DOI: 10.36535/0236-1914-2021-08-2

УДК 629.4, 519.7

КАЧЕСТВЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ПОПЕРЕЧНЫХ КОЛЕБАНИЙ ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНОЙ ТЕЛЕЖКИ С УЧЕТОМ НЕРОВНОСТЕЙ ПУТИ

Доктор техн. наук, профессор **Корольков Е.П.**
(Российский университет транспорта. МИИТ),

доктор физ.-матем. наук, профессор **Дружинина О.В.**
(Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук. ФИЦ ИУ РАН, Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова Российской академии наук. ИПУ РАН)

QUALITATIVE STUDY OF MATHEMATICAL MODEL OF RAILWAY TROLLEY TRANSVERSE OSCILLATIONS TAKING INTO ACCOUNT IRREGULARITIES OF TRACK

E.P. Korolkov, Doctor (Tech.), Professor
(Russian University of Transport, MIIT),

O.V. Druzhinina, Doctor (Physics & Math.), Professor
(FRC “Computer Science and Control” of RAS, V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS. ICS RAS)

Математическое моделирование, динамика подвижного состава, двухосная железнодорожная тележка, рельсовая нить, неровность железнодорожного пути, устойчивость, поперечные колебания, нагрузка, кривизна, скорость.

Mathematical modeling, rolling stock dynamics, biaxial railway trolley, rail thread, railway track irregularity, stability, transverse oscillations, load, curvature, speed.

Работа посвящена теоретическому исследованию устойчивости поперечных колебаний двухосной тележки с криволинейным профилем поверхности катания колес. Развит подход к математическому моделированию динамических систем железнодорожного транспорта на основе синтеза обобщенных моделей с учетом криволинейного профиля и неровностей железнодорожного пути. Предложены условия устойчивости поперечных колебаний. Получено зависящее от кривизны профиля и нагрузки соотношение для поступательной скорости тележки, с учетом условий устойчивости поперечных колебаний. Результаты могут найти применение в задачах проектирования и совершенствования элементов и узлов железнодорожных вагонов, в задачах обеспечения безопасности движения железнодорожного транспорта, а также при исследовании динамики подвижного состава в различных условиях эксплуатации.

The work is devoted to a theoretical study of the stability of transverse oscillations of a biaxial trolley with a curved profile of the rolling surface of the wheels. The approach to mathematical modeling of dynamic systems of railway transport based on synthesis of generalized models taking into account curvilinear profile and irregularities of railway track is developed. Stability conditions of transverse oscillations are proposed. The ratio depending on the curvature of the profile and the load is obtained for the translational speed of the trolley, taking into account the stability conditions of transverse vibrations. The results can be used in the problems of designing and improving elements and componentss of railway cars, in the problems of ensuring the safety of railway traffic, as well as in the study of the dynamics of rolling stock in various operating conditions.

1. Введение. Одной из основных задач, решаемых инженерами и научными сотрудниками железнодорожной отрасли, является задача обеспечения безопасного движения поездов. Вопросы безопасности движения тесно связаны с вопросами устойчивости поперечных колебаний ходовых частей рельсовых экипажей, влияющих на устойчивость от схода колеса с рельса.

Различным аспектам устойчивости движения, в том числе и железнодорожного транспорта, посвящены многие исследования российских и зарубежных исследователей (см., например, [1]). Немаловажное значение в поддержании устойчивого движения имеет профиль поверхности катания колеса. На российских железных дорогах принята конусная поверхность катания колеса, обеспечивающая вписывание экипажей в кривые участки пути. В то же время конусность поверхности катания вызывает поперечные колебания колесных пар и тележек и с увеличением поступательных скоростей экипажей приводит к неустойчивым поперечным колебаниям [2, 3].

С учетом конусности поверхности катания возвращающая сила, равная разности гравитационных сил, возникающих в контактах колес с такой конфигурацией поверхностей катания одной колесной пары, очень мала. Как показывают исследования [4, 5], придание поверхности катания колес криволинейной формы в значительной мере увеличивают значение возвращающей силы. Кроме того, при теоретических исследованиях устойчивости поперечных колебаний часто используются математические модели, недостаточно полно описывающие сущность взаимодействия в точке контакта колеса с рельсом поперек оси пути. Как правило, поперечная составляющая реакции рельса на колесо моделируется при допущении ее пропорциональной зависимости от скорости поперечных колебаний. Согласно этому допущению, параметр поперечных колебаний при максимальном отклонении обращается в нуль, что приводит к тому, что действие возвращающей силы в модели не учитывается.

Как показали исследования некоторых математических моделей колесной пары и тележки, колеса которых имеют криволинейный профиль, устойчивость поперечных колебаний зависит от нагрузки на ось и кривизны поверхности катания колес [6, 7], а множество значений поступательной скорости устойчивых поперечных колебаний является расширенным по сравнению с аналогичным показателем при коническом профиле.

Настоящая работа посвящена нахождению максимального значения скорости поступательного движения тележки, при котором наблюдаются устойчивые поперечные колебания тележки. Изучены условия устойчивости в смысле А.М. Ляпунова поперечных колебаний двухосной тележки с криволинейным профилем поверхности катания колес, при движении по неровностям с существенными отклонениями, но в пределах нормативных допусков. В рассматриваемой обобщенной математической модели поперечных колебаний тележки учитывается криволинейность профиля поверхности катания колес [4], сила поперечного крипа [8] и неровность рельсовых нитей [9].

В статье развит подход к математическому моделированию динамических систем железнодорожного транспорта на основе синтеза обобщенных моделей с учетом криволинейного профиля и неровностей рельсовых нитей. Получено соотношение для поступательной скорости тележки, зависящее от кривизны профиля и нагрузки, с учетом условия устойчивости поперечных колебаний. Охарактеризованы перспективы построения и исследования математической модели движения железнодорожной тележки при наличии управляющих воздействий. Целью работы является развитие методического обеспечения для качественного и численного исследования комплекса математических моделей динамики подвижного состава с учетом важных системных эффектов.

2. Модели поперечных колебаний железнодорожной тележки с криволинейным профилем поверхности катания. Рассмотрим модель, задаваемую системой двух обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка:

$$\begin{gathered}\ddot{y}+\frac{4k}{m\dot{x}}\dot{y}+\frac{P}{m}\frac{8\beta\cdot y}{1-\mu}-\frac{k}{m}\left(\frac{i\cdot\alpha(t)}{r_0(1-\mu)}+4\right)\psi=\\=\frac{4k}{m\,\dot{x}}\theta(t)+\frac{2\beta\cdot P}{1-\mu}\lambda(t),\\ \ddot{\psi}+\frac{4\cdot k\cdot s^2}{J\cdot\dot{x}}\dot{\psi}+\frac{8\beta\cdot P\cdot l^2}{J\cdot(1-\mu)}\psi+\frac{4k\cdot s\cdot i}{J\cdot r_0(1-\mu)}y=\\=\frac{k\cdot s\cdot i}{J\cdot r_0(1-\mu)}\lambda(t)+\frac{2\beta\cdot P\cdot l}{J\cdot(1-\mu)}\nu(t)-\frac{k\cdot l}{J\cdot\dot{x}}\omega(t),\end{gathered}\tag{1}$$

где m, J – соответственно масса тележки и момент инерции тележки относительно вертикальной оси, проходящей через центр масс; $k=\sqrt{P\cdot r_0}$, P – соответственно коэффициент крипа и давление колеса на рельс; r_0 – радиус качения колеса в центральной установке колесной пары; $2i$, 2β, β_0 – соответственно конусность профиля поверхности катания колеса, кривизна профиля катания колеса в его центральной установке, кривизна профиля поверхности катания головки рельса, $\mu=2\beta/\beta_0$; $2s$, $2l$ – соответственно расстояние между кругами катания колес колесной пары, расстояние между колесными парами двухосной тележки; $\dot{x}$ – поступательная скорость движения тележки вдоль пути. Для величин в правых частях системы (1) выполняются соотношения

$$\begin{gathered}\alpha(t)=\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}y_{ij}^{p};\quad \lambda(t)=\sum_{i-1}^{2}(y_{i1}^{p}-y_{i2}^{p});\\ \nu(t)=\sum_{i-1}^{2}(-1)^{i+1}(y_{i1}^{p}-y_{i2}^{p});\\ \theta(t)=\sum_{i-1}^{2}(\dot{y}_{i1}^{p}-\dot{y}_{i2}^{p});\quad \omega(t)=\sum_{i-1}^{2}(-1)^{i+1}(\dot{y}_{i1}^{p}-\dot{y}_{i2}^{p}).\end{gathered}\tag{2}$$

В (2) через $y_{ij}^{p}(t),\dot{y}_{ij}^{p}(t)$ обозначены соответственно отклонение и скорость отклонения неровностей рельсовых нитей в точках контакта каждого колеса (i=1, 2 – номер колесной пары, j=1, 2 – номер колеса колесной пары).

Система однородных обыкновенных дифференциальных уравнений, соответствующая системе (1), имеет вид

$$\begin{gathered}\ddot{y}+\frac{4k}{m\dot{x}}\dot{y}+\frac{P}{m}\frac{8\beta}{1-\mu}y-\frac{k}{m}\left(\frac{i\cdot\alpha(t)}{r_0(1-\mu)}+4\right)\psi=0,\\ \ddot{\psi}+\frac{4\cdot k\cdot s^2}{J}\dot{\psi}+\frac{8\beta\cdot P\cdot l^2}{J\cdot(1-\mu)}\psi+\frac{4k\cdot s\cdot i}{J\cdot r_0(1-\mu)}y=0.\end{gathered}\tag{3}$$

Система (3) описывает собственные колебания тележки при ее поступательном движении. Частные случаи системы вида (3) рассмотрены в [1, 6 , 7] и в других работах.

3. Анализ устойчивости и выражение для критической скорости. Рассмотрим задачу исследования устойчивости в смысле Ляпунова собственных колебаний тележки, сводящуюся к исследованию устойчивости решений однородной системы (3), соответствующей неоднородной системе (1). Для решения поставленной задачи и дальнейшего применения критерия Гурвица [2] выполним ряд преобразований и сведем систему двух дифференциальных уравнений второго порядка вида (3) к одному дифференциальному уравнению четвертого порядка. Для упрощения выкладок введем следующие обозначения:

$$\begin{gathered}\delta_1=\frac{4k}{m};\quad \delta_2=\frac{P}{m}\frac{8\beta}{1-\mu};\quad \delta_3=\frac{k}{m}\left(\frac{i\cdot\alpha(t)}{r_0(1-\mu)}\right);\\ \delta_4=\frac{4\cdot k\cdot s^2}{J};\quad \delta_5=\frac{8\beta\cdot P\cdot l^2}{J\cdot(1-\mu)};\quad \delta_6=\frac{4k\cdot s\cdot i}{J\cdot r_0(1-\mu)}.\end{gathered}\tag{4}$$

С учетом (4) систему (3) можно представить в следующем виде:

$$\begin{gathered}\ddot{y}+\frac{\delta_1}{\dot{x}}\dot{y}+\delta_2 y-(\delta_1+\delta_3(t))\psi=0,\\ \ddot{\psi}+\frac{\delta_4}{\dot{x}}\dot{\psi}+\delta_5\psi+\delta_6 y=0.\end{gathered}\tag{5}$$

В дальнейшем используется допущение о пренебрежении коэффициентом $\delta_3(t)$ в силу его малости в сравнении с коэффициентом δ_1.

После ряда преобразований получим дифференциальное уравнение четвертого порядка относительно относа центра масс тележки:

$$\begin{aligned}&y^{(4)}+\frac{\delta_1+\delta_4}{\dot{x}}\dddot{y}+(\delta_2+\delta_5+\frac{\delta_1\cdot\delta_4}{\dot{x}^2})\ddot{y}+\\&+\frac{\delta_2\delta_4+\delta_1\delta_5}{\dot{x}}\dot{y}+(\delta_2\delta_5+\delta_1\delta_6)y=0\end{aligned}\quad. \tag{6}$$

Для проверки отрицательности вещественной части корней соответствующего дифференциальному уравнению (6) характеристического уравнения

$$z^4+a_1z^3+a_2z^2+a_3z+a_4=0 \tag{7}$$

применим теорему Гурвица. С целью получения условий устойчивости исходя из (7) записана стандартная матрица Гурвица. Известно, условие отрицательности вещественных частей корней сводится к положительности миноров определителя матрицы Гурвица. В данном случае имеем

$$\Delta_1=a_1>0,\ \Delta_2=a_1a_2-a_3>0,$$

$$\Delta_3=(a_1a_2-a_3)a_3-a_1a_4=\Delta_2\cdot a_3-a_1a_4>0,\ a_4>0.$$

Таким образом, условия устойчивости сводятся к нескольким неравенствам. Следует отметить, что согласно физическому смыслу справедливы условия положительности

$$a_1=\frac{\delta_1+\delta_4}{\dot{x}}>0\ ,\ a_4=\delta_2\delta_5+\delta_1\delta_6>0\ .$$

Рассмотрим минор второго порядка $\Delta_2=a_1a_2-a_3$. После подстановки коэффициентов из уравнения (6) и преобразования получим:

$$\Delta_2=\frac{\delta_1\delta_2+\delta_4\delta_5}{\dot{x}}+\left(\frac{\delta_1+\delta_4}{\dot{x}}\right)\frac{\delta_1\cdot\delta_4}{\dot{x}^2}>0\ .$$

Далее найдем оценку того, при каких скоростях будет положительным минор третьего порядка

$$\Delta_3=(a_1a_2-a_3)a_3-a_1a_4=\Delta_2\cdot a_3-a_1a_4\ .$$

Учитывая важность проведения анализа устойчивости при больших значениях поступательной скорости, для упрощения оценки в выражении минора Δ_2 сделаем допущение о пренебрежении слагаемым, содержащим $\dot{x}^3$. Далее рассмотрим для приближенной оценки выражение $\Delta^*_2=\frac{\delta_1\delta_2+\delta_4\delta_5}{\dot{x}}$. Тогда возможно перейти к следующему равенству

$$\Delta^*_3=\frac{\delta_1\delta_2+\delta_4\delta_5}{\dot{x}}\cdot\frac{\delta_2\delta_4+\delta_1\delta_5}{\dot{x}}-\frac{\delta_1+\delta_4}{\dot{x}}(\delta_2\delta_5+\delta_1\delta_6)\ .$$

После приведения к общему знаменателю получим

$$\begin{aligned}\Delta^*_3=\frac{1}{\dot{x}^2}\big[&(\delta_1\delta_2+\delta_4\delta_5)(\delta_2\delta_4+\delta_1\delta_5)-\\&-\dot{x}(\delta_1+\delta_4)(\delta_2\delta_5+\delta_1\delta_6)\big]\end{aligned}\quad. \tag{8}$$

Приравнивая правую часть (8) к нулю, найдем выражение для пороговой поступательной скорости движения тележки

$$\dot{x}=\frac{(\delta_1\delta_2+\delta_4\delta_5)(\delta_2\delta_4+\delta_1\delta_5)}{(\delta_1+\delta_4)(\delta_2\delta_5+\delta_1\delta_6)}\ . \tag{9}$$

Для значений, превышающих значения, определяемые условием (9), поперечные колебания будут неустойчивыми.

Выполнив ряд преобразований с учетом подстановки выражений (4), получим формулу для нахождения критической скорости поступательного движения, при превышении которой движение тележки становится неустойчивым:

$$\begin{aligned}\dot{x}=&\frac{4r_0\cdot k\cdot\beta_0^2(J^2+m^2s^2l^2)(s^2+l^2)}{J\cdot m\cdot(J+ms^2)}\cdot\\&\cdot\frac{P^2\cdot\mu^2}{(\beta_0^2\mu^2P^2\cdot l^2+k^2\cdot s\cdot i(1-\mu))}\end{aligned}\quad. \tag{10}$$

Анализ выражения (10) показывает, что скорость зависит от отношения кривизны профилей поверхности катаний колеса и рельса. Производная скорости по этому параметру имеет вид:

$$\frac{2\mu(\beta_0^2\mu^2P^2\cdot l^2+k^2\cdot s\cdot i(1-\mu))-\mu^2(2\mu\beta_0^2P^2\cdot l^2-k^2\cdot s\cdot i)}{(\beta_0^2\mu^2P^2\cdot l^2+k^2\cdot s\cdot i(1-\mu))^2}=$$

$$\frac{2\mu\cdot k^2\cdot s\cdot i-\mu^2\cdot k^2\cdot s\cdot i}{(\beta_0^2\mu^2P^2\cdot l^2+k^2\cdot s\cdot i(1-\mu))^2}=\frac{\mu\cdot k^2\cdot s\cdot i(2-\mu)}{(\beta_0^2\mu^2P^2\cdot l^2+k^2\cdot s\cdot i(1-\mu))^2}.$$

Нетрудно показать, что производная поступательной скорости положительна:

$$\frac{\mu\cdot k^2\cdot s\cdot i(2-\mu)}{(\beta_0^2\mu^2P^2\cdot l^2+k^2\cdot s\cdot i(1-\mu))^2}>0.$$

Так как параметр μ, исходя из физических соображений, может принимать значения от нуля до единицы и поступательная скорость свои наибольшее и наименьшее значения принимает только на границах этого множества. Значение μ=0 отвечает нулевой кривизне профиля, т.е. когда профиль катания прямолинейный. Но в этом случае значение критической скорости нулевое и поперечные колебания тележки будут неустойчивыми. При μ=1 кривизна профиля поверхности катания равна кривизне головки рельса и в этом случае поперечные колебания исключены, но в этом случае железнодорожная тележка не будет иметь возможности для разворота в кривых участках пути. Тем не менее, с увеличением кривизны профиля поверхности катания колеса значение критической скорости увеличивается, и выбор кривизны необходимо производить с учетом других условий эксплуатации.

Важно отметить, что криволинейный профиль поверхности катания колес, очерченный круговыми кривыми, был испытан применительно к поезду «Сапсан» [10]. Теоретические исследования динамических характеристик движения поезда с криволинейным профилем катания колес производились при скоростях 250 км/час и показали, что в прямых участках пути касания гребней колес с боковыми гранями рельсов не наблюдалось. Экспериментальные поездки вагонов и локомотива с переточенными колесами показали улучшение плавности хода, уменьшение рамных сил, «снижение показателей, характеризующих боковую динамику экипажей, до значений, удовлетворяющих нормативным требованиям, как при наличии продольных демпферов в центральной ступени подвешивания, так и при отсутствии их» [10, с. 98]. Таким образом, экспериментальные исследования [10] согласуются с проведенным в настоящей статье исследованием.

Перспективы дальнейших исследований связаны с выполнением серии вычислительных экспериментов по анализу и верификации: а) математической модели собственных поперечных колебаний железнодорожной тележки с учетом неровностей пути; б) математической модели вынужденных поперечных колебаний железнодорожной тележки с учетом неровностей пути; в) математической модели поперечных колебаний железнодорожной тележки с учетом неровностей пути и с учетом управляющих воздействий; г) математической модели поперечных колебаний железнодорожной тележки с учетом неровностей пути, с учетом управляющих воздействий и критерия качества управления (модель оптимального управления).

Для исследования управляемого случая целесообразно использовать алгоритмы численной оптимизации и методы искусственного интеллекта [11–14]. Указанные методы позволяют выполнять поиск оптимальных траекторий на основе современных подходов к моделированию управляемых динамических систем. Кроме того, для изучения математических моделей, учитывающих криволинейный профиль поверхностей катания, планируется разработка программного комплекса с применением библиотек языка высокого уровня Python 3 для моделирования и стабилизации систем динамики железнодорожного транспорта. Создание программного комплекса позволит выполнить серию вычислительных экспериментов, подтверждающих результативность теоретических исследований и интеллектуального управления.

Заключение. Теоретические и экспериментальные исследования по совершенствованию моделей динамики подвижного состава направлены на создание комплекса обоснований введения в эксплуатацию криволинейных профилей поверхности катания колес. В настоящей работе предложено построение обобщенных моделей динамики подвижного состава, позволяющих учитывать системные эффекты. Следует отметить прикладную направленность разработанного методического обеспечения по оценке скоростей движения и по определению критических значений скоростей с учетом проведенного анализа устойчивости. Результаты могут найти применение в задачах динамики подвижного состава в различных условиях эксплуатации, в задачах совершенствования конструкций ходовых частей железнодорожных вагонов, а также в задачах обеспечения безопасности скоростного и высокоскоростного движения железнодорожного транспорта. Кроме того, разработанное методическое обеспечение может служить основой разработки алгоритмов и создания программного обеспечения для верификации математических моделей подвижного состава.

Литература

1. *Корольков Е.П., Дружинина О.В.* Синтез и устойчивость обобщенных моделей динамики железнодорожного транспорта // Материалы 6-й Международной научно-практической конференции «Системы управления, сложные системы: моделирование, устойчивость, стабилизация, интеллектуальные технологии» (Елец, 16 сентября 2020 г). Елец: ЕГУ им. И.А. Бунина, 2020. С. 393–402.

2. *Вершинский С.В., Данилов В.Н., Хусидов В.Д.* Динамика вагона. М.: Транспорт, 1991. 360 с.

3. *Гарг В.К., Дуккипати Р.В.* Динамика подвижного состава / Под ред. Н.А. Панькина. М.: Транспорт, 1988. 391 с.

4. *Корольков Е.П., Сергеев К.А., Бондаренко А.И.* Выбор профиля поверхности катания из условия вписывания в кривые // Наука и техника транспорта. 2016. № 2. С. 49–51.

5. *Корольков Е.П.* Свойства точек контакта криволинейного профиля // Наука и техника транспорта. 2016. № 1. С. 76–78.

6. *Дружинина О.В., Корольков Е.П., Булатникова М.Е.* Анализ устойчивости поперечных колебаний в модели движения железнодорожной тележки с учетом нестационарности процесса // Транспорт: наука, техника, управление. 2018. № 4. С. 3–6.

7. *Корольков Е.П., Дружинина О.В., Фролова Т.А., Булатникова М.Е.* Моделирование поперечных колебаний и анализ устойчивости колесной пары с криволинейным профилем катания // Наука и техника транспорта. 2019. №1. С. 16–21.

8. *Корольков Е.П.* Математическое моделирование поперечного крипа железнодорожных колес // Мир транспорта. 2018. №5. С. 6–13.

9. *Корольков Е.П.* Математическая модель отступлений рельсовых нитей и ширины колеи в плане// Наука и техника транспорта. 2020. №5. С. 8–9.

10. *Максимов И.Н.* Разработка профиля колес для скоростных поездов и прогнозирование его эволюции в процессе взаимодействия подвижного состава и пути // Дисс… на соискание ученой степени кандидата технических наук. М.: ВНИИЖТ, 2014. 226 с.

11. *Карпенко А.П.* Современные алгоритмы поисковой оптимизации. Алгоритмы, вдохновленные природой. М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2014. 446 с.

12. *Осипов Г.С.* Лекции по искусственному интеллекту. М.: Изд. группа URSS, 2018. 272 с.

13. Кормен Т., Лейзерсон Ч., Ривест Р., Штайн К. Алгоритмы: построение и анализ / Под ред. И. В. Красикова. 3-е изд. М.: Вильямс, 2019. 1328 с.

14. *Druzhinina O.V., Masina O.N., Petrov A.A.* The synthesis of the switching systems optimal parameters search algorithms // Communications in Computer and Information Science (CCIS). 2019. V. 974. P. 306–320.

Сведения об авторах:

Корольков Евгений Павлович, Российский университет транспорта (МИИТ), профессор.

Адрес: 127994, Москва, ГСП–4, ул. Образцова, д. 9, стр. 9.

Тел. 8 (495)-684-23-56.

E-mail: epkorolk@rambler.ru.

Дружинина Ольга Валентиновна, Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук (ФИЦ ИУ РАН), главный научный сотрудник.

Адрес: 119333 Москва, ул. Вавилова, 44, корп. 2.

Институт проблем управления имени В.А. Трапезникова Российской академии наук (ИПУ РАН), главный научный сотрудник.

Адрес: 117997 Москва, ул. Профсоюзная, д. 65.

Тел. +7(499)-135-62-60.

E-mail: ovdruzh@mail.ru.