

## ПОСТАВКИ НЕСКОЛЬКИМИ ТРАНСПОРТНЫМИ СРЕДСТВАМИ С УЧЕТОМ ГРУЗОВМЕСТИМОСТИ И АРЕНДЫ МЕСТ ХРАНЕНИЯ

Доктор техн. наук, профессор **Бродецкий Г.Л.**,  
доктор техн. наук, профессор **Герامي В.Д.**,  
кандидат экон. наук, ст. преподаватель **Шидловский И.Г.**  
(Национальный исследовательский университет  
«Высшая школа экономики»)

## DELIVERY BY MULTIPLE VEHICLES, TAKING INTO ACCOUNT VEHICLE CARGO CAPACITY AND RENT OF STORAGE

Doctor (Tech.), Professor **Brodetsky G.L.**,  
Doctor (Tech.), Professor **Gerami V.D.**,  
Ph.D. (Econ.), Senior Lecturer **Shidlovsky I.G.**  
(National Research University "High School of Economics")

*Управление запасами, аренда мест хранения, совместные поставки, скидки на их стоимость, учет грузоместимости.*

*Inventory management, vehicle capacity, the order delivery by several vehicles, lease of storage locations.*

*Представлен анализ эффективности совместного использования транспортных средств (ТС) разных типов при поставках товара для EOQ-модели управления запасами с одной номенклатурой товара и арендой мест хранения. Анализ учитывает важные для практических приложений факторы: 1) грузоместимость транспортных средств; 2) временную ценность денег - ВЦД; 3) предлагаемые скидки, которые относятся к стоимости указанных совместных поставок. Найдены допустимые уровни дисконта/скидки для эффективности совместных поставок. Для любого набора ТС установлено необходимое и достаточное условие (относительно такой скидки), при котором совмещенные поставки такими ТС будут более эффективны, чем поставки, но только одним ТС, наилучшим по эффективности.*

*Article presents an analysis of the efficiency of the joint use of vehicles of different types in the supply of goods for the EOQ-model considering with one product line and the lease of storage locations. The analysis takes into account factors important for practical applications: 1) cargo capacity of vehicles; 2) the time value of money; 3) offered discounts on the cost of joint deliveries. The admissible levels of discounts for the efficiency of joint deliveries are assessed. For any set of vehicles, a necessary and sufficient condition (with respect to such a discount) has been established, under which combined deliveries will be more effective than deliveries by one vehicle with the best efficiency*

### Введение

При управлении запасами сотрудникам соответствующих отделов зачастую надо принимать решения о целесообразности организации поставок заказа с совместным использованием сразу нескольких транспортных средств (ТС). Такие задачи, в частности, могут быть обусловлены учетом грузоместимости ТС. В работе [5] представлен подход к анализу моделей такого типа, позволяющий учитывать фактор временной ценности денег (далее - ВЦД). В частности, было показано, что совмещенные поставки, когда при поставках товара одновременно используется сразу несколько ТС, действительно не будут эффективными, если транспортным оператором не предоставляется достаточная скидка на стоимость перевозки для таких поставок. Было найдено соответствующее необходимое и достаточное условие, на основе которого можно установить приемлемый уровень дисконта относительно стоимости такой поставки, чтобы совмещенные поставки с использованием однотипных транспортных средств могли конкурировать с поставками одним ТС. Указанный анализ был реализован только для ситуаций, в формате которых

выбор конкретных ТС для совместных поставок реализуются только в формате ТС одного типа.

В работе [2] была рассмотрена EOQ-модель управления запасами с одной номенклатурой товара и арендой мест хранения, когда для поставок заказа используются сразу два ТС, причем это могут быть также ТС разных типов. Как известно, чтобы обеспечить, в частности, эффективность указанных совместных поставок, в такой модели учитываются скидки, которые надо предоставить относительно стоимости соответствующих совместных поставок. Применительно к любым возможным наборам ТС для обеспечения поставок был найден соответствующий допустимый уровень указанной скидки. Установлено необходимое и достаточное условие (относительно указанной скидки), при котором совмещенные поставки (соответствующим набором) будут не менее эффективными, чем поставки, каким-либо одним из таких ТС (в частности, и наилучшим по эффективности).

Указанные результаты требуют обобщения, поскольку на практике более удобным и эффективным может оказаться вариант с привлечением для совмещенных поставок ТС разных типов, причем не только двух ТС.

Обобщение применительно к анализу моделей такого типа даст возможность разработать более продвинутый алгоритм оптимизации, который можно будет использовать на практике.

С целью облегчения процедуры нахождения наилучших решений с учетом отмеченных выше особенностей, в этой статье рассмотрены более общие модели оптимального размера заказа, *EOQ*-модели (*EOQ* – economic order quantity), которые соотносятся с задачами оптимизации поставок при управлении запасами (кстати, с учетом фактора аренды мест хранения). В результате проведенного анализа представлены необходимые и достаточные условия (для уровня скидки), обеспечивающие эффективность использования при поставках произвольного числа ТС любых типов. Соответствующий анализ представлен применительно к важным для практики моделям эффективных поставок, когда затраты на очередную поставку могут быть реализованы из выручки от предыдущей поставки [5].

Отметим, что важность соответствующих *EOQ*-моделей при моделировании реальных кейсов на практике уже неоднократно была подчеркнута ранее [3-5].

#### Атрибуты анализируемых *EOQ*-моделей поставок с учетом ограничений на вместимость ТС

В формате рассматриваемой *EOQ*-модели анализируется множество разных вариантов ТС, которые можно использовать для поставок. Речь идет о доступных типах ТС, которые можно идентифицировать по исходно заданным номерам  $i = 1, 2, \dots, N$ . Итак, рассматривается *EOQ*-модель с поставками товара одной номенклатуры и арендой мест хранения. Представленный анализ позволит учитывать также фактор грузоподъемности. Далее, как и в [2], используем следующие обозначения:

- $D$  – потребление товара за год (в ед. тов.);
- $C_p$  – стоимость одной единицы продукции / товара (руб.);
- $P_p$  – прибыль от реализации одной единицы товара (этот и следующий показатели понадобятся, если при оптимизации запасов будет учитываться ВЦД);
- $L_p$  – возможные отчисления из выручки с единицы товара (этот показатель вводится, чтобы учитывать различные расходы бизнеса, пропорциональные обороту товара, например, выплаты сотрудникам, выплаты по страховке либо отчисления на хеджирование рисков и т.д.);
- $C_h$  – затраты на хранение единицы товара за год (руб.);
- $C_{oi}$  – расходы на каждую поставку при использовании  $i$ -го ТС; это – затраты, которые не зависят от объема или размера заказа и поэтому их нельзя соотносить на стоимость единицы товара, если не определен размер заказа (руб.);
- принято, что издержки работы цепи поставок, которые зависят от размера заказа, при формализации модели уже учитываются в стоимости единицы товара;
- $q$  – объем / размер заказа при поставках (оптимизируемая величина – в ед. тов.);
- $q_{mi}$  – максимально допустимое количество товара для погрузки в  $i$ -ое ТС из-за ограничения на его грузоподъемность / вместимость (ед. тов.);
- $q_i^*$  – условный оптимальный размер заказа, если для поставок используется одно  $i$ -ое ТС и при оптимизации нет ограничений на грузоподъемность ТС;

- $q_{oi}^*$  – оптимальный размер заказа, если используется одно  $i$ -ое ТС и при оптимизации учитываются ограничения на его грузоподъемность;
- $T$  – длительность интервала времени между поставками, связанная с размером заказа равенством  $T = q/D$ , – также оптимизируемая величина (лет);
- $r_i$  – показатель процентной ставки, которая характеризует эффективность преобразования требуемого для работы цепи поставок оборотного капитала в прибыль при использовании одного именно  $i$ -го ТС (этот показатель необходимо использовать, если при оптимизации будет учитываться ВЦД);
- $r^{(k)}$  – аналогичный показатель для модели с использованием при поставках сразу  $k$  ТС любых типов (они будут уточняться);
- $S_i(q)$  – значение целевой функции для задачи минимизации суммарных годовых издержек при поставках товара одним ТС  $i$ -го типа, партиями объема  $q$  (руб.);
- $d^{(k)}$  – скидка на стоимость поставки, если ее реализовать набором из  $k$  ТС любых типов (в долях единицы от стоимости такой поставки без скидки);
- $S_{(k)}(q)$  – значение целевой функции, если поставки делать набором из  $k$  ТС любых типов, причем партиями суммарного объема  $q$  (руб.).

Процедуры оптимизации задач данного типа, как правило, соотносятся с минимизацией общих годовых затрат, обусловливаемых именно хранением и поставкой товара. В данной статье как раз рассматривается задача такого типа. Структура целевой функции будет зависеть от того, требуется ли учитывать концепцию ВЦД при проведении оптимизационных процедур. В частности, если речь будет идти, например, о поставках одним ТС  $i$ -го типа ( $i = 1, 2, \dots, N$ ), то соответствующая задача (с учетом ВЦД) будет задачей минимизации специальной целевой функции  $S_i(q)$  переменной  $q$  (индекс  $i$  для  $S_i$  подчеркивает использование при поставках одного ТС, причем  $i$ -го типа), которая имеет вид [1]:

$$S_i(q) \rightarrow \min_{1 \leq q \leq q_{mi}}$$

где

$$S_i(q) = \left[ \frac{C_{oi}D}{q} + q \cdot (C_h + r_i \cdot C_p / 2) + DC_p + r_i C_0 / 2 \right] \cdot \left( 1 + \frac{r_i}{2} \right). \quad (1)$$

Представленная целевая функция (1) определяет суммарные затраты, которые уже приведены, в частности, к концу года (учитывая ВЦД, причем на основе простых процентов). Простые проценты используются из-за того, что прибыль от реализации продукции нельзя направить на расширение бизнеса моделируемой цепи поставок (годовое потребление задано в формате *EOQ*-моделей). Если при оптимизации априори будет принято, что  $r_i = 0$ , то рассматриваемая целевая функция (1) позволит представить указанные издержки без учета концепции ВЦД.

В том случае, когда поставки реализуются одним транспортным средством  $i$ -го типа, причем при аренде мест хранения, а также когда не учитывается фактор грузоподъемности, как следует из [1, 3, 4] и отмечено в [5], оптимальный размер заказа может быть определен по следующей формуле:

$$q_i^* = \sqrt{C_{oi}D / (C_h + r_i \cdot C_p)}. \quad (2)$$

При проведении оптимизационных процедур с учетом грузоподъемности каждому ТС надо сопоставить два показателя: применительно к транспортному средству  $i$ -го типа – это показатели  $(C_{0i}, q_{mi})$ . Показатель  $C_{0i}$  – это расходы на одну поставку, а показатель  $q_{mi}$  – характеристика фактора грузоподъемности анализируемого транспортного средства. Таким образом, для альтернативы  $i$  (любой конкретной альтернативы по выбору одного ТС для поставок) при оптимизации надо учитывать ограничение:  $1 \leq q \leq q_{mi}$ .

Итак, при учете грузоподъемности оптимизацию транспортного обеспечения поставок одним ТС (в формате заданного доступного множества ТС) требуется проводить для соответствующего множества наборов задач по минимизации указанных целевых функций вида (1). Тогда, в общем случае, потребуются анализ дополнительных альтернатив. Здесь речь идет о таких поставках, которые соотносятся с одновременным использованием сразу нескольких ТС, причем для каждой поставки (кстати, ТС именно любых типов и в любых сочетаниях). Данный анализ представлен в этой статье.

При определении оптимального значения для размера заказа  $q^*_{0i}$ , в ситуации, когда при поставках используется именно одно ТС, причем,  $i$ -го типа, если учитывать ограничение на его грузоподъемность, имеет место равенство (3):

$$q^*_{0i} = \begin{cases} q_{mi}, & \text{если } q_{mi} \leq \sqrt{C_{0i}D / (C_h + r_i \cdot C_p / 2)} \\ q^*_i = \sqrt{C_{0i}D / (C_h + r_i \cdot C_p / 2)} & - \text{ в противном случае.} \end{cases} \quad (3)$$

В данном равенстве (3) величина  $q^*_i$  обозначает условный аналог для оптимального размера заказа с поставками именно одним ТС  $i$ -го типа, причем для ситуации, если при оптимизации не учитывается фактор грузоподъемности (разумеется, это будет результат, получаемый именно по модифицированной специальной  $EOQ$ -формуле вида (2)). Кстати, с учетом соотношения (3) наилучшее значение целевой функции  $S_i(q)$  можно определять, в частности, по формуле (1) при  $q = q^*_{0i}$ .

### Специфика оценок для процентной ставки

Имеется определенная особенность рассматриваемой в данной статье модели. Процентная ставка  $r_i$ , которая используется в формулах (1)–(3), требуется при учете концепции ВЦД, а в противном случае, надо использовать равенство  $r_i=0$ . Указанная ставка должна отражать, как это требуется финансовыми теориями, годовую эффективность оборотного капитала, если поставки реализуются одним ТС  $i$ -го типа. Указанную ставку лучше согласовать непосредственно с ЛПР (лицо, принимающее решение). Если все же потребуется формализовать аналитику, то это можно сделать на основе одного из равенств вида (4а) – (4б), которые будут представлены далее.

Выбор одного из указанных двух равенств для соответствующей процентной ставки надо соотносить с форматом моделируемой ситуации. Надо учитывать, что такие ситуации (как показано в работах [3, 5]) зависят от конкретной степени загруженности ТС при поставках. В частности, когда значение величины  $q^*_{0i}$  в (3) составит  $q^*_{0i} = q^*_i$  (это – ситуация, когда фактор грузоподъемности не отражается на оптимальном размере заказа по модифицированной  $EOQ$ -формуле), то необ-

ходимо использовать формулу (4а), которая впервые была приведена в [1]:

$$r_i = \frac{(P_p - L_p) \sqrt{DC_h / C_{0i}} - 2C_h}{C_p + \sqrt{C_{0i}C_h / D}}. \quad (4a)$$

В том случае, когда оптимальное значение показателя  $q^*_{0i}$  в (3) достигается при  $q^*_{0i} = q_{mi}$  (это соотносится с ситуацией, когда значение размера соответствующего заказа, найденное по  $EOQ$ -формуле, превышает грузоподъемность ТС  $i$ -го типа и поэтому его загрузка должна оказаться максимальной), то необходимо использовать формулу (4б):

$$r_i = \frac{(P_p - L_p)D - DC_{0i} / q_{mi} - C_{hi} \cdot q_{mi}}{C_p \cdot q_{mi} + C_{0i}}. \quad (4b)$$

Обоснование формулы (4б) здесь опускается, поскольку будет доказана более общая формула для оценки процентной ставки при поставках заказа любым числом ТС.

Соответственно решение о конкретном выборе из указанных формул ((4а) или (4б)) надо непосредственно указывать, причем это надо делать, соотнося формат принимаемой формулы для  $r_i$  непосредственно с форматом полученной ситуации относительно либо обычной загрузки ТС  $i$ -го типа ( $q^*_{0i} = q^*_i$ ), либо его максимальной ( $q^*_{0i} = q_{mi}$ ) загрузки. Такая процедура легко реализуется в формате процедур оптимизации.

Если априори не планируются поставки сразу несколькими ТС, то приведенные выше формулы позволяют найти наилучшее решение простым перебором. Далее, для удобства изложения, принимается, что такая процедура уже реализована, при этом соответствующие альтернативы (на основе поставок одним ТС) уже ранжированы. Принимаем, что ранжирование реализовано по возрастанию (ухудшению) значения соответствующей целевой функции  $S_i(q^*_{0i})$  при  $i \in \{1, 2, \dots, N\}$ , определяемой равенством (1).

Если при поставках допускается использование сразу нескольких ТС (с учетом скидок на стоимость таких поставок), то для определения оптимальной стратегии потребуются специальный анализ. Такой специальный анализ представлен далее в этой статье. Как было отмечено, соответственно будет представлен анализ ситуаций, когда для поставок товара можно привлекать любое число ТС, в частности разных типов.

### Эффективность поставок любым числом ТС

Далее анализируется случай, когда использовано именно  $k$  ТС для поставок товара. Пусть это будет вариант такого набора ТС, который можно представлять вектором  $(i_1, i_2, \dots, i_k)$ . В соответствии с оговоренным ранее требованием ранжирования ТС (применительно к ситуации поставками одним ТС) далее будем учитывать следующее. Именно то из указанных ТС, тип которого указан первым ( $i_1$ ) в таком векторе, как раз и соответствует лучшей альтернативе при организации поставок одним ТС (по эффективности работы цепи поставок). Соответствующую скидку на суммарные издержки поставки этими  $k$  ТС обозначим  $d(i_1, i_2, \dots, i_k)$ , или кратко  $d^{(k)}$ . Напомним, что показатели такого типа должны быть заданы априори в формате рассматриваемой модели.

С учетом указанной скидки затраты на одну совместную поставку такими  $k$  ТС станут равными  $(1 - d^{(k)}) \cdot \sum_{l=1}^{l=k} C_{0i_l}$  (вместо величины  $\sum_{l=1}^{l=k} C_{0i_l}$ , если не будет скидки). Задача оптимизации поставок для такой специальной альтернативы может быть представлена в виде

$$S_{(k)}(q) = S_{(i_1, i_2, \dots, i_k)}(q) \rightarrow \min_{1 \leq q \leq \sum_{l=1}^{l=k} q_{mi_l}},$$

где

$$S_{(k)}(q) = \frac{((1 - d^{(k)}) \cdot \sum_{l=1}^{l=k} C_{0i_l} \cdot D)}{q} + q \cdot (C_h + r^{(k)} \cdot C_p / 2). \quad (5)$$

Здесь переменная  $q$  представляет суммарный объем поставки для указанных  $k$  ТС (способ их конкретного размещения в формате процедур оптимизации для рассматриваемой модели не важен, поэтому не рассматривается). Показатель  $r^{(k)}$  соответствует краткому обозначению показателя  $r^{(k)} = r(i_1, i_2, \dots, i_k)$ , который должен характеризовать рентабельность оборотного капитала при таких поставках с использованием указанных  $k$  ТС. При  $k=2$  для  $r^{(k)}$ , в частности, можно использовать выражения, приведенные в [2]. Для общего случая соответствующие результаты будут представлены далее.

Отметим, что если бы ограничения ( $q \leq \sum_{l=1}^{l=k} q_{mi_l}$ ) не было в задаче оптимизации (5), то оптимальное решение для суммарного объема заказа с учетом скидки при поставках  $k$  ТС давало бы выражение  $q_{(k)}^*(C)$ :

$$q_{(k)}^*(C) = \sqrt{(1 - d^{(k)}) \cdot q_{(k)}^*}, \quad (6)$$

где

$$q_{(k)}^* = \sqrt{\sum_{l=1}^{l=k} C_{0i_l} \cdot D / (C_h + r^{(k)} \cdot C_p / 2)}.$$

Здесь  $q_{(k)}^*$  - оптимальный размер заказа (для  $k$  ТС) с учетом аренды мест хранения, но без учета ограничений, соотносимых с допустимыми объемами перевозок этими ТС, а также и без учета скидки.

Из (6) легко видеть, что при большом значении дисконта ( $d^{(k)} \rightarrow 1$ ) оптимальное решение  $q_{(k)}^*(C)$  не будет превышать допустимой вместимости этих  $k$  ТС. Поэтому для принятия решения, в общем случае, при анализе эффективности поставок надо учитывать две возможные ситуации из-за ограничений на размер поставляемого заказа.

- В случае  $q_{(k)}^*(C) > \sum_{l=1}^{l=k} q_{mi_l}$  решением для задачи оптимизации размера заказа будет величина  $\sum_{l=1}^{l=k} q_{mi_l}$ , равная суммарной грузоподъемности указанных  $k$  ТС.

- В противном случае, оптимальный суммарный размер заказа даст величина  $q_{(k)}^*(C) = \sqrt{(1 - d^{(k)}) \cdot q_{(k)}^*}$ , при этом значение может быть меньшим, чем суммарная грузоподъемность всех используемых для поставок ТС ( $\sum_{l=1}^{l=k} q_{mi_l}$ ).

Найдем интересующие нас в формате рассматриваемой задачи допустимые значения показателя дисконта, которые, в частности, будут обладать следующим свойством. А именно, здесь принимается, что процедуры оптимизации при использовании указанных ТС (с учетом соответствующих значений дисконта) должны обеспечить для целевой функции, по крайней мере, тот же минимум потерь / затрат, как и при поставках одним из указанных ТС, причем самым предпочтительным. Обозначим минимально допустимое значение дисконта через  $d_{(k)}$  (при совместных поставках указанными ТС).

Соответственно при оптимизации можно будет использовать следующий подход. А именно, когда для предлагаемой скидки (при априори задаваемом дисконте  $d^{(k)}$ ) выполнено неравенство  $d^{(k)} < d_{(k)}$ , то окажется, что такая совмещенная поставка не может быть целесообразной. Соответственно такую стратегию в формате процедур оптимизации можно не рассматривать. В противном случае, соответствующую альтернативу надо будет сравнивать с другими.

Для определения интересующего показателя  $d_{(k)}$ , применительно к указанным выше двум ситуациям, надо составить соответствующее специальное балансовое уравнение относительно переменной  $d$  (чтобы решение дало интересующее нас значение дисконта).

Приведем результаты исследований для случая использования при поставках  $k$  ТС (произвольных типов), представленных вектором  $(i_1, i_2, \dots, i_k)$ . Обратим сначала внимание на следующее обстоятельство. Требуемое балансовое уравнение (которое рассматривается, как уже отмечалось, относительно неизвестного дисконта  $d$ ) в ситуации  $q_{(k)}^*(C) > \sum_{l=1}^{l=k} q_{mi_l}$  имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{C_{0i_l} D}{q_{mi_l}} + q_{mi_l} \cdot (C_h + r_{i_l} \cdot C_p / 2) = \\ = \frac{((1 - d) \cdot (\sum_{l=1}^k C_{0i_l}) \cdot D)}{(\sum_{l=1}^k q_{mi_l})} + (\sum_{l=1}^k q_{mi_l}) \cdot (C_h + r^{(k)} \cdot C_p / 2). \end{aligned}$$

Для используемых ТС соответствующие альтернативы для поставок одним из таких ТС должны быть ранжированы. Это позволило учесть следующую особенность приведенного уравнения. В левой части приведенного здесь балансового уравнения использованы показатели именно  $i_l$ -го ТС. Кроме того, требуемое уравнение представлено уже в упрощенном виде. А именно, левая часть приведенного балансового равенства отражает только те годовые затраты при поставках одним ТС  $i_l$ -го типа (лучшее из указанных ТС), которые зависят от размера заказа. Правая часть соотносится с такими же затратами, но уже при поставках указанными  $k$  ТС при скидке на стоимость такой поставки (с неизвестным дисконтом  $d$ , размер которого надо установить, чтобы обеспечить указанный баланс). Применительно к обеим частям указанного равенства уже опущены (как результат сокращения) те годовые затраты / потери, которые не зависят от выбора размера заказа.

Решение  $d_{(k)}$  последнего уравнения (для  $d$ ) в такой ситуации дает величина

$$d_{(k)} = C_{(k)} + \frac{(\sum_{l=1}^k q_{m_{i_l}})^2}{(q_{(k)}^*)^2} - \frac{q_{m_{i_l}} C_{0_{i_l}} \cdot \sum_{l=1}^k q_{m_{i_l}} / \sum_{l=1}^k C_{0_{i_l}}}{(q_{i_l}^*)^2}.$$

Здесь дополнительно использованы следующие обозначения,

➤  $q_{i_l}^*$  - оптимальный размер заказа при использовании одного ТС именно  $i$ -го типа (причем в ситуации, если нет скидки и нет учета фактора грузоподъемности),

➤ через  $C_{(k)}$  - дополнительный параметр, относящийся к указанному набору из  $k$  ТС, представленного вектором  $(i_1, i_2, \dots, i_k)$ , который определяется по их затратам на поставку (если не будет скидки) и по ограничениям на грузместимость, причем следующим равенством:

$$C_{(k)} = \frac{\sum_{l=1}^k C_{0_{i_l}} - C_{0_{i_l}} \cdot (\sum_{l=1}^k q_{m_{i_l}}) / q_{m_{i_l}}}{\sum_{l=1}^k C_{0_{i_l}}}.$$

Чтобы в формате рассматриваемой ситуации совместные поставки указанным набором из  $k$  ТС при задаваемом априори значении дисконта  $d$  были целесообразны, значение такого дисконта должно удовлетворять следующей системе неравенств относительно  $d$ :

$$\sqrt{(1-d)} \cdot q_{(k)}^* > \sum_{l=1}^{l=k} q_{m_{i_l}}$$

$$d \geq C_{(k)} + \frac{(\sum_{l=1}^{l=k} q_{m_{i_l}})^2}{(q_{(k)}^*)^2} - \frac{q_{m_{i_l}} C_{0_{i_l}} \cdot (\sum_{l=1}^k q_{m_{i_l}}) / (\sum_{l=1}^k C_{0_{i_l}})}{(q_{i_l}^*)^2}.$$

Итак, в формате рассматриваемой общей ситуации/модели для дисконта  $d$  допустимое значение должно удовлетворять системе двух неравенств (7):

$$1 - \left( \frac{\sum_{l=1}^{l=k} q_{m_{i_l}}}{q_{(k)}^*} \right)^2 > d \geq C_{(k)} + \frac{(\sum_{l=1}^{l=k} q_{m_{i_l}})^2}{(q_{(k)}^*)^2} - \frac{q_{m_{i_l}} C_{0_{i_l}} \cdot (\sum_{l=1}^k q_{m_{i_l}}) / (\sum_{l=1}^k C_{0_{i_l}})}{(q_{i_l}^*)^2}. \quad (7)$$

Речь здесь идет только о достаточном условии применительно к дисконту  $d$ , т.к. оно соотносится лишь с одной рассмотренной здесь ситуацией, когда выполняется неравенство  $q_{(k)}^*(C) > \sum_{l=1}^{l=k} q_{m_{i_l}}$ . Далее будет установлено соответствующее необходимое и достаточное условие, поскольку будет также учтена и ситуация

$$q_{(k)}^*(C) \leq \sum_{l=1}^{l=k} q_{m_{i_l}}.$$

Отдельно рассмотрим частный случай возможной организации поставок, если совместные поставки соотносятся с парой  $(i, i)$ , т.е. реализуются двумя транспортными средствами одинакового типа ( $i$ -го). В таком случае необходимо учесть, что  $C_{(k)} = 0$ . Кроме того, надо учесть равенство  $q_{(k)}^* = \sqrt{2} q_{i_l}^*$  (см. (3)). При этом

условие (7) для допустимого значения дисконта может быть упрощено и приведено к виду (7\*):

$$1 - 2 \left( \frac{q_{m_{i_l}}}{q_{i_l}^*} \right)^2 > d \geq \left( \frac{q_{m_{i_l}}}{q_{i_l}^*} \right)^2. \quad (7^*)$$

Подчеркнем, что формат условий (7\*) соответствует результату, полученному для такого случая при совместных поставках парой ТС одного типа [2].

Далее, опуская доказательство (для сокращения объема статьи) отметим, что применительно к ситуации  $q_{(k)}^*(C) \leq \sum_{l=1}^{l=k} q_{m_{i_l}}$ , когда используются  $k$  ТС любого типа, для эффективности предоставляемой скидки потребуются выполнение условий (8):

$$\left\{ \begin{array}{l} d \geq 1 - \left( \frac{\sum_{l=1}^{l=k} q_{m_{i_l}}}{q_{(k)}^*} \right)^2 \\ d \geq 1 - \left( \frac{L_i(q_{m_{i_l}})}{L_{(k)}(q_{(k)}^*)} \right)^2 \end{array} \right. \quad (8)$$

Здесь  $L_i(q_{m_{i_l}})$  будет рассматриваться в качестве значения специальной функции  $L_i(x)$  общих годовых издержек (на поставки и на хранение, когда поставки осуществляются с использованием одного ТС  $i$ -го типа, если перевозить товар партиями объемом  $x = q_{m_{i_l}}$ ). Соответственно, указанное значение определяется равенством  $L_i(x) = C_{0_{i_l}} D/x + x \cdot (C_h + r_i \cdot C_p / 2)$  при  $x = q_{m_{i_l}}$ . Величину  $L_{(k)}(q_{(k)}^*)$  можно рассматривать как значение специальной функции  $L_{(k)}(x)$ , характеризующей аналогичные суммарные годовые издержки при совместных поставках указанными выше  $k$  ТС, если перевозить товар партиями объемом  $x = q_{(k)}^*$ . Соответственно, указанное значение надо определять равенством  $L_{(k)}(x) = (\sum_{l=1}^{l=k} C_{0_{i_l}}) \cdot D/x + x \cdot (C_h + r^{(k)} \cdot C_p / 2)$  при  $x = q_{(k)}^*$ .

Таким образом, можно оформить результат, который позволит выполнять анализ эффективности транспортного обеспечения поставок произвольным числом ТС.

**Утверждение.** Необходимым и достаточным условием, при котором совместное использование  $k$  ТС конкретных типов для поставок товара (с обязательной скидкой на совместные поставки) при оптимизации запасов в *EOQ*-модели с арендой мест хранения будет не менее эффективно, чем реализация поставок любым одним из них, является условие выполнения для предлагаемого дисконта на стоимость совместных поставок одной из двух несомненных систем неравенств: либо (7), либо (8). В случае, когда выполняется условие (7), все соответствующие  $k$  ТС надо будет загружать максимально.

#### Оценка рентабельности совместных поставок любыми ТС

Для того чтобы иметь возможность реализовать представленный в данной работе подход к оптимизации поставок применительно к моделям управления запасами, финальным штрихом остается реализовать следующую процедуру. Надо оценить соответствующее значение процентной ставки  $r^{(k)}$ , которое можно

использовать в приведенных выше формулах. Напомним, что в соответствии с финансовыми теориями интересующая нас процентная ставка должна характеризовать эффективность преобразования (в формате рассматриваемой цепи поставок) оборотного капитала соответственно в прибыль. При этом надо учитывать, что при поставках используются любые  $k$  ТС. Формула для ее определения будет зависеть от того, будут ли транспортные средства загружены максимально в соответствии с их грузоподъемностью или нет.

В общем виде формулы для интересующей нас ставки будут найдены далее аналитически, на основе моделирования анализируемых денежных потоков (как уже отмечалось, с учетом дисконта на стоимость совместных поставок). При этом не будем учитывать ВЦД, чтобы полученный результат не зависел от желания ЛПР учитывать (или нет) в формате процедур оптимизации концепцию ВЦД.

Сначала рассмотрим случай, когда фактор грузоподъемности не отразится на результатах оптимизации.

Установим денежные потоки в пределах интервала времени между соседними поставками. Если использовать указанные  $k$  ТС, то традиционные рекомендации (без учета ВЦД) приведут к поставкам с использованием следующего размера заказа:

$$q_{(k)}^*(C) = \sqrt{(1-d^{(k)})} \cdot q_{(k)}^* = \sqrt{(1-d^{(k)})} \cdot \sqrt{\sum_{l=1}^k C_{0i_l} \cdot D / C_h}.$$

В таком случае для числа поставок за год получим выражение  $D / q_{(k)}^*(C) = \sqrt{C_h D / [(1-d^{(k)}) \sum_{l=1}^k C_{0i_l}]}$ .

Денежные вложения в работу моделируемой цепи поставок (на интервале повторного заказа) включают в себя: 1) затраты, которые будут обусловлены именно доставкой товаров –  $(1-d^{(k)}) \sum_{l=1}^k C_{0i_l}$ ; 2) затраты, которые будут обусловлены оплатой стоимости поставляемых товаров –  $q_{(k)}^*(C) \cdot C_p$ .

Кроме того, надо напомнить/уточнить, что для моделируемых денежных потоков также принято следующее. Соответствующие издержки хранения оплачиваются из выручки. Их не требуется включать в оборотный капитал. Соответствующие отчисления (вида  $L_p$ ) также могут быть реализованы из выручки. Таким образом, далее можно отметить следующее:

➤ Размер оборотного капитала (для моделируемой цепи поставок) в начале периода должен быть равен:

$$L_I = (1-d^{(k)}) \sum_{l=1}^k C_{0i_l} + q_{(k)}^*(C) \cdot C_p.$$

➤ Объем прибыли  $Y_I$  на одном периоде составляет:

$$Y_I = q_{(k)}^*(C) \cdot (P_p - L_p) - 2(1-d^{(k)}) \sum_{l=1}^k C_{0i_l},$$

причем при расчете уже учтено, что при оптимальных поставках издержки поставки совпадут с затратами на хранение (в ситуации без учета ВЦД).

Найдем показатель средней годовой прибыли  $Y$ . Сделаем это применительно к формату модели без учета ВЦД, чтобы результат не зависел от того, посчитает ли ЛПР необходимым учитывать ВЦД для такой модели. Результат получим по формуле  $Y = Y_I \cdot (D / q_{(k)}^*(C))$ , т.е. как среднюю ожидаемую сумму прибылей по всем поставкам за год:

$$Y = D \cdot (P_p - L_p) - 2 \sqrt{(1-d^{(k)}) \left( \sum_{l=1}^k C_{0i_l} \right)} \cdot D \cdot C_h.$$

Теперь легко проверить, что оценку показателя рентабельности для рассмотренной ситуации дает формула (9):

$$r^{(k)} = \frac{(P_p - L_p) \sqrt{D C_h / [(1-d^{(k)}) \sum_{l=1}^k C_{0i_l}] - 2 C_h}}{C_p + \sqrt{(1-d^{(k)}) \sum_{l=1}^k C_{0i_l} \cdot C_h / D}}. \quad (9)$$

Кстати, при  $k=2$  это выражение дает результат, полученный в [2].

Аналогичным образом (без учета ВЦД), анализируется и другая ситуация, когда грузоподъемность ТС окажет влияние на результат оптимизации (когда размер заказа при поставках  $k$  ТС составит  $\sum_{l=1}^k q_{mi_l}$ ). Тогда

число поставок за год составит  $D / \sum_{l=1}^k q_{mi_l}$ . Денежные вложения при таких поставках будут включать:

1) для издержек доставки получаем значение  $(1-d^{(k)}) \sum_{l=1}^k C_{0i_l}$ ;

2) для оплаты стоимости товара потребуется сумма  $C_p \cdot \sum_{l=1}^k q_{mi_l}$ . Принимаем, что издержки хранения оплачиваются из выручки. Это же относится и к дополнительным требуемым отчислениям (вида  $L_p$ ). Применительно к формату такой ситуации получаем:

➤ Требуемый оборотный капитал (значение затрат  $L_I$ ) следующего размера:  $L_I = (1-d^{(k)}) \sum_{l=1}^k C_{0i_l} + C_p \cdot \sum_{l=1}^k q_{mi_l}$ .

➤ Объем прибыли  $Y_I$  на одном периоде будет равен:  $Y_I = \sum_{l=1}^k q_{mi_l} \cdot (P_p - L_p) - (1-d^{(k)}) \sum_{l=1}^k C_{0i_l} - C_h \cdot \left( \sum_{l=1}^k q_{mi_l} \right)^2 / D$ .

Для значения средней ожидаемой прибыли за год  $Y$  (без учета ВЦД) имеем:

$$Y = D \cdot (P_p - L_p) - D(1-d^{(k)}) \left( \sum_{l=1}^k C_{0i_l} \right) \left( \sum_{l=1}^k q_{mi_l} \right) - C_h \left( \sum_{l=1}^k q_{mi_l} \right).$$

С учетом указанного выше оборотного капитала легко проверить, что оценку рентабельности оборотного капитала  $r^{(k)}$  в указанной ситуации дает формула (10):

$$r^{(k)} = \frac{D(P_p - L_p) - D \left( \sum_{l=1}^k C_{0i_l} \right) (1-d^{(k)}) / \left( \sum_{l=1}^k q_{mi_l} \right) - C_h \left( \sum_{l=1}^k q_{mi_l} \right)}{C_p \cdot \sum_{l=1}^k q_{mi_l} + (1-d^{(k)}) \sum_{l=1}^k C_{0i_l}} \quad (10)$$

Кстати, при  $k=2$  найденное в этой ситуации для  $r^{(k)}$  выражение также совпадает с выражением в [2].

Требуемый тип формулы (9) – (10), которую надо использовать в конкретной ситуации в формате процедур оптимизации поставок, надо будет уточнять при определении размера заказа. Этот аспект процедур оптимизации легко реализуется, когда станет понятно, как будут загружены используемые ТС (обычно или максимально по их грузоподъемности).

## Выводы

В данной статье проведен анализ эффективности поставок при совместном использовании любого множества ТС (причем любых типов, а также и любого их количества, и взаимных комбинаций) для поставок товара, если оптимизируются задачи управления запасами в формате модифицированной *EOQ*-модели. Анализ проведен для специальных и важных для практики модификаций указанных моделей, с которыми можно соотносить работу эффективных цепей поставок. Это - модели, в формате которых затраты на очередную поставку могут быть реализованы из выручки, полученной непосредственно от предыдущей поставки [5]. Рассмотрены задачи оптимизации, формат которых обусловлен следующей спецификой процедур принятия решений:

- 1) возможностью использования различных типов и комбинаций транспортных средств для поставок товара;
- 2) необходимостью учета параметров грузоподъемности ТС, используемых при поставках продукции;
- 3) желанием лица, отвечающего за принятие решения, учитывать (или не учитывать) концепцию ВЦД при реализации соответствующих оптимизационных процедур;
- 4) необходимостью предоставления скидок на стоимость таких поставок, когда происходит увеличение числа используемых для поставок ТС.

Для указанных типов задач оптимизации решений при управлении запасами рассмотрены новые форматы постановок. А именно, для рассматриваемых в работе моделей найдено и доказано необходимое и достаточное условие, позволяющее обеспечить эффективность совместного использования любых возможных комбинаций ТС при поставках товара в соответствующих *EOQ*-моделях управления запасами. Речь идет о таком условии, которое позволит менеджеру установить допустимый уровень дисконта / скидки, чтобы соответствующие оптимальные поставки любыми наборами ТС (любого типа, а также любого их числа) становились более эффективными, чем аналогичные оптимальные поставки, но реализуемые только одним (любым) ТС.

Представленные материалы проиллюстрировали, что полученные результаты позволят модифицировать традиционный алгоритм оптимизации для систем управления запасами, что, в частности, может составить предмет отдельного исследования.

## Литература

1. Бродецкий Г.Л. Многономенклатурное управление запасами: новый подход к оптимизации решений // Логистика сегодня. - 2014. - № 1. - С. 34-45.

2. Бродецкий Г.Л., Герами В.Д., Шидловский И.Г. Эффективность поставок двумя транспортными средствами в *EOQ*-моделях с учетом факторов грузоподъемности и аренды мест хранения // Финансовая жизнь. - 2020. - №3. - С. 98-108.

3. Brodetskiy G.L. The new approach to inventory optimization // Int. J. of Logistics Systems and Management (IJLSM). – 2015. Vol. 22, No. 3, pp. 251-266.

4. Brodetskiy G.L. Inventory optimisation taking into account time value of money and order payment deferrals // Int. J. of Logistics Systems and Management (IJLSM). – 2017. Vol. 28, No. 4, pp. 486-506.

5. Gerami V., Shidlovskii I. Factoring in Vehicle Capacity in Multinomenclature *EOQ*-models // International Journal of Logistics Systems and Management.- 2019. Vol. 33. No. 2. P. 167-189.

6. Tersine R. J., and Barman S. Optimal Lot Sizes For Unit And Shipping Discount Situations // IIE Transactions. – 1994. Vol. 26:2, pp. 97-101.

## Сведения об авторах

**Бродецкий Геннадий Леонидович**, д.т.н., профессор департамента операционного менеджмента и логистики Высшей школы бизнеса Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики», 119049, г. Москва, ул. Шаболовка, д. 28/11, стр. 9, каб. 1117

Телефон: +7 915 439-41-02 (моб.)

E-mail: bgl@mclog.ru

**Герами Виктория Даравовна**, д.т.н., профессор департамента операционного менеджмента и логистики Высшей школы бизнеса Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики», 119049, г. Москва, ул. Шаболовка, д.26, стр.3, каб. 3307

Телефон: +7 903 961-40-04 (моб.)

E-mail: vgerami@hse.ru, victoria.gerami@gmail.com

**Шидловский Иван Геннадьевич**, к.э.н., ст. преподаватель департамента операционного менеджмента и логистики Высшей школы бизнеса Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики»,

119049, г. Москва, ул. Шаболовка, д. 28/11, стр. 9, каб. 1118

Телефон: +7(985) 292-22-69 (моб.)

E-mail: ishidlovskiy@hse.ru, shdlvsk-ivan@yandex.ru.