

## КРИТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ О СИЛЕ СОПРОТИВЛЕНИЯ КАЧЕНИЮ КОЛЕСА

Кандидат техн. наук, доцент **Копотилов В.И.**  
(Тюменское высшее военное-инженерное командное училище имени маршала инженерных войск А.И. Прошлякова)

## CRITICAL ANALYSIS OF THE CONCEPTION OF THE ROLLING RESISTANCE OF A WHEEL

Ph.D. (Tech.), Associate Professor **Kopotilov V.I.**  
(Tyumen Higher Military-Engineering Command School)

*Колёсная машина, качение колеса, сила сопротивления качению, момент сопротивления качению, продольная реакция, опорная поверхность.*

*A wheel vehicle, wheel rolling, rolling resistance force, rolling moment, longitudinal reaction, supporting surface.*

*Рассматриваются две основные концепции силы сопротивления качению колеса, которые получили самое широкое распространение в научно-технической литературе в области транспортных машин. Анализ с позиций теоретической механики показывает, что ни первая концепция (продольная реакция опорной поверхности), ни вторая (условное продольное усилие) не имеют под собой соответствующей научной основы и несостоятельны.*

*Two basic concepts of the rolling resistance of the wheel are considered, which have become most widely used in the scientific and technical literature in the field of transport vehicles. Analysis from the standpoint of the theoretical mechanics shows that neither the first concept (the longitudinal reaction of the supporting surface) nor the second (the suppositive longitudinal force) have a corresponding scientific basis and are without validity.*

В процессе движения транспортной машины её колёса испытывают сопротивление движению, которое характеризуется моментом  $M_f$  сопротивления качению. В литературе принято считать, что этот момент образуется вследствие продольного сноса вектора нормальной реакции  $R_z$  дороги, обусловленного силами внутреннего трения в шине, т.е. явлением гистерезиса. При перекачивании колеса момент  $M_f$  трансформируется в силу  $P_f$  сопротивления качению, которая, наряду с другими силами, является важнейшим фактором сопротивления движению колёсной машины.

В отечественной научно-технической и учебной литературе до сих пор бытует несколько взаимно противоречивых версий этой силы, которые появились ещё в период становления науки о движении колёсных транспортных машин и связаны с именами Е.А. Чудакова, Е.Д. Львова, Н.А. Яковлева, Г.В. Зимилёва и некоторых других учёных.

Пожалуй, основной следует считать версию, согласно которой у ведомых колес силой сопротивления качению  $P_f$  является продольная реакция опорной поверхности, а у ведущих – некая сила, лежащая в пятне контакта и составляющая значительную часть этой реакции.

Изложение такого взгляда на силу сопротивления качению можно найти, например, в учебнике Львова Е.Д. [1], который, раскладывая реакцию опорной поверхности на нормальную  $Y_k$  и продольную  $X_k$  составляющие, прямо указывает, что «Составляющая  $X_k$  называется силой сопротивления качению направляющего колеса» [1, с. 29]. Величину этой силы он выражает формулой [1, с. 46]:

$$X_n = \frac{M_{cn} - M_{jn}}{r_n}, \quad (1)$$

где  $M_{cn}$  – момент сопротивления качению направляющего (переднего) колеса;

$M_{jn}$  – момент сил инерции, прикладываемый к переднему колесу при его неравномерном вращении;  
 $r_n$  – динамический радиус переднего колеса.

Продольную реакцию и силу сопротивления качению ведомого колеса отождествляют Н.В. Диваков и Н.А. Яковлев [2]. Силу сопротивления качению колеса авторы прикладывают в пятне контакта колеса с дорогой и направляют в сторону, противоположную направлению движения автомобиля.

Продольную реакцию  $X_p$  опорной поверхности считает силой сопротивления качению Б.С. Фалькевич, величину которой он определяет по формуле [3, с.18]:

$$X_p = \frac{M_{fp}}{r_o} = Z_p f_p, \quad (2)$$

где  $M_{fp}$  – момент сопротивления качению ведомого колеса;

$Z_p$  – равнодействующая элементарных нормальных реакций опорной поверхности, прикладываемая к ведомому колесу;

$f_p = a/r_o$  – коэффициент сопротивления качению ведомого колеса ( $a$  – снос нормальной реакции  $Z_p$ ,  $r_o$  – динамический радиус колеса).

Точно также трактуется сила сопротивления качению колеса и в учебнике под ред. В.А. Скотникова [4]. Рассматривая работу ведомого колеса на деформируемой почве, его авторы продольную реакцию почвы называют «... силой сопротивления качению ведомого колеса, т.к. она действует против направления движения» [4, с.49].

Отождествление силы сопротивления качению ведомого колеса и продольной реакции опорной поверхности

сти можно обнаружить и в других отечественных работах, а также в книгах зарубежных специалистов, например, Я. Таборека [5].

Для авторов, принимающих продольную реакцию дороги за силу сопротивления качению, эта сила является внешним воздействием на колесо со стороны опорной поверхности (дороги) и направлена против хода движения колёсной машины.

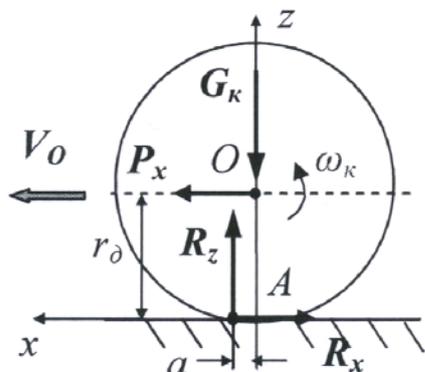


Рис. 1. Схема сил, прикладываемых к ведомому колесу

Другим аргументом является то, что при равномерном качении ведомого колеса значение продольной реакции  $R_x$  численно равно продольному толкающему усилию  $P_x$ , которое необходимо для обеспечения такого режима качения. При этом величина  $P_x$  изначально олицетворяет собой размер того сопротивления, которое испытывает колесо при своём качении. По мнению этих авторов, это и есть подтверждение того, что продольная реакция  $R_x$  является эквивалентом силы  $P_f$  сопротивления качению ( $R_x \equiv P_f$ ). Этот довод кажется логичным, тем более, что в такой системе сил (рис. 1), на первый взгляд, нет места какой-либо силе, которая, наряду с другими силами, прикладывалась бы к ведомому колесу. К тому же, из всей совокупности сил, приложенных к ведомому колесу, продольная реакция  $R_x$  опорной поверхности является *единственной* продольной силой, направленной против движения.

Для многих сторонников такой концепции этого вполне достаточно, чтобы воспринимать продольную реакцию дороги в качестве силы сопротивления качению.

Однако такое понимание силы сопротивления качению полно внутренних противоречий.

Во-первых, продольная реакция дороги - это сила трения сцепления, возникающая между шиной и опорной поверхностью, т.е. *внешняя* по отношению к колесу сила. Между тем, принято считать [6, 7 и др.], что на твёрдой дороге сопротивление качению колеса с пневматической шиной своим происхождением, обязана силам *внутреннего* трения в самой шине,

Во-вторых, момент сопротивления качению колеса  $M_f$ , определяющий величину силы  $P_f$ , создаёт вовсе не касательная реакция  $R_x$  опорной поверхности, т.е. не сила трения сцепления шины, которая объявляется силой  $P_f$  сопротивления качению, а нормальная реакция  $R_z$  дороги.

В-третьих, равенство численных значений продольной реакции  $R_x$  колеса и продольной толкающей силы  $P_x$ , обеспечивающей равномерное качение ведомого колеса, не является вовсе убедительным аргументом, чтобы принять  $R_x$  за силу  $P_f$  сопротивления качению.

Этот аргумент не выдерживает критики, если рассматривается не частный случай, а какой-либо другой режим движения колеса. Так, например, если исходить из качения колеса с ускорением, то сразу обнаруживается, что для такого движения требуется гораздо большее толкающее усилие, нежели для его равномерного движения. При этом сама продольная реакция превышает ту, которая имеет место при равномерном качении колеса. В таком случае толкающее усилие  $P_x$  не является силой, покрывающей только сопротивление качению, а продольная реакция  $R_x$  уже не может выступать в качестве эквивалента силы сопротивления качению. Как видим, источником сомнительного отождествления двух сил ( $P_f$  и  $R_x$ ), носящего чисто методологический характер, оказалось совпадение по модулю и знаку (направлению действия) сил  $P_f$  и  $R_x$ , да и то лишь в случае равномерного движения колеса. При этом никто не доказал, что не только физическая природа, но и точки приложения, а также линии действия двух указанных сил даже при этом режиме движения колеса одинаковы. В результате из одного частного случая, без достаточных на это оснований, были сделаны далеко идущие обобщения, результатом которых и явилось отождествление двух совершенно разных сил: сопротивления качению  $P_f$  и продольной реакции  $R_x$  опорной поверхности.

Таким образом, есть все основания полагать, что сила сопротивления качению и продольная реакция дороги – это разные по происхождению, физической природе и действию силы, которое нельзя отождествлять.

Несколько иначе трактуется сила сопротивления качению ведущих колёс. Такую силу принято прикладывать к шине в зоне её контакта с дорогой и направлять против вектора скорости движения колёсной машины. Так как вектор продольной реакции дороги  $R_x$ , воспринимаемый ведущим колесом, направлен по ходу движения машины, то силу сопротивления качению  $P_f$  не отождествляют с продольной реакцией дороги, но считают её одной из продольных сил, действующих на колесо в пятне контакта. Другими словами, силу сопротивления качению ведущего колеса, в сущности, считают *условной* реакцией опорной поверхности, направленной противоположно этой реакции  $R_x$ .

Такой подход к силам сопротивления качению был присущ Е.А. Чудакову, который силы  $P_f$  сопротивления качению всегда прикладывал в пятне контакта колёс с дорогой и направлял против движения автомобиля [8]. Однако при этом никаких доводов, доказывающих, что силы  $P_f$  действительно лежат в пятне контакта колеса с дорогой, Е.А. Чудаков не приводил.

Такой же подход к силе сопротивления качению ведущих колёс просматривается у В.П. Гребнева, О.И. Поливаева, А.В. Ворохобина, в учебнике которых [9] вектор силы сопротивления качению без всяких обоснований прикладывается к колесу в зоне его контакта с почвой и направляется параллельно вектору скорости движения колёсной машины.

Аналогичные фигуры умолчания можно встретить и в ряде книг зарубежных авторов. Так, например, Дж. Вонг [10] силу сопротивления качению прикладывает к колесу в плоскости дороги и направляет против вектора скорости движения колёсной машины, но не даёт при этом чёткого определения этой силы, а также объяснений механизма её возникновения.

Таким образом, приходится констатировать, что все авторы, с таким подходом, т.е. прикладывающие силу сопротивления качению в пятне контакта шины с дорогой, к сожалению, не дают месту (точке) приложения этой силы и линии её действия никакого теоретического обоснования. Возможно, они исходят из того, что сопротивление качению возникает при взаимодействии колеса с дорогой, следовательно, вектор такой силы должен лежать только лишь в зоне их контакта.

Однако такое представление о месте приложения силы сопротивления качению находится в вопиющем противоречии с теоретической механикой. Действительно, если ведущее колесо не буксует, а точка приложения силы  $P_f$  лежит в пятне контакта, то мощность такой силы равна нулю. Это объясняется тем, что точка приложения вектора силы не имеет при этом скорости ( $V = 0$ ), поэтому мощность силы сопротивления качению равна нулю:

$$N_f = P_f V = P_f 0 = 0. \quad (3)$$

Если такая сила  $P_f$  не совершает работы, то она и не является источником механических потерь колеса, т.е. не является и реальной силой сопротивления качению.

Подводя итог анализу данной версии силы сопротивления качению (продольная реакция дороги), можно заключить - она не согласуется с положениями теоретической механики и является несостоятельной.

Другая версия силы сопротивления качению состоит в том, что она сама по себе является некой условной (фиктивной) продольной силой, призванной символизировать реальное сопротивление перемещению колесной машины. Такой взгляд на силу сопротивления качению также получил широкое распространение и прослеживается в целом ряде работ [11-19 и др.].

Сомнение в реальности силы сопротивления качению как таковой пришло достаточно давно. Впервые его ясно сформулировал такой крупный специалист по теории колесных машин, как Г.В. Зимилев, который считал, что силы сопротивления качению колеса как таковой нет, т.е. она фиктивна. Он писал [11, с. 27], что «Указанная сила названа фиктивной потому, что для рассматриваемого случая качения воздействие дороги на колесо не вызывает появления какой-либо силы сопротивления качению, приложенной к колесу».

Как следует из этого заявления Г.В. Зимилева, сила сопротивления качению фиктивна лишь только потому, что в рассматриваемой им системе сил нет такой силы, которая бы явно отражала такое сопротивление дороги. При этом он не отрицал наличие сопротивления движению как такового. Он лишь, по сути, констатировал существование указанного противоречия, суть которого состоит в том, что при качении любого колеса сопротивление качению есть, а силы, выражающей это сопротивление, ... нет! Следовательно, чтобы как-то разрешить этот парадокс, приходится формально вводить и использовать для расчётов некую фиктивную (условную) силу сопротивления качению.

Такой же версии придерживаются В.Ф. Платонов и Г.Р. Леиашвили, которые заявляют, что «...  $P_f$ - условная сила сопротивления качению, т.к. в действительности никаких горизонтальных сил к колесу не приложено» [20, с.168].

Условной силу сопротивления качению считает и Петрушов В.А. [21]. Он пишет: «Сила сопротивления качению  $P_f$ , широко используемая в теории автомоби-

ля, - величина условная, соответствующая силовому фактору сопротивлений качению» [21, с.17]. Введение этой силы, полагает В.А. Петрушов, связано лишь с удобством её применения, а её условность обусловлена тем, что сопротивление движению колеса создаёт не сила, а момент сопротивления качению.

Фиктивной силу сопротивления качению считают Ю.В. Пирковский [12, 22] и Р.В. Вирабов [13, 14].

При этом первый отмечает [22], что «величины  $P_f$  и  $f_k$  являются величинами, не имеющими физического смысла, поэтому их и следует называть условной силой и условным коэффициентом сопротивления качению».

Более осторожен Р.В. Вирабов [13]: «Так как качение ведомого колеса осуществляется приложенной к оси продольной силой, ... то сила сопротивления качению имеет для ведомого колеса вполне определённый физический смысл». С другой стороны, в этой же статье автор указывает, что «говорить о силе сопротивления качению применительно к ведущему колесу можно лишь как о некоторой фиктивной силе».

Таким образом, реальность или фиктивность силы сопротивления качению колеса Вирабов Р.В., связывает не с тем, есть ли это сопротивление в действительности или его нет, а с тем, как преодолевается сопротивление качению. Если сопротивление качению преодолевается продольной толкающей силой (ведомые колёса), то  $P_f$  имеет физический смысл. Если это сопротивление преодолевается крутящим моментом (ведущие колёса), то  $P_f$  - фиктивная сила.

Мысль о фиктивности силы сопротивления качению укоренилась в умах многих специалистов [13, 15, 19 и др.] и проникла даже в учебную литературу. В качестве примера тому могут служить известные учебники по теории автомобиля и колёсных машин соответственно А.И. Гришкевича [15] и Г.А. Смирнова [19], в которых сила сопротивления качению трактуется как некое условное усилие.

Смирнов Г.А. заявляет, что отношение момента  $M_f$  сопротивления качению к кинематическому радиусу без проскальзывания ( $r'_k$ ), т.е. сила сопротивления качению  $P_f = M_f / r'_k$ , является фиктивной силой, которая «... представляет собой условную количественную характеристику сопротивления качению колеса» [19, с. 16].

Гришкевич А.И. отмечает, что сила «Сила сопротивления качению ( $F_f$ ) ... вводится в расчёт условно вместо момента сопротивления качению, что более удобно при изучении тягово-скоростных свойств автомобилей» [15, с. 35]. Её значение он определяет в виде произведения коэффициента сопротивления качению на величину нормальной реакции опорной поверхности [15, с. 17]:

$$F_f = f R_z = (a / r_o) R_z, \quad (4)$$

где  $a$  - величина смещения нормальной реакции;

$r_o$  - радиус качения колеса без скольжения.

Убеждение автора в отсутствии силы  $F_f$  приводит к тому, что он подменяет её другой, равной по модулю силой. В качестве такой Гришкевич А.И. видит силу, толкающую ось колеса и преодолевающую возникающее при этом сопротивление. Он пишет [15, с. 18] «Под силой сопротивления качению можно понимать силу, которую необходимо приложить к оси колеса в продольном направлении для преодоления момента сопротивления качению». Другими словами, вместо силы сопротивления  $F_f$  в качестве таковой предлагает понимать ... продольное толкающее усилие  $F_x$ , приклады-

ваемое со стороны корпуса колёсной машины, что абсолютно неприемлемо, т.к. вектор толкающего усилия направлен в сторону движения колеса, в то время как сопротивление всегда направлено против движения. Кроме того, сила  $F_f$  - это результат взаимодействия колеса с *опорной поверхностью*, а продольное усилие  $F_x$  - это результат взаимодействия колеса с *корпусом* машины. Таким образом, налицо две совершенно разные по физическому смыслу силы, поэтому их отождествление - просто ошибка. Единственное, что связывает две вышеуказанные силы  $F_f$  и  $F_x$  - это равенство их модулей, да и то, как уже отмечалось выше, только при равномерном движении колёсной машины.

К этому можно добавить, что в этой попытке подменить силу сопротивления качению толкающей силой Гришкевич А.И. не одинок. Ещё раньше в работе [23] Бидермана В.Л., Левина Ю.С., Слюдикова Л.Д. и Упориной Л.А. указывалось, что у колеса «Теряемая на внутреннее трение энергия восполняется путём приложения к колесу толкающей силы  $P_f$ ... Силу  $P_f$  принято называть силой сопротивления качению».

Как видим, эти авторы, принимая во внимание только численное равенство 2-х сил, толкающую силу, вопреки здравому смыслу, называют силой сопротивления качению.

Совсем по-другому следует понимать условность силы сопротивления Г.М. Кутьков, который справедливо отмечает, что «сопротивление качению колеса вызывают несколько разных сил и реакций», которые «различаются по месту приложения, характеру и направлению действия» [17, с. 42]. Автор полагает при этом, что в качестве силы сопротивления качению колеса «...принимают *условную силу*, равную по значению и противоположную по направлению активной толкающей (тянущей) силе, необходимой для преодоления всех сил сопротивления, возникающих при качении данного колеса в конкретных условиях» [17, с. 42].

Рассматривая вопрос о силе сопротивления качению, нельзя пройти мимо ГОСТ 17697-72 «Автомобили. Качение колеса. Термины и определения» [24].

Согласно п. 73. [24, с. 21], «Сила сопротивления качению колеса ( $P_f$ ) - условная количественная характеристика сопротивления качению колеса, имеющая размерность силы и равная отношению момента сопротивления качению колеса к радиусу качения без скольжения»:

$$P_f = \frac{M_f}{r_k} \quad (6)$$

Здесь под силой сопротивления качению понимается условная величина.

Как видим, концепция условной силы сопротивления качению сформулирована ещё Г.В. Зимилевым и подхвачена затем Ю.В. Пирковским, Р.В. Виравовым и В.А. Петрушовым, которые не смогли реальное сопротивление движению колеса соотнести с соответствующей силой.

Несмотря на то что две рассмотренные версии силы сопротивления качению отрицают друг друга, они не имеют расхождений в количественной оценке этой силы.

В основе всех формул, которые положены для установления силы сопротивления качения колеса, независимо от её трактовки, лежат более или менее одни и те же представления о причинах этого сопротивления. В работах Е.А. Чудакова [8, 25, 26], Г.В. Зимилева [11],

В.И. Кнороза [6], В.А. Петрушова [27], Р.В. Виравова [13, 14 и др.], А.И. Гришкевича [15], Г.А. Смирнова [19], В.А. Петрова [28, 29] и многих других специалистов в области механики колёсных машин утверждается, что сопротивление качению колеса связано, прежде всего, с гистерезисными явлениями в самой шине, которые порождают продольное смещение центра давления шины относительно центра пятна контакта и образование плеча  $a$ , на котором вектор нормальной реакции дороги  $R_z$  образует относительно оси вращения момент сопротивления качению, равный  $M_f = R_z a$ . Указанный момент  $M_f$  как фактор сопротивления качению колеса очевиден для всех и не вызывает споров. Гораздо сложнее обстоит дело с радиусом колеса, к которому относят момент сопротивления качению, когда производится расчёт значения силы.

В одних работах [1, 3, 4, 17, 30] при определении силы сопротивления качению момент  $M_f$  делят на динамический (силовой) радиус  $r_d$  колеса, в других [8, 13, 16] - на кинематический (радиус качения)  $r_k$ , в третьих [15, 19, 24] - а кинематический радиус «без скольжения», в четвёртых [28, 31] - на кинематический радиус  $r_{kc}$  в свободном режиме качения, в пятых [12, 27, 29] - на радиус  $r_k$  качения в ведомом режиме, а в шестых [32] на свободный радиус  $r_o$  колеса. При этом некоторые специалисты, например, В.А. Петров, считают, что возможно использование разных радиусов колеса и этот выбор определяется не принципиальными соображениями, а лишь удобством вычисления [21]. Другие же авторы [6, 8, 25, 26 и др.], чтобы избежать решения проблемы выбора радиуса колеса, представляют силу сопротивления качению как произведение нормальной реакции  $R_z$  (или осевой нагрузки  $G_k$ ) на коэффициент сопротивления качению  $f$ .

Как видим, разногласия этих авторов связаны не с самой формулой исчисления силы, а исключительно с выбором радиуса колеса ( $r$ ). При этом основное разногласие вызвано противопоставлением двух радиусов колеса: кинематического и динамического. Причём, те, кто исходят из уравнения мощностей, устанавливают силу сопротивления качению посредством кинематического радиуса ( $P_f = M_f / r_k$ ), а те, кто исходят из уравнения крутящих моментов - посредством динамического радиуса ( $P_f = M_f / r_d$ ). При этом как те, так и другие не исследуют механизм её образования, а исходят из указанных алгебраических уравнений, в которых они включают силу, изначально не определив её как соответствующий вектор.

На наш взгляд, в формуле силы сопротивления качению наиболее оправданным выглядит присутствие динамического (силового) радиуса колеса, т.к.  $r_d$  - это расстояние между осью вращения колеса и опорной плоскостью, следовательно, это плечо для всех продольных сил, лежащих в опорной плоскости, и всех продольных сил, прикладываемых к его оси. Однако можно встретить возражения относительно использования динамического радиуса. Так, например, Петров В.А. утверждает [31], что выражать силу сопротивления качению в виде отношения момента сопротивления качению к динамическому радиусу колеса означает заведомо допускать неточность, поскольку такая формула, якобы, не учитывает обусловленные продольными силами смещения  $C_1$  и  $C_2$  оси колеса (рис. 2), которые создают дополнительные моменты.

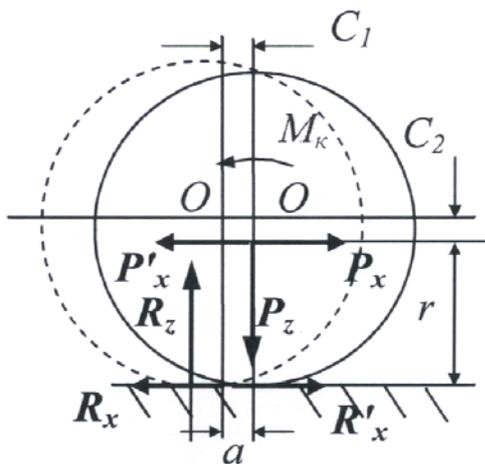


Рис. 2. Смещения оси вращения ведущего колеса [31]

На наш взгляд, такой аргумент надуман и не имеет под собой никаких оснований. Если эти смещения имеют место и вызывают дополнительные моменты сопротивления качению, то они автоматически учитываются соответствующими изменениями параметров плеча  $a$  и динамического радиуса  $r_d$ .

Возможность же использования кинематического радиуса и его модификаций вызывает значительные сомнения. Это объясняется следующим.

Во-первых, кинематический радиус – это условная величина, которая, строго говоря, к качению деформирующегося колеса не имеет прямого отношения и заимствована Е.А. Чудаковым из кинематики плоскопараллельного движения *твёрдого* тела. В связи с этим Чудаков Е.А. подменил реальное деформируемое колесо абсолютно твёрдым телом (диском), радиус которого в тот или иной момент времени определяется соотношением линейной скорости  $V_O$  перемещения его оси и мгновенной угловой скорости  $\omega_k$  его вращения. Такое условное колесо имеет точечный контакт с опорной поверхностью и катится по ней без всякого проскальзывания, т.е. в режиме «чистого» качения. Такая модель не имеет ничего общего с качением реального автомобильного колеса, снабженного пневматической шиной, т.к. такое колесо не имеет и не может иметь никаких гистерезисных потерь (как абсолютно твёрдое тело) и механических потерь, связанных с проскальзыванием по опорной поверхности (т.к. у него «абсолютно чистое» качение).

Поскольку кинематический радиус  $r_k$  в общем случае существенно отличается от динамического ( $r_d$ ), то силу сопротивления качению, если она вычисляется посредством радиуса качения, следует рассматривать как некое условное усилие, т.к.  $r_k$  не является плечом относительно оси вращения для всех продольных сил, лежащих в плоскости контакта колеса и дороги.

Другими словами, если в формуле (6) принимается кинематический радиус, то вместо силы  $P_f$  получается усилие, линия действия которого располагается вне плоскости контакта двух тел (колеса и дороги), поскольку  $r_d \neq r_k$ . Такое усилие лишено конкретного физического смысла, т.е. фактически условно.

Именно такой приходится считать силу сопротивления качению, задаваемую, например, Д.А. Чудаковым [33]. Как указывает сам автор, она прикладывается не в пятне контакта колёс, а на расстоянии, равном их теоретическому радиусу  $r_k$  от оси вращения [33, с. 25]. Чудаков Д.А. полагает, что каждая такая сила сопротив-

ления «параллельна поверхности пути и направлена против движения». При этом Д.А. Чудаков, как и все другие авторы, не объясняет, как может точка приложения и линия действия реального усилия дороги располагаться вне плоскости контакта, разделяющей колесо и саму дорогу.

Во-вторых, в зависимости от режима качения значенные кинематического радиуса колеса претерпевает большие изменения. Особенно велико это изменение может быть при качении колеса в ведущем или тормозном режиме. Если всё же, вопреки канонам механики, принять, что сила сопротивления  $P_f$  лежит в плоскости дороги, а кинематический радиус колеса является при этом плечом этой силы, то логичным было бы признать, что и высота точки приложения прижимающего колесо усилия  $G_k$ , обусловленного тяжестью колёсной машины, изменяется в соответствии с кинематическим радиусом. Но в таком случае и в уравнении мощностного баланса колеса следовало бы учитывать работу силы  $G_k$ , которую она совершает из-за изменения высоты точки её приложения. Абсурдность этого вполне очевидна.

Кроме того, если кинематический радиус принимается в качестве плеча всех сил, которые лежат либо в плоскости дороги, либо приложены к оси, то из уравнения мощностного баланса колеса следует исключить работу сил трения скольжения, т.к. колесо, ось которого располагается на высоте  $r_k$ , по определению, перекачивается *без всяких проскальзываний или буксований*. Однако и это тоже никто из приверженцев  $r_k$  почему-то в расчёт не принимает.

В-третьих, кинематический радиус колеса – это отвлеченная величина, связывающая скорость оси колеса с его угловой скоростью вращения. Т.е. это – чисто кинематический параметр, а не плечо всех сил, которые передаются колесу со стороны опорной поверхности и лежат в пятне его контакта с дорогой, или продольных сил, прикладываемых к оси вращения со стороны корпуса (рамы). Поэтому все моменты сил, полученные умножением реальных сил на кинематический радиус – это *отвлечённые величины*, не имеющие ничего общего с реальными моментами, действующим на колесо. Точно так же можно охарактеризовать и силы, полученные делением реальных моментов, прикладываемых к колесу, на кинематический радиус. И неслучайно формула  $P_f = M_f / r_k$  работает удовлетворительно лишь только тогда, когда  $r_k$  близок к  $r_d$ . Однако если различие радиусов  $r_k$  и  $r_d$  становится большим, то неправомерное использование кинематического радиуса вместо динамического становится особенно очевидным.

**Приведём пример.** Когда колёсная машина стоит на месте, а её ведущие колеса буксуют (характерное явление при эксплуатации машины в гололёд), линейная скорость колёс  $V_O = 0$ , а их угловая  $\omega_k \neq 0$ . В такой ситуации кинематический радиус ведущих колёс машины  $r_k = 0$ , а сила сопротивления качению каждого буксующего колеса (если исходить из формулы  $P_f = M_f / r_k$ ) устремляется при этом в бесконечность:

$$P_f = \lim (M_f / r_k) = \lim (M_f \omega_k / V) \rightarrow \infty.$$

Очевидно, что такого роста силы сопротивления быть не может.

Таким образом, если в расчётной формуле  $P_f$  вместо динамического радиуса используется кинематический, то может возникать вопиющее несоответствие силы сопротивления качению с её реальными значениями.

Не желая отказаться от использования кинематического радиуса и тем самым избежать парадокса, некоторые специалисты, в первую очередь, Пирковский Ю.В. [12], Виравов Р.В. [13, 14] и Петрушов В.А. [27], не нашли ничего лучшего как объявить саму силу  $P_f$  «условной» или «фиктивной».

Так, Виравов Р.В., признавая, что при  $V \rightarrow 0$  сила сопротивления качению  $P_f$  не может устремляться к бесконечности, объясняет это тем, что «... полученный результат является лишь следствием приложения фиктивной ... силы сопротивления качению к оси колеса» [13]. Таким образом, Виравов Р.В. указанный абсурд объясняет не тем, что сила  $P_f$  изначально определена неправильно, а тем, что она сама по себе, якобы, «фиктивна» и может быть какой угодно.

Попытки уйти от этого парадокса предприняли Ю.В. Пирковский, В.А. Петров и В.А. Петрушов.

Первый предложил скорректировать радиус ведущего колеса, т.е., несмотря на то, что колесо фактически работает в ведущем режиме, делить момент  $M_f$  сопротивления качению на радиус качения колеса ... в ведомом режиме ( $r_{ко}$ ) [12]. Логика Ю.В. Пирковского предельно проста: так как ведомое колесо, в отличие от ведущего, никогда не буксует на месте и его радиус  $r_{ко} \neq 0$ , то и сила сопротивления качению ведущего колеса, вычисленного по формуле  $P_f = M_f/r_{ко}$ , никогда не примет бесконечно большого значения.

Петров В.А. [28] с этой же целью пытался убедить, что момент сопротивления качению следует делить на радиус  $r_{кк}$  качения колеса в так называемом свободном режиме качения, который у ведущего колеса реального одиночного автомобиля никогда не реализуется.

Однако при использовании как первого ( $r_{ко}$ ), так и второго радиуса ( $r_{кк}$ ) возникает вопрос: силу сопротивления качению в каком режиме качения выражает формула (6) - в ведомом, свободном или ведущем. На наш взгляд, выражать силу сопротивления качению ведущего колеса через его кинематический радиус в совершенно другом режиме (ведомом или свободном режиме), нелогично, т.к. в одной формуле соединяются два совершенно разных режима качения одного и того же колеса, в результате чего получается величина силы, не имеющая ясного физического смысла.

Петрушов В.А., в отличие от двух вышеуказанных авторов, в формуле силы сопротивления качению (6) предложил не заменять кинематический радиус качения колеса в ведущем режиме на другой, а лишь ограничить величину  $r_k$  исходя из условия качения колеса «без проскальзывания» [27]. Таким образом, В.А. Петрушов, признавая, что при значительном отклонении кинематического радиуса от динамического формула (6) фактически неработоспособна, предложил формальное решение, не имеющее никакого научного обоснования. К сожалению, именно такой подход к определению силы  $P_f$  нашёл отражение и в стандарте [24], одним из основных разработчиков которого выступал сам В.А. Петрушов.

К сказанному следует добавить, что указанное ограничение на радиус качения колеса не решает проблему определения силы  $P_f$  в принципе, т.к. в этом случае остаётся без ответа вопрос о силе сопротивления качению, когда колесо всё-таки проскальзывает или пробуксовывает.

Отметим, что рассмотренный парадокс – не единственный, который возникает, если силу сопротивления

ведущего колеса определяют через кинематический радиус. Неправомерность использования кинематического радиуса обнаруживается и при другом предельном состоянии ведущего колеса, а именно при трогании с места.

В период нагружения колеса крутящим моментом, предшествующим моменту его трогания с места, угловая и линейная скорость колеса равны нулю ( $\omega = 0$ ,  $V = 0$ ). В этот период радиус колеса  $r_k = 0/0$  - величина математически неопределённая. Следовательно, математически неопределённой является и сила сопротивления качению. Однако практически это не так, и сила сопротивления качению принимает вполне конкретного значения, при превышении которого и начинается процесс его качения. Заметим, подобный казус не возникает, если сила сопротивления качению определяется не кинематическим, а его динамическим радиусом.

Ещё более сомнительно использование в формуле (6) свободного радиуса колеса. Выдвигаемые же при этом соображения [32], что это «более удобно», нельзя отнести к научным аргументам.

Таким образом, ясно, что формула  $P_f = M_f/r_\delta$ , в отличие от  $P_f = M_f/r_k$ , имеет гораздо больше оснований на существование, т.к. у нее нет тех недостатков, которые присущи формулам с кинематическим или другим радиусом.

Важнейшим недостатком всех воззрений на силу сопротивления качению является то, что все они не опираются на глубокий анализ всех процессов, определяющих образование этой силы. В результате чего в учебниках вообще перестали рассматривать эту силу как полноценный вектор, а ограничиваются только её количественным выражением. Так, например, в учебнике [30] авторы дают следующее определение силы [30, с. 44]: «В теории трактора отношение  $M_{сnp}/r_\delta$  принято называть силой сопротивления качению  $F_{сnp}$ ». При этом замалчивается вопрос о точке приложения силы, линии её действия, а также механизме её образования. Отсутствие ясности в данном вопросе приводило даже к тому, что некоторые исследователи, например, Ламовицкий В.С. [34], высказывали даже мысль о том, что «Правильнее характеризовать сопротивление качению не силой, ..., а парой трения качения».

## Выводы

1. Сформировались две основные концепции силы сопротивления качению. Первая из них состоит, что сила сопротивления качению – это продольная реакция дороги (или часть продольной реакции дороги), а вторая гласит, что сила сопротивления качению – это условная (фиктивная) сила сопротивления. При этом обе концепции не имеют под собой сколь-нибудь удовлетворительного научного обоснования.

2. Численное значение силы сопротивления качению определяется формулой, выражающей отношение момента сопротивления качению к радиусу колеса. При этом одни авторы в качестве радиуса используют динамический радиус колеса, а другие предлагают использовать кинематический радиус или его разновидности.

3. Предлагаемые формулы, выражающие численное значение силы сопротивления качению колеса, противоречат друг другу и не имеют соответствующего научного обоснования. При этом большое сомнение вызывает использование кинематического радиуса (и его разновидностей), а также свободного радиуса колеса.

4. Нет ясного представления о механизме образования силы сопротивления качению колеса и о том, что она представляет собой как векторная величина.

5. Главной причиной, препятствующей научному определению вектора силы сопротивления качению, является неправильный подход к решению проблемы. Вместо того, чтобы рассмотреть физику процесса и на основе анализа определить вектор силы сопротивления качению, все исследователи сначала составляют алгебраические уравнения мощностного или силового баланса, в которых уже присутствует эта сила, а затем, интерпретируя их, пытаются объяснить, что же из себя представляет эта сила и как её при этом надо вычислять. Отсюда разноречивость в радиусах, которые используются при выражении численного значения силы сопротивления, и различные представления о самой силе как векторной величине.

### Литература

1. Львов Е.Д. Теория тракторов: Учебник для вузов. – М.: Машгиз, 1960. – 252 с.
2. Диваков Н.В., Яковлев Н.А. Теория автомобиля. – М.: Высшая школа, 1962. – 300 с.
3. Фалькевич Б.С. Теория автомобиля. – М.: Машгиз, 1963. – 239 с.
4. Основы теории и расчёта трактора и автомобиля /Под ред. В.А. Скотникова. – М.: Агропромиздат, 1986. – 383 с.
5. Таборек Я. Механика автомобиля. Пер. с англ. /Под ред. В.Ф. Родионова. – М.: Гостехиздат, 1960. – 207 с.
6. Работа автомобильной шины. Под ред. В.И. Кнороза. – М.: Транспорт, 1976. – 238 с.
7. Янте А. Механика движения автомобиля, ч.1. Пер. с немецк.- М.: Машгиз, 1958. – 263 с.
8. Чудаков Е.А. Избранные труды. Т. 1. Теория автомобиля.- М.: Изд-во АН СССР, 1961.- 463 с.
9. Гребнев В.П., Поливаев О.И., Ворохобин А.В. Тракторы и автомобили: Теория и эксплуатационные свойства. – М.: КНОРУС, 2011. – 264 с.
10. Вонг Дж. Теория наземных транспортных средств. Перевод с англ. М.: Машиностроение, 1982. – 284 с.
11. Зимилев Г.В. Теория автомобиля. – М.: Воениздат, 1957. – 455 с.
12. Пирковский Ю.В. Некоторые вопросы качения автомобильного колеса // Автомобильная промышленность. – 1965. – № 12. – С. 26-29.
13. Вирабов Р.В. Об оценке сопротивления качению упругого колеса по жёсткому основанию// ИВ: Машиностроение, 1967, № 7. – С. 93-98.
14. Вирабов Р.В. Об оценке сопротивления качению колеса с пневматической шиной // Вестник машиностроения. - 1987. - № 7. - С. 46-50.
15. Гришкевич А.И. Автомобили: теория.- Минск: Вышэйшая школа, 1986.- 208 с.
16. Гладов Г.И., Петренко А.М. Специальные транспортные средства: Теория. Учебник для вузов. – М.: ИКЦ «Академкнига», 2006. – 215 с.
17. Кутьков Г.М. Тракторы и автомобили. Теория и технологические свойства. – М.: Колос, 2004. – 504 с.
18. Петрушов В.А. Обобщённый метод оценки сопротивлений качению автомобилей и автопоездов с различными типами привода // Автомобильная промышленность, 1965, № 7. – С. 23-27.

19. Смирнов Г.А. Теория движения колёсных машин: Учебное пособие. – М.: Машиностроение, 1990. – 352 с.

20. Платонов В.Ф., Леиашвили Г.Р. Гусеничные и колёсные транспортно-тяговые машины. – М.: Машиностроение, 1986. – 296 с.

21. Петрушов В.А. Некоторые пути построения технической теории качения // Тр. НАМИ, 1963, вып. 61. – С. 3-56.

22. Пирковский Ю.В. О развитии теории качения колеса с упругой пневматической шиной // Вестник машиностроителя. - 1987. - № 12. - С.29-31.

23. Бидерман В.Л., Левин Ю.С., Слюдииков Л.Д., Упорина Л.А. Влияние конструктивных и эксплуатационных факторов на износ, сцепление и сопротивление качению автомобильных шин. – М.: ЦНИИТЭИнефтехим, 1970. – 96 с. (Обзор. Серия: «Производство шин, РТИ и АТИ»).

24. ГОСТ 17697-72 Автомобили. Качение колеса. Термины и определения.

25. Чудаков Е.А. Качение автомобильного колеса //Труды Автомобильной лаборатории ИМ АН СССР, вып. 9. – М.- Л.: Изд. АН СССР, 1948. – 200 с.

26. Чудаков Е.А. Качение автомобильного колеса. – М.: Машгиз, 1947. – 70 с.

27. Петрушов В.А., Шуклин С.А., Московкин В.В. Сопротивление качению автомобилей и автопоездов. – М.: Машиностроение, 1975. – 225 с.

28. Петров В.А. Уточнение силового баланса самоходной машины на базе развития теории качения пневматического колеса и её практическое приложение // Тракторы и сельхозмашины.- 1991.- № 7.- С. 17-19.

29. Петров В.А. Узловые вопросы теории качения пневматического колеса // Тракторы и сельхозмашины.- 1986.- № 8.- С. 18-22.

30. Тракторы: Теория: Учебник для вузов / В.В. Гуськов, Н.Н.Велев, Ю.Е. Атаманов и др.; Под общ. ред. В.В. Гуськова. – М.: Машиностроение, 1988. – 376 с.

31. Петров В.А. Современная теория качения пневматического колеса и её практическое приложение // Автомобильная промышленность.- 1993. - № 4. - С. 14-18.

32. Армейские автомобили: ч.1. Теория. /Под ред. А.С. Антонова. – М.: Воениздат, 1970. – 526 с.

33. Чудаков Д.А. Основы теории трактора и автомобиля. – М.: Сельхозиздат, 1962. – 312 с.

34. Ламовицкий В.С. Некоторые вопросы теории автомобиля // Труды Академии. Сб. 8 (42). – М., 1946 (Военная академия БТ и МВ СА).

### Сведения об авторе

**Копотилов Владимир Ильич**, кандидат техн. наук, доцент, профессор РАЕ,

Кафедра «Естественно-научные и общепрофессиональные дисциплины»,

Тюменское высшее военно-инженерное командное училище имени маршала инженерных войск А.И. Прошлякова,

625028, г. Тюмень, ул. Толстого, 1. ТВВИКУ

Телефон (3452) 26-84-82; 8-912-920-88-23 (моб.)

E-mail: vikopotilov@mail.ru.