

УДК. 629.735. 681.518.5

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РУЛЕВОГО ПРИВОДА
ПО ИНФОРМАЦИИ, ЗАРЕГИСТРИРОВАННОЙ БОРТОВЫМ УСТРОЙСТВОМ
РЕГИСТРАЦИИ ПРИ РАССЛЕДОВАНИИ АВИАЦИОННЫХ ПРОИСШЕСТВИЙ**

Доктор техн. наук Ю.В. Попов, И.А. Уваров, Д.В. Клочков

**Научно-исследовательский центр (г. Люберцы) Центрального
научно-исследовательского института военно-воздушных сил,
Российская Федерация**

Рассматриваются проблемы реконструкции при расследовании авиационного происшествия. Основным фактором, затрудняющим расследования авиационного происшествия, является уничтожение следов. С внедрением на воздушных судах электродистанционной системы управления сохранность агрегатов при авиационном происшествии уменьшилось. Поэтому при расследовании складываются специфические приемы моделирования и особые разновидности моделей. Зарегистрированные бортовым устройством регистрации параметры полета становится основным источником информации при расследовании авиационного происшествия. Для удобства информация обрабатывается в два этапа. Первичная обработка информации: сглаживание, синхронизация и восстановление параметров полета. Вторичная обработка информации – идентификация математической модели по результатам наблюдения параметров полета. Сформулирована задача идентификации рулевого по результатам наблюдений над входными и выходными переменными системы управления. В результате идентификации получена модель рулевого привода в виде передаточной функции.

Ключевые слова: авиационное происшествие, воздушное судно, бортовое устройство регистрации, параметры полеты, интерполяция, идентификация, математическая модель.

**MATHEMATICAL MODELLING STEERING DRIVE UNDER INFORMATION,
ZAREGISTRIROVNNOJ ONBOARD DEVICE REGISTRATION
AT INVESTIGATION AVIACIONNNYH INCIDENTS**

Doctor (Tech.) Y.V. Popov, I.A. Uvarov, D.V. Scraps

**Research center (Lyubertsy) of the Central research institute Ministry of Defense
of the Russian Federation**

In article problems of reconstruction are considered at investigation of aviation incident. A major factor complicating investigations of aviation incident, destruction of traces is. With introduction on air courts of an electroremote control system safety of units at aviation incident has decreased. Therefore at investigation there are specific receptions of modelling and special versions of models. The registration registered by the onboard device parameters of flight becomes the basic source of the information at investigation of aviation incident. For convenience the information is processed in two stages. Initial processing of the information: smoothing synchronization and restoration of parameters of flight. Secondary processing of the information - identification of mathematical model by results of supervision of parameters of flight. The problem(task) of identification of the helmsman by results of supervision above entrance and target variables of a control system is formulated. As a result of identification the model of a steering drive as transfer function is received.

Keywords: aviation incident, air a vessel, the onboard device of registration, parameters flights, interpolation, identification, mathematical model.

Расследование авиационного происшествия (АП) или инцидента – это процесс по установлению причин и принятию эффективных мер по их предотвращению в будущем. При расследовании АП осуществляется реконструкция функционирования авиационной транспортной системы на момент совершения происшествия или инцидента.

Реконструкция является специальным случаем моделирования, под которой в расследовании понимается восстановление, воссоздание объектов авиационной техники (АТ), ситуаций по сохранившимся остаткам воздушного судна (ВС), описаниям, фотоснимкам, информации, зарегистрированной бортовыми устройствами регистрации (БУР), и другим данным. Реконструкция при АП проводится по принципу многофакторности, предусматривающему выявление отклонений от нормального функционирования авиационной транспортной системы и оценку влияния этих отклонений на исход полета ВС.

Реконструкция зависит от особенностей изучаемого объекта АТ, целей исследования. При реконструкции планера и систем ВС целями исследования, как правило, являются определение следующих данных [1]:

- работоспособности и режимов работы систем ВС до столкновения его с препятствиями;
- положения рулевых поверхностей, шасси, фонарей, люков и т. д.;
- характера, условий и причин разрушения деталей и узлов;
- наличие топлива и других жидкостей и газов в емкостях;
- причин и условий возможного пожара в полете и т.д.

Основными факторами, затрудняющими установление причин отказов аварийной АТ при расследовании АП, являются: уничтожение следов (информативных признаков) и объектов исследования (агрегатов и деталей) из-за воздействия на них возникшего в полете или при столкновении с препятствием пожара, из-за значительного разрушения объектов конструкции АТ, из-за необнаружения необходимых объектов исследования на месте АП и т.д.

Из опыта расследования АП видно, что особое внимание уделяется оценке работоспособности системы управления воздушным судном (СУВС). СУВС служит для обеспечения полета по заданной траектории путем создания на крыле и оперении потребных аэродинамических сил и моментов. Несмотря на большое разнообразие созданных за последнее время самолетов, их системы управления можно свести к нескольким основным типам обобщенных структур систем [2], которые определили ее этапы развития:

- 1) СУВС с механической связью и автоматизацией, определяющей уровень характеристик управляемости;
- 2) электродистанционная система управления с резервной механической связью;
- 3) электродистанционная система управления без механической связи.

Электродистанционные системы управления (ЭСУ) без механической связи определяют новый этап в развитии СУВС. На всех современных ВС используется ЭСУ, которые позволяют обеспечить не только автоматическую компенсацию динамической неустойчивости ВС, но и контроль, и ограничение вибраций конструкции самолета, перераспределение нагрузок на планер и т. д. На рис. 1 приведена структурная схема ЭСУ без механической связи.

Опыт показывает, что сохраняемость агрегатов и деталей после АП ЭСУ без механической связи уменьшается. Поэтому при расследовании складываются специфические приемы моделирования и особые разновидности моделей. В настоящее время большое внимание уделяется при расследовании моделированию работоспособности АТ. Для моделирования работоспособности АТ используется информация, зарегистрированной БУР.

В настоящее время, в связи со значительным усложнением современных ЭСУ и применением в них рулевых приводов (РП), задача оценки работоспособности их по зарегистрированной информации становится все более актуальной.

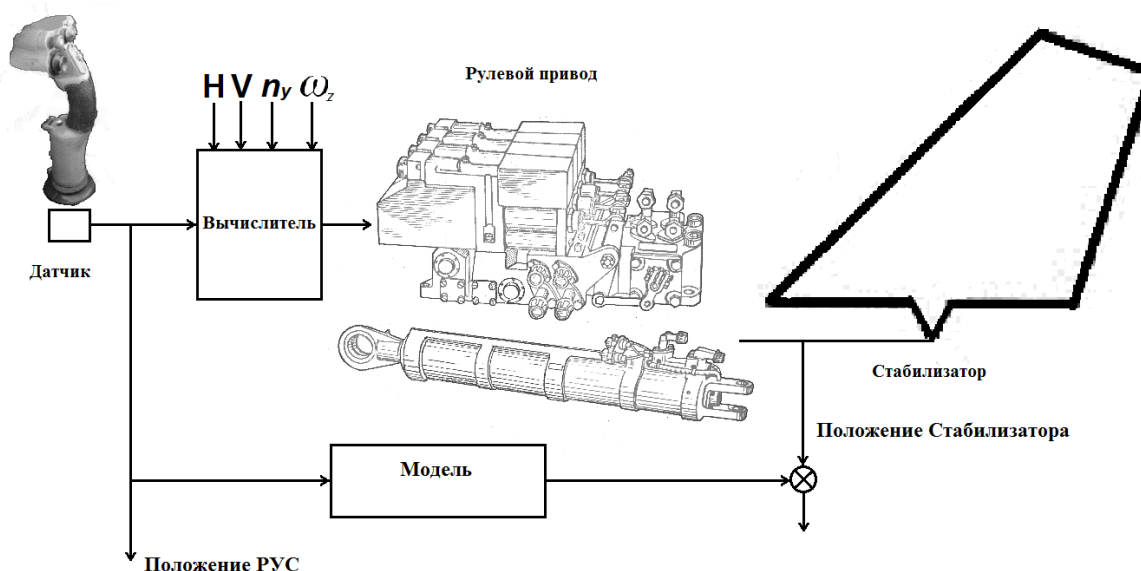


Рис. 1. Электродистанционная система управления без механической связи

Трудность контроля РП по регистрируемым входным и выходным параметрам заключается в сложности его математической модели, а также в том, что регистрируемые параметры необходимо обработать. Обработка информации БУР это процесс ее преобразования к виду удобному для дальнейшего ее применения. Обработка осуществляется в два этапа. Первичная обработка – воспроизведение, декодирование, расшифровка, сглаживание, синхронизация, восстановление и документирование в физических величинах закодированной исходной информации. Вторичная обработка – идентификация нерегистрируемых параметров и параметров модели объектов АТ для более глубокого анализа, систематизации и обобщения результатов обработки, оценки и прогнозирования технического состояния АТ.

Зарегистрированные параметры полета в себе помимо полезной информации содержат погрешности, обусловленные влиянием различных помех, возмущений и погрешностей, связанных с условиями полета, способами регистрации, кодирования информации. Наличие помех затрудняет определение истинных параметров полета ВС. Параметры полета в современных БУР фиксируются на носителе информации кадрами через некоторый промежуток времени Δt в следующем виде

$$z = p + \zeta$$

где p – вектор измеренных величин, структура которого зависит от типа БУР; ζ – вектор помех измерений.

На рис. 2 приведен воспроизведенный характер записи параметров полета в БУР.

Для повышения точности и оперативности определения параметров полета ВС в наземных устройствах обработки производится сглаживание, синхронизация и восстановление измеряемых параметров. В настоящее время используются разнообразные методы сглаживания и восстановления информации [3, 4, 5, 6, 7].

Проведенными исследованиями было установлено, что в зависимости от вида помех необходимо использовать следующие методы сглаживания. Для импульсных помех - метод скользящей медианы. Для флуктуационных помех - сглаживание на основе распределения Гаусса. Для аномальных погрешностей - линейное сглаживание методом наименьших квадратов по правилу k -ближайших соседей.

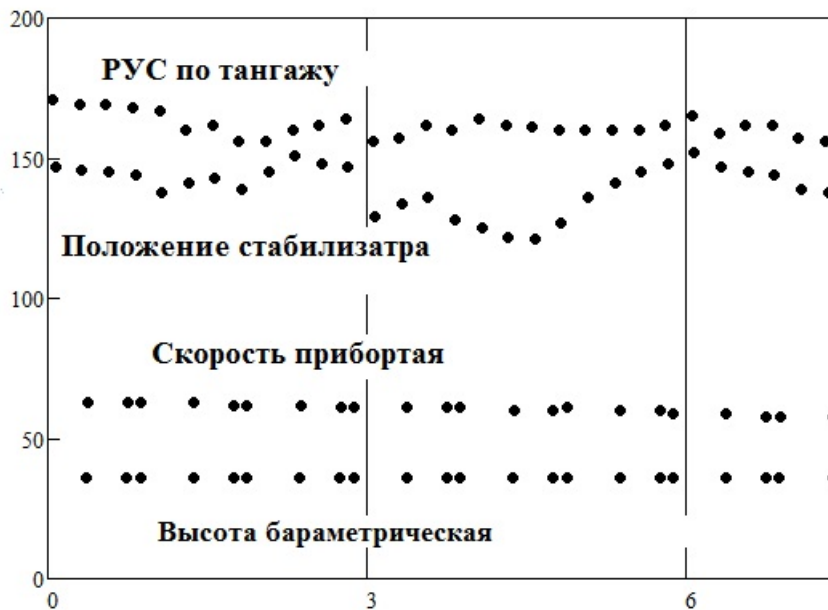


Рис. 2. Воспроизведенный характер записи параметров в БУР

Метод медианного сглаживания является простым и эффективным при импульсных помехах. Его суть состоит вычисление скользящей медианы по нескольким соседним данным. Число точек $(2q+1)$, участвующих в определении медианы называют окном скользящего усреднения. Для определения скользящей медианы в точке t , вычисляется медиана во временном интервале $[t - q, t + q]$. Основное достоинство медианного сглаживания – устойчивость к наличию выбросов.

Из алгоритма определения медианы видно, что на конечных интервалах ряда, который подвергается сглаживанию, не может быть выполнено сглаживание. Этот интервал равен $q/2$. Для устранения краевых эффектов сглаживания ряда может быть использование процедура, предложенная Тьюки, согласно которой в качестве сглаженного значения для $z(0)$, где 0 - начальный момент времени, предлагается взять медиану трех точек: $z(0)$, $z(1)$ и $3 \cdot z(1) - 2 \cdot z(2)$, а для последнего момента времени n медиана определяется из тех точек: $z(n)$, $z(n-1)$ и $3 \cdot z(n-1) - 2 \cdot z(n-2)$.

На рис. 3 приведен пример медианного сглаживания.

Сглаживание зарегистрированных параметров полета искаженных флуктуационными помехами целесообразно проводить методом, основанным на распределении Гаусса. Сглаженный элемент zv_i временного ряда в точке i определяется по формуле

$$zv_i = \frac{\sum_{j=1}^n K\left(\frac{z_i - z_j}{b}\right) zv_j}{\sum_{j=1}^n K\left(\frac{z_i - z_j}{b}\right)},$$

где $K(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot (0.37)} \cdot e^{\frac{-t^2}{2 \cdot 0.37^2}}$ - ядро распределения Гаусса, b – ширина окна сглаживания.

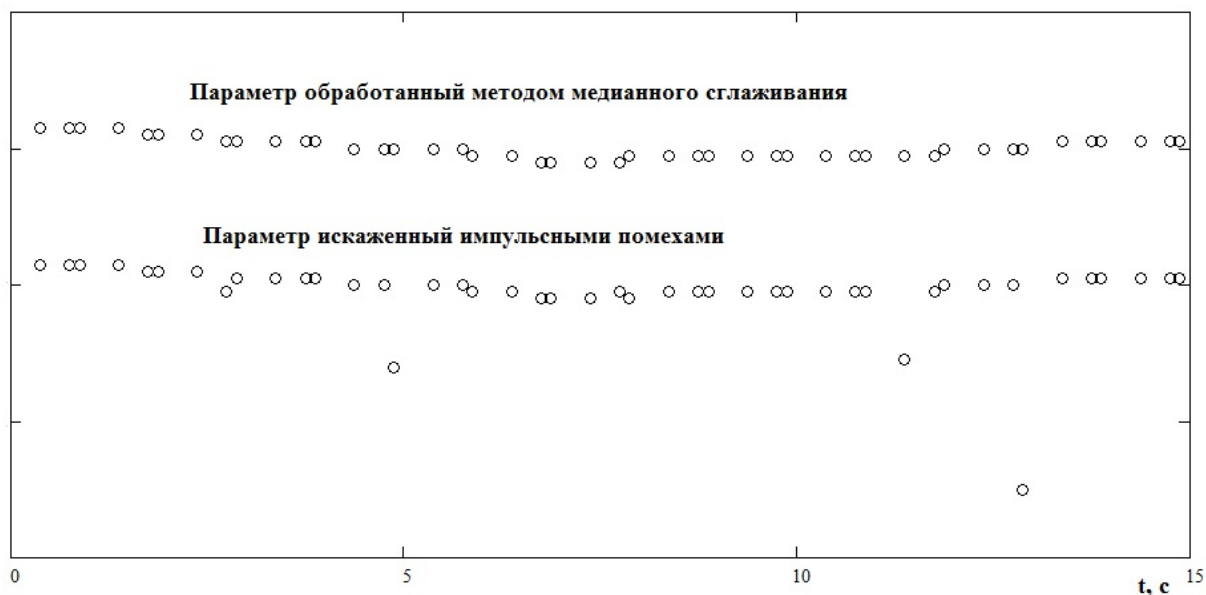


Рис. 3. Результаты медианного сглаживания

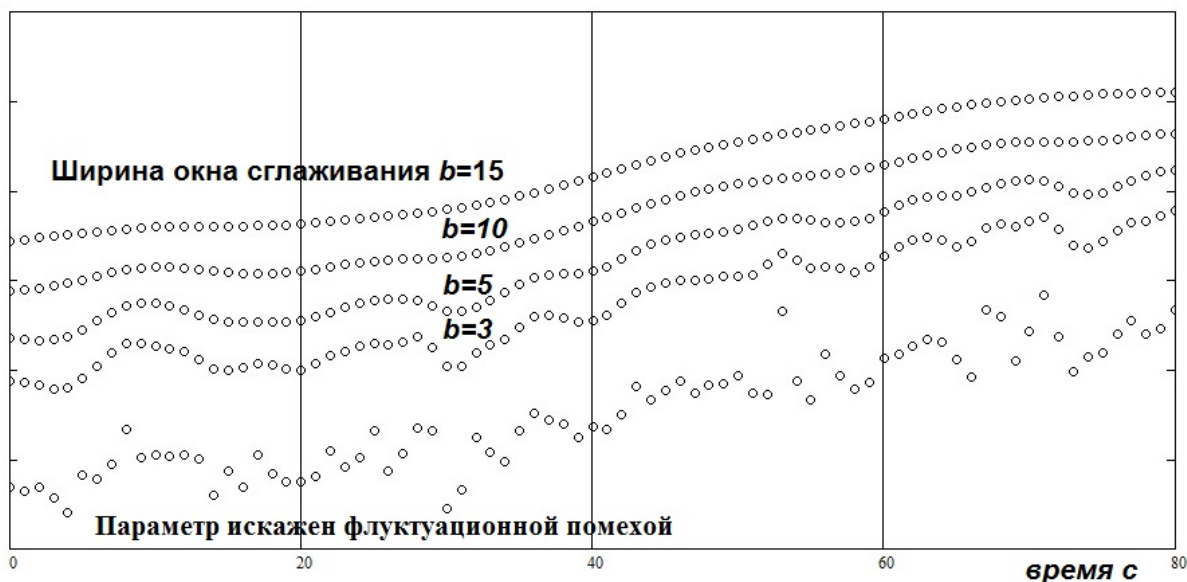


Рис. 4. Результаты сглаживания с помощью ядра Гаусса параметра искаженного флуктуационной помехой

Ширина окна сглаживания зависит от желаемой степени сглаживания, и выбирается эмпирически. На рис. 4 приведен пример сглаживания с помощью ядра распределения Гаусса с различной шириной окна сглаживания.

Аномальные погрешности в регистрируемых параметрах приводит к грубейшим ошибкам в оценках. Как правило, аномальные наблюдения имеют импульсный характер или представляются кратковременно действующими шумами большой интенсивности [8]. Аномальные наблюдения возникают в основном, вследствие внезапного нарушения структуры или параметров в измерительных преобразователях или в БУР.

Для точного отображения закономерности зависимости z от t и вместе с тем сгладить аномальные погрешности обычно применяется метод наименьших квадратов. Этот метод

дает возможность при заданном типе зависимости так выбрать ее числовые параметры, чтобы сумма квадратов отклонения зарегистрированных точек от сглаживающей кривой обращалась в минимум.

Пусть, для определенности, функция, с помощью которой будет осуществляться сглаживание, является многочленом

$$Q_r(t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_r t^r$$

известной степени $r \geq 1$ ($r < n$) с числовыми коэффициентами a_0, a_1, \dots, a_r , подлежащими определению.

Тогда коэффициенты a_0, a_1, \dots, a_r подбираются, таким образом, при которых функция

$$S(a_0, a_1, \dots, a_r) = \sum_{1 \leq i \leq n} (z_i - Q_r(t_i))^2 \rightarrow \min \quad (1)$$

достигает минимума.

Искомые коэффициенты a_0, a_1, \dots, a_r определяются из системы уравнений

$$\frac{\partial S(a_0, a_1, \dots, a_r)}{\partial a_i} = 0, \quad i = 0, 1, \dots, r \quad (2)$$

Поскольку $S = S(a_0, a_1, \dots, a_r)$ представляет дифференцируемую функцию r переменных, необходимым условием ее минимизации является равенство нулю частных производных $\frac{\partial S}{\partial a_i}$. Если сглаживающая функция зависит от параметров линейно, то система

(1) также линейна и может быть легко разрешена. Линейной функцией называется такая функция, которая задана формулой $z = a_0 + a_1 t$. Найдем линейную функцию, которая в смысле критерия (2) наилучшим образом сглаживает зарегистрированные параметры. Причем найденная функция не обязана проходить через зарегистрированные значения z .

Проведенным выкладкам в работе [9] линейная зависимость, связывающая z и t , имеет вид:

$$z = \frac{K_{tz}^*}{D_t^*} t + m_z^* - \frac{K_{tz}^*}{D_t^*} m_t^*,$$

где

$$m_t^* = \frac{\sum_{i=0}^n t_i}{n}; \quad m_z^* = \frac{\sum_{i=0}^n z_i}{n};$$

$$K_{tz}^* = \frac{\sum_{i=0}^n (t_i - m_t^*)(z_i - m_z^*)}{n};$$

$$D_t^* = \frac{\sum_{i=0}^n (t_i - m_t^*)^2}{n}.$$

Автор [9] выразил коэффициенты линейной зависимости через центральные, а не через начальные вторые моменты только потому, что в таком виде формулы имеют более компактный вид.

Сглаживание методом наименьших квадратов тем качественнее, чем шире интервал изменения переменной, при этом точность сглаживания выше в середине промежутка изменения независимой переменной. Поэтому для сглаживания методом наименьших квадратов необходимо правильно выбирать интервал. Для выбора интервала сглаживания применяется метод k -ближайшего соседа. Метод k -ближайшего соседа представляет собой самый простой метрический классификатор, который базируется на оценивании сходства различных объектов. Метод k -ближайших соседей позволяет повышать достоверность классификации. Анализируемое значение зарегистрированного параметра относится к тому же интервалу, что и основная масса его соседей, то есть k -ближайших к нему анализируемой значений зарегистрированного параметра z_i .

На рис. 5 приведены результаты линейного сглаживания методом наименьших квадратов по правилу ближайшего соседа и других методов.

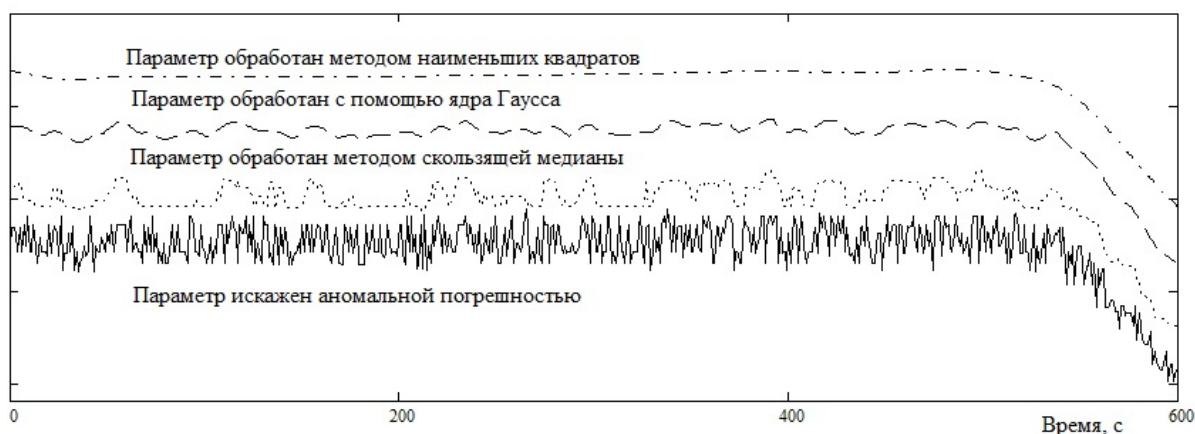


Рис. 5. Результаты обработки параметра искаженного аномальными погрешностями

Анализ обработки параметра искаженного аномальными погрешностями показывает, наилучшие результаты приносит метод наименьших квадратов по правилу k -ближайших соседей (см. рис. 5).

Следующим шагом подготовки зарегистрированных параметров для идентификации нерегистрируемых параметров и параметров модели объектов АТ является синхронизация и восстановления параметров.

Как указывалось выше регистрируемые параметры полета из непрерывного сигнала $z(t)$ преобразуются в последовательность мгновенных значений этого сигнала $z(k\Delta t)$, соответствующих определенным моментам времени $k\Delta t$ [10]

$$z(k\Delta t) = \sum_{k=1}^{\infty} z(t_k)\delta(t - k\Delta t),$$

где $k= 1, 2, 3, \dots, n$; Δt — шаг дискретизации; $z(t_k)$ — значение сигнала в момент t_k ; $\delta(t - k\Delta t)$ — функция Дирака.

На рис. 6 представлены дискретизированные сигналы параметра «Ручка управления по тангажу» и «Положение стабилизатора».

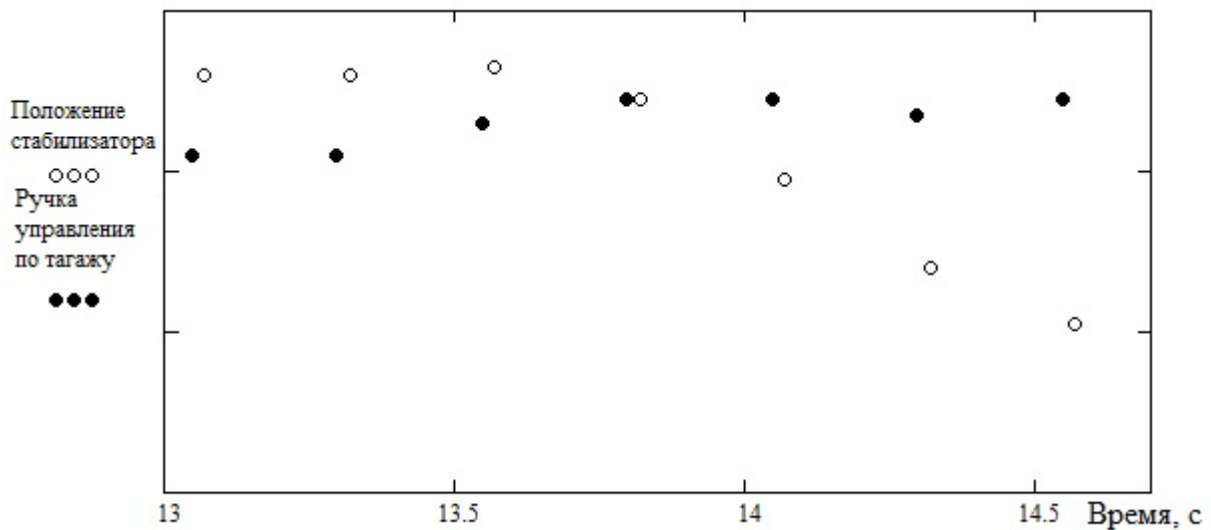


Рис. 6. Дискретные значения зарегистрированных параметров

Из рис. 6 видно, что в дискретизированном сигнале отсутствуют промежуточные значения между моментами дискретизации t_k, t_{k+1} , поэтому необходимо восстановить в сигнале все промежуточные значения. Каждый параметр регистрируется в свой промежуток времени. Поэтому для обеспечения требуемой информативности необходимо измерения синхронизировать, т. е. осуществить привязку к единой шкале времени.

Взаимная увязка зарегистрированных параметров осуществляется с помощью интерполяции. Интерполяция использует значения некоторой функции, заданные в точках измерения параметра, чтобы предсказать значения функции между ними. Приведем классическую формулировку задачи интерполяции [11].

Задан интервал $[a, b] \subset R$ и конечное множество попарно различных точек $X_i \in [a, b]$, $i = 0, 1, \dots, n$, называемых узлами интерполяции. Совокупность всех узлов будем называть сеткой. Даны значения $Y_i, i = 0, 1, \dots, n$. Требуется определить приближенную аналитическую функцию $\varphi(X)$, значения которой в узловых точках X_i совпадают со значениями $Y(X_i)$. Искомую функцию $\varphi(X)$ называют при этом интерполирующей функцией.

Алгоритм интерполяции определяется способом вычисления значений функции $\varphi(X)$. Наиболее простым и очевидным вариантом реализации интерполирующей функции является замена исследуемой функции $Y(X)$ на интервале $[X_i; X_{i+1}]$ отрезком прямой, соединяющим точки Y_i, Y_{i+1} . Такие методы относятся к методам линейной интерполяции.

В настоящее время существует несколько методов линейной интерполяции:

- кусочно-линейная интерполяция;
- каноническим полиномом;
- многочлен Лагранжа;
- многочлен Ньютона.

Кусочно-линейная интерполяция состоит в том, что узловые точки соединяются отрезками прямых, то есть через каждые две точки (X_i, Y_i) и (X_{i+1}, Y_{i+1}) проводится прямая. Формула кусочно-линейной интерполяции является полином первой степени:

$$\varphi(X) = a_0 + a_1 \cdot X, \text{ при } X_{i-1} \leq X \leq X_i \quad (3)$$

Интерполирующая функция $\varphi(X)$ представляет ломаную линию. Коэффициенты a_0 и a_1 разные на каждом интервале $[X_i, X_{i+1}]$, и находятся из выполнения условий интерполяции на концах отрезка:

$$\begin{cases} \varphi(X_{i-1}) = a_0 + a_1 \cdot X_{i-1} \\ \varphi(X_i) = a_0 + a_1 \cdot X_i \end{cases} \quad (4)$$

Из системы уравнений (4) определяются коэффициенты полинома кусочно-линейной интерполяции:

$$a_1 = \frac{\varphi(X_i) - \varphi(X_{i-1})}{X_i - X_{i-1}}$$

$$a_0 = \varphi(X_{i-1}) - a_1 \cdot X_{i-1}$$

Погрешность интерполяции определяется максимальным отклонением $\varphi(X)$ от неизвестной «настоящей» функции $\Phi(X)$:

$$|\varphi(X) - \Phi(X)| \leq \frac{h^2}{8} \cdot \max(\Phi''(X)).$$

Таким образом, погрешность определяется второй производной функции $\Phi(X)$ и убывает пропорционально квадрату шага h между данными. При использовании кусочно-линейной интерполяции сначала нужно определить интервал, в который попадает значение X , а затем подставить его в выражение (3), используя коэффициенты для данного интервала.

На рис. 7 приведены результаты кусочно-линейной интерполяции параметров «Положения стабилизатора» и «Положения РУС».

В работе [12] утверждается, что любая непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция $\varphi(X)$ может быть хорошо приближена некоторым полиномом $P_n(X)$. Справедлива следующая Теорема (Вейерштрасса): Для любого $\varepsilon > 0$ существует полином $P_n(X)$ степени $n = n(\varepsilon)$, такой, что $\max_{X \in [a, b]} |\varphi(X) - P_n(X)| < \varepsilon$.

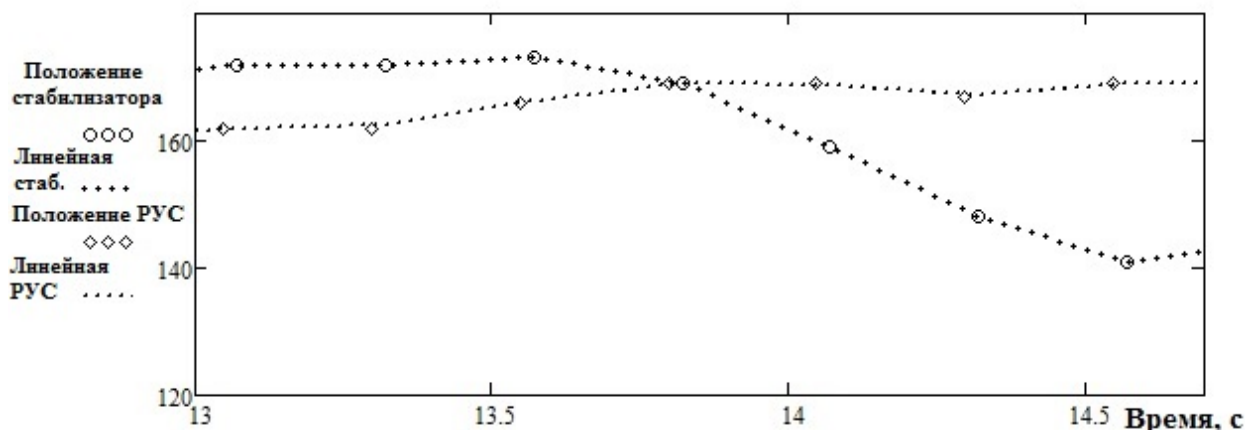


Рис. 7. Результаты кусочно-линейной интерполяции

В качестве интерполяционной функции выбираем полином степени n в каноническом виде:

$$\varphi(X) = P_n(X) = c_0 + c_1 X + c_2 X^2 + \dots + c_n X^n.$$

Для определения коэффициентов c_0, c_1, \dots, c_n канонического полинома составим систему алгебраических уравнений

$$\begin{cases} c_0 + c_1 X_0 + c_2 X_0^2 + \dots + c_n X_0^n = Y_0; \\ c_0 + c_1 X_1 + c_2 X_1^2 + \dots + c_n X_1^n = Y_1; \\ \dots\dots\dots \\ c_0 + c_1 X_n + c_2 X_n^2 + \dots + c_n X_n^n = Y_n, \end{cases}$$

которая в векторно-матричной форме имеет вид:

$$MX \cdot C = Y, \tag{5}$$

где $Y = [Y_0 \ Y_1 \ Y_2 \ \dots \ Y_n]^T$ – вектор свободных членов; $C = [c_0 \ c_1 \ c_2 \ \dots \ c_n]^T$ – вектор неизвестных коэффициентов полинома; MX – матрица вида:

$$MX = \begin{pmatrix} 1 & X_0 & X_0^2 & \dots & X_0^n \\ 1 & X_1 & X_1^2 & \dots & X_1^n \\ \dots\dots\dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & X_n & X_n^2 & \dots & X_n^n \end{pmatrix}.$$

Так как среди узлов X_i нет совпадающих, определитель системы (5) отличен от нуля, то данная система, а, следовательно, и поставленная задача имеют единственное решение. Решаем систему (5) матричным методом:

$$C = MX^{-1} \cdot Y,$$

находим искомые коэффициенты $c_0, c_1, c_2, \dots, c_n$ полинома $P_n(X)$.

На рис. 8 приведены результаты применения канонического полинома.

При достаточной простоте реализации метода он имеет существенный недостаток: число обусловленности матрицы быстро растёт с увеличением числа узлов интерполяции.

Из-за плохой обусловленности матрицы MX целесообразно применять другие методы интерполяции многочлен Лагранжа или многочлен Ньютона [13]. Эти методы относятся к глобальным методам линейной интерполяции.

При глобальной интерполяции на всем интервале измерения $[a, b]$ строится единый многочлен.

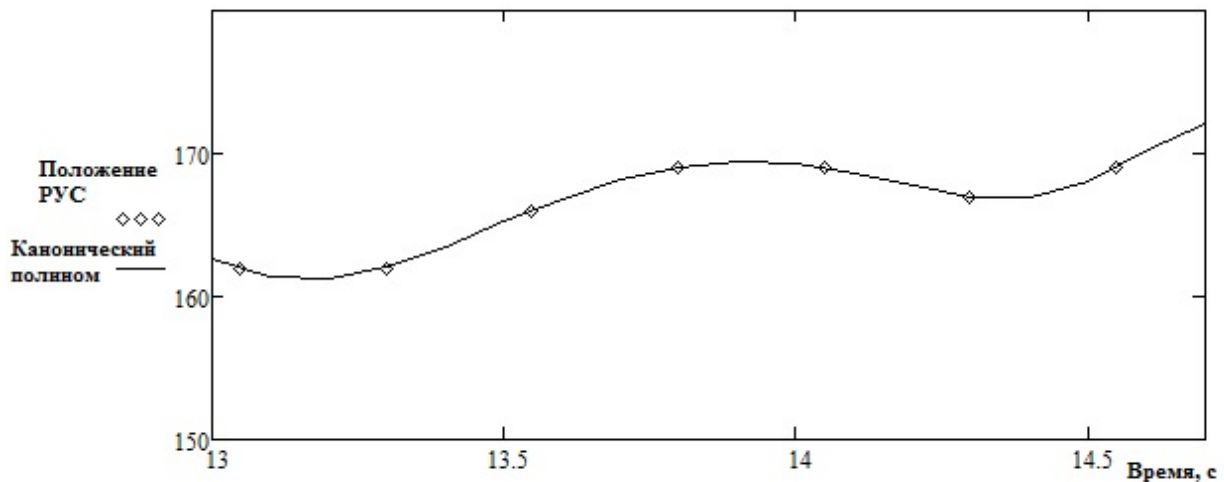


Рис. 8. Результаты применения канонического полинома

В общем виде интерполяционный многочлен в форме Лагранжа записывается в следующем виде:

$$L_n(X) = \sum_{i=0}^n (\varphi(X_i) \cdot l_i(X))$$

где n - степень полинома $L_n(X)$; $\varphi(X_i)$ - значение интерполирующей функции $\varphi(X)$ в точке X_i ; $l_i(X)$ - базисные полиномы (множитель Лагранжа), которые определяются по формуле:

$$l_i(X) = \prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{X - X_j}{X_i - X_j} = \frac{X - X_0}{X_i - X_0} \dots \frac{X - X_{i-1}}{X_i - X_{i-1}} \cdot \frac{X - X_{i+1}}{X_i - X_{i+1}} \dots \frac{X - X_n}{X_i - X_n}.$$

Многочлен $l_i(X)$ удовлетворяет условию $l_i(X_j) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$. Это условие означает, что многочлен равен нулю при каждом X_j кроме X_i , то есть $X_0, X_1, \dots, X_{i-1}, X_{i+1}, \dots, X_n$ - корни этого многочлена. Таким образом, степень многочлена $L_n(X)$ равна n и при $X \neq X_i$ обращаются в ноль все слагаемые суммы, кроме слагаемого с номером $i = j$, равного $\varphi(X_i)$.

Многочлен Лагранжа применим как для равноотстоящих, так и для не равноотстоящих узлов. Погрешность интерполяции методом Лагранжа зависит от свойств функции $\varphi(X)$, от расположения узлов интерполяции и точки X . Полином Лагранжа имеет малую погрешность при небольших значениях степени n ($n < 20$). При больших значениях степени n погрешность начинает расти, что свидетельствует о том, что метод Лагранжа не сходится (то есть его погрешность не убывает с ростом значений степени n).

В случае если погрешность не достигает нужной точности, то нужно разбить отрезок на части и интерполировать каждую часть в отдельности - кусочная интерполяция.

К недостаткам многочлена Лагранжа можно отнести то, что с изменением числа узлов приходится все вычисления проводить заново.

На рис. 9 приведены результаты применения многочлена Лагранжа.

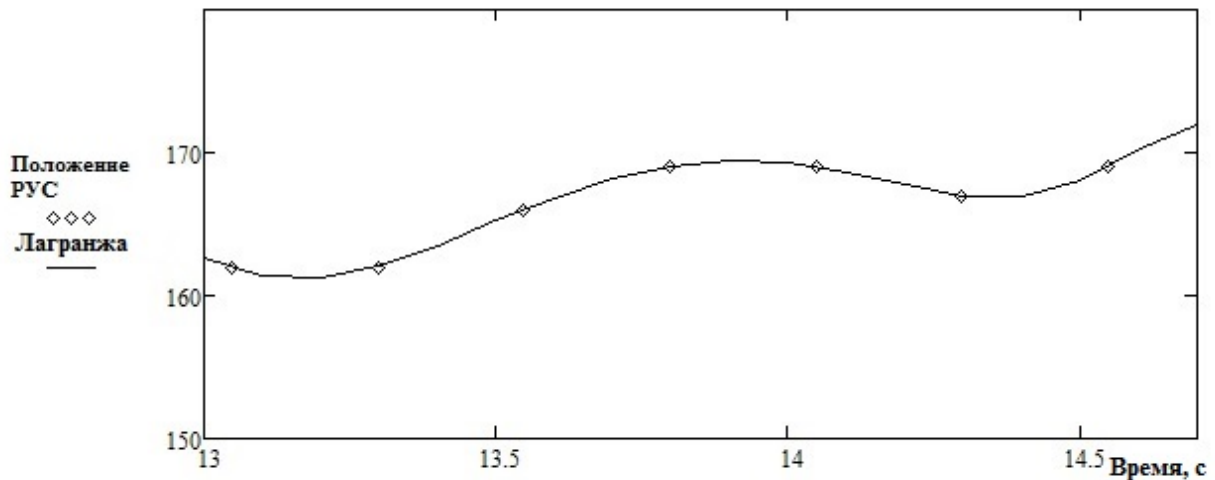


Рис. 9. Результаты применения многочлена Лагранжа

В общем виде интерполяционный многочлен в форме Ньютона записывается в следующем виде:

$$H_n(X) = \varphi(X_0) + \sum_{k=1}^n \left(\varphi(X_0, \dots, X_k) \cdot \prod_{i=0}^{k-1} (X - X_i) \right),$$

где n – вещественное число, которое указывает степень полинома; $\varphi(X_0, \dots, X_k)$ – переменная, которая представляет собой разделенную разность k -го порядка, которая вычисляется по следующей формуле:

$$\varphi(X_i, X_{i+1}, \dots, X_{i+k}) = \frac{\varphi(X_{i+1}, X_{i+2}, \dots, X_{i+k}) - \varphi(X_i, X_{i+1}, \dots, X_{i+k-1})}{X_{i+k} - X_i}.$$

Многочлен Ньютона является удобной формой представления интерполяционного полинома n -степени, так как при добавлении дополнительного узла все вычисленные ранее слагаемые остаются без изменения, а к выражению добавляется только одно новое слагаемое. Следует отметить, что интерполяционный полином в форме Ньютона только по форме отличается от интерполяционного полинома в форме Лагранжа, представляя собой на заданной сетке один и тот же интерполяционный полином.

Для достаточно гладкой функции справедливо приближенное равенство

$$\varphi(X) - H_n(X) \approx H_{n+1}(X) - H_n(X).$$

Это приближенное равенство можно использовать для оценки погрешности интерполяции: $\varepsilon_n = |H_{n+1}(X) - H_n(X)|$.

На рис. 10 приведены результаты применения многочлена Ньютона.

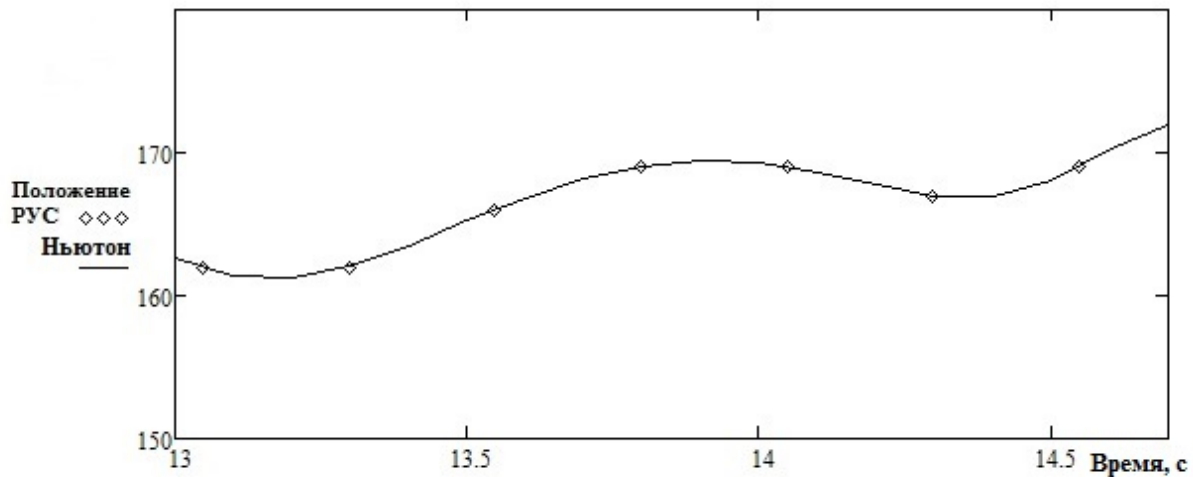


Рис. 10. Результаты применения многочлена Ньютона

Анализ рис. 8, рис. 9 и рис. 10 показывает, что результаты совпадают. Рассмотрим погрешности интерполяции между канонического полинома $P_n(X)$ и многочленом Лагранжа $L_n(X)$

$$\delta_{pl} = P_n(X) - L_n(X)$$

между канонического полинома $P_n(X)$ и многочленом Ньютона $H_n(X)$

$$\delta_{ph} = P_n(X) - H_n(X)$$

между многочленом Лагранжа $L_n(X)$ и многочленом Ньютона $H_n(X)$

$$\delta_{lh} = L_n(X) - H_n(X).$$

В табл. 1 приведены характеристики погрешностей интерполяции: математическое ожидание, среднее квадратическое отклонение.

Таблица 1

Характеристики погрешностей интерполяции

Характеристики	δ_{pl}	δ_{ph}	δ_{lh}
Математическое ожидание	$-7.837 \cdot 10^{-3}$	$-7.837 \cdot 10^{-3}$	$3.46 \cdot 10^{-14}$
Среднее квадратическое отклонение	0.032	0.032	$1.089 \cdot 10^{-13}$

Анализ табл. 1 показывает, что применение методов интерполяции многочлен Лагранжа и многочлен Ньютона приводит к одинаковым результатам, т.е. мы получаем один и тот же полином, используя эти многочлены.

При практической реализации (см. табл. 1) мы получаем многочлены различной точности интерполяции из-за погрешности вычислений на компьютере. Большое число узлов интерполяции рассмотренными методами не приводит к повышению точности из-за накопления погрешностей в процессе вычислений [14]. Для снижения погрешностей весь отрезок $[a, b]$ необходимо разбивать на частичные отрезки и на каждом из них функцию $\varphi(X)$ заменяют приближенно полиномом невысокой степени. Это приводит к кусочно-полиномиальной интерполяции.

Для интерполяции на всем отрезке $[a, b]$ используют сплайн интерполяцию. Интерполяция сплайнами - это быстрый, эффективный и устойчивый способ интерполяции функций. Сплайн интерполяция является одной из альтернатив полиномиальной интерполяции [15].

Сплайном называется кусочно-полиномиальная функция, которая вместе с несколькими производными непрерывна на всем заданном отрезке $[a, b]$, а на каждом частичном отрезке $[X_i, X_{i+1}]$ в отдельности является некоторым алгебраическим многочленом.

В основе сплайн-интерполяции лежит следующий принцип [16]. Интервал интерполяции разбивается на небольшие отрезки, на каждом из которых функция задается полиномом третьей степени. Коэффициенты полинома подбираются таким образом, чтобы выполнялись определенные условия (какие именно, зависит от способа интерполяции). Общие для всех типов сплайнов третьего порядка требования - непрерывность функции и, разумеется, прохождение через предписанные ей точки. Дополнительными требованиями могут быть линейность функции между узлами, непрерывность высших производных и т.д.

Важнейшими достоинствами сплайн-интерполяции являются её устойчивость и малая трудоемкость. Системы линейных уравнений, которые требуется решать для построения сплайнов, очень хорошо обусловлены, что позволяет получать коэффициенты полиномов с высокой точностью. При большом временном ряде вычислительная схема не теряет устойчивости.

Наибольшую популярность из распространенных вариантов интерполяции получил кубический сплайн [17]. Кубическим сплайном называют функцию вида:

$$S_k(x) = a_k + b_k(x - X_k) + \frac{c_k}{2}(x - X_k)^2 + \frac{d_k}{6}(x - X_k)^3, \quad x \in [X_{k-1}, X_k], \quad k = 1, \dots, n \quad (6)$$

где a_k, b_k, c_k, d_k - искомые коэффициенты.

Выражение (6) продифференцируем три раза по x :

$$S'_k(x) = b_k + c_k(x - X_k) + \frac{d_k}{2}(x - X_k)^2,$$

$$S''_k(x) = c_k + d_k(x - X_k),$$

$$S'''_k(x) = d_k,$$

откуда следует

$$a_k = S_k(X_k), \quad b_k = S'_k(X_k), \quad c_k = S''_k(X_k), \quad d_k = S'''_k(X_k).$$

Кубический сплайн должен удовлетворять трем условиям:

- 1) на каждом отрезке $[X_{k-1}, X_k]$, $k = 1, 2, \dots, n$ функция $S(x)$ должна быть кубическим многочленом;
- 2) функция $S(x)$, а также ее первая производная и вторая производная должны быть на отрезке $[a, b]$ непрерывны;
- 3) $S(X_k) = \varphi(X_k)$, $k = 0, 1, 2, \dots, n$ - условие интерполирования.

В работе [18] приведены выкладки, для определения искомым коэффициентов a_k, b_k, c_k, d_k , которые опустим в этой статье.

На рис. 11 приведены результаты применения, сплайн интерполяции.

При сплайн-интерполяции, показанной на рис. 11, исходная функция заменена отрезками кубических парабол, проходящих через четыре смежные узловые точки. Коэффициенты парабол рассчитывались так, чтобы в точках сопряжения фрагментов сплайна совпадали координаты, а также первая и вторая производные (дефект сплайна равен нулю).

На рис. 12 приведены результаты интерполяции методом Лагранжа и сплайн интерполяции.

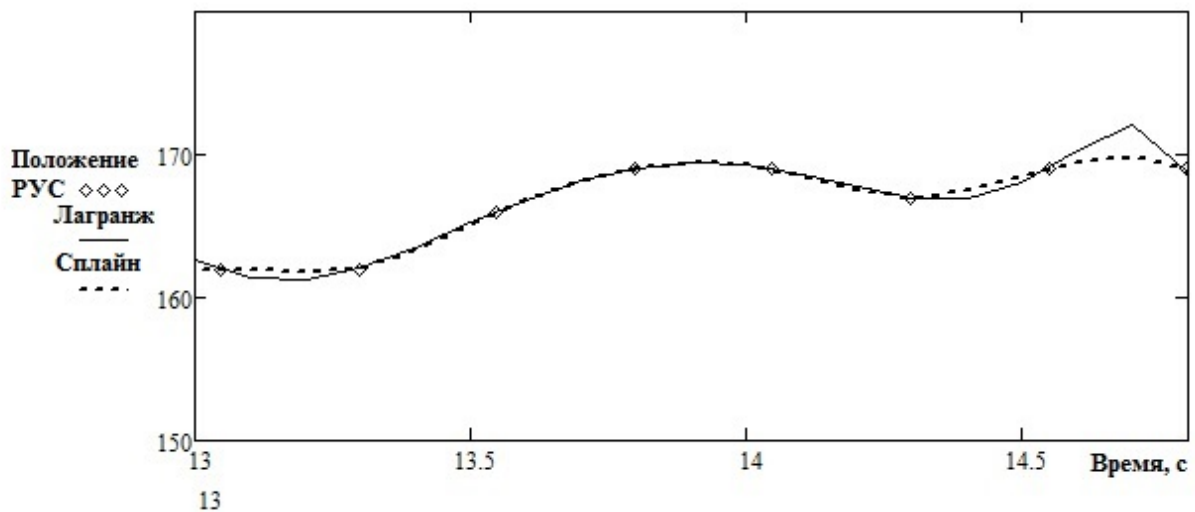


Рис. 11. Результаты применения, сплайн интерполяции

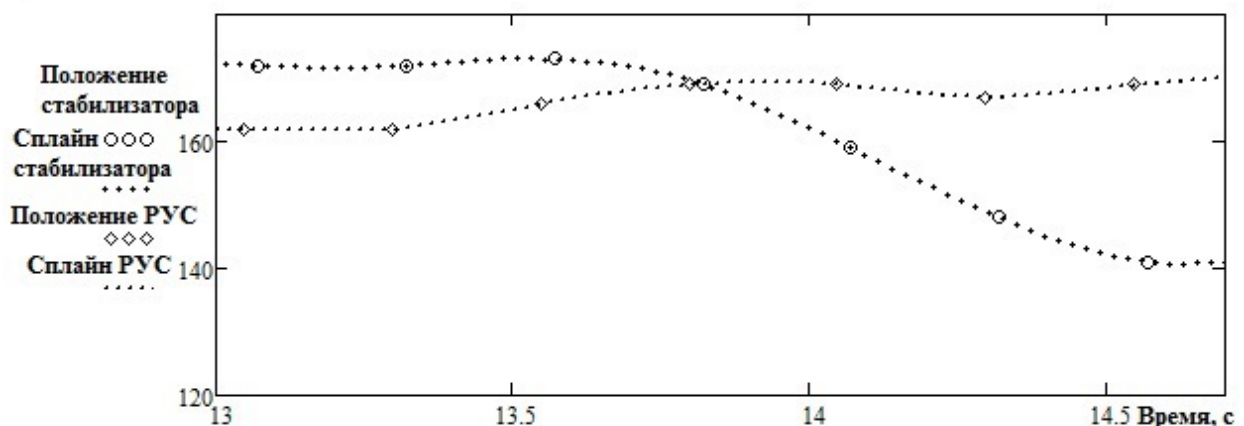


Рис. 12. Результаты интерполяции методом Лагранжа и сплайн интерполяции

Анализ интерполяции методом Лагранжа и сплайн интерполяции (см. рис. 12) показывает, что сплайн интерполяция повышает точность интерполяции, так как исключает на каждом интервале колебания многочлена Лагранжа.

Проведённый анализ обнаруживает, что сплайн интерполяция по сравнению с интерполяцией, многочленами намного технологичнее, ибо для ее реализации не требуется держать в памяти компьютера все коэффициенты многочленов для каждого промежутка. Сплайн интерполяция обеспечивает единообразие в построении основных и дополнительных узлов, это связано с равномерной сходимости сплайна к интерполируемой функции и исключает критическую ситуацию, которая требует смещения и увеличения числа дополнительных узлов. Таким образом, сплайн интерполяция сочетает в себе, локальную простоту многочлена третьей степени и глобальна на всем временном отрезке. Поэтому в дальнейшем для интерполяции зарегистрированных параметров будем использовать кубический сплайн интерполяции.

ЭСУ представляет динамический объект, который характеризуется возникновением переходных процессов при изменении входных, внутренних сигналов. Основным инструментом при исследовании систем управления является метод математического моделирования. Построение математической модели по результатам наблюдения параметров, зарегистрированных БУР, представляет собой формализацию, необходимую для определения основных признаков, связей и закономерностей, присущих ЭСУ. Для ЭСУ в зависимости от конкретных решаемых задач может быть разработан ряд моделей, в которых отсутствуют второстепенные признаки. Математическую модель ЭСУ состоит из двух частей: модель вычислителя и модель РП. Модель вычислителя состоит из алгоритмов преобразования значений скорости, высоты, вертикальной перегрузки и угловой скорости тангажа. Данные алгоритмы известны и поэтому модель вычислителя реализуется тривиально. Поэтому можно получить входной сигнал, который подается на РП.

РП являются исполнительным устройством системы, перемещающими органы управления ВС в соответствии с управляющими сигналами, которые формирует летчик или система автоматического управления самолетом. Основная цель анализа РП будет сводиться к тому, чтобы для РП определить наиболее простую передаточную функцию или структурную схему, которой может быть описана динамика РП. Данная процедура позволяет диагностировать РП, и оценивать его работоспособность при расследовании АП. Эффективное оценивание работоспособности РП при расследовании АП невозможно без знания свойств. Свойства должны оцениваться как качественно, так и количественно. Наиболее эффективной формой такой оценки является математическая модель. Для оценки параметров математической модели РП применяются методы идентификации.

Задача идентификации формулируется следующим образом: по результатам наблюдений над входными и выходными переменными системы должна быть построена оптимальная в некотором, смысле модель, то есть формализованное представление этой системы. То есть если система описывается некоторым оператором A_0 , то имея измерения входа и выхода необходимо определить оценку A , оператора системы, оптимальную в смысле некоторого критерия. В процессе идентификации строится математическая модель исследуемого объекта (РП).

Построение математической модели РП в процессе идентификации сводится к следующим этапам [19]:

- выбор структуры объекта из физических соображений;
- «подгонка» параметров к имеющимся данным (оценивание);
- проверка и подтверждение модели (диагностическая проверка);
- использование модели по назначению.

Как правило, структура модели объекта выбирается на основе априорной информации с привлечением конструкторской и технической документации, гидростатическим и гид-

родинамическим характеристикам. РП может быть аппроксимирован колебательным звеном, и его передаточная функция имеет следующий вид [20]

$$W(p) = \frac{K}{T^2 p^2 + 2T\xi p + 1} = \frac{b_1}{p^2 + a_1 p + a_2}, \quad (7)$$

где $b_1 = \frac{K}{T^2}$, $a_1 = \frac{2\xi}{T}$, $a_2 = \frac{1}{T^2}$.

Передаточную функцию (7) преобразуем в дифференциальное уравнение

$$y''(t) + a_1 y'(t) + a_2 y(t) = b_1 u(t). \quad (8)$$

Уравнение (8) можно преобразовать в разностное уравнение путем замены производных разностями. Первую производную функции $y(t)$ можно аппроксимировать центральной разностной производной:

$$\frac{dy(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow \infty} \frac{y(t + \Delta t) - y(t - \Delta t)}{2\Delta t} \rightarrow \Delta y(k) = \frac{y(k+1) - y(k-1)}{2\Delta t}.$$

На практике для приближенного вычисления второй производной функции $y(t)$ используется следующую формулу второй разностной производной:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 y(t)}{dt^2} &= \lim_{\Delta t \rightarrow \infty} \frac{y'(t + \Delta t) - y'(t - \Delta t)}{\Delta t} = \frac{\frac{y(t + \Delta t) - y(t)}{\Delta t} - \frac{y(t) - y(t - \Delta t)}{\Delta t}}{\Delta t} = \\ &= \frac{y(t + \Delta t) - 2y(t) + y(t - \Delta t)}{\Delta t^2} \rightarrow \Delta^2 y(k) = \frac{\Delta y'(k+1) - \Delta y'(k-1)}{\Delta t} = \frac{y(k+1) - 2y(k) + y(k-1)}{\Delta t^2} \end{aligned}$$

Из исходного дифференциального уравнения (8) получим уравнение в конечных разностях

$$\frac{y(k+1) - 2y(k) + y(k-1)}{\Delta t^2} + a_1 \frac{y(k+1) - y(k-1)}{2\Delta t} + a_2 y(k) = b_1 u(k), \quad (9)$$

значения функции указаны в соответствующие моменты времени.

В результате преобразования уравнения (9) и замены

$$y(k+1) = y_{k+1}, \quad y(k) = y_k, \quad y(k-1) = y_{k-1}$$

получим разностное уравнение 2-го порядка вида

$$y_{k+1} + c_1 y_k + c_2 y_{k-1} = c_3 u_k, \quad (10)$$

где $c_1 = \frac{-4 + 2a_2 \Delta t}{2 + a_1 \Delta t^2}$; $c_2 = \frac{2 - a_1 \Delta t}{2 + a_1 \Delta t^2}$; $c_3 = \frac{2b_1 \Delta t^2}{2 + a_1 \Delta t^2}$.

Уравнение (10) можно рассматривать как линейную статическую модель

$$y = c_1 z_1 + c_2 z_2 + c_3 z_3,$$

тогда проблема сводится к решению системы линейных уравнений

$$\begin{pmatrix} (z_1, z_1) & (z_1, z_2) & (z_1, z_3) \\ (z_2, z_1) & (z_2, z_2) & (z_2, z_3) \\ (z_3, z_1) & (z_3, z_2) & (z_3, z_3) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (z_1, y) \\ (z_2, y) \\ (z_3, y) \end{pmatrix}. \quad (11)$$

Систему линейных уравнений можно представить в матричном виде

$$ZC = Y \quad (12)$$

Матричное уравнение (12) равносильно системе алгебраических уравнений с неизвестными значениями коэффициентов C , которые могут быть определены по методу обращения:

$$C = Z^{-1}Y. \quad (13)$$

Однако метод определения коэффициентов C по зарегистрированным параметрам полета по своей природе неустойчив. Это связано с погрешностями исходных данных Z и Y , которые неизбежно возникают в результате регистрации параметров БУР. Таким образом, решения уравнения (13) является задачей некорректно поставленной [21]. Решение системы уравнений (13) будем искать в виде

$$\hat{C} = (\alpha E + Z^T Z)^{-1} \cdot Z^T \cdot Y, \quad (14)$$

где \hat{C} - вектор оценок искомых коэффициентов решения системы линейных уравнений; E - единичная матрица; α - параметр регуляризации, обеспечивающий достижение решения в случае плохой обусловленности матрицы $Z^T Z$.

Выбор величины параметра регуляризации является основной проблемой при использовании регуляризирующих алгоритмов решения системы линейных уравнений на практике [21]. Если $\alpha = 0$ то система (14) переходит в плохо обусловленную систему (13). Если же λ велико, то регуляризованная система (14) будет хорошо обусловленной благодаря присутствию в левой части хорошо обусловленной матрицы αE , но сама система (14) при большом значении α сильно отличается от исходной системы, и регуляризованное решение \hat{C} не будет близким к искомому решению. Поэтому параметр регуляризации подбирается некоторым оптимальным способом.

Для контроля качества решений и выбора значений α можно воспользоваться невязкой системы [22]

$$\Delta(\alpha) = |Z\hat{C}(\alpha) - Y|. \quad (15)$$

В связи с тем, что \hat{C} зависит от коэффициента регуляризации α , следовательно, необходимо уравнение (14) и (15) решать совместно. И параметр регуляризации α будет соответствовать минимуму зависимости $\Delta(\alpha)$.

На рис. 13 приведена зависимость невязки системы от коэффициента регуляризации. Анализ зависимости показывает, что минимум невязки достигается при коэффициенте регуляризации $\alpha = 12.855$.

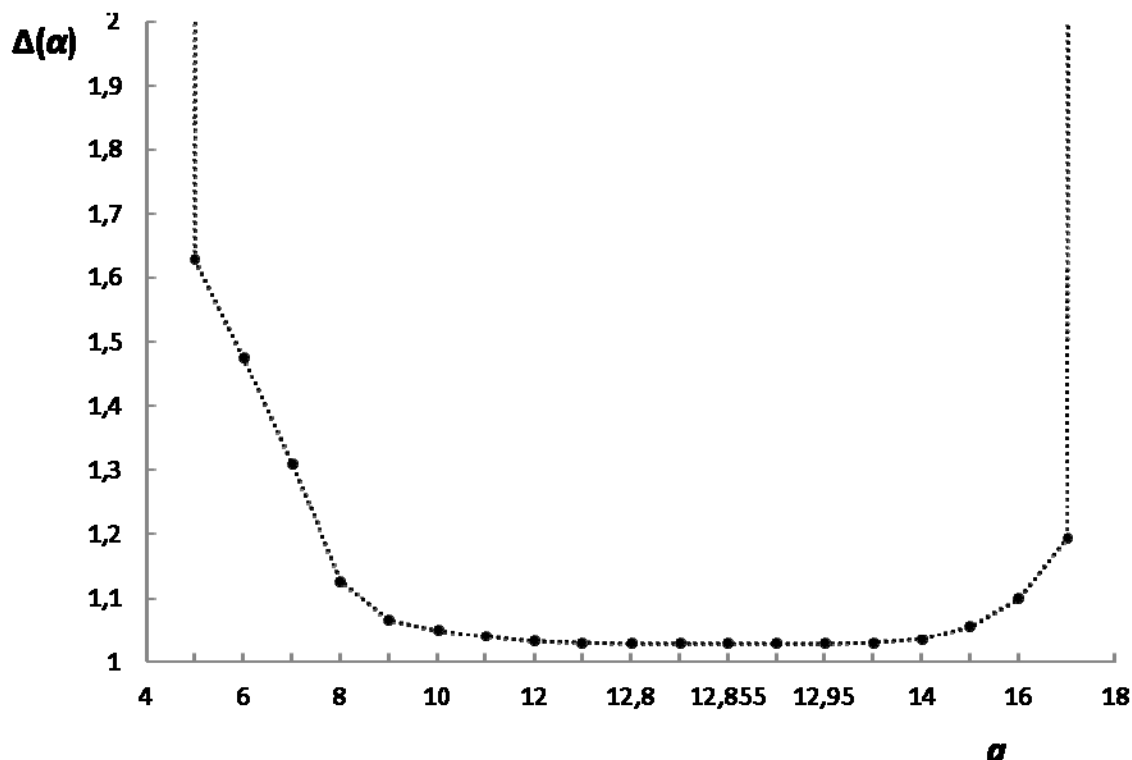


Рис. 13. Зависимость невязки $\Delta(\alpha)$ от коэффициента регуляризации α

Полученный коэффициент регуляризации позволяет идентифицировать параметры передаточной функции (7). В табл. 2 приведены параметры передаточной функции РП.

Таблица 2

Параметры передаточной функции РП

К	T	ξ
3.47	0.142	0.084

Для успешного использования математической модели РП при решении задачи диагностики при расследовании АП необходимо, чтобы модель достаточно верно описывала качественно и количественно свойства моделируемого объекта, т. е. она должна быть адекватна моделируемому объекту. Модель называется адекватной, если предсказанные по ней значения переменной Y согласуются с результатами наблюдений. Для проверки

адекватности математической модели реальному процессу необходимо сравнить результаты регистрации с результатами модели. Несоответствие может быть вызвано двумя причинами: или сама передаточная функция не соответствует реальности, или случайные факторы исказили результаты регистрации параметров, вследствие чего коэффициенты в модели определены с ошибками, что сказывается на точности моделирования.

Оценка адекватности математической модели реальному физическому объекту проводилась сравнением численных значений зарегистрированных параметров полученных в реальном полете, со значениями тех же параметров, полученных в результате расчета на ЭВМ.

На рис. 14 приведены результаты зарегистрированного параметра «Положение стабилизатора» и результаты, полученные с помощью моделирования с использованием математической модели РП.

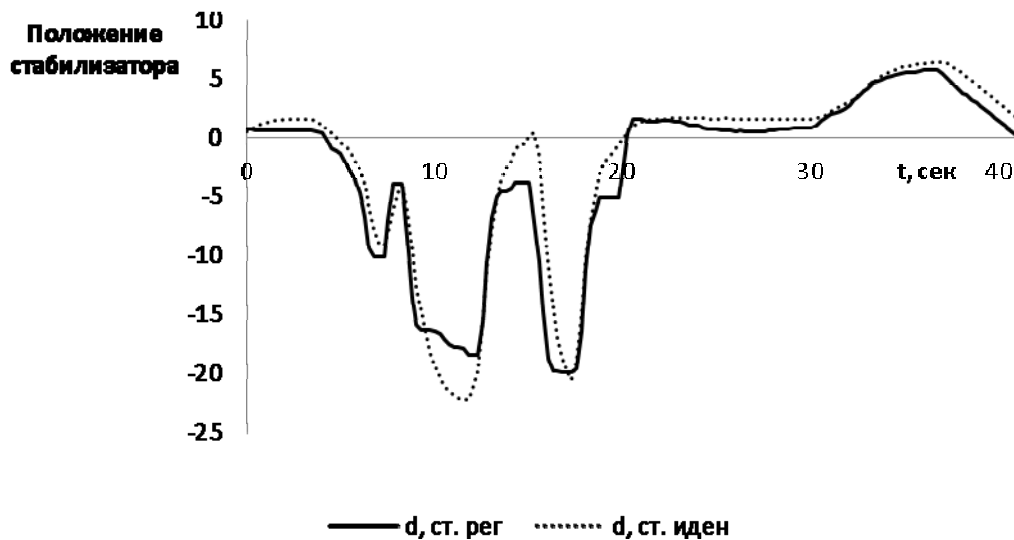


Рис. 14. Результаты зарегистрированного параметра «Положение стабилизатора» и моделирования

Для проверки адекватности модели РП реальному объекту воспользуемся критерием Фишера [23]. Для этого выполняется сравнение полученного значения $F_{фак}$ и табличного $F_{табл}$ значения. F -критерия Фишера F фактический определяется из отношения значений общей и остаточной дисперсий, рассчитанных на число оцениваемых параметров:

$$F_{фак} = \frac{S_R^2}{S_y^2} = \frac{\sum_{i=1}^N (d_{ст.иден}(i) - d_{ст.рег}(i))^2}{N - m - 1} \cdot \frac{N - 1}{\sum_{i=1}^N (d_{ст.рег}(i) - \bar{d})^2},$$

где S_R^2 - остаточная дисперсия; S_y^2 - дисперсия характеризующая ошибку; N - количество измерений параметра, m - число оцениваемых параметров модели, $d_{ст.рег}$ - зарегистрированные значения параметра, $d_{ст.иден}$ - значения параметра, полученные в

результате моделирования, $\bar{d} = d_{cm.pez} / N$ - математическое ожидание зарегистрированного параметра.

Фактическое значение $F_{фак}$ - критерия Фишера сравнивается с табличным значением $F_{табл.}(\alpha, k_1, k_2)$ при заданном уровне значимости α и степенях свободы $k_1 = N - m - 1$ и $k_2 = N - 1$. При этом, если фактическое значение $F_{фак}$ - критерия больше табличного $F_{теор.}(\alpha, k_1, k_2)$ ($F_{фак} < F_{теор.}$), то признается модель адекватной с α уровнем значимости. В табл. 3 приведены значения для оценки модели по критерию Фишера.

Таблица 3

Значения по критерию Фишера для оценки адекватности модели

$F_{фак}$	$F_{теор.}(0.05, N-m-1, N-1)$
0.087	1.2916

Из табл. 3 видно, что полученная модель адекватна и надежна с 0.05 уровнем значимости. Следовательно, полученную математическую модель РП можно использовать для диагностики СУВС при расследовании АП.

Следует отметить, что описанная методика позволяет по зарегистрированной информации БУР идентифицировать математическую модель агрегатов ВС. В нашем случае была благоприятная ситуация т.к. была известна структурная модель агрегата. И здесь решалась задача определения неизвестных параметров.

Более сложной задачей является задача, когда отсутствует информация о структуре модели. В этом случае для идентификации модели целесообразно определять импульсную переходную функцию [24].

Полученные результаты исследования позволяют сделать вывод о целесообразности использования предложенных алгоритмов фильтрации, сглаживания и идентификации для получения математической модели по зарегистрированным параметрам БУР.

Использование идентифицированных моделей позволяет повысить информативность при расследовании АП.

Литература

1. Соломонов П.А. Безотказность авиационной техники и безопасность полетов. -М.: Транспорт. - 1977. – 272 с.
2. Бюшгенс Г.С. Аэродинамика, устойчивость и управляемость сверхзвуковых самолетов. - М. Наука. Физматлит. - 1998.–816 с.
3. Сухорученков Б.И., Меньшиков В.А. Методы анализа характеристик летательных аппаратов. - М.: Машиностроение. - 1995. – 368 с.
4. Кринецкий Е.И. Летные испытания ракет и КА. - М.: Машиностроение. - 1972. – 463 с.
5. Фомин А.А., Новоселов О.Н., Плющев А.В. Обработка аномальных результатов измерений. - М.: Энергоатомиздат. - 1985. – 200 с.
6. Цветнов Э.И. Основы теории статистических измерений. - М.: Энергоатомиздат. - 1986. – 256 с.
7. Поплавский Б.К. О фильтрации погрешностей при определении оценок линейных преобразований экспериментальных зависимостей методом минимальной дисперсии // Математические методы в специализированной вычислительной технике / Тр. семинара АН УССР. Ин-т кибернетики. Вып. 1, Киев. - 1968. –С. 70 - 83.

8. Гетманов В.Г. Цифровая обработка сигналов. - М.: НИЯУМИФИ. - 2010. – 232 с.
9. Вентцель Е.С. Теория вероятностей. - М.: Высш. шк. - 1999.– 576 с.
10. Орнатский П.П. Теоретические основы информационно-измерительной техники. - К.: Вища шк. - 1983.– 455 с.
11. Шарый С.П. Курс вычислительных методов. - Новосибирск: Инст. вычислительных технологий СО РАН. - 2017. – 553 с.
12. Самарский А.А. Введение в численные методы. - М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы. - 1982. – 272 с.
13. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. - М.: Бином. Лаборатория знаний. - 2004.– 663 с.
14. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. – М.: Наука. - 1989. – 430 с.
15. Толковый словарь математических терминов. / Мангуров О.В., Солнцев Ю.К., Сорокин Ю.И., Федин Н.Ф. – М.: Просвещение. - 1965.–698с.
16. <http://alglib.sources.ru/interpolation/spline3.php>
17. Де Бор К. Практическое руководство по сплайнам. - М.: Радио и связь. - 1985. – 304 с.
18. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. - М.: Наука. - 2011. – 535с.
19. Эйкхофф П. Основы идентификации систем управления. - М.: Мир. - 1975.– 684 с.
20. Крымов В.Г., Рабинович Л.В., Стеблецов В.Г. Исполнительные устройства систем управления летательными аппаратами. - М.: Машиностроение. - 1987. – 264 с.
21. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. - М.: Наука. - 1979. — 285 с.
22. Кирьянов Д.В., Кирьянова Е.Н. Вычислительная физика – М.: Полибук Мультимедиа. - 2006. – 352 с.
23. Львовский Е.Н. Статистические методы построения эмпирических формул. - М.: Высш. шк. - 1988.- 239 с.
24. Попов Ю.В. Мониторинг и диагностика системы управления самолётом по информации, зарегистрированной бортовым устройством регистрации // Проблемы безопасности полетов. — 2012. — № 9. — С. 33-49.

Сведения об авторах

Попов Юрий Васильевич, Научно-исследовательский центр (г. Люберцы) Центрального научно-исследовательского института Минобороны России. Т. моб. 8-916-384-48-73 e-mail: tov_popov@rambler.ru

Уваров Иван Александрович, старший научный сотрудник НИО, Научно-исследовательский центр (г. Люберцы) Центрального научно-исследовательского института Минобороны России. Т. моб. 8-977-901-15-42 e-mail: vasca-2009@rambler.ru

Клочков Денис Владимирович, старший инженер научно-исследовательской летающей лаборатории, Научно-исследовательский центр (г. Люберцы) Центрального научно-исследовательского института Минобороны России. Т. 8-916-813-88-20