

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПЕРЕВОЗОК ГРУЗОВ В СПЕЦКОНТЕЙНЕРАХ

Доктор техн. наук, профессор **Резер С.М.**

(Всероссийский институт научной и технической информации Российской академии наук)

Доктор экон. наук, профессор **Резер А.В.**доктор техн. наук **Лёвин С.Б.**,аспирант **Носырев И.И.**

(Российский университет транспорта. РУТ - МИИТ)

## MATHEMATICAL MODELING OF CARGO TRANSPORTATION IN SPECIAL CONTAINERS

Doctor (Tech.), Professor **Rezer S.M.**

(All-Russian Institute of Scientific and Technical Information of the Russian Academy of Sciences)

Doctor (Econ.), Professor **Rezer A.V.**,Doctor (Tech.) **Lyovin S.B.**,Postgraduate **Nosyrev I.I.**

(Russian University of Transport. MIIT)

*Контейнерные перевозки грузов, спецконтейнеры, танк-контейнеры, рынок перевозок, прогноз, моделирование.**Container transportation of goods, special containers, tank containers, transportation market, forecast, modeling.*

Рассматривается изучение методов оптимизации и математическое моделирование перевозок в спецконтейнерах в цепях поставок с учетом возможных возникающих ограничений. В рамках предлагаемой модели рассматриваются возникающие ограничения двух типов: ограничение на время перевозки спецконтейнера, ограничение на пропускную способность элемента логистической цепи в цепи поставок. Математическая модель, задача математической оптимизации, а также ее решение, проиллюстрирована на демонстрационном примере.

We consider the study of optimization methods and mathematical modeling of transport in special containers in supply chains, taking into account possible constraints that may arise. Within the framework of the proposed model, two types of constraints arise: restrictions on the transportation time of the special container, restrictions on the capacity of the supply chain element in the supply chain. The mathematical model, the problem of mathematical optimization, as well as its solution, is illustrated on a demo example.

Впечатляющий рост рынка перевозок в танк-контейнерах (в среднем 29% в 2010 - 2017 гг.) и хороший прогноз дальнейшего роста этого рынка (в среднем 10% в 2018 - 2025 гг.) (рис. 1) требует пристального изучения математических моделей, востребованных для работы на этом стабильном быстрорастущем рынке с большим потенциалом дальнейшего роста.

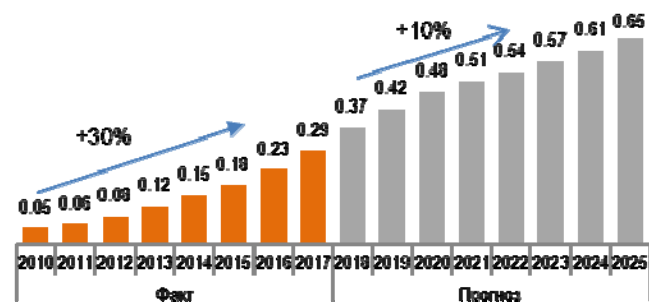


Рис. 1. Рост рынка перевозок в танк-контейнерах в период 2010 - 2017 гг. с прогнозом на период до 2025 года

Отметим некоторые присущие текущей ситуации тенденции на рынке перевозок в танк-контейнерах, важные для выбора изучаемых математических моделей. Динамика уровня контейнеризации в различных сегментах перевозок демонстрирует рост с умеренного до весьма значительного (рис. 2). Однако к настоящему времени на рынке сухих контейнеров образовался дефицит платформ в объеме 25% рынка, что привело к росту ставок на вагон. В настоящее время дефицит закрывается парком СНГ и парком универсальных плат-

форм. Из этого можно сделать вывод, что при математическом моделировании наиболее полезным и востребованным будет изучение методов оптимизации и математическое моделирование перевозок в спецконтейнерах в цепях поставок с учетом возможных возникающих ограничений [1, 2].

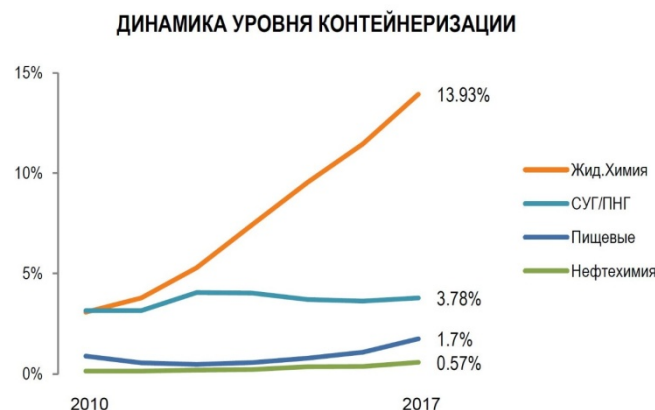


Рис. 2. Динамика уровня контейнеризации в период 2010 - 2017 гг. в различных сегментах рынка перевозок: 13,93% - жид. химия; 3,78% - СУГ/ПНГ; 1,7% - пищевые; 0,57% - нефтехимия

В рамках предлагаемой модели рассматриваются возникающие ограничения двух типов: 1) ограничение на время перевозки спецконтейнера, 2) ограничение на пропускную способность элемента логистической цепи в цепи поставок. Первый тип ограничений учитывает

обязательства оператора перевозок перед грузоотправителями и грузополучателями, второй тип ограниченный учитывает возможные проблемы из-за нехватки платформ, недостаточной мощности терминалов по погрузке/разгрузке спецконтейнеров с платформ и т.д. [3, 5-7].

Хотя различные типы спецконтейнеров (танк-контейнеры, рефконтейнеры и др.) имеют свою довольно различную специфику, возможно рассмотрение их перевозки в цепях поставок в рамках одной модели, что и предлагается сделать в настоящей статье [4].

### Математическая модель и задача оптимизации перевозок грузов в спецконтейнерах

Опишем предлагаемую математическую модель и решаемую в ее рамках задачу оптимизации перевозок в спецконтейнерах в цепях поставок.

Цепи поставок рассматриваются как ориентированный граф  $\Gamma = (V, E)$  с множеством вершин  $V = \{1, \dots, N\}$ , соответствующих элементам цепей поставок, и множеством ориентированных ребер  $E \subset V \times V$ , состоящим из таких пар  $(i, j)$ , что возможен переход контейнеров из пункта  $i$  цепи поставок в пункт  $j$ .

Под элементами цепи поставок понимаются не только физические элементы транспортной инфраструктуры, такие как контейнерные терминалы или железнодорожные станции, но и все необходимые для перевозки процессы, включая обслуживание от момента получения груза и информации от грузоотправителя до доставки груза конечному грузополучателю. В данной цепи поставок происходит движение спецконтейнеров разных типов. Пусть всего имеется  $q$  разных типов контейнеров.

В рамках предлагаемой модели вместо рассмотрения движения индивидуальных контейнеров по цепи поставок предлагается рассмотреть транспортный поток спецконтейнеров за некоторый период времени  $T$ , например месяц.

В предлагаемой модели учитываются ограничения двух типов: 1) ограничение на время перевозки спецконтейнера, 2) ограничение на пропускную способность элемента логистической цепи в цепи поставок. Для того чтобы эти ограничения учесть, в модели вводятся необходимые характеристики как цепи поставок, так и транспортных потоков, а также самих типов контейнеров.

Каждый тип контейнеров имеет предельно допустимое время транспортировки в цепи поставок. Для контейнера типа  $j, j = 1, \dots, q$ , обозначим соответствующее предельное время через  $t_j$ . Предельное время может возникать по разным причинам: как из-за физических свойств перевозимых грузов (например, для рефконтейнеров ввиду предельных сроков хранения перевозимых грузов), так и из-за ограничений, наложенных в контрактах с грузоотправителем / грузополучателем [8 - 10].

Под «типом контейнера» не обязательно понимать физический тип контейнера, это тип контейнера в математической модели. Танк-контейнер, который необходимо доставить не более чем за месяц, и танк-контейнер, который необходимо доставить не более

чем за полтора месяца, в модели можно рассматривать как два разных типа контейнера.

Чтобы учитывать ограничения на время перевозок, соответствующие характеристики должны приписываться также элементам цепи поставок. А именно - вершинам и ребрам ориентированного графа цепи поставок  $\Gamma = (V, E)$ . Для элемента цепи поставок номер  $i \in V$  время нахождения спецконтейнера в данном элементе цепи поставок обозначим как  $t_i$ , а для звена цепи поставок  $(i, j) \in E$  время перехода через это звено из элемента  $i \in V$  в элемент  $j \in V$  цепи поставок обозначим как  $t_{ij}$ .

Заметим, что для некоторых вершин и ребер графа цепи поставок соответствующие значения времени могут равняться нулю. Например, для операций оформления грузов с помощью компьютерных технологий время проведения соответствующих операций мало и им можно при необходимости пренебречь для простоты.

Так как в модели учитываются и ограничения на пропускную способность элемента логистической цепи в цепи поставок, введем соответствующие величины. Для элемента цепи поставок номер  $i \in V$  предельное количество проходящих через него за период времени  $T$  спецконтейнеров обозначим через  $S_i$ , а для звена цепи поставок  $(i, j) \in E$  предельное количество проходящих из элемента  $i \in V$  в элемент  $j \in V$  цепи поставок за период времени  $T$  спецконтейнеров обозначим  $S_{ij}$ .

Каждый из рассматриваемых в модели потоков спецконтейнеров  $f_k, k = 1, \dots, K$ , характеризуется следующими величинами:

$A_k \in \Gamma$  – номер начального пункта потока  $f_k$  в цепи поставок  $\Gamma$ ;

$B_k \in \Gamma$  – номер конечного пункта потока  $f_k$  в цепи поставок  $\Gamma$ ;

$R_k$  – количество спецконтейнеров потока  $f_k$ , перевезённых за период времени  $T$ ;

$Q_k$  – тип спецконтейнеров потока  $f_k$ .

В рамках данной модели предлагается решить **задачу оптимальной маршрутизации контейнеров в цепи поставок**, то есть в качестве начальных данных задается граф, описывающий цепь поставок, а также описывающие его характеристики данные и сведения об имеющихся потоках спецконтейнеров, а в качестве решения получается выбор оптимального маршрута в данной цепи поставок. Оптимальность понимается как быстрая доставка. То есть в качестве целевой функции берётся суммарное время контейнеров в пути, но с соблюдением всех наложенных ограничений на время спецконтейнера в пути и пропускную способность элементов цепи поставок.

Для решения этой задачи на первом этапе для каждого из потоков спецконтейнеров  $f_k$  составляется список возможных маршрутов  $I_{kl}, k = 1, \dots, N, l = 1, \dots, L_k$ , в цепи поставок, то есть, вариантов логистических цепочек для данного потока спецконтейнеров.

Маршрут (логистическая цепочка маршрутов)  $I_{kl}, k = 1, \dots, K, l = 1, \dots, L_k$  описывается своей длиной

$d_{kl}$  (измеряемой в количестве проходимых вершин графа цепи поставок) и списком вершин графа цепи поставок  $v_{kl1}, \dots, v_{kl d_{kl}}$ , где  $v_{kl1} = A_k$  и  $v_{kl d_{kl}} = B_k$ .

Составление данных логистических цепочек является сложной проблемой со множеством факторов, требует привлечения экспертных заключений и не может быть полностью автоматизировано. Поэтому данный этап рассматривается как «внешний» с точки зрения модели, то есть возможные маршруты (логистические цепочки) предполагаются для каждого потока спецконтейнеров уже заданными.

На втором этапе решается уже чисто математическая задача минимизации суммарного времени транспортировки спецконтейнеров в цепи поставок с учетом всех ограничений.

Заметим, что время транспортировки спецконтейнера из потока  $f_k$  по маршруту (логистической цепочке)  $I_{kl}$  равно

$$W_{kl} = \sum_{i=1}^{d_{kl}} t_i + \sum_{i=1}^{d_{kl}-1} t_{i,i+1}.$$

Неизвестными величинами в предлагаемой модели являются количества спецконтейнеров из каждого потока  $f_k$ , направляемые по маршруту  $I_{kl}$ . Обозначим эти количества через  $x_{kl}$ . Тогда минимизируемой целевой функцией является простая линейная функция

$$F(x_{11}, \dots, x_{NL_N}) = \sum_{k=1}^K \sum_{l=1}^{L_k} W_{kl} x_{kl},$$

но с большой системой дополнительных условий на предельное время транспортировки и пропускную способность вершин и ребер графа цепи поставок.

Во-первых, для каждого потока спецконтейнеров  $f_k$  суммарное количество спецконтейнеров, перевозимых по разным маршрутам (логистическим цепочкам), должно равняться общему количеству спецконтейнеров данного потока за изучаемый период времени  $T$ , то есть

$$\sum_{l=1}^{L_k} x_{kl} = R_k, k = 1, \dots, K.$$

Во-вторых, необходимо не превышать пропускную способность вершин и звеньев графа  $\Gamma$  пи поставок.

Для учета этого условия введем дополнительные величины, описывающие, задействованы или нет данные вершины или ребра графа цепи поставок в данном маршруте (логистической цепочке).

Пусть  $z_{ikl} = 1$ , если вершина  $i$  графа  $\Gamma$  пи поставок есть в маршруте  $I_{kl}$ , или  $z_{ikl} = 0$  - в противном случае.

Аналогично, пусть  $z_{ijkl} = 1$ , если ребро  $(i, j)$  графа  $\Gamma$  цепи поставок есть в маршруте  $I_{kl}$ , или  $z_{ijkl} = 0$  - в противном случае.

Тогда условие не превышения пропускной способности вершин и звеньев цепи поставок записываются как система неравенств

$$\sum_{k=1}^K \sum_{l=1}^{L_k} x_{kl} z_{ikl} \leq S_i, \quad i = 1, \dots, N,$$

$$\sum_{k=1}^K \sum_{l=1}^{L_k} x_{kl} z_{ijkl} \leq S_{ij}, \quad (i, j) \in E.$$

В-третьих, время транспортировки  $W_{kl}$  спецконтейнера из потока  $f_k$  по маршруту (логистической цепочке)  $I_{kl}$  не должно превышать предельно допустимого времени транспортировки контейнера соответствующего типа  $Q_k$ , то есть

$$W_{kl} \leq m_{Q_k}.$$

Заметим, что на самом деле последнее условие не зависит от неизвестных переменных  $x_{11}, \dots, x_{NL_N}$ , а просто имеет некоторое влияние на рассматриваемые логистические цепочки, которое легко удовлетворить, удаляя неподходящие логистические цепочки еще до перехода от первого этапа ко второму.

С математической точки зрения искомые переменные  $x_{kl}$  целочисленные, целевая функция  $F(x_{11}, \dots, x_{NL_N})$  линейна и все дополнительные условия на искомые величины линейны.

Полученную задачу можно эффективно решить стандартными алгоритмами целочисленного линейного программирования, например, «методом ветвей и границ».

### Пример использования предлагаемой математической модели и соответствующей задачи оптимизации

В качестве иллюстрации рассмотрим пример со следующим графом  $\Gamma$  цепи поставок (рис. 3).

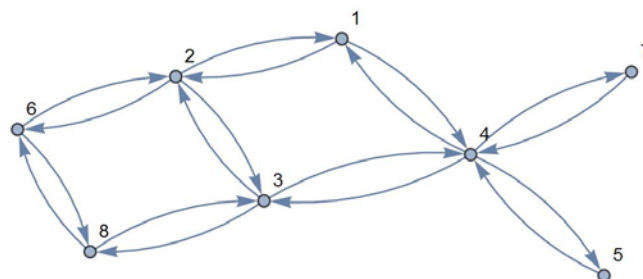


Рис. 3. Пример графа  $\Gamma$  цепи поставок

На этом рисунке изображен пример графа цепи поставок, у которого 8 вершин, соответствующих 8 элементам цепи поставок, с 18 ориентированными ребрами, соответствующими возможным переходам из одного элемента цепи поставок в другой.

Задача рассматривается для  $q = 2$  типов спецконтейнеров. В качестве длительности периода моделирования рассмотрим один месяц, то есть,  $T = 30$  дням. В качестве предельно допустимого времени транспортировки в цепи поставок  $m_i$  для спецконтейнеров типа  $i$  будем рассматривать значения из таблицы 1.

**Предельно допустимое время транспортировки в цепи поставок для спецконтейнеров каждого типа**

Номер типа спецконтейнера	Предельно допустимое время транспортировки в цепи поставок
1	14
2	21

Зададим для каждого элемента цепи поставок, характеризуемого номером  $i \in V$  соответствующей вершины графа поставок, время нахождения спецконтейнера в данном элементе цепи поставок, которое мы обозначаем в модели через  $t_i$ . Соответствующие значения приведены в таблице 2.

Таблица 2.

**Время нахождения спецконтейнера в каждом элементе цепи поставок**

Номер вершины графа цепи поставок	Время нахождения спецконтейнера в данном элементе цепи поставок
1	2
2	1
3	1
4	3
5	1
6	2
7	1
8	1

Графически время нахождения спецконтейнера в каждом элементе цепи поставок удобно изображать, подписывая соответствующее время на графе (рис. 4), где номер вершины графа цепи поставок написан внутри соответствующего вершине диска, а время нахождения спецконтейнера в данном элементе цепи поставок приписано сверху.

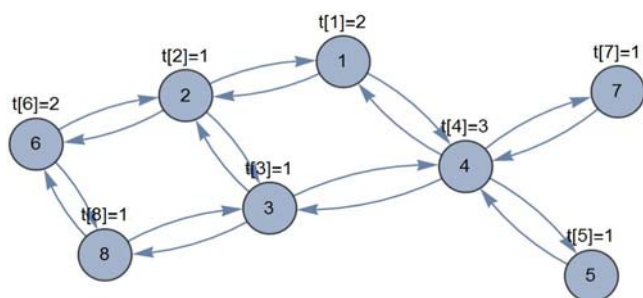


Рис. 4. Рассматриваемый граф  $\Gamma$  цепи поставок с подписанными временами прохождения через каждое звено цепи поставок

Также необходимо задать времена перехода спецконтейнера из элемента  $i \in V$  в элемент  $j \in V$  цепи поставок, которые в предлагаемой модели обозначены  $t_{ij}$ .

В предлагаемом в данном примере графе имеется 18 ориентированных ребер  $\{i, j\} \in E$  для каждого время перехода  $t_{ij}$  спецконтейнера из элемента  $i \in V$  в элемент  $j \in V$  цепи поставок (таблице 3).

**Заданные времена перехода спецконтейнера из элемента  $i \in V$  в элемент  $j \in V$  цепи поставок (в предлагаемой модели обозначены через  $t_{ij}$ )**

Ребро графа цепи поставок $\{i, j\}$	Время $t_{ij}$
{1,2}	1
{2,1}	1
{2,3}	1
{3,2}	1
{3,4}	1
{4,3}	1
{4,5}	1
{5,4}	1
{6,2}	2
{2,6}	2
{6,8}	1
{8,6}	1
{8,3}	1
{3,8}	1
{4,7}	1
{7,4}	1
{1,4}	3
{4,1}	3

Графически времена  $t_{ij}$  перехода спецконтейнера из элемента  $i \in V$  в элемент  $j \in V$  цепи поставок удобно изображать в виде меток на соответствующих ориентированных ребрах графа цепи поставок (рис. 5). На рисунке номер вершины графа цепи поставок написан внутри соответствующего вершине диска, а время перехода спецконтейнера вдоль ребра из одной вершины в другую приписано сверху этого ребра.

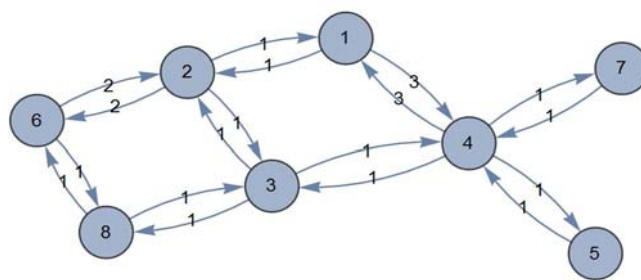


Рис. 5. Рассматриваемый граф  $\Gamma$  цепи поставок с подписанными временами  $t_{ij}$  перехода спецконтейнера из элемента  $i \in V$  в элемент  $j \in V$  цепи поставок

Как уже было сформулировано в описании предлагаемой математической модели, каждый элемент цепи поставок характеризуется своей предельной пропускной способностью за время  $T$ .

Для элемента цепи поставок номер  $i \in V$  предельное количество проходящих через него за период времени  $T$  спецконтейнеров было обозначено через  $S_i$ . Их значения в рассматриваемом примере возьмем из таблицы 4.

Заданные предельные количества спецконтейнеров  $S_i$ , проходящих за время  $T$  через вершину  $i \in V$  графа цепи поставок

Номер вершины $i$ графа цепи поставок	Предельное количество спецконтейнеров $S_i$ , проходящих за время $T$ через соответствующую вершину
1	50
2	40
3	50
4	50
5	50
6	50
7	50
8	30

Графически предельное количество проходящих через каждый элемент цепи поставок за период времени  $T$  спецконтейнеров удобно изображать, подписывая соответствующее количество на графе (рис. 6), где номер вершины графа цепи поставок написан внутри соответствующего вершине диска, а предельное количество спецконтейнеров в данном элементе цепи поставок приписано сверху.

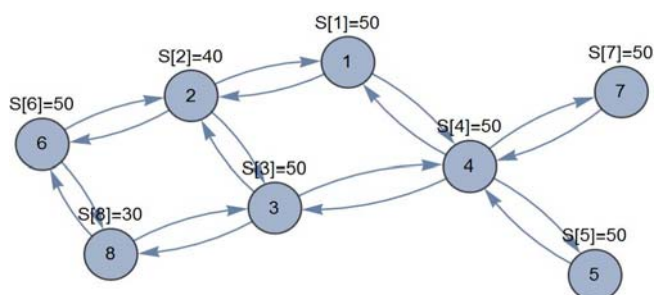


Рис. 6. Рассматриваемый граф  $\Gamma$  цепи поставок с подписанными предельными количествами проходящих за время  $T$  спецконтейнеров через каждое звено цепи поставок

Для звена цепи поставок  $(i, j) \in E$  предельное количество проходящих из элемента  $i \in V$  в элемент  $j \in V$  цепи поставок за период времени  $T$  спецконтейнеров было обозначено через  $S_{ij}$ . Их значения в рассматриваемом примере возьмем из таблицы 5.

Графически предельные количества  $S_{ij}$  спецконтейнеров, переходящих за время  $T$  из элемента  $i \in V$  в элемент  $j \in V$  цепи поставок, удобно изображать в виде меток на соответствующих ориентированных ребрах графа цепи поставок (рис. 7). Номер вершины графа цепи поставок написан внутри соответствующего вершине диска, а предельное количество спецконтейнеров, переходящих вдоль ребра из одной вершины в другую, написано сверху этого ребра.

Заданные предельные количества  $S_{ij}$  спецконтейнеров, переходящих за время  $T$  из элемента  $i \in V$  в элемент  $j \in V$  цепи поставок

Ребро графа цепи поставок $\{i, j\}$	Предельное количество $S_{ij}$ спецконтейнеров, проходящих за время $T$ через ребро графа цепи поставок $\{i, j\}$
{1,2}	30
{2,1}	30
{2,3}	30
{3,2}	30
{3,4}	30
{4,3}	30
{4,5}	30
{5,4}	30
{6,2}	50
{2,6}	50
{6,8}	30
{8,6}	30
{8,3}	30
{3,8}	30
{3,4}	30
{4,7}	30
{7,4}	30
{1,4}	20
{4,1}	20

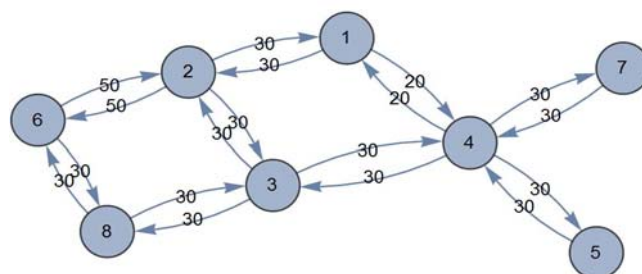


Рис. 7. Рассматриваемый граф  $\Gamma$  цепи поставок с подписанными предельными количествами  $S_{ij}$  спецконтейнеров, переходящих за время  $T$  из элемента  $i \in V$  в элемент  $j \in V$  цепи поставок

Зададим в рассматриваемом примере  $K = 2$  потока контейнеров. **Первый поток**  $f_1$  будет состоять из  $R_1 = 30$  спецконтейнеров типа  $Q_1 = 1$ , движущихся из начального пункта  $A_1 = 1$  цепи поставок в конечный пункт  $B_1 = 7$  цепи поставок.

**Второй поток**  $f_2$  будет состоять из  $R_2 = 20$  спецконтейнеров типа  $Q_2 = 2$ , движущихся из начального пункта  $A_2 = 6$  цепи поставок в конечный пункт  $B_2 = 5$  цепи поставок. Эти сведения представлены для удобства в таблице 6.

Таблица 6.

**Сведения о каждом из рассматриваемых в модели потоке спецконтейнеров**

Поток спецконтейнеров	Начальный пункт	Конечный пункт	Количество спецконтейнеров за время $T$	Тип контейнеров
$f_1$	$A_1 = 1$	$B_1 = 7$	$R_1 = 30$	$Q_1 = 1$
$f_2$	$A_2 = 6$	$B_2 = 5$	$R_2 = 20$	$Q_2 = 2$

На основании экспертных заключений составляется список возможных маршрутов (логистических цепочек) для каждого потока спецконтейнеров. Как уже было сказано выше, составление данных логистических цепочек является сложной проблемой с множеством факторов, требует привлечения экспертных заключений и не может быть полностью автоматизировано. Поэтому данный этап рассматривается как «внешний» с точки зрения модели, то есть возможные маршруты (логистические цепочки) для каждого потока спецконтейнеров предполагаются уже заданными.

Рассмотрим следующие маршруты (логистические цепочки) для каждого из предлагаемых в примере потоков спецконтейнеров.

Для первого потока  $f_1$  предлагается  $L_1 = 2$  возможных маршрута.

Маршрут  $I_{11}$  имеет длину в  $d_{11} = 5$  вершин графа цепи поставок  $v_{11} = \{1, 2, 3, 4, 7\}$ .

Маршрут  $I_{12}$  имеет длину в  $d_{12} = 3$  вершин графа цепи поставок  $v_{12} = \{1, 4, 7\}$ .

Для второго потока  $f_2$  предлагается  $L_2 = 2$  возможных маршрута.

Маршрут  $I_{21}$  имеет длину в  $d_{21} = 5$  вершин графа цепи поставок  $v_{21} = \{6, 2, 3, 4, 5\}$ .

Маршрут  $I_{22}$  имеет длину в  $d_{22} = 5$  вершин графа цепи поставок  $v_{22} = \{6, 8, 3, 4, 5\}$ .

Сведения об этих маршрутах удобно задать в виде таблицы 7.

Таблица 7.

**Сведения о каждом из рассматриваемых в модели возможном маршруте (логистической цепочке) для потока спецконтейнеров**

Поток спецконтейнеров	Вариант маршрута	Количество вершин графа цепи поставок в маршруте	Вершины графа цепи поставок в маршруте
$f_1$	$I_{11}$	$d_{11} = 5$	$v_{11} = \{1, 2, 3, 4, 7\}$
$f_1$	$I_{12}$	$d_{12} = 3$	$v_{12} = \{1, 4, 7\}$
$f_2$	$I_{21}$	$d_{21} = 5$	$v_{21} = \{6, 2, 3, 4, 5\}$
$f_2$	$I_{22}$	$d_{22} = 5$	$v_{22} = \{6, 8, 3, 4, 5\}$

На следующем этапе необходимо найти время транспортировки спецконтейнера из потока  $f_k$  по маршруту (логистической цепочке)  $I_{kl}$  по заданной ранее формуле

$$W_{kl} = \sum_{i=1}^{d_{kl}} t_i + \sum_{i=1}^{d_{kl}-1} t_{i,i+1}.$$

Полученные результаты приведены в таблице 8.

Таблица 8.

**Сведения о времени транспортировки спецконтейнера по каждому из рассматриваемых в модели возможному маршруту (логистической цепочке)**

Поток спецконтейнеров	Вариант маршрута	Время транспортировки спецконтейнера по маршруту $I_{kl}$
$f_1$	$I_{11}$	12
$f_1$	$I_{12}$	10
$f_2$	$I_{21}$	13
$f_2$	$I_{22}$	12

Как уже отмечалось выше, время транспортировки  $W_{kl}$  спецконтейнера из потока  $f_k$  по маршруту (логистической цепочке)  $I_{kl}$  не должно превышать предельно допустимого времени транспортировки контейнера соответствующего типа  $Q_k$ , то есть

$$W_{kl} \leq m_{Q_k}.$$

Маршруты, не удовлетворяющие этому условию, должны быть отброшены. Проверка показывает, что в рассматриваемом примере все маршруты удовлетворяют этому условию.

Как сказано в описании модели, неизвестными величинами в предлагаемой модели являются количества  $x_{kl}$  спецконтейнеров из каждого потока  $f_k$ , направляемые по маршруту  $I_{kl}$ , а минимизируемой целевой функцией является простая линейная функция

$$F(x_{11}, \dots, x_{NL_N}) = \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^{L_k} W_{kl} x_{kl},$$

но с большой системой дополнительных условий, притекающих из дополнительных условий на предельное время транспортировки и пропускную способность вершин и ребер графа цепи поставок.

В нашем примере, учитывая результаты из таблицы 8, получаем целевую функцию

$$F(x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22}) = 12x_{11} + 10x_{12} + 13x_{21} + 12x_{22}.$$

Теперь рассмотрим возникающие условия на искоемые переменные. Во-первых, для каждого потока спецконтейнеров  $f_k$  суммарное количество перевозимых по разным маршрутам (логистическим цепочкам) спецконтейнеров должно равняться общему количеству

спецконтейнеров данного потока за изучаемый период времени  $T$ , то есть

$$\sum_{l=1}^{L_k} x_{kl} = R_k, k=1, \dots, K.$$

В случае примера это условие переписывается как набор условий

$$x_{11} + x_{12} = 30,$$

$$x_{21} + x_{22} = 20.$$

Во-вторых, необходимо не превышать пропускную способность вершин и звеньев графа  $\Gamma$ . пи поставок.

Для учета этого условия введем дополнительные величины, описывающие, задействованы или нет данные вершины или ребра графа цепи поставок в данном маршруте (логистической цепочке).

Эти величины легко найти из приведенных в примере данных, но их много и для удобства чтения текста мы опустим их значения в данном примере.

Как было сказано в описании модели, условие не превышения пропускной способности вершин и звеньев цепи поставок записываются как система неравенств

$$\sum_{k=1}^K \sum_{l=1}^{L_k} x_{kl} z_{ikl} \leq S_i, i=1, \dots, N,$$

которая в примере принимает вид

$$x_{11} + x_{12} \leq 50, x_{11} + x_{21} \leq 40, x_{11} + x_{21} + x_{22} \leq 50,$$

$$x_{11} + x_{12} + x_{21} + x_{22} \leq 50, x_{21} + x_{22} \leq 50,$$

$$x_{11} + x_{12} \leq 50, x_{22} \leq 30,$$

а система неравенств

$$\sum_{k=1}^K \sum_{l=1}^{L_k} x_{kl} z_{ijk} \leq S_{ij}, (i, j) \in E,$$

в примере принимает вид

$$x_{11} \leq 30, x_{11} + x_{21} \leq 30,$$

$$x_{11} + x_{21} + x_{22} \leq 30, x_{21} + x_{22} \leq 30,$$

$$x_{21} \leq 50, x_{22} \leq 30, x_{22} \leq 30,$$

$$x_{11} + x_{12} \leq 30, x_{12} \leq 20.$$

Также необходимо добавить условия неотрицательности и целочисленности величин  $x_{ij}$ .

Так как искомые переменные  $x_{kl}$  целочисленные, целевая функция  $F(x_{11}, \dots, x_{NL_N})$  линейна и все дополнительные условия на искомые величины линейны, то получаем задачу целочисленного линейного программирования. Получаемый в результате ответ следующий:

$$x_{11} = 10, x_{12} = 20, x_{21} = 0, x_{22} = 20.$$

Это значит, что распределение спецконтейнеров каждого из потоков по возможным маршрутам (логистическим цепочкам) следует из таблицы 9.

Таблица 9.

**Оптимальное распределение спецконтейнеров по каждому из рассматриваемых в модели возможному маршруту (логистической цепочке)**

Поток спецконтейнеров	Вариант маршрута	Оптимальное количество $x_{kl}$ спецконтейнеров данного потока, отправляемого по данному маршруту
$f_1$	$I_{11}$	10
$f_1$	$I_{12}$	20
$f_2$	$I_{21}$	0
$f_2$	$I_{22}$	20

Задача целочисленного линейного программирования может быть эффективно решена стандартными алгоритмами целочисленного линейного программирования, например «методом ветвей и границ». Эти алгоритмы эффективно реализованы в различных библиотеках подпрограмм и средах программирования. Для решения в данном примере была использована современная среда компьютерной алгебры **Wolfram Mathematica** (программа в приложении), но предлагаемую задачу можно решить эффективно и на других языках программирования, с использованием стандартных библиотек.

**Выводы**

В данной статье была построена математическая модель движения потоков спецконтейнеров по цепи поставок в терминах теории направленных графов, на основании которой была предложена **задача оптимальной маршрутизации спецконтейнеров в цепи поставок** с учетом предельной возможной длительности перевозки для каждого типа спецконтейнеров и пропускной способности элементов цепи поставок.

Полученная математическая модель и задача математической оптимизации сведены к решению задачи целочисленного линейного программирования, для которой известны эффективные алгоритмы решения. Например, в качестве такого метода можно использовать «метод ветвей и границ» [7 - 13].

**Литература**

1. Морозов В.Н. Перспективы развития контейнерных перевозок в международных трансконтинентальных сообщениях // Транспорт: наука, техника, управление. – 2009. - №1. – С.3-6.
2. Лёвин С.Б. Управление перевозочным процессом транспортной компании // Транспорт: наука, техника, управление. – 2015. - №1. – С. 48-52
3. Лёвин С.Б. Создание электронной отчетной документации транспортной компании // Транспорт: наука, техника, управление. – 2016. - №5. – С.. 54-58
4. Учет выполнения графика движения грузовых поездов / Г. А. Кузнецов [и др.] // Железнодорожный транспорт. 2011. № 3. С. 20–25. ISSN 0044-4448.
5. Бадажков М.А. Автоматизация планирования отправления поездов по твердым ниткам графика // Вестник Сибирского государственного университета путей сообщения. 2017. №2(41). С. 14–21. ISSN 1815-9265.

6. Елисеев С.Ю., Шатохин А.А. Логистические принципы эффективного взаимодействия операторов подвижного состава и грузовладельцев // Транспорт: наука, техника, управление. – 2015. - №9. – С. 25-30
7. Инструкция по разработке графика движения поездов в ОАО «РЖД» / ВНИИАС. – М. : Техинформ, 2006. 183 с.
8. Система ГИД «Урал-ВНИИЖТ»: внедрение, модернизация, перспективы развития / Г. А. Кузнецов [и др.] // Железнодорожный транспорт. 2008. №2. С. 15–21. ISSN 0044-4448.
9. Биленко Г. М., Волков В. С. График оборота локомотивов как основа движения грузовых поездов // Наука и техника транспорта. 2016. №2. С. 79–86.
10. Елисеев С.Ю., Шатохин А.А. Сокращение простоев грузовых вагонов в ожидании погрузки // Транспорт: наука, техника, управление. – 2016. - №5. – С. 19-22
11. Мохонько В.П., Исаков В.С., Куренков П.В. Система поддержки принятия экономически обоснованных решений // Экономика железных дорог.- 2005.- № 1.- С.18-26.
12. Мохонько В.П., Исаков В.С., Куренков П.В. Ситуационное управление перевозочным процессом // Транспорт: наука, техника, управление: Сб. НТИ / ВИНТИ.- 2004.- № 11.- С.14-16.
13. Полянский, Ю.А. Топологическое моделирование взаимодействия хозяйств железной дороги / Ю.А. Полянский, П.В. Куренков // Транспорт: наука, техника, управление: Сб. НТИ / ВИНТИ РАН.- 2003.- № 7.- С.8-18.

## Сведения об авторах

**Резер Семён Моисеевич**, доктор техн. наук, профессор, заведующий ОНИ по транспорту ВИНТИ РАН, заведующий кафедрой «Коммерческая эксплуатация транспорта и тарифы» Московского университета транспорта (РУТ - МИИТ).

Тел. моб. 8(495) 764 26 78

E-mail: guilldexp@yandex.ru.

**Резер Алексей Владимирович**, доктор экон. наук, профессор кафедры «Финансы и кредит», Российский университет транспорта (РУТ - МИИТ), 127994, Москва, ул. Образцова, д. 9, стр. 9

Тел. 8 (495) 684-29-19

E-mail: guilldexp@yandex.ru.

**Лёвин Сергей Борисович**, д.т.н. Московского государственного университета путей сообщения (МГУПС-МИИТ), генеральный директор ООО «РРЛ» (Rail & Road Logistics),

123290, г. Москва, 1-й Магистральный тупик, 5А

Тел. 8-495-211-2112

E-mail: SL@9915535.ru.

**Носырев И.И.**, аспирант Российского университета транспорта (РУТ - МИИТ)