УСТОЙЧИВОЕ РАЗВИТИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКОМ ОБРАЗОВАНИИ – ПРИМЕР ТОГО, КАКИЕ ЗНАЧЕНИЯ БУДУЩИЕ КЛАССНЫЕ РУКОВОДИТЕЛИ НАХОДЯТ ДЛЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО СИМВОЛА “2/3”?

Jorma Joutsenlahti[1], *Päivi Perkillä*[2]

[1] Факультет образования и культуры университета Тампере, Финляндия. 3
[2] Факультет образования, университет Ювяскюля, Финляндия

MDPI[3]

[3] Издатель научного журнала с открытым доступом.
Издательство выделилось из Международной организации сохранения молекулярного развития (MDPI) в 2010 г., со штаб-квартирой в Цюрихе.

SUSTAINABILITY DEVELOPMENT IN MATHEMATICS EDUCATION – A CASE STUDY OF WHAT KIND OF MEANING DO PROSPECTIVE CLASS TEACHERS FIND FOR MATHEMATICAL SYMBOL “2/3”?

Резюме

В этой статье наше внимание сосредоточено на устойчивом развитии математического образования при подготовке преподавателей. Цель состояла в развитии у будущих преподавателей содержательных знаний и педагогического содержания школьной математики. В качестве конкретного примера мы выбрали математический символ “a/b”, и сделали обзор того, как будущие классные руководители в Финляндии будут соединять его с концепциями дроби, отношения, деления, рационального числа или вероятности. Математические учебники часто играют основную роль на уроках, и они оказывают сильное влияние на то, как ученики понимают концепции и отношения между ними. Мы выбрали языковое общение как мульти семиотический[1] *подход для интерпретации того, какого вида значения будущие классные руководители находят для математический символа “a/b”. Результаты показывают, что некоторые из этих концепций трудно воспринимать в то же самое время из данного математического символа. Концепция отношения особенно трудна для интерпретации будущими классными руководителями. Изобразительная презентация поддерживает интерпретации. Материалы математического обучения и образования преподавателей должны развиваться в соответствии с результатами исследования.*

---

[1] Семиотика – наука, исследующая свойства знаков и знаковых систем.

1. Введение

1.1. Устойчивое развитие образования

Концепция устойчивости часто ассоциируется с экологическими и экономическими программами, но она применяется также в образовательной области. Например, даже без явного осознания этой концепции, уже в 1657 г. Каменский[2] посвятил главу своей книги "Didactica Magna" (Великая дидактика) "основам прочного преподавания и обучения" [1]. ООН разработала Повестку дня устойчивого развития до 2030 г., в которой образование рассматривается как фундаментальный элемент устойчивого развития [2]. Основная цель четвертого пункта этой повестки дня заключается в обеспечении всеохватного и качественного образования для всех и содействии непрерывному образованию. Общеизвестно, что математика действует как контроллер в образовании: те студенты, которые обладают хорошими знаниями математики, с большей вероятностью будут иметь лучшие количественные показатели и закончат с лучшими образовательными показателями, чем те, кто недостаточно эффективно работает по этому предмету [3].

Основное внимание уделяется устойчивому развитию в математическом образовании будущих классных руководителей. В соответствии с мнением Шульмана[3] (Shulman L.S.) [4], мы разделяем три категории содержательных знаний: содержательные знания в предметной области, педагогического содержания и содержании учебного плана. Эти категории применяются к преподаванию математики в начальной школе. Мы должны учитывать все три категории в развитии преподавания математики в направлении большей устойчивости в достижении лучших результатов обучения.

В основной учебной программе Финляндии (FCC) [5] слово "устойчивый" упоминается 176 раз. В общей части FCC устойчивое развитие рассматривается как "роль школы в построении устойчивого будущего, которое можно укрепить за счет организации образования". Основная идея устойчивого развития в FCC может рассматриваться в свете повестки дня ООН на период до 2030 года, в которой одной из основных целей является обеспечение всеобъемлющего и качественного образования для всех и содействие обучению на протяжении всей жизни. FCC играет важную роль в определении содержания учебников по математике, которые в Финляндии являются наиболее важным фактором, влияющим на структуру уроков математики в начальной школе [6]. Таким образом, учебники являются важным инструментом обеспечения устойчивого развития в математическом образовании.

1.2. Основы устойчивого развития математического образования

Знание математического содержания требует понимания фактов или концепций предметной области. Это означает, что учителя должны понимать структуру математики. Учителя должны не только уметь определять ма-

[2] Ян Амос Каменский – чешский педагог-гуманист, писатель, общественный деятель, епископ Чешскобратской церкви, основоположник научной педагогики, систематизатор и популяризатор классно-урочной системы.
[3] Ли Шульман – американский педагог-психолог, который внес заметный вклад в исследование обучения, оценку обучения и в областях медицины, науки и математики.

тематические понятия, но и уметь объяснять, почему математическое понятие стоит знать и понимать, и как оно соотносится с другими понятиями как в теории, так и на практике. Вторая категория знаний о содержании - это знания педагогического содержания, которые включают в себя аспект обучения или знания математического содержания. Другими словами, знание педагогического содержания требует, чтобы учителя обладали навыками преподавания математики, которые делают его понятным для других. Поскольку не существует единого наиболее эффективного способа обучения, преподаватели должны иметь альтернативные подходы, некоторые из которых могут основываться на результатах текущего исследования, тогда как другие рождаются из опыта. Знание педагогического содержания также включает в себя понимание того, как ученики изучают математику, и что делает изучение или конкретную тему легкой или трудной. Третья категория знаний о содержании - это знания по учебным программам, которые включают в себя навыки и умения учителей связывать математическое содержание или данный урок с темами или вопросами, обсуждаемыми в других классах. В то же время преподавателям необходимо понимать математические темы и вопросы, изучаемые в области математических предметов в течение предыдущих и последующих лет в школе, и учебные материалы, которые их воплощают. Создавая устойчивое образование для преподавателей математики и классных занятий для преподавателей, мы понимаем, что содержание и процесс важны для преподавателей. Знание математического содержания включает в себя знание математических структур, педагогические знания по общим и специальным темам математики и знания по специальным учебным программам [4].

Если преподаватель имеет слишком узкие знания в области педагогического содержания и знания учебных программ, тогда он может рассматривать математику только как “правила” и ”процедуры”. В этом случае они могут сосредоточиться на преподавании математики только с точки зрения расчета, применения и совершенствования таких правил и процедур, не пытаясь понять основные концепции и структуры [7]. Таким образом, преподаватель не создает четкую картину знания математического содержания для своих учеников.

1.3. Пример: дроби и значения символа “а/б”

Мы рассматриваем понятие дроби и символ “а/б” как пример из школьной математики. Исследования (например, [8–11]) показывают, что дроби являются одной из самых сложных областей школьной математики. Ученики, будущие классные руководители и преподаватели-предметники, а иногда даже опытные преподаватели, имеют проблемы с дробями, особенно с пониманием дробей, как чисел, которые расширяют всю систему счисления до рациональных чисел (например, [12,13]). Чтобы понять это расширение, нужно иметь четкое представление о различных значениях дробей. В финских учебниках по математике эти различные значения или дроби вводятся отдельно без четкого контекста и часто преподаются с упором на процедурное восприятие. Дроби имеют интересные особенности по сравнению с другими числами: две дроби могут иметь разные числитель и знаменатель, но они будут равны (эквивалентные дроби). Концептуальная картина дроби и ее различные значения привлекают меньше внимания, чем следовало бы [14].

При переходе от целых чисел к рациональным числам в мышлении учеников должны произойти концептуальные изменения. Концептуальное изменение означает фундаментальное изменение в предыдущем мышлении ученика [15]. Согласно Восниадоу[4] (Stella Vosniadou) [16–18], для учеников характерна тенденция формировать “непоследовательный синтез” ранних знаний и новый материал урока, поскольку ранняя структура данных также часто бывает неосознанной. В математике такое явление наблюдается в случае числовой концепции, когда было обнаружено, что природа натурального числа и правила операций неправильно переносятся, например, на мышление и понимание рациональных чисел [15, 19].

В настоящее время учебники математики играют важную роль в преподавании и изучении математики. Общеизвестно, что учителя доверяют учебникам, которые являются базой их обучения [20.21]. Это обеспечивает поддержку выводов финского преподавателя математики P. Perkillä [22], который показал, что в финской математике для начальных классов учебники и руководства для учителей играют решающую роль в работе учителей. Руководства для учителей обычно включают в себя педагогические советы и инструкции, знания по математическому содержанию, планы учебного года по математике, точные планы уроков и т. д. Преподаватели очень часто следуют советам руководств для учителей в отношении того, что преподавать, и, как правило, преподают материалы и предписывают порядок, в котором содержание должно преподаваться. Например, если учебники написаны для учеников, они также могут быть посредниками между намеченным учебным планом и реализованным учебным планом [19,20].

В принципе, у будущих преподавателей в классе достаточно содержания и знаний по каждой из концепций дроби, соотношения и деления, но могут возникнуть проблемы с пониманием того, как эти понятия связаны друг с другом и как мы должны учитывать это в преподавании математики. Это важная часть знания педагогического содержания, поэтому интересно получить представление о том, как будущие преподаватели понимают различные значения дробей. В течение первых шести классов за преподавание математики отвечают классные учителя. Они часто чувствуют себя неуверенно в математике [22], поэтому стремятся строго следовать содержанию учебников и руководств для учителей, что затем влияет на представление учеников о математической концепции и знаниях. В связи с этим понимание учениками различных значений или математических понятий и значений - в данном случае различных значений или дробей - может основываться на содержании или учебниках. В ходе статьи мы называем будущих классных руководителей учениками, и мы используем “2/3” как символ “$\frac{2}{3}$”.

2. Теоретические основы

2.1. Несколько значений символа "а/б" в школьной математике

В связи с вышеизложенным интересно изучить концептуальные интерпретации символа ”a/b”, для которых учебники по математике дают значения в зависимости от предметной области математики. Мы не намерены об-

[4] Стелла Восниадоу – преподаватель Афинского национального университета им. Каподистрии (министра иностранных дел Российской империи и первого правителя независимой Греции), автор Международного справочника по исследованиям концептуальных изменений.

суждать в этой статье теоретические связи между понятиями, с которыми связан символ ”a/b”.

Исследователи нашли различные вспомогательные структурные компоненты, которые связаны с символом “a/b”. Каждый такой компонент определяет сущность дроби, которая придает ей актуальное значение. Эти вспомогательные структурные компоненты также относятся к расширению целых чисел до рациональных чисел. В существующих исследованиях (например, [23–25]) значения символа “a/b” рассматривались с точки зрения понятия дроби. Авторы работы [23] подчеркнули тот факт, что трудности учеников в обучении понятия дроби связаны с ее многогранной структурой. С этой точки зрения они описали следующие пять вспомогательных структурных компонентов: *часть-целое, отношение, частное, мера и оператор*. Автор работы [24] также сослался на многогранную структуру дробей при введении в ее тезис следующих вспомогательных структурных компонентов: *отношение часть-целое*: отношение части к целому; *измерение*: расположение числа на числовой линии; *оператор*: преобразование; *частное*: деление; и *отношение*: отношение между двумя величинами. Авторы работы [12] приблизились к дробям в своей исследовательской структуре от точки четырех вспомогательных структурных компонентов до развития дробей, как было найдено в прошлом: *часть-целое*: осмысливание части целого как новой единицы; *измерение*: нахождение дробей из целых чисел посредством измерения и пропорций, удовлетворяя потребность в общей единице измерения для двух величин; *деление*: поиск алгебраического решения для уравнения $A_X = B$, где A и B - целые числа, а A – не является нулем; и *теоретико-множественное*: определение рациональных чисел как набора упорядоченных пар, состоящих из целых чисел. Различные значения понятия дроби, представленного выше, дают довольно хорошую картину того, насколько сложным является это понятие [12, 23, 24]; ему могут быть присвоены различные значения в зависимости от ситуации, в которой используется концепция.

В финских учебниках по математике [14] символ “2/3” имеет пять основных толкований в зависимости от контекста: (A) дробь (A1 “две трети данного целого” или A2 ”две из трех частей”); (B) рациональное число (“две трети”); (C) отношение (”соотношение двух к трем”); (D) деление (“два, деленное на три”); и (E) вероятность (“вероятность того, что это произойдет, составляет две трети”). Первая (дробь) делится на две подкатегории в соответствии с языковыми выражениями, например, “две трети данного целого” или ”две из трех частей”. Мы используем шесть вспомогательных структурных компонентов в качестве теоретической основы для значений символа “2/3”.

A. Символ "a/b" как дробь и как часть из суммы частей

Отношение часть-целое считается отношением части к целому [23.24]. Автор работы [26] определил символ “a/b” как дробь следующим образом: *если a и b - целые числа, a b - не ноль, и если объект, систему или количество можно разделить на b равных частей, то дробь “a/b” или объект, система или количество - это количество, образованное частями (или копиями частей).*

Отношение часть-целое можно интерпретировать двумя способами в зависимости от ситуации (см. Определение выше): во-первых, (A1), если мы берем две третьих (“две трети данного целого”) пиццы, мы берем два равных ломтика пиццы, разрезанной на три равные части. Во-вторых, (A2), если мы возьмем две части из трех (“две из трех”), мы подкрепляем идею деления величин на три равные части и выбора двух из них. Обычно в учебниках отношение части к целому описывается как модель площади (например, как секторная модель), а секторная модель для “2/3” читается, например, как две трети пиццы. Кроме того, подход часть-целое может применяться, когда преподаватели используют модели площади, разделенные на равные части, или упомянуть, что часть системы или объекта может быть выражена как дробь с равным разделением и вычислением [12].

B. Символ “а/б” как рациональное число

Согласно авторам работы [12], источники определения рациональных чисел основаны на теоретико-множественном подходе. Рациональные числа Q определяются следующим образом:

$$\left\{ \frac{m}{n} \middle| m, n \in Z, n \neq 0 \right\} \tag{1}$$

Например, целые числа - это подмножество Q, а с другой стороны, Q - это подмножество действительных чисел. Дроби - это те рациональные числа, которые записаны в форме m/n, в которой m и n являются целыми числами (n □ 0). Такого рода определение встречалось во многих учебниках, за которыми следовали объяснения того, что означают символы и как ими можно манипулировать [12]. Аргумент верен и в финских учебниках математики, особенно в 7–9 классах. В учебниках для 3–6 классов рациональные числа встречаются в виде дробей и десятичных чисел, а в 7–9 классах - в вычислениях дробей и десятичных чисел. Кроме того, в учебниках рациональные числа могут быть представлены на числовой оси [27]. Чтобы представить “2/3” на числовой линии, мы разделим сегмент от 0 до 1 на 3 сегмента равной длины. Затем, начиная с 0, мы считаем 2 из этих сегментов и останавливаем отметку, соответствующую второму сегменту правой конечной точки, чтобы получить точку, присвоенную рациональному числу “2/3”.

C. Символ “a / b” как отношение

В учебниках ученики сталкиваются с понятием отношения, связанного с математическим символом “2/3”, например, следующим образом: а) “совет директоров некоей ассоциации должен иметь отношение 2 к 3 для женщин и мужчин” (т.е. две женщины-члена на каждых трех мужчин); (b) ”яйца стоят по два евро за десяток” (это означает, что каждый десяток яйца стоит два евро); и (c) ”две части жидкости A и три части жидкости B составляют общую смесь из пяти частей”. Каждый из этих примеров иллюстрирует соотношение [24]. Соотношения записаны в финских учебниках a b или a: b.

D. Символ "a/b" как деление

Символ ”a/b” также может относиться к делению, когда оно касается операции [24]. В финских учебниках операция деления представлена или черточкой “-”, либо знаком деления “:”. Операция деления может быть либо делением по частям, либо делением по содержимому в зависимости от контекста [28]. На практике подходом деления может быть деление с абсолютными числами или дробное деление. Деление “a/b”, в котором единица непрерывного количества делится поровну между b получателями, отмечая, что результаты деления не всегда являются целыми числами. В результате деления повторяющееся десятичное представление часто может быть округлено, что уже не является точным значением, которое представляет число дроби. В связи с этим для выражения результатов нужны дроби [12].

E. Символ “a/b” как вероятность

Символ ”a/b” также может означать вероятность: для эксперимента с пространством событий S с одинаково вероятными исходами вероятность события A определяется как

$$P\,(A) = n\,(A) : n\,(S) \tag{2}$$

где n (A) - количество элементов в A, а n (S) - количество элементов в S.

Следовательно, определения заключается в том, что

$$0 \leq P\,(A) \leq 1 \tag{3}$$

Например, когда вы бросаете монетку, вероятность получить лицевую сторону монеты (решку) составляет 1/2.

2.2. Роль математических учебников и преподавателей

Учебники по математике являются мощным ресурсом на уроках математики (например, [11.29]), потому что они интерпретируют учебную программу по математике как для учеников, так и для преподавателей. Преподаватели финских классов полагаются на использование учебников по математике в процессе преподавания, потому что, по их мнению, это гарантирует, что они будут следовать национальной учебной программе [22]. Подобное явление можно увидеть в обучении финских преподавателей математики, поскольку они часто рассматривают учебник как конкретную учебную программу, которая определяет содержание обучения, цели и дидактические решения [25]. Во многих случаях уроки математики планируются и реализуются с помощью математических заданий и заданий из учебников. По этой причине учебники по математике могут быть непосредственно связаны со структурой педагогической практики и, таким образом, выступать в качестве реализуемой учебной программы [30–32].

В Финляндии преподаватели несут ответственность за выбор учебников. Учебник оказывает сильное влияние на дидактический выбор учителя, но учитель все еще имеет возможность не пользоваться им на уроках. Например, учителя могут построить весь учебный процесс, основываясь на индивидуальной работе учеников с учебниками по математике, или они могут использовать учебники просто как источник для упражнений и домашних заданий. Что касается изучения математики, то материалы, включенные в учебники, включают в себя такие действия, как чтение пояснительных текстов и приобретение нового содержания, просмотр рабочих примеров, игр, решение задач и т. д. Ученикам на самом деле не предоставляется возможность полностью использовать учебник по математике как многогранный учебный ресурс, потому что преподаватели в основном используют книгу в качестве важного ресурса для упражнений. Учебники по математике часто разрабатываются таким образом, что каждый разворот страницы рассчитан на один урок. Кроме того, готовые тесты включены в качестве материалов для преподавателей. Благодаря этому преподаватель является исполнителем учебного процесса, который был разработан и регламентирован авторами учебников [25,30,33].

Как правило, в финских учебниках каждая тема начинается с определений или нового понятия, или содержания; часто приводятся примеры, за которыми следует ряд задач, которые могут включать материалы для нескольких разворотов страниц (что означает последовательные уроки). Например, в учебниках обычно описывается отношение части к целому как модель площади (например, как секторная модель), а секторная модель для “2/3” будет читаться, например, как две трети пиццы. Особенно в третьем классе, когда ученики узнают символ “a/b”, в учебниках этот символ интерпретируется в контексте дроби. Как упоминалось ранее во введении, в учебниках часто подчеркивается процедурная перспектива, касающаяся обучения дробям, и в этом случае ученики, ”занимающиеся по учебникам”, не получат четкого представления о понятии дроби.

Как упоминалось выше, преподавание финской математики ведется “по учебникам”. Это часто означает, что природа математики и содержание школьной математики раскрываются для учеников только через учебники. Если и в учебниках, и на уроках особое внимание уделяется расчетам, ученикам не остается места для выражения собственного мышления, например, с помощью языка. Учебники подчеркивают подход части-целого [14], но другие значения понятия дроби не проявляются четко. Вот почему интересно выяснить, какое значение придают будущие преподаватели в классе символу “a/b”.

2.3. Смысл создания концепции

Основная цель использования естественного языка (чаще всего родного языка учащегося) и визуального представления в учебной деятельности (например, при изучении новых математических понятий и выполнении упражнений) состоит в том, чтобы развить собственные процессы осмысления смысла учащимся. Например, автор работы [34] показал, что написание и использование естественного языка в решении математических задач может фактически улучшить обучение математике, развить математическое понимание, изменить отношение ученика к математике в лучшую сторону и помочь преподавателю сделать оценку.

Если мы расширим традиционное значение слова “язык”, мы сможем понять различные представления понятия как выражения универсальными языками: математический символический язык (MSL), естественный язык (NL) и изобразительный язык (PL) [28,35–37]. Мы называем процесс, в котором, например, ученик выражает свое мышление, как ”языковое общение” [38]. Мы описываем языковое общение в математике как пример выражения математического мышления различными способами, либо устно (естественным языком), либо письменно (естественным языком, математическим символическим языком или изобразительным языком) [28]. Поэтому мы можем распознавать три языка, которые учебники по математике используют как инструменты для осмысления математических понятий и процедур. Тем не менее, мы видим, что эти три языка также должны использоваться учениками; было показано, что языковое представление математического мышления помогает ученикам структурировать свое мышление и таким образом понимать математические понятия и процедуры [28,34,37,39].

Одним из аспектов понимания концепции является знакомство с тем, как она связана с другими концепциями. В школьной математике мы можем узнать много представлений концепций: математическую символику, выражения естественным языком, визуальным изображением и манипуляциями с помощью конкретных материалов (например, [10, 37]). С точки зрения концепции, мы можем говорить о представлениях концепции ([10], [40]).

Когда ученик выражает свое математическое мышление, он (или она) может использовать различные комбинированные подходы (например, MSL, NL и/или PL). Теоретически комбинированная модель языкового общения связана с мультиграмотностью[5] [41]. Когда читатель осмысливает математический текст, языки можно рассматривать как мульти-семиотический подход (см. сноску 1), при котором разные языки позволяют формулировать многозначные значения концепций в универсальном контексте [28, 36, 37]. В данной статье наше внимание акцентировано на объединении математического символического языка и изобразительного языка поясняющими выражениями учащихся естественным языком.

3. Вопросы исследования и сбор данных

3.1. Вопросы исследования

В начальной школе Финляндии наши ученики проходят все значения символа “a/b”: дробь, рациональное число, отношение, деление или вероятность. Однако в школьной математике бывают редкие ситуации, когда эти значения рассматриваются одновременно. Наша цель состоит в изучении того, что значения финские учащиеся узнают из этого перечня. Особенно, если мы рассмотрим будущих классных руководителей, мы сможем понять трудности в концептуальном обучении дробям и найти новые цели развития в педагогическом образовании. Поэтому было бы интересно изучить значения, которые будущие классные руководители (в данном случае наши студенты) придают математическому символу “2/3”.

В этой статье мы сосредоточимся на следующих вопросах исследования:

1) Какие значения придают ученикам спонтанно символу “2/3”?

2) Какие отношения ученики находят для данных картинок и символа “2/3”?

3) Какие влияния оказывает мульти-семиотический подход на интерпретации студентами?

3.2. Сбор данных

В сборе данных приняли участие 102 первокурсника из двух университетов Финляндии, 71 из университета Тампере и 31 из университета Ювяскюля. Было 85 студенток и 17 студентов.

---

[5] Мультиграмотность – грамотность, которая включает в себя не только способность читать, писать и считать, но также эмоциональные и коммуникативные, аналитические и прогностические навыки, математическое моделирование, культурные, социальные и гражданские компетенции и т.д.

Данные были собраны во время курса математической дидактики с помощью обработки анкет весной 2017 г. Анкета состояла из трех страниц:

1) На первой странице студенты дарят свое мнение в открытом вопросе о том, какие различные значения (например, дробь, деление, соотношение и т. д.) может иметь математический символ “2/3”. Несколько вариантов было предоставлены для ответов.

2) На второй странице студентов попросили описать на родном (финском) языке, как рисунки A - D (рис. 1) связаны с математическим символом “2/3”. Студенты могли дать одно или несколько описаний связей.

3) На третьей странице возникла математическая задача, включая изображение и математическое решение (рис. 2). Задача студента состояла в том, чтобы объяснить процессы решения естественным языком и выяснить, были ли какие-либо ошибки в презентации.

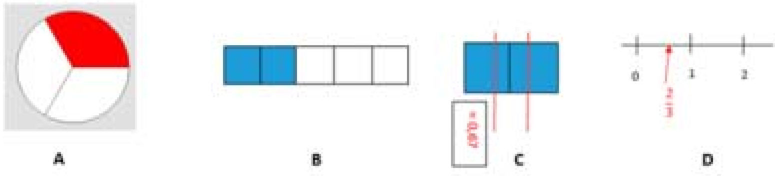

Рисунок 1. Второй вопрос на второй странице анкеты исследования: Как описать картинки A - D математическим символом “2/3”

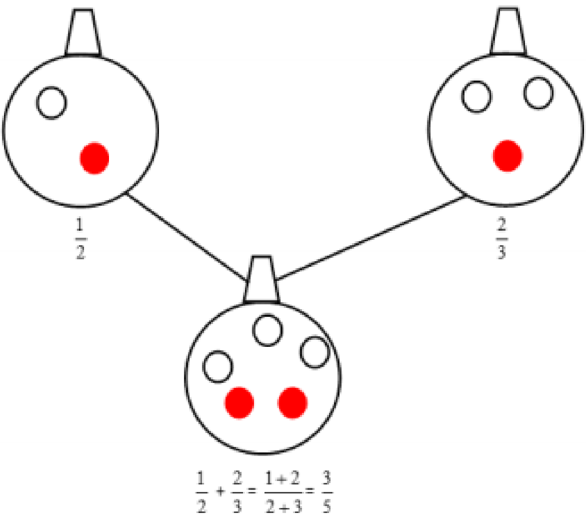

Рисунок 2. Третий вопрос на третьей странице анкеты исследования: объясните, что было сделано в презентации, и рассмотрите правильность процесса решения

Первая и вторая страницы анкеты были подготовлены в курсе под контролем учителей. Решения третьей страницы были подготовлены как домашнее задание.

Идея вопросника была основана на наших теоретических основах; исходя из ответов, мы хотели получить представление о восприятии студентами значений математического символа “2/3”, а с другой стороны понять, как мульти-семиотический подход поддерживает интерпретации.

4. Результаты

Данные были проанализированы смешанными методами. Мы использовали статистическую программу IBM SPSS 24[6] для проведения типичного статистического анализа (например, при сравнении распределений). Качественный анализ был сделан с помощью теоретического контент-анализа (например, классификации). Мы использовали классификацию по шести категориям, представленным в теоретической части статьи, и с другой стороны, категории, сгенерированные из ответов. В первом вопросе анкеты учащиеся (N = 102) спонтанно понимали математический символ “2/3” в большинстве случаев как дробь (77 учеников дали ответ “две трети данного целого” и 43 ученика “две из трех частей”), что также характерно для финских учебников по математике (рис. 3). Отношение, рациональное число или вероятность были упомянуты меньше всего. Мы выбрали типичные словесные выражения в качестве примеров для каждой категории (рис. 3):

1) Деление: “*Два делится на три: две пиццы должны быть разделены на три человека*”. (Студент 89),

2) Дробь 1: “*В тесте я получил две трети правильных ответов*”. (Студент 55)

3) Дробь 2: “*Две трети. Пекка съела две пиццы из трех*”. (Студент 87),

4) Вероятность: “Может использоваться для описания вероятности” (студент 76),

5) Рациональное число*: “0,66…”*(Студент 92)

6) Отношение: “*Вы получите хороший сок, если к 2 децилитрам концентрата добавите 3 децилитра воды*” (студент 57).

Когда мы посчитали, сколько разных значений каждый будущий классный учитель (N = 102) обнаружил в вопросе 1 на первой странице (ответы были спонтанные) и в вопросе 2 на второй странице (наглядное руководство, см. рис. 1) или вопросник, мы получили распределения итогов на рис. 4. коэффициент корреляции Пирсона[7] ($r = 0{,}245$) между распределениями на рис. 4 является значительным ($p < 0{,}05$). Второе распределение (графическое) значительно ($p = 0{,}000$) лучше, чем первое (знаковый ранговый критерий Уилкоксона[8]: $Z = - 8\ 168$).

---

[6] Лучшее в мире статистическое программное обеспечение компании IBM, используемое для решения проблем бизнеса и исследований путем проведения специального анализа, проверки гипотезы и прогнозного анализа.

[7] Коэффициент корреляции Пирсона применяется при исследовании взаимосвязи двух переменных, измеренных в метрических шкалах на одной и той же выборки. Он позволяет определить, насколько пропорциональная изменчивость двух переменных.

[8] Критерий Уилкоксона – непараметрический статистический критерий, используемый для проверки различий между двумя выборками парных или независимых измерений по уровню какого-либо количественного признака, измеренного в непрерывной или порядковой шкале. Критерий предназначен для сопоставления показателей, измеренных в двух разных условиях на одной и той же выборке испытуемых.

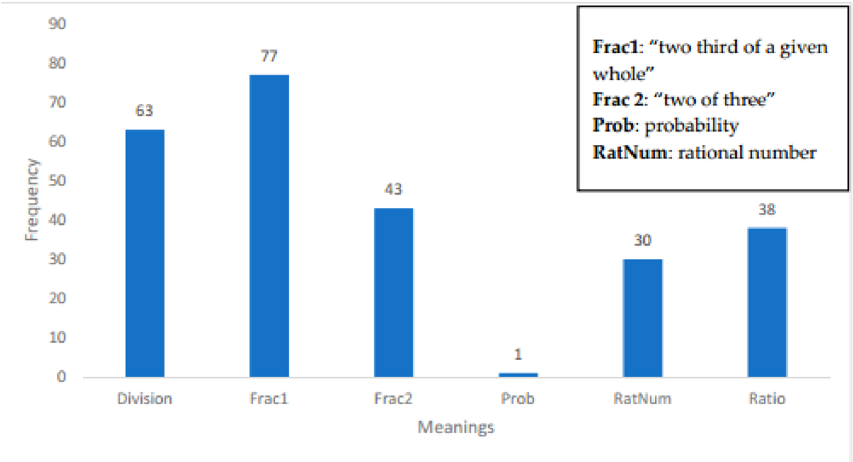

Рисунок 3. Значения, которые студенты (N = 102) давали математическому символу (Вопрос 1 на 1-й стр. вопросника)

Пояснения к рисунку 3: Frequedncy - частота, Division - деление, Frac 1 – дробь 1, Frac 2 – дробь 2, Prob - вероятность, RatNum - рациональное число, Ratio - отношение, Meanings- значения, two third f a given whole – две трети данного целого, two of tree – два из трех

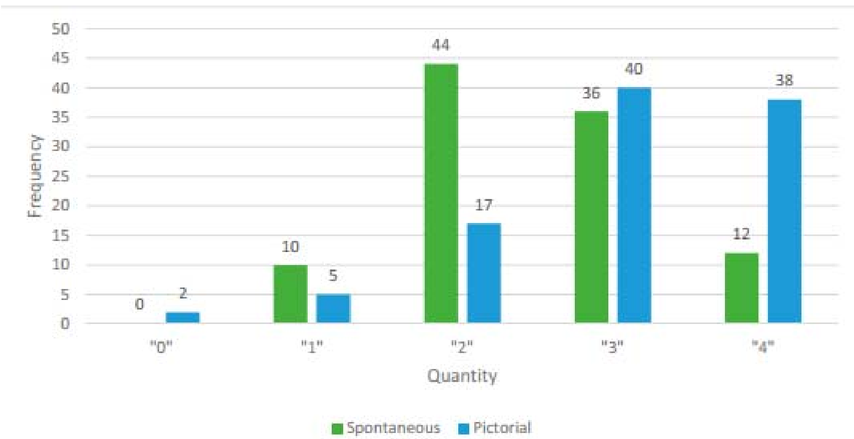

Рисунок 4. Распределение итогов различных значений студентов (N = 102), полученных спонтанно (Вопрос 1 на первой странице анкеты), а также на заданных рисунках A - D (Вопрос 2 на второй странице анкеты), для математического символа "2/3". Например, количество "2" означает, что 44 студента нашли точно два разных значения для символа "2/3" в вопросе 1 и 17 студентов в вопросе 2

Пояснения к рисунку 4: Frequency - частота, Quantity - количество, Spontaneous – спонтанные ответы, Pictorial – на основании графиков

Изображения (см. рис. 1) связаны с математическим символом “2/3” более эффективным образом для студентов, чем чисто математический символ. Для изображения A (рис. 1) было больше всего интерпретаций, а для изображения B - наименьшее количество интерпретаций шести категорий (таблица 1). Понятие отношения представляется наиболее сложным для связи с математическим символом “2/3”. Интересная особенность в интерпретациях изображения B состояла в том, что 13 студентов предположили, что изображение B никак не связано с данным математическим символом, что вместо “2/3” должно быть ”2/5”, и эта интерпретация или соединение является дробной иллюстрацией.

Таблица 1

Частота интерпретаций (N = 102) учащихся о том, как математический символ “2/3” связан с изображениями A - D (рис. 1, Вопрос 2 на второй странице вопросника).

Изображение	A	B	C	D
Дробь 1	59	0	18	45
Дробь 2	38	0	0	0
Отношение	2	43	0	0
Деление	1	1	56	1
Рациональное число	3	0	1	41
Прочее	16	49	15	8

В ответах на третий вопрос на третьей странице вопросника студенты выразили математическое значение на основе изображения (рис. 2), в котором разные языки (MSL, NL и PL) предоставляют возможности для мультимодальных интерпретаций. При анализе данных третьего вопроса мы использовали классификацию по категориям, сгенерированным ответами. Ответы на третий вопрос (рис. 2) были разделены на четыре темы (таблица 2): (1) значения символов “1/2” и ”2/3” (52 ссылки в ответах); (2) концептуальный подход к выражениям (ссылки в вопросах); (3) процедурный подход к выражениям (81 ссылка в ответах); и (4) не нашли никаких проблем в презентации (35 ссылок в ответах). Перед разбивкой на темы мы разделили ответы на категории и, наконец, поместили эти категории в соответствующие тематические области следующим образом: первая тема (1a, 1b и 1c; см. табл. 2 2), вторая тема (2a и 2b) см. табл. 2), третью тему (3a, 3b, 3c и 3d; см. табл. 2) и четвертую тему (4; см. табл. 2). Многие студенты определяли значения для символов “1/2” и ”2/3” как ”часть целого” (см. Раздел 2.1, части A, пункты A1 и A2, например, студенты 98, 96 и 92) в категориях 1a, 1b и 1c (табл. 2). Только несколько студентов достигли концептуального уровня в своем анализе данного выражения ”1/2 + 2/3” (категории 2a и 2b, например, студенты 93 и 88). Очевидно, что понятие отношения было чрезвычайно трудно найти большинству студентов. С другой стороны, большинство студентов нашли ошибку в уравнении “1/2 + 2/3 = 1/2/2 + 3” (3a). Некоторые из студентов (категория 3b, например, студент 89) поняли идею выражения «”1 +2/2 + 3”. Процедурная точка зрения видна в категориях 3c и 3d (например, студенты 79 и 85), где “правильный ответ “7/6” играет основную роль. Только 13 студентов (категория 3d) обосновали вопрос о связи между ответом ”7/6” и рисунком (рисунок 2).

Таблица 2

Частоты интерпретаций (f) студентов (N = 102) о том, как математический символ “2/3” связан с изображениями A - D (рис. 3).

Тема	Категория	f	Пример
Значения символов “1/2” и “2/3”	Отношение количества белых шаров к количеству красных шаров	7	*Соотношение между белыми и красными шарами (два больших шарика в верхней части в порядке).* (Студент 98)
	Белые шары – одна вторая всех шаров (1b)	19	*Белые шары представляют числитель, т.е., сколько частей было взято, а все шары представляют знаменатель, т.е., сколько частей в общей сложности.* (Студент 96)
	Один белый шар из двух шаров 1c	26	*Один из двух шаров красный и два из трех шаров белого цвета* (Студент 92)
Концептуальный подход к выражениям	“1/2 + 2/3” – неправильное выражение для добавления двух отношений (2a)	2	Ученик спутал величину пропорциональности, которая значима друг для друга. В приведенных выше дробях, числитель, например, не выражает количество вещей самих по себе, но это отношение составляет долю от общего или пропорциональность по отношению к общему количеству. Поэтому, прежде чем понадобилось добавлять один, необходимо найти общий знаменатель, а не добавлять знаменатели вместе. (студент 93)
	“1/2 + 2/3” – неправильное добавление, поскольку дроби были взяты из разных общих (2b)	2	*Шары объединяются, т.е. целое превратилось в пять шаров (объединено количество шаров в двух крупных шарах), из которых количество белых по-прежнему равно 1 + 2, т. е. всего 3 (столько же, сколько в двух крупных шары в общем). В целом, общее количество маленьких шаров изменилось.* (Студент 88)
Процедурный подход к выражениям	Найдена ошибка в уравнении “1/2+2/3 = 1+2/2+3” (3a)	31	*На изображении под третьим шаром дроби складываются без учета целого. Вы не можете добавлять дроби с разными знаменателями вместе, пока не найдете их общие знаменатели.* (Студент 84)

	Выражение “1 + 2/ 2 +3” обосновано правильно (3b)	19	На изображении в точке C шары точек A и B объединены, и это образует новое целое в точке C. При подсчете выбранных белых шаров A и B добавляются три шара. Невыбранных шаров = 2. Общее количество шаров в точке C равно 5; таким образом, три белых шара или пять были выбраны в общей сложности. (Студент 89)
	Сумма должна быть 7/6 (3c)	18	О! Эта математическая задача 1/2 + 2/3 неправильно решена. Если знаменатели разные, то для добавления дробей сначала нужно получить общие знаменатели. Затем вы можете добавить дроби (Студент 79)
	Сумма равна 7/6, но что-то не так с рисунком (3d)	13	На изображении дроби 1/2 и 2/3 сложены вместе, но неправильно. Дроби должны иметь одинаковые знаменатели перед добавлением. После нахождения знаменателей их можно посчитать вместе. На картинке шары подсчитаны вместе, но не как дроби. (Студент 85)
В презентации не было обнаружено каких-либо проблем	Принята презентация (4a)	35	Это иллюстрирует добавление дробей и особенно то, почему вы можете добавлять числители вместе и знаменатели вместе. Сначала я не понимал, что это было, когда просто смотрел на красные шары. Было бы яснее, если бы цветные шары количественно описывали числителя. С другой стороны, эта версия заставила меня задуматься. (Студент 77)

Наиболее наводящая на размышления категория - это категория 4 в четвертой теме, потому что 35 учеников не обнаружили никаких проблем в презентации (см. рис. 2).

В табл. 2 респонденты из двух университетов (университет Ювяскюля и университет Тампере), и ответы выбирались случайным образом. В табл. 2 представлены репрезентативные ответы (ответы на вопрос 3 вопросника) в качестве примера данных из каждой подкатегории темы.

5. Выводы и обсуждение

Как и ожидалось, типичное понимание математического символа “2/3” было в виде дроби (“две трети данного целого” и ”две из трех”), потому что это значение подчеркивается в учебной программе и в учебниках. Отношение, рациональное число или вероятность встречались гораздо реже (рис. 3 и табл. 1). Когда студенты имели математический символический текст и изображение вместе (мульти-семиотический подход к понятию изобразительным языком), им было легче находить осмысленные интерпретации, выраженные естественным языком (рис. 4 и табл. 1). Понятия отношения и рационального числа были особенно хорошо найдены путем соединения изображений (B и D) с математическим символом “2/3”, а не только спонтанно из символа ”2/3” (табл. 1). По-видимому, концепция отношения будет трудна для понимания будущих финских учителей и учеников, несмотря на мульти-семиотический подход (например, рис. 2 и табл. 2). Создавая содержательный контекст (естественный язык) для вышеупомянутых понятий, студенты демонстрируют свое понимание и углубляют его. Как упоминалось ранее в теоретическом разделе (раздел 2), особенно в третьем классе, когда ученики знакомятся с символами, символ “a/b” интерпретируется в учебниках в контексте дроби. Если в учебниках подчеркивается это толкование и процедурная перспектива обучения дробям, может случиться так, что при обучении по принципу “учебника” ученики не достигнут глубокого понимания различных значений понятия дроби [42]. Там, где учебники играют столь важную роль в определении преподавания и изучения математики, мы должны разрабатывать их и другие учебные материалы с точки зрения устойчивого развития в изучении математических концепций и структур. Кроме того, FCC [5] подчеркивает, что все виды деятельности должны укреплять равноправие и равенство в образовании и улучшать навыки и способности, учащихся к обучению в течение всей жизни. Это важная точка зрения в плане развития работы с учебниками и другими учебными материалами.

На основании полученных результатов мы можем видеть, что дробь и ее приближенные понятия должны основываться на мульти семиотическом подходе. Учебный материал должен сочетать естественный и изобразительный язык с математическим языком символов как в концепциях обучения, так и в восприятии мышления обучаемого. Когда значения понятия понимаются индивидуально, метакогнитивные[9] навыки учащегося или вышеупомянутые понятия должны развиваться одновременно с различными языками. Таким образом, мы можем помочь учащемуся лучше понять отношения между понятиями. Понимание математических кон-

[9] Метакогнитивные процессы – “знание о знании”, “мышление о мышлении”, “осознание осознания” и т.п. Это совокупность знаний человека об основных особенностях познавательной сферы и способах ее контроля.

цепций и взаимосвязей между концепциями создаст мост к устойчивому развитию (например, влияние на обучение в течение всей жизни) с точки зрения преподавания и обучения.

Исходя из результатов этого исследования, можно сделать вывод, что разработчики учебных материалов должны особенно задуматься о том, каким образом они могли бы представить множественные значения концепции дроби, чтобы она стала более понятной и доступной для учителей и учеников. Для правильного понимания этого многогранного явления, несомненно, потребуются дальнейшие исследования воздействия различных учебных материалов на результаты обучения или концепцию дроби. В частности, важно изучить и обсудить способы, с помощью которых можно было бы лучше подчеркнуть глубокое понимание и творческое мышление, а не имитационное мышление и внедрение рутин.

Исходя из наших результатов, мы видим, что у будущих классных преподавателей есть проблемы в понимании концепции дроби и связанных с ним понятий с точки зрения символа “2/3” (табл. 1 и 2, рис. 3 и 4). Мы предполагаем, что при подготовке учителей для будущих классных преподавателей важно знать, что множественные значения дробей не являются тривиальными. Как часть их педагогического образования, курсы по математике для будущих преподавателей должны решать эти вопросы, и, таким образом, они могли бы предоставить адекватную возможность развить знания по содержательному контенту с помощью своих собственных процессов осмысления и знания для своих учеников. начальная школа

Наше исследование показывает явные педагогические недостатки в обучении концепции дробей (включая также учебники). Если знания по математическому содержанию и знания по педагогическому содержанию будущих учителей станут более устойчивыми благодаря педагогической организации педагогического образования, это будет способствовать созданию устойчивой математической основы для будущих поколений. Это также может уменьшить беспокойство, связанное с изучением понятия дроби. В заключение мы предлагаем: (1) разработать математические учебные материалы, основанные на знаниях педагогического содержания; (2) укрепление или знание предмета предметных материалов будущих преподавателей в математике (особенно концептуальные знания); и (3) изучение или педагогическое содержание знаний школьной математики (особенно в том порядке, в котором мы преподаем математические понятия и как мы должны показывать отношения между ними). Мы считаем, что эти предложения улучшат устойчивое развитие математического образования.

Библиография

1. Zehetmeier, S.; Krainer, K. Ways of promoting the sustainability of mathematics teachers’ professional development. *ZDM Math. Educ.* **2011**, *43*, 875–887. [CrossRef]

2. UN. The 2030 Agenda for Sustainable Development. Sustainable Development Goals. 2018. Available online:https://sustainabledevelopment.un.org/sdgs (accessed on 15 August 2018).

3. Díez-Palomar, J.; de Sanmamed, A.F.F.; García-Carrión, R.; Molina-Roldán, S. Pathways to equitable and sustainable education through the inclusion of roma students in learning mathematics. *MDPI Sustain.* **2018**,*10*, 2191. [CrossRef]

4. Shulman, L.S. Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educ. Res.* **1986**, *15*, 4–14. [CrossRef]

5. Opetushallitus. Finnish Core Curriculum for Basic Education 2014. Available online: http://www.oph.fi/ops2016/perusteet (accessed on 15 August 2018).

6. Joutsenlahti, J.; Vainionpää, J. Oppimateriaali matematiikan opetuksessa ja osaamisessa. In *Miten Matematiikan Taidot kehittyvät? Matematiikan Oppimistulokset Peruskoulun Viidennen Vuosiluokan Jälkeen Vuonna 2008*; Niemi, T.E.K., Metsämuuronen, J., Eds.; Opetushallitus, Koulutuksen Seurantaraportti: Helsinki, Finland, 2010; Volume 2, pp. 137–148.

7. Petoz, P.; Reid, A. What on earth is sustainability in mathematics? *N. Z. J. Math.* **2003**, *32*, 135–144.

8. Lortie-Forgues, H.; Tian, J.; Siegler, R.S. Why Is Learning Fraction and Decimal Arithmetic So Difficult? *Dev. Rev.* **2015**, *38*, 201–221. [CrossRef] 9. *Matematiikan Oppimistulokset Peruskoulun Viidennen Vuosiluokan Jälkeen Vuonna 2008*; Opetushallitus: Helsinki,Finland, 2010; pp. 137–148. 10. Prediger, S.; Wessel, L. Fostering German-language learners' constructions of meanings for fractions—Design effects of a language- and mathematics integrated intervention. *Math. Educ. Res. J.* **2013**, *25*, 435–456. [CrossRef]

11. Mullis, I.V.S.; Martin, M.O.; Foy, P. *TIMSS 2007 International Mathematics Report: Findings from IEA's Trends in International Mathematics and Science Study at the Fourth and Eighth Grades*; Chestnut Hill: Boston College, MA, USA, 2008.

12. Park, J.; Güler, B.; McGrory, R. Teaching prospective teachers about fractions: historical and pedagogical perspectives. *Educ. Stud. Math.* **2013**, *82*, 455–479. [CrossRef]

13. Iskenderoglu, T.A. Multiplication and division problems posed by preservice elementary mathematics teachers about fraction topic. In Proceedings of the 40th Conference of the International Group forthe Psychology of Mathematics Education, Szeged, Hungary, 3–7 August 2016; Csíkos, C., Rausch, A., Szitányi, J., Eds.; PME: Szeged, Hungary, 2016; Volume 2, pp. 35–42.

14. Joutsenlahti, J.; Perkkilä, P.; Tossavainen, T. Näytteitä murtoluvun käsitteestä eri aikakausien oppikirjoissa. In Proceedings of the Annual FMSERA Symposium 2016, Joensuu, Finland, 27–28 October 2016; Asikainen, M., Hirvonen, P., Eds.; pp. 99–109.

15. Merenluoto, K. Matkalla käsitteellisen muutoksen prosessikuvaukseen matematiikassa. On the way to the process description of conceptual change in mathematics. In *Kasvatuksen Yhteisöt—Uupumusta, Häirintää vai Yhteisöllistä Kasvua?* Sinevaara-Niskanen, H., Rajala, R., Eds.; Lapin Yliopiston Kasvatustieteellisiä Julkaisuja: Turku, Finland, 2006; pp. 58–71.

16. Vosniadou, S. Conceptual change research: state of art and future directions. In *New Perspectives on Conceptual Change*; Schnotz, W., Vosniadou, S., Carretero, M., Eds.; Elsevier Science: Killington/Oxford, UK, 1999; pp. 3–14.

17. Vosniadou, S. Capturing and modelling the process of conceptual change. *Learn. Instr.* **1994**, *4*, 45–69. [CrossRef]

18. Vamvakoussi, X.; Vosniadou, S. What mental models do students use regarding the structure of the domain of rational numbers? In *International Group of the Psychology of Mathematics Education, Proceedings of the 26th Annual Conference, Norwich, UK, 21–26 July 2002*; Cockburn, A.C., Nardi, E., Eds.; University of East Anglia: Norwich, UK, 2002; pp. 1–326.

19. Valverde, G.A.; Bianchi, L.J.; Wolfe, R.G.; Schmidt, W.H.; Houang, R.T. *According to the Book: Using TIMSS to Investigate the Translation of Policy into Practice through the World of Textbooks*; Kluwer: Dordrecht, The Netherlands, 2002.

20. Viholainen, A.; Partanen, M.; Piiroinen, J.; Asikainen, M.; Hirvonen, P.E. The role of textbooks in Finnish upper secondary school mathematics: theory, examples and exercises. *Nordic Stud. Math. Educ.* **2015**, *20*, 157–178.

21. Holmlund, A. Lärobokens Betydelse vid Lektionsplanering: En Intervjustudie med åtta Finska och Svenska Matematiklärare [The Importance of Textbook on Planning of Lessons: An Interview Study with Eight Finnish and Swedish Mathematics Teachers]. Bachelor's Thesis, University of Gothenburg, Gothenburg, Sweden, 2013. Available online: http://ncm.gu.se/media/luma/GE-2013/holmlund.pdf (accessed on 15 August 2018).

22. Perkkilä, P. Oppikirja ja uskomukset alkuopettajien matematiikan opetuksessa [Textbook and beliefs in teaching first- and second-grade mathematics]. In *Tutkimus Kouluopetuksen Kehittämisessä [Research in the Development of School Teaching]*; Ahtineva, A., Ed.; Publications of the Faculty of Education, University of Turku: Turku, Finland, 2001; Volume 17, pp. 112–125.

23. Pantziara, M.; Philippou, G. Levels of students' "conception" of fractions. *Educ. Stud. Math.* **2012**, *79*, 61–68. [CrossRef]

24. Stewart, V. Making Sense of Student's Understanding of Fractions: An Exploratory Study of Sixth Graders' Construction of Fraction Concepts through the Use of Physical Referents and Real-World Representations. 2005. Available online: http://purl.flvc.org/fsu/fd/FSU_migr_etd-0390 (accessed on 15 August 2018).

25. Mikkilä-Erdmann, M.; Olkinuora, E.; Mattila, E. Muuttuneet käsitykset oppimisesta ja opettamisesta—Haaste oppikirjoille [Changed conceptions of learning and teaching—A challenge for textbooks]. *Kasvatus* **1999**, *30*, 436–449.

26. Beckmann, S. *Mathematics for Elementary Teachers*, 2nd ed.; Addison Wesley: Boston, MA, USA, 2008.

27. Siegler, R.S.; Fazio, L.K.; Bailey, D.H.; Zhou, X. Fractions: The new frontier for theories for numerical development. *Trends Cogn. Sci.* **2013**, *17*, 13–19. [CrossRef] [PubMed]

28. Joutsenlahti, J.; Kulju, P. Multimodal languaging as a pedagogical model—A case study of the concept of division in school mathematics. *Educ. Sci.* **2017**, *7*, 9. [CrossRef]

29. Berger, M. Reading and learning from Mathematics textbooks: an analytic framework. In Proceedings of the 40th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Szeged, Hungary, 3–7 August 2016; Csíkos, C., Rausch, A., Szitányi, J., Eds.; PME: Szeged, Hungary, 2016; Volume 2, pp. 83–90.

30. Lepik, M.; Grevholm, B.; Viholainen, A. Using textbooks in the mathematics classroom—The teachers' view. *Nordic Stud. Math. Educ.* **2015**, *20*, 129–156.

31. Silver, E.A. Cross-national comparisons of mathematics curriculum materials: what might we learn? *ZDM Int. J. Math. Educ.* **2009**, *41*, 827–832. [CrossRef]

32. Törnroos, J. Mathematics textbooks, opportunity to learn and student achievement. *Stud. Educ. Eval.* **2005**, *31*, 315–327. [CrossRef]

33. Perkkilä, P. Opettajien matematiikkauskomukset ja matematiikan oppikirjan merkitys alkuopetuksessa. In *Jyväskylä Studies in Education, Psychology and Social Research*; Jyväskylän yliopisto: Jyväskylä, Finland, 2002.

34. Morgan, C. The place of pupil writing in learning, teaching and assessing mathematics. In *Issues in Mathematics Teaching*; Gates, P., Ed.; Routledge: London, UK, 2001; pp. 234–244.

35. Pimm, D. *Speaking Mathematically: Communication in Mathematics Classrooms*; Routledge & Kegan Paul: London, UK, 1987.

36. Lemke, J. Mathematics in the Middle: Measure, Picture, Gesture, Sign and Word. In *Educational Perspectives on Mathematics as Semiosis: From Thinking to Interpreting to Knowing*; Andersson, M., Saenz-Ludlow, A., Zellweger, S., Cifarelli, V., Eds.; Legas Publishing: Ottawa, ON, Canada, 2002; pp. 215–243.

37. Schleppegrell, M. Language in mathematics teaching and learning: a research review. In *Language and Mathematics Education*; Moschkovich, J.N., Ed.; Information Age Publishing, Inc.: Charlotte, NC, USA, 2010; pp. 73–112.

38. Bauersfeld, H. Language games in the mathematics classroom: Their function and their effects. In *The Emergence of Mathematical Meaning: Interaction in Classroom Cultures*; Cobb, P., Bauersfeld, H., Eds.; Erlbaum: Hillsdale, NJ, USA, 1995; pp. 271–294.

39. Joutsenlahti, J. Matematiikan kirjallinen kielentäminen lukiomatematiikassa. In *Ajankohtaista Matemaattisten Aineiden Opetuksen ja Oppimisen Tutkimuksessa, Proceedings of the Annual Symposium of the Finnish Mathematics and Science Education Research Association, Joensuu, Finland, 22–23 October 2009*; Asikainen, M., Hirvonen, P., Sormunen, K., Eds.; Kopijyvä: Joensuu, Finland, 2009; pp. 3–15.

40. Duvall, R. *Understanding the Mathematical Way of Thinking—The Registers of Semiotic Representations*; Springer International Publishing AG: Cham, Switzerland, 2017.

41. Kalantzis, M.; Cope, B. *Literacies*; Cambridge University Press: Cambridge, UK, 2012.

42. Perkkilä, P.; Joutsenlahti, J.; Sarenius, V.-M. Peruskoulun matematiikan oppikirjat osana oppimateriaalitutkimusta. In *Matematiikka ja Oppiminen*; Joutsenlahti, J., Silfverberg, H., Räsänen, P., Eds.; NMI: Jyväskylä, Finland, 2018; pp. 344–364.