

МОДЕЛИРОВАНИЕ КОНТАКТНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ МЕЖДУ ЭЛЕМЕНТАМИ ПОДЪЕМНОГО ШАХТНОГО КОМПЛЕКСА ПРИ ОЦЕНКАХ БЕЗОПАСНОСТИ

Доктор физ.-мат. наук *М.А. Журавков*, доктор техн. наук *А.В. Богданович*,
Л.А. Шемет, *М.А. Николайчик*, *И.Н. Дембовский*
Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь

Член-корреспондент РАН *Н.А. Махутов*
канд. техн. наук *М.М. Гаденин*, канд. техн. наук *Д.О. Резников*, *О.Н. Юдина*
Институт машиноведения им. А.А. Благонравова Российской академии наук,
Москва, Россия

Рассматривается общая постановка проблем расчетно-экспериментального обоснования безопасности несущих конструкций подъемного шахтного комплекса с использованием методов математического и физического моделирования. Объектом исследования при моделировании выбрана зона экстремального взаимодействия наиболее нагруженных элементов подъемного комплекса – роликов и направляющих проводников. Для моделирования предложены расчетные схемы с переменными граничными условиями для действующих статических, циклических и динамических нагрузок, для изменяющихся форм и размеров зон контактирования, для упругих и пластических деформаций, для стадий образования и развития трещин в зоне контакта. Предложенные расчетные уравнения и их параметры позволяют оценить критические нагрузки, степень износа и долговечность для стадий образования и развития трещин. Предложены направления дальнейших разработок белорусских и российских специалистов, позволяющие перейти к вероятностному обоснованию безопасности по критериям рисков.

Ключевые слова: нагрузка, напряжения, деформации, разрушение, износ, трещины, моделирование, расчетные схемы, определяющие параметры, подъемные шахтные комплексы, сложные технические системы, безопасность.

MODELLING OF CONTACT INTERACTION BETWEEN PARTS OF THE LIFTING MINE COMPLEX AT SAFETY ESTIMATIONS

Dr. (Phys.-Mat.) *M.A. Zhuravkov*, Dr. (Tech.) *A.V. Bogdanovich*, *L.A. Shemet*,
M.A. Nikolaychik, *I.N. Dembovsky*
Belarusian State University, Minsk, Belarus

Corresponding Member of the RAS *N.A. Makhutov*
Ph.D (Tech) *M.M. Gadenin*, Ph.D (Tech) *D.O. Reznikov*, *O.N. Yudina*
The A.A. Blagonravov Mechanical Engineering Research Institute
of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

The general statement of problems of computation and experimental justification of safety of the bearing structures of a lifting mine complex with use of methods of mathematical and physical modeling is considered. As object of research at modeling the zone of extreme interaction of

the most loaded parts of a lifting complex - rollers and the directing conductors is chosen. For modeling computation schemes with variable boundary conditions for service static, cyclic and dynamic loadings, for the changing forms and the sizes of contact zones, for elastic and plastic strains, for stages of initiation and propagation of cracks in a contact zone are offered. The offered computation equations and their parameters allow to estimate critical loadings, degree of wear and a fatigue life for stages of initiation and propagation of cracks. The directions of further workings out of the Belarusian and Russian specialists allowing to pass to probabilistic justification of safety by risks criteria are offered.

Keywords: loading, stresses, strains, fracture, wear, cracks, modeling, computation schemes, key parameters, lifting mine complexes, complex technical systems, safety.

1. Постановка проблемы

Фундаментальные научные исследования и прикладные разработки проблем техногенной безопасности проектируемых, создаваемых и эксплуатируемых сложных технических систем стали приобретать свою выраженную актуальность в последней четверти XX века. Это объяснялось большими человеческими жертвами, выводом из строя важных промышленных и оборонных объектов, а также загрязнением и поражением природной среды при возникновении аварий и катастроф. Для оценки, обоснования и повышения комплексной безопасности были сформированы и приняты научно-исследовательские программы и проекты национального и международного уровня. Одной из таких программ, разрабатывавшихся с 1990-1991 гг., стала Государственная научно-техническая программа СССР и Российской Федерации «Безопасность населения и народнохозяйственных объектов с учетом риска возникновения природных и техногенных катастроф». Результаты исследований и разработок по ней начали публиковаться с 1998 г. и продолжают по настоящее время в многотомном издании «Безопасность России. Правовые, социально-экономические и научно-технические аспекты». Обобщение данных первых 50 томов нашло отражение в сводном томе [1], а проблем промышленной безопасности – в [2].



Рис. 1. Принципиальная схема исследований и разработок с применением моделирования для обоснования безопасности

В соответствии с полученными результатами большинство отказов, аварий и катастроф сложных технических систем связывалось с разрушениями их несущих элементов в процессе эксплуатации, обусловленными нарушением условий и критериев конструкционной прочности, ресурса и трещиностойкости. Для решения задач обеспечения безопасности по системе критериев прочности, ресурса и трещиностойкости существенное значение имело физическое и математическое моделирование сложных процессов деформирования, повреждения, износа и разрушения.

Актуальность методов моделирования резко повышалась, когда возрастала ответственность и потенциальная опасность объектов.

На протяжении многих десятилетий разработка методов такого моделирования для обоснования безопасности была предметом научно-технического взаимодействия ведущих специалистов России и Беларуси, их академических и отраслевых институтов, вузов, конструкторских и технологических бюро. Принципиальная структурная схема обоснования безопасности ответственных объектов и сложных технических систем представлена на рис. 1.

Ниже приведена методология моделирования объектов и опасных процессов для обоснования безопасности высокорискового подъемного шахтного комплекса, разрабатываемого совместно с белорусскими и российскими специалистами.

2. Формирование расчетных схем и расчетных случаев

Шахтные подъемные комплексы, предназначенные для вертикального и наклонного спуска-подъема персонала, оборудования, подъема руды, представляют собой важный элемент горнодобывающего предприятия с подземным способом разработки месторождения полезного ископаемого. Подъемные комплексы (рис. 2), включающие механизмы привода, подъемные камеры, сосуды, кабины, направляющие движения, тросовые и цепные тяги – это сложные инженерно-технические системы, эффективность, надежность и безопасность работы которых обеспечивается, в том числе, и решением большого числа трудоемких научно-технических задач, которые относятся к различным разделам механики.

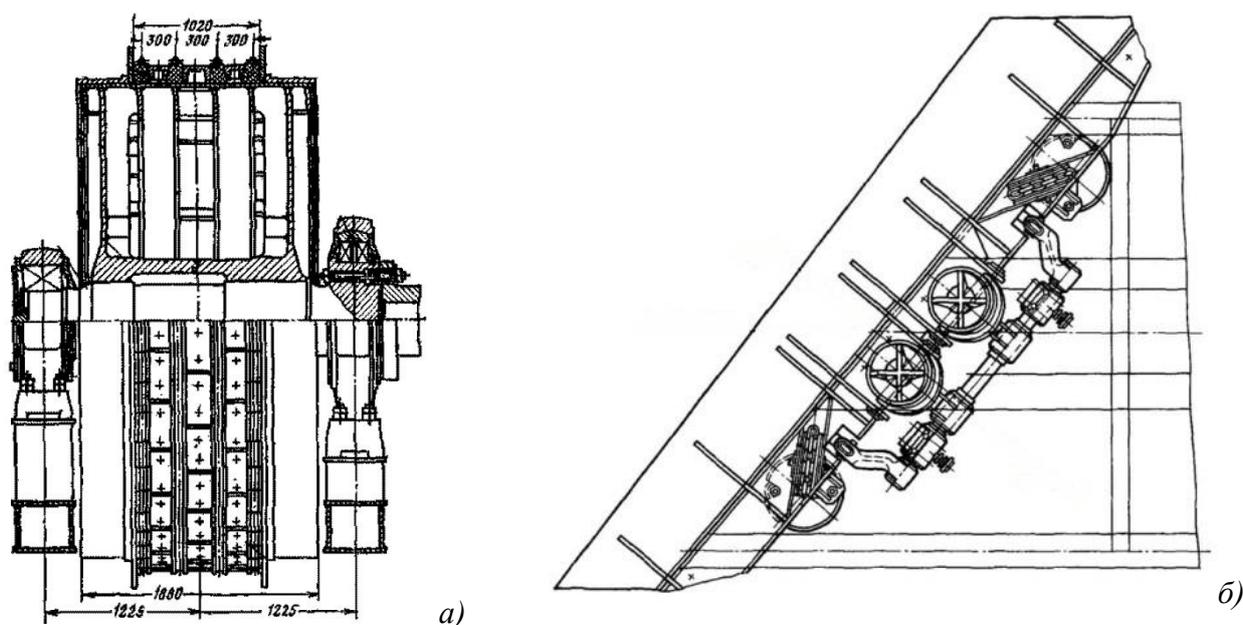


Рис. 2. Конструктивные схемы шахтного вертикального (а) и наклонного (б) подъема

Из большого набора таких задач рассмотрим конкретный тип: исследование напряженно-деформированного состояния контактной группы «ролики подъемного сосуда – направляющие проводники» при многоцикловых режимах движения подъемного сосуда.

Моделирование полного цикла движения шахтного подъемного сосуда представляет собой сложную и к настоящему времени до конца не решенную комплексную задачу. Сложность данной проблемы обусловлена несколькими факторами. Среди них, в первую очередь, многоэлементностью подъемного комплекса (подъемные сосуды, направляющие проводники, металлоконструкции, армировка ствола, сеть канатов и другие элементы) и многовариантностью (с фактором вероятного характера) режима движения подъемных сосудов. В качестве примера можно привести построение механико-математической модели для описания процесса движения шахтного подъемного сосуда, позволяющей определять величины силового взаимодействия подъемного сосуда с направляющими проводниками в реальном режиме времени [3].

Одним из важных конструктивных элементов, отвечающим в итоге за безаварийное движение подъемного сосуда, является контактная группа «ролики подъемного сосуда – направляющие проводники». На рис. 3 приведен пример одного из возможных конструктивных решений практического исполнения такой контактной группы.

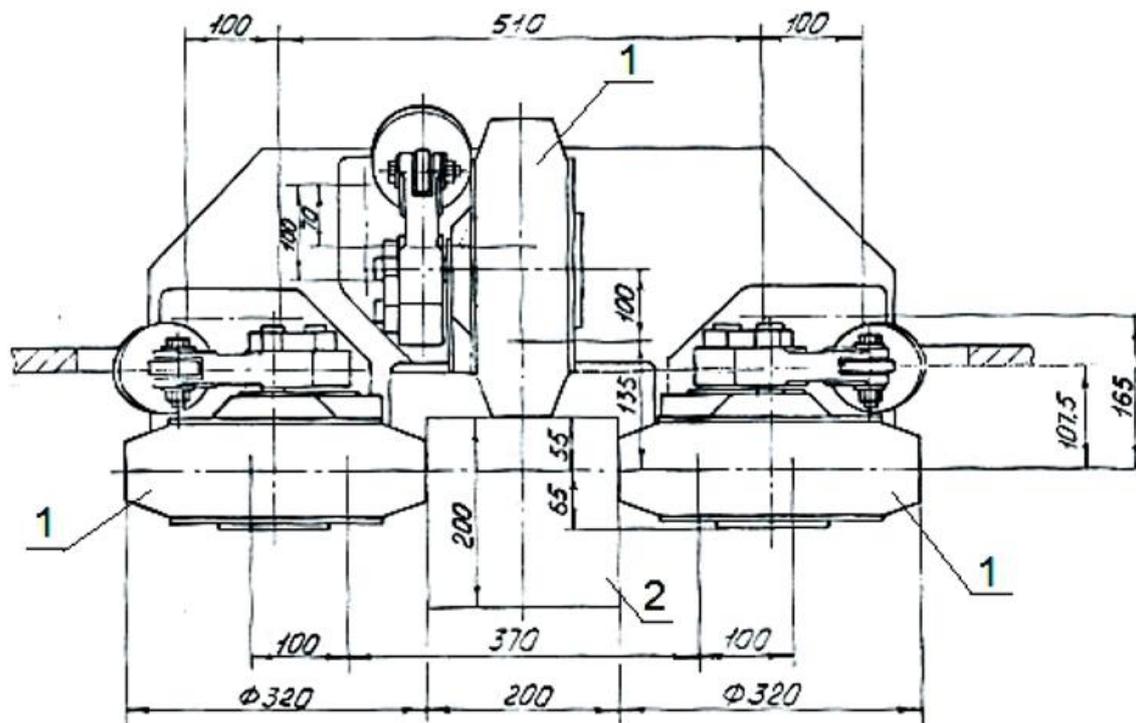


Рис. 3. Конструкция узла «ролики шахтного подъемного сосуда – направляющие проводники»: 1 – ролики; 2 – направляющая

Актуальной является проблема построения механико-математических моделей, которые могут быть использованы для исследования контактного взаимодействия роликов скипа с направляющими проводниками при различных типах движения подъемного сосуда. Рассмотрим некоторые модельные задачи, имитирующие различные режимы взаимодействия роликов с направляющими проводниками.

3. Базовые модельные контактные задачи для исследования контактного взаимодействия роликов скипа с направляющими проводниками

В качестве материала для изготовления роликов в настоящее время чаще всего используются различные композиционные материалы, которые по своим механическим характеристикам близки к резиноподобным материалам. Топология роликов близка к тору. Поэтому ролики можно моделировать как упругие торообразные тела, находящиеся в условиях переменчивого режима многоциклового нагружения.

Направляющие проводники представляют собой металлический профиль. При взаимодействии с роликами проводники испытывают контактное взаимодействие различного характера.

Так как подъемный сосуд вместе с полезным грузом имеет значительный вес, то ролики и направляющие проводники при его движении испытывают активное контактное взаимодействие. В зоне силового контакта роликов и направляющих проводников, особенно при продолжительной эксплуатации конструктивных элементов, возникают местные упругопластические деформации. Для анализа штатных и нештатных воздействий, номинальной и локальной напряженности, процессов износа и усталости, приводящих к повреждениям, отказам и разрушениям, в процессе моделирования последовательно решается ряд задач.

1. Так как область контактного взаимодействия ролика и проводника достаточно малы, то в качестве модельной задачи можно рассмотреть задачу о силовом контакте упругого сферического тела (ролик) с плоской поверхностью упругопластического контртела, деформирующегося с упрочнением (направляющий проводник).

Как базовое, нами было рассмотрено решение, предложенное в [4]. На начальном этапе нагружения контртело испытывает упругую деформацию. Поэтому можно принять, что на этой стадии компоненты НДС элементов сферы и контртела в зоне контакта описываются решением Герца. Сближение δ_0 двух тел на данной стадии принимается, согласно [5], в виде следующей степенной функции

$$\delta_0 = kP^{2/3} \quad (1)$$

При возрастании контактной нагрузки и при достижении ею некоторой предельной величины $P \approx P_{кр}$ в контртеле в области контакта возникают пластические деформации, поэтому зависимость Герца нарушается. В соответствии с этим, после снятия нагрузки упругое смятие сферы исчезает, а общее сближение тел уменьшается на величину δ_y контртела и становится равной $\delta_{пл}$. С появлением на поверхности контакта остаточной вмятины упругие деформации и в дальнейшем подчиняются зависимостям теории упругости. Однако, очевидно, что при этом классические «обычные» формулы теории упругости должны быть скорректированы в соответствии с новыми условиями контакта. Принципиальное отличие этих условий от условий чисто упругого контакта тел состоит в том, что при наличии остаточной вмятины сфера радиусом R находится в контакте уже не в точке, а с поверхностью остаточной вмятины, радиус кривизны которой принимается равным R_1 .

В [4] предложено поправку к формуле Герца с учетом влияния пластической деформации контртела в зоне контакта рассчитывать по следующему выражению [6]

$$\Omega = \left(1 + \frac{2\delta_{пл}}{\delta_y}\right), \quad (2)$$

где δ_y – упругая составляющая полного сближения; $\delta_{пл}$ – пластическая составляющая полного сближения.

В результате для упругой составляющей полного сближения имеет место следующая зависимость [7]

$$\delta_y = \frac{\delta_0}{\Omega}. \quad (3)$$

Здесь δ_0 – сближение тел при наличии только упругой деформации, определяемой по выражению (1).

Важно, что зависимость (3) удобно использовать при рассмотрении прикладных задач. При этом данное уравнение может быть решено методом последовательных приближений.

Величина полного сближения при упругопластическом контакте сферы с контртелом состоит из двух слагаемых: остаточного сближения δ_{nl} , равного глубине остаточного отпечатка, и упругого сближения δ_y , исчезающего со снятием нагрузки вследствие упругого восстановления сферы и контртела, т.е.

$$\delta = \delta_y + \delta_{nl} \quad (4)$$

Второе слагаемое в (4) может быть найдено из следующего соотношения [6]:

$$\delta_{nl} = \frac{P - P_{кр}}{2\pi RH}, \quad (5)$$

где P – текущая нагрузка; $P_{кр}$ – критическая нагрузка, соответствующая появлению в контакте первых пластических деформаций; H – предельная твердость, которая связана с пределом текучести соотношением $H = C_1 \sigma_m$; C_1 – коэффициент стеснения, характеризующий величину упрочнения материала, σ_m – предел текучести контртела.

Для критической нагрузки предлагается использовать выражение, аналогичное по структуре формуле Мейера [8]

$$P_{кр} = \pi H \frac{a_{кр}^{-m}}{R^{m-2}} \quad (6)$$

где m – показатель упрочнения материала; $a_{кр}^{-m}$ – критическая величина радиуса отпечатка, при которой в контакте начинают появляться первые пластические деформации

$$a_{кр}^{-m} = \frac{\pi}{2} K \lambda \sigma_m R. \quad (7)$$

Здесь $K = \frac{1-\nu^2}{E}$, E, ν – соответственно, упругая постоянная, нормальный модуль

упругости и коэффициент Пуассона; λ – коэффициент, связывающий среднее давление в области контакта в момент появления первых пластических деформаций с пределом текучести материала (в зависимости от принятой гипотезы пластичности Мизеса или Треска).

Рассмотренная модельная задача позволяет рассчитать полное сближение при упругопластическом контакте в случае статического нагружения.

Описанная процедура решения модельной задачи представляется перспективной для рассматриваемой прикладной задачи, так как приведенные формулы модельной задачи включают ряд параметров, устанавливаемых в результате экспериментальных исследований, учитывающих свойства и априорно геометрические параметры контактируемых тел. То есть, воспользовавшись общей технологией решения модельной задачи и взяв за базовые структуру основных выражений, можно решать прикладные задачи применительно к контактной группе «ролики – направляющие проводники» в случае движения подъемного сосуда с постоянной скоростью.

2. Режим движения подъемного сосуда не всегда представляет собой установившееся движение по направляющим проводникам с постоянной скоростью. На каждом цикле «спуск-подъем» присутствуют участки с отклонением движения сосуда от прямолинейного и возникновением ударных динамических нагрузок со стороны сосуда на проводники, а, следовательно, динамических нагрузок в контактной группе «ролики – направляющие проводники». Рассмотрим развитие предыдущей модельной задачи применительно к ситуации динамического воздействия нагрузок при контакте двух тел, а именно, задачу о соударении упругой гладкой сферы (ролик) с гладкой упругопластической поверхностью (проводник).

Как и в предыдущем случае, используем решение, построенное в [4]. В течение активного периода соударения сфера внедряется в поверхность контртела. Так как по условию задачи сфера деформируется чисто упруго, то сближение тел в произвольный момент времени $0 \leq t \leq t^*$, обусловленное только местной (т.е. контактной) деформацией тел, определяется выражением (4).

Уравнение движения сферы имеет вид

$$\frac{d^2 \delta}{dt^2} = \frac{1}{m} P(\delta), \quad (8)$$

где m – масса сферы; P – текущее значение силы удара, возрастающее непрерывно от нуля до P^* в течение периода $0 \leq t \leq t^*$; при этом соответственно $0 \leq \delta \leq \delta_{\max}$.

Как известно (см., например, [5]), при чисто упругом контактном соударении тел сближение δ связано со значением силы удара зависимостью Герца

$$P(\delta) = k \delta^{3/2}, \quad (9)$$

где k – постоянная, зависящая от радиуса кривизны сферы и упругих свойств материалов соударяющихся тел.

Очевидно, что с возникновением местной пластической деформации указанная зависимость (9) нарушается. Вследствие этого для рассматриваемого общего случая предлагается соотношение [4]

$$P(\delta) = Z \delta^{n_m}. \quad (10)$$

Соотношение (10) по своей структуре аналогично выражению (9), но отличается от него смыслом и значениями коэффициента Z и показателя n_m . При этом полагается, что на протяжении всего периода t^* постоянные Z и n_m остаются неизменными, зависящими от диаметра сферы и являются функциями упругих свойств материалов сферы и контртела, а также твердости последнего. С увеличением твердости значения Z и n_m возрастают. В пределе, для чисто упругого контакта $n_m=3/2$, что соответствует решению Герца.

Решая дифференциальное уравнение (8) с учетом выражения (10) можно расчетным путем определить максимальную силу удара, максимальное полное, остаточное и упругое сближения в контакте, а также продолжительность активной стадии соударения t^* при варьировании различных параметров (начальная скорость, твердость материала контртела, диаметр сферы и т.д.).

Таким образом, основные параметры динамического упругопластического контакта сферы с плоскостью могут быть определены расчетным путем с использованием, наряду с параметрами чисто упругого контакта, значений твердости материала как при ударе, так и статическом нагружении.

В работе [3] описан подход к определению динамических нагрузок на проводники. Комбинируя результаты [3] и представленного решения, можно построить эффективный прикладной алгоритм для определения основных параметров реальной контактной группы «ролики-направляющие проводники» при динамическом ударном взаимодействии с учетом упругопластического деформирования проводников в области контакта.

3. Весьма актуальным представляется рассмотрение модельных задач для изучения процесса контактного износа при многоцикловом взаимодействии роликов и проводников.

В зонах контакта конструктивных элементов, где две контактирующие поверхности претерпевают небольшие осциллирующие относительные касательные (тангенциальные) движения при одновременном контакте друг с другом нормальной нагрузкой, зачастую проявляется фреттинг-износ [9-11]. Важная особенность таких контактных задач состоит в том, что вследствие износа происходит изменение конфигурации зоны контакта от начальной геометрии контакта до предельного состояния после того, как процесс изнашивания прекращается.

В работе [12] применительно к процессам накопления повреждений получили развитие решения, предложенные в [13,14]. На базе данного подхода можно построить алгоритм изучения процессов накопления повреждений в области контакта элементов системы «ролик-направляющий проводник» с учетом явления фреттинга. Изложим, опираясь на результаты работы [12], основные элементы предложенного алгоритма.

Одной из особенностей режима частичного фреттинга при проявлении скольжения в области контакта является проявление «предельного состояния», характеризующегося исчезновением контактного давления в зонах скольжения (см., например, [15]). Такая контактная задача с учетом проявления предельного состояния в двумерной постановке была подробно изучена, например, в работах [13, 15]. Тем не менее, до настоящего времени отсутствуют опубликованные работы с простыми приближенными решениями в замкнутой форме ни для задачи об эволюции размеров контактной зоны, ни для задачи накопления областей износа в процессе частичного скольжения, где может быть достигнуто предельное состояние. В работе [12] предложено достаточно простое аналитическое приближение для задачи описания процесса накопления износа в случае частичного скольжения при контакте двух тел. Отметим, что, например, конечно-элементное моделирование процесса деградации области износа в контактной зоне при сотнях тысяч циклов, не всегда вычислительно осуществимо.

В работе [12] разработана простая модель накопления износа, не содержащая установившихся параметров (параметров подгонки), которая верифицирована на основе численных решений. Эволюция значения относительной контактной полуширины $a(N)$ хорошо согласуется с экспоненциальным законом вида

$$a(N) = a_{\infty} - (a_{\infty} - a_0) \exp\left(-\frac{N}{N_1^{\alpha}}\right) \quad (11)$$

Здесь N_1 – параметр, входящий в соотношение, описывающее эволюцию объема износа W от нуля до предельного значения W_∞ [13]

$$W(N) = W_\infty (1 - \exp(-\frac{N}{N_1})) \quad (12)$$

Важным результатом работы [12] является установление того факта, что накопление объема износа в нелинейной контактной задаче с переменной геометрией зоны контакта может быть аппроксимировано относительно простым выражением

$$W(N) = W_\infty (1 - \frac{1 + \alpha(N + N_1)}{1 + \alpha N_1} \exp(-\frac{N}{N_1})) \quad (13)$$

Оно имеет большое практическое значение для прогнозирования износа при фреттинге в условиях режима частичного скольжения, так как не содержит параметров подгонки.

4. Рассмотрим подход к моделированию многоциклового усталости при контактном взаимодействии роликов с направляющими проводниками, описывающий эволюцию зарождения и развития трещин.

При изучении процесса многоциклового усталости принято выделять ряд стадий: зарождения микротрещины, роста микротрещины до размеров макротрещины и роста макротрещины до разрушения [16]. В настоящее время получил распространение подход, согласно которому стадии роста микро- и макротрещины описывают одним и тем же уравнением линейной механики разрушения с одними и теми же параметрами [17].

Базируясь на рассмотренных выше замечаниях, процесс многоциклового усталости в [18] предложено рассматривать как двухстадийный: стадия зарождения микротрещины и стадия роста трещины до разрушения.

$$\frac{d\bar{\Psi}}{dN} = \frac{1}{\varepsilon_p^*} \cdot \Delta\varepsilon_{p0} \exp[-\frac{\Delta F_f}{kT} \cdot (1 - \frac{\sigma_a}{\sigma_{um}})] \cdot H(\sigma_a - \sigma_0), \quad (14)$$

где ΔF_f - энергия активации усталости, k - постоянная Больцмана, T - абсолютная температура, σ_{um} - циклический предел текучести, σ_a - амплитудное напряжение цикла, ε_p^* - критическая величина микропластической деформации [19].

В указанной модели предполагается, что зарождающаяся микротрещина является транскристаллитной и имеет размер l_0 , равный половине характерного размера зерна материала проводника d [19]. При этом модель также позволяет получить функцию распределение длин зародившихся микротрещин. Предполагая, что характерный размер зерна имеет усеченное нормальное распределение [19], и используя теорему об асимптотическом приближении распределения максимума последовательности случайных величин [20], получим выражение для функции распределения длин первых зародившихся в сечении микротрещин (в случае однородного напряженного состояния по сечению элемента конструкции)

$$F_{d_*}(l_0) = \exp[-\frac{1}{b} \exp\{-\gamma_n (\frac{l_0 - a}{\sigma} - \gamma_n)\}], \quad (15)$$

где

$$\gamma_n = \sqrt{2 \ln n}, \quad \gamma_n = \sqrt{2 \ln n} - \frac{\ln \ln n + \ln(4\pi)}{2\sqrt{\ln n}}, \quad a = 0,5d, \quad \sigma = d/6, \quad b = \Phi(a/\sigma),$$

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp[-0,5t^2] dt, \quad n \text{ — число зерен в сечении материала.}$$

Для описания стадии роста трещины воспользуемся кинетическим уравнением [21]

$$\frac{dl}{dN} = C(\Delta K - \Delta K_{th})^q \quad (16)$$

В качестве начального условия в работе [18] принимается длина зародившейся в ходе первой стадии микротрещины. Таким образом, имеется дифференциальное уравнение (16) с начальным условием, являющимся случайной величиной с функцией распределения в виде (15).

Интегрируя указанное уравнение, получаем выражение для числа циклов роста трещины. С учетом предположения о двухстадийности процесса многоциклового усталости, долговечность будет определяться выражением

$$N = N_{zm} + N_{pm} \quad (17)$$

где N_{zm} — число циклов до зарождения первой микротрещины в опасном сечении, определяемое с использованием выражения (14).

Таким образом, пользуясь результатами исследований задач, рассмотренных в пунктах 3 и 4, существует возможность определения долговечности проводника при многоцикловом его нагружении со стороны роликов движущегося скипа.

5. Следующая модельная задача состоит в изучении НДС системы, включающей упругий жесткий индентор в форме тора со сферической рабочей поверхностью (ролик) и упругопластическую среду (направляющие проводники). Размеры и форма упругопластической среды в силу локальности изучаемого процесса принципиального значения не имеют. Силовое воздействие на индентор представим в виде суперпозиции нескольких усилий

$$F(t) = F_0 + F_D(t) + F_v \sin \omega t \quad (18)$$

где F_0 , $F_D(t)$ и F_v , соответственно постоянная и переменные составляющие действующего усилия, t – время.

Таким образом, в выражении (18) присутствуют слагаемые, описывающие воздействие как постоянной нагрузки, так и переменной динамической, что позволяет описать различные виды динамического нагружения (импульсную нагрузку и периодическую, имеющую характер колебаний и т.п.).

Рассмотрим следующие граничные условия: нижняя поверхности Γ_1 рассматриваемой модели жестко закреплена, боковые поверхности внедряемого ролика и проводника Γ_5 и Γ_2 , а также верхняя торцевая поверхности проводника Γ_3 и рабочая поверхности ролика Γ_4 за исключением области контакта Γ_c ($\Gamma_c = \Gamma_3 \cap \Gamma_4$), свободны от внешней нагрузки. С учетом допущения малости упругих и пластических деформаций, а также того, что процесс деформирования является изотермическим, получаем следующее решение контактной задачи

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial \sigma_{rr}^l}{\partial r} + \frac{\sigma_{rr}^l - \sigma_{\theta\theta}^l}{r} + \frac{\partial \sigma_{rz}^l}{\partial z} = \rho \frac{d^2 u_r^l}{dt^2}, \quad \frac{\partial \sigma_{zz}^l}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \sigma_{rz}^l) = \rho \frac{d^2 u_z^l}{dt^2} \quad (l = I, II) \\
 & \sigma_{rr} = \sigma_{r\theta} = \sigma_{rz} = 0 \text{ при } (r, \theta, z) \in \Gamma_2 \text{ и } \Gamma_5. \\
 & \sigma_{zz} = -p(t), \quad \sigma_{rz} = 0 \text{ при } (r, \theta, z) \in \Gamma_6, \\
 & u_z = 0 \text{ при } (r, \theta, z) \in \Gamma_1 \\
 & \sigma_{nn} = \sigma_{n\tau} = 0 \text{ при } (r, \theta, z) \in \Gamma_3 \setminus \Gamma_c \text{ и } (r, \theta, z) \in \Gamma_4 \setminus \Gamma_c, \\
 & \sigma_{nn}^l = \sigma_{nn}^{ll} = 0 \text{ и } \sigma_{n\tau}^l = \sigma_{n\tau}^{ll} = 0 \text{ при } (r, \theta, z) \in \Gamma_c \\
 & u_n^l + u_n^{ll} - \delta \leq 0, \\
 & u_r^l = u_z^l = 0, \quad \frac{du_r^l}{dt} = \frac{du_z^l}{dt} = 0 \text{ при } t = 0,
 \end{aligned} \tag{19}$$

где σ_{ij}^l ($i, j = r, \theta, z$) и $u_i^l = u_i^l(r, z, t)$, ($i = r, z$), ($l = I, II$) – компоненты тензора напряжений и вектора перемещений соответственно; ρ^l ($l = I, II$) – плотность материала направляющего проводника и ролика; t – время; $p(t)$ – равномерно распределенная по верхней поверхности ролика нагрузка, эквивалентная приложенной к нему со стороны скипа сосредоточенной силе

$$F(t) = 2\pi \int_0^{R_1} p(t) r dr \tag{20}$$

Получение точного решения поставленной контактной задачи в силу ее сложности не представляется возможным. Поэтому в [22] была предложена замена исходной задачи ее вариационным аналогом, получаемым на основе принципа Даламбера-Лагранжа.

В результате сложных и громоздких преобразований получаются следующие вариационные соотношения:

$$\begin{aligned}
 \delta \Pi(r, z, t) &= \int_0^{R_2} \int_{\chi_{II}(r,t)}^{h_2} f^{II} r dz dr + \int_0^{R_1} \int_{\chi_I(R_1,t)-h_1}^{\chi_I(r,t)} f^I r dz dr - \int_0^{R_1} \delta v_z^I p r dr + \\
 &+ \int_0^a \frac{1}{n_z^I} \delta (v_n^I + v_n^{II}) \psi(r, z, t) r dr = 0 \\
 \delta \Pi(r, z, t) &= \int_0^{R_1} \int_{\chi_I(R_1,t)-h_1}^{\chi_I(r,t)} f^I r dz dr + \int_0^{R_2} \int_{\chi_{II}(r,t)}^{h_2} f^{II} r dz dr - \\
 &- \int_0^{R_1} \delta v_z^I p r dr + \int_0^a \frac{1}{n_z^I} \delta \lambda (v_n^I + v_n^{II}) r dr \geq 0
 \end{aligned} \tag{21}$$

Данные соотношения являются универсальными, т.к. при их выводе не было наложено каких-либо ограничений на формы деформированных поверхностей индентора (ролика) и среды (проводника).

Возможно проведение дискретизации поставленной задачи контактного взаимодействия в вариационной постановке путем разбиения исследуемой области на конечные элементы. В [22] при использовании метода конечных элементов определение НДС исследуемой области сводится к решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений с использованием метода штрафных функций и смешанной системы из обыкновенных дифференциальных уравнений и алгебраических неравенств, обеспечивающих минимум соответствующих вариационных функционалов.

Предложенная модель может быть широко использована для описания взаимодействия контактной пары скиповой ролик-направляющий проводник, а в качестве ее особого достоинства стоит отметить отсутствие ограничения на форму контактирующих тел, т.е. данный метод может быть использован для шахтных стволов с различным типом направляющих устройств.

б. Перспективным для описания реальных процессов, имеющих место в контактной группе «ролики - направляющие проводники», представляется рассмотрение модельной контактной задачи с учетом возникновения скольжения упругого тела (ролик) по поверхности контртела (проводник) с учетом упругопластических эффектов в последнем. При этом учитывается, что в области движущегося контакта двух тел одновременно реализуются два процесса деформирования материала контртела [23]:

- нагружение контртела со стороны движущегося индентора, в результате чего возникают пластические деформации (пластическое течение) материала и его вытеснение из области контакта с образованием «канавки»;

- упругая разгрузка материала контртела, обуславливающая давление на тыльную поверхность индентора со стороны образующейся на поверхности контртела канавки.

В работах [24, 25] приведены решения контактных задач для случаев скольжения жесткой сферы по поверхности. Используя результаты приведенных выше исследований [23] предлагается рассмотреть следующую задачу.

Упругое тело (ролик) перемещается без учета трения по поверхности упругопластического тела (проводника) под действием нормальной и касательной нагрузок, вызывая возникновение пластических деформаций. Вопрос задачи сводится к определению связи между размерами области упругопластического контакта с величинами нормальной и касательной нагрузок, а также форм тел и их физико-механических свойств.

При решении поставленной задачи представляем контактную пару в виде упругопластического полупространства и упругого индентора с основанием, ограниченным поверхностью эллипсоида с радиусами кривизны в главных нормальных сечениях, равными средним радиусам R_1 и R_2 кривизны обоих тел. Также, полагаем, что скольжение индентора по поверхности контртела осуществляется в направлении малой оси образующейся эллиптической области контакта.

Поставленная задача может быть сведена к моделированию контактного взаимодействия гипотетического индентора с основанием эффективной формы. Форма гипотетического индентора выбирается из расчета, чтобы нормальная и касательная силы вызывали только упругие деформации в контртеле.

Таким образом, решение поставленной задачи сводится к определению радиусов кривизны в главных нормальных сечениях основания гипотетического индентора. При нахождении радиусов кривизны гипотетического индентора удобно использовать метод переменных параметров упругости [26].

Записываем уравнения равновесия, а также граничные условия, применительно к поставленной задаче

$$P = \iint_s p(x, y) ds, \quad Q = \iint_s p(x, y) \frac{\cos(\bar{n}, \bar{y})}{\cos(\bar{n}, \bar{z})} ds;$$

$$\sigma_z = \begin{cases} 0, & z \notin s \\ -p(x, y), & z \in s \end{cases}, \quad (22)$$

где $p(x, y)$ – нормальная нагрузка, действующая на поверхности s полупространства; \bar{n} – нормаль к поверхности основания индентора в точке (x, y, z) области контакта.

Также, необходимо сформулировать условие неразрывности нормальных напряжений в области контакта $\sigma_z|_{y \leq 0} = \sigma_z|_{y \geq 0}$.

Если на некоторой k -ой итерации скольжение гипотетического индентора с радиусами кривизны основания $R_1^{(k)}$ и $R_2^{(k)}$ вызывает пластическое течение материала полупространства, то схема с использованием метода переменных параметров упругости, реализованная в [23], позволяет вычислить $R_1^{(k+1)}$ и $R_2^{(k+1)}$ основания индентора, соответствующие следующему шагу итерационного процесса. При этом предполагается, что нормальная и касательная нагрузки, приложенные к индентору с радиусами кривизны, соответствующие $(k+1)$ -ой итерации, вызывают только упругое деформирования материала без возникновения скольжения индентора.

На некоторой итерации процесса решения поставленной задачи начинается выполнение условия $\varepsilon_i^{(n)} \leq \varepsilon_s$, где $\varepsilon_i^{(n)}$ – деформации области контакта, ε_s – предельное значение упругой деформации. Данную итерацию можно считать конечной для построения скользящего гипотетического индентора, движение которого не вызывает возникновения пластических деформаций в контртеле. На данном этапе возможно определение геометрических характеристик контактной области, а, значит, и определение граничных условий и, как следствие, связь между нормальной и касательной нагрузками.

Результаты, полученные с использованием данного подхода, хорошо коррелируют с более ранними исследованиями [24, 27, 28]. Данный метод хорошо описывает упруго-пластический контакт скиповых роликов с направляющими проводниками, т.к. при движении скипа помимо нормальной нагрузки, действующей на ролик со стороны скипа в горизонтальной плоскости, существуют еще и касательные усилия, возникающие за счет крутящего момента барабана шахтной подъемной установки, что может также приводить к возникновению проскальзывания. Результаты моделирования в данной постановке, могут быть использованы для корректного определения величин пластических деформаций в проводниках, что может способствовать в формулировке рекомендаций по замене звеньев проводников.

7. Важность учета начального (остаточного) напряженного состояния при моделировании процесса динамического контактного взаимодействия тел показана, например, в работах [29-34].

В условиях эксплуатации направляющих проводников в них возникает начальное напряженное состояние, вызванное как заводскими дефектами при производстве профиля, так и особенностями установки направляющих проводников, которые в итоге проявляются как локальные концентраторы напряжений на его поверхности. Кроме того, остаточные напряжения возникают в проводниках за счет действия их собственного веса и веса других конструктивных элементов шахтного ствола.

В частности, работа [34] посвящена моделированию процесса качения упругого цилиндра по упругой полуплоскости с начальными напряжениями, что соответствует схеме контакта ролика с проводником. Задача рассматривается в рамках линеаризованной теории упругости применительно к упругим сжимаемым и несжимаемым материалам в декартовых координатах начального деформированного состояния y_i , которые связаны с лагранжевыми координатами $\lambda_i x_i = y_i$, где λ_i — коэффициенты удлинения, определяющие перемещения начального состояния. Кроме того, предполагается: 1) начальное (остаточное) напряженное состояние в области контакта однородное и выполняется условие: $S_0^{22} = 0$, т.е. полуплоскость считается загруженной вдоль оси Oy_1 ; 2) участок контакта состоит из одного участка скольжения и одного участка сцепления; 3) процесс качения квазистационарный и упругий; 4) область контакта мала по сравнению с линейными размерами тел, а шероховатость их настолько мала, что тела остаются гладкими. При таких предположениях граничные условия принимают вид (в обозначениях $[-a, b]$ — область контакта)

$$\begin{aligned} Q_{22}(y_1) &= \sigma_y(y_1) = -p(y_1); \quad y_1 \in [-a, b] \\ Q_{21}(y_1) &= \tau_{xy}(y_1) = -g(y_1); \quad y_1 \in [-a, b] \\ Q_{22}(y_1) &= \tau_{xy}(y_1) = 0; \quad y_1 \notin [-a, b] \\ u_2 - v &= \frac{1}{2} y_1^2 / R; \quad y_1 \in [-a, b] \quad (R - \text{радиус цилиндра}). \end{aligned} \quad (23)$$

Кроме того, на участке скольжения $y_1 \in [-a, c]$ и сцепления $y_1 \in [c, b]$ имеют место условия вида

$$\begin{aligned} g(y_1) &= f \cdot N(y_1) \quad y_1 \in [-a, c], \\ u_1(y_1) &= u(y_1) \quad y_1 \in [c, b]. \end{aligned} \quad (24)$$

Решение для плоскостей выбирается в виде

$$\begin{aligned} u_1^{(i)}(y_1) &= A_{2i}^{(1)} \frac{1}{2} \int_{-a}^b g(t) \ln \left| \frac{t - y_1}{t + y_1} \right| dt - A_{1i}^{(1)} \int p(t) dt, \\ u_2^{(i)}(y_1) &= -\frac{1}{\pi} A_{1i}^{(2)} \int_a^b p(t) \ln |y_1^2 - t^2| dt + A_{2i}^{(2)} \int_{y_1}^b g(t) dt, \end{aligned} \quad (25)$$

где индексы $i = 1, 2$ определяют, соответственно, верхнюю и нижнюю грани полуплоскости; $A_{1i}^{(1)}$, $A_{2i}^{(1)}$, $A_{1i}^{(2)}$, $A_{2i}^{(2)}$ — коэффициенты, характеризующие вид упругого потенциала.

Удовлетворив граничным условиям (23) и (24) для определения начальных напряжений, на участке скольжения имеет место такое интегральное уравнение [32]

$$\int_{-a}^c p(t) \frac{y_1 dt}{y_1^2 - t^2} + \frac{w}{y_1} g(y_1) = \kappa, \quad y_1 \in [-a, c], \quad (26)$$

где w , κ — коэффициенты, характеризующие начальное напряженное состояние.

Касательные контактные усилия определяются по выражению

$$g(y_1) = 2 \int_c^b p(t) \frac{y_1}{y_1^2 - t^2} dt. \quad (27)$$

В [34] проведен численный анализ интегрального уравнения (26) и показано, что в случае сжимающих начальных напряжений контактные усилия $p(t)$ и $g(t)$ уменьшаются; а в случае растягивающих – возрастают. При достижении $\lambda_1 = \lambda_{кр}$, проявляются резонансные явления, связанные с потерей поверхностной устойчивости. Численный анализ при этом свидетельствует о значительном влиянии начальных напряжений на процесс качения.

Использование метода, предложенного в [34], перспективно использовать для уточнения значений величин напряжений, возникающих в проводниках в области контакта с упругими роликами.

4. Заключение

Для обоснования безопасности по схеме рис. 1 ответственных и опасных подъемных шахтных систем (рис. 2, 3) необходимо использовать комплексный расчетно-экспериментальный анализ прочности, ресурса, износостойкости и трещиностойкости элементов, испытывающих контактные воздействия с переменными граничными условиями. Возникновение сочетаний статических, циклических и динамических нагрузок в зонах контактирования, износа, возникновения и развития трещин сопровождается изменением размеров и форм зоны контакта, что в свою очередь изменяет экстремальные контактные напряжения. Такой кинетический анализ требует использования как классических контактных задач теории упругости, так и задач образования и накопления местных пластических деформаций. Решение таких задач с использованием результатов работ [5-36] осуществляется методами математического и физического моделирования напряженно-деформированных состояний роликов и направляющих проводников по выражениям (1)–(27). Эти модели являются определяющими для оценки параметров критических нагрузок, напряжений, уровней износа и развития трещин. Получаемые в расчетах и экспериментах контрольные характеристики дают возможность детерминированной оценки безопасности по сопоставлению критических фактических значений ключевых параметров на данной стадии эксплуатации. В дальнейшем развитии этой методологии [1, 2, 35, 36] можно получить вероятностные характеристики всех указанных выше расчетных параметров и перейти к вероятностному анализу безопасности по критериям рисков.

Работа выполнена при поддержке Белорусского и Российского фондов фундаментальных исследований (гранты №Т20Р-058 от 14.05.2020 г. и №20-58-00019).

Литература

1. Безопасность России. Правовые, социально-экономические и научно-технические аспекты. Фундаментальные и прикладные проблемы комплексной безопасности. Научный руководитель Н.А. Махутов – М.: МГОФ «Знание». - 2017. – 992 с.
2. Безопасность России. Правовые, социально-экономические и научно-технические аспекты. Научные основы промышленной безопасности. Научный руководитель Н.А. Махутов – М.: МГОФ «Знание». - 2019. – 824 с.
3. Журавков М.А., Савчук В.П., Хвесеня С.С., Николайчик М.А. Моделирование динамического воздействия подъемного сосуда на направляющие в стволе с использованием данных си-

стемы мониторинга плавности движения // *Фундаментальные и прикладные вопросы горных наук.* — 2019. № 2. – С. 97-103.

4. Котенева Н.В. Уругоупластический контакт гладкой сферы с плоской поверхностью при динамическом нагружении // *Известия Томского политехнического университета.* – Т. 308. – № 2. – 2005. – С.114-116.

5. Тимошенко С.П., Гурьер Дж. Теория уругости. – М.: Наука. - 1975. – 567 с.

6. Дрозд М.С., Матлин М.М., Сидяхин Ю.И. Инженерные расчеты уругоупластической контактной деформации. – М.: Машиностроение. - 1986. – 220 с.

7. Орлов А.В., Пинегин С.В. Остаточные деформации при контактном нагружении. – М.: Наука. - 1971. – 62 с.

8. Булычев С.И., Алехин В.П. Испытание материалов непрерывным вдавливанием. – М.: Машиностроение. - 1990. – 280 с.

9. Ciavarella, M., Demelio, G., 2001. A review of analytical aspects of fretting fatigue, with extension to damage parameters, and application to dovetail joints // *International Journal of Solids and Structures* 38 (10-13), 1791-1811.

10. Chai, Y. S., Lee, C. Y., Bae, J. W., Lee, S. Y., Hwang, J. K., 2005. Finite element analysis of fretting wear problems in consideration of frictional contact // *Key Engineering Materials* 297, 1406-1411.

11. Hills D. A., 1994. Mechanics of fretting fatigue // *Wear* 175 (1), 107-113.

12. Argatov I., Woo Bae J., Suck Chai Y. A simple model for the wear accumulation in partial slip Hertzian contact // *International Journal of Applied Mechanics* 12 (07), 1-20.

13. Goryacheva, I. G., Rajeev, R. T., Farris, T. N., 2001. Wear in partial slip contact // *Journal of Tribology* 123 (4), 848-856.

14. Ciavarella, M., Demelio, G., 2001. A review of analytical aspects of fretting fatigue, with extension to damage parameters, and application to dovetail joints // *International Journal of Solids and Structures* 38 (10-13), 1791-1811.

15. Hills, D. A., Sack_eld, A., Paynter, R. J. H., 2009. Simulation of fretting wear in half plane geometries: part I—the solution for long term wear // *Journal of Tribology* 131 (3), 031401.

16. Иванова В.С., Терентьев В.Ф. Природа усталости металлов. - М.: Металлургия, 1975. - 456 с.

17. Доможиров Л.И., Махутов Н.А. Иерархия трещин в механике циклического разрушения // *Механика твердого тела.* - 1999, N 5. - С.17-26.

18. Берендеев Н.Н., Зорин А.В. Оценка характеристик распределения усталостной долговечности с использованием двухстадийной модели накопления повреждений // *Математическое моделирование краевых задач.* - 2004. Ч. 1. -С. 40-42.

19. Любимов А.К., Берендеев Н.Н., Чувильдеев В.Н. Структурная модель, описывающая зарождение трещины // *Известия АИН РФ. Юб. том.* - 2001.С.181-199.

20. Лидбеттер М., Ротсен Х., Линдгрэн Г. Экстремумы случайных последовательностей и процессов. - М.: Мир. - 1989. - 392 с.

21. Черепанов Г.П. Механика хрупкого разрушения. - М.: Наука. - 1974. - 640 с.

22. Овчинникова Н.Н. Напряженно-деформированное состояние континуума «Жесткий индентор – уругоупластическая среда» при динамических нагружениях. Автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата технических наук. Саратовский гос. тех. университет. – Саратов. - 2019. - 20 с.

23. Донсков А.С., Карманов В.В. Исследование области локального уругоупластического контакта при относительном скольжении двух уругих тел, ограниченных нелинейными поверхностями // *Заводская лаборатория. Диагностика материалов.* - 2015. Т. 81. № 2. – С. 53-60.

24. Донсков А.С. Контактная уругоупластическая задача для полупространства, деформируемого скользющим индентором // *Заводская лаборатория. Диагностика материалов.* - 2012. Т. 78. №6. - С. 46-53.

25. Донсков А.С., Гордеева В.А. Задача уругоупластического контакта тел с нелинейными граничными поверхностями // *Заводская лаборатория. Диагностика материалов.* - 2013. Т. 79. №8. - С. 46-54.

26. Биргер И.А. Некоторые методы решения задач пластичности // *ПММ.* - 1951. Т. 15. № 6. - С. 765-770.

27. Михин Н.М. Внешнее трение твердых тел. – М.: Наука. - 1977. – 194 с.

28. Дрозд М.С., Матлин М.М., Сидяхин Ю.И. Инженерные расчеты уругоупластической контактной деформации. – М.: Машиностроение. - 1986. – 224 с.

29. Guz A.N., Babich S.Y., Rudnitsky V.B. Contact problems for elastic bodies with initial stresses: Focus on Ukrainian research // Appl. Mech. Rev.vol 51, nos May 1998/-343-371.

30. Guz A.N., Babich S.Y., Rudnitsky V.B. Contact problems for prestressed elastic bodies and rigid and elastic punches // Int. Appl. Mech. - 2004.-40, №7. -p.744-765.

31. Гузь А.Н., Бабич С.Ю., Рудницкий В.Б. Контактное взаимодействие упругих тел с начальными напряжениями (обзор). Развитие идей Галина Л.А. в механике. // Сборник под редакцией И.Г.Горячевой. – Ижевск. Институт компьютерных исследований. - 2013. – 480 с.

32. Гузь А.Н. Рудницкий В.Б. Основы теории контактного взаимодействия упругих тел с начальными (остаточными) напряжениями. Хмельницкий: Печать ПП Мельник А.А. - 2006. - 710 с.

33. Гузь А.Н. Механика хрупкого разрушения материалов с начальными напряжениями. Киев: Наук. Думка. - 1983.- 296с.

34. Рудницкий В.Б., Рамский А.А., Дихтярук Н.Н. Качение упругого цилиндра по полуплоскости с начальными напряжениями // Вестник ХНТУ № 2 (47), 2013.

35. Прикладные задачи конструкционной прочности и механики разрушения технических систем/ В.В. Москвичев, Н.А. Махутов, Ю.И. Шокин, М.М. Гаденин и др. – Новосибирск: «Наука». - 2021. –796 с.

36. Махутов Н.А. Безопасность и риски. Системные исследования и разработки. – Новосибирск: «Наука». - 2017. – 704 с.

Сведения об авторах

Журавков Михаил Анатольевич – профессор, заведующий кафедрой теоретической и прикладной механики Белорусского государственного университета. Адрес: 220030, г. Минск, пр.-т Независимости, 4, e-mail: zhuravkov@bsu.by.

Богданович Александр Вальдемарович – доцент, профессор кафедры теоретической и прикладной механики Белорусского государственного университета. Адрес: 220030, г. Минск, пр.-т Независимости, 4, e-mail: bogal@tut.by.

Шемет Людмила Александровна – ст. преподаватель кафедры теоретической и прикладной механики Белорусского государственного университета. Адрес: 220030, г. Минск, пр.-т Независимости, 4, e-mail: shemetla@yandex.ru.

Николайчик Михаил Александрович – заведующий НИЛ прикладной механики Белорусского государственного университета. Адрес: 220030, г. Минск, пр.-т Независимости, 4, e-mail: nikolaitchik.m@gmail.com.

Дембовский Игорь Николаевич – аспирант кафедры теоретической и прикладной механики Белорусского государственного университета. Адрес: 220030, г. Минск, пр.-т Независимости, 4, e-mail: igordembovskii@mail.ru.

Махутов Николай Андреевич – главный научный сотрудник, Институт машиноведения им. А.А.Благоднарова РАН, 101000, Москва, Малый Харитоньевский пер., д. 4, kei51@mail.ru

Гаденин Михаил Матвеевич – ведущий научный сотрудник, Институт машиноведения им. А.А.Благоднарова РАН, 101000, Москва, Малый Харитоньевский пер., д. 4, safety@imash.ru

Резников Дмитрий Олегович – ведущий научный сотрудник, Институт машиноведения им. А.А.Благоднарова РАН, 101000, Москва, Малый Харитоньевский пер., д. 4, mibsts@mail.ru

Юдина Ольга Николаевна – научный сотрудник, Институт машиноведения им. А.А.Благоднарова РАН, 101000, Москва, Малый Харитоньевский пер., д. 4, mibsts@mail.ru