УДК 614.8, 519.8, 51-7 DOI: 10.36535/0869-4179-2021-04-3

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА СТАТИСТИЧЕСКИХ ИСПЫТАНИЙ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ИНЖЕНЕРНЫХ ЗАДАЧ И ИНЖЕНЕРНОГО ОБЕСПЕЧЕНИЯ ДЕЙСТВИЙ СПАСАТЕЛЬНЫХ ФОРМИРОВАНИЙ

Доктор техн. наук *В.А. Седнев*
Академия государственной противопожарной службы МЧС России

А.В. Седнев
Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)

Рассмотрены содержание и основные положения по применению метода статистических испытаний для моделирования выполнения инженерных задач и инженерного обеспечения действий спасательных формирований. Статистические методы позволяют более полно учесть вероятностный характер моделируемого процесса и эффективны в случаях, когда его аналитическое описание представляет затруднения, благодаря чему статистическое моделирование представляет собой мощное средство для обоснования принимаемых решений и оценки эффективности выполнения задач инженерного обеспечения и инженерного обеспечения в целом спасательных формирований.

Ключевые слова: спасательное формирование, организация выполнения задач, эффективность, поддержка принятия решений.

APPLICATION OF THE STATISTICAL TEST METHOD FOR SOLVING ENGINEERING PROBLEMS AND ENGINEERING ENSURING THE ACTIONS OF RESCUE UNITS

Dr (Tech) *V.A. Sednev*
Academy of state fire service of EMERCOM of Russia

A.V. Sednev
Moscow state technical University them. N. E. Bauman (national research University)

The article discusses the content and main provisions on the application of the statistical test method for modeling the performance of engineering tasks and engineering support for the actions of rescue units. Statistical methods allow for more complete consideration of the probabilistic nature of the modeled process and are effective in cases where its analytical description is difficult, so statistical modeling is a powerful tool for justifying decisions and evaluating the effectiveness of performing engineering tasks and engineering support in general for rescue units.

Keywords: rescue formation, organization of tasks, efficiency, decision support.

Целью статистического моделирования является получение оценок для случайных явлений: вероятностей случайных событий, законов распределения и числовых характеристик случайных величин или параметров случайных процессов. В общем случае метод статистических испытаний сводится к определению этих показателей. Например, если в качестве показателя эффективности рассматривать время выполнения задачи инженерного обеспечения или темп ее выполнения, то требуется знать закон распределения этого времени (темпа) как функции объема задачи, возможностей инженерных подразделений, условий выполнения задачи, в том числе воздействия в зоне чрезвычайной ситуации и возможностей возникновения отказов техники. Это требование обусловлено вероятностным характером исследуемого процесса.

В аналитической модели это учесть затруднительно. Поэтому в результате получаем, как правило, точечные оценки: математическое ожидание, дисперсию, коэффициент вариации, либо вероятность того, что дискретная случайная величина примет определенное значение.

Аналитические модели позволяют установить формульную зависимость между условиями обстановки, элементами принимаемого решения и эффективностью выполнения задач по избранному критерию [1-5]. А если не все поддается аналитическому описанию в силу неопределенности обстановки? Например, в ходе переправы через водную преграду может быть поврежден перевозной паром большой площади. Если это произойдет, может быть принято решение – развести его на несколько паромов меньшей площади и продолжить выполнение задачи. Могут быть другие решения. Вот это – произойдет или не произойдет повреждение парома, и какое будет принято решение – и является элементом неопределенности [1, 6-13] в задаче по оценке эффективности переправы. Представить его и подобные ему элементы, а их, как правило, множество, в аналитической модели нередко затруднительно или невозможно.

Статистические методы позволяют более полно учесть вероятностный характер моделируемых процессов и построить достаточно простые алгоритмы соответствующих математических моделей. Такие модели оказываются наиболее эффективными в тех случаях, когда аналитическое описание моделируемого процесса представляет большие затруднения, либо практически невозможно в силу значительной неопределенности исходной информации.

Благодаря указанным преимуществам статистическое моделирование представляет собой мощное средство для количественного обоснования принимаемых решений и оценки эффективности выполнения задач инженерного обеспечения и инженерного обеспечения в целом.

Очевидно, что наилучшие результаты можно получить при совместном применении аналитических и статистических моделей: аналитическая модель позволяет приближенно разобраться в основных закономерностях явления, наметить его контуры, а любое дальнейшее уточнение может быть получено статистическим моделированием.

Сущность метода статистических испытаний

Метод статистических испытаний, или метод Монте-Карло, есть численный метод решения математических задач при помощи моделирования случайных явлений и статистической оценки их характеристик. Его широко используют в качестве одного из численных машинных методов расчета.

Датой рождения метода считают 1949 год, когда появилась статья под заглавием «Метод Монте-Карло» (Metropolis N., Ulam S.M., The Monte Carlo method.7. Amer. Statist, Assoc., 1949, 44, № 247, 335–341). Его возникновение связывают с именами Дж. Неймана, С. Улама, Н. Метрополиса, Г. Кана и Э. Ферми. До появления электронно-вычислительных машин метод не находил широкого применения в силу того, что моделирование случайных явлений вручную является трудоемким процессом. Однако для лучшего понимания метода статистических испытаний его содержание рассмотрим как раз в предположении моделирования случайных явлений вручную.

Применение электронной вычислительной техники открыло широкие возможности для статистического моделирования сложных процессов действий организационных структур, в том числе спасательных подразделений и их инженерного обеспечения, характеризующихся большим количеством случайных факторов [5, 14-17]. С помощью статистических моделей можно устанавливать закономерности развития этих процессов, получать количественные характеристики, которые необходимо учитывать при обосновании принимаемых решений и прогнозировании [18-35].

Рассмотрим пример. При оценке эффективности действий переправочно-десантного подразделения по обеспечению переправы через водную преграду в числе других оценочных показателей необходимо знать продолжительность рейса переправочно-десантного средства (рис 1).

В соответствии с расчетной схемой продолжительность рейса может быть выражена в виде суммы затрат времени при последовательном выполнении переправочно-десантным средством каждого из составляющих рейс действий:

$$T_p = \sum_{j=1}^{10} t_j \,, \tag{1}$$

где t_j - затраты времени на выполнение j-того действия.

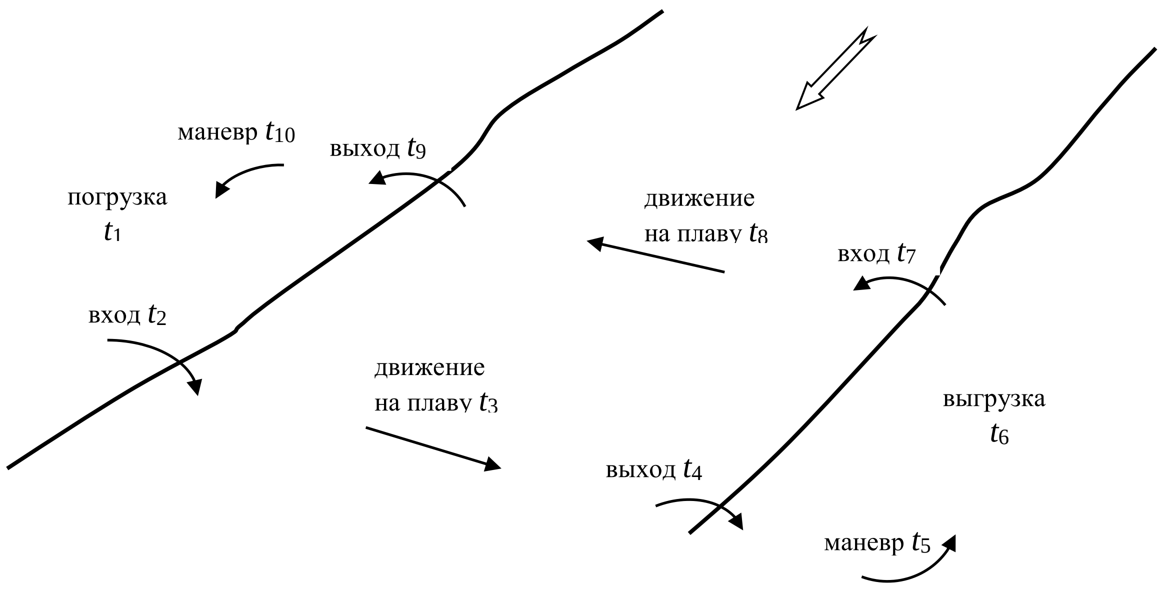

Рис. 1. Расчетная схема для определения продолжительности рейса переправочно-десантного средства

Если слагаемые t_j в условиях преодоления конкретной водной преграды были детерминированными величинами, то вычисление по формуле (1) не представляло бы затруднений, а сама величина была бы детерминированной. Известно [1-3, 13], что при неоднократном совершении рейса одним и тем же переправочно-десантным средством в одинаковых условиях на одном и том же створе водной преграды в силу разных причин (слаженность в работе экипажа, погодные условия, неодинаковая скорость течения водной преграды на створе и др.) фиксируются различные значения слагаемых величин:

t_1 - времени погрузки, t_2 - времени входа груженого средства в воду до всплытия, t_3 - времени движения его на плаву и т.д. То есть величины t_j ($j=1,2,3,...10$) являются случайными. Вследствие этого продолжительность рейса, представляющая функцию от случайных аргументов t_j, тоже является случайной величиной. Знание числовых характеристик этой случайной величины и закона её распределения позволяет производить более обоснованные расчёты, необходимые для принятия решения.

В большинстве случаев по формуле (1) определяется математическое ожидание величины m_{T_p}, т.е. его среднее значение по средним значениям слагаемых величин m_{t_j}. Если бы удалось провести серию из n натурных испытаний, то получили бы частную статистическую выборку времени T_p объёмом n значений. Обработав её, можно получить статистическую оценку закона распределения продолжительности рейса. В силу того, что большое число опытов в одинаковых условиях реально провести невозможно, полученная оценка закона распределения T_p окажется приближённой.

Возможен другой путь оценки закона распределения продолжительности рейса - с помощью математического моделирования, не прибегая к натурным испытаниям. Если были бы известны законы распределения случайных аргументов t_1, t_2, t_3,...t_{10}, а их можно получить заблаговременно из практических наблюдений с последующей обработкой статистических данных, и аппарат, с помощью которого на основе этих законов распределения можно моделировать единичные значения каждой из этих величин, то, проведя серию из n таких «испытаний», можно получить последовательность значений подобно тому, как она была бы получена посредством натурных испытаний. В результате последующей обработки данных также может быть получена оценка для закона распределения случайной величины T_p. Его достоверность будет зависеть от степени достоверности законов распределения случайных величин t_j, функцией которых является T_p.

Метод статистических испытаний предназначен для решения задач подобного класса, аналитическое решение которых затруднительно или невозможно. Идея метода заключается в том, что вместо того, чтобы вычислять показатель эффективности операции, сложным образом зависящий от ряда случайных факторов, его определяют с помощью розыгрыша.

Рассмотрим пример. Пусть в некотором районе с неравномерной плотностью расположены однотипные инженерные сооружения, которые можно рассматривать как точечные объекты. Расположение объектов может быть задано их координатами x_i, y_i в выбранной системе координат XOY. По району наносится удар одним боеприпасом, поражающим i-ый объект при попадании его в зону поражения S_n радиусом поражения R_n. Точка прицеливания неизвестна. Предполагается, что она может располагаться в любой точке района. Требуется определить закон распределения числа поражаемых объектов.

В силу того, что точка прицеливания неизвестна, предположено равновероятное попадание боеприпаса в любую точку района. Для моделирования возможных точек попадания боеприпаса (координат x_{nj}, y_{nj}) и результатов нанесения удара покроем район расположения точечных объектов плоской прямоугольной координатной сеткой с шагом, значительно меньшим радиуса поражения объекта R_n (рис. 2).

Последовательно пронумеруем накладывающиеся и соприкасающиеся с районом квадраты слева направо и сверху вниз. По количеству таких квадратов K нарежем одинакового размера жетоны, которые также пронумеруем, заложим в мешочек и тщательно перемешаем. Подготовим расчетную таблицу 1, в которую будем заносить.

Проведем n испытаний. Каждое испытание, т.е. «нанесение» удара по району, заключается в извлечении одного жетона из мешочка. Номер j извлеченного жетона определяет квадрат с тем же номером, в центр которого попал боеприпас. Так оказываются смоделированными и координаты точки попадания боеприпаса x_{nj}, y_{nj}. Очертив окружность радиусом $R_П$ вокруг смоделированной точки попадания, получим зону поражения $S_П$. Под-считаем количество оказавшихся в этой же зоне (пораженных) объектов S_j и полученное число занесем в соответствующую строку табл. 1. Благодаря электронно-вычислительной технике сейчас это можно проделать с её помощью.

Количество пораженных объектов в j-ом испытании может быть определено и аналитически из условия:

$$(x_i - x_{nj})^2+(y_i - y_{nj})^2 \leq R^2_{\Pi}, \tag{2}$$

где: x_i, y_i – координаты i-го объекта, а x_{nj}, y_{nj} - координаты точки попадания боеприпаса в j-ом испытании. Если условие не выполняется, то i-тый объект не попадает в зону поражения.

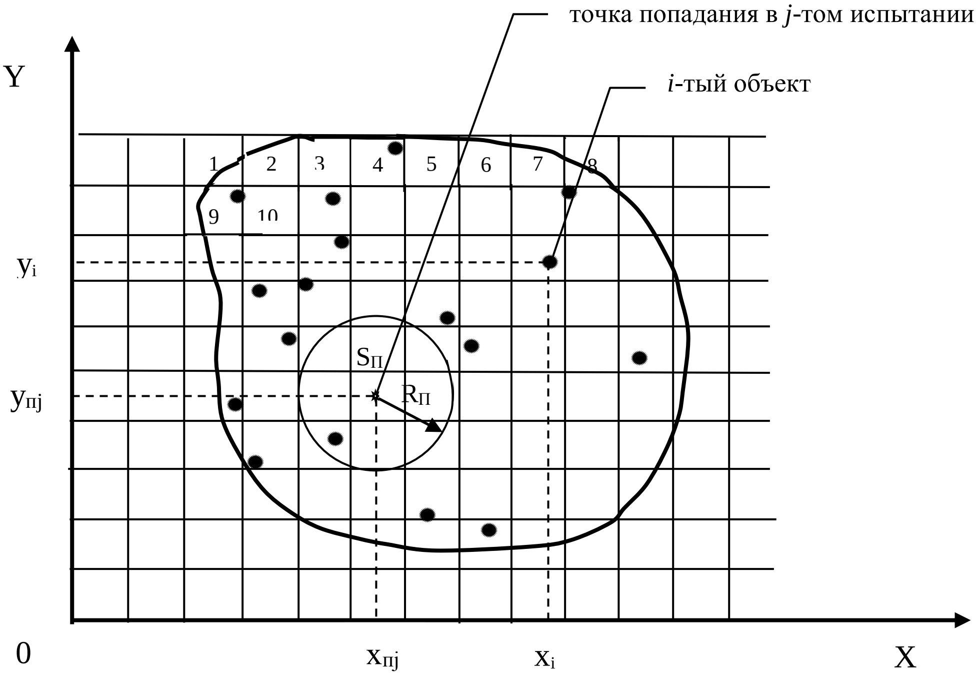

Рис. 2. Расчетная схема для моделирования нанесения удара по району

Таблица 1

Результаты испытаний

Номер испытания	1	2	3	. . .	j	. . .	n
Количество пораженных объектов	S_1	S_2	S_3	. . .	S_j	. . .	S_n

Извлеченный жетон возвращают в мешочек, который вновь перемешивают - последующее испытание должно проводиться независимо от предыдущего. Проделав подобным образом n испытаний, получим статистическую выборку числа пораженных объектов.

Обработав выборку методами математической статистики, можно получить закон распределения числа пораженных объектов. По аналогичной схеме моделирования можно оценить вероятность поражения каждого объекта с использованием формулы:

$$P_1 \approx P_1^* = \frac{m}{n}, \tag{3}$$

где: n - общее число проводимых испытаний; m - число испытаний, в которых объект был поражен.

Рассмотрим пример. Пункт управления состоит из трех функциональных групп, каждая из которых на протяжении некоторого времени может быть обнаружена с вероятностью P_1, P_2, P_3. Предполагаем, что события, состоящие в обнаружении каждой из групп, являются независимыми, а пункт управления опознается при обнаружении не менее двух групп, после чего по нему наносится удар с вероятностью поражения пункта управления $P_{пу}$.

Требуется оценить вероятность сохранения пункта управления $Q_{пу}$ в течение рассматриваемого времени. Для решения задачи используем механизм с вращающейся стрелкой (рис. 3). С его помощью будем разыгрывать случайные события: обнаружение каждой из функциональных групп и поражение обнаруженного пункта управления.

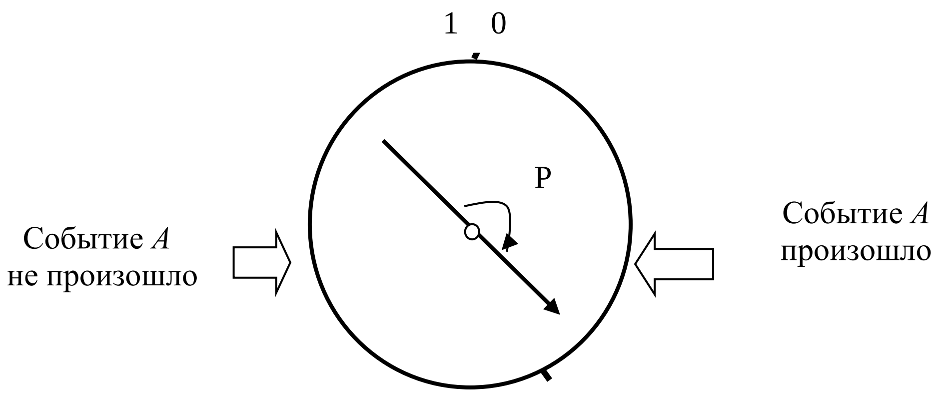

Рис. 3. Механизм с вращающейся стрелкой

Розыгрыш любого из этих случайных событий будем осуществлять по следующему принципу. На шкале механизма в пределах от 0 до 1 нанесем деление, соответствующее вероятности P моделируемого события A (рис. 3). Раскрутим стрелку. Если она остановится в секторе от 0 до P, считаем, что событие произошло, в противном случае - не произошло. Результаты испытаний заносим в разработанную регистрационную форму (табл. 2).

Проведем серию из n испытаний, в которых моделируется состояние пункта управления: поражен или не поражен. Для этого в каждом испытании разыгрывается обнаружение или не обнаружение каждой группы. Полученные результаты фиксируются в табл. 2: если оказалось обнаружено не более одной группы, то в графы 5 и 6 заносятся нули. В противном случае в графу 5 заносится «1» (пункт обнаружен) и проводится розыгрыш состояния пункта управления в целом: в случае его поражения в графу 6 заносится «1», в случае не поражения – «0». По завершении испытаний подсчитывается количество нулей в колонке 6. Если их оказалось m, тогда вероятность сохранения пункта управления вычисляется по формуле:

$$Q_{ПУ} \cong \frac{m}{n}. \tag{4}$$

Таблица 2

Регистрационная таблица испытаний

№ испытания	Состояние группы: обнаружена - 1; не обнаружена - 0			Состояние пункта управления	
	1-я группа	2-я группа	3-я группа	обнар. - 1 не обн. - 0	пораж. - 1 не пор. - 0
1	0	1	0	0	0
2	1	0	1	1	0
3	0	1	1	1	1
…	…	…	…	…	…
n	1	1	0	1	1

Во втором примере на определение закона распределения числа поражённых объектов осуществлялось прямое моделирование случайного события, связанное с розыгрышем условий, благоприятствующих его появлению. Для этого необходимо было моделировать координаты точки взрыва боеприпаса с последующей проверкой попадания точечных объектов в зону поражения. В двух других примерах моделирование случайных величин и случайных событий осуществлялось по известным законам распределения и вероятностям соответствующих случайных явлений.

Таким образом, метод статистических испытаний в исследовании операций есть численный метод, основанный на воспроизведении большого числа реализаций случайного явления, специально построенного по условиям задачи. Каждая отдельная реализация, полученная этим методом, является случайной. По результатам многих реализаций в соответствии с выбранным критерием эффективности могут устанавливаться закон распределения или статистические числовые характеристики случайной величины, либо определяться вероятность случайного события.

Моделирование случайных событий и величин

В рассмотренных примерах разными способами организовывались единичные жребии. Под единичным жребием понимается элементарный опыт, в котором с помощью розыгрыша решается один из следующих вопросов:

произошло или не произошло случайное событие A;

какое из полной группы событий $A_1, A_2, A_3,..., A_n$ произошло;

какое из возможных значений приняла случайная величина X.

В примере с пунктом управления решался первый вопрос, в примерах с переправочно-десантным средством и с точечными объектами в районе - третий. Рассмотрим пример с решением второго вопроса в единичном жребии. Подвижному отряду заграждений спасательного воинского формирования назначены три рубежа минирования: на одном из направлений - №1 и №2, на другом - №3. Выход противника и подвижного отряда заграждений на рубежи минирования №1 (событие A_1), №2 (событие A_2) и №3 (событие A_3) возможны с вероятностями P_1, P_2 и P_3. Полагая, что A_1, A_2 и A_3 составляют полную группу событий, необходимо в единичном жребии смоделировать выход подвижного отряда заграждений на один из рубежей минирования.

Применяя для розыгрыша случайного события A_j тот же механизм с вращающейся стрелкой, отметив на его шкале точки P_1, $P_1 + P_2$ и $P_1+P_2+P_3 = 1$, проследим, на каком секторе остановится стрелка (рис. 4). В этом случае имеет место решение второго вопроса, на какой из трёх рубежей минирования выдвигается подвижный отряд заграждений.

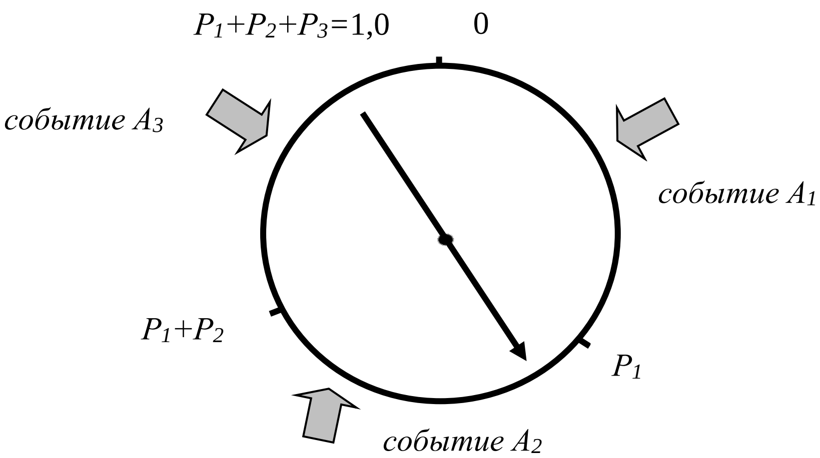

Рис. 4. Разметка шкалы для решения второго вопроса

При любом методе организации единичного жребия должен существовать механизм случайного выбора, позволяющий моделировать случайное событие или случайную величину. Жетоны, механизм с стрелкой, таблицы случайных чисел в качестве механизма случайного выбора не позволяют быстро осуществлять большое количество испытаний. Но достаточно располагать механизмом, вырабатывающим случайные числа в диапазоне от 0 до 1, распределённые по закону равномерной плотности. Такой бесконечный ряд чисел, если бы он был сгенерирован механизмом, называют базовой последовательностью случайных чисел [1, 3].

На электронно-вычислительной машине моделирование такой последовательности чисел обеспечивается датчиком случайных чисел (ДСЧ). Работа датчика, в зависимости от его типа, основывается на преобразовании случайных шумов (физический датчик) или на вычислении случайных чисел по специальному алгоритму (алгоритмический датчик). В результате обращения к датчику случайных чисел вырабатывается одно, заранее неизвестное, значение случайного числа на отрезке [0,1]. При многократном обращении к датчику случайных чисел можно получить частную выборку из базовой последовательности случайных чисел.

а) Моделирование случайных событий

При моделировании в единичном жребии отдельного случайного события *A* (рис. 5), вероятность которого известна и равна *P*(*A*), факт появления события определяется в соответствии с условием: $\eta \leq P(A)$.

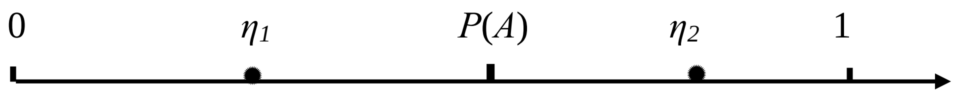

Рис. 5. Схема моделирования случайного события *A*

Если ввести признак появления события A в виде:

$$K_A = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad A \quad \text{произошло} \\ 0, & \text{если} \quad A \quad \text{не} \quad \text{произошло} \end{cases},$$

то моделирование события A осуществляется по схеме:

$$K_A = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad \eta \le P(A) \\ 0, & \text{если} \quad \eta > P(A) \end{cases}. \qquad (5)$$

Моделирование полной группы событий $A_1, A_2, A_3,...A_n$ при известных их вероятностях $P(A_1), P(A_2), P(A_3),...P(A_n)$, когда $\sum_{i=1}^{n} P(A_i) = 1$, сводится к определению в единичном жребии, какое из событий произошло, по рис. 6.

Вырабатывается случайное число $\eta \in [0,1]$ и определяется, в какой из интервалов: $[d_{i-1}, d_i]$ попадает это число, где:

$$d_{i-1} = \sum_{j=1}^{i-1} P_j\,,\ d_i = d_{i-1} + P(A_i)\,. \qquad (6)$$

Алгоритм определения, какое из событий произошло в испытании, показан на рис. 7.

В качестве примера моделирования в единичном жребии случайного события по схеме полной группы событий рассмотрим выполнение инженерным подразделением задачи с использованием путепрокладчика, который может получить повреждение с выходом:

в текущий ремонт - с вероятностью $P(A1) = 0{,}5$;

в средний ремонт - с вероятностью $P(A2) = 0{,}15$;

в капитальный ремонт - с вероятностью $P(A3) = 0{,}2$;

в безвозвратные потери - с вероятностью $P(A4) = 0{,}15$.

Полагая, что путепрокладчик вышел из строя, требуется смоделировать степень его повреждения для определения трудоемкости ремонта. Так, при $\eta=0{,}55$ получим $K_2=1$, т.е. имеет место событие A_2 (выход путепрокладчика в средний ремонт), а при $\eta=0{,}91$ получим $K_4=1$, т.е. произошло событие A_4 (выход в безвозвратные потери). Моделирование зависимых событий может осуществляться по следующей схеме. Пусть известны вероятности $P(A)$ и $P(B)$, а также условная вероятность $P(B/A)$ - вероятность появления события B при условии, что имело место событие A . В этом случае моделирование зависимых событий A и B (рис. 8) осуществляется с помощью двух последовательно реализуемых единичных жребиев: в первом жребии моделируется событие A, во втором – зависимое от него событие B.

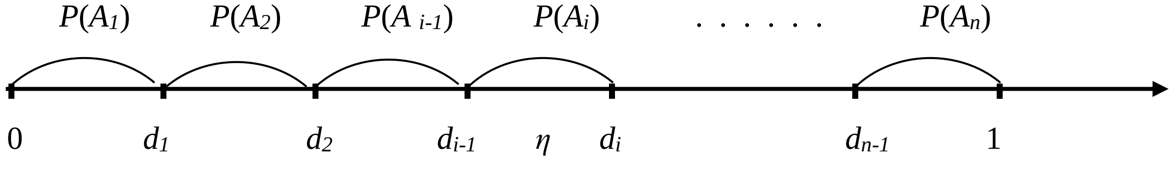

Рис. 6. Схема моделирования полной группы событий

Рис. 7. Алгоритм моделирования полной группы событий

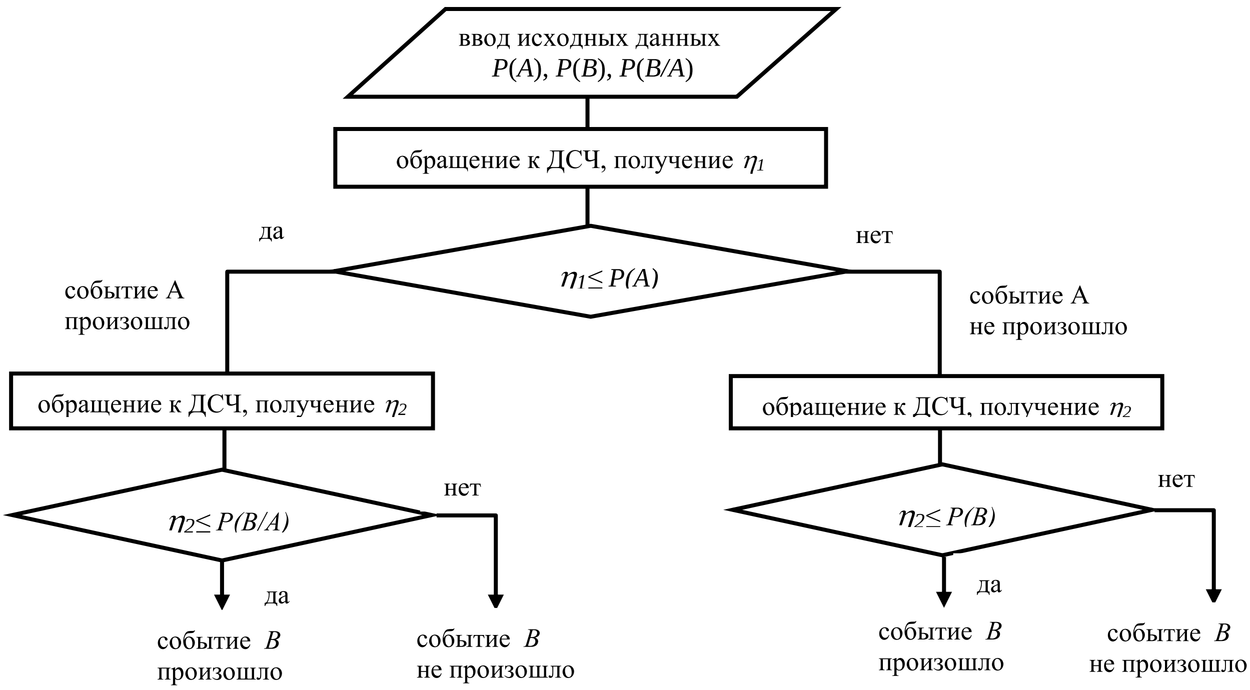

Рис. 8. Алгоритм моделирования зависимых событий

б) Моделирование случайной величины

Моделирование дискретной случайной величины

Допустим, что рассматривается некоторая дискретная случайная величина x, характеризуемая рядом распределения вида (табл. 3):

Таблица 3

Ряд распределения дискретной случайной величины

x_i	x_1	x_2	x_3	. . .	x_n
P_i	P_1	P_2	P_3	. . .	P_n

Принятие дискретной случайной величиной в результате опыта каждого из своих возможных значений происходит с определенной вероятностью. Так, факт принятия случайной величиной x:

значения x_1 - суть событие A_1, вероятность которого $P(A_1) = P_1$;

значения x_2 - суть событие A_2, вероятность которого $P(A_2) = P_2$;

значения x_3 - суть событие A_3, вероятность которого $P(A_3) = P_3$ и т.д.

В результате имеем дело с рядом случайных событий A_1, A_2, A_3,..., A_n, составляющих полную группу (они несовместны и сумма их вероятностей равна 1). Поэтому моделирование дискретной случайной величины сводится к моделированию полной группы событий по алгоритму на рис.7.

Моделирование непрерывной случайной величины.

Моделирование непрерывной случайной величины x осуществляется с помощью преобразующей функции вида:

$$x = \varphi_x(\eta) \; . \tag{7}$$

Функция, которая преобразует случайное число η, имеющее равномерное распределение от 0 до 1, в заданное распределение моделируемой величины x, называется преобразующей функцией. Каждому конкретному закону распределения случайной величины соответствует конкретная преобразующая функция. Кроме того, моделирование случайных величин с заданным законом распределения может осуществляться по методу суперпозиций или предельных теорем теории вероятностей. Более подробно рассмотрим методику моделирования случайной величины с помощью преобразующей функции.

Пусть имеется некоторая непрерывная случайная величина x, которой соответствует функция распределения $F(x)$ (рис. 9) и плотность распределения вероятностей $f(x)$. В теории вероятностей доказывается теорема, в соответствии с которой преобразующая функция вида (7) является функцией, обратной функции распределения случайной величины x с заданным законом распределения, т.е. имеющей функцию распределения F(x). Из теоремы следует, что если приравнять $F(x) = \eta$ и полученное таким образом уравнение

$$\eta = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx, \tag{8}$$

где $\eta = F(x)$, разрешить относительно x, т.е. получить обратную функцию $x=\varphi_x(\eta)$, то при равномерном распределении величины $\eta \in [0,1]$ величина x будет подчиняться закону распределения с функцией плотности распределения вероятностей $f(x)$. Графически это показано на рис. 10.

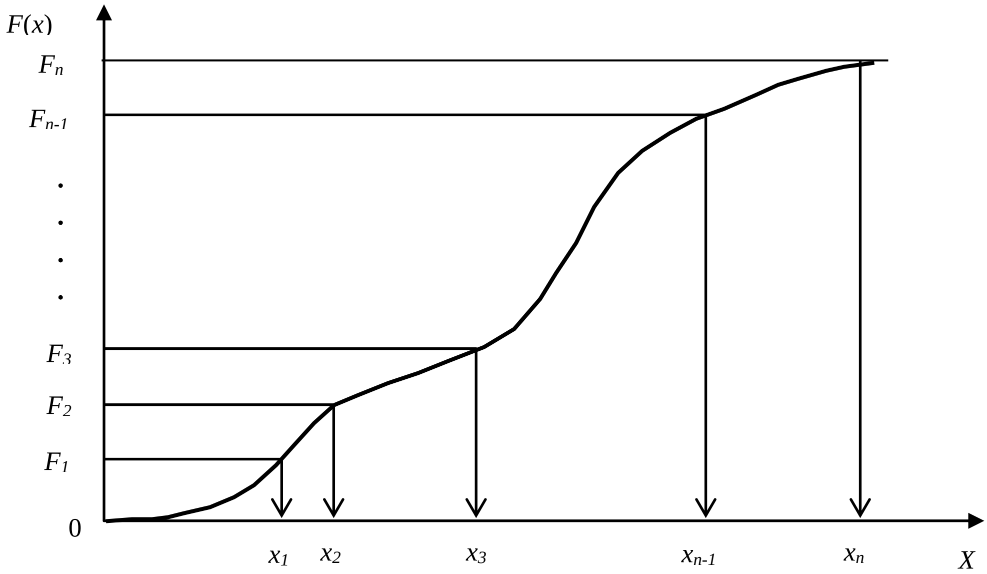

Рис. 9. Функция распределения непрерывной случайной величины X

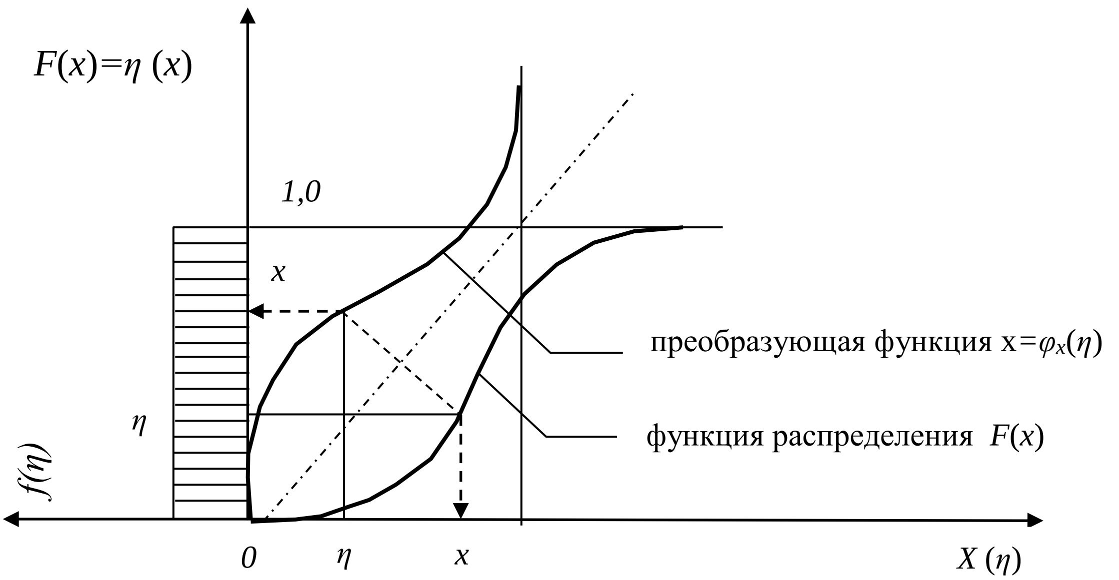

Рис. 10. График функции распределения и преобразующей функции

В ряде частных случаев функции $f(x)$ можно найти аналитическое выражение преобразующей функции $\varphi_x(\eta)$. Рассмотрим некоторые из них.

Для случайной величины x, имеющей равномерное распределение на интервале $[a, b]$, будем иметь:

$$\eta = \int_a^x \frac{1}{b-a}\,dx = \frac{x-a}{b-a}.$$

Разрешив это уравнение относительно x, получим:

$$x = a + (b - a) \times \eta . \tag{9}$$

Аналогично можно получить преобразующую функцию для треугольного левостороннего и правостороннего распределений соответственно:

$$x = a + (b - a) \times \sqrt{\eta} ; \tag{10}$$

$$x = b - (b - a) \times \sqrt{\eta} . \tag{11}$$

В случае экспоненциального распределения случайной величины x с параметром λ:

$$\eta = \int_0^x \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot x} dx = 1 - e^{-\lambda \cdot x} ,$$

откуда, разрешив это выражение относительно x, получим:

$$x = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - \eta) . \tag{12}$$

Аналогом формулы (12) может являться формула:

$$x = -\frac{1}{\lambda} \ln \eta . \tag{13}$$

В ряде случаев функцию для моделирования случайных величин с заданным законом распределения можно получить на основе суперпозиций законов распределения. Например, известно, что сумма двух случайных величин, распределенных по равномерному закону на интервале [0,1], определяет случайную величину, подчиняющуюся закону Симпсона, т.е. плотность распределения вероятностей этой величины имеет вид равнобедренного треугольника, а формула для моделирования случайных величин, подчиняющихся этому закону, имеет вид:

$$x = a + \frac{b - a}{2} (\eta_1 + \eta_2) , \tag{14}$$

где a и b - границы изменения этой случайной величины.

Для моделирования случайных величин, распределенных по нормальному закону, можно применить следующую зависимость:

$$x = m_x + \sigma_x \cdot \eta_н , \tag{15}$$

где: m_x - математическое ожидание случайной величины x; σ_x - ее среднее квадратическое отклонение; $\eta_н$ - случайное число, вырабатываемое ДСЧ по нормальному закону с параметрами: $m_{\eta_н}$ = 0; $\sigma_{\eta_н}$ = 1.

Для получения последовательности случайных чисел $\{\eta_н\}$ существуют специальные подпрограммы, основанные на применении центральной предельной теоремы теории вероятностей. Так, сумма 5-6 случайных чисел, имеющих равномерное распределение на интервале [0,1], уже дает распределение, близкое к нормальному. Для получения последовательности случайных чисел в случае произвольного закона распределения с заданной функцией распределения вероятностей F(x) используется метод кусочной аппроксимации (рис. 11). Для этого по значению η сначала определяется, в какой из интервалов $[F_к, F_{к+1}]$ попадает это случайное число, а затем вычисляется искомое значение x по формуле:

$$x = x_k + \frac{x_{k+1} - x_k}{F_{k+1} - F_k} \cdot (\eta - F_k). \tag{16}$$

Эта формула получается из подобия треугольника *ABC* и *AB'C'* (рис.11).

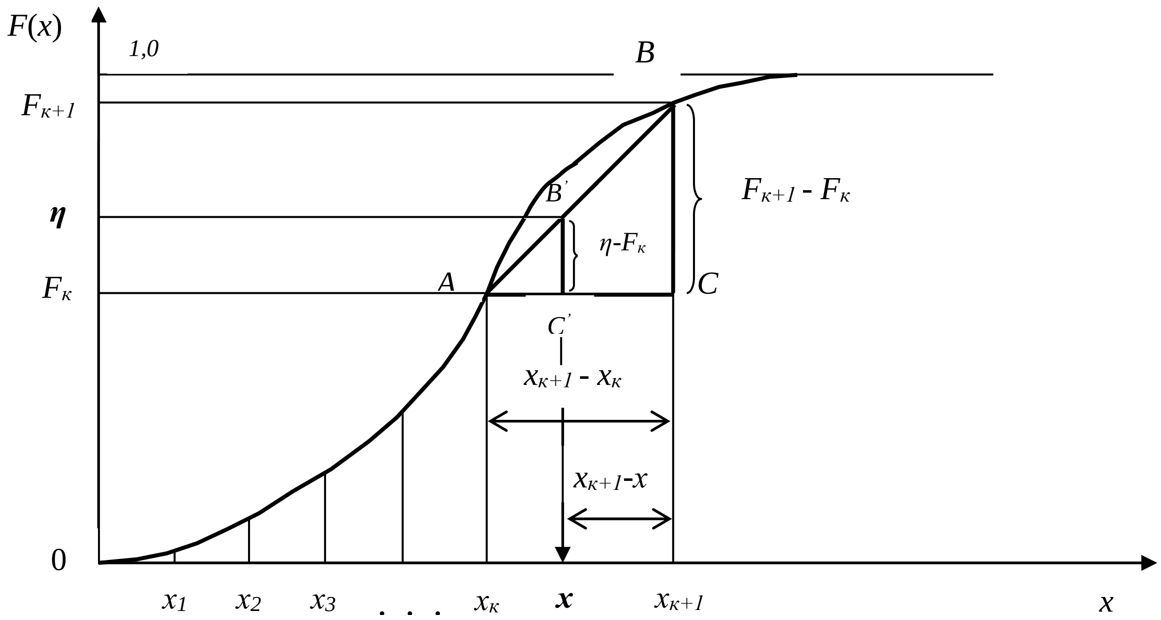

Рис. 11. Кусочная аппроксимация функции распределения

Укрупненная схема статистической модели выполнения задачи

Рассмотрим пример разработки статистической модели в общей, наиболее характерной для инженерных расчётов, постановке. Допустим, разрабатывается статистическая модель выполнения некоторой инженерной задачи. В качестве критерия эффективности принимается время выполнения задачи *T*. Реализацией модели необходимо установить закон распределения этого времени, которое представляет собой сумму затрат времени на последовательное выполнение *m* отдельных работ (операций).

Продолжительность каждой работы t_j - случайная величина, закон распределения которой известен. При этом считается, что условия выполнения отдельных работ учитываются этими законами. Задача может быть решена следующим образом: проводится серия из n реализаций. В каждой i-той реализации с помощью ДСЧ и соответствующих преобразующих функций моделируются продолжительности работ t_1, t_2, t_3, ..., t_m. Реализация завершается вычислением общего времени выполнения задачи:

$$T_i = \sum_{j=1}^{m} t_j \, .$$

По окончании реализаций получим статистику этого времени в виде массива значений $T(1 \div n)$. Обработав её с использованием известных методов математической статистики, получим закон распределения времени выполнения задачи T в виде гистограммы. Алгоритм задачи представлен в виде, показанном на рис. 12.

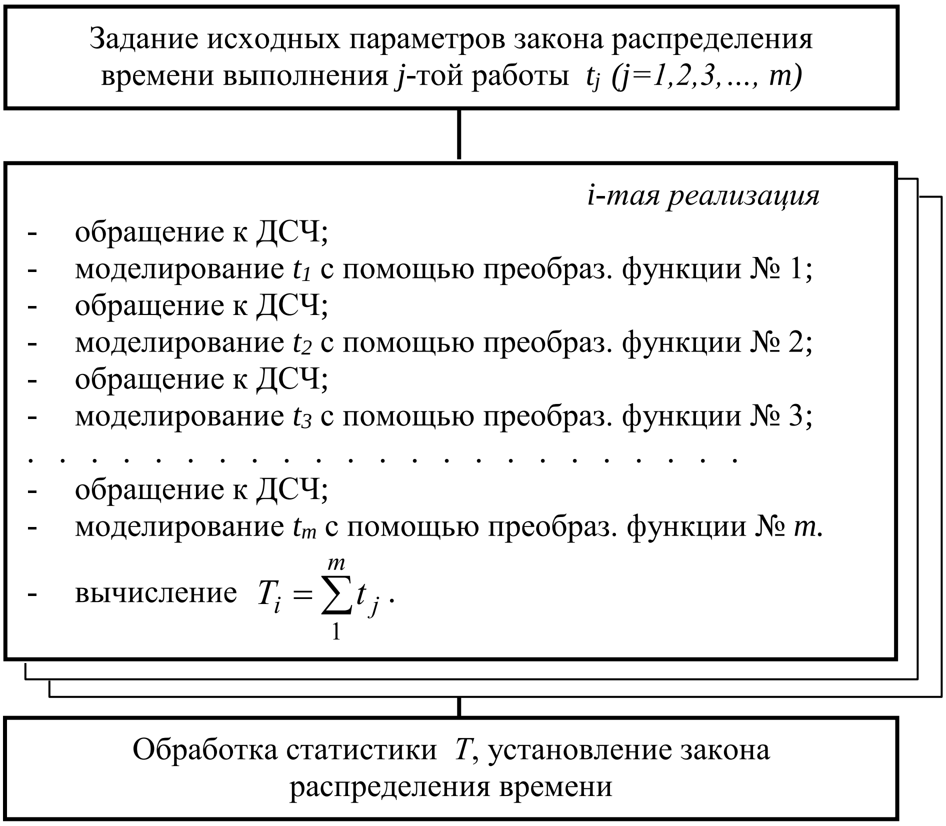

Рис. 12. Укрупненный алгоритм задачи

Оценка точности и необходимого числа реализаций

Применение метода Монте-Карло при моделировании связано с оценкой точности получаемых результатов и определением необходимого количества реализаций N: сколько их должно быть проведено, чтобы получаемые в результате реализаций характеристики отвечали заданной точности.

В результате моделирования процесса могут быть получены следующие его характеристики: статистическая вероятность некоторого случайного события A, равная P^*; статистические числовые характеристики некоторой случайной величины X. Кроме того, если в результате каждой реализации получается значение X_i некоторой случайной величины X, то по завершении всех N реализаций получим частную статистическую выборку этих значений $\{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n\}$. Путем ее обработки можно получить статистический закон распределения оцениваемой случайной величины. Для решения вопроса об оценке точности результатов и определении необходимого количества реализаций используют приведенные ниже методики [1].

Оценка точности статистической вероятности и определение необходимого числа реализаций

Если по завершении N реализаций получилась статистическая вероятность случайного события A, равная P^*, то истинная его вероятность практически будет лежать в пределах доверительного интервала, границами которого являются P_1 и P_2 :

$$P_1 = P^* - \Delta; \tag{17}$$

$$P_2 = P^* + \Delta; \tag{18}$$

где: Δ - максимально возможная ошибка:

$$\Delta = 2\sqrt{\frac{P^*(1-P^*)}{N}}. \tag{19}$$

Если максимально возможная ошибка Δ превышает заданную $\Delta_{зад}$, то для выполнения условия $\Delta \le \Delta_{зад}$ необходимо увеличить количество реализаций N как минимум до $N_{треб}$:

$$N_{треб} = \frac{4 \cdot P(1-P)}{\Delta^2_{зад}}, \tag{20}$$

где: P - искомая вероятность события A, в качестве которой может быть принята P^* из оцениваемой серии реализаций.

Пример. В результате 200 реализаций получена статистическая вероятность выполнения задачи инженерного обеспечения в установленные сроки: $P^* = 0{,}6$. Определить максимально возможную ошибку и границы доверительного интервала.

Решение. Максимально возможная ошибка вычисляется по формуле:

$$\Delta = 2 \cdot \sqrt{\frac{0{,}6 \cdot (1-0{,}6)}{200}} = 0{,}069 \cdot$$

Истинная вероятность будет лежать в пределах между P_1 и P_2,:

$P_1 = 0{,}6 – 0{,}069 = 0{,}531;$
$P_2 = 0{,}6 + 0{,}069 = 0{,}669.$

Если принять за максимально допустимую ошибку $\Delta_{зад} = 0{,}05$, то для её непревышения придётся увеличить количество реализаций N до $N_{треб}$:

$$N_{треб} = \frac{4 \cdot 0{,}6 \cdot (1-0{,}6)}{0{,}05^2} = 384 \text{ (реализации).}$$

Оценка точности статистического среднего и определение необходимого количества реализаций

Если по завершении N реализаций получены частная статистическая выборка значений случайной величины X в виде $\{x_1, x_2, x_3, \ldots x_n\}$ и статистическое среднее m_x^*, то значение математического ожидания случайной величины X будет лежать в пределах доверительного интервала с границами:

$$m_1 = m_x^* - \Delta, \tag{21}$$

$$m_2 = m_x^* + \Delta \ , \tag{22}$$

где: $m_x^* = \dfrac{1}{N} \sum\limits_{i=1}^{N} x_i$,

Δ - максимально-возможная ошибка:

$$\Delta = \frac{2}{\sqrt{N}} \cdot \sqrt{D_x^*} \tag{23}$$

где: D_x^* - статистическая дисперсия величины X:

$$D_x^* = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_i^2 - (m_x^*)^2 \ . \tag{24}$$

Если максимально-возможная ошибка Δ превышает заданную $\Delta_{зад}$, то для выполнения условия $\Delta \le \Delta_{зад}$ количество реализаций N необходимо увеличить до $N_{треб}$, определяемого по формуле:

$$N_{треб} = \frac{4 \cdot D_x}{\Delta_{зад}^2}, \tag{25}$$

где: D_x - дисперсия случайной величины, в качестве которой может быть принята статистическая дисперсия D_x^*, определяемая на основе оцениваемой серии из N реализаций по формуле (24).

Пример. В результате 400 реализаций получена статистическая выборка времени возведения сооружения (час) в виде $\{t_1, t_2, t_3, \ldots t_{400}\}$.

Статистическое среднее значений составит, час:

$$m_t^* = \frac{1}{400} \sum_{i=1}^{400} t_i = 2{,}2 \, .$$

Статистическое среднее квадратов этих значений составит, час^2:

$$C = \frac{1}{400} \sum_{i=1}^{400} t_i^2 = 5{,}02 \, .$$

Статистическая дисперсия, час^2, определяется по формуле (24):

$$D_t^* = C - (m_t^*)^2 = 5{,}02 - 2{,}2^2 = 0{,}18 .$$

Требуется определить максимально-возможную ошибку при N=400 реализаций, чтобы эта ошибка не превосходила заданную $\Delta_{\text{зад}}$ = 0,01.

Решение. Максимально возможная ошибка вычисляется по формуле (23):

$$\Delta = \frac{2}{\sqrt{400}}\sqrt{0{,}18} = 0{,}043 \text{, т.е. } \mathit{\Delta} > \mathit{\Delta}_{зад}$$

Для достижения $\mathit{\Delta} \le \Delta_{зад}$ необходимо увеличить число реализаций до $N_{треб}$, вычисляемого по формуле (25):

$$N_{треб} = \frac{4 \cdot 0{,}18}{0{,}01^2} = 7200 .$$

Метод статистических испытаний находит широкое применение в различных областях научной, инженерно-технической и конструкторской деятельности человека. Исследование сложных процессов боевой деятельности спасательных подразделений с помощью статистических моделей позволяет выявить закономерности их развития, оценивать эффективность выполнения задач, что необходимо при обосновании принимаемых решений. В статье изложены основные теоретические положения метода и показаны некоторые способы его реализации.

Литература

1. Егоров Л.А., Зеленцов С.Г., Колибернов Е.С., Лимно А.Н. и др. Исследование операций: учебник / под ред. Юркова Б.Н. – М.: Военно-инженерная академия. - 1990. – 529 с.
2. Чуев Ю.В. Исследование операций в военном деле. - М.: Воениздат - 1970. – 256 с.
3. Егоров Л.А. Статистическое моделирование процессов выполнения военно-инженерных задач. - М.: ВИУ. - 2000.
4. Седнев В.А., Седнев А.В. Оценка эффективности инженерного обеспечения действий спасательных формирований. Проблемы безопасности и чрезвычайных ситуаций. - 2020. № 6. С. 107-126.
5. Седнев В.А., Седнев А.В. Основы математического моделирования инженерного обеспечения действий спасательных формирований. Научно-аналитический журнал Вестник Санкт-Петербургского университета Государственной противопожарной службы МЧС России. - 2020. № 4. С. 132-138.
6. Седнев В.А., Войтович А.А. Обоснование исходных данных для разработки решений по защите территорий от катастрофического затопления в результате стихийного бедствия или повреждения гидротехнического сооружения. Гидротехническое строительство. - 2020. № 12. С. 53-57.
7. Войтович А.А., Седнев В.А. Анализ зон и причин наводнений и возможного катастрофического затопления на территории Дальневосточного федерального округа и Хабаровского края. В книге: Гражданская оборона на страже мира и безопасности. Материалы III Международной научно-практической конференции, посвященной Всемирному дню гражданской обороны. В 3-х частях. Часть II. - 2019. С. 60-65.
8. Аляев П.А., Седнев В.А. Требования к профессиональной подготовке специалистов пиротехнических подразделений МЧС России и существующей системы их подготовки. В книге: Чрезвычайные ситуации: теория и практика. Материалы Международной научно-практической конференции курсантов (студентов), магистрантов, адъюнктов (аспирантов). - 2015. С. 113-114.
9. Аляев П.А., Седнев В.А. Сравнительный анализ задач, возложенных на специалистов пиротехнических подразделений спасательных воинских формирований МЧС России и решаемых ими. В книге: Чрезвычайные ситуации: теория и практика. Материалы Международной научно-

практической конференции курсантов (студентов), магистрантов, адъюнктов (аспирантов). - 2015. С. 112-113.

10. Седнев В.А., Воронов С.И., Смуров А.В. Оценка риска, ущерба и экологической безопасности чрезвычайных ситуаций на объектах энергетики. В сборнике: Эколого-ориентированное управление рисками и обеспечение безопасности социально-экономических и общественно-политических систем и природно-техногенных комплексов. Сборник материалов круглого стола. Государственный университет управления. С. 128-135.

11. Седнев В.А., Копнышев С.Л., Седнев А.В. Исследование этапов процесса и обоснование математической модели расширения сферической полости в грунтах и горных породах. Устойчивое развитие горных территорий. Т 12, №2 (44). - 2020. С. 302-314.

12. Sednev V.A., Kopnyshev S.L., and Sednev A.V. Estimation of the Penetration Depth of an Impactor with a Hemispherical Head Part into a Semi-Infinite Medium When Penetrated Along the Normal to the Surface. Journal of Machinery Manufacture and Reliability. - 2020, Vol. 49, No. 8, pp. 659–666. DOI 10.3103/S1052618820080130

13. Наставление по организации и технологии ведения АСДНР при чрезвычайных ситуациях. Часть 3. Организация и технология ведения АСДНР при наводнениях и катастрофических затоплениях местности. - М. ВНИИ ГОЧС. - 2001. 166 с.

14. Седнев А.В. Особенности информационно-аналитического обеспечения принятия решений в территориальных органах управления. В книге: Гражданская оборона на страже мира и безопасности. Материалы V Международной научно-практической конференции, посвященной Всемирному дню гражданской обороны. В 4-х частях. Ч. III. Проблемы предупреждения и ликвидации чрезвычайных ситуаций. - 2021. 302 с. С. 283-293.

15. Седнев В.А. Техноценологические методы построения и управления развитием многоуровневых систем. Монография. Москва. - 2019. 2-е изд., перераб. 205 с.

16. Безопасность России. Правовые, социально-экономические и научно-технические аспекты. Научные основы техногенной безопасности. Научный руководитель Махутов Н.А. – М.: МГОФ «Знание». - 2015. – 936 с.

17. Кудрин Б.И., Седнев В.А., Седнев А.В. Об энергетической безопасности страны и научной картине мира. Промышленная энергетика. - 2019. №8. С. 44-48.

18. Седнев А.В., Седнев В.А., Кошевая Е.И. Факторы, влияющие на организацию защиты населения при применении вооруженной силы иностранным государством. В книге: Гражданская оборона на страже мира и безопасности. Материалы IV Международной научно-практической конференции, посвященной Всемирному дню гражданской обороны. В 3-х частях. - 2020. Ч. 1. 294 с. С. 270-277.

19. Седнев В.А., Седнев А.В., Онов В.А. Критерии эффективности инженерного обеспечения действий спасательных формирований. Научно-аналитический журнал Вестник Санкт-Петербургского университета Государственной противопожарной службы МЧС России. - 2020. № 4. С. 51-61.

20. Седнев В.А. Основные критерии оценки эффективности действий спасательных формирований. Пожары и чрезвычайные ситуации: предотвращение, ликвидация. - 2020. № 4. С. 51-57.

21. Седнев В.А., Седнев А.В., Онов В.А. Критерии эффективности задач инженерного обеспечения действий спасательных формирований. Научно-аналитический журнал Вестник Санкт-Петербургского университета Государственной противопожарной службы МЧС России. - 2020. № 3. С. 53-58.

22. Седнев В.А., Седнев А.В., Онов В.А. Методы построения обобщенных критериев эффективности инженерного обеспечения действий спасательных формирований. Научно-аналитический журнал Вестник Санкт-Петербургского университета Государственной противопожарной службы МЧС России. - 2020. № 2. С. 46-51.

23. Седнев В.А., Седнев А.В., Онов В.А. Системный подход к оценке эффективности инженерного обеспечения действий спасательных формирований. Научно-аналитический журнал Вестник Санкт-Петербургского университета Государственной противопожарной службы МЧС России. - 2020. № 1. С. 111-121.

24. Седнев В.А., Смуров А.В. Модели оценки эффективности инженерного обеспечения действий спасательных формирований. Пожары и чрезвычайные ситуации: предотвращение, ликвидация. - 2021. № 1. С. 71-77.

25. Седнев В.А., Седнев А.В. Научно-методические подходы оценки эффективности действий спасательных формирований. В книге: Гражданская оборона на страже мира и безопасности. Ма-

териалы V Международной научно-практической конференции, посвященной Всемирному дню гражданской обороны : в 4 ч. Ч. I. – М.: Академия ГПС МЧС России. - 2021. – 311 с. – С. 196-204.

26. Седнев В.А., Седнев А.В. Научно-методические подходы оценки влияния инженерного обеспечения на выполнение задач спасательными формированиями. В книге: Гражданская оборона на страже мира и безопасности. Материалы V Международной научно-практической конференции, посвященной Всемирному дню гражданской обороны : в 4 ч. Ч. I. – М.: Академия ГПС МЧС России. - 2021. – 311 с. – С. 204-212.

27. Седнев В.А., Седнев А.В. Особенности обобщенных критериев оценки эффективности инженерного обеспечения действий спасательных формирований. В книге: Гражданская оборона на страже мира и безопасности. Материалы V Международной научно-практической конференции, посвященной Всемирному дню гражданской обороны : в 4 ч. Ч. I. – М.: Академия ГПС МЧС России. - 2021. – 311 с. – С. 213-219.

28. Смуров А.В., Седнев В.А., Седнев А.В. Мероприятия по повышению надежности электроснабжения потребителей. В сборнике: Военная безопасность России: взгляд в будущее. Материалы 4-й Международной научно-практической конференции научного отделения № 10 Российской академии ракетных и артиллерийских наук. Москва: Издательство МГТУ им. Н. Э. Баумана. - 2019. Т. 1. С. 294-300.

29. Седнев В.А. Применение и оценка эффективности способов обработки металлов взрывом при выполнении задач в труднодоступных районах Арктического региона. Арктика: экология и экономика. - 2016. № 2 (22). С. 98-106.

30. Седнев В.А. Методика обоснования комплекса средств механизации работ по развертыванию аварийно-спасательных формирований в арктической зоне Российской Федерации. Арктика: экология и экономика. - 2016. № 1 (21). С. 102-112.

31. Соловьев В.О., Седнев А.В., Онов В.А. Универсальный взрывореактивный комплекс для выполнения работ в труднодоступных районах и в чрезвычайных ситуациях. Проблемы управления рисками в техносфере. - 2020. №4 (56). С. 90-94.

32. Исследование проблем безопасности жизнедеятельности / Седнев В.А., Седых Н.И., Лопухова Н.В., Лысенко И.А., Аляев П.А. / Отчет о научно-исследовательской работе. – М.: Академия ГПС МЧС России. - 2015. 345 с.

33. Разработка учебно-методических материалов для проведения практических занятий по дисциплине «Организация защиты населения и территорий от чрезвычайных ситуаций» / Седнев В.А., Кошевая Е.И., Седнев Ан.В., Кошевой В.С. / Отчет о научно-исследовательской работе. - М.: Академия ГПС МЧС России. - 2018. – 261 с.

34. Вентцель Е.С. Исследование операций: задачи, принципы, методология. - 2-е изд. - М.: Наука, 1988. - 208 с. Вентцель Е.С. Исследование операций: задачи, принципы, методология. - 2-е изд. - М.: Наука. - 1988. - 208 с.

35. Исследование операций в экономике: учебник для академического бакалавриата / Н. Ш. Кремер, Б. А. Путко, И. М. Тришин, М. Н. Фридман ; под редакцией Н. Ш. Кремера. - 3-е изд., перераб. и доп. - Москва : Издательство Юрайт. - 2016. - 438 с.

Сведения об авторах

Седнев Владимир Анатольевич, профессор, профессор кафедры защиты населения и территорий учебно-научного комплекса гражданской защиты Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Академия государственной противопожарной службы Министерства Российской Федерации по делам гражданской обороны, чрезвычайным ситуациям и ликвидации последствий стихийных бедствий» (129366, г. Москва, ул. Бориса Галушкина, д. 4), 8 (495) 617-26-83, (926) 531-29-24, e-mail: sednev70@yandex.ru

Седнев Анатолий Владимирович, студент Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)» 105005, г. Москва, ул. 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1, stolya2000@mail.ru