DOI: 10.36535/0869-1010-2021-03-4

ИССЛЕДОВАНИЕ СПЕКТРАЛЬНОЙ СТРУКТУРЫ КУСОЧНО - СТЁРТЫХ ПРОЦЕССОВ

канд. физ.-мат. наук, доцент В.В. Климов
Институт радиотехники и электроники им. В. А. Котельникова РАН,
Фрязинский филиал
г. Фрязино (klimov47@list.ru)

Предлагается метод восстановления полигармонического процесса при наличии в нём нескольких временных интервалов с пропущенными отрезками данных и при неизвестном числе гармоник. В частном случае предлагаемый алгоритм совпадает с методом Лагранжа – Дейля.

Ключевые слова: гармоника, амплитуда, период, матрица, временной ряд, конечная разность

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 19-07-0044 3_а.

INVESTIGATION OF THE SPECTRAL STRUCTURE PIECEWISE ERASED PROCESSES

V.V. Klimov

A method for restoring the polyharmonic process is proposed if it contains several time intervals with missing data segments and an unknown number of harmonics. In a particular case the proposed algorithm coincides with the Lagrange-Dale method.

Keywords: harmonic, amplitude, period, matrix, time series, finite difference

Известные методы оценки параметров спектральной структуры дискретных процессов (критерий Кюнена, метод Лагранжа-Дейля [6], критерий Гопфнера и др.) предполагают наличие достаточно большого ряда эквидистантных наблюдений $y_1, y_2,, y_m$ (число наблюдений m должно удовлетворять условию $m > 4N+2$, где N - число гармоник). В практических ситуациях часто возникает такое положение, когда некоторое число наблюдений оказывается пропущенным. И хотя общее количество точек наблюдения бывает велико, «непрерывных отрезков» ряда с числом точек наблюдения $m>4N+2$ нет, но при этом встречаются достаточное число отрезков ряда $\{y_1^{(l)}, y_2^{(l)}, ..., y_{ml}^{(l)}\}$ с числом эквидистантных наблюдений $m_l > 2N+1$, где $j = 1,2,\dots,N,\dots$

Применить известные методы определения числа синусоидальных компонент в этом случае не удается, т.к. нарушена непрерывность наблюдений. Итак, пусть имеется ряд числовых наблюдений $y_1, y_2, \dots, y_m$. Во временном ряде пропущено некоторое число наблюдений и имеется возможность рассматривать данный ряд как некую совокупность отрезков временных рядов $\{(y_1^1, y_2^1, ..., y_{ml}^1), (y_1^2, y_2^2, ..., y_{ml}^2), ..., (y_1^l, y_2^l, ..., y_{ml}^l)\}$, где $\sum_{j=1}^{l} m_j = m$.

Положим, что число синусоидальных компонент N нам известно и выполнены условия:

$$l \geq N, m_j > 2N+1, j = 1,2,,...,l. \tag{1}$$

Тогда ординату $y_{sj}^{(j)}$ j-го отрезка ряда можно представить в виде

$$y_{sj}^{(j)} = y_{cp} + \sum_{i=1}^{N} \sin(\frac{2\pi}{T_i} s_j g + \alpha_i^{(j)}); \ j = 1,2,,...,l; 1 \leq s_j \leq m_j \tag{2}$$

Необходимо отметить, что при такой форме записи для различных отрезков временного ряда начальные фазы одной и той же компоненты в общем случае различны $\alpha_i^{(j)} \neq \alpha_i^{(k)}; i = 1, N; \ j \neq k; \ j,k = 1,2,...,l$.

Составим для каждого отрезка временного ряда центральные конечные разности четных порядков

$$\Delta^{2j} y_{sk}^{(k)} = y_{sk-j}^{(k)} - c_{2j}^1 y_{sk-j+1}^{(k)} + c_{2j}^2 y_{sk-j+2}^{(k)} + ... + c_{2j}^{2j-2} y_{sk+j-2}^{(k)} - c_{2j}^{2j-1} y_{sk+j-1}^{(k)} + y_{sk+j}^{(k)} \tag{3}$$
$$k = 1,2,...,l$$

Подставляя в (3) выражение (2) для $y_t^{(k)}; k = 1,2,...,l; t = 1,2,...,m_k$ и проводя соответствующие тригонометрические преобразования, получим аналогично

$$\Delta^{2j} y_{sk}^{(k)} = (-1)^j 2^{2j} \sum_{i=1}^{N} r_i (\sin\frac{\pi g}{T_i})^{2j} \sin(\frac{2\pi}{T_i} s_k g + \alpha_i^{(k)}) \tag{4}$$
$$k = 1,2,\ldots,l; \ j = 1,2,\ldots,N$$

Обозначив для краткости

$$\lambda_i = 4\sin^2\frac{\pi g}{T_i}; A_i^{(k)} = r_i \sin(\frac{2\pi}{T_i} s_k g + \alpha_i^{(k)}) \tag{5}$$
$$\mathrm{i = 1,2,..., N; k = 1,2,..., l}$$

Перепишем систему уравнений (2) и (4) в виде

$$y_{sj}^{(j)} - y_{cp} = \sum_{i=1}^{N} A_i^{(k)}$$

$$\Delta^{2j} y_{sk}^{(k)} = (-1)^j \sum_{i=1}^{N} A_i^{(k)} \lambda_i^j \tag{6}$$

$$k = 1,2,\ldots, l; \ j = 1,2,\ldots, N,\ldots$$

Для дальнейшего удобно ввести обозначения

$$B_t^{(k)} = \sum_{i=1}^{N} A_i^{(k)} \lambda_i^j = \begin{cases} y_{sj}^{(j)} - y_{cp}, npu\_t = 0 \\ (-1)^t \Delta^{2t} y_{sk}^{(k)}, npu\_t = 1,2,...,N,... \end{cases} \quad (7)$$

$$k = 1,2,...,l$$

Таким образом имеется возможность получить по наблюдаемым отрезкам рядов $\{(y_1^1, y_2^1,..., y_{ml}^1), (y_1^2, y_2^2,..., y_{ml}^2),..., (y_1^l, y_2^l,..., y_{ml}^l)\}$ систему значений

$$\{(B_0^{(1)}, B_1^{(1)},..., B_N^{(1)},...), (B_0^{(2)}, B_1^{(2)},..., B_N^{(2)},...),..., (B_0^{(l)}, B_1^{(l)},..., B_N^{(l)},...)\}$$

связанную с неизвестными параметрами

$$\{(\mathrm{r_i}, \mathrm{T_i}, \alpha_i^{(k)}); i = 1, N; k = 1,2,...,l\}$$

системами (7) и (8). Соответственно задача сводится к нахождению по известной последовательности $(B_0^{(k)}, B_1^{(k)},..., B_N^{(k)},...); k = 1,2,...,l$ регулярного способа определения $\{(\mathrm{r_i}, \mathrm{T_i}, \alpha_i^{(k)}); i = 1, N; k = 1,2,...,l\}$, а также при необходимости, и числа N синусоидальных компонент ряда. Допустим, что число синусоидальных компонент известно. При выполнении условий однозначного определения периодов гармоник (g < 0,5 T min ,где T min – наименьший период синусоидальных компонент) удовлетворяется условие $\lambda_i \neq \lambda_j$ при T_i=T_j; i,j=1,N.

Положим, что величины $\lambda_1, \lambda_2,..., \lambda_N$ - корни уравнения

$$\lambda^N + C_{N-1}\lambda^{N-1} + ... + C_1\lambda + C_0 = 0 \quad (8)$$

Возьмем в системе (7) какую-нибудь группу из N+1 последовательных уравнений, например группу

$$\begin{aligned} B_0^{(k)} &= \sum_{i=1}^{N} A_i^{(k)} \\ B_1^{(k)} &= \sum_{i=1}^{N} A_i^{(k)} \lambda_i \\ &..... \\ B_N^{(k)} &= \sum_{i=1}^{N} A_i^{(k)} \lambda_i^N \end{aligned} \quad (9)$$

Отсюда можно получить для системы $(B_t^{(k)}, t = 0,1,2,..., N)$ уравнение

$$B_N^{(k)} + C_{N-1}B_{N-1}^{(k)} + ... + C_1 B_1^{(k)} + C_0 B_0^{(k)} = 0 \qquad (10)$$

Таким же образом, полагая, последовательность *k* равным 1,2,…,*N* получим систему линейных уравнений относительно неизвестных (C_0,C_1,…,C_{N-1})

$$D(NxN)\overline{C} = -\overline{G} \qquad (11)$$

где использованы обозначения

$$D(NxN) = \begin{Vmatrix} B_0^{(1)} & B_1^{(1)} & ... & B_{N-1}^{(1)} \\ B_0^{(2)} & B_1^{(2)} & ... & B_{N-1}^{(2)} \\ ... & ... & ... & ... \\ B_0^{(N)} & B_1^{(N)} & ... & B_{N-1}^{(N)} \end{Vmatrix}; \overline{C} = \begin{Vmatrix} C_0 \\ C_1 \\ ... \\ C_N \end{Vmatrix}; \overline{G} = \begin{Vmatrix} B_N^{(1)} \\ B_N^{(2)} \\ \\ B_N^{(N)} \end{Vmatrix} \qquad (12)$$

При условии, что матрица $D(NxN)$ неособенная, из решения уравнения (11) легко получить $\overline{C}$, что позволяет дальше, определяя корни уравнения (8), получить значения $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_N$. Можно непосредственно определить $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_N$ как корни уравнения

$$P(\lambda) = \frac{1}{\det D(NxN)} \det \begin{Vmatrix} B_0^{(1)} & B_1^{(1)} & ... & B_{N-1}^{(1)} & B_N^{(1)} \\ B_0^{(2)} & B_1^{(2)} & ... & B_{N-1}^{(2)} & B_N^{(2)} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ B_0^{(N)} & B_1^{(N)} & ... & B_{N-1}^{(N)} & B_N^{(N)} \\ 1 & \lambda & ... & \lambda^{N-1} & \lambda^N \end{Vmatrix} = 0 \qquad (13)$$

Определив $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_N$ из (8) или (13), из (5) находим периоды

$$T_i = \frac{\pi g}{\arcsin(0{,}5\sqrt{\lambda_i})}; i = 1,2,..., N \qquad (14)$$

и параметры $\{(\mathrm{r_i}, \alpha_i^{(k)}); i = 1, N; k = 1, N\}$ например, методом наименьших квадратов. Рассмотрим возможность определения числа синусоидальных компонент временного ряда. Пусть число синусоидальных компонент ряда, равное N, неизвестно наблюдателю. Введем в рассмотрение квадратную матрицу размером $k \times k$

$$D(NxN)=\begin{Vmatrix} B_0^{(1)} & B_1^{(1)} & \dots & B_{k-1}^{(1)} \\ B_0^{(2)} & B_1^{(2)} & \dots & B_{k-1}^{(2)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ B_0^{(k)} & B_1^{(k)} & \dots & B_{k-1}^{(k)} \end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix} \sum_{i=1}^{N} A_i^{(1)} & \sum_{i=1}^{N} A_i^{(1)}\lambda_i & \dots & \sum_{i=1}^{N} A_i^{(1)}\lambda_i^{k-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum_{i=1}^{N} A_i^{(k)}\lambda_i^{N} & \sum_{i=1}^{N} A_i^{(k)}\lambda_i & \dots & \sum_{i=1}^{N} A_i^{(k)}\lambda_i^{k-1} \end{Vmatrix} \quad (15)$$

которую можно представить в виде произведения

$$D(kxk)=T(kxN)P(Nxk) \quad (16)$$

где

$$T(kxN)=\begin{Vmatrix} A_1^{(1)} & A_2^{(1)} & \dots & A_N^{(1)} \\ A_1^{(2)} & A_2^{(2)} & \dots & A_N^{(2)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_1^{(k)} & A_2^{(k)} & \dots & A_N^{(k)} \end{Vmatrix}; P(Nxk)=\begin{Vmatrix} 1 & \lambda_1 & \dots & \lambda_1^{k-1} \\ 1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_2^{k-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \lambda_N & \dots & \lambda_N^{k-1} \end{Vmatrix}=L^T(kxN) \quad (17)$$

Используя формулу Бине-Коши [4], вычислим определитель матрицы $D(k \times k)$

$$\det D(kxk)=\begin{cases} 0 \\ \sum\limits_{1\le m1<m2<\dots<mN\le l-N+1} T\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & k \\ m_1 & m_2 & \dots & m_k \end{pmatrix} P\begin{pmatrix} m_1 & m_1 & \dots & m_1 \\ 1 & 2 & \dots & k \end{pmatrix}; k \le N \end{cases} \quad (18)$$

где $P\begin{pmatrix} m_1 & m_1 & \dots & m_1 \\ 1 & 2 & \dots & k \end{pmatrix}$-минор порядка k матрицы $P(N \times k)$, равный

$$P\begin{pmatrix} m_1 & m_1 & \dots & m_1 \\ 1 & 2 & \dots & k \end{pmatrix}=\prod_{1\le j<i\le k}\left(\lambda_{mi}-\lambda_{mj}\right) \quad (19)$$

И в силу $\lambda_i \ne \lambda_j; i \ne j; i, j=1,N$ не обращается в нуль.

Здесь $T\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & k \\ m_1 & m_2 & \dots & m_k \end{pmatrix}$- означает минор порядка k матрицы $T(k \times N)$. Элемент $A_i^{(k)}$ матрицы $T(k \times N)$ имеет вид

$$A_i^{(k)}=r_i \sin\left(\frac{2\pi}{T_i} s_k g+\alpha_i^{(k)}\right)$$

$$\mathrm{k}=1,2,\dots,\mathrm{l}; \mathrm{i}=1,2,\dots,\mathrm{N}$$

Отметим, что при переходе от одного отрезка ряда к другому получаемые синусоидальные A_i $u\Delta_j$ фазовые сдвиги различны, т.е.

$$\begin{aligned}&\alpha_i^{(k+1)}-\alpha_i^{(k)}\neq\alpha_j^{(k+1)}-\alpha_j^{(k+1)}\\&i\neq j; i,j=1,2,...,N; k=1,2,...,N\end{aligned} \tag{20}$$

И поэтому, в общем случае строки матрицы *T(k x N)* линейно независимы, что позволяет для ранга матрицы *T(k x N)* записать

$$rankT(kxN)=\begin{cases}k, npu\_k<N\\N, npu\_k\geq N\end{cases} \tag{21}$$

Таким образом, среди миноров порядка *k* матрицы *T*(*k x N*) имеются ненулевые.

Это не дает основания утверждать, что определитель матрицы *D(k x k)* (18) при $k\leq N$ обязательно отличен от нуля. Однако, путём изменения порядка строк *D*(*kxk*) и путём выбора других точек $\{y_{s1}^{(1)},y_{s2}^{(2)},...,y_{sk}^{(k)}\}$ в отрезках временного ряда при вычислении конечных разностей четного порядка (3) можно всегда добиться того, что определитель таким образом видоизмененной матрицы *D*(*k x k*) будет отличен от нуля при $k\leq N$ и равен нулю в обратном случае. Проведенное рассмотрение позволяет предложить метод определения числа синусоидальных компонент и их параметров $\{\mathrm{N};(\mathrm{r_i},\mathrm{T_i},\alpha_i^{(k)});i=1,N;k=1,N\}$ применительно к процессам с пропущенными наблюдениями [1,3]. По имеющемуся ряду $y_1,y_2,\ldots,y_m$ с пропущенными наблюдениями формируем совокупность эквидистантных отрезков временных рядов

$$\{(y_1^1,y_2^1,...,y_{ml}^1),(y_1^2,y_2^2,...,y_{ml}^2),...,(y_1^l,y_2^l,...,y_{ml}^l)\}.$$

Для каждого эквидистантного отрезка ряда вычисляем центральные конечны разности четных порядков

$$\{\Delta^{2j}y_{sk}^{(k)},k=1,2,...,N,...l;j=1,2,...,N,...\}$$

и на их основе получаем систему

$$\{(B_0^{(1)},B_1^{(1)},...,B_N^{(1)},...),(B_0^{(2)},B_1^{(2)},...,B_N^{(2)},...),...,(B_0^{(l)},B_1^{(l)},...,B_N^{(l)},...)\}$$

далее составляем матричную последовательность $\{D(k\times k),k=1,2,\ldots\}$

$$\mathrm{D(kxk)}=\begin{Vmatrix}B_0^{(1)}&B_1^{(1)}&...&B_{k-1}^{(1)}\\B_0^{(2)}&B_1^{(2)}&...&B_{k-1}^{(2)}\\...&...&...&...\\B_0^{(k)}&B_1^{(k)}&...&B_{k-1}^{(k)}\end{Vmatrix}$$

И вычисляются определители det $D\ (k \times k)$ каждой последовательности. Данный процесс обрывается после того, как найдется некоторая матрица $D\ (k_0 \times k_0)$ в последовательности $\{D(k \times k), k=1,2,\}$, определитель которой «устойчиво» равен 0, т.е. сохраняет свое ненулевое значение при изменении порядка строк в $D(k_0 \times k_0)$ и при выборе других значений $\{y_{s1}^{(1)}, y_{s2}^{(2)}, ..., y_{sk}^{(k)}\}$ для вычисления центральных конечных разностей согласно алгоритму (3). В этом случае число синусоидальных компонент временного ряда $N=k_0-1$. Определение параметров $\{(\mathrm{r_i}, \mathrm{T_i}, \alpha_i); i=1,N\}$ синусоидальных компонент ряда можно осуществить согласно описанной выше методики с использованием выражений (13) и (14).

В заключении отметим, что в описанном методе можно использовать вместо центральных конечных разностей четного порядка разности и суммы разностей ординат, аналогичные находящим применение в методе Лагранжа-Дейля [2,3,5]. Запишем разности и суммы разностей в виде

$$
\begin{aligned}
&\Delta_0 = y_1 - y_0 \\
&\Delta_1 = y_2 - y_1; E\Delta_1 = \Delta_0 + \Delta_2 \\
&\Delta_2 = y_3 - y_2; E\Delta_2 = \Delta_1 + \Delta_3; E\Delta^2{}_2 = E\Delta_1 + E\Delta_3 \\
&\dots\dots\dots\dots \\
&\Delta_k = y_{k+1} - y_k; E\Delta_k = \Delta_{k+1} + \Delta_{k-1}; E\Delta^2{}_k = E\Delta_{k-1} + E\Delta_{k+1}
\end{aligned}
\tag{22}
$$

Подставляем в (22) выражение для y_s (2), получим

$$
\begin{aligned}
&\Delta_s = \sum_{i=1}^{N} 2r_i \sin\frac{w_i g}{2} \cos(w_i \frac{2s+1)}{2} g + \alpha_i) \\
&E\Delta_s = \sum_{i=1}^{N} 2r_i \sin\frac{w_i g}{2} \cos(w_i \frac{2s+1)}{2} g + \alpha_i) 2\cos w_i g \\
&\dots \\
&E^l \Delta_s = \sum_{i=1}^{N} 2r_i \sin\frac{w_i g}{2} \cos(w_i \frac{2s+1)}{2} g + \alpha_i) 2^l \cos^l w_i g
\end{aligned}
\tag{23}
$$

где $w_i = \dfrac{2\pi}{T_i}$

Если обозначить

$$A_i = 2r_i \sin\frac{w_i g}{2} \cos(w_i \frac{2s+1)}{2} g + \alpha_i); \lambda_i = 2\cos w_i g$$

то систему уравнений (23) можно записать так:

$$E^l \Delta_s = \sum_{i=1}^{N} A_i^{(k)} \lambda_i^l ; l = 0,1,2,\ldots, \text{ где } E^0 \Delta_s = \Delta_s .$$

Таким образом, вычисляя на основе временного ряда $y_1, y_2, \ldots, y_m$ разности и суммы согласно алгоритма (22), получаем систему параметров

$$\{B_k = E^k \Delta_s = \sum_{i=1}^{N} A_i \lambda_i^k\}$$

Если для процесса без стирания $y_1, y_2, \ldots, y_m$ формировать разности (22) для соседних точек $y_s, y_{s+1}, \ldots, y_{s+\nu-1}$ вместо точек $(y_{S1}^{(1)}, y_{S2}^{(2)}, \ldots, y_{SN}^{(N)})$ в различных отрезках ряда и далее проводить анализ по описанной методике, то предлагаемый алгоритм совпадёт с методом Лагранжа-Дейля.

Литература

1. Абрамов А.Д., Климов В.В., Коновалов Л.Н. Исследование спектральной структуры метеопроцессов. - В кн.: Математическое моделирование в задачах радиотехники и электроники. М, 1984, ч.2, с.152-166.
2. Андерсон Т. Статистический анализ временных рядов. М.: Мир, 1976
3. Голд Б., Рейдер Ч. Цифровая обработка сигналов. – М.: Сов. Радио, 1973 г.
4. Ланкастер П. Теория матриц. М.: Наука, 1978.
5. Кендалл М. Дж., Стюарт А. Многомерный статистический анализ и временные ряды. М.: Наука, 1976 г.
6. Серебренников М.Г., Первозванский А.А. Выявление скрытых периодичностей. М.: Наука, 1965.