизм симплекса S^{m-1} имеет вид $\pi \circ V$, где π — перестановка координат, а V — квадратичное отображение Лотки—Вольтерры.*

Заметим, что если π разлагается в произведения циклов, то $\pi \circ V$ также разлагается в произведения квадратичных гомеоморфизмов, действующих на гранях симплекса S^{m-1}.

Поэтому достаточно рассмотреть случай, когда перестановка π является циклом максимальной длины.

Теорема 11. *Если k является делителем m, то $\pi \circ V$ имеет не менее k точек, образующих периодическую траекторию длины m/k.*

Очевидно, что $(\pi \circ V)^m$ можно записать в виде

$$\Big(x_1\big(1 + f_1(x)\big),\ \dots,\ x_m\big(1 + f_m(x)\big)\Big),$$

где $f_1(x), \dots, f_m(x)$ — многочлены от $x_1, \dots, x_m$ с коэффициентами, зависящими от a_{ij}, причем

$$f_i(x) \geqslant -1, \quad i = 1, \dots, m, \quad \sum_{i=1}^{m} x_i f_i(x) = 0.$$

Лемма 3.

$$P = \big\{x \in S^{m-1} :\ f_i(x) \geqslant 0,\ i = 1, \dots, m\big\} \neq \varnothing, \quad Q = \big\{x \in S^{m-1} :\ f_i(x) \leqslant 0,\ i = 1, \dots, m\big\} \neq \varnothing.$$

По аналогии, для $(\pi \circ V)^m$ строится карта неподвижных точек, однако ее свойства мало изучены. Предположение $(\pi \circ V)^m$ не имеет периодических траекторий.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональной анализ. — М.: Наука, 1977.
2. *Любич Ю. И.* Математические структуры в популяционной генетике. — М.: Наука, 1984.
3. *Харари Ф.* Теория графов. — 1973.
4. *Ganikhodzhaev N., Ganikhodzhaev R., Jamilov U.* Quadratic stochastic operators and zero-sym game dynamics// Ergodic Theory. Dynam. Syst. — 2015. — *35*, № 5. — С. 1443–1473.
5. *Ganikhodzhaev R., Mukhamedov F., Rozikov U.* Quadratic stochastic operators and processes: Results and open problems// Inf. Dimens. Anal. Quantum Probab. Rel. Topics. — 2011. — *14*, № 2. — С. 279–335.

Р. Н. Ганиходжаев
Национальный университет Узбекистана им. М. Улугбека, Ташкент, Узбекистан
E-mail: rganikhodzhaev@gmail.com

М. А. Таджиева
Национальный университет Узбекистана им. М. Улугбека, Ташкент, Узбекистан
E-mail: mohbonut@mail.ru

Д. Б. Эшмаматова
Ташкентский институт инженеров железнодорожного транспорта, Ташкент, Узбекистан
E-mail: eshmatova@mail.ru

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 144 (2018). С. 109–116

УДК 517.936.8

О ГЕОМЕТРИИ СЛОЕНИЙ КОРАЗМЕРНОСТИ 1

© 2018 г. **А. М. БАЙТУРАЕВ**

Аннотация. В работе исследуется геометрия и топология слоений, порожденных поверхностями уровня метрических функций.

***Ключевые слова*:** метрика Римана, линейная связность, коразмерность, диффеоморфизм, топология, односвязность.

***AMS Subject Classification*:** 37C15, 57R25

1. Введение. Пусть M — гладкое риманово многообразие размерности n, $f : M \to \mathbb{R}^1$ — дифференцируемая функция. Пусть $p_0 \in M$, $f(p_0) = c_0$ и множество

$$L_{p_0} = \{p \in M^n : L(p) = c_0\}$$

не содержит критических точек. Тогда множество уровня L_{p_0} является гладким подмногообразием M размерности $n-1$. Если предположить, что дифференцируемая функция $f : M \to \mathbb{R}^1$ не имеет критических точек, т.е. $|\operatorname{grad} f(p)| > 0$ для всякого $p \in M$, то разбиение M на компоненты связности поверхностей уровня функции f является $(n-1)$-мерным слоением (слоением коразмерности 1).

В общем случае топология и геометрия слоений, порожденных поверхностями уровня, могут быть достаточно сложными.

В [13] изучено слоение, порожденное поверхностями уровня функции $f : M \to \mathbb{R}^1$, заданной на римановом многообразии M при условии, что длина градиента постоянна на каждом множестве уровня. В данной работе также доказано, что поверхности уровня таких функций порождают риманово слоение. Функции, рассмотренные в [13], называются метрическими функциями.

Отметим, что поверхности уровня функций этого класса являются линейно связными множествами (см. [8]). В [4, 5] изучены геометрия и топология слоений, порожденных поверхностями уровня метрических функций. Работа [4] посвящена изучению геометрии и топологии поверхностей уровня метрических функций, заданных в евклидовом пространстве. В этой работе получена полная классификация слоений, порожденных поверхностями уровня метрической функции, заданной в евклидовом пространстве. Именно, доказано, что для функции n переменных существует ровно n типов слоений.

Классификация слоений, порожденных поверхностями уровня метрических функций, заданных на произвольном римановом многообразии, является трудной задачей. В евклидовом случае, если метрическая функция не имеет критических точек, то, как показано в [4], поверхности уровня являются гиперплоскостями. Метрическая функция, не имеющая критических точек на римановом многообразии, может иметь компактные поверхности уровня.

В [9] доказано, что метрическая функция, не имеющая критических точек и заданная на полном односвязном римановом многообразии, не имеет компактных поверхностей уровня. В [8] показано, что поверхности уровня метрической функции, заданной в евклидовом пространстве, являются линейно связными подмножествами.

Определение 1 (см. [12]). Слоение F на римановом многообразии M называется *римановым*, если каждая геодезическая, ортогональная в одной точке к слою слоения F, остается ортогональной к слоям F во всех своих точках.

2. Постановка задачи и основные результаты. В этой работе изучается геометрия римановых слоений коразмерности 1 на римановых многообразиях, порожденных поверхностями уровня метрических функций. Как уже отмечалось, в монографии [13] было доказано, что если метрическая функция f не имеет критических точек, то поверхности уровня этой функции порождают риманово слоение на римановом многообразии M.

В теореме 1 изучается топология поверхностей уровня метрической функции и топология многообразия, на котором задана метрическая функция. Доказано, что если метрическая функция без критических точек задана на полном связном многообразии размерности n, то многообразие диффеоморфно прямому произведению произвольной поверхности уровня функции и прямой. Отсюда, в частности, следует, что все поверхности уровня взаимно диффеоморфны.

В теореме 2 изучается геометрия слоений, порожденных поверхностями уровня метрических функций на полном связном римановом многообразии постоянной неотрицательной секционной кривизнs. Доказано, что если метрическая функция без критических точек задана на полном связном римановом многообразии постоянной неотрицательной секционной кривизны, то поверхности уровня функции f порождают вполне геодезическое слоение, слои которого являются взаимно изометричными. Если при этом многообразие, на котором задана функция, является односвязным, то оно изометрично произведению произвольной поверхности уровня и градиентной линии функции.

Пусть M — гладкое многообразие размерности n, $f : M \to \mathbb{R}^1$ — метрическая функция без критических точек. В [13] доказано, что слоение, порожденное поверхностями уровня метрической функции, заданной на римановом многообразии, является римановым слоением.

Следующая теорема дает информацию о топологии многообразия, на котором задана метрическая функция.

Теорема 1. *Пусть M — гладкое полное связное многообразие размерности n, $f : M \to \mathbb{R}^1$ — метрическая функция без критических точек. Тогда многообразие M диффеоморфно прямому произведению $L \times \mathbb{R}^1$, где L — произвольная поверхность уровня функции f. В частности, все поверхности уровня взаимно диффеоморфны.*

Доказательство. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = X(x), \quad x \in M, \tag{1}$$

где векторное поле $X(x)$ является единичным градиентным полем, т.е.

$$X(x) = \frac{\operatorname{grad} f(x)}{|\operatorname{grad} f(x)|}.$$

Эта система называется градиентной системой. Для точки $x_0 \in M$ решение этой градиентной системы с начальным условием $\gamma(0) = x_0$ обозначим через $\gamma(t, x_0)$. В силу того, что выполнено условие $X \in C^1(M, \mathbb{R}^1)$, через каждую точку $x_0 \in M$ проходит единственная траектория системы (1) (см. [2,10]). Отметим, что кривая $t \to \gamma(t, x_0)$ называется *градиентной линией* функции f.

Так как $|X(x)| = 1$ и многообразие M является полным, то решение $\gamma(t, x_0)$ определено для всех $t \in (-\infty, +\infty)$ (см. [2]).

Известно, что каждая поверхность уровня метрической функции f имеет только одну компоненту связности, т.е. каждая поверхность уровня является линейно связным множеством (см. [8]).

Пусть L — произвольная поверхность уровня функции f. Обозначим через U множество всех точек y, для которых существуют такие число $t \in \mathbb{R}^1$ и точка $p \in L$, что $y = \gamma(t, p)$. Из результатов [8] следует, что множество U совпадает с многообразием M. Поэтому возникает отображение

$$F : M \to L \times \mathbb{R}^1,$$

где $F(y) = (p, t)$, $p \in L$, $t \in \mathbb{R}^1$.

Покажем, что отображение F является диффеоморфизмом. В силу единственности решения системы и того факта, что каждая градиентная линия пересекает поверхность уровня L один раз, отображение F является взаимно однозначным.

Рассмотрим произвольную точку $y \in M$, для которой $F(y) = (p, t)$. Тогда $\gamma(-t, y) = p$. По теореме о гладкой зависимости решения системы дифференциальных уравнений от начальных данных (см. [2]) получаем, что отображение F дифференцируемо. Отсюда следует, что отображение F является диффеоморфизом. □

Следствие 1. *Пусть M — гладкое полное односвязное многообразие размерности n, $f : M \to \mathbb{R}^1$ — метрическая функция без критических точек. Тогда произвольная поверхность уровня L функции f является односвязной.*

Действительно, так как отображение $F : M \to L \times \mathbb{R}^1$ — диффеоморфизм, то фундаментальная группа многообразия M изоморфна фундаментальной группе поверхности уровня L (см. [1]). Следовательно, поверхность уровня L является односвязной. Заметим, что если $M = \mathbb{R}^n$, то, как следует из результатов работы [4], каждая поверхность уровня является гиперплоскостью, а диффеоморфизм

$$F : M \to L \times \mathbb{R}^1$$

является изометрическим отображением. Из результатов [4] следует, что если метрическая функция, заданная в $\mathbb{R}^n$ не имеет критических точек, то поверхности уровня порождают вполне геодезическое слоение. Следующая теорема обобщает этот факт для риманова многообразия постоянной неотрицательной секционной кривизны.

Теорема 2. *Пусть M — гладкое полное связное риманово многообразие постоянной неотрицательной секционной кривизны, $f : M \to \mathbb{R}^1$ — метрическая функция без критических точек. Тогда поверхности уровня функции f порождают вполне геодезическое слоение F на M, слои которого являются взаимно изометричными.*

Напомним понятие многообразия постоянной секционной кривизны. Пусть M — n-мерное риманово многообразие с метрическим тензором g, аT_xM — касательное пространство в точке $x \in M$; символ $R(X, Y)$ обозначает преобразование кривизны в T_xM, определенное векторами $X, Y \in T_xM$.

Тензор римановой кривизны для M, обозначаемый также через R, есть тензорное поле, определяемое следующим образом:

$$R(X_1, X_2, X_3, X_4) = g(R(X_3, X_4)X_2, X_1), \quad X_i \in T_xM, \quad i = 1, \dots, 4.$$

Для каждой двумерной плоскости π в касательном пространстве T_xM секционная кривизна $K(\pi)$ для π определяется следующим образом:

$$K(\pi) = R(X_1, X_2, X_1, X_2) = g(R(X_1, X_2)X_2, X_1),$$

где X_1, X_2 — ортонормальный базис для π. $K(\pi)$ не зависит от выбора ортонормального базиса X_1, X_2. Множество значений $K(\pi)$ для всех плоскостей π в T_xM определяет тензор римановой кривизны в точке x.

Если $K(\pi)$ постоянна для всех плоскостей π в T_xM и для всех точек $x \in M$, то M называется *пространством постоянной кривизны* (см. [6]).

Понятие постоянной секционной кривизны риманова многообразия M имеет следующее простое геометрическое истолкование. Возьмем какую-либо точку x и проходящую через нее двумерную плоскость π, т.е. множество векторов, линейно зависящих от двух неколлинеарных векторов X_1, X_2, заданных в точке x. По направлению каждого такого вектора проведем через x геодезическую. Геометрическое место этих геодезических дает двумерную поверхность Φ, которая называется *геодезической поверхностью.* Очевидно, что для поверхности Φ плоскость π является касательной плоскостью в точке x.

Гауссова кривизна в точке x поверхности Φ как двумерного риманова пространства совпадает с кривизной риманова многообразия M в той же точке в направлении плоскости π (см. [6]).

К числу пространств постоянной кривизны принадлежит, кроме евклидова пространства, пространство Лобачевского, а также эллиптическое пространство.

Доказательство теоремы 2. Известно, что поверхности уровня метрической функции без критических точек являются линейно связными множествами (см. [8]). Поэтому поверхности уровня образуют слоение коразмерности 1, которое обозначим через F.

Обозначим за $L(p)$ слой слоения F,проходящий через точку p, через $F(p)$ — касательное пространство слоя $L(p)$ в точке p, а через $H(p)$ — ортогональное дополнение $F(p)$ в T_pM. Возникают два следующих подрасслоения касательного расслоения TM:

$$TF = \{F(p) : p \in M\}, \quad H = \{H(p) : p \in M\};$$

притом $TM = TF \oplus H$. Таким образом, H является одномерным распределением, ортогональным к слоению F.

Кусочно гладкую кривую $\gamma : [0,1] \to M$ назовем *горизонтальной*, если $\dot\gamma(t) \in H\bigl(\gamma(t)\bigr)$ для каждого $t \in [0,1]$. Кусочно гладкая кривая, которая лежит в слое слоения F, называется *вертикальной*.

Пусть $I = [0,1]$, $v : I \to M$ — вертикальная кривая, $h : I \to M$ — горизонтальная кривая и $h(0) = v(0)$. Кусочно гладкое отображение $P : I \times I \to M$, где $t \to P(t,s)$ является вертикальной кривой для каждого $s \in I$, а $s \to P(t,s)$ является горизонтальной кривой для каждого $t \in I$, причем $P(t,0) = v(t)$ для $t \in I$ и $P(0,s) = h(s)$ для $s \in I$, называется *вертикально-горизонтальной гомотопией*. Если для каждой пары вертикальной и горизонтальной кривых $v, h : I \to M$ с $h(0) = v(0)$ существует соответствующая вертикально-горизонтальная гомотопия P, то говорят, что распределение H является *связностью Эресмана* для слоения F (см. [11]).

Пусть $x_0 \in M$, $\gamma(t, x_0)$ — траектория системы

$$\dot x = \operatorname{grad} f(x) \tag{2}$$

с начальным условием $x(0) = x_0$. Так как функция f не имеет критических точек, то для каждой точки $x_0 \in M$ траектория $\gamma(t, x_0$ является гладкой кривой, отличной от точки. В силу того, что функция f является метрической, из результатов [9] следует, что каждая траектория системы 2 является геодезической линией риманова многообразия M. Это означает, что

$$\nabla_Z Z = 0, \quad Z = \frac{\operatorname{grad} f}{|\operatorname{grad} f|}.$$

Теперь покажем, что каждый слой слоения F является вполне геодезическим подмногообразием M. Пусть L_0 — некоторый слой слоения F, $v : [0, l_0] \to L_0$ — кратчайшая в L_0, параметризованная длиной дуги. Здесь L_0 рассматривается как риманово многообразие с индуцированной из M римановой метрикой. Выпустим из каждой точки $v(t)$ градиентную линию $\gamma(t,s)$ функции f, параметризованной длиной дуги (в этом случае $\gamma(t,s)$ удовлетворяет системе дифференциальных уравнений (2) с начальным условием $\gamma(t,0) = v(t)$).

В силу того, что функция f не имеет критических точек и M полно, линия $\gamma(t,s)$ определена для всех $s \in \mathbb{R}^1$ (см. [2]). По теореме, содержащейся в [13], поток единичного поля $Z = \operatorname{grad} f/|\operatorname{grad} f|$ переводит поверхность уровня в поверхность уровня. Поэтому, если $\gamma(t,s)$ — градиентная линия, выходящая из $v(t)$ при $s = 0$ и параметризованная длиной дуги, то кривая $t \to \gamma(t,s)$ лежит на одной поверхности уровня при каждом t.

Рассмотрим двумерную поверхность, состоящую из следующих точек:

$$\Phi = \Bigl\{\gamma(t,s) : \ t \in [0, l_0], \ s \in (-\infty, +\infty)\Bigr\}.$$

Положим

$$l_1 = \bigl\{\gamma(0,s), \ s \in \mathbb{R}^1\bigr\}, \quad l_2 = \bigl\{\gamma(l_0,s), \ s \in \mathbb{R}^1\bigr\}.$$

В силу равенства $\nabla_Z Z = 0$, множества l_1 и l_2 являются одномерными вполне геодезическими подмногообразиями M. В силу единственности решения задачи Коши для системы (2), градиентные линии l_1 и l_2 не пересекаются; более того, они являются замкнутыми подмножествами M. Покажем, что градиентные линии $\gamma_t : s \to \gamma(t,s)$ являются прямыми в Φ. Рассмотрим сужение римановой метрики g на Φ. Если за криволинейные координаты на Φ примем (t,s), то сужение римановой метрики g на Φ имеет вид

$$E(t,s)dt^2 + ds^2,$$

где $E(t,s) = |X(t,s)|^2$, $|X(t,s)|$ — длина касательного вектора $X(t,s)$ кривой $t \to \gamma(t,s)$ в точке $p = \gamma(t,s)$. Если $A = \gamma(t,s_1)$, $B = \gamma(t,s_2)$ и $s_2 > s_1$, то длина отрезка AB равна $s_2 - s_1$.

Пусть $\tilde{\gamma}$ — другая кривая, лежащая в Φ и соединяющая точки A и B. Тогда длина кривой $\tilde{\gamma}$ выражается интегралом

$$l = \int\limits_{\tau_1}^{\tau_2} \sqrt{Edt^2 + ds^2},$$

который берется по кривой $\tilde{\gamma}$, параметризованной с помощью τ.

Так как $E(t,s) = |X(t,s)|^2 \geqslant 0$, то

$$\sqrt{Edt^2 + ds^2} \geqslant |ds|, \quad l = \int\limits_{\tau_1}^{\tau_2} \sqrt{Edt^2 + ds^2} \geqslant \int\limits_{\tau_1}^{\tau_2} |ds| \geqslant \left| \int ds \right| = s_2 - s_1.$$

Таким образом, отрезок AB геодезической $\gamma_t : s \to \gamma(t,s)$ реализует кратчайшее расстояние между точками A и B.

Пусть π — двумерная плоскость в касательном пространстве T_pM, которая порождена векторами $Z(t,s)$ и $X(t,s)$, где $p = \gamma(t,s)$. Тогда поверхность Φ лежит в двумерном сечении $\exp_p(\pi)$, где $\exp_p$ — экспоненциальное отображение в точке p. Гауссова кривизна Φ в точке p равна кривизне двумерного сечения многообразия M, построенного по векторам $Z(t,s)$ и $X(t,s)$. По условиям теоремы, кривизна поверхности Φ постоянна и неотрицательна. С другой стороны, поверхность Φ содержит прямую; поэтому ее кривизна должна быть равной нулю (см. [7]). Следовательно, она лежит в поверхности, изометричной евклидовой плоскости. При изометрии все прямые (градиентные линии функции f) переходят в параллельные прямые евклидовой плоскости. Поэтому если кратчайшая ортогональна к одной градиентной линии в Φ, то она ортогональна ко всем градиентным линиям, поскольку они параллельны (см. [7]).

В силу того, что l_2 — замкнутое подмножество и M полно, то для каждой точки $q_1 \in l_1$ существует такая точка $q_2 \in l_2$, что кратчайшая q_1q_2 реализует расстояние от q_1 до l_2. Кратчайшая q_1q_2 ортогональна к l_2 в силу параллельности градиентных линий ортогональна ко всем градиентной линиям. Это означает, что кратчайшая q_1q_2 лежит в слое слоения, проходящем через точку $q_1 \in l_1$.

Поэтому, если кратчайшая $v : [0,l_1] \to L_0$ слоя L_0 реализует кратчайшее расстояние от точки $q_1 = v(0)$ до l_2 в L_0, то она является геодезической в M и реализует кратчайшее расстояние на слоях между l_1 и l_2. Тогда вариация δl длины кривой

$$t \to \gamma(s, v(t)), \quad t \in [0, l_0], \tag{3}$$

равна нулю при $s = 0$. Вычислим эту вариацию. Длина кривой (3) равна

$$l(s) = \int\limits_0^{l_0} \bigl|X(s,t)\bigr|\, dt.$$

Ясно, что $l(0) = l_0$, $|X(0,t)| = 1$ для всех $t \in [0, l_0]$, а также

$$\delta l = \int_0^{l_0} \frac{\nabla_Z |X|^2}{2|X|} dt.$$

Нетрудно показать, что $[X, Z] = 0$, где $[X, Z]$ — скобка Ли векторных полей X и Z, причем

$$Z(t,s) = \frac{\operatorname{grad} f\big(\gamma(t,s)\big)}{|\operatorname{grad} f\big(\gamma(t,s)\big)|}.$$

В силу того, что связность Леви-Чивита ∇ не имеет кручения, имеет место следующее равенство:

$$\nabla_Z X - \nabla_X Z = [Z, X]. \tag{4}$$

В силу того, что связность ∇ является метрической связностью, имеет место равенство

$$W g(Y_1, Y_2) = g(\nabla_W Y_1, Y_2) \tag{5}$$

для любых векторных полей $Y_1, Y_2, W \in V(M)$ (см. [3]). Так как $|Z| = 1$, из равенства (5) получаем, что

$$0 = X g(Z, Z) = 2g(\nabla_X Z, Z), \quad \text{т.е.} \quad g(\nabla_X Z, Z) = 0. \tag{6}$$

Учитывая, что $|X| = g(X, X)^{1/2}$, а также в силу равенств [4–6], получим

$$\nabla_Z |X|^2 = Z g(X, X) = 2g(\nabla_Z X, Z) = 2g(\nabla_X Z, X). \tag{7}$$

Из равенства (7) получим

$$\delta l = \int_0^{l_0} \frac{g(\nabla_X Z, X)}{|X|} dt.$$

Так как векторные поля X и Z взаимно ортогональны, то

$$0 = X g(X, Z) = g(\nabla_X X, Z) + g(X, \nabla_X Z). \tag{8}$$

Из равенства (8) следует, что

$$g(\nabla_X Z, X) = -g(\nabla_X X, Z).$$

Поэтому вариация δl имеет вид

$$\delta l = -\int_0^{l_0} \frac{g(\nabla_X X, Z)}{|X|} dt.$$

Поскольку геодезическая $t \to v(t)$ слоя L_0 является геодезической в M, имеет место равенство $\nabla_X X = 0$ при $s = 0$. Из (5) видно, что $\nabla_X Z$ является касательным к слоению F. Следовательно, при необходимости уменьшая l_0, можем считать, что $g(\nabla_X Z, X) \geqslant 0$ при $s = 0$ во всех точках $v(t)$ для $t \in [0, l_0]$. Так как $|X(t, 0)| = 1$ для $t \in [0, l_0]$, из следующего равенства вытекает, что $g(\nabla_X Z, X) = 0$ при $s = 0$:

$$\int_0^{l_0} g(\nabla_X Z, X)\Big|_{s=0} dt. \tag{9}$$

Вектор $\nabla_X Z$ во всех точках $v(t)$ лежит в плоскости векторов $X(v(t))$ и $Z(v(t))$, поэтому равенство (9) влечет равенство $\nabla_X Z = 0$ при $s = 0$. Это означает, что векторное поле $Z(t, 0)$ параллельно вдоль кривой $v(t)$.

Если через γ_X обозначить кратчайшую от точки $\gamma(0, s)$ градиентной линии $s \to \gamma(0, s)$ до l_2, то она также является вертикальной кривой; ее длина равна длине $v : [0, l_0] \to L_0$. В силу того, что многообразие M полно и рассматриваемое слоение F риманово, распределение H является связностью Эресмана для F (см. [11]). В силу единственности вертикально-горизонтальной гомотопии получим, что вертикальная кривая $\gamma_X : [0, l_0] \to M$ совпадает с кривой $t \to \gamma(t, s)$. Это означает, что $\nabla_X X = 0$ во всех точках поверхности, а кривые $t \to \gamma(t,s)$ при каждом s являются геодезическими длины l_0.

Пусть $v : (a,b) :\to M$ — произвольная геодезическая в M, ортогональная к градиентной линии функции f в одной точке; тогда в достаточно малой окрестности каждой своей точки она является кратчайшей. Поэтому, повторяя приведенное выше рассуждение, получим, что она лежит на поверхности уровня, которая проходит через ту точку, в которой она ортогональна к градиентной линии функции, и под действием потока единичного градиентного векторного поля она переходит в геодезическую такой же длины.

Таким образом, каждая геодезическая M, которая касается слоя слоения F, остается в этом слое. Кроме того, при потоке единичного градиентного поля Z она переходит в геодезическую линию такой же длины соответствующего слоя. Отсюда следует, что все поверхности уровня являются вполне геодезическими подмногообразиями; к тому же, они взаимно изометричны. □

Теорема 2 позволяет доказать следующее утверждение.

Теорема 3. *Пусть M — гладкое полное односвязное риманово многообразие постоянной неотрицательной секционной кривизны, $f : M \to \mathbb{R}^1$ — метрическая функция без критических точек. Тогда риманово многообразие M изометрично прямому произведению $L \times S$, где L — поверхность уровня, S — градиентная линия функции f.*

Доказательство. По теореме 2 поверхности уровня метрической функции f образуют вполне геодезическое слоение коразмерности 1, которое обозначим через F. Из упомянутых выше результатов следует, что слоение F является римановым. Таким образом, слоение F является римановым и вполне геодезическим одновременно.

Градиентные линии функции f образуют одномерное слоение $F^{\perp}$. Согласно теореме из [9] слоение $F^{\perp}$ является геодезическим слоением. В силу того, что слоение F является вполне геодезическим, слоение $F^{\perp}$ является римановым и вполне геодезическим одновременно.

Пусть $\mu : I \to M$ — гладкая кривая, $\mu(0) = p_0$ и $\mu(1) = p$, где $p_0, p \in M$. В силу того, что многообразие M полно и рассматриваемое слоение F риманово, то для каждой кусочно гладкой кривой $\mu : I \to M$ существует единственная вертикально-горизонтальная гомотопия $P_\mu : I \to M$, где $\mu_t = P_\mu(t,t)$, $t \in I$.

Кривая $t \to v(t) = P(t,s)$ лежит в слое $L(p_0)$ слоения F, а $v(0) = p_0$. Кривая $s \to \gamma(s) = P(t,s)$ ортогональна к поверхностям уровня и $\gamma(0) = p_0$. Кривая $t \to v(t) = P(t,s)$, $t \in [0,1]$ называется проекцией кривой $\mu : I \to M$ в $L(p_0)$, кривая $s \to \gamma(s) = P(t,s)$, $s \in [0,1]$ называется проекцией кривой $\mu : I \to M$ в $S(p_0)$, где $S(p_0)$ — градиентная линия функции f. Точки $p_1 = v(1)$ и $p_2 = \gamma(1)$ назовем проекциями p в $L(p_0)$ и в $S(p_0)$ соответственно.

В силу того, что H вполне интегрируема, проекция p зависит только от класса гомотопий кривой γ (см. [6]). Поэтому, когда M односвязно, отображение $G : p \to (p_1, p_2)$ определено корректно. В силу того, что слоение F является римановым и вполне геодезическим одновременно, отображение $G : p \to (p_1, p_2)$ является изометрическим погружением (см. [6]). В силу того, что $\dim M = \dim\{L(p_0) \times S(p_0)\}$, отображение f является накрытием; следовательно, оно является изометрией (см. [6]). □

Следствие 2. *Пусть $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$ — метрическая функция без критических точек. Тогда каждая поверхность уровня функции f изометрична $\mathbb{R}^{n-1}$.*

Действительно, по вышедоказанной теореме, $\mathbb{R}^n$ изометрично прямому произведению $L \times S$, где L — поверхность уровня, S — градиентная линия функции f.

В [5] доказано, что кривизна каждой градиентной линии S метрической функции равна нулю. Поэтому, в силу того, что функция не имеет критических точек, S является прямой. Следовательно, $\mathbb{R}^n$ изометрично прямому произведению $L \times \mathbb{R}^1$. Отсюда вытекает, что каждая поверхность уровня изометрична гиперплоскости $\mathbb{R}^{n-1}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бакельман И. Я., Вернер А. А., Кантор Б. Е.* Введение в дифференциальную геометрию «в целом». — М.: Наука, 1973.
2. *Бибиков Ю. Н.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. — Л.: ЛГУ, 1981.
3. *Громол Д., Клингенберг В., Мейер В.* Риманова геометрия в целом. — М.: Мир, 1971.
4. *Каипназарова Г., Нарманов А. Я.* Топология слоений, порожденных поверхностями уровня// Узбек. мат. ж. — 2008. — № 2. — С. 53–60.
5. *Каипназарова Г. Х.* Геометрия слоений, порожденных поверхностями уровня/ Дисс. на соиск. уч. степ. канд. физ.-мат. наук. — Ташкент: Ин-т мат. информ. техн. АН РУз, 2009.
6. *Кобаяси Ш., Номидзу К.* Основы дифференциальной геометрии. Т 1. — М.: Наука, 1981.
7. *Кобаяси Ш., Номидзу К.* Основы дифференциальной геометрии. Т 2. — М.: Наука, 1981.
8. *Нарманов А., Шарапов С.* О поверхностях уровня субмерсий// Узбек. мат. ж. — 2004. — № 2. — С. 62–66.
9. *Нарманов А., Каипназарова Г.* Метрические функции на римановых многообразиях// Узбек. мат. ж. — 2010. — № 1. — С. 11–20.
10. *Палис Ж., Ди Мелу* Геометрическая теория динамических систем. — М.: Мир, 1986.
11. *Blumenthal R., Hebda J.* Complementary distributions which preserve the leaf geometry and applications to totally geodesic foliations// Quart. J. Math. — 1984. — *35*. — С. 383–392.
12. *Molino P.* Riemannian foliations/ Progr. Math. — Birkhäuser Boston Inc., 1988. — *73*.
13. *Tondeur P.* Foliations on Riemannian manifolds. — Springer-Verlag, 1988.

А. М. Байтураев
Национальный университет Узбекистана им. М. Улугбека, Ташкент, Узбекистан
E-mail: abayturaev@mail.ru

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 144 (2018). С. 117–121

УДК 517.12

НЕКОТОРЫЕ КАРДИНАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА N_τ^φ-ЯДРА ПРОСТРАНСТВА X

© 2018 г. **Ф. Г. МУХАМАДИЕВ**

Аннотация. В работе изучены некоторые кардинальные свойства подпространств $N_\tau^\varphi X$ пространства полных сцепленных систем NX топологического пространства X.

Ключевые слова: плотность, вес, полная сцепленная система.

AMS Subject Classification: 18B20, 18A05, 46A63, 46E27, 54A25

1. Введение. Система ξ замкнутых подмножеств пространства X называется сцепленной, если любые два элемента из ξ пересекаются.

По лемме Цорна, всякая сцепленная система может быть дополнена до максимальной сцепленной системы (МСС), но такое дополнение, как правило, не однозначно.

Предложение 1 (см. [3]). *Сцепленная система ξ пространства X является МСС тогда и только тогда, когда она обладает следующим свойством полноты: если замкнутое множество $A \subset X$ пересекается с каждым элементом из ξ, то $A \in \xi$.*

На множестве λX всех МСС пространства X вводится волмэновская топология, открытую базу которой образуют множества вида

$$O(U_1, U_2, \dots, U_n) = \Big\{\xi \in \lambda X : \text{для любого } i = 1, \dots, n \text{ существует такое } F_i \in \xi, \text{ что } F_i \subset U_i\Big\},$$

где $U_1, U_2, \dots, U_n$ — открытые множества в пространстве X.

Пространство λX с указанной топологией называется *суперрасширением* пространства X.

Наименьшее из кардинальных чисел, являющихся мощностями всюду плотных подмножеств пространства X, называется *плотностью* пространства X и обозначается через $d(X)$ (см. [4]).

Если $d(X) \leqslant \aleph_0$, то говорят, что X *сепарабельно.*

Вербек показал (см. [6]), что $d(\lambda X) \leqslant d(X)$ для любого нормального пространства X.

Семейство ν непустых подмножеств топологического пространства X называется *π-сетью*, если для любого непустого открытого подмножества U пространства X найдется элемент семейства ν, лежащий в множестве U. π-Сетевой вес пространства X — это минимум мощностей его π-сетей; он обозначается через $n\pi w(X)$. π-Сеть топологического пространства X, состоящая из открытых в X множеств, называется *π-базой* топологического пространства X.

π-Вес топологического пространства X — это наименьшее из кардинальных чисел τ, являющихся мощностями π-баз пространства X; он обозначается через $\pi w(X)$ (см. [5]).

Т. Махмуд доказал (см. [2]), что$\pi w(\lambda X) = \pi w(X)$ для любого T_1-пространства X.

Пусть X — топологическое пространство и λX — его суперрасширение. Максимальную сцепленную систему $\xi \in \lambda X$ назовем *тонкой* (сокращенно ТМСС), если МСС ξ содержит хотя бы один конечный элемент, т.е. если существует конечное замкнутое множество F, причем

$$\xi \in F^+ = \big\{\xi' \in \lambda X : \ F \in \xi'\big\}.$$

Работа выполнена при поддержке гранта ОТ-Ф-4-42 РУз.

Тонким суперядром (или *тонким суперрасширением*) пространства X назовем пространство

$$\lambda^* X = \Big\{\xi \in \lambda X:\ \xi \text{ — ТМСС}\Big\} \subset \lambda X.$$

Пусть ξ — ТМСС. *Фундаментом* ТМСС ξ в X назовем семейство

$$\mathfrak{F}(X) = \big\{F \in \xi:\ |F| < \aleph_0\big\}.$$

Предложение 2 (см. [2]). *Пусть X — бесконечное T_1— пространство. Тогда справедливы следующие равенства*:
(1) $\pi w(\lambda^* X) = \pi w(X)$;
(2) $d(\lambda^* X) = d(X)$.

Определение 1 (см. [2]). Пусть X — топологическое пространство, φ — кардинальнозначная функция и τ — некоторое кардинальное число. Максимальную сцепленную систему $\xi \in \lambda X$ назовем *φ_τ-максимальной сцепленной системой* (сокращенно φ_τ-МСС), если она содержит хотя бы один такой элемент F, что $\varphi(F) \leqslant \tau$.

φ_τ-Суперядром (или *τ-суперрасширением* пространства X относительно функции φ) назовем пространство

$$\lambda^\varphi_\tau(X) = \big\{\xi \in \lambda X:\ \xi \text{ является } \varphi_\tau\text{-МСС}\big\}.$$

Пусть $\xi \in \lambda^\varphi_\tau(X)$. *$\varphi_\tau$-Фундаментом* МСС ξ назовем семейство

$$\mathfrak{F}^\varphi_\tau(\xi) = \big\{F \in \xi:\ \varphi(F) \leqslant \tau\big\}.$$

Топологическое пространство X назовем *φ_τ-суперядерным*, если $\lambda^\varphi_\tau X = \lambda X$.

Теперь в качестве функции φ возьмем функцию плотности d и положим $\tau = \aleph_0$.

Предложение 3 (см. [2]). *Для любого бесконечного T_1— пространства X справедливы следующие равенства*:
(1) $\pi w(\lambda^d_{\aleph_0} X) = \pi w(X)$;
(2) $d(\lambda^d_{\aleph_0} X) = d(X)$.

Условие 1. Любая окрестность OF множества F содержит некоторый элемент $G \in \eta$.

Сцепленную систему η замкнутых подмножеств пространства X назовем *полной сцепленной системой* (ПСС), если для любого замкнутого множества $F \subset X$ условие 1 влечет $F \in \eta$ (см. [1]).

Пространством полных сцепленных систем пространств X назовем множество NX всех полных сцепленных систем, наделенное топологией, открытую базу которой образуют множества следующего вида:

$$E = O\big(U_1, U_2, \dots, U_n\big)\big\langle V_1, V_2, \dots, V_s\big\rangle = \Big\{\mathfrak{M} \in NX:\ \text{для любого } i = 1, \dots, n \text{ существует такое } F_i \in \mathfrak{M}, \text{ что } F_i \subset U_i \text{ и для любых } j = 1, \dots, s \text{ и } F \in \mathfrak{M} \text{ справедливо } V_j \cap F \neq \varnothing\Big\}.$$

Отметим, что $\lambda X \subset NX$ и

$$\Big(O(U_1, U_2, \dots, U_n)\big\langle V_1, V_2, \dots, V_s\big\rangle\Big) \cap \lambda X = O\Big(U_1, U_2, \dots, U_n, V_1, V_2, \dots, V_s\Big).$$

Таким образом, суперрасширение λX является подпространством пространства NX.

Предложение 4 (см. [2]). *Пусть X — бесконечное T_1-пространство. Тогда выполнено неравенство*

$$d(NX) \leqslant d(X).$$

Теорема 1 (см. [4]). *Для любого бесконечного T_1-пространства X выполнено соотношение*

$$\pi w(NX) = \pi w(X).$$

Предложение 5 (см. [2])**.** *Пусть $\mu = \{G_1, G_2, \dots, G_n\}$ — конечная сцепленная система замкнутых подмножеств пространства X. Тогда следующая система является полной сцепленной системой пространства X*:

$$\mathfrak{M} = \Big\{F \in \exp X: \text{ существует такое } G_i \in \mu, \text{ что справедливо } G_i \subset F\Big\}.$$

Определение 2 (см. [2])**.** Пусть $\mathfrak{M}$ — полная сцепленная система пространства X. Полную сцепленную систему $\mathfrak{M}$ назовем *тонкой полной сцепленной системой* (сокращенно ТПСС), если система $\mathfrak{M}$ содержит хотя бы один конечный элемент.

N-Тонким ядром топологического пространства назовем пространство

$$N^*(X) = \{\mathfrak{M} \in NX: \ \mathfrak{M} - \text{ТПСС}\}.$$

Топологическое пространство X назовем *N-плотным*, если в N^*X существует такое всюду плотное в NX множество $\mathcal{B}$, что $|\mathcal{B}| = d(NX)$.

Предложение 6 (см. [2])**.** *Для любого бесконечного T_1-пространства X справедливы следующие равенства*:

(1) $\pi w(N^*X) = \pi w(X)$;
(2) $d(N^*X) = d(X)$.

Предложение 7 (см. [2])**.** *Пространство тонких полных сцепленных систем любого T_1-пространства X всюду плотно в пространстве NX, т.е. $[N^*X]_{NX} = NX$.*

2. Некоторые кардинальные свойства N_τ^φ-ядра пространства X. В этом разделе исследуем кардинальные свойства N_τ^φ-ядра пространства X.

Определение 3. Пусть $X - T_1$-пространство, φ — кардинальнозначная функция, τ — любое кардинальное число. N_τ^φ-Ядром пространства X назовем пространство

$$N_\tau^\varphi X = \Big\{\mathfrak{M} \in NX: \text{ существует такое } F \in \mathfrak{M}, \text{ что справедливо неравенство } \varphi(F) \leqslant \tau\Big\}.$$

Определение 4. Пусть $\mathfrak{M} \in N_\tau^\varphi X$. *$N_\tau^\varphi$-Фундаментом* ПСС $\mathfrak{M}$ назовем семейство

$$\mathfrak{F}_\tau^\varphi(\mathfrak{M}) = \Big\{F \in \mathfrak{M}: \ \varphi(F) \leqslant \tau\Big\}.$$

Определение 5. Топологическое пространство X назовем *N_τ^φ-ядерным*, если

$$N_\tau^\varphi X = NX.$$

В качестве функции φ возьмем функцию плотности d, пусть $\tau = \aleph_0$.

Из определения следует, что любое пространство X является N_τ^d-ядерным, где $\tau = d(X)$; в частности, любое сепарабельное пространство X является $N_{\aleph_0}^\varphi$-ядерным. Тогда выполнено соотношение

$$N^*X \subset N_{\aleph_0}^\varphi X \subset NX.$$

Таким образом, согласно предложению 7 получим следующее утверждение.

Следствие 1. *Пусть X — бесконечное T_1-пространство. Тогда*

$$[N_{\aleph_0}^d X]_{NX} = NX.$$

Теорема 2. *Пусть X — бесконечное T_1-пространство. Тогда*

(1) $\pi w(N_{\aleph_0}^d X) = \pi w(X)$;
(2) $d(N_{\aleph_0}^d X) = d(X)$.

Доказательство. Так как $N^d_{\aleph_0}X$ является всюду плотным в NX множеством, то $\pi w(N^d_{\aleph_0}X) = \pi w(NX)$. Согласно теореме 1, получаем $\pi w(N^d_{\aleph_0}X) = \pi w(X)$.

Сначала докажем неравенство $d(N^d_{\aleph_0}X) \leqslant d(X)$. Пусть X_0 — всюду плотное в X подмножество такое, что $|X_0| = d(X) = \tau$. Положим

$$\exp_{\aleph_0}(X_0, X) = \Big\{G \in \exp X: \ G \subset X_0, \ |G| < \aleph_0\Big\},$$
$$\Sigma(X_0, X) = \Big\{\mu \subset \exp_{\aleph_0}(X_0, X): \ \mu — \text{КСС}\Big\}.$$

Теперь пусть $\mu \in \Sigma(X_0, X)$. Положим

$$\mathfrak{M}_\mu = \Big\{F \in \exp X: \ \text{существует такое } G \in \mu, \text{ что } G \subset F\Big\}.$$

Очевидно, что множество

$$N^d_{\aleph_0}(X_0, X) = \Big\{\mathfrak{M}_\mu: \ \mu \in \Sigma(X_0, X)\Big\}$$

имеет мощность, равную $\tau = d(X)$, и согласно предложению 5 получим, что

$$N^d_{\aleph_0}(X_0, X) \subset N^d_{\aleph_0}X.$$

Покажем, что множество $N^d_{\aleph_0}(X_0, X)$ является всюду плотным в $N^d_{\aleph_0}X$. Пусть $E = O(U_1, U_2, \dots, U_n)\big\langle V_1, V_2, \dots, V_s\big\rangle$ — непустой открытый базисный элемент в $N^d_{\aleph_0}X$. Пусть $S(E) = \{W_1, W_2, \dots, W_m\}$ — попарный след элемента E в X.

Так как X_0 — всюду плотное множество в X, то $X_0 \cap W_i \neq \varnothing$, $i = 1, \dots, m$. Теперь в каждом пересечении вида $X_0 \cap W_i$ возьмем по одной точке x_i. Получим множество $\sigma = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$. Положим

$$G_i = \big\{x_j \in \sigma: \ x_j \in U_i\big\}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Очевидно, что система $\mu = \{G_1, G_2, \dots, G_n\}$ является сцепленной системой замкнутых в X подмножеств, тогда $\mu \in \Sigma(X_0, X)$; следовательно, $\mathfrak{M}_\mu \in N(X_0, X)$. По построению системы $\mathfrak{M}_\mu$ $F \cap V_j \neq \varnothing$ для любого $F \in \mathfrak{M}_\mu$ и для любого $j = 1, \dots, s$. Кроме того, $G_i \subset U_i$, $i = 1, \dots, n$. Следовательно, $\mathfrak{M}_\mu \in E$.

Итак, $N^d_{\aleph_0}(X_0, X) \cap E \neq \varnothing$. В силу произвольности базисного элемента E в $N^d_{\aleph_0}X$ получим, что множество $N^d_{\aleph_0}(X_0, X)$ пересекается с каждым открытым в $N^d_{\aleph_0}X$ множеством. Следовательно, $N^d_{\aleph_0}(X_0, X)$ — всюду плотное в $N^d_{\aleph_0}X$ множество. Так как $|N^d_{\aleph_0}(X_0, X)| = |X_0| = d(X)$, то $d(N^d_{\aleph_0}X) \leqslant d(X)$.

Теперь докажем неравенство $d(X) \leqslant d(N^d_{\aleph_0}X)$. Пусть $\mathfrak{B} = \{\mathfrak{M}_i : i \in \theta\}$ — всюду плотное в $N^d_{\aleph_0}X$ множество, причем $|\mathfrak{B}| = d(N^d_{\aleph_0}X) = \tau$. Из $d_{\aleph_0}$-фундамента $\mathfrak{F}^d_{\aleph_0}(\mathfrak{M}_i)$ каждой ПСС $\mathfrak{M}_i \in \mathfrak{B}$ выберем по одному элементу F_i; тогда получаемое множество $H_1 = \{F_i : i \in \theta\}$ имеет мощность, равную τ. В каждом множестве F_i из H_1 фиксируем счетное всюду плотное в F_i множество G_i; тогда получим множество $H_2 = \{G_i : i \in \theta\}$. Теперь положим $X_0 = \bigcup H_2$; тогда очевидно, что $|X_0| = \tau \cdot \aleph_0 = \tau$. Покажем, что множество X_0 всюду плотно в X.

Пусть W, W' — произвольные открытые в X множества; тогда множество $O = O(W)\big\langle W'\big\rangle$ — открытое в NX множество; следовательно, множество $O^d = O(W)\big\langle W'\big\rangle \cap N^d_{\aleph_0}X$ открыто в пространстве $N^d_{\aleph_0}X$. Так как множество $\mathfrak{B}$ всюду плотно в $N^d_{\aleph_0}X$, то найдется хотя бы один элемент $\mathfrak{M}_i \in \mathfrak{B}$, лежащий в $O^d = O \cap N^d_{\aleph_0}X$. Следовательно, $F_i \cap W \neq \varnothing$ и $F_i \subset W'$. Так как множество $V = F_i \cap W$ открыто в F_i, то в силу всюду плотности множества G_i в F_i получим, что $G_i \cap V \neq \varnothing$. Следовательно, $G_i \cap W \neq \varnothing$; тем более $W \cap X_0 \neq \varnothing$. В силу произвольности открытого множества W в X получим, что множество X_0 пересекается с каждым открытым в X множеством, т.е. X_0 — всюду плотное в X множество. Так как $|X_0| = \tau = d(N^d_{\aleph_0}X)$, то $d(X) \leqslant d(N^d_{\aleph_0}X)$.

Наконец, из предыдущих рассуждений получаем $d(X) = d(N^d_{\aleph_0}X)$. Теорема доказана. $\square$

Следствие 2. *Пусть X — бесконечное T_1-пространство. Тогда справедливы следующие равенства*:

(1) $\pi w(N^*X) = \pi w(N^d_{\aleph_0}X) = \pi w(X)$;
(2) $d(N^*X) = d(N^d_{\aleph_0}X) = d(X)$.

Следствие 3. *Пусть X — бесконечное T_1-пространство. Тогда справедливы следующие утверждения*:
(1) $\pi w(N^*X) \leqslant \aleph_0 \Leftrightarrow \pi w(N^d_{\aleph_0}X) \leqslant \aleph_0 \Leftrightarrow \pi w(X) \leqslant \aleph_0$;
(2) $d(N^*X) \leqslant \aleph_0 \Leftrightarrow d(N^d_{\aleph_0}X) \leqslant \aleph_0 \Leftrightarrow d(X) \leqslant \aleph_0$.

Следствие 4. *Пусть X — $d_{\aleph_0}$-плотное пространство. Тогда справедливы следующие равенства*:
(1) $n\pi w(NX) = n\pi w(X)$;
(2) $d(NX) = d(X)$.

Следствие 5. *Пусть X — бесконечное T_1-пространство и $\mathfrak{B}$ — такое всюду плотное в NX множество, что $\mathfrak{B} \subset N^d_{\aleph_0}X$ и $|\mathfrak{B}| = d(NX)$. Тогда справедливы следующие равенства*:
(1) $n\pi w(NX) = n\pi w(X)$;
(2) $d(NX) = d(X)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Иванов А. В.* Кардинальнозначные инварианты и функторы в категории бикомпактов/ Дисс. на соиск. уч. степ. докт. физ.-мат. наук. — Петрозаводск, 1985.
2. *Махмуд Т.* О кардинальных инвариантах пространств сцепленных систем// Вестн. МГУ. Сер. 1. Мат. Мех. — 1995. — № 4. — С. 14–19.
3. *Федорчук В. В., Филиппов В. В.* Общая топология. Основные конструкции. — М.: МГУ, 2006.
4. *Энгелькинг Р.* Общая топология. — М.: Мир, 1986.
5. *Juhasz I.* Cardinal Functions in Topology. Ten Years Later/ Math. Centre Tracts. — Amsterdam: Math. Centrum, 1980. — *123*.
6. *Van Mill J.* Supercompactness and Wallman Spaces/ Math. Centre Tracts. — Amsterdam: Math. Centrum, 1977. — *85*.

Ф. Г. Мухамадиев
Ташкентский государственный педагогический университет им. Низами, Ташкент, Узбекистан
E-mail: `farhod8717@mail.ru`