ISSN 0233-6723

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ

СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Тематические обзоры

Том 143

Москва 2017

ISSN 0233–6723

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

ВСЕРОССИЙСКИЙ ИНСТИТУТ
НАУЧНОЙ И ТЕХНИЧЕСКОЙ ИНФОРМАЦИИ
(ВИНИТИ РАН)

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ

СЕРИЯ
СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

ТЕМАТИЧЕСКИЕ ОБЗОРЫ

Том 143

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ.
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Москва 2017

СОДЕРЖАНИЕ

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 143 (2017). С. 3–23

УДК 519.626

О НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧАХ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ И ИХ АППРОКСИМАЦИИ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ НЕСАМОСОПРЯЖЕННЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ТИПА КОНВЕКЦИИ-ДИФФУЗИИ

© 2017 г. **Ф. В. ЛУБЫШЕВ, А. Р. МАНАПОВА**

Аннотация. В настоящей работе изучаются вопросы построения и исследования сходимости разностных аппроксимаций задач оптимального управления, описываемых несамосопряженными эллиптическими уравнениями конвекции-диффузии с разрывными коэффициентами и состояниями. Управляющими функциями являются коэффициенты оператора конвективного переноса уравнения состояния и его правая часть. Исследуются вопросы корректности задач. Получены оценки точности разностных аппроксимаций по состоянию, оценки скорости сходимости аппроксимаций по функционалу, установлена слабая сходимость по управлению. Проведена регуляризация аппроксимаций по А. Н. Тихонову.

***Ключевые слова*:** задача оптимального управления, полулинейные эллиптические уравнения, несамосопряженный оператор, операторы диффузионного и конвективного переноса, разностный метод решения.

***AMS Subject Classification*:** 49J20, 35J61, 65N06

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение

Задачи оптимального управления, описываемые уравнениями с частными производными, имеют ту особенность, что входные данные краевых задач и соответствующие им решения, на которых ищется минимум того или иного функционала и строится оптимальное управление, вообще говоря, обладают малой гладкостью (см. [9]). Это существенно осложняет обоснование численных методов аппроксимации задач управления, в частности, конечно-разностных. Актуальным для теории и приложений является получение оценок погрешности по состоянию, погрешности аппроксимации исходного функционала разностным и оценок скорости сходимости по функционалу

Работа второго автора выполнена при поддержке гранта Президента Российской Федерации для государственной поддержки молодых российских ученых — кандидатов наук (МК-4147.2015.1).

и управлению (см. [2, 11]) при естественных незавышенных требованиях гладкости в постановках задач управления. Важным вопросом при исследовании разностных аппроксимаций задач оптимального управления является также регуляризация аппроксимаций по А. Н. Тихонову.

В теории численных методов решения задач математической физики и оптимального управления наиболее глубокие результаты получены при рассмотрении процессов с самосопряженными операторами. В настоящей работе исследуются вопросы разностной аппроксимации задач Дирихле для полулинейных эллиптических уравнений второго порядка с несамосопряженными операторами — задач конвекции-диффузии с разрывными коэффициентами и состояниями, с квадратичным функционалом и управлениями в коэффициентах оператора конвективного переноса и правой части уравнения. При этом используются минимальные ограничения на гладкость в постановках задач управления, которые обеспечивают лишь обобщенную разрешимость исходной краевой задачи и разрешимость задач управления. В данной работе выделен класс задач для состояния процесса управления, который связан с использованием недивергентной формы записи оператора конвективного переноса.

Задачи конвекции-диффузии являются типичными для математических моделей механики жидкости и газа. Так, распределение тепла, примесей может происходить не только за счет диффузии, но и обусловлено движением среды. Принципиальные особенности физико-химических процессов в механике жидкости и газа могут быть порождены именно учетом движения сред под действием тех или иных сил. В частности, важное значение приобретают экологические проблемы, связанные с описанием процессов распределения примесей в атмосфере и водоемах, с моделированием загрязнения грунтовых вод. В газо- и гидродинамике в качестве базовых моделей многих процессов выступают краевые задачи как для стационарных, так и нестационарных уравнений конвекции-диффузии — эллиптические или параболические уравнения второго порядка с младшими членами.

Работа дополняет результаты из [12,13]. Построены разностные аппроксимации экстремальных задач, установлены оценки скорости сходимости сеточных аппроксимаций по состоянию и функционалу. Построена минимизирующая последовательность для исходного функционала, слабо сходящаяся в пространстве управлений, и даны оценки погрешности приближения по функционалу. Проведен процесс регуляризации по Тихонову для последовательности разностных аппроксимаций.

2. Постановка задач и их корректность

Пусть $\Omega = \{r = (r_1, r_2) \in \mathbb{R}^2 :\ 0 < r_\alpha < l_\alpha,\ \alpha = 1, 2\}$ — прямоугольник в $\mathbb{R}^2$ с границей $\partial\Omega = \Gamma$. Пусть область Ω разделена прямой $r_1 = \xi$, где $0 < \xi < l_1$ («внутренней контактной границей» $\overline{S} = \{r_1 = \xi,\ 0 \leqslant r_2 \leqslant l_2\}$, $0 < \xi < l_1$) на подобласти

$$\Omega_1 \equiv \Omega^- = \{0 < r_1 < \xi,\ 0 < r_2 < l_2\}, \quad \Omega_2 \equiv \Omega^+ = \{\xi < r_1 < l_1,\ 0 < r_2 < l_2\}$$

(которые будем называть левой и правой подобластями соответственно) с границами $\partial\Omega_1 \equiv \partial\Omega^-$ и $\partial\Omega_2 \equiv \partial\Omega^+$. Таким образом, область Ω есть объединение областей Ω_1 и Ω_2 и внутренних точек «контактной» границы $\overline{S}$ подобластей Ω_1 и Ω_2, а $\partial\Omega$ — внешняя граница области Ω. Далее, через $\overline{\Gamma}_k$ будем обозначать границы областей Ω_k без S, $k = 1, 2$. Итак, $\partial\Omega_k = \overline{\Gamma}_k \cup S$, где части Γ_k, $k = 1, 2,$ — открытые непустые подмножества в $\partial\Omega_k$, $k = 1, 2$, и $\overline{\Gamma}_1 \cup \overline{\Gamma}_2 = \partial\Omega = \Gamma$. Через n_α, $\alpha = 1, 2$, будем обозначать внешнюю нормаль к границе $\partial\Omega_\alpha$ области Ω_α, $\alpha = 1, 2$. Пусть, далее, $n = n(x)$ — единичная нормаль к S в какой-либо ее точке $x \in S$, ориентированная, например, таким образом, что n является внешней нормалью к S по отношению к области Ω_1, т.е. нормаль n направлена внутрь области Ω_2. Ниже, при постановке краевых задач для состояний процессов управления, S — это прямая, вдоль которой будут разрывны коэффициенты и решения краевых задач, которые в областях Ω_1 и Ω_2 обладают некоторой гладкостью.

Пусть условия управляемого физического процесса позволяют моделировать его в области $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup S$, состоящей из двух частей (подобластей) Ω_1 и Ω_2, разбитой на части внутренней границей S, следующей задачей Дирихле для полулинейного уравнения эллиптического типа с разрывными коэффициентами и решениями.

Требуется найти функцию $u(r)$, определенную на $\overline{\Omega}$, вида

$$u(r) = \begin{cases} u_1(r), & r \in \overline{\Omega}_1 \equiv \Omega^-, \\ u_2(r), & r \in \overline{\Omega}_2 = \Omega^+, \end{cases}$$

где компоненты $u_p(r)$, $p = 1, 2$, удовлетворяют следующим условиям:

1) функции $u_p(r)$, $p = 1, 2$, определенные на $\overline{\Omega}_p = \Omega_p \cup \partial\Omega_p$, $p = 1, 2$, удовлетворяют в Ω_p, $p = 1, 2$, уравнениям

$$L_p\, u_p = -\sum_{\alpha=1}^{2} \frac{\partial}{\partial r_\alpha}\left(k_p(r)\frac{\partial u_p}{\partial r_\alpha}\right) + \sum_{\alpha=1}^{2} \vartheta_p^{(\alpha)}(r)\frac{\partial u_p}{\partial r_\alpha} + d_p(r) q_p(u_p) = f_p(r) \quad \text{в } \Omega_p,\ p = 1, 2, \tag{2.1}$$

а на границах $\partial\Omega_1 \setminus S = \overline{\Gamma}_1$, $\partial\Omega_2 \setminus S = \overline{\Gamma}_2$ — условиям

$$u_1(r) = 0, \quad r \in \overline{\Gamma}_1, \qquad u_2(r) = 0, \quad r \in \overline{\Gamma}_2; \tag{2.2}$$

2) искомые функции $u_p(r)$, $p = 1, 2$, удовлетворяют дополнительным условиям на границе S разрыва коэффициентов и решения, позволяющим «сшить» решения $u_1(r)$ и $u_2(r)$ вдоль контактной границы S областей Ω_1 и Ω_2:

$$G(x) = k_1(r)\frac{\partial u_1}{\partial r_1} = k_2(r)\frac{\partial u_2}{\partial r_1} = \theta(r_2)\left(u_2(r) - u_1(r)\right), \quad r \in S. \tag{2.3}$$

Если ввести функции вида

$$u(r) = \begin{cases} u_1(r), & r \in \Omega_1, \\ u_2(r), & r \in \Omega_2, \end{cases} \qquad q(\xi) = \begin{cases} q_1(\xi_1), & \xi_1 \in \mathbb{R}, \\ q_2(\xi_2), & \xi_2 \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{2.4}$$

$$k(r),\ d(r),\ f(r),\ \vartheta^{(\alpha)}(r) = \begin{cases} k_1(r),\ q_1(r),\ f_1(x),\ \vartheta_1^{(\alpha)}(r), & r \in \Omega_1, \\ k_2(r),\ q_2(r),\ f_2(r),\ \vartheta_2^{(\alpha)}(r), & r \in \Omega_2, \end{cases} \qquad \alpha = 1, 2. \tag{2.5}$$

то задачу (2.1)–(2.3) можно переписать в более компактном виде.

Требуется найти функцию $u(r)$, определенную на $\overline{\Omega}$, удовлетворяющую в каждой из областей Ω_1 и Ω_2 уравнению

$$Lu(r) = -\sum_{\alpha=1}^{2} \frac{\partial}{\partial r_\alpha}\left(k(r)\frac{\partial u}{\partial r_\alpha}\right) + \sum_{\alpha=1}^{2} \vartheta^{(\alpha)}\frac{\partial u}{\partial r_\alpha} + d(r) q(u) = f(r), \quad r = (r_1, r_2) \in \Omega_1 \cup \Omega_2, \tag{2.6}$$

и условиям

$$\begin{gathered} u(r) = 0, \quad r \in \partial\Omega = \overline{\Gamma}_1 \cup \overline{\Gamma}_2, \\ \left[k(r)\frac{\partial u}{\partial r_1}\right] = 0, \quad G(r) = \left(k_1(r)\frac{\partial u_1}{\partial r_1}\right) = \theta(r_2)[u], \quad x \in S, \end{gathered} \tag{2.7}$$

где $[u] = u_2(r) - u_1(r) = u^+(r) - u^-(r)$ — скачок функции $u(r)$ на S; $k_\alpha(x)$, $\alpha = 1, 2$, $d(r)$ — известные функции, определяемые по-разному в Ω_1 и Ω_2, претерпевающие разрыв первого рода на S; $\vartheta_2^{(p)}(r)$, $p = 1, 2,$ — заданные функции, определенные в Ω_2; $q_\alpha(\xi_\alpha)$, $\alpha = 1, 2,$ — заданные функции, определенные для $\xi_\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha = 1, 2$; $\theta(r_2)$ — заданная функция на S;

$$g(r) = \Big(g_1(r),\ g_2(r),\ g_3(r),\ g_4(r)\Big) = \Big(\vartheta_1^{(1)}(r),\ \vartheta_1^{(2)}(r),\ f_1(r),\ f_2(r)\Big) \tag{2.8}$$

— управление. Относительно заданных функций будем предполагать следующее:

$$k(r) \in W_\infty^1(\Omega_1) \times W_\infty^1(\Omega_1), \quad d(r) \in L_\infty(\Omega_1) \times L_\infty(\Omega_2),$$

$$\vartheta_2^{(p)}(r) \in L_2(\Omega_2),\ p = 1, 2, \theta(r_2) \in L_\infty(S);$$

$$0 < \nu \leqslant k(r) < \overline{\nu}, \quad 0 \leqslant d_0 \leqslant d(r) \leqslant \overline{d}_0, \quad r \in \Omega_1 \cup \Omega_2;$$

$$\zeta_{p+2} \leqslant \vartheta_2^{(p)}(r) \leqslant \overline{\zeta}_{p+2}, \quad p = 1, 2,\ r \in \Omega_2, \qquad 0 < \theta_0 \leqslant \theta(r_2) \leqslant \overline{\theta}_0, \quad r_2 \in S,$$

ν, $\overline{\nu}$, d_0, $\overline{d}_0$, θ_0, $\overline{\theta}_0$, ζ_{p+2}, $\overline{\zeta}_{p+2}$, $p = 1, 2,$ — константы; функции $q_\alpha(\xi_\alpha)$, $\alpha = 1, 2$, определены на $\mathbb{R}$ со значениями в $\mathbb{R}$, причем $q_\alpha(0) = 0$,

$$0 \leqslant q_0 \leqslant \frac{q_\alpha(\xi_1) - q_\alpha(\xi_2)}{\xi_1 - \xi_2} \leqslant N_q < \infty$$

для всех $\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}$, $\xi_1 \neq \xi_2$, $N_q = \mathrm{const}$.

Введем множество допустимых управлений

$$U = \prod_{k=1}^{4} U_k \subset L_\infty(\Omega_1) \times L_\infty(\Omega_1) \times L_2(\Omega_1) \times L_2(\Omega_2) = B, \tag{2.9}$$

состоящее из функций $g(r)$, определенных в (2.8) и таких, что

$$\begin{aligned} &g_1(r) \in U_1 = \Big\{ g_1(r) = \vartheta_1^{(1)}(r) \in L_\infty(\Omega_1) = B_1 : \ \zeta_1 \leqslant g_1(r) \leqslant \overline{\zeta}_1 \text{ п.в. на } \Omega_1 \Big\}, \\ &g_2(r) \in U_2 = \Big\{ g_2(r) = \vartheta_1^{(2)}(r) \in L_\infty(\Omega_1) = B_2 : \ \zeta_2 \leqslant g_2(r) \leqslant \overline{\zeta}_2 \text{ п.в. на } \Omega_1 \Big\}, \\ &g_p(r) \in U_p = \Big\{ g_p(r) = f_p(r) \in L_2(\Omega_p) = H_p : \ g_p \leqslant g_p(r) \leqslant \overline{g}_p \text{ п.в. на } \Omega_p \Big\}, \quad p = 3, 4, \end{aligned} \tag{2.10}$$

где $B_p = L_\infty(\Omega_1)$, $p = 1, 2,$ — пространства управлений $g_p(r) = \vartheta_1^{(p)}(r)$, $p = 1, 2$, заданных на Ω_1, ζ_p, $\overline{\zeta}_p$, $p = 1, 2$, g_β, $\overline{g}_\beta$, $\beta = 3, 4,$ — заданные числа. Предполагается выполнение следующих условий:

$$-m_1 \leqslant \zeta_1 \leqslant \overline{\zeta}_1 \leqslant m_1, \quad -p_1 \leqslant \zeta_2 \leqslant \overline{\zeta}_2 \leqslant p_1, \quad -m_2 \leqslant \zeta_3 \leqslant \overline{\zeta}_3 \leqslant m_2, \quad -p_2 \leqslant \zeta_4 \leqslant \overline{\zeta}_4 \leqslant p_2,$$
$$m_\alpha, p_\alpha = \mathrm{const} > 0, \quad \alpha = 1, 2,$$

а также

$$\begin{gathered} \delta_\alpha = \max_{\substack{\epsilon_1, \epsilon_2 > 0 \\ \epsilon_1 + \epsilon_2 \leqslant \nu_\alpha}} \left\{ \frac{\nu_\alpha - (\epsilon_1 + \epsilon_2)}{C^2_{\Omega_\alpha}} + \lambda - \frac{m_\alpha^2}{4\epsilon_1} - \frac{p_\alpha^2}{4\epsilon_2} \right\} > 0, \quad \alpha = 1, 2, \\ C^2_{\Omega_1} = \left(\frac{8}{\xi_1^2} + \frac{8}{l_2^2} \right)^{-1}, \quad C^2_{\Omega_2} = \left(\frac{8}{(l_1 - \xi_1)^2} + \frac{8}{l_2^2} \right)^{-1}; \end{gathered} \tag{2.11}$$

здесь λ — любая из следующих констант:

1) $\lambda = q_0 d_0$, $d_0 \geqslant 0$;
2) $\lambda = d_0$ — произвольная константа, когда $q_\alpha(u_\alpha) = u_\alpha$;
3) $\lambda = -L_q \zeta_0$, где $\zeta_0 = \max\big\{ |d_0|, |\overline{d}_0| \big\}$.

Зададим целевой функционал $J : U \to \mathbb{R}^1$ в виде

$$g \to J(g) = \int_{\Omega_1} \Big| u(r_1, r_2; g) - u_0^{(1)}(r) \Big|^2 d\Omega_1 = I(u(r; g)), \tag{2.12}$$

где $u_0^{(1)}(r) \in W_2^1(\Omega_1)$ — заданная функция.

Задача оптимального управления состоит в том, чтобы найти управление $g_* \in U$, которое минимизирует на множестве $U \subset B$ целевой функционал $g \to J(g)$; точнее, на решениях $u(r) = u(r; g)$ задачи (2.1)–(2.3), отвечающих всем допустимым управлениям $g(r) = \Big(\vartheta_1^{(1)}(r),\ \vartheta_1^{(2)}(r),\ f_1(r),\ f_2(r) \Big) \in U$, требуется минимизировать функционал (2.12).

Введем в рассмотрение пространство $V(\Omega^{(1,2)})$, $\Omega^{(1,2)} = \Omega_1 \cup \Omega_2$, пар функций $u(r) = \big(u_1(r), u_2(r) \big)$:

$$V \equiv V(\Omega^{(1,2)}) = \Big\{ u(r) = \big(u_1(r), u_2(r) \big) \in W_2^1(\Omega_1) \times W_2^1(\Omega_2) \Big\}, \tag{2.13}$$

где $W_2^1(\Omega_k)$, $k=1,2$, — соболевские пространства функций, заданных в подобластях Ω_k, $k=1,2$, с границами $\partial\Omega_k$, $k=1,2$, соответственно и нормами

$$\|u_k\|^2_{W_2^1(\Omega_k)} = \int\limits_{\Omega_k} \left[\sum_{\alpha=1}^{2}\left(\frac{\partial u_k}{\partial r_\alpha}\right)^2 + u_k^2\right] d\Omega_k, \quad k=1,2 \tag{2.14}$$

(см. [18]). Пространство $V=V(\Omega^{(1,2)})$, снабженное скалярным произведением и нормой

$$(u,v)_V = \sum_{k=1}^{2}(u_k,v_k)_{W_2^1(\Omega_k)}, \quad \|u\|_V^2 = \sum_{k=1}^{2}\|u_k\|^2_{W_2^1(\Omega_k)}, \tag{2.15}$$

является гильбертовым пространством.

Можно показать, что в гильбертовом пространстве $V(\Omega^{(1,2)})$ можно ввести эквивалентную норму

$$\|u\|_*^2 = \sum_{k=1}^{2}\int\limits_{\Omega_k}\sum_{\alpha=1}^{2}\left(\frac{\partial u_k}{\partial r_\alpha}\right)^2 d\Omega_k + \sum_{k=1}^{2}\int\limits_{\Gamma_k} u_k^2\, d\Gamma_k + \int\limits_{S}[u]^2\, dS, \tag{2.16}$$

где $[u]=u_2(r)-u_1(r)=u^+(r)-u^-(r)$ — скачок функции $u(r)\in V(\Omega^{(1,2)})$ на S. Здесь $u_2(r)=u^+(r)$, $r\in S$, и $u_1(r)=u^-(r)$, $r\in S$, — следы функции $u(r)$ на S со стороны $\Omega_2=\Omega^+$ и $\Omega_1=\Omega^-$ соответственно. Понятно, что из условия $u(r)\in V(\Omega^{(1,2)})$ следует, что отображения пространств $W_2^1(\Omega_k)$, $k=1,2$, в пространства $L_2(\partial\Omega_k)$, $k=1,2$, ограничены, так как Ω_1 и Ω_2 — области с липшицевыми границами $\partial\Omega_1$ и $\partial\Omega_2$. В частности, из условия $u(r)\in V(\Omega^{(1,2)})$ следует, что $[u(r)]\in L_2(S)$, так как в данном случае теорема о следах (см. [3, 4, 7, 8, 18]) справедлива для каждой из сторон S^+, S^- границы контакта S (оператор сужения из $W_2^1(\Omega^\pm)$ в $L_2(S)$ непрерывен). Заметим также, что применение теоремы о следах к Ω_1 и Ω_2 позволяет определить для любой функции $u(r)\in V(\Omega^{(1,2)})$ два следа с помощью операторов сужения на $S^\pm$. С другой стороны, если $u(r)\in V(\Omega^{(1,2)})$, то следы этого элемента на S с разных сторон (со стороны Ω_1 и со стороны Ω_2) в общем случае различны. Сужения $u\big|_{\Omega_k}$, $k=1,2$, функции $u(r)$ на области Ω_k, $k=1,2$, принадлежат соответственно пространствам $W_2^1(\Omega_k)$, $k=1,2$, но пространству $W_2^1(\Omega)$ сама функция $u(r)$ не принадлежит, поскольку на множестве S (при переходе из Ω_1 в Ω_2) она имеет разрыв ($\delta(r)=u_2(r)-u_1(r)=u^+(r)-u^-(r)$, $r\in S$). Заметим также, что необходимым и достаточным условием для принадлежности функции $v(r)$ пространству $W_2^1(\Omega)=W_2^1(\Omega_1\cup\Omega_2\cup S)$ является условие склейки $v_1(r)\Big|_S = v_2(r)\Big|_S$ (см., например, [4, 6]). Далее, так как Ω_k — области с липшицевыми границами $\partial\Omega_k$, $k=1,2$, а Γ_1 и Γ_2 — соответственно их (открытые) части (фрагменты границ $\partial\Omega_1$ и $\partial\Omega_2$) с положительными мерами Лебега, $\operatorname{mes}\Gamma_k>0$, $k=1,2$, то существуют такие постоянные C_1 и C_2, зависящие соответственно только от данных областей Ω_k, $k=1,2$, и от фрагментов Γ_1 и Γ_2, что для каждой функции $u_k(r)\in W_2^1(\Omega_k)$, $k=1,2$, имеют место соотношения

$$\|u_k(r)\|^2_{W_2^1(\Omega_k)} \leqslant C_k^2\left[\int\limits_{\Omega_k}\sum_{\alpha=1}^{2}\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_\alpha}\right)^2 d\Omega_k + \int\limits_{\Gamma_k} u_k^2 d\Gamma_k\right], \quad k=1,2 \tag{2.17}$$

(см. [14]). Так как для рассматриваемых областей Ω_k, $k=1,2$, отображения пространств $W_2^1(\Omega_k)$, $k=1,2$, в пространства $L_2(\partial\Omega_k)$, $k=1,2$, ограничены, то существуют такие постоянные C_3 и C_4, не зависящие от функции $u_k(r)$, что для любых функций $u_k(r)\in W_2^1(\Omega_k)$ справедливы оценки

$$\|u_k(r)\|^2_{L_2(\partial\Omega_k)} \leqslant C_{k+2}^2\|u_k(r)\|^2_{W_2^1(\Omega_k)}, \quad k=1,2, \tag{2.18}$$

вытекающие из теорем вложения пространств $W_2^1(\Omega_k)$ в $L_2(\partial\Omega_k)$ (см. [3, 8]).

Пусть $\mathring{\Gamma}_k$ — часть $\partial\Omega_k$. Через $W_2^1\big(\Omega_k;\mathring{\Gamma}_k\big)$ обозначим замкнутое подпространство пространства $W_2^1(\Omega_k)$, плотным множеством в котором является множество всех функций из $C^1(\overline{\Omega}_k)$, равных нулю вблизи $\overset{\circ}{\Gamma}_k \subset \partial\Omega_k$, $k = 1, 2$, какого-либо участка $\overset{\circ}{\Gamma}_k$ границы $\partial\Omega_k$, $k = 1, 2$. Под участками $\overset{\circ}{\Gamma}_k$ границы $\partial\Omega_k$ понимаются фрагменты $\partial\Omega_k$; естественно, мы не рассматриваем случай, когда какой-либо из участков $\overset{\circ}{\Gamma}_k$ вырождается в точку. Пространство $W_2^1(\Omega_k; \overset{\circ}{\Gamma}_k)$ совпадает с $W_2^1(\Omega_k)$ при $\overset{\circ}{\Gamma}_k = \varnothing$ и $W_2^1(\Omega_k; \overset{\circ}{\Gamma}_k) = \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega_k)$ при $\overset{\circ}{\Gamma}_k = \partial\Omega_k$. Заметим, что для элементов $u_k(r) \in W_2^1(\Omega_k; \overset{\circ}{\Gamma}_k)$ справедливо неравенство (см. [8])

$$\int\limits_{\Omega_k} u_k^2(r)\, d\Omega_k \leqslant C_{k+4}\Big(\Omega_k, \overset{\circ}{\Gamma}_k\Big) \int\limits_{\Omega_k} \sum_{\alpha=1}^{2} \left(\frac{\partial u_k}{\partial r_\alpha}\right)^2 d\Omega_k, \quad k = 1, 2, \tag{2.19}$$

с постоянной $C_{k+4}\Big(\Omega_k, \overset{\circ}{\Gamma}_k\Big)$, зависящей только от Ω_k и $\overset{\circ}{\Gamma}_k$; при этом «площадь» фрагмента $\overset{\circ}{\Gamma}_k$ поверхности $\partial\Omega_k$ должна быть положительной: $\operatorname{mes} \overset{\circ}{\Gamma}_k > 0$.

Введем в рассмотрение нормированное пространство

$$\overset{\circ}{V}_{\Gamma_1,\Gamma_2}(\Omega^{(1,2)}) = \Big\{ u(r) = (u_1(r), u_2(r)) \in W_2^1(\Omega_1; \Gamma_1) \times W_2^1(\Omega_2; \Gamma_2) \Big\} \tag{2.20}$$

пар функций $u(r) = (u_1(r), u_2(r))$ с нормой

$$\|u\|^2_{\overset{\circ}{V}_{\Gamma_1,\Gamma_2}(\Omega^{(1,2)})} = \sum_{k=1}^{2} \int\limits_{\Omega_k} \sum_{\alpha=1}^{2} \left(\frac{\partial u_k}{\partial r_\alpha}\right)^2 d\Omega_k + \int\limits_S [u]^2 dS. \tag{2.21}$$

Под решением прямой задачи (2.1)–(2.3) при фиксированном управлении $g(r) \in U$ понимается функция $u(r) \equiv u(r; g) \in \overset{\circ}{V}_{\Gamma_1,\Gamma_2}(\Omega^{(1,2)})$, удовлетворяющая для всех $v \in \overset{\circ}{V}_{\Gamma_1,\Gamma_2}(\Omega^{(1,2)})$ тождеству

$$Q(u, v) = \int\limits_{\Omega_1 \cup \Omega_2} \left[\sum_{\alpha=1}^{2} k(r) \frac{\partial u}{\partial r_\alpha} \frac{\partial v}{\partial r_\alpha} + \sum_{\alpha=1}^{2} \vartheta^{(\alpha)} \frac{\partial u}{\partial r_\alpha} v + d(r) q(u) v \right] d\Omega_0 +$$
$$+ \int\limits_S \theta(x)[u][v]\, dS = \int\limits_{\Omega_1 \cup \Omega_2} f(r) v\, d\Omega_0 = l(v). \tag{2.22}$$

Разрешимость задачи (2.1)–(2.3) в смысле определения (2.22) гарантирует следующая теорема.

Теорема 2.1. *При любом $g(r) \in U$ существует единственное обобщенное решение $u(r) = u(r; g) \in \overset{\circ}{V}_{\Gamma_1,\Gamma_2}(\Omega^{(1,2)})$ задачи* (2.1)–(2.3), *определяемое из интегрального тождества* (2.22), *причем*

$$\|u(r; g)\|_{\overset{\circ}{V}_{\Gamma_1,\Gamma_2}} \leqslant C_7 \sum_{k=1}^{2} \big\|f_k(r)\big\|_{L_2(\Omega_k)} = \overline{C}_7, \tag{2.23}$$

где $C_7 = \mathrm{const} > 0$.

Доказательство теоремы 2.1 опирается на теорию монотонных операторов (см. [1, 3, 7, 14]), при этом существенно используются введенные выше гильбертовы пространства $V(\Omega^{(1,2)})$, $\overset{\circ}{V}_{\Gamma_1,\Gamma_2}(\Omega^{(1,2)})$ и введенные в них эквивалентные нормы, а также неравенства (2.17)–(2.19).

При исследовании разностных аппроксимаций задач оптимального управления по состоянию и функционалу сделаем относительно решения прямой задачи предположение (аналогичное предположению, сделанному в [5, с. 16] при исследовании разностных схем для задачи с такими же условиями сопряжения), что решение краевой задачи (2.1)–(2.3) принадлежит пространству $W_2^2(\Omega_1) \times W_2^2(\Omega_2)$, точнее, пространству

$$\overset{\circ}{\hat{V}}_{\Gamma_1,\Gamma_2}(\Omega^{(1,2)}) = \overset{\circ}{V}_{\Gamma_1,\Gamma_2}(\Omega^{(1,2)}) \cap \Big\{ u = (u_1, u_2) \in W_2^2(\Omega_1) \times W_2^2(\Omega_2) \Big\},$$

и при каждом фиксированном управлении $g \in U$ справедлива оценка

$$\sum_{k=1}^{2} \|u_k(x,g)\|_{W_2^2(\Omega_k)} \leqslant M \sum_{k=1}^{2} \|f_k(x)\|_{L_2(\Omega_k)} \quad \forall g \in U, \quad M = \text{const} > 0. \tag{2.24}$$

Рассмотрим теперь задачу оптимального управления (2.12), (2.1)–(2.11). Справедлива следующая теорема о разрешимости экстремальной задачи (2.12), (2.1)–(2.11).

Теорема 2.2. *Существует по крайней мере одно оптимальное управление $g_* \in U$ задачи* (2.12), (2.1)–(2.11), *т.е.*

$$J_* = \inf\{J(g) : g \in U\} > -\infty, \quad U_* = \{g_* \in U : J(g_*) = J_*\} \neq \varnothing.$$

Множество точек минимума U_* функционала цели $J(g)$ в экстремальной задаче (2.12), (2.1)–(2.11) *слабо компактно в $H = L_2(\Omega_1) \times L_2(\Omega_1) \times L_2(\Omega_1) \times L_2(\Omega_2)$. Любая минимизирующая последовательность $\{g^{(n)}\}_{n=1}^{\infty} \subset U$ функционала $J(g)$ слабо сходится в H к множеству U_*.*

Доказательство. Нетрудно видеть, что множество U является выпуклым, замкнутым и ограниченным в H, а следовательно, U слабо компактно в H. Дальнейшее доказательство утверждений теоремы 2.2 будет опираться на следующее свойство отображения $g \to u(r,g)$.

Лемма 2.1. *Пусть U — множество допустимых управлений в экстремальной задаче* (2.12), (2.1)–(2.11). *Далее, пусть $\{g^{(n)}\}_{n=1}^{\infty} \subset U$ — произвольная последовательность, а $u^{(n)} \equiv u(r,g^{(n)})$ — решение задачи* (2.1)–(2.3) *при $g = g^{(n)}$. Тогда из условия*

$$g^{(n)} \to \overline{g} \quad \textit{слабо в } H$$

следует, что

$$u^{(n)}(r) = u(r,g^{(n)}) \to u(r,\overline{g}) = \overline{u}(r) \quad \textit{слабо в } W_2^2(\Omega_1) \times W_2^2(\Omega_2),$$

где $\overline{u}(r) = u(r,\overline{g})$ — решение задачи (2.1)–(2.3) *при $g = \overline{g}$, т.е. отображение $g \to u(r,g)$ является слабо непрерывным из U в $W_2^2(\Omega_1) \times W_2^2(\Omega_2)$, переводящим слабую сходимость в пространстве управлений $H = L_2(\Omega_1) \times L_2(\Omega_1) \times L_2(\Omega_1) \times L_2(\Omega_2)$ на множестве U в слабую сходимость в пространстве состояний $W_2^2(\Omega_1) \times W_2^2(\Omega_2)$.*

Следствие 2.1. *Отображение $g \to u(r,g)$ является усиленно непрерывным из U в $\overset{\circ}{V}_{\Gamma_1,\Gamma_2}$ в том смысле, что оно переводит слабую сходимость в H на множестве U в сильную сходимость в $\overset{\circ}{V}_{\Gamma_1,\Gamma_2}$.*

Доказательство леммы 2.1 и следствия 2.1 проводится по методике из [10, 11].

Продолжим доказательство теоремы 2.2. Рассмотрим целевой функционал $g \to J(g)$, определенный формулой (2.12). В силу следствия 2.1 из условия

$$g^{(n)} \to \overline{g} \quad \text{слабо в } H,$$

следует, что $J(g^{(n)}) \xrightarrow[n\to\infty]{} J(\overline{g})$, т.е. функционал $g \to J(g)$ является слабо непрерывным в H на множестве U, а следовательно, и слабо полунепрерывным снизу на U. Кроме того, как было отмечено выше, множество U является слабо компактным в H. Отсюда, применяя [2, теорема 4, с. 505], получаем все утверждения теоремы 2.2. □

3. Разностная аппроксимация задач управления. Корректность аппроксимаций

В связи с численным решением задач оптимального управления существенный интерес представляет вопрос об аппроксимации бесконечномерных задач оптимизации (2.12), (2.1)–(2.11) последовательностью конечномерных задач оптимального управления. Ниже построим и изучим аппроксимации задач на основе метода сеток (см. [11, 15–17]) и исследуем сходимость этих аппроксимаций при неограниченном измельчении шага h сетки дискретизации. Для аппроксимации задач оптимизации (2.12), (2.1)–(2.11) нам понадобятся некоторые сетки на $[0,l_\alpha]$, $\alpha=1,2$, и в $\overline{\Omega}$. Введем в рассмотрение одномерные неравномерные сетки по x_1 и x_2:

$$\hat{\omega}_\alpha=\Big\{x_\alpha^{(i_\alpha)}\in[0,l_\alpha]:\ i_\alpha=\overline{0,N_\alpha},\ x_\alpha^{(0)}=0,\ x_\alpha^{(N_\alpha)}=l_\alpha,\ h_{\alpha i_\alpha}=x_\alpha^{(i_\alpha)}-x_\alpha^{(i_\alpha-1)}\Big\},\quad \alpha=1,2,$$

а также введем неравномерную сетку по x_1 и x_2 в области $\overline{\Omega}=\overline{\Omega}_1\cup\overline{\Omega}_2$: $\hat{\omega}=\hat{\omega}_1\times\hat{\omega}_2$. Очевидно, всегда можно построить сетку $\hat{\omega}_1$ на $[0,l_1]$ так, чтобы точка $x_1=\xi$ была ее узлом. При решении практических задач целесообразно выбирать в областях $\overline{\Omega}_1$ и $\overline{\Omega}_2$ равномерные шаги $h_1^{(1)}$ и $h_1^{(2)}$ соответственно, и исходя из положения точки $x_1=\xi$ число узлов находить из предположения $h_1^{(1)}\approx h_1^{(2)}$. Обоснования разностных схем на неравномерных сетках для данной экстремальной задачи (2.12), (2.1)–(2.11) не носят принципиального характера, и в дальнейшем для наглядности исследования во всей области $\overline{\Omega}$ сетку по x_1 и x_2 будем считать равномерной, полагая

$$x_1^{(i_1)}-x_1^{(i_1-1)}=h_1,\quad i_1=\overline{1,N_1},\qquad x_2^{(i_2)}-x_2^{(i_2-1)}=h_2,\quad i_2=\overline{1,N_2}.$$

Значение x_1 в точке $x_1=\xi$ обозначим через x_ξ, а соответствующий номер узла обозначим через $N_{1\xi}$, $1<N_{1\xi}<N_1-1$.

Введем сетки узлов:

$$\begin{gathered}
\bar{\omega}_1^{(1)}=\Big\{x_1^{(i_1)}=i_1h_1\in[0,\xi]:\ i_1=\overline{0,N_{1\xi}},\ N_{1\xi}h_1=\xi\Big\},\\
\bar{\omega}_1^{(2)}=\Big\{x_1^{(i_1)}=i_1h_1\in[\xi,l_1]:\ i_1=\overline{N_{1\xi,N_1}},\ N_1h_1=l_1\Big\},\\
\omega_1^{(1)}=\bar{\omega}_1^{(1)}\setminus\{x_1=0,\ x_1=\xi\},\quad \omega_1^{(2)}=\bar{\omega}_1^{(2)}\setminus\{x_1=\xi,\ x_1=l_1\};\\
\bar{\omega}_2=\Big\{x_2^{(i_2)}=i_2h_2\in[0,l_2]:\ i_2=\overline{0,N_2},\ N_2h_2=l_2\Big\},\\
\omega_2=\bar{\omega}_2\setminus\{x_2=0,\ x_2=l_2\};\quad \bar{\omega}_1=\bar{\omega}_1^{(1)}\cup\bar{\omega}_1^{(2)};\quad \omega_1=\omega_1^{(1)}\cup\omega_1^{(2)};\\
\bar{\omega}^{(1)}=\bar{\omega}_1^{(1)}\times\bar{\omega}_2;\quad \bar{\omega}^{(2)}=\bar{\omega}_1^{(2)}\times\bar{\omega}_2;\quad \omega^{(1)}=\omega_1^{(1)}\times\omega_2;\quad \omega^{(2)}=\omega_1^{(2)}\times\omega_2;
\end{gathered}$$

$$\begin{aligned}
\bar{\omega}\equiv\bar{\omega}^{(1,2)}&=\bar{\omega}^{(1)}\cup\bar{\omega}^{(2)}=(\bar{\omega}_1^{(1)}\cup\bar{\omega}_1^{(2)})\times\bar{\omega}_2\\
&=\Big\{x_1^{(i_1)}=i_1h_1,\ i_1=\overline{0,N_1},\ N_{1/xi}h_1=\xi,\ (N_1-N_{1\xi})h_1=l_1-\xi,\ 1<N_{1\xi}<N_1-1\Big\}\times\bar{\omega}_2,
\end{aligned}$$

$$\begin{gathered}
\omega\equiv\omega^{(1,2)}=\omega^{(1)}\cup\omega^{(2)},\quad \omega_1^{(1)+}=\bar{\omega}_1^{(1)}\cap(0,\xi],\quad \omega_1^{(1)-}=\bar{\omega}_1^{(1)}\cap[0,\xi),\\
\omega_1^{(2)-}=\bar{\omega}_1^{(2)}\cap[\xi,l_1),\quad \omega^{(1)+}=\omega_1^{(1)+}\times\bar{\omega}_2;\\
\gamma_\xi=\Big\{x_1=\xi,\ x_2=h_2,\ 2h_2,\ \ldots,\ (N_2-1)h_2\Big\}=\Big\{x_1=\xi,\ x_2^{(i_2)}=i_2h_2,\ i_2=\overline{1,N_2-1}\Big\};\\
\gamma^{(k)}=\partial\omega^{(k)}\backslash\gamma_S;\quad \omega_1^{(1)+}\times\omega_2=\omega^{(1)}\cup\gamma_S=\bar{\omega}^{(1)}\backslash\gamma^{(1)};
\end{gathered}$$

$\partial\omega^{(k)}=\bar{\omega}^{(k)}\backslash\omega^{(k)}$ — множество граничных узлов сетки $\bar{\omega}^{(k)}$, $k=1,2$. При исследовании сходимости разностных аппроксимаций нам потребуются скалярные произведения, нормы и полунормы сеточных функций, заданных на различных сетках. Множество сеточных функций $y_k(x)$, $x\in\bar{\omega}^{(k)}\subset\bar{\Omega}_k$, $k=1,2$, снабженное скалярным произведением и нормой

$$(y_k,v_k)_{L_2(\bar{\omega}^{(k)})}=\sum_{\bar{\omega}^{(k)}}y_k(x)v_k(x)\hbar_1\hbar_2,\quad \|y_k\|_{L_2(\bar{\omega}^{(k)}))}=(y_k,y_k)^{1/2}_{L_2(\bar{\omega}^{(k)})},$$

обозначим через $L_2(\bar{\omega}^{(k)})$, $k=1,2$. Здесь $\hbar_1=\hbar_1(x)$ — средний шаг сеток $\bar{\omega}_1^{(1)}$ и $\bar{\omega}_1^{(2)}$, $\hbar_2=\hbar_2(x)$ — средний шаг сетки $\bar{\omega}_2$ (см. [6]. Через $W_2^1(\bar{\omega}^{(1)})$ и $W_2^1(\bar{\omega}^{(2)})$ обозначим пространства сеточных функций, заданных на сетках $\bar\omega^{(1)}$ и $\bar\omega^{(2)}$ со следующими скалярными произведениями и нормами:

$$(y_k, v_k)_{W_2^1(\bar\omega^{(k)})} = \sum_{\omega_1^{(k)+}\times\bar\omega_2} y_{k\bar x_1} v_{k\bar x_1} h_1 \hbar_2 + \sum_{\bar\omega_1^{(k)}\times\omega_2^+} y_{k\bar x_2} v_{k\bar x_2} \hbar_1 h_2 + (y_k, v_k)_{L_2(\bar\omega^{(k)})},$$

$$\|y\|^2_{W_2^1(\bar\omega^{(k)})} = \|\nabla y_k\|^2 + \|y_k\|^2_{L_2(\bar\omega^{(k)})},$$

$$\|\nabla y_k\|^2 = \sum_{\omega_1^{(k)+}\times\bar\omega_2} y^2_{k\bar x_1} h_1 \hbar_2 + \sum_{\bar\omega_1^{(k)+}\times\bar\omega_2^+} y^2_{k\bar x_2} \hbar_1 h_2, \quad k = 1, 2.$$

Рассмотрим пространство $V_h \equiv V_h(\bar\omega^{(1,2)})$ пар сеточных функций $y(x) = (y_1(x), y_2(x))$, определяемое соотношением

$$V_h \equiv V_h(\bar\omega^{(1,2)}) = \Big\{ y(x) = (y_1(x), y_2(x)) \in W_2^1(\bar\omega^{(1)}) \times W_2^1(\bar\omega^{(2)}) \Big\},$$

снабженное скалярным произведением и нормой

$$(y_k, v_k)_{V_h(\bar\omega^{(1,2)})} = \sum_{k=1}^{2} (y_k, v_k)_{W_2^1(\bar\omega^{(k)})}, \quad \|y_k\|_{V_h(\bar\omega^{(1,2)})} = \sum_{k=1}^{2} \|y_k\|^2_{W_2^1(\bar\omega^{(k)})};$$

$V_h(\bar\omega^{(1,2)})$ является гильбертовым пространством.

Пусть $\gamma^{(k)} = \partial\omega^{(k)} \setminus \gamma_S$ — подмножество граничных узлов $\partial\omega^{(k)}$ сетки $\bar\omega^{(k)} \subset \bar\Omega_k$, $k = 1, 2$. Через $L_2(\bar\omega^{(k)}; \gamma^{(k)})$ обозначим подпространства пространства $L_2(\bar\omega^{(k)})$ сеточных функций, обращающихся в нуль на $\gamma^{(k)}$, $k = 1, 2$, с нормами

$$\|y_k\|^2_{L_2(\bar\omega^{(k)};\gamma^{(k)})} = \sum_{x\in\omega^{(k)}} y_k^2(x) h_1 h_2 + \frac{1}{2} \sum_{x\in\gamma_S} y_k^2(x) h_1 h_2, \quad k = 1, 2,$$

индуцированными скалярными произведениями

$$(y_k, v_k)_{L_2(\bar\omega^{(k)};\gamma^{(k)})} = \sum_{x\in\omega^{(k)}} y_k(x) v_k(x) h_1 h_2 + \frac{1}{2} \sum_{x\in\gamma_S} y_k(x) v_k(x) h_1 h_2, \quad k = 1, 2.$$

Через $W_2^1(\bar\omega^{(k)}; \gamma^{(k)})$ обозначим подпространствj пространства сеточных функций $W_2^1(\bar\omega^{(k)})$, обращающихся в нуль на $\gamma^{(k)}$, $k = 1, 2$.

Введем в рассмотрение пространства $\overset{\circ}{H}_{\gamma^{(1)},\gamma^{(2)}}(\bar\omega^{(1,2)})$ и $\overset{\circ}{V}_{\gamma^{(1)},\gamma^{(2)}}(\bar\omega^{(1,2)})$ пар $y(x) = (y_1(x), y_2(x))$:

$$\overset{\circ}{H}_{\gamma^{(1)},\gamma^{(2)}}(\bar\omega^{(1,2)}) = \Big\{ y = (y_1(x), y_2(x)) \in L_2(\bar\omega^{(1)}; \gamma^{(1)}) \times L_2(\bar\omega^{(2)}; \gamma^{(2)}) \Big\},$$

$$\overset{\circ}{V}_{\gamma^{(1)},\gamma^{(2)}}(\bar\omega^{(1,2)}) = \Big\{ y = (y_1(x), y_2(x)) \in W_2^1(\bar\omega^{(1)}; \gamma^{(1)}) \times W_2^1(\bar\omega^{(2)}; \gamma^{(2)}) \Big\},$$

$$\|y\|^2_{\overset{\circ}{H}_{\gamma^{(1)},\gamma^{(2)}}} = \sum_{k=1}^{2} \|y_k\|^2_{L_2(\bar\omega^{(k)};\gamma^{(k)})}, \quad \|y\|^2_{\overset{\circ}{V}_{\gamma^{(1)},\gamma^{(2)}}} = \sum_{k=1}^{2} \|\nabla y_k\|^2 + \|[y]\|^2_{L_2(\gamma_S)}.$$

Задачам оптимального управления (2.12), (2.1)–(2.11) поставим в соответствие следующие разностные аппроксимации: минимизировать сеточный функционал

$$J_h(\Phi_h) = \sum_{x\in\bar\omega^{(1)}} \Big| y(x; \Phi_h) - u_{0h}^{(1)} \Big|^2 \hbar_1 \hbar_2 = \Big\| y(x; \Phi_h) - u_{0h}^{(1)} \Big\|^2_{L_2(\bar\omega^{(1)})}, \tag{3.1}$$

при условиях, что сеточная функция

$$y(x) \equiv y(x, \Phi_h) = \Big(y_1(x, \Phi_h), y_2(x, \Phi_h) \Big) \in \overset{\circ}{V}_{\gamma^{(1)},\gamma^{(2)}}(\bar\omega^{(1,2)}),$$

называемая решением разностной краевой задачи (разностной схемой) для задачи (2.1)–(2.3), удовлетворяет для любой сеточной функции

$$v(x) = (v_1(x), v_2(x)) \in \overset{\circ}{V}_{\gamma^{(1)},\gamma^{(2)}}(\bar\omega^{(1,2)})$$

сумматорному тождеству

$$Q_h(y,v)=\Big\{\sum_{\omega_1^{(1)+}}\sum_{\omega_2}a_{1h}^{(1)}y_{1\bar x_1}v_{1\bar x_1}h_1h_2+\Big(\sum_{\omega_1^{(1)}}\sum_{\omega_2^+}a_{2h}^{(1)}y_{1\bar x_2}v_{1\bar x_2}h_1h_2+$$
$$+\frac12\sum_{\omega_2^+}a_{2h}^{(1)}(\xi,x_2)y_{1\bar x_2}(\xi,x_2)v_{1\bar x_2}(\xi,x_2)h_1h_2\Big)\Big\}+\Big\{\sum_{\omega_1^{(2)+}}\sum_{\omega_2}a_{2h}^{(2)}y_{2\bar x_1}v_{2\bar x_1}h_1h_2+$$
$$+\Big(\sum_{\omega_1^{(2)}}\sum_{\omega_2^+}a_{2h}^{(2)}y_{2\bar x_2}v_{2\bar x_2}h_1h_2+\frac12\sum_{\omega_2^+}a_{2h}^{(2)}(\xi,x_2)y_{2\bar x_2}(\xi,x_2)v_{2\bar x_2}(\xi,x_2)h_1h_2\Big)\Big\}+$$
$$+\sum_{\omega^{(1)}}\sum_{\alpha=1}^{2}\Phi_{\alpha h}(x)y_{1\overset{0}{x}_\alpha}(x)v_1(x)h_1h_2+\frac12\sum_{\omega_2}\sum_{\alpha=1}^{2}\Phi_{\alpha h}(\xi,x_2)y_{1\overset{0}{x}_\alpha}(\xi,x_2)v_1(\xi,x_2)h_1h_2+$$
$$+\sum_{\omega^{(2)}}\sum_{\alpha=1}^{2}\vartheta_{2h}^{(\alpha)}(x)y_{2\overset{0}{x}_\alpha}(x)v_2(x)h_1h_2+\frac12\sum_{\omega_2}\sum_{\alpha=1}^{2}\vartheta_{2h}^{(\alpha)}(\xi,x_2)y_{2\overset{0}{x}_\alpha}(\xi,x_2)v_2(\xi,x_2)h_1h_2+$$
$$+\Big\{\Big(\sum_{\omega^{(1)}}d_{1h}(x)q_1(y_1(x))v_1(x)h_1h_2+\frac12\sum_{\omega_2}d_{1h}(\xi,x_2)q_1(y_1(\xi,x_2))v_1(\xi,x_2)h_1h_2\Big)+$$
$$+\Big(\sum_{\omega^{(2)}}d_{2h}(x)q_2(y_2(x))v_2(x)h_1h_2+\frac12\sum_{\omega_2}d_{2h}(\xi,x_2)q_2(y_2(\xi,x_2))v_2(\xi,x_2)h_1h_2\Big)\Big\}+$$
$$+\sum_{\omega_2}\theta_h(x_2)[y(\xi,x_2)]\,[v(\xi,x_2)]\,h_2=\Big(\sum_{\omega^{(1)}}\Phi_{3h}(x)v_1(x)h_1h_2+\frac12\sum_{\omega_2}\Phi_{3h}(\xi,x_2)v_1(\xi,x_2)h_1h_2\Big)+$$
$$+\Big(\sum_{\omega^{(2)}}\Phi_{4h}(x)v_2(x)h_1h_2+\frac12\sum_{\omega_2}\Phi_{4h}(\xi,x_2)v_1(\xi,x_2)h_1h_2\Big)=l_h(v),\quad(3.2)$$

а сеточные управления $\Phi_h(x)$ принадлежат множеству допустимых сеточных управлений

$$U_h=\prod_{k=1}^{4}U_{kh}\subset L_\infty(\bar\omega^{(1)})\times L_\infty(\bar\omega^{(1)})\times L_2(\omega^{(1)}\cup\gamma_S)\times L_2(\omega^{(2)}\cup\gamma_S)=B_h\qquad(3.3)$$

и состоят из четверок

$$\Phi_h(x)=\begin{cases}\Phi_{1h}(x), & x\in\bar\omega^{(1)},\\ \Phi_{2h}(x), & x\in\bar\omega^{(1)},\\ \Phi_{3h}(x), & x\in\omega^{(1)}\cup\gamma_S,\\ \Phi_{4h}(x), & x\in\omega^{(2)}\cup\gamma_S,\end{cases}\qquad(3.4)$$

где

$$\Phi_{ph}(x)\in U_{ph}=BB\{\Phi_{ph}(x)\in L_\infty(\bar\omega^{(1)})=B_{ph}:\ \zeta_p\leqslant\Phi_{ph}(x)\leqslant\bar\zeta_p,\ x\in\bar\omega^{(1)},\Big\},\quad p=1,2,\qquad(3.5)$$

и

$$\Phi_{\beta h}(x)\in U_{\beta h}=\Big\{\Phi_{\beta h}(x)\in L_2(\omega^{(\beta-2)}\cup\gamma_S)=H_{ph}:$$
$$g_\beta\leqslant\Phi_{\beta h}(x)\leqslant\overline{g}_\beta,\ x\in\omega^{(\beta-2)}\cup\gamma_S\Big\},\quad\beta=3,4.\qquad(3.6)$$

Здесь $\vartheta_{2h}^{(\alpha)}(x)$, $d_{\alpha h}(x)$, $\alpha=1,2$, $\theta_h(x_2)$, $f_{\alpha h}(x)$, $\alpha=1,2$, $u_{0h}^{(1)}(x)$ — сеточные аппроксимации функций $\vartheta_2^{(\alpha)}(r)$, $d_\alpha(r)$, $\alpha=1,2$, $\theta(r_2)$, $u_0^{(1)}(r)$, определяемые через усреднения по Стеклову:

$$a_{1h}^{(\alpha)}(x_1,x_2)=\frac{1}{h_2}\int\limits_{e_2(x_2)}k_\alpha\left(x_1-\frac{h_1}{2},r_2\right)dr_2,\quad x\in\omega_1^{(\alpha)+}\times\omega_2,\quad\alpha=1,2;$$

$$a_{2h}^{(\alpha)}(x_1,x_2)=\frac{1}{h_1}\int\limits_{e_1^{(\alpha)}(x_1)} k_\alpha\left(r_1,x_2-\frac{h_2}{2}\right)dr_1,\quad x\in\omega_1^{(\alpha)+}\times\omega_2^+,\quad \alpha=1,2;$$

$$a_{2h}^{(1)}(\xi,x_2)=\frac{2}{h_1}\int\limits_{\xi-h_1/2}^{\xi} k_1\left(r_1,x_2-\frac{h_2}{2}\right)dr_1,\quad x_2\in\omega_2^+;$$

$$a_{2h}^{(2)}(\xi,x_2)=\frac{2}{h_1}\int\limits_{\xi}^{\xi+h_1/2} k_2\left(r_1,x_2-\frac{h_2}{2}\right)dr_1,\quad x_2\in\omega_2^+;$$

$$\vartheta_{2h}^{(\alpha)}(x)=\frac{1}{h_1h_2}\iint\limits_{e_2(x)}\vartheta_2^{(\alpha)}(r_1,r_2)\,dr_1dr_2,\quad x\in\omega^{(2)};$$

$$\vartheta_{2h}^{(\alpha)}(\xi,x_2)=\frac{2}{h_1h_2}\int\limits_{\xi}^{\xi+h_1/2}\int\limits_{e_2(x_2)}\vartheta_2^{(\alpha)}(r_1,r_2)\,dr_1dr_2, x_2\in\omega_2,$$

$$d_{\alpha h}(x)=\frac{1}{h_1h_2}\iint\limits_{e^{(\alpha)}(x)} d_\alpha(r_1,r_2)\,dr_1dr_2,\quad x\in\omega^{(\alpha)},\alpha=1,2;$$

$$d_{1h}(\xi,x_2)=\frac{2}{h_1h_2}\int\limits_{\xi-h_1/2}^{\xi}\int\limits_{e_2(x_2)} d_1(r_1,r_2)\,dr_1dr_2, x_2\in\omega_2,$$

$$d_{2h}(\xi,x_2)=\frac{2}{h_1h_2}\int\limits_{\xi}^{\xi+h_1/2}\int\limits_{e_2(x_2)} d_2(r_1,r_2)\,dr_1dr_2, x_2\in\omega_2,$$

$$\theta_h(x_2)=\frac{1}{h_2}\int\limits_{e_2(x_2)}\theta(r_2)\,dr_2, x_2\in\omega_2;\quad u_{0h}^{(1)}(x)=\frac{1}{\hbar_1\hbar_2}\iint\limits_{e^{(1)}(x)} u_0^{(1)}(r_1,r_2)\,dr_1dr_2,\quad x\in\bar\omega^{(1)},$$

где усреднения берутся по элементарным ячейкам (см. [11]). Справедлива следующая теорема.

Теорема 3.1. *Задача о нахождении решения разностной схемы* (3.2) *при любом фиксированном управлении* $\Phi_h\in U_h$ *однозначно разрешима, причем справедлива априорная оценка*

$$\|y(x;\Phi_h)\|_{\overset{\circ}{V}_{\gamma^{(1)},\gamma^{(2)}}(\overline{\omega}^{(1,2)})}\leqslant M\sum_{k=3}^{4}\|\Phi_{kh}(x)\|_{L_2(\omega^{(k)}\cup\gamma_S)}=\hat M\quad\forall\Phi_h\in U_h,\tag{3.7}$$

где $M=\mathrm{const}>0$.

Доказательство. Используя ограничения на входные данные краевой задачи (2.1)–(2.3), неравенства Коши—Буняковского и Гельдера и разностные аналоги теорем вложения, можно убедиться, что форма $Q_h(y,v)$ и $l_h(v)$ для любого фиксированного $y\in\overset{\circ}{V}_{\gamma^{(1)}\gamma^{(2)}}(\overline{\omega}^{(1,2)})$ и для любых $\Phi_h\in U_h$ определяют линейные ограниченные функционалы в пространстве сеточных функций $\overset{\circ}{V}_{\gamma^{(1)}\gamma^{(2)}}(\overline{\omega}^{(1,2)})$ и, следовательно, однозначно представимы в виде

$$\big(A_hy,v\big)_{\overset{\circ}{V}_{\gamma^{(1)}\gamma^{(2)}}(\overline{\omega}^{(1,2)})}=Q_h(y,v),\quad \big(F_h,v\big)_{\overset{\circ}{V}_{\gamma^{(1)}\gamma^{(2)}}(\overline{\omega}^{(1,2)})}=l_h(v)\quad\forall y,v\in\overset{\circ}{V}_{\gamma^{(1)}\gamma^{(2)}}.$$

Отсюда и из (3.2) в силу произвольности v получим, что сумматорное тождество (2.12) определяет операторное уравнение $A_hy=F_h$ — разностную схему. Кроме того, можно убедиться, что оператор A_h разностной схемы (3.2) сохраняет основные свойства дифференциального оператора исходной задачи (2.1)–(2.3) — сильную монотонность и липшиц-непрерывность. Следовательно, условия теоремы Браудера (см. [1]) выполнены, а значит, уравнение $A_h y = F_h$ однозначно разрешимо. Оценка (3.7) следует из коэрцитивности оператора A_h. Теорема доказана. □

Выпишем явный вид разностной схемы (3.2) в узлах сетки $\overline{\omega} = \overline{\omega}_1 \cup \overline{\omega}_2 = \overline{\omega}^{(1,2)}$. Требуется найти функцию $y = (y_1, y_2)$, определенную на $\overline{\omega} = \overline{\omega}_1 \cup \overline{\omega}_2 = \overline{\omega}^{(1,2)}$, $y(x) = y_1(x)$ для $x \in \overline{\omega}^{(1)}$, $y(x) = y_2(x)$ для $x \in \overline{\omega}^{(2)}$, где компоненты $y_1(x)$ и $y_2(x)$ удовлетворяют следующим условиям:

1) сеточная функция y_1 удовлетворяет в $\omega^{(1)}$ уравнению

$$L_{1h} y_1(x) = -\Big(a_{1h}^{(1)} y_{1\bar{x}_1}\Big)_{x_1} - \Big(a_{2h}^{(1)} y_{1\bar{x}_2}\Big)_{x_2} + \\ + \sum_{\alpha=1}^{2} \Phi_{\alpha,h}(x) y_{1\overset{0}{x}_\alpha}(x) + d_{1h}(x) q_1(y_1) = \Phi_{3h}(x), \quad x \in \omega^{(1)}, \quad (3.8)$$

а на границе $\gamma^{(1)} = \partial\omega^{(1)} \setminus \gamma_S$ — условию $y_1(x) = 0$, $x \in \gamma^{(1)}$;

2) сеточная функция y_2 удовлетворяет в $\omega^{(2)}$ уравнению

$$L_{2h} y_2(x) = -\Big(a_{1h}^{(2)} y_{2\bar{x}_1}\Big)_{x_1} - \Big(a_{2h}^{(2)} y_{2\bar{x}_2}\Big)_{x_2} + \sum_{\alpha=1}^{2} \vartheta_{2h}^{(\alpha)}(x) y_{2\overset{0}{x}_\alpha}(x) + d_{2h}(x) q_2(y_2) = \Phi_{4h}(x), \quad x \in \omega^{(2)}, \quad (3.9)$$

а на границе $\gamma^{(2)} = \partial\omega^{(2)} \setminus \gamma_S$ — условию $y_2(x) = 0$, $x \in \gamma^{(2)}$;

3) искомые функции y_1 и y_2 связаны дополнительными условиями на $\gamma_S = \{x_1 = \xi,\ x_2 \in \omega_2\}$:

$$\tilde{L}_{1h} y_1(x) = \frac{2}{h_1}\Big[a_{1h}^{(1)}(\xi_1, x_2) y_{1\bar{x}_1}(\xi_1, x_2) + \theta_h(x_2) y_1(\xi, x_2)\Big] + \sum_{\alpha=1}^{2} \Phi_{\alpha,h}(\xi, x_2) y_{1\overset{0}{x}_\alpha}(\xi, x_2) - \\ - \Big(a_{2h}^{(1)}(\xi, x_2) y_{1\bar{x}_2}(\xi, x_2)\Big)_{x_2} + d_{1h}(\xi, x_2) q_1(y_1(\xi, x_2)) = \Phi_{3h}(\xi, x_2) + \frac{2}{h_1}\theta_h(x_2) y_2(\xi, x_2), \quad (3.10)$$

$$\tilde{L}_{2h} y_2(x) = -\frac{2}{h_1}\Big[a_{1h}^{(2)}(\xi_1 + h_1, x_2) y_{2x_1}(\xi, x_2) - \theta_h(x_2) y_2(\xi, x_2)\Big] + \sum_{\alpha=1}^{2} \vartheta_{2h}^{(\alpha)}(\xi, x_2) y_{2\overset{0}{x}_\alpha}(\xi, x_2) - \\ - \Big(a_{2h}^{(2)}(\xi, x_2) y_{2\bar{x}_2}(\xi, x_2)\Big)_{x_2} + d_{2h}(\xi, x_2) q_2(y_2(\xi, x_2)) = \Phi_{4h}(\xi, x_2) + \frac{2}{h_1}\theta_h(x_2) y_1(\xi, x_2), \quad x \in \gamma_S. \quad (3.11)$$

Теорема 3.2. *Для каждого $h > 0$ существует по крайне мере одно оптимальное управление $\Phi_{h*} \in U_h$ в последовательности сеточных (разностных) экстремальных задач* (3.1)–(3.6), *т.е.*

$$J_{h*} = \inf\Big\{J_h(\Phi_h) :\ \Phi_h \in U_h\Big\} > -\infty, \quad U_{h*} = \Big\{\Phi_{h*} \in U_h :\ J_h(\Phi_{h*}) = J_{h*}\Big\} \neq \varnothing.$$

4. Априорные оценки погрешности и скорости сходимости сеточных экстремальных задач по состоянию

Установим связь между решением $u(r; g)$ прямой задачи (2.1)–(2.3) с разрывными коэффициентами и решением $y(x, \Phi_h) = (y_1(x, \Phi_h), y_2(x, \Phi_h))$ аппроксимирующей ее разностной задачи состояния (3.2) при $h \to 0$ для любых фиксированных управлений $g \in U$ и $\Phi_h \in U_h$, где U и U_h — множества допустимых управлений в задачах оптимального управления (2.12), (2.1)–(2.11) и (3.1)-=(3.6) соответственно.

Справедлива следующая теорема о точности аппроксимаций по состоянию.

Теорема 4.1. *Пусть $g \in U$ и $\Phi_h \in U_h$ — произвольные управления, а $u(r; g)$ и $y(x, \Phi_h)$ — соответствующие им решения задач состояния в экстремальных задачах* (2.12), (2.1)–(2.11) *и*

(3.1)–(3.6). *Тогда для любых $h > 0$ справедлива следующая оценка скорости сходимости метода сеток по состоянию для экстремальной задачи* (2.12), (2.1)–(2.11):

$$\begin{aligned}
&\Big\| y(x,\Phi_h) - u(x;g)\Big\|_{\overset{\circ}{V}_{\gamma^{(1)},\gamma^{(2)}}(\bar{\omega}^{(1,2)})} \leqslant \\
&\leqslant C\Big\{|h|\Big[\sum_{\alpha=1}^{2}\Big(\|k_\alpha\|_{L_\infty(\Omega_\alpha)} + N_q\|d_\alpha\|_{L_\infty(\Omega_\alpha)} + \\
&\qquad + \sum_{\beta=1}^{2}\big\|\vartheta_\alpha^{(\beta)}\big\|_{L_\infty(\Omega_\alpha)}\Big)\|u_\alpha\|_{W_2^2(\Omega_\alpha)} + \|\theta\|_{L_\infty(0,l_\alpha)}\sum_{\alpha=1}^{2}\|u_\alpha\|_{W_2^2(\Omega_\alpha)}\Big] + \\
&+ \sum_{\alpha=1}^{2}\Bigg(\Big\|\Phi_{\alpha,h}(\xi,r_2) - \frac{2}{h_1h_2}\int\limits_{\xi-h_1/2}^{\xi}\int\limits_{e_2(x_2)}\vartheta_1^{(\alpha)}(r)\,dr\Big\|_{L_\infty(\omega_2)} + \\
&\qquad + \Big\|\Phi_{\alpha,h}(r) - \frac{1}{h_1h_2}\int\limits_{e^1(x)}\vartheta_1^{(\alpha)}(r)\,dr\Big\|_{L_\infty(\omega^{(1)})}\Bigg)\|u_1\|_{W_2^2(\Omega_1)} + \\
&\qquad + \sum_{\alpha=1}^{2}\Big\|S^x f_{\alpha h}(x) - \Phi_{\alpha+2,h}\Big\|_{L_2(\omega^{(\alpha)}\cup\gamma_S)}\Big\}. \qquad (4.1)
\end{aligned}$$

Доказательство. Пользуясь разностными формулами суммирования по частям, формулой Грина, используя идеи работ [2,11,12], приведем погрешность аппроксимации $\psi_h(x)$, к специальному виду:

$$\begin{aligned}
(\psi_h, v)_{\overset{\circ}{V}_{\gamma^1\gamma^2}(\overline{\omega}^{(1,2)})} &= -\sum_{\alpha=1}^{2}\sum_{\omega_1^{(\alpha)+}}\sum_{\omega_2}\eta_1^{(\alpha)}(x)v_{\alpha\overline{x}_1}h_1h_2 - \sum_{\alpha=1}^{2}\sum_{\omega_1^{(\alpha)}}\sum_{\omega_2^+}\eta_2^{(\alpha)}(x)v_{\alpha\overline{x}_2}h_1h_2 - \\
&- \frac{1}{2}\sum_{\omega_2^+}\eta_2^{(1)}(\xi,x_2)v_{1\overline{x}_2}(\xi,x_2)h_1h_2 - \frac{1}{2}\sum_{\omega_2^+}\eta_2^{(2)}(\xi,x_2)v_{2\overline{x}_2}(\xi,x_2)h_1h_2 + \\
&+ \sum_{\alpha=1}^{2}\sum_{\omega^{(\alpha)}}\eta_3^{(\alpha)}(x)v_\alpha(x)h_1h_2 + \frac{1}{2}\sum_{\omega_2}\eta_3^{(1)}(\xi,x_2)v_1(\xi,x_2)h_1h_2 + \\
&+ \frac{1}{2}\sum_{\omega_2}\eta_3^{(2)}(\xi,x_2)v_2(\xi,x_2)h_1h_2 - \sum_{\omega_2}\eta_4(x_2)[v(\xi,x_2)]\cdot h_2 + \\
&+ \sum_{\alpha=1}^{2}\sum_{\omega^{(\alpha)}}\eta_5^{(\alpha)}(x)v_\alpha(x)h_1h_2 + \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{2}\sum_{\omega_2}\eta_5^{(\alpha)}(\xi,x_2)v_\alpha(\xi,x_2)h_1h_2 + \\
&+ \sum_{\alpha=1}^{2}\sum_{\omega^{(\alpha)}}\eta_6^{(\alpha)}(x)v_\alpha(x)h_1h_2 + \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{2}\sum_{\omega_2}\eta_6^{(\alpha)}(\xi,x_2)v_\alpha(\xi,x_2)h_1h_2, \qquad (4.2)
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
\eta_1^{(\alpha)}(x) &= a_{1h}^{(\alpha)}(x)u_{\alpha\overline{x}_1}(x) - \\
&- \frac{1}{h_2}\int\limits_{e_2(x_2)} k_\alpha\Big(x_1 - \frac{h_1}{2}, r_2\Big)\frac{\partial u_\alpha\Big(x_1 - \frac{h_1}{2}, r_2\Big)}{\partial r_1}dr_2, \quad x \in \omega_1^{(\alpha)+}\times\omega_2, \quad \alpha = 1,2; \quad (4.3.1)
\end{aligned}$$

$$\eta_2^{(\alpha)}(x) = a_{2h}^{(\alpha)}(x) u_{\alpha\overline{x}_2}(x) - \\ - \frac{1}{h_1} \int\limits_{e_1^{(\alpha)}(x_1)} k_\alpha\left(r_1, x_2 - \frac{h_2}{2}\right) \frac{\partial u_\alpha\left(r_1, x_2 - \frac{h_2}{2}\right)}{\partial r_2} dr_1, \quad x \in \omega_1^{(\alpha)} \times \omega_2^+, \quad \alpha = 1, 2; \tag{4.3.2}$$

$$\eta_2^{(1)}(\xi, x_2) = a_{2h}^{(1)}(\xi, x_2) u_{1\overline{x}_2}(\xi, x_2) - \\ - \frac{2}{h_1} \int\limits_{\xi - h_1/2}^{\xi} k_1\left(r_1, x_2 - \frac{h_2}{2}\right) \frac{\partial u_1\left(r_1, x_2 - \frac{h_2}{2}\right)}{\partial r_2} dr_1, \quad x_2 \in \omega_2^+; \tag{4.3.3}$$

$$\eta_2^{(2)}(\xi, x_2) = a_{2h}^{(2)}(\xi, x_2) u_{2\overline{x}_2}(\xi, x_2) - \\ - \frac{2}{h_1} \int\limits_{\xi}^{\xi + h_1/2} k_2\left(r_1, x_2 - \frac{h_2}{2}\right) \frac{\partial u_1\left(r_1, x_2 - \frac{h_2}{2}\right)}{\partial r_2} dr_1, \quad x_2 \in \omega_2^+; \tag{4.3.4}$$

$$\eta_3^{(\alpha)}(x) = d_{\alpha h}(x) q_\alpha(u_\alpha(x)) - \frac{1}{h_1 h_2} \iint\limits_{e^{(\alpha)}(x)} d_\alpha(r) q_\alpha(u_\alpha(r)) dr, \quad x \in \omega^{(\alpha)}, \quad \alpha = 1, 2; \tag{4.3.5}$$

$$\eta_3^{(1)}(\xi, x_2) = d_{1h}(\xi, x_2) q_1(u_1(\xi, x_2)) - \frac{2}{h_1 h_2} \int\limits_{\xi - h_1/2}^{\xi} \int\limits_{e_2(x_2)} d_1(r) q_1(u_1(r)) dr, \quad x_2 \in \omega_2; \tag{4.3.6}$$

$$\eta_3^{(2)}(\xi, x_2) = d_{2h}(\xi, x_2) q_2(u_2(\xi, x_2)) - \frac{2}{h_1 h_2} \int\limits_{\xi}^{\xi + h_1/2} \int\limits_{e_2(x_2)} d_2(r) q_2(u_2(r)) dr, \quad x_2 \in \omega_2; \tag{4.3.7}$$

$$\eta_4(x_2) = \theta_h(x_2)\big[u(\xi, x_2)\big] - \frac{2}{h_2} \int\limits_{e_2(x_2)} \theta(r_2)\big[u(\xi, x_2)\big]\, dr_2, \quad x_2 \in \omega_2; \tag{4.3.8}$$

$$\eta_5^{(1)}(x) = \eta_5^{(1)-}(x) + \eta_5^{(1)+}(x) + \widehat{\eta}_5^{(1)-}(x) + \widehat{\eta}_5^{(1)+}(x), \quad x \in \omega^{(1)}; \tag{4.3.9}$$

$$\eta_5^{(1)-}(x) = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^{2} \left[\Phi_{\alpha,h}(x) - \frac{1}{h_1 h_2} \iint\limits_{e^{(1)}(x)} \vartheta_1^{(\alpha)}(r) dr \right] u_{1x_\alpha}(x); \tag{4.3.10}$$

$$\eta_5^{(1)+}(x) = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^{2} \left[\Phi_{\alpha,h}(x) - \frac{1}{h_1 h_2} \iint\limits_{e^{(1)}(x)} \vartheta_1^{(\alpha)}(r) dr \right] u_{1\overline{x}_\alpha}(x); \tag{4.3.11}$$

$$\widehat{\eta}_5^{(1)-}(x) = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^{2} \left[\left(\frac{1}{h_1 h_2} \iint\limits_{e^{(1)}(x)} \vartheta_1^{(\alpha)}(r) dr \right) u_{1x_\alpha}(x) - \frac{1}{h_1 h_2} \iint\limits_{e^{(1)}(x)} \vartheta_1^{(\alpha)}(r) \frac{\partial u_1(r)}{\partial r_\alpha} dr \right]; \tag{4.3.12}$$

$$\widehat{\eta}_5^{(1)+}(x) = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^{2} \left[\left(\frac{1}{h_1 h_2} \iint\limits_{e^{(1)}(x)} \vartheta_1^{(\alpha)}(r) dr \right) u_{1\overline{x}_\alpha}(x) - \frac{1}{h_1 h_2} \iint\limits_{e^{(1)}(x)} \vartheta_1^{(\alpha)}(r) \frac{\partial u_1(r)}{\partial r_\alpha} dr \right]; \tag{4.3.13}$$

$$\eta_5^{(1)}(\xi, x_2) = \eta_5^{(1)-}(\xi, x_2) + \eta_5^{(1)+}(\xi, x_2) + \widehat{\eta}_5^{(1)-}(\xi, x_2) + \widehat{\eta}_5^{(1)+}(\xi, x_2), \quad x_2 \in \omega_2; \tag{4.3.14}$$

$$\eta_5^{(1)-}(\xi,x_2)=\frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{2}\left[\Phi_{\alpha,h}(x)-\frac{2}{h_1h_2}\int\limits_{\xi-h_1/2}^{\xi}\int\limits_{e_2(x_2)}\vartheta_1^{(\alpha)}(r)dr\right]u_{1x_\alpha}(x); \tag{4.3.15}$$

$$\eta_5^{(1)+}(\xi,x_2)=\frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{2}\left[\Phi_{\alpha,h}(x)-\frac{2}{h_1h_2}\int\limits_{\xi-h_1/2}^{\xi}\int\limits_{e_2(x_2)}\vartheta_1^{(\alpha)}(r)dr\right]u_{1\overline{x}_\alpha}(x); \tag{4.3.16}$$

$$\widehat{\eta}_5^{(1)-}(\xi,x_2)=\sum_{\alpha=1}^{2}\left[\left(\frac{1}{h_1h_2}\int\limits_{\xi-h_1/2}^{\xi}\int\limits_{e_2(x_2)}\vartheta_1^{(\alpha)}(r)dr\right)u_{1x_\alpha}(x)-\frac{1}{h_1h_2}\int\limits_{\xi-h_1/2}^{\xi}\int\limits_{e_2(x_2)}\vartheta_1^{(\alpha)}(r)\frac{\partial u_1(r)}{\partial r_\alpha}dr\right]; \tag{4.3.17}$$

$$\widehat{\eta}_5^{(1)+}(\xi,x_2)=\sum_{\alpha=1}^{2}\left[\left(\frac{1}{h_1h_2}\int\limits_{\xi-h_1/2}^{\xi}\int\limits_{e_2(x_2)}\vartheta_1^{(\alpha)}(r)dr\right)u_{1\overline{x}_\alpha}(x)-\frac{1}{h_1h_2}\int\limits_{\xi-h_1/2}^{\xi}\int\limits_{e_2(x_2)}\vartheta_1^{(\alpha)}(r)\frac{\partial u_1(r)}{\partial r_\alpha}dr\right]; \tag{4.3.18}$$

$$\eta_5^{(2)}(x)=\eta_5^{(1)-}(x)+\eta_5^{(1)+}(x),\quad x\in\omega^{(2)}; \tag{4.3.19}$$

$$\eta_5^{(2)-}(x)=\frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{2}\left[\left(\frac{1}{h_1h_2}\iint\limits_{e^{(1)}(x)}\vartheta_2^{(\alpha)}(r)dr\right)u_{2x_\alpha}(x)-\frac{1}{h_1h_2}\iint\limits_{e^{(1)}(x)}\vartheta_2^{(\alpha)}(r)\frac{\partial u_2(r)}{\partial r_\alpha}dr\right]; \tag{4.3.20}$$

$$\eta_5^{(2)+}(x)=\frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{2}\left[\left(\frac{1}{h_1h_2}\iint\limits_{e^{(1)}(x)}\vartheta_2^{(\alpha)}(r)dr\right)u_{2\overline{x}_\alpha}(x)-\frac{1}{h_1h_2}\iint\limits_{e^{(1)}(x)}\vartheta_2^{(\alpha)}(r)\frac{\partial u_2(r)}{\partial r_\alpha}dr\right]; \tag{4.3.21}$$

$$\eta_5^{(2)}(\xi,x_2)=\eta_5^{(1)-}(\xi,x_2)+\eta_5^{(1)+}(\xi,x_2),\quad x_2\in\omega_2; \tag{4.3.22}$$

$$\eta_5^{(2)-}(\xi,x_2)=\frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{2}\left[\vartheta_{2h}^{(\alpha)}(\xi,x_2)\,u_{2x_\alpha}(\xi,x_2)-\frac{2}{h_1h_2}\int\limits_{\xi}^{\xi+h_1/2}\int\limits_{e_2(x_2)}\vartheta_2^{(\alpha)}(r)\frac{\partial u_2(r)}{\partial r_\alpha}dr\right]; \tag{4.3.23}$$

$$\eta_5^{(2)+}(\xi,x_2)=\frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{2}\left[\vartheta_{2h}^{(\alpha)}(\xi,x_2)\,u_{2\overline{x}_\alpha}(\xi,x_2)-\frac{2}{h_1h_2}\int\limits_{\xi}^{\xi+h_1/2}\int\limits_{e_2(x_2)}\vartheta_2^{(\alpha)}(r)\frac{\partial u_2(r)}{\partial r_\alpha}dr\right]; \tag{4.3.24}$$

$$\eta_6^{(\alpha)}(x)=\Phi_{\alpha+2,h}(x)-\frac{1}{h_1h_2}\iint\limits_{e^{(\alpha)}(x)}f_\alpha(r)dr,\quad x\in\omega^{(\alpha)},\alpha=1,2; \tag{4.3.25}$$

$$\eta_6^{(1)}(\xi,x_2)=\Phi_{3h}(\xi,x_2)-\frac{2}{h_1h_2}\int\limits_{\xi-h_1/2}^{\xi}\int\limits_{e_2(x_2)}f_1(r)\,dr,\quad x_2\in\omega_2; \tag{4.3.26}$$

$$\eta_6^{(2)}(\xi,x_2)=\Phi_{4h}(\xi,x_2)-\frac{2}{h_1h_2}\int\limits_{\xi}^{\xi+h_1/2}\int\limits_{e_2(x_2)}f_2(r)\,dr,\quad x_2\in\omega_2. \tag{4.3.27}$$

Принимая во внимание уравнения для погрешности $A_hy-A_hu=\psi_h$, представление (4.2), а также разностные аналоги теорем вложения Соболева, эквивалентные нормировки пространства $V_{\gamma^1\gamma^2(\overline{\omega}^{(1,2)})}$ (см. выше), неравенства Коши—Буняковского и Гельдера, получим оценку

$$\left\|z(x;g,\Phi_h)\right\|_{\overset{\circ}{V}_{\gamma^1\gamma^2}(\overline{\omega}^{(1,2)})} = \left\|y(x;\Phi_h)-u(x;g)\right\|_{\overset{\circ}{V}_{\gamma^1\gamma^2}(\overline{\omega}^{(1,2)})} \leqslant$$

$$\leqslant M\left\{\sum_{\alpha=1}^{2}\left[\left(\sum_{\omega_1^{(\alpha)+}}\sum_{\omega_2}\left(\eta_1^{(\alpha)}(x)\right)^2 h_1h_2\right)^{1/2}+\left(\sum_{\omega_1^{(\alpha)}}\sum_{\omega_2^+}\left(\eta_2^{(\alpha)}(x)\right)^2 h_1h_2\right)^{1/2}+\right.\right.$$

$$+\left(\sum_{\omega_2^+}\left(\eta_2^{(\alpha)}(\xi,x_2)\right)^2 h_1h_2\right)^{1/2}+\left(\sum_{\omega^{(\alpha)}}\left(\eta_3^{(\alpha)}(x)\right)^2 h_1h_2\right)^{1/2}+$$

$$+\left(\sum_{\omega_2}\left(\eta_3^{(\alpha)}(\xi,x_2)\right)^2 h_1h_2\right)^{1/2}+\left(\sum_{\omega^{(\alpha)}}\left(\eta_5^{(\alpha-)}(x)\right)^2 h_1h_2\right)^{1/2}+$$

$$+\left(\sum_{\omega_2}\left(\eta_5^{(\alpha-)}(\xi,x_2)\right)^2 h_1h_2\right)^{1/2}+\left(\sum_{\omega^{(\alpha)}}\left(\eta_5^{(\alpha+)}(x)\right)^2 h_1h_2\right)^{1/2}+$$

$$+\left(\sum_{\omega_2}\left(\eta_5^{(\alpha-)}(\xi,x_2)\right)^2 h_1h_2\right)^{1/2}+\left(\sum_{\omega^{(\alpha)}}\left(\widehat{\eta}_6^{(\alpha)}(x)\right)^2 h_1h_2\right)^{1/2}+$$

$$\left.+\left(\sum_{\omega_2}\left(\eta_6^{(\alpha)}(\xi,x_2)\right)^2 h_1h_2\right)^{1/2}\right]+\left(\sum_{\omega^{(1)}}\left(\widehat{\eta}_5^{(1-)}(x)\right)^2 h_1h_2\right)^{1/2}+$$

$$+\left(\sum_{\omega_2}\left(\eta_5^{(1-)}(\xi,x_2)\right)^2 h_1h_2\right)^{1/2}++\left(\sum_{\omega^{(1)}}\left(\widehat{\eta}_5^{(1+)}(x)\right)^2 h_1h_2\right)^{1/2}+$$

$$\left.+\left(\sum_{\omega_2}\left(\eta_5^{(1+)}(\xi,x_2)\right)^2 h_1h_2\right)^{1/2}+\left(\sum_{\omega_2}\left(\eta_4(x_2)\right)^2 h_1h_2\right)^{1/2}\right\}. \tag{4.4}$$

Чтобы оценить левую части неравенства (4.4) через параметр h и, тем самым, получить оценки скорости сходимости аппроксимаций по состоянию, достаточно установить оценки величин (4.3):

$$\sum_{\omega_1^{(\alpha)+}}\sum_{\omega_2}\left(\eta_1^{(\alpha)}(x)\right)^2 h_1h_2 \leqslant M^2\|k_\alpha\|^2_{L_\infty(\Omega_\alpha)}|h|^2\|u_\alpha\|^2_{W_2^2(\Omega_\alpha)}, \quad \alpha=1,2; \tag{4.5.1}$$

$$\sum_{\omega_1^{(\alpha)}}\sum_{\omega_2^+}\left(\eta_2^{(\alpha)}(x)\right)^2 h_1h_2 \leqslant M^2\|k_\alpha\|^2_{L_\infty(\Omega_\alpha)}|h|^2\|u_\alpha\|^2_{W_2^2(\Omega_\alpha)}, \quad \alpha=1,2; \tag{4.5.2}$$

$$\sum_{\omega_2^+}\left(\eta_2^{(\alpha)}(\xi,x_2)\right)^2 h_1h_2 \leqslant M^2\|k_\alpha\|^2_{L_\infty(\Omega_\alpha)}|h|^2\|u_\alpha\|^2_{W_2^2(\Omega_\alpha)}, \quad \alpha=1,2; \tag{4.5.3}$$

$$\sum_{\omega^{(\alpha)}}\left(\eta_3^{(\alpha)}(x)\right)^2 h_1h_2 \leqslant M^2N_q^2\|d_\alpha\|^2_{L_\infty(\Omega_\alpha)}|h|^2\|u_\alpha\|^2_{W_2^2(\Omega_\alpha)}, \quad \alpha=1,2; \tag{4.5.4}$$

$$\sum_{\omega_2}\left(\eta_3^{(\alpha)}(\xi,x_2)\right)^2 h_1h_2 \leqslant M^2N_q^2\|d_\alpha\|^2_{L_\infty(\Omega_\alpha)}|h|^2\|u_\alpha\|^2_{W_2^2(\Omega_\alpha)}, \quad \alpha=1,2; \tag{4.5.5}$$

$$\sum_{\omega_2}\eta_4^2(x_2)h_2 \leqslant M^2h_2^2\|\theta\|^2_{L_\infty(0,l_2)}\sum_{k=1}^{2}\|u_k\|^2_{W_2^2(\Omega_\alpha)}; \tag{4.5.6}$$

$$\sum_{\omega^{(1)}} \left(\widehat{\eta}_5^{(1\pm)}(x)\right)^2 h_1h_2 \leqslant M^2 \sum_{\alpha=1}^{2} \|\vartheta_1^{(\alpha)}\|^2_{L_\infty(\Omega_1)} |h|^2 \|u_1\|^2_{W_2^2(\Omega_1)}; \tag{4.5.7}$$

$$\sum_{\omega_2} \left(\widehat{\eta}_5^{(1\pm)}(\xi, x_2)\right)^2 h_1h_2 \leqslant M^2 \sum_{\alpha=1}^{2} \|\vartheta_1^{(\alpha)}\|^2_{L_\infty(\Omega_1)} |h|^2 \|u_1\|^2_{W_2^2(\Omega_1)}; \tag{4.5.8}$$

$$\sum_{\omega^{(2)}} \left(\eta_5^{(2\pm)}(x)\right)^2 h_1h_2 \leqslant M^2 \sum_{\alpha=1}^{2} \|\vartheta_2^{(\alpha)}\|^2_{L_\infty(\Omega_2)} |h|^2 \|u_2\|^2_{W_2^2(\Omega_2)}; \tag{4.5.9}$$

$$\sum_{\omega_2} \left(\eta_5^{(2\pm)}(\xi, x_2)\right)^2 h_1h_2 \leqslant M^2 \sum_{\alpha=1}^{2} \|\vartheta_2^{(\alpha)}\|^2_{L_\infty(\Omega_2)} |h|^2 \|u_2\|^2_{W_2^2(\Omega_2)}; \tag{4.5.10}$$

$$\sum_{\omega^{(\alpha)}} \left(\eta_5^{(1\pm)}(x)\right)^2 h_1h_2 \leqslant M^2 \sum_{\alpha=1}^{2} \left\| \Phi_{\alpha,h}(r) - \frac{1}{h_1h_2} \int\limits_{e^1(x)} \vartheta_1^{(\alpha)}(r)\, dr \right\|^2_{L_\infty(\omega^{(1)})} \|u_1\|_{W_2^2(\Omega_1)}; \tag{4.5.11}$$

$$\sum_{\omega_2} \left(\eta_5^{(1\pm)}(\xi, x_2)\right)^2 h_1h_2 \leqslant M^2 \sum_{\alpha=1}^{2} \left\| \Phi_{\alpha,h}(\xi, r_2) - \frac{2}{h_1h_2} \int\limits_{\xi-h_1/2}^{\xi} \int\limits_{e_2(x_2)} \vartheta_1^{(\alpha)}(r)\, dr \right\|^2_{L_\infty(\omega_2)} \|u_1\|^2_{W_2^2(\Omega_1)}; \tag{4.5.12}$$

$$\begin{aligned}
&\left(\sum_{\omega^{(\alpha)}} \left(\eta_6^{(\alpha)}(x)\right)^2 h_1h_2\right)^{1/2} + \left(\sum_{\omega_2} \left(\eta_6^{(\alpha)}(\xi, x_2)\right)^2 h_1h_2\right)^{1/2} \leqslant \\
&\qquad \leqslant \sqrt{2} \left(\sum_{\omega^{(\alpha)}} \left(\eta_6^{(\alpha)}(x)\right)^2 h_1h_2 + \sum_{\omega_2} \left(\eta_6^{(\alpha)}(\xi, x_2)\right)^2 h_1h_2\right)^{1/2} \leqslant \\
&\qquad \leqslant \sqrt{2} \left[2 \left(\sum_{\omega^{(\alpha)}} \left(\eta_6^{(\alpha)}(x)\right)^2 h_1h_2 + \frac{1}{2}\sum_{\omega_2} \left(\eta_6^{(\alpha)}(\xi, x_2)\right)^2 h_1h_2\right)\right]^{1/2} = \\
&\qquad = 2\left\|\eta_6^{(\alpha)}\right\|_{L_2(\omega^{(\alpha)}\cup\gamma_S)} = \left\|S^x f_{\alpha h}(x) - \Phi_{\alpha+2,h}\right\|_{L_2(\omega^{(\alpha)}\cup\gamma_S)}, \quad \alpha = 1, 2,
\end{aligned} \tag{4.5.13}$$

доказательства которых содержат громоздкие выкладки. Поэтому мы ограничимся доказательством, например, первой из оценок в (4.5) при $\alpha = 1$. Нетрудно убедиться, что справедлива цепочка неравенств:

$$\begin{aligned}
&\left|\eta_1^{(1)}(x)\right| = \\
&\quad = \left|\frac{1}{h_1h_2} \int\limits_{x_1-h_1}^{x_1} \int\limits_{e_2(x_2)} k_1\left(x_1 - \frac{h_1}{2}, r_2\right) \left[\int\limits_{x_1-h_1/2}^{r_1} \frac{\partial^2 u_1(m, r_2)}{\partial m^2} dm - \int\limits_{x_2}^{r_2} \frac{\partial^2 u_1(r_1, s)}{\partial r_1 \partial s} ds\right] dr_1 dr_2\right| \leqslant \\
&\leqslant (h_1h_2)^{-1/2} \|k_1\|_{L_\infty(\Omega_1)} \times \\
&\quad \times \left[h_1 \left(\int\limits_{x_1-h_1}^{x_1} \int\limits_{e_2(x_2)} \left|\frac{\partial^2 u_1(m, r_2)}{\partial m^2}\right|^2 dm dr_2\right)^{1/2} + h_2 \left(\int\limits_{x_1-h_1}^{x_1} \int\limits_{e_2(x_2)} \left|\frac{\partial^2 u_1(r_1, s)}{\partial r_1 \partial s}\right|^2 dr_1 ds\right)^{1/2}\right] \leqslant \\
&\qquad \leqslant 2^{1/2} \left\|k_1\right\|_{L_\infty(\Omega_1)} |h| (h_1h_2)^{-1/2} \|u_1\|_{W_2^2((x_1-h_1, x_2)\times e_2(x_2))}, \quad x \in \omega_1^{(1)+} \times \omega_2.
\end{aligned}$$

Теорема доказана. □

5. Оценки погрешности сеточного функционала и скорости сходимости сеточных аппроксимаций по функционалу, сходимость по управлению. Регуляризация аппроксимаций

Для ответа на вопрос о сходимости сеточных задач оптимального управления (3.1)–(3.6) по функционалу и управлению необходимо прежде всего установить связь между функционалами $J_h(\Phi_h)$ и $J(g)$ экстремальных задач (3.1)–(3.6) и (2.12), (2.1)–(2.11) для любых фиксированных управлений $\Phi_h \in U_h$ и $g \in U$ и любых $h > 0$. Для этого нам понадобятся некоторые кусочно-постоянные восполнения сеточных функций, некоторые дискретизации функций непрерывного аргумента, а также их свойства. Пусть $\vartheta_k(x)$, $x \in \overline{\omega}^{(k)}$, $k = 1, 2,$ — сеточные функции, заданные на двумерных сетках

$$\overline{\omega}^{(k)} = \overline{\omega}_1^{(k)} \times \overline{\omega}_2 \subset \Omega_k, \quad k = 1, 2.$$

Через $\overline{\vartheta}_{kh}(r) = P_{kh}\vartheta_k(r)$, $r = (r_1, r_2) \in \Omega_k$, $k = 1, 2$, будем обозначать кусочно-постоянные восполнения на Ω_k, $k = 1, 2$, сеточных функций $\vartheta_k(x)$, $x \in \overline{\omega}^{(k)}$, $k = 1, 2$, определяемые по формулам:

$$\overline{\vartheta}_{kh}(r) = P_{kh}\vartheta_k(r) = \vartheta_k(x), \quad r = (r_1, r_2) \in e^{(k)}(x), \quad x \in \overline{\omega}^{(k)}, \quad k = 1, 2. \tag{5.1}$$

Оценку погрешности функционала $J_h(\Phi_h)$ экстремальной задачи (3.1)–(3.6) устанавливает следующая теорема.

Теорема 5.1. *Для любых управлений $g \in U$ и $\Phi_h \in U_h$ экстремальных задач* (2.12), (2.1)–(2.11) *и* (3.1)–(3.6) *соответственно и любых $h > 0$ для погрешности сеточного функционала $J_h(\Phi_h)$ экстремальной задачи* (3.1)–(3.6) *справедлива оценка*

$$\begin{gathered}\Big|J(g) - J_h(\Phi_h)\Big| = \Big|I(u(r;g)) - I_h(y(x;\Phi_h))\Big| \leqslant \\ \leqslant M\left\{|h| + \sum_{\alpha=1}^{2}\left[\left\|\Phi_{\alpha,h}(r) - \frac{1}{h_1h_2}\int\limits_{e^1(x)}\vartheta_1^{(\alpha)}(r)\,dr\right\|_{L_\infty(\omega^{(1)})} + \right.\right. \\ \left.\left. + \left\|\Phi_{\alpha,h}(\xi, r_2) - \frac{2}{h_1h_2}\int\limits_{\xi-h_1/2}^{\xi}\int\limits_{e_2(x_2)}\vartheta_1^{(\alpha)}(r)\,dr\right\|_{L_\infty(\omega_2)} + \|S^x f_{\alpha h}(x) - \Phi_{\alpha+2,h}\|_{L_2(\omega^{(\alpha)}\cup\gamma_S)}\right]\right\},\end{gathered} \tag{5.2}$$

где M — положительная константа, не зависящая от h, y, u, Φ_h, g.

Доказательство. Пусть $g \in U$ и $\Phi_h \in U_h$ — произвольные допустимые управления, а $u = u(r; g)$ и $y = y(x; \Phi_h)$ — соответствующие им решения задач состояния в экстремальных задачах (2.12), (2.1)–(2.11) и (3.1)–(3.6). Принимая во внимание (2.12), (3.1) и проводя некоторые преобразования, приведем погрешность $\varepsilon_h(g; \Phi_h) = J(g) - J_h(\Phi_h)$ к специальному виду:

$$\begin{gathered}\varepsilon_h(g;\Phi_h) = B_h^{(1)} + B_h^{(2)}, \quad B_h^{(1)} = \Big\|u(r;g) - u_0^{(1)}(r)\Big\|^2_{L_2(\Omega_1)} - \Big\|P_{1h}u(r;g) - P_{1h}u_0^{(1)}(r)\Big\|^2_{L_2(\Omega_1)}, \\ B_h^{(2)} = \Big\|P_{1h}u(r;g) - P_{1h}u_0^{(1)}(r)\Big\|^2_{L_2(\Omega_1)} - \Big\|y(x;\Phi_h) - u_0^{(1)}(x)\Big\|^2_{L_2(\overline{\omega}^{(1)})}.\end{gathered} \tag{5.3}$$

Можно показать, что для величин $B_h^{(k)}$, $k = 1, 2$, справедливы следующие оценки:

$$\begin{gathered}\Big|B_h^{(1)}\Big| \leqslant \left(\Big\|u(r;g) - P_{1h}u(r;g)\Big\|_{L_2(\Omega_1)} - \Big\|u_0^{(1)}(r) - P_{1h}u_0^{(1)}(r)\Big\|_{L_2(\Omega_1)}\right) \times \\ \times \left(\big\|u(r;g)\big\|_{L_2(\Omega_1)} + \big\|P_{1h}u(r;g)\big\|_{L_2(\Omega_1)} + \big\|P_{1h}u_0^{(1)}(r)\big\|_{L_2(\Omega_1)} + \big\|u_0^{(1)}(r)\big\|_{L_2(\Omega_1)}\right),\end{gathered} \tag{5.4}$$

$$\left|B_h^{(1)}\right| \leqslant \left\|y(x;\Phi_h) - u_0^{(1)}(x)\right\|^2_{L_2(\overline{\omega}^{(1)})} \times \\ \times \left(\left\|u(x;g)\right\|_{L_2(\overline{\omega}^{(1)})} + \left\|y(x;\Phi_h)\right\|_{L_2(\overline{\omega}^{(1)})} + 2\left\|u_0^{(1)}(r)\right\|_{L_2(\overline{\omega}^{(1)})}\right). \quad (5.5)$$

Далее, проводя оценки правых частей неравенств (5.4) и (5.5) на основе оценок (5.1), (2.23), (2.24), (3.7), (4.1), теорем вложения Соболева (см. [8]), их разностных аналогов, эквивалентных нормировок пространств $\overset{\circ}{V}_{\Gamma_1,\Gamma_2}$ и $\overset{\circ}{V}_{\gamma^{(1)},\gamma^{(2)}}$ (см. выше) и принимая во внимание представление (5.5), установим оценку (5.2). Теорема 5.1 доказана. □

Для исследования сходимости разностных аппроксимаций задач оптимального управления (2.12), (2.1)–(2.11) по функционалу и управлению рассмотрим последовательность разностных задач минимизации (3.1)–(3.6), зависящих от шага $h = (h_1, h_2)$ сетки $\bar{\omega} = \bar{\omega}^{(1)} \cup \bar{\omega}^{(2)} = \bar{\omega}^{(1,2)} \subset \bar{\Omega}_1 \cup \bar{\Omega}_2$ при $|h| \to 0$.

Теорема 5.2. *Пусть J_* и J_{h*} — нижние грани функционалов $J(g)$ и $J_h(\Phi_h)$ в задачах* (2.12), (2.1)–(2.11) *и* (3.1)–(3.6) *соответственно. Семейство сеточных задач* (3.1)–(3.6)*, зависящих от шага $h = (h_1, h_2)$ сетки $\bar{\omega}^{(1,2)} = \bar{\omega}^{(1)} \cup \bar{\omega}^{(2)} \subset \bar{\Omega}_1 \cup \bar{\Omega}_2$ при $|h| \to 0$ аппроксимирует исходную экстремальную задачу* (2.12), (2.1)–(2.11) *по функционалу, т.е. $\lim\limits_{|h|\to 0} J_{h*} = J_*$, и справедлива следующая оценка скорости сходимости*:

$$\left|J_{h*} - J_*\right| \leqslant M|h|. \quad (5.6)$$

Доказательство теоремы проводится по методике из [2].

Предположим теперь, что при каждом $h = (h_1, h_2)$ и соответствующей сетке $\bar{\omega} = \bar{\omega}_h = \bar{\omega}^{(1)} \cup \bar{\omega}^{(2)}$ с помощью какого-либо метода минимизации получено приближенное значение $J_{h*} + \epsilon_h$ нижней грани J_{h*} функционала $J_h(\Phi_h)$ на U_h в задаче (3.1)–(3.6) и найдено сеточное управление $\Phi_{h\epsilon_h}(x) \in U_h$, дающее приближенное решение задачи (3.1)–(3.6) в следующем смысле:

$$J_{h*} \leqslant J_h(\Phi_{h\epsilon_h}) \leqslant J_{h*} + \epsilon_h, \quad \Phi_{h\epsilon_h} \in U_h, \quad (5.7)$$

где последовательность $\{\epsilon_h\}$ такова, что $\epsilon_h \geqslant 0$ и $\epsilon_h \to 0$ при $|h| \to 0$.

Возникает вопрос, можно ли принять сеточное управление $\Phi_{h\epsilon_h}(x) \in U_h$ из (5.7) в качестве некоторого приближения оптимального управления задачи (2.12), (2.1)–(2.11).

Теорема 5.3. *Пусть последовательность сеточных управлений $\{\Phi_{h\epsilon_h}(x) \subset U_h\}$ определена из условий* (5.7)*. Тогда последовательность управлений*

$$\left\{F_h\Phi_{h\epsilon_h}(r)\right\} = \left\{\left(F_{1h}\Phi_{1h\epsilon_h}(r),\ F_{2h}\Phi_{2h\epsilon_h}(r),\ F_{3h}\Phi_{3h\epsilon_h}(r),\ F_{4h}\Phi_{4h\epsilon_h}(r)\right)\right\},$$

где $F_{\alpha h}$, $\alpha = \overline{1,4}$, — кусочно-постоянные восполнения сеточных управлений $\Phi_{\alpha h\epsilon_h}(r)$, $\alpha = \overline{1,4}$ (см. детальное описание в [12]*), является минимизирующей для функционала $J(g)$ исходной задачи* (2.12), (2.1)–(2.11)*, т.е.*

$$\lim_{|h|\to 0} J(F_h\Phi_{h\epsilon_h}) = J_*$$

и справедлива следующая оценка скорости сходимости:

$$0 \leqslant J\bigl(F_h\Phi_{h\epsilon_h}\bigr) - J_* \leqslant C|h| + \epsilon_h. \quad (5.8)$$

Последовательность $\left\{F_h\Phi_{h\epsilon_h}(r)\right\}$ слабо сходится в H к множеству $U_* \neq \varnothing$ оптимальных управлений исходной экстремальной задачи (2.12), (2.1)–(2.11)*.*

Доказательство теоремы проводится на основе методики из [2] и опирается на полученные выше результаты. Слабая сходимость минимизирующей последовательности $\left\{F_h\Phi_{h\epsilon_h}\right\}$ исходного функционала $J(g)$ к множеству $U_* \neq \varnothing$ следует из теоремы 2.2.

Рассмотрим вопрос о сильной сходимости в H по аргументу (управлению) разностных аппроксимаций (3.1)–(3.6). Будем допускать, что вычисления сеточных функционалов $J_h(\Phi_h)$ ведутся приближенно, как в силу приближенной исходной информации, так и в силу того, что счет ведется с округлениями, так что вместо фунционала $J_h(\Phi_h)$, фактически используется приближенный функционал $J_{h\delta_h}(\Phi_h)$, который связан с $J_h(\Phi_h)$ соотношениями

$$J_{h\delta_h}(\Phi_h) = J_h(\Phi_h) + \theta_{\delta_h}(\Phi_h), \quad \Big|\theta_{\delta_h}(\Phi_h)\Big| \leqslant \delta_h \quad \forall \Phi_h \in U_h,\ \delta_h \xrightarrow[|h|\to 0]{} +0. \tag{5.9}$$

Для регуляризации семейства сеточных экстремальных задач (3.1)–(3.6) введем на U функционал-стабилизатор $\Omega(g) = \|g\|^2_H$, $g \in U$, и его сеточный аналог

$$\Omega_h(\Phi_h) = \|\Phi_h\|^2_{H_h} = \|\Phi_h\|^2_{\left(L_2(\bar\omega^{(1)})\right)^2 \times L_2(\omega^{(1)}\cup\gamma_S)\times L_2(\omega^{(2)}\cup\gamma_S)}, \quad \Phi_h \in U_h.$$

При каждом $h = (h_1, h_2)$ рассмотрим на U_h сеточный функционал Тихонова задачи (3.1)–(3.6):

$$T_{h\delta_h\alpha_h}(\Phi_h) = J_{h\delta_h}(\Phi_h) + \alpha_h\Omega_h(\Phi_h), \quad \Phi_h \in U_h,$$

где $\{\alpha_h\}$ — произвольная последовательность положительных чисел, сходящаяся к нулю при $|h| \to 0$. Рассмотрим теперь задачу минимизации функционала $T_{h\delta_h\alpha_h}(\Phi_h)$ на U_h: при каждом $h = (h_1, h_2)$ определим сеточное управление $\hat\Phi_h = \Phi_{h\delta_h\alpha_h\nu_h}(x) \in U_h$, удовлетворяющее условиям

$$T_{h\delta_h\alpha_h*} = \inf\Big\{T_{h\delta_h\alpha_h}(\Phi_h):\ \Phi_h \in U_h\Big\} \leqslant T_{h\delta_h\alpha_h}(\hat\Phi_h) \leqslant T_{h\delta_h\alpha_h*} + \nu_h, \tag{5.10}$$

где $\nu_h \geqslant 0$ и $\nu_h \xrightarrow[|h|\to 0]{} +0$. Введем множество Ω-нормальных решений задачи оптимального управления (2.12), (2.1)–(2.11):

$$U_{**} = \Big\{g_{**} \in U_*:\ \Omega(g_{**}) = \inf\big\{\Omega(g_*) : g_* \in U_*\big\} = \Omega_*\Big\}.$$

Так как функционал $\Omega(g)$ является слабым стабилизатором в H задачи (2.12), (2.1)–(2.11) и функционалы $J(g)$ и $\Omega(g)$ полунепрерывны снизу на U в слабой топологии пространства H, то $U_{**} \neq \varnothing$ (см. [2]).

Теорема 5.4. *Пусть последовательность сеточных управлений* $\{\hat\Phi_h\} \subset U_h$ *определена из условий* (5.10). *Тогда последовательность управлений* $\big\{F_h\hat\Phi_h(r)\big\} \subset U_h$ *(см. определение выше) является минимизирующей для функционала* $J(g)$ *исходной экстремальной задачи* (2.12), (2.1)–(2.11), *т.е.* $\lim\limits_{|h|\to 0} J(F_h\hat\Phi_h) = J_*$ *и справедлива следующая оценка скорости сходимости*:

$$0 \leqslant J(F_h\hat\Phi_h) - J_* \leqslant M\Big[|h| + \nu_h + \delta_h + \alpha_h\Big]. \tag{5.11}$$

Если, кроме того, параметры ν_h, δ_h, α_h *согласованы с* $|h|$ *так, что*

$$\nu_h,\ \delta_h,\ \alpha_h \xrightarrow[|h|\to 0]{} +0, \quad \frac{|h| + \nu_h + \delta_h}{\alpha_h} \xrightarrow[|h|\to 0]{} 0,$$

то последовательность $\{F_h\hat\Phi_h\}$ *сильно сходится в* H *к множеству* Ω*-нормальных (в смысле минимальной нормы) оптимальных управлений* U_{**} *задачи* (2.12), (2.1)–(2.11).

Доказательство теоремы проводится на основе методики из [2, 19] и опирается на полученные выше результаты.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Браудер Ф. Е.* Материалы к совместному советско-американскому симпозиуму по уравнениям с частными производными. — Новосибирск, 1963.
2. *Васильев Ф. П.* Методы решения экстремальных задач. — М.: Наука, 1981.
3. *Гаевский Х., Грегер К., Захариас К.* Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. — М.: Мир, 1978.
4. *Гилбарг Д., Трудингер Н.* Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка. — М.: Наука, 1989.
5. *Дренска Н. Т.* Точность численных алгоритмов для одномерной задачи об остывании металла в формах// Вестн. МГУ. Сер. 15. Вычисл. мат. и киберн. — 1981. — *4.* — С. 15–21.

6. *Киндерлелер Д., Стампаккья Г.* Введение в вариационные неравенства и их приложения. — М.: Мир, 1983.
7. *Куфнер А., Фучик Ф.* Нелинейные дифференциальные уравнения. — М.: Наука, 1988.
8. *Ладыженская О. А.* Краевые задачи математической физики. — М.: Наука, 1973.
9. *Лионс Ж.-Л.* Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. — М.: Мир, 1972.
10. *Литвинов В. Г.* Оптимизация в эллиптических граничных задачах с приложениями к механике. — М.: Наука, 1987.
11. *Лубышев Ф. В.* Разностные аппроксимации задач оптимального управления системами, описываемыми уравнениями в частных производных. — Уфа: БашГУ, 1999.
12. *Лубышев Ф. В., Манапова А. Р.* О некоторых задачах оптимального управления и их разностных аппроксимациях и регуляризации для квазилинейных эллиптических уравнений с управлениями в коэффициентах// Ж. вычисл. мат. и мат. физ. — 2007. — *47*, № 3. — С. 376–396.
13. *Лубышев Ф. В., Манапова А. Р., Файрузов М. Э.* Аппроксимации задач оптимального управления для полулинейных эллиптических уравнений с разрывными коэффициентами и решениями, с управлением в граничных условиях сопряжения// Ж. вычисл. мат. и мат. физ. — 2014. — *54*, № 11. — С. 1767–1792.
14. *Ректорис К.* Вариационные методы в математической физике и технике. — М.: Мир, 1985.
15. *Самарский А. А.* Теория разностных схем.— М.: Наука, 1989.
16. *Самарский А. А., Андреев В. Б.* Разностные методы для эллиптических уравнений. — М.: Наука, 1976.
17. *Самарский А. А., Лазаров Р. Д., Макаров В. Л.* Разностные схемы для дифференциальных уравнений с обобщенными решениями. — М.: Высшая школа, 1987.
18. *Соболев С. Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике. — Новосибирск: СО АН СССР, 1962.
19. *Тихонов А. Н., Арсенин В. Я.* Методы решения некорректных задач. — М.: Наука, 1986.

Ф. В. Лубышев
Башкирский государственный университет, Уфа
А. Р. Манапова
Башкирский государственный университет
E-mail: `aygulrm@yahoo.com`

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 143 (2017). С. 24–39

УДК 517.978.2

ЛИНЕЙНАЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ИГРА ПРЕСЛЕДОВАНИЯ С ИМПУЛЬСНЫМ УПРАВЛЕНИЕМ И ЛИНЕЙНЫМ ИНТЕГРАЛЬНЫМ ОГРАНИЧЕНИЕМ НА УПРАВЛЕНИЯ ИГРОКОВ

© 2017 г. **М. ТУХТАСИНОВ**

Посвящается академику Н. Ю. Сатимову

Аннотация. Для линейной дифференциальной игры преследования предлагаются достаточные условия для завершения преследования, когда один из игроков применяет управление импульсного характера, а другой-управление с «линейным ограничением» интегрального характера. Указываются способы нахождения управлений преследующего игрока, обеспечивающие завершение преследования за конечное время. В конце работы приведены примеры, иллюстрирующие полученные результаты.

Ключевые слова: разрешающая функция, импульсное управление, преследование, преследователь, убегающий, линейное ограничение, терминальное множество, допустимое управление, функция Дирака.

AMS Subject Classification: 49N70, 49N75

1. Введение. Основные результаты. В [20] рассмотрены дифференциальные игры преследования с импульсным управлением и управлением с геометрическими ограничениями. Методом разрешающих функций доказаны теоремы с достаточными условиями для завершения преследования за конечное время. Указаны способы нахождения гарантированного времени и управления преследующего игрока для завершения преследования. Полученные результаты применены к решению конкретных задач преследования.

В [21] изучены линейные дифференциальные игры преследования с интегральными ограничениями на управления игроков. Для решения поставленных задач использованы идеи метода разрешающих функций в более общем виде-матричном. В [19] изучены линейные дифференциальные игры, обобщенные с помощью рассмотрения импульсных управлений. Наложенное на параметры игры условие, которое является аналогом условия Л. С. Понтрягина, обеспечивает преимущество преследователя над убегающим. Доказаны важные свойства разрешающих функций и с их помощью решена задача о завершении преследования.

В [11] получены достаточные условия для завершения преследования в игре с простим движением. При этом на управления игроков наложены «линейные ограничения» относительно времени, интегрального характера.

Фундаментальные результаты в этом направлении были получены в основополагающих работах [5–8, 10, 18].

В [3, 4, 9, 12–16, 21], в основном, предлагаются достаточные условия для завершения преследования при различных ограничениях на управления игроков.

В данной работе рассмотрены конфликтно-игровые задачи с точки зрения завершения преследования за конечное время. При этом воздействия на объект осуществляются управлением импульсного характера или управлением с «линейным ограничением» интегрального характера. Пользуясь методом разрешающих функции (см. [20]), мы получаем достаточные условия завершения преследования из заданной точки. Работа непосредственно примыкает к [2, 11, 12, 19, 20].

ISSN 0233–6723

Рассматривается линейная дифференциальная игра преследования, описываемая уравнением

$$\dot{z} = Az + u - v, \quad z \in \mathbb{R}^m, \tag{1}$$

где z — фазовый вектор, u, v — параметры управления преследующего и убегающего игроков соответственно, A — постоянная $(m \times m)$-матрица. В случае, когда первый и второй игроки применяют импульсные управления, мгновенным значением управления являются векторы из множеств U и V соответственно. При этом U, V — непустые компактные подмножества в $\mathbb{R}^m$, терминальное множество представляется цилиндром вида $M^* = M^0 + M$, где M^0 — линейное подпространство пространства $\mathbb{R}^m$, M — непустой компакт из ортогонального дополнения L к M^0 в пространстве $\mathbb{R}^m$.

Обозначим через π оператор ортогонального проектирования из $\mathbb{R}^m$ на L, а через e^{tA} — фундаментальную матрицу однородной части системы (1). Ясно, что $z \in M^*$ тогда и только тогда, когда $\pi z \in M$. В дальнейшем мы воспользуемся этим фактом.

Пусть $\{\tau_i\}_{i=1}^{\infty}$ — последовательность моментов времени, занумерованных в порядке возрастания, без точек сгущения, т.е. любой отрезок вида $[a, b]$ содержит конечное число элементов этой последовательности.

В данной работе рассматриваются две формализации задачи преследования, которые отличаются классами допустимых управлений игроков.

1. Классом допустимых управлений преследователя является множество импульсных функции, которые выражаются дельта-функцией Дирака

$$u(t) = \sum_{i=0}^{\infty} u_i \delta(t - \tau_i), \quad u_i \in U, \ t \geqslant 0, \tag{2}$$

где U — непустое компактное подмножество пространства $\mathbb{R}^m$. Множество всех измеримых функции $v(\cdot)$, удовлетворяющих условию

$$\int\limits_0^t \|v(\vartheta)\|^2 \, d\vartheta \leqslant \nu_1 t + \nu_0, \quad t \geqslant 0, \tag{3}$$

где ν_1, ν_0 — неотрицательные фиксированные числа, определяет класс допустимых управлений убегающего игрока.

2. Множество всех измеримых функции $u(\cdot)$, удовлетворяющих условию

$$\int\limits_0^t \|u(\vartheta)\|^2 \, d\vartheta \leqslant \mu_1 t + \mu_0, \quad t \geqslant 0, \tag{4}$$

где μ_1, μ_0 — неотрицательные фиксированные числа, называется классом допустимых управлений преследующего игрока. Классом допустимых управлений убегающего называется множество импульсных функции, которые выражаются дельта-функцией Дирака

$$v(t) = \sum_{i=0}^{\infty} v_i \delta(t - \tau_i), \quad v_i \in V, \ t \geqslant 0, \tag{5}$$

где V — непустое компактное подмножество пространства $\mathbb{R}^m$.

Исходя из этих определений получим следующие задачи.

Задача 1. Для данной начальной точки $z_0 \notin M^*$ определить условия, при выполнении которых для произвольного допустимого управления $v(\cdot)$ убегающего игрока, используя разрешенную информацию, можно будет построить мгновенные значения управления в данных точках τ_i преследующего игрока таким образом, чтобы соответствующая траектория $z(t)$, $t \geqslant 0$, системы (1), исходящая из начального положения z_0, за конечное время вышла на терминальное множество M^*.

Задача 2. Для данной начальной точки $z_0 \notin M^*$ определить условия, при выполнении которых для произвольного импульсного допустимого управления убегающего игрока, используя разрешенную информацию, можно будет построить управление преследующего игрока с данным «линейным ограничением» интегрального характера таким образом, чтобы соответствующая траектория $z(t)$, $t \geqslant 0$, системы (1), исходящая из начального положения z_0, за конечное время вышла на терминальное множество M^*.

1.1. Решение задачи 1. В этом разделе рассматривается игра (1) при условии, что преследующий игрок применяет импульсное управление, которое представляется с помощью функции Дирака $\delta(t-\tau_i)$ в виде (2), убегающий имеет право применять измеримое управление $v(t)$, $t \geqslant 0$, с условием (3). Они называются допустимыми управлениями преследователя и убегающего соответственно.

В каждый момент времени t преследующий знает о предыстории управления $v_t(\cdot)$ убегающего игрока (см. [20]).

После подстановки в правую часть уравнения (1) допустимых управлений игроков получим систему с правой частью с аддитивно входящей обобщенной функцией. Согласно [17] эта система имеет решение при любом начальном условии $z(0) = z_0$, причем оно единственно и абсолютно непрерывно на интервалах (τ_{i-1}, τ_i), $i \in \mathbb{N}$, где $\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел, $\tau_0 = 0$. В моменты времени τ_i решения могут иметь разрывы первого рода. Пусть $v(t)$, $t \geqslant 0$, — допустимое управление убегающего игрока. Для $i = 1, 2, \ldots, n$ рассмотрим следующие множества:

$$W_i(n, v(\cdot)) = \pi e^{(\tau_n-\tau_i)A}U - \int\limits_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \pi e^{(\tau_n-\vartheta)A} v(\vartheta)\, d\vartheta,$$

$$W_i(n) = \bigcap_{v(\cdot)\in V[\tau_{i-1},\tau_i]} W_i(n, v(\cdot)) = \pi e^{(\tau_n-\tau_i)A} U \underline{*} G_i(n,\, \tau_{i-1}, \tau_i),$$

где

$$G_i(n,\, \tau_{i-1}, \tau_i) = \left\{ x \in L : x = \int\limits_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \pi e^{(\tau_n-\vartheta)A} v(\vartheta)\, d\vartheta,\ v(\cdot) \in V[\tau_{i-1},\, \tau_i] \right\}$$

и через $V[\tau_{i-1},\, \tau_i]$ обозначено множество всех измеримых на $[\tau_{i-1},\, \tau_i]$ функций $v(\cdot)$, удовлетворяющих ограничению

$$\int\limits_{\tau_{i-1}}^{\tau} \|v(\vartheta)\|^2\, d\vartheta \leqslant \nu_1(\tau - \tau_{i-1}) + \nu_0, \quad \tau_{i-1} \leqslant \tau \leqslant \tau_i, \tag{6}$$

а

$$X \underline{*} Y = \big\{ x : x + Y \subset X \big\} = \bigcap_{y\in Y} \big(X - y \big)$$

означает геометрическую разность(разность Минковского) множеств X и Y.

Предположение 1. *Множества $W_i(n)$ непусты при всех $n \in \mathbb{N}$, $i = 1, 2, \ldots, n$.*

Если справедливо предположение 1, то можно выбрать некоторый элемент $w_i(n)$ из каждого множества $W_i(n)$. Пусть $w = \{w_i(n)\}_{i=1}^n$. Положим

$$\xi(n, z, w) = \pi e^{(\tau_n-\tau_0)A} z + \sum_{i=1}^{n} w_i(n).$$

Определим функцию

$$\widetilde{\alpha}_i(n, z, v(\cdot), w) = \sup\Big\{ \alpha \geqslant 0 :\ \alpha\big[M - \xi(n,\, z,\, w)\big] \cap \big[W_i(n, v(\cdot)) - w_i(n)\big] \neq \varnothing \Big\} \tag{7}$$

и введем обозначение

$$k = k(n, z, v(\cdot), w) = \min\left\{ j \in \{1, 2, \dots, n\} : \sum_{i=1}^{j} \widetilde{\alpha}_i(n, z, v(\cdot), w) \geqslant 1 \right\}. \tag{8}$$

Если неравенство в фигурной скобке не выполнено ни при одном $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, то положим $k = n + 1$. Определим разрешающие функции [7]

$$\alpha_i(n, z, v(\cdot), w) = \begin{cases} \widetilde{\alpha}_i(n, z, v(\cdot), w), & i = 1, 2, \dots, k-1, \\ 1 - \displaystyle\sum_{j=1}^{k-1} \widetilde{\alpha}_i(n, z, v(\cdot), w), & i = k, \\ 0, & i = k+1, k+2, \dots, n. \end{cases} \tag{9}$$

Лемма 1. *Пусть выполнено предположение 1, пусть множества M и U выпуклы и $w_i(n) \in W_i(n)$, $n \in \mathbb{N}$, $i = 1, 2, \dots, n$. Тогда*

$$\alpha_i(n, z, v(\cdot), w)\big[M - \xi(n,\, z,\, w)\big] \cap \big[W_i(n, v(\cdot)) - w_i(n)\big] \neq \varnothing \tag{10}$$

для всех $n \in \mathbb{N}$, $i = 1, 2, \dots, n$, $z \in \mathbb{R}^m$, $v(\cdot) \in V[\tau_{i-1},\, \tau_i]$.

Доказательство. Пусть $i = 1, 2, \dots, k-1$; тогда из (9) получим $\alpha_i(n, z, v(\cdot), w) = \widetilde{\alpha}_i(n, z, v(\cdot), w)$, откуда согласно (7) следует утверждение леммы. При $i = k+1, \dots, n$ имеем $\alpha_i(n, z, v(\cdot), w) = 0$, значит, условие (10) будет выполнено, поскольку множества $W_i(n,\, v(\cdot)) - w_i(n)$ содержат нулевой элемент.

Теперь рассмотрим случай $i = k$. Покажем, что множество

$$\Gamma = \Big\{ \alpha \geqslant 0 : \alpha[M - \xi(n, z, w)] \cap \big[W_i(n, v(\cdot)) - w_i(n)\big] \Big\} \neq \varnothing$$

выпукло. По условию леммы множества $M - \xi(n, z, w)$ и $W_i(n, v(\cdot)) - w_i(n)$ выпуклы. Допустим, что $\alpha_1, \alpha_2 \in \Gamma$,

$$x_1 \in \alpha_1[M - \xi(n, z, w)] \cap \big[W_i(n, v(\cdot)) - w_i(n)\big], \quad x_2 \in \alpha_2[M - \xi(n, z, w)] \cap \big[W_i(n, v(\cdot)) - w_i(n)\big].$$

Множества $M - \xi(n, z, w)$ и $W_i(n, v(\cdot)) - w_i(n)$ выпуклы, поэтому для любого $\gamma \in [0, 1]$ имеем

$$\gamma x_1 + (1-\gamma)x_2 \in (\gamma\alpha_1 + (1-\gamma)\alpha_2)[M - \xi(n, z, w)] \cap \big[W_i(n, v(\cdot)) - w_i(n)\big],$$

откуда следует, что $\gamma\alpha_1 + (1-\gamma)\alpha_2 \in \Gamma$; значит, Γ выпукло. Отсюда очевидно, что

$$\alpha[M - \xi(n,\, z,\, w)] \cap \big[W_i(n, v(\cdot)) - w_i(n)\big] \neq \varnothing \quad \forall \alpha :\; 0 \leqslant \alpha \leqslant \widetilde{\alpha}_k(n, z, v(\cdot), w).$$

Согласно (8), (9) имеем

$$\alpha_k(n, z, v(\cdot), w) \leqslant \widetilde{\alpha}_k(n, z, v(\cdot), w),$$

т.е. утверждение леммы справедливо и при $i = k$. Лемма доказана. □

Пусть

$$N(z, w) = \min\Big\{ n \in \mathbb{N} : \inf_{v(\cdot) \in V[\tau_0, \tau_n]} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(n, z, v(\cdot), w) = 1 \Big\}.$$

Если равенство в фигурных скобках не выполняется ни при одном n, то положим $N(z, w) = \infty$.

Теорема 1. *Если для системы* (1) *выполнено предположение 1, множества M, U выпуклы и $N(z, w) < \infty$ для начального положения $z = z_0$ и некоторого набора w, то траекторию $z(t)$ системы* (1) *можно вывести на терминальное множество M^* в момент времени $t = \tau_{N(z_0, w)}$.*

Доказательство. Пусть $N = N(z_0, w)$. Зафиксируем некоторое допустимое управление $v(\cdot)$, $v(\cdot) \in V[\tau_0, \tau_N]$.

Сначала допустим, что $\xi(N, z_0, w) \notin M$. Пусть в (8) $k = k(N, z_0, v(\cdot), w)$; тогда из (8), (9) имеем

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i(N, z_0, v(\cdot), w) = 1.$$

Для $i = 1, 2, \ldots, k$ значения u_i выбираются так, чтобы имело место включение

$$\pi e^{(\tau_N-\tau_i)A}u_i - \int\limits_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \pi e^{(\tau_N-\vartheta)A}v(\vartheta)\,d\vartheta - w_i(N) \in \alpha_i(N, z_0, v(\cdot), w)(M - \xi(N,\, z_0,\, w)). \tag{11}$$

Заметим, что в силу соотношений (6), (7), предположения 1 и леммы 1 условия (11) выполняются при некоторых u_i. Для $i = k+1, \ldots, N$ в качестве u_i выбираем решения уравнения

$$\pi e^{(\tau_N-\tau_i)A}u_i - \int\limits_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \pi e^{(\tau_N-\vartheta)A}v(\vartheta)\,d\vartheta = w_i(N). \tag{12}$$

Эти уравнения имеют решения в силу предположения 1. Из формулы Коши с начальным условием $z(0) = z_0$ и свойств дельта-функции следует представление для решения системы (1):

$$\pi z(\tau_N) = \pi e^{(\tau_N-\tau_0)A}z_0 + \int\limits_{\tau_0}^{\tau_N} \pi e^{(\tau_N-\vartheta)A}(u(\vartheta) - v(\vartheta))\,d\vartheta = \pi e^{(\tau_N-\tau_0)A}z_0 + \sum_{i=1}^{N} \pi e^{(\tau_N-\tau_i)A}u_i -$$

$$- \int\limits_{\tau_0}^{\tau_N} \pi e^{(\tau_N-\vartheta)A}v(\vartheta)\,d\vartheta = \pi e^{(\tau_N-\tau_0)A}z_0 + \sum_{i=1}^{N}\left[\pi e^{(\tau_N-\tau_i)A}u_i - \int\limits_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \pi e^{(\tau_N-\vartheta)A}v(\vartheta)\,d\vartheta\right]. \tag{13}$$

Прибавим и вычтем из правой части равенства (13) величину $\sum\limits_{i=1}^{N} w_i(N)$. Учитывая выпуклость множества M и выбор управления $u(t)$, $t \geqslant 0$, из (11), (12) и (13) получим

$$\pi z(\tau_N) \in \xi(N, z_0, w)\left[1 - \sum_{i=1}^{N} \alpha_i(N, z_0, v(\cdot), w)\right] + \sum_{i=1}^{N} \alpha_i(N, z_0, v(\cdot), w)M = M.$$

Это означает $z(\tau_N) \in M^*$, т.е. игра преследования завершена.

Пусть теперь $\xi(N, z_0, w) \in M$. Тогда в качестве скачков u_i для всех $i = 1, 2, \ldots, N$ выбираем решения уравнения (12). В этом случае из представления (13) непосредственно следует включение $\pi z(\tau_N) \in M$, что эквивалентно завершению игру. Теорема доказана. $\square$

1.2. Решение задачи 2. В этом разделе рассматривается игра (1) при условии, что преследующий игрок имеет право применять измеримое управление $u(t)$, $t \geqslant 0$, с ограничением вида (4). Убегающий игрок применяет импульсное управление в виде обобщенных функций, которые задаются с помощью функции Дирака (5).

Пусть t — некоторый момент времени. Введем обозначение $n(t) = \max\bigl\{i \in \mathbb{N} \cup \{0\} : \tau_i \leqslant t\bigr\}$.

Для $i = 0, 1, \ldots, n(t) - 1$ определим следующие множества:

$$F_i(\tau_i, \tau_{i+1}) = \left\{ x \in L:\ x = \int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \pi e^{(t-\vartheta)A}u(\vartheta)\,d\vartheta, \right\},$$

где интеграл вычисляется по всем измеримым функциям $u(\vartheta)$, $\tau_i \leqslant \vartheta \leqslant \tau_{i+1}$, удовлетворяющим условию

$$\int\limits_{\tau_i}^{\tau} \|u(\vartheta)\|^2\,d\vartheta \leqslant \mu_1(\tau - \tau_i) + \mu_{0i},$$

и

$$F_{n(t)}(\tau_{n(t)}, t) = \left\{ x \in L:\ x = \int\limits_{\tau_{n(t)}}^{t} \pi e^{(t-\vartheta)A}u(\vartheta)\,d\vartheta \right\},$$

где здесь интеграл вычисляется по всем измеримым функциям $v(\vartheta)$, $\tau_{n(t)} \leqslant \vartheta \leqslant t$, удовлетворяющим условию

$$\int\limits_{\tau_{n(t)}}^{\tau} \|u(\vartheta)\|^2\, d\vartheta \leqslant \mu_1(\tau - \tau_{n(t)}) + \mu_{0n(t)}, \quad \tau_{n(t)} \leqslant \tau \leqslant t,$$

где μ_{00}, μ_{01}, $\ldots$, $\mu_{0n(t)}$ — такие неотрицательные числа, что $\mu_{00} + \mu_{01} + \ldots + \mu_{0n(t)} \leqslant \mu_0$. В каждый момент времени t преследующий знает о предыстории управления $v_t(\cdot)$ убегающего игрока. Используя множества $F_i(\cdot)$, построим множества $W_i(t)$, $i = 0, 1, \ldots, n(t)$, следующим образом:

$$W_i(t) = F_i(\tau_i, \tau_{i+1}) \underline{*} \pi e^{(t-\tau_i)A} V, \quad i = 0, 1, \ldots, n(t) - 1,$$

$$W_{n(t)}(t) = F_{n(t)}(\tau_{n(t)}, t) \underline{*} \pi e^{(t-\tau_{n(t)A})} V.$$

Введем обозначение $\mathfrak{T} = \{t \geqslant 0 : \ W_i(t) \neq \varnothing, \ i = 0, 1, \ldots, n(t)\}$. Так как в рассматриваемой игре преследующий игрок в каждый момент времени имеет ограниченный ресурс (на управление наложено интегральное ограничение), поэтому он должен как-то распределить свой ресурс по отрезкам $[\tau_i,\ \tau_{i+1}]$. В этом смысле следующее предположение отличается от [20, условие 3.1].

Предположение 2. *Пусть для некоторых неотрицательных чисел* μ_{00}, μ_{01}, $\ldots$, $\mu_{0n(t)}$, *удовлетворяющих условию* $\mu_{00} + \mu_{01} + \ldots + \mu_{0n(t)} \leqslant \mu_0$, *множества* $W_i(t)$ *непусты при всех* i, $i = 0, 1, \ldots, n(t)$.

Для любого момента времени t, $t \in \mathfrak{T}$, зафиксируем набор векторов $w = w(t) = \{w_i(t)\}$, $w_i(t) \in W_i(t)$, $i = 0, 1, \ldots, n(t)$. Положим

$$\xi(t, z, w) = \pi e^{(t-\tau_0)A} z + \sum_{i=0}^{n(t)} w_i(t),$$

$$\widetilde{\alpha}_i(t, z, v, w) = \sup\Big\{\alpha \geqslant 0 : \ \alpha(M - \xi(t, z, w)) \cap (W_i(t, v) - w_i(t)) \neq \varnothing\Big\}.$$

Введем обозначение

$$k = k(t, z, v, w) = \min\Big\{j \in \{0, 1, \ldots, n(t)\} : \ \sum_{i=0}^{j} \widetilde{\alpha}_i(t, z, v, w) \geqslant 1\Big\}; \tag{14}$$

если неравенство в фигурных скобках не выполняется ни при одном j, $j \in \{0, 1, \ldots, n(t)\}$, то положим $k = n(t) + 1$. Определим разрешающие функции (см. [18])

$$\alpha_i(n, z, v, w) = \begin{cases} \widetilde{\alpha}_i(n, z, v, w), & i = 0, 1, \ldots, k-1, \\ 1 - \sum\limits_{j=1}^{k-1} \widetilde{\alpha}_i(n, z, v, w), & i = k, \\ 0, & i = k+1, k+2, \ldots, n(t), \end{cases} \tag{15}$$

где $t \in \mathfrak{T}$, $i = 0, 1, \ldots, n(t)$, $z \in \mathbb{R}^m$, $v \in V$.

Можно показать, что если множество M выпукло, то для определенных таким образом разрешающих функций при $t \in \mathfrak{T}$, $i = 0, 1, \ldots, n(t)$, $z \in \mathbb{R}^m$, $v \in V$, $w_i(t) \in W_i(t)$ справедливы соотношения

$$\alpha_i(t, z, v, w)\Big(M - \xi(t, z, w)\Big) \cap \Big(W_i(t, v) - w_i(t)\Big) \neq \varnothing.$$

Доказательство этого утверждения не представляет большого труда, поэтому мы его опускаем. При этом для доказательства выпуклости множеств $W_i(t, v)$ следует использовать тот факт, что интеграл от равномерно ограниченного компактнозначного отображения представляет собой выпуклый компакт.

Рассмотрим множество

$$T(z, w) = \left\{t \in \mathfrak{T} : \ \sum_{i=0}^{n(t)} \inf_{v \in V} \alpha_i(t, z, v, w) = 1\right\}.$$

Если равенство в фигурных скобках не выполняется ни при одном $t \in \mathfrak{T}$, то положим $T(z,w) = \varnothing$.

Теорема 2. *Пусть выполнено условие предположения* 2. *Если для системы* (1) *при импульсном управлении убегающего* (5) *выполнено условие* $\mathfrak{T} \neq \varnothing$, $\tau_i \notin \mathfrak{T}$ *для всех* $i = 0, 1, \dots, n(t)$, *множество* M *выпукло и для начального положения* $z_0 \notin M^*$ *и набора* w *множество* $T(z_0, w)$ *непусто, то для любого* $T \in T(z_0, w)$ *траектория системы* (1) *может быть приведена из начального положения* z_0 *на терминальное множество* M^* *в момент времени* T.

Доказательство. Пусть $N = n(T)$ и $\{v_i\}$ — некоторый набор векторов из множества V. Сначала предположим, что $\xi(T, z_0, w) \notin M$. Введем обозначение $K = k(T, z_0, v, w)$; тогда из (14), (15) следует, что

$$\sum_{i=0}^{K} \alpha_i(T, z_0, v_i, w) = 1.$$

Пусть $K = N$. Тогда на интервале $[\tau_i, \tau_{i+1}]$, $i = 0, 1, \dots, K-1$, будем выбирать управление преследователя таким образом, чтобы имели места следующие включения:

$$\int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \pi e^{(T-\vartheta)A} u(\vartheta) d\vartheta - \pi e^{(T-\tau_i)A} v_i - w_i(T) \in \alpha_i(T, z_0, v_i, w)(M - \xi(T, z_0, w)), \tag{16}$$

а на отрезке $[\tau_K, T]$ так, чтобы было выполнено включение

$$\int\limits_{\tau_K}^{T} \pi e^{(T-\vartheta)A} u(\vartheta) d\vartheta - \pi e^{(T-\tau_K)A} v_K - w_K(T) \in \alpha_K(T, z_0, v_K, w)(M - \xi(T, z_0, w)). \tag{17}$$

Если $K < N$, то на интервалах $[\tau_i, \tau_{i+1})$, $i = 0, 1, \dots, K$, управления преследователя выбираются так, чтобы имело место включения (16), а на интервалах $[\tau_i, \tau_{i+1})$, $i = K+1, \dots, N-1$, — как решения уравнения

$$\int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \pi e^{(T-\vartheta)A} u(\vartheta) d\vartheta - \pi e^{(T-\tau_i)A} v_i = w_i(T). \tag{18}$$

На отрезке $[\tau_N, T]$ управление выбирается как решение уравнения

$$\int\limits_{\tau_T}^{T} \pi e^{(T-\vartheta)A} u(\vartheta) d\vartheta - \pi e^{(T-\tau_N)A} v_N = w_N(T). \tag{19}$$

Решение системы (1) представляется в виде

$$\pi z(T) = \pi e^{(T-\tau_0)A} z_0 + \int\limits_{\tau_0}^{T} \pi e^{(T-\vartheta)A} (u(\vartheta) - v(\vartheta))\, d\vartheta =$$

$$= \pi e^{(T-\tau_0)A} z_0 + \int\limits_{\tau_0}^{T} \pi e^{(T-\vartheta)A} u(\vartheta)\, d\vartheta - \sum_{i=0}^{N} \pi e^{(T-\tau_i)A} v_i = \pi e^{(T-\tau_0)A} z_0 +$$

$$+ \sum_{i=0}^{N-1} \left[\int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \pi e^{(T-\vartheta)A} u(\vartheta)\, d\vartheta - \pi e^{(T-\tau_i)A} v_i \right] + \int\limits_{\tau_N}^{T} \pi e^{(T-\vartheta)A} u(\vartheta)\, d\vartheta - \pi e^{(T-\tau_N)A} v_N. \tag{20}$$

Прибавим и вычтем из правой части равенства (20) величину $\sum\limits_{i=1}^{N} w_i(N)$. Учитывая выпуклость множества M и выбор управления $u(t)$, $t \geqslant 0$, из (16)–(20) получим

$$\pi z(T) \in \xi(N, z_0, w) \left[1 - \sum_{i=1}^{N} \alpha_i(N, z_0, v(\cdot), w)\right] + \sum_{i=1}^{N} \alpha_i(N, z_0, v(\cdot), w) M = M.$$

Это означает $z(T) \in M^*$, т.е. игра преследования завершена.

Пусть теперь $\xi(N, z_0, w) \in M$. Тогда в качестве $u(\cdot)$ выбираем решения уравнения (18) и (20). В этом случае из представления (20) следует включение $\pi z(T) \in M$, что эквивалентно завершению игры. Теорема доказана. □

2. Примеры. Приложение. Рассматривается управляемый объект с движением

$$\dot{z} = \lambda z + u - v, \tag{21}$$

где λ — действительное отрицательное число, z, u, $v \in \mathbb{R}^m$. Терминальным множеством является начало координат: $M^* = \{0\}$. Тогда $M^0 = \{0\}$ и $M = \{0\}$. Поэтому $L = \mathbb{R}^m$, π — тождественный(единичный) оператор. Так как $A = \lambda E$, где E — единичная матрица порядка $m \times m$, то фундаментальная матрица имеет вид $e^{tA} = e^{\lambda t} E$.

2.1. Пример 1. Управление преследователя имеет импульсный характер и принимает значения в шаре радиуса ρ, т.е. $U = \rho S$, где S — единичный шар с центром в нуле пространства $\mathbb{R}^m$, а управление убегающего — измеримые функции $v(t)$, $t \geqslant 0$, с «линейным» интегральным ограничением вида

$$\int\limits_0^t \|v(\vartheta)\|^2 \, d\vartheta \leqslant \nu_1 t + \nu_0, \quad t \geqslant 0,$$

где ν_1, ν_0 — неотрицательные фиксированные числа.

Предположим, что точки τ_i расположены равномерно с положительным периодом P, т.е. $\tau_i = iP$. Если ввести обозначение

$$G(n,\, (i-1)P, iP) = \left\{ x \in \mathbb{R}^m : \; x = \int\limits_{(i-1)P}^{iP} e^{\lambda(nP - \vartheta)} v(\vartheta) d\vartheta \right\}, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

где интеграл вычисляется по всем измеримым функциям $v(\vartheta)$, $(i-1)P \leqslant \vartheta \leqslant iP$, удовлетворяющим условию

$$\int\limits_{(i-1)P}^{t} \|v(\vartheta)\|^2 \, d\vartheta \leqslant \nu_1(t - (i-1)P) + \nu_0, \quad (i-1)P \leqslant t \leqslant iP,$$

то получим

$$G(n,\, (i-1)P, iP) = e^{\lambda nP} \sqrt{\frac{e^{-2\lambda(i-1)P} - e^{-2\lambda iP}}{2\lambda}} \sqrt{\nu_1 P + \nu_0}\, S =$$
$$= \sqrt{\frac{e^{2\lambda P} - 1}{2\lambda}}\, e^{\lambda(nP - iP)} \sqrt{\nu_1 P + \nu_0}\, S.$$

Тогда имеем

$$W_i(n, v(\cdot)) = e^{\lambda(nP - iP)} \rho\, S - \int\limits_{(i-1)P}^{iP} e^{\lambda(nP - \vartheta)} v(\vartheta)\, d\vartheta, \quad W_i(n) = e^{\lambda(nP - iP)} \rho\, S \underline{*} G(n,\, (i-1)P, iP)$$

или

$$W_i(n) = e^{\lambda(nP - iP)} \rho\, S \underline{*} sqrt \frac{e^{2\lambda P} - 1}{2\lambda}\, e^{\lambda(nP - iP)} \sqrt{\nu_1 P + \nu_0}\, S \quad \text{для всех } i,\ n,\ i = 1, 2, \ldots, n.$$

Следовательно, условие предположения 1 выполнено, если справедливо неравенство

$$\rho > \sqrt{\frac{e^{2\lambda P}-1}{2\lambda}}\,\sqrt{\nu_1 P+\nu_0}.$$

Таким образом, получим

$$W_i(n) = e^{\lambda(nP-iP)}\left(\rho - \sqrt{\frac{e^{2\lambda P}-1}{2\lambda}}\,\sqrt{\nu_1 P+\nu_0}\right)S, \quad i=1,2,\ldots,n.$$

Так как $W_i(n)$ содержат нулевой вектор при всех i, n, положим $w_i(n)=0$. Предположим также, что $z\neq 0$. Тогда имеем

$$\xi(n,z,w)=e^{\lambda nP}z.$$

Если ввести обозначение

$$I_i = \int\limits_{(i-1)P}^{iP} e^{-\lambda\vartheta}v(\vartheta)\,d\vartheta, \tag{22}$$

где измеримая функция $v(\vartheta)$, $(i-1)P\leqslant\vartheta\leqslant iP$, удовлетворяет условию

$$\int\limits_{(i-1)P}^{iP}\|v(\vartheta)\|^2\,d\vartheta\leqslant\sigma_i^2, \quad \sigma_i^2\in[0,\nu_1P+\nu_0],$$

то имеем

$$\widetilde{\alpha}_i(n,z,v(\cdot),w)=\sup\Big\{\alpha\geqslant 0:\ -\alpha e^{\lambda nP}z\in e^{\lambda(nP-iP)}\rho S - e^{\lambda nP}I_i\Big\}.$$

Легко заметить, что $I_i\in r_iS$, где

$$r_i=\sigma_i\sqrt{\frac{e^{2\lambda P}-1}{2\lambda}}\,e^{-\lambda iP}, \quad \sigma_i\in[0,\sqrt{\nu_1P+\nu_0}].$$

Функции $\widetilde{\alpha}_i(n,z,v(\cdot),w)$ могут быть найдены из следующего уравнения:

$$\|\alpha z - I_i\| = e^{-\lambda iP}\rho.$$

Решая его, получим

$$\widetilde{\alpha}_i(n,z,v(\cdot),w)=\frac{(z,I_i)+\sqrt{(z,I_i)^2+\|z\|^2(e^{-2\lambda iP}\rho^2-\|I_i\|^2)}}{\|z\|^2}.$$

Минимум $\widetilde{\alpha}_i(n,z,v(\cdot),w)$ по I_i достигается при

$$I_i=-\sqrt{\int\limits_{(i-1)P}^{iP}e^{-2\lambda\vartheta}\,d\vartheta}\,\frac{z}{\|z\|}\,\sigma_i, \quad \sigma_i\in\big[0,\ \sqrt{\nu_1P+\nu_0}\big].$$

Отсюда легко видеть, что последнее значение I_i получается из (22) при $v(\tau)=\psi(\tau)$, $(i-1)P\leqslant \tau\leqslant iP$, где

$$\psi(\tau)=-\frac{e^{-\lambda\tau}\sigma_i}{\sqrt{\int\limits_{(i-1)P}^{iP}e^{-2\lambda\vartheta}\,d\vartheta}}\frac{z}{\|z|\|},$$

почти для всех τ, $\tau\in[(i-1)P,iP]$. Так как

$$\inf_{\|v(\cdot)\|\leqslant\sigma_i}\widetilde{\alpha}_i(n,z,v(\cdot),w)=\frac{\rho e^{-\lambda iP}-\sigma_i\sqrt{\frac{e^{2\lambda P}-1}{2\lambda}}\,e^{-\lambda iP}}{\|z\|},$$

то

$$\inf_{v(\cdot)\in V[0,nP]}\sum_{i=1}^{n}\widetilde{\alpha}_i(n,z,v(\cdot),w)=\inf_{\sigma_1^2+\dots+\sigma_n^2\leqslant\alpha(nP)+\beta}\sum_{i=1}^{n}\frac{\rho e^{-\lambda iP}-\sigma_i\sqrt{\frac{e^{2\lambda P}-1}{2\lambda}}e^{-\lambda iP}}{\|z\|}=$$

$$=\frac{\rho}{\|z\|}\sum_{i=1}^{n}e^{-\lambda iP}-\frac{1}{\|z\|}\sqrt{\frac{e^{2\lambda P}-1}{2\lambda}}\sup_{\sigma_1^2+\dots+\sigma_n^2\leqslant\nu_1(nP)+\nu_0}\sum_{i=1}^{n}\sigma_i e^{-\lambda iP},$$

где через $V[0,nP]$ обозначено множество всех измеримых функций, определенных на отрезке $[0,nP]$ и удовлетворяющих интегральному ограничению

$$\int\limits_0^{nP}\|v(\vartheta)\|^2\,d\vartheta\leqslant\nu_1(nP)+\nu_0.$$

Теперь применяя обобщение леммы Айзекса о круговых вектограммах (см. [1]) к вычитаемому члену последнего выражения, получим

$$\inf_{v(\cdot)\in V[0,nP]}\sum_{i=1}^{n}\widetilde{\alpha}_i(n,z,v(\cdot),w)=\frac{\rho}{\|z\|}\sum_{i=1}^{n}e^{-\lambda iP}-\frac{\sqrt{\nu_1(nP)+\nu_0}}{\|z\|}\sqrt{\frac{e^{2\lambda P}-1}{2\lambda}}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}e^{-2\lambda iP}}.$$

Если ввести обозначение $q=e^{-\lambda P}>1$, то после элементарных вычислений отсюда получим

$$\inf_{v(\cdot)\in V[0,nP]}\sum_{i=1}^{n}\widetilde{\alpha}_i(n,z,v(\cdot),w)=\frac{1}{\|z\|}\left(\rho\,\frac{q^{n+1}-q}{q-1}-\sqrt{\nu_1(nP)+\nu_0}\sqrt{\frac{1-q^2}{2\lambda}}\sqrt{\frac{q^{2n}-1}{q^2-1}}\right).$$

Отсюда при $n=1$ имеем

$$\inf_{v(\cdot)\in V[0,P]}\widetilde{\alpha}_1(n,z,v(\cdot),w)=\frac{1}{\|z\|}\left(\rho\,q-\sqrt{\nu_1P+\nu_0}\sqrt{\frac{1-q^2}{2\lambda}}\right).$$

Теперь, учитывая неравенства

$$\rho>\sqrt{\frac{e^{2\lambda P}-1}{2\lambda}}\sqrt{\nu_1P+\nu_0},\quad q>1,$$

из последнего равенства получим

$$\rho\,q-\sqrt{\nu_1P+\nu_0}\sqrt{\frac{1-q^2}{2\lambda}}>0.$$

Это означает, что из точек z, $z\in\mathbb{R}^m$, удовлетворяющих неравенству

$$\|z\|\leqslant\rho\,q-\sqrt{\nu_1P+\nu_0}\sqrt{\frac{1-q^2}{2\lambda}},$$

можно завершить преследование в момент времени $t=P$.

Таким образом, имеем $N(z_0,w)=1$.

Следовательно, по теореме **??** траектория системы (21), выходящая из произвольного начального положения $z=z_0\neq0$, удовлетворяющего последнему неравенству, может быть приведена в терминальное множество $M=\{0\}$ не позднее момента времени $\tau_1=P$.

2.2. Пример 2. Рассматривается управляемый объект с движением (21). Пусть t — некоторый момент времени.

Управления преследователя измеримые функции $u(t)$, $t\geqslant0$, с интегральным ограничением

$$\int\limits_0^{t}\|u(\vartheta)\|^2\,d\vartheta\leqslant\mu_1t+\mu_0,\quad t\geqslant0,$$

где μ_1, μ_0 — неотрицательные фиксированные числа, а управление убегающего имеет импульсный характер, принимающее значения из шара радиуса σ, т.е. $V = \sigma S$, где S — единичный шар с центром в нуле пространства $\mathbb{R}^m$.

Предположим, что точки τ_i расположены равномерно с положительным периодом P, т.е. $\tau_i = iP$. Так что, управление убегающего представляется с помощью обобщенной функции Дирака:

$$v(t) = \sum_{i=0}^{\infty} v_i \delta(t - iP), \quad v_i \in V.$$

Пусть преследующий игрок на отрезках времени $[0, P)$, $[P, 2P)$, $\ldots$, $\big[(n(t) - 1)P, n(t)P\big)$, $\big[n(t)P,\, t\big]$ использует ресурсы

$$\rho_0^2 = \rho_1^2 = \ldots = \rho_{n(t)-1}^2 = \frac{1 - e^{-2\lambda P}}{n(t)(1 - e^{-2\lambda P}) + 1 - e^{-2\lambda(t - n(t)P)}} (e^{\lambda P} \mu_1 t + \mu_0),$$

$$\rho_{n(t)}^2 = \frac{1 - e^{-2\lambda(t - n(t)P)}}{n(t)(1 - e^{-2\lambda P}) + 1 - e^{-2\lambda(t - n(t)P)}} (e^{\lambda P} \mu_1 t + \mu_0)$$

соответственно. Далее, рассмотрим только такие моменты t времени, для которых имеет место неравенство

$$e^{\lambda P} \left(1 + \frac{1}{n(t)}\right) \mu_1 P + \frac{\mu_0}{n(t)} < \mu_1 P.$$

Тогда можно показать, что

$$\rho_i^2 \leqslant \mu_1 P + \mu_{0i}, \quad i = 0, 1, \ldots, n(t) - 1, \qquad \rho_{n(t)}^2 \leqslant \mu_1 (t - n(t)P) + \mu_{0n(t)},$$

где

$$\mu_{00} = \mu_{01} = \ldots = \mu_{0n(t)-1} = \frac{1 - e^{-2\lambda P}}{n(t)(1 - e^{-2\lambda P}) + 1 - e^{-2\lambda(t - n(t)P)}} \mu_0,$$

$$\mu_{0n(t)} = \frac{1 - e^{-2\lambda(t - n(t)P)}}{n(t)(1 - e^{-2\lambda P}) + 1 - e^{-2\lambda(t - n(t)P)}} \mu_0,$$

причем $\mu_{00} + \mu_{01} + \ldots + \mu_{0n(t)} = \mu_0$. Отсюда получим

$$\rho_0^2 + \rho_1^2 + \ldots + \rho_{n(t)-1}^2 + \rho_{n(t)}^2 \leqslant \mu_1 t + \mu_0 \quad \text{при} \quad n(t)P \leqslant t < (n(t) + 1)P.$$

Если ввести обозначения

$$F(t,\, iP, (i+1)P) = \left\{ x \in \mathbb{R}^m :\ x = \int\limits_{iP}^{(i+1)P} e^{\lambda(t - \vartheta)} u(\vartheta)\, d\vartheta \right\},$$

где интеграл вычисляется по всем измеримым функциям $u(\vartheta)$, $(i-1)P \leqslant \vartheta \leqslant iP$, удовлетворяющим условию

$$\int\limits_{iP}^{(i+1)P} \|u(\vartheta)\|^2\, d\vartheta \leqslant \rho_i^2, \quad i = 0, 1, \ldots, n(t) - 1,$$

и

$$F(t,\, n(t)P, t) = \left\{ x \in \mathbb{R}^m :\ x = \int\limits_{n(t)P}^{t} e^{\lambda(t - \vartheta)} u(\vartheta)\, d\vartheta \right\}$$

где здесь интеграл вычисляется по всем измеримым функциям $u(\vartheta)$, $n(t)P \leqslant \vartheta \leqslant t$, удовлетворяющим условию

$$\int\limits_{n(t)P}^{t} \|u(\vartheta)\|^2\, d\vartheta \leqslant \rho_i^2,$$

то для $i = 0, 1, \ldots, n(t) - 1$ получим

$$F(t,\, iP, (i+1)P) = \frac{e^{-2\lambda P} - 1}{\sqrt{2\lambda\big(n(t)(1 - e^{-2\lambda P}) + 1 - e^{-2\lambda(t - n(t)P)}\big)}} \quad e^{\lambda(t - iP)} \sqrt{e^{\lambda P}\mu_1 t + \mu_0}\, S,$$

$$F(t,\, n(t)P, t) = \frac{e^{-2\lambda(t - n(t)P)} - 1}{\sqrt{2\lambda\big(n(t)(1 - e^{-2\lambda P}) + 1 - e^{-2\lambda(t - n(t)P)}\big)}} \quad e^{\lambda(t - n(t)P)} \sqrt{e^{\lambda P}\mu_1 t + \mu_0}\, S.$$

Тогда для $i = 0, 1, \ldots, n(t) - 1$ имеем

$$W_i(t, v) = \left(\frac{e^{-2\lambda P} - 1}{\sqrt{2\lambda\big(n(t)(1 - e^{-2\lambda P}) + 1 - e^{-2\lambda(t - n(t)P)}\big)}} \sqrt{e^{\lambda P}\mu_1 t + \mu_0}\, S - v \right) e^{\lambda(t - iP)},$$

$$W_{n(t)}(t, v) = \left(\frac{e^{-2\lambda(t - n(t)P)} - 1}{\sqrt{2\lambda\big(n(t)(1 - e^{-2\lambda P}) + 1 - e^{-2\lambda(t - n(t)P)}\big)}} \sqrt{e^{\lambda P}\mu_1 t + \mu_0}\, S - v \right) e^{\lambda(t - n(t)P)}.$$

Отсюда при $i = 0, 1, \ldots, n(t) - 1$ имеем

$$W_i(t) = \left(\frac{e^{-2\lambda P} - 1}{\sqrt{2\lambda\big(n(t)(1 - e^{-2\lambda P}) + 1 - e^{-2\lambda(t - n(t)P)}\big)}} \sqrt{e^{\lambda P}\mu_1 t + \mu_0}\, S \underline{*} \sigma S \right) e^{\lambda(t - iP)},$$

$$W_{n(t)}(t) = \left(\frac{e^{-2\lambda(t - n(t)P)} - 1}{\sqrt{2\lambda\big(n(t)(1 - e^{-2\lambda P}) + 1 - e^{-2\lambda(t - n(t)P)}\big)}} \sqrt{e^{\lambda P}\mu_1 t + \mu_0}\, S \underline{*} \sigma S \right) e^{\lambda(t - n(t)P)}. \tag{23}$$

Следовательно, предположение 2 выполнено, если справедливо неравенство

$$\frac{e^{-2\lambda(t - n(t)P)} - 1}{\sqrt{2\lambda\big(n(t)(1 - e^{-2\lambda P}) + 1 - e^{-2\lambda(t - n(t)P)}\big)}} \sqrt{e^{\lambda P}\mu_1 t + \mu_0} \geqslant \sigma. \tag{24}$$

Пусть $q = e^{-\lambda P}$. Тогда верно следующее утверждение.

Утверждение 1. *Если*

$$\frac{sh(\lambda P)}{\lambda}\mu_1 P > \sigma^2,$$

то из всех начальных точек $z_0 \neq 0$ возможно завершение преследования.

Доказательство. Заметим, что в (24) справедливо неравенство $n(t)P \leqslant t < (n(t)+1)P$. Поэтому при $t \to (n(t)+1)P$ из (24) имеем

$$\left(\frac{sh(\lambda P)}{\lambda}\mu_1 P + \frac{(1 - q^2)\mu_0}{2\lambda(n(t)+1)} \right) > \sigma^2.$$

Следовательно, существует такой момент времени $T(t) \in [n(t)P, (n(t)+1)P)$, что имеет место равенство

$$\frac{e^{-2\lambda(T(t) - n(t)P)} - 1}{\sqrt{2\lambda\big(n(t)(1 - e^{-2\lambda P}) + 1 - e^{-2\lambda(T(t) - n(t)P)}\big)}} \sqrt{e^{\lambda P}\mu_1 T(t) + \mu_0} = \sigma.$$

Таким образом, неравенство (24) будет выполнено для всех $t \in [T(t), (n(t)+1)P)$. Отсюда получим, что

$$\mathfrak{T} = \bigcup_{t \geqslant 0} \Big\{ \tau : T(t) \leqslant \tau < (n(t)+1)P \Big\}.$$

$\square$

Из (23) для $i = 0, 1, \dots, n(t) - 1$ имеем

$$W_i(t) = \left(\frac{e^{-2\lambda P} - 1}{\sqrt{2\lambda\big(n(t)(1 - e^{-2\lambda P}) + 1 - e^{-2\lambda(t - n(t)P)}\big)}} \sqrt{e^{\lambda P}\mu_1 t + \mu_0} - \sigma \right) e^{\lambda(t - iP)} S,$$

$$W_{n(t)}(t) = \left(\frac{e^{-2\lambda(t - n(t)P)} - 1}{\sqrt{2\lambda\big(n(t)(1 - e^{-2\lambda P}) + 1 - e^{-2\lambda(t - n(t)P)}\big)}} \sqrt{e^{\lambda P}\mu_1 t + \mu_0} - \sigma \right) e^{\lambda(t - n(t)P)} S.$$

Так как $W_i(t)$ содержат нулевой вектор при всех i, $i = 0, 1, \dots, n(t)$, положим $w_i(t) = 0$. Предположим, что $z \neq 0$. Имеем

$$\xi(t, z, w) = e^{\lambda t} z, \quad T(t) \leqslant t < (n(t) + 1)P.$$

Введем следующие обозначения:

$$\varphi(t) = \frac{e^{-2\lambda P} - 1}{\sqrt{2\lambda\big(n(t)(1 - e^{-2\lambda P}) + 1 - e^{-2\lambda(t - n(t)P)}\big)}},$$

$$\psi(t) = \frac{e^{-2\lambda(t - n(t)P)} - 1}{\sqrt{2\lambda\big(n(t)(1 - e^{-2\lambda P}) + 1 - e^{-2\lambda(t - n(t)P)}\big)}}, \quad T(t) \leqslant t < (n(t) + 1)P.$$

Получим

$$\widetilde{\alpha}_i(t, z, v, w) = \sup\Big\{\alpha \geqslant 0 : \ \alpha(-e^{\lambda t} z) \cap \big(\varphi(t) \sqrt{e^{\lambda P}\mu_1 t + \mu_0}\, S - v\big) e^{\lambda(t - iP)}\Big\},$$

где $i = 0, 1, \dots, n(t) - 1$,

$$\widetilde{\alpha}_{n(t)}(t, z, v, w) = \sup\Big\{\alpha \geqslant 0 : \ \alpha(-e^{\lambda t} z) \cap \big(\psi(t) \quad \sqrt{e^{\lambda P}\mu_1 t + \mu_0}\, S - v\big) e^{\lambda(t - n(t)P)}\Big\}.$$

Функции $\widetilde{\alpha}_i(t, z, v, w)$, $i = 0, 1, \dots, n(t) - 1$, являются решением уравнения

$$\Big\| e^{-\lambda i P} v - \alpha z \Big\| = \varphi(t) e^{-\lambda i P} \sqrt{e^{\lambda P}\mu_1 t + \mu_0},$$

а функция $\widetilde{\alpha}_{n(t)}(t, z, v, w)$ — решением уравнения

$$\Big\| e^{-\lambda n(t) P} v - \alpha z \Big\| = \psi(t) e^{-\lambda n(t) P} \sqrt{e^{\lambda P}\mu_1 t + \mu_0}.$$

Решения этих уравнений легко найти:

$$\widetilde{\alpha}_i(t, z, v, w) = \frac{(z, v) e^{-\lambda i P} + \sqrt{(z, v)^2 e^{-2\lambda i P} + \|z\|^2 \Big(\varphi^2(t)(e^{\lambda P}\mu_1 t + \mu_0) - \|v\|\Big) e^{-2\lambda i P} \|z\|^2}}{\|z\|^2},$$

где $i = 0, 1, \dots, n(t) - 1$,

$$\widetilde{\alpha}_{n(t)}(t, z, v, w) = \frac{(z, v) e^{-\lambda n(t) P} + \sqrt{(z, v)^2 e^{-2\lambda n(t) P} + \|z\|^2 \Big(\psi^2(t)(e^{\lambda P}\mu_1 t + \mu_0) - \|v\|\Big) e^{-2\lambda n(t) P} \|z\|^2}}{\|z\|^2}.$$

Отсюда имеем

$$\inf_{v \in V} \widetilde{\alpha}_i(t, z, v, w) = \frac{\varphi(t)\sqrt{e^{\lambda P}\mu_1 t + \mu_0} - \sigma}{\|z\|} e^{-\lambda i P}, \quad i = 0, 1, \dots, n(t) - 1,$$

$$\inf_{v \in V} \widetilde{\alpha}_{n(t)}(t, z, v, w) = \frac{\psi(t)\sqrt{e^{\lambda P}\mu_1 t + \mu_0} - \sigma}{\|z\|} e^{-\lambda n(t) P}.$$

Значит,

$$\sum_{i=0}^{n(t)} \inf_{v\in V} \widetilde{\alpha}_i(t,z,v,w) = \frac{\varphi(t)\sqrt{e^{\lambda P}\mu_1 t+\mu_0}-\sigma}{\|z\|}\sum_{i=0}^{n(t)-1} e^{-\lambda i P} +$$
$$+\frac{\psi(t)\sqrt{e^{\lambda P}\mu_1 t+\mu_0}-\sigma}{\|z\|}e^{-\lambda n(t)P} = \frac{\varphi(t)\sqrt{e^{\lambda P}\mu_1 t+\mu_0}-\sigma}{\|z\|}\,\frac{q^{n(t)}-1}{q-1}+\frac{\psi(t)\sqrt{e^{\lambda P}\mu_1 t+\mu_0}-\sigma}{\|z\|}q^{n(t)}.$$

Следовательно, для данного $z\neq 0$ неравенство

$$\frac{\varphi(t)\sqrt{e^{\lambda P}\mu_1 t+\mu_0}-\sigma}{\|z\|}\,\frac{q^{n(t)}-1}{q-1}+\frac{\psi(t)\sqrt{e^{\lambda P}\mu_1 t+\mu_0}-\sigma}{\|z\|}q^{n(t)}\geqslant 1$$

можно обеспечить для некоторого t, $t\in\bigl[T(t),\,(n(t)+1)P\bigr)$, если z удовлетворяет условию

$$\|z\| < \Bigl(\varphi((n(t)+1)P)\sqrt{e^{\lambda P}\mu_1(n(t)+1)P+\mu_0}-\sigma\Bigr)\,\frac{q^{n(t)+1}-1}{q-1}.$$

Такое неравенство имеет место для любой точки $z\in\mathbb{R}^m$, поскольку верны неравенства

$$\varphi((n(t)+1)P)\sqrt{e^{\lambda P}\mu_1(n(t)+1)P+\mu_0}-\sigma > \varphi(P)\sqrt{e^{\lambda P}\mu_1 P}-\sigma>0,\quad q>1.$$

2.3. Приложение. Рассмотрим следующие два множества:

$$F(t_1,t_2)=\left\{x\in\mathbb{R}^m:\ x=\int_{t_1}^{t_2} f(\vartheta)w(\vartheta)\,d\vartheta\right\}$$

где интеграл вычисляется по всем измеримым функциям $w(\vartheta)$, $t_1\leqslant\vartheta\leqslant t_2$, удовлетворяющим условию

$$\int_{t_1}^{\tau}\|w(\vartheta)\|^2\,d\vartheta\leqslant r_1\tau+r_0,\quad t_1\leqslant\tau\leqslant t_2,$$

и

$$G(t_1,t_2)=\left\{y\in\mathbb{R}^m:\ y=\int_{t_1}^{t_2} f(\vartheta)w(\vartheta)\,d\vartheta\right\},$$

где здесь интеграл вычисляется по всем измеримым функциям $w(\vartheta)$, $t_1\leqslant\vartheta\leqslant t_2$, удовлетворяющим условию

$$\int_{t_1}^{t_2}\|w(\vartheta)\|^2\,d\vartheta\leqslant r_1 t_2+r_0;$$

здесь t, r_1, r_0, t_1, t_2 — произвольные неотрицательные числа, причем $t_1<t_2$, $f(\vartheta)$ — непрерывно дифференцируемая функция на отрезке $[t_1,\,t_2]$ с условием $f(\vartheta)f'(\vartheta)\geqslant 0$.

Известно, что $G(t_1,t_2)=S_{R(t_1,t_2)}$, где

$$R(t_1,t_2)=\sqrt{\int_{t_1}^{t_2} f^2(\vartheta)d\vartheta}\,\sqrt{r_1t_2+r_0};$$

здесь S_r — шар радиуса r с центром в нуле пространства $\mathbb{R}^m$.

Утверждение 2. *$F(t_1,t_2)=G(t_1,t_2)$.*

Доказательство. Включение $F(t_1,t_2) \subset G(t_1,t_2)$ очевидно, поэтому покажем обратное: $F(t_1,t_2) \supset G(t_1,t_2)$. Пусть $g \in G(t_1,t_2)$, причем $\|g\| = R(t_1,t_2)$. Рассмотрим функцию

$$w_0(\vartheta) = f(\vartheta)\sqrt{\frac{r_1 t_2 + r_0}{\int\limits_{t_1}^{t_2} f^2(\vartheta)\,d\vartheta}}\,\frac{g}{\|g\|}, \quad t_1 \leqslant \vartheta \leqslant t_2.$$

Имеем

$$\int\limits_{t_1}^{t_2} \|w_0(\vartheta)\|^2 d\vartheta = \int\limits_{t_1}^{t_2} f^2(\vartheta)\frac{r_1 t_2 + r_0}{\int\limits_{t_1}^{t_2} f^2(\vartheta)\,d\vartheta} d\vartheta = r_1 t_2 + r_0.$$

Легко показать следующее равенство:

$$\int\limits_{t_1}^{t_2} f(\vartheta) w_0(\vartheta)\,d\vartheta = g. \tag{25}$$

Получим

$$\int\limits_{t_1}^{\tau} \|w_0(\vartheta)\|^2 d\vartheta = \int\limits_{t_1}^{\tau} f^2(\vartheta)\frac{r_1 t_2 + r_0}{\int\limits_{t_1}^{t_2} f^2(\vartheta)\,d\vartheta} d\vartheta = \frac{r_1 t_2 \int\limits_{t_1}^{\tau} f^2(\vartheta)d\vartheta + r_0 \int\limits_{t_1}^{\tau} f^2(\vartheta)d\vartheta}{\int\limits_{t_1}^{t_2} f^2(\vartheta)\,d\vartheta} \leqslant \frac{r_1 t_2 \int\limits_{t_1}^{\tau} f^2(\vartheta)d\vartheta}{\int\limits_{t_1}^{t_2} f^2(\vartheta)\,d\vartheta} + r_0. \tag{26}$$

При $\tau > t_1$ рассмотрим функцию

$$\varphi(\tau) = \frac{1}{\tau}\int\limits_{t_1}^{\tau} f^2(\vartheta)d\vartheta.$$

Заметим, что

$$\lim_{\tau \to t_1+} \varphi(\tau) \geqslant 0,$$

$$\varphi' = \frac{f^2(\tau)\tau - \int\limits_{t_1}^{\tau} f^2(\vartheta)d\vartheta}{\tau^2}, \quad \tau > t_1.$$

Так как $f(\tau)f'(\tau) \geqslant 0$ при $\tau > t_1$, получаем, что $\varphi(\tau)$ является неубывающей функцией при $\tau > t_1$. Значит, $\varphi(\tau) \leqslant \varphi(t_2)$, откуда

$$t_2 \int\limits_{t_1}^{\tau} f^2(\vartheta)d\vartheta \leqslant \tau \int\limits_{t_1}^{t_2} f^2(\vartheta)d\vartheta.$$

Тогда из (26) имеем

$$\int\limits_{t_1}^{\tau} \|w_0(\vartheta)\|^2 d\vartheta \leqslant r_1\tau + r_0, \quad t_1 < \tau \leqslant t_2. \tag{27}$$

Из (27) и (25) получаем, что $g \in F(t_1,t_2)$. В силу выпуклости множество $F(t_1,t_2)$ имеем $F(t_1,t_2) \supset G(t_1,t_2)$. Утверждение доказано. $\square$

Результат этого утверждения может быть использован при нахождении интеграла от многозначного отображения, когда на управления игроков наложено линейное ограничение интегрального характера (см. [11]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Айзекс Р.* Дифференциальные игры. — М.: Мир, 1967.
2. *Белоусов А. А.* Дифференциальные игры с интегральными ограничениями и импульсными управлениями// Доп. НАН України. — 2013. — № 11. — С. 37–42.
3. *Белоусов А. А.* Импульсные управления в дифференциальных играх с интегральными ограничениями// Теор. оптим. рішень. — 2013. — № 12. — С. 50–55.
4. *Котлячкова Е. В.* К нестационарной задаче простого преследования в классе импульсных стратегий// Изв. Ин-та мат. информ. УдГУ. — 2015. — *1*, № 45. — С. 106–113.
5. *Красовский Н. Н.* Теория управления движением. — М.: Наука, 1968.
6. *Красовский Н. Н.* Игровые задачи о встрече движений. — М.: Наука, 1970.
7. *Красовский Н. Н.* Управление динамической системой. — М.: Наука, 1985.
8. *Красовский Н. Н., Субботин А. И.* Позиционные дифференциальные игры. — М.: Наука, 1974.
9. *Пожарицкий Г. К.* Импульсная погоня за противником с ограниченной энергетикой// Изв. АН СССР. Мех. тв. тела.— 1975. — № 1. — С. 3–5.
10. *Понтрягин Л. С.* Избранные научные труды. Т. 2. — М.: Наука, 1988.
11. *Саматов Б. Т.* П-стратегия в дифференциальной игре с линейными ограничениями по управлению// Прикл. мат. мех. — 2014. — *78*, № 3. — С. 369–377.
12. *Тухтасинов М.* Линейная дифференциальная игра преследования с импульсными и интегрально-ограниченными управлениями игроков// Тр. Ин-та мат. мех. УрО РАН. — 2016. — *22*, № 3. — С. 273–282.
13. *Ухоботов В. И.* Об одном классе линейных дифференциальных игр с импульсными управлениями// Прикл. мат. мех. — 1974. — *38*, № 4. — С. 590–598.
14. *Ухоботов В. И.* Выпуклая игровая задача импульсного преследования второго порядка// В сб.: XII Всероссийское совещание по проблемам управления. — М., 2014. — С. 2089–2095.
15. *Ухоботов В. И., Изместьев И. В.* Об одной игре импульсной встречи с терминальным множеством в форме кольца// Вестн. Южно-Ур. ун-та. Сер. мат. мех. физ. — 2014. *6*, № 3. — С. 53–59.
16. *Ухоботов В. И., Троицкий А. А.* Об одной задаче импульсного преследования// Вестн. Южно-Ур. ун-та. Сер. мат. мех. физ. — 2013. — *5*, № 2. — С. 79–87.
17. *Филиппов А. Ф.* Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. — М.: Наука, 1985.
18. *Чикрий А. А.* Конфликтно управляемые процессы. — Киев: Наукова думка, 1992.
19. *Чикрий А. А., Белоусов А. А.* О линейных дифференциальных играх с интегральными ограничениями// Тр. Ин-та мат. мех. УрО РАН. — 2009. — *15*, № 4. — С. 290–301.
20. *Чикрий А. А., Матичин И. И.* Линейные дифференциальные игры с импульсным управлением игроков// Тр. Ин-та мат. мех. УрО РАН. — 2005. — *11*, № 1. — С. 212–224.
21. *Чикрий А. А., Чикрий Г. Ц.* Матричные разрешающие функции в игровых задачах динамики// Тр. Ин-та мат. мех. УрО РАН. — 2014. *20*, № 3. — С. 324–333.

М. Тухтасинов
Национальный университет Узбекистана им. М. Улугбека (Ташкент)
E-mail: mumin51@mail.ru

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 143 (2017). С. 40–47

УДК 517.518.822

АППРОКСИМАЦИЯ ПОЛИНОМАМИ В ВЕСОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ БЕСКОНЕЧНО ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ В НЕОГРАНИЧЕННОЙ ВЫПУКЛОЙ ОБЛАСТИ

© 2017 г. **И. Х. МУСИН**

Аннотация. Изучается проблема аппроксимации полиномами в пространстве бесконечно дифференцируемых функций в неограниченной выпуклой области в $\mathbb{R}^n$ заданного роста вблизи границы области и на бесконечности.

Ключевые слова: аппроксимация полиномами, бесконечно дифференцируемые функции.

AMS Subject Classification: 41A10

1. Введение. Пусть Ω — неограниченная выпуклая область в $\mathbb{R}^n$.

Пусть $\{h_m\}_{m=1}^{\infty}$ — семейство положительных функций h_m на Ω, удовлетворяющих следующему условию: для любого $m \in \mathbb{N}$ найдется такое число $a_m \geqslant 0$, что

$$h_m(x) - h_{m+1}(x) \geqslant \left(\ln \frac{1}{d(x)}\right)^+ - a_m, \quad x \in \Omega,$$

где $d(x)$ — расстояние от точки $x \in \Omega$ до границы $\partial\Omega$ области Ω, $t^+ = t$ для $t \geqslant 0$ и $t^+ = 0$ для $t < 0$.

Пусть $\{\psi_m\}_{m=1}^{\infty}$ — семейство таких положительных функций $\psi_m \in C(\mathbb{R}^n)$, что для любого $m \in \mathbb{N}$:

(a) имеет место равенство

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\psi_m(x)}{\|x\|} = +\infty,$$

где $\|\cdot\|$ — евклидова норма в $\mathbb{R}^n$,

(b) существует такое число $b_m \geqslant 0$, что для всех $x \in \mathbb{R}^n$

$$\psi_m(x) - \psi_{m+1}(x) \geqslant \ln(1 + \|x\|) - b_m.$$

Пусть $\varphi_m(x) = h_m(x) + \psi_m(x)$, $x \in \Omega$, $m \in \mathbb{N}$. Образуем семейство $\Phi = \{\varphi_m\}_{m=1}^{\infty}$ следующим образом. Для каждого $m \in \mathbb{N}$ пусть

$$\mathcal{E}(\varphi_m) = \left\{ f \in C^m(\Omega) : p_m(f) = \sup_{\substack{x\in\Omega,\\ |\alpha|\leqslant m}} \frac{|(D^\alpha f)(x)|}{\exp(\varphi_m(x))} < \infty \right\}.$$

Пусть $\mathcal{E}(\Phi)$ — проективный предел пространств $\mathcal{E}(\varphi_m)$.

В заметке изучается проблема аппроксимации полиномами в $\mathcal{E}(\Phi)$. Интерес к ней связан с работой М. М. Маннанова [1], в которой изучалась задача описания сопряженного пространства для пространства голоморфных функций в неограниченной выпуклой области в $\mathbb{C}^n$, удовлетворяющих некоторым ограничениям на рост вблизи границы области и на бесконечности. При решении этой задачи он использовал схему доказательства теоремы Полиа—Мартино—Эренпрайса (см. [3, теорема 4.5.3]) и развил методы работы [2]. Таким образом, ему пришлось иметь дело с пространством бесконечно дифференцируемых функций в неограниченной выпуклой области

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 15-01-01661).

в $\mathbb{R}^{2n}$ заданного роста вблизи границы области и на бесконечности. Однако аппроксимационные задачи в этом пространстве не изучались. Для получения основного результата работы [1] в этом и не было необходимости.

Отметим, что проблема аппроксимации полиномами в $\mathcal{E}(\Phi)$ изучается при минимальных ограничениях на весовые функции h_m и ψ_m. Основной результат работы — следующая теорема (доказанная в разделе 2).

Теорема 1. *Полиномы плотны в* $\mathcal{E}(\Phi)$.

Эта теорема позволяет изучить некоторые вопросы динамики линейных операторов. В частности, нетрудно показать, что любой линейный непрерывный оператор на $\mathcal{E}(\Phi)$, коммутирующий с операторами частного дифференцирования и не являюшийся кратным тождественному оператору, является гиперциклическим. Кроме этого, она вкупе с результатом М. М. Маннанова (см. [1, теорема 1]) об эпиморфности преобразования Фурье—Лапласа позволяет перейти к изучению классических задач теории дифференциальных уравнений и уравнений свертки в замкнутых подпространствах пространства $\mathcal{E}(\Phi)$.

Будем использовать следующие обозначения. Для точек $u=(u_1,\dots,u_n)$, $v=(v_1,\dots,v_n)$ из $\mathbb{R}^n$ (или $\mathbb{C}^n$) пусть

$$\langle u,v\rangle = u_1v_1+\dots+u_nv_n,$$

$\|u\|$ — евклидова норма в $\mathbb{R}^n$ (или $\mathbb{C}^n$). Для мультииндекса $\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in\mathbb{Z}_+^n$ и точек $x=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$, $z=(z_1,\dots,z_n)\in\mathbb{C}^n$ полагаем

$$|\alpha|=\alpha_1+\ldots+\alpha_n,\quad x^\alpha=x_1^{\alpha_1}\cdots x_n^{\alpha_n},\quad z^\alpha=z_1^{\alpha_1}\cdots z_n^{\alpha_n},\quad D^\alpha=\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Для мультииндексов $\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$, $\beta=(\beta_1,\dots,\beta_n)\in\mathbb{Z}_+^\varkappa$ обозначение $\beta\leqslant\alpha$ означает, что $\beta_j\leqslant\alpha_j$ $(j=1,2,\dots,n)$.

Введем также следующие обозначения: $\theta_m(x):=\exp(\varphi_m(x))$, $x\in\mathbb{R}^n$; $S^{n-1}=\{x\in\mathbb{R}^n:\|x\|=1\}$; для $\sigma\in S^{n-1}$ положим $\psi_{m,\sigma}(t):=\psi_m(\sigma t)$, $t\geqslant 0$; для функции $u:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ положим $u[e](x):=u(e^x)$, $x\geqslant 0$. Обозначим ε-раздутие множества Ω через $\Omega^{(\varepsilon)}$, $\varepsilon>0$, а границу области Ω — через $\partial\Omega$.

2. Аппроксимация полиномами в $\mathcal{E}(\Phi)$.

Для непрерывной функции $g:[0,\infty)\to\mathbb{R}$, обладающей свойством

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x}=+\infty, \tag{1}$$

положим

$$g^*(x)=\sup_{y\geqslant 0}(xy-g(y)),\quad x\geqslant 0.$$

Отметим, что $g^*(x)<\infty$ на $[0,\infty)$ и

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{g^*(x)}{x}=+\infty.$$

Лемма 1. *Пусть непрерывная функция* $u:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ *удовлетворяет условию* (1). *Тогда*

$$\big(u[e]\big)^*(x)+\big(u^*[e]\big)^*(x)\leqslant x\ln x-x,\quad x>0.$$

Доказательство. Пусть $x>0$. Найдутся такие точки $t\geqslant 0$ и $\xi\geqslant 0$, что

$$\big(u[e]\big)^*(x)=xt-u(e^t),\quad \big(u^*[e]\big)^*(x)=x\xi-u^*(e^\xi).$$

Таким образом,

$$\big(u[e]\big)^*(x)+\big(u^*[e]\big)^*(x)=xt-u(e^t)+x\xi-\sup_{\eta\geqslant 0}\big(e^\xi\eta-u(\eta)\big).$$

Следовательно, для любого $\eta\geqslant 0$

$$\big(u[e]\big)^*(x)+\big(u^*[e]\big)^*(x)\leqslant xt-u(e^t)+x\xi-e^\xi\eta+u(\eta).$$

Полагая здесь $\eta = e^t$, имеем

$$\big(u[e]\big)^*(x) + \big(u^*[e]\big)^*(x) \leqslant xt + x\xi - e^{\xi+t}.$$

Следовательно,

$$\big(u[e]\big)^*(x) + \big(u^*[e]\big)^*(x) \leqslant \sup_{y\geqslant 0}(xy - e^y) \leqslant \sup_{y\in\mathbb{R}}(xy - e^y) = x\ln x - x. \qquad \square$$

Доказательство теоремы 1. Пусть ω — такая функция на $\mathbb{R}^{\ltimes}$, что

$$\omega(t) = c_\omega \exp\left(-\frac{1}{1-\|t\|^2}\right) \quad \text{для } \|t\| < 1, \qquad \omega(t) = 0 \quad \text{для } \|t\| \geqslant 1,$$

где постоянная $c_\omega > 0$ такова, что

$$\int\limits_{\mathbb{R}^{\ltimes}} \omega(t)\,dt = 1.$$

Для $\varepsilon > 0$ пусть

$$\omega_\varepsilon(t) = \varepsilon^{-n}\omega\left(\frac{t}{\varepsilon}\right), \quad t \in \mathbb{R}^{\ltimes}.$$

Для каждого $\nu \in \mathbb{N}$ пусть

$$K_\nu = \left\{x \in \Omega : \|x\| \leqslant \nu,\ \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) \geqslant \frac{1}{\nu}\right\}.$$

Очевидно, замкнутые множества K_ν непусты при $\nu \geqslant \nu_0$ (ν_0 — некоторое натуральное число) и $K_\nu \subset \operatorname{int} K_{\nu+1}$,

$$\bigcup_{\nu=\nu_0}^{\infty} K_\nu = \Omega.$$

Для $\nu \geqslant \nu_0$ пусть

$$r_\nu = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{\nu} - \frac{1}{\nu+1}\right), \quad \eta_\nu(x) = \int\limits_{K_\nu^{(2r_\nu)}} \omega_{r_\nu}(x-y)\,dy, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Очевидно, $\eta_\nu \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\eta_\nu(x) = 1$ для $x \in K_\nu^{(r_\nu)}$, $\eta_\nu(x) = 0$ для $x \notin K_\nu^{(3r_\nu)}$, $0 \leqslant \eta_\nu(x) \leqslant 1$ для $x \in \mathbb{R}^n$.

Для любого $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ и всех $x \in \mathbb{R}^n$ имеем

$$|(D^\alpha\eta_\nu)(x)| \leqslant \frac{1}{r_\nu^{n+|\alpha|}} \sup_{t\in\mathbb{R}^{\ltimes}} |(D^\alpha\omega)(t)| \cdot \mu(K_\nu^{(2r_\nu)}) \leqslant \frac{m_\alpha}{r_\nu^{n+|\alpha|}} \cdot \mu(K_\nu^{(2r_\nu)}) \leqslant \frac{M_\alpha(1+\nu)^n}{r_\nu^{n+|\alpha|}},$$

где

$$m_\alpha = \sup_{t\in\mathbb{R}^{\ltimes}} |(D^\alpha\omega)(t)|, \quad M_\alpha = \frac{m_\alpha \pi^{n/2}}{\Gamma(n/2+1)},$$

Γ — гамма-функция и μ — n-мерная мера Лебега. Таким образом, для любого $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ имеем

$$|(D^\alpha\eta_\nu)(x)| \leqslant M_\alpha 4^{n+|\alpha|}(\nu+1)^{3n+2|\alpha|}, \quad x \in \mathbb{R}^{\ltimes}, \tag{2}$$

где $M_\alpha > 0$ не зависит от $\nu \geqslant \nu_0$.

Пусть $f \in \mathcal{E}(\varPhi)$. Это означает, что $f \in C^\infty(\Omega)$ и для каждого $m \in \mathbb{N}$

$$|(D^\alpha f)(x)| \leqslant p_m(f)\theta_m(x), \quad x \in \Omega,\ |\alpha| \leqslant m, \quad p_m(f) < \infty \tag{3}$$

Приблизим f полиномами в $\mathcal{E}(\varPhi)$. Сделаем это в три шага.

1. Для каждого натурального $\nu \geqslant \nu_0$ пусть $f_\nu(x) = f(x)\eta_\nu(x)$, $x \in \Omega$. Очевидно, $f_\nu \in \mathcal{E}(\Phi)$. Отметим, что $\operatorname{supp} f_\nu \subset K_{\nu+1}$. Покажем, что $f_\nu \to f$ в $\mathcal{E}(\Phi)$ при $\nu \to \infty$. Вначале отметим, что для каждого $m \in \mathbb{N}$

$$\sup_{x\in\Omega} \frac{|f_\nu(x) - f(x)|}{\theta_m(x)} = \sup_{x\in\Omega} \frac{|f(x)|(1-\eta_\nu(x))}{\theta_m(x)} \leqslant$$
$$\leqslant \sup_{x\in\Omega\setminus K_\nu} \frac{|f(x)|}{\theta_m(x)} \leqslant p_{m+1}(f)\exp\left(\sup_{x\in\Omega\setminus K_\nu}\big(\varphi_{m+1}(x) - \varphi_m(x)\big)\right).$$

Пусть

$$T_\nu = \Omega \cap \big\{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| > \nu\big\}, \quad S_\nu = \Omega \setminus \big(K_\nu \cup T_\nu\big), \quad \nu \geqslant \nu_0.$$

Так как для каждого $m \in \mathbb{N}$

$$\varphi_{m+1}(x) - \varphi_m(x) \leqslant -\ln(1+\nu) + a_m + b_m,\ x \in T_\nu, \quad \varphi_{m+1}(x) - \varphi_m(x) \leqslant -\ln\nu + a_m + b_m,\ x \in S_\nu,$$

то

$$\exp\left(\sup_{x\in\Omega\setminus K_\nu}\big(\varphi_{m+1}(x) - \varphi_m(x)\big)\right) \to 0, \quad \nu \to +\infty. \tag{4}$$

Следовательно, для любого $m \in \mathbb{N}$

$$\sup_{x\in\Omega} \frac{|f_\nu(x) - f(x)|}{\theta_m(x)} \to 0 \quad \text{при } \nu \to \infty. \tag{5}$$

Далее, для $x \in \Omega$ и $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ с $|\alpha| > 0$ имеем

$$D^\alpha\big(f_\nu(x) - f(x)\big) = \sum_{\substack{\beta\leqslant\alpha,\\ |\beta|<|\alpha|}} C_\alpha^\beta \big(D^\beta f\big)(x)\big(D^{\alpha-\beta}\eta_\nu\big)(x) + \big(D^\alpha f\big)(x)\big(\eta_\nu(x) - 1\big), \tag{6}$$

где

$$C_\alpha^\beta = \prod_{j=1}^n C_{\alpha_j}^{\beta_j}.$$

Обозначим через $F_\nu(x)$ первое слагаемое в правой части равенства (6). Для любого $m \in \mathbb{N}$ имеем

$$\sup_{\substack{x\in\Omega,\\ 1\leqslant|\alpha|\leqslant m}} \frac{|F_\nu(x)|}{\theta_m(x)} \leqslant \sup_{\substack{x\in K_{\nu+1}\setminus K_\nu,\\ 1\leqslant|\alpha|\leqslant m}} \frac{1}{\theta_m(x)} \sum_{\substack{\beta\leqslant\alpha,\\ |\beta|<|\alpha|}} C_\alpha^\beta \big|\big(D^\beta f\big)(x)\big(D^{\alpha-\beta}\eta_\nu\big)(x)\big|\ .$$

С помощью неравенств (2) и (3) для любого $s \in \mathbb{N}$ имеем

$$\sup_{\substack{x\in\Omega,\\ 1\leqslant|\alpha|\leqslant m}} \frac{|F_\nu(x)|}{\theta_m(x)} \leqslant \sup_{\substack{x\in K_{\nu+1}\setminus K_\nu,\\ 1\leqslant|\alpha|\leqslant m}} \frac{2^{mn}4^{n+m}p_{m+s}(f)(\nu+1)^{3n+2m}}{e^{\varphi_m(x)-\varphi_{m+s}(x)}}. \tag{7}$$

Пусть

$$R_\nu = \big(K_{\nu+1} \setminus K_\nu\big) \cap \big\{\nu \leqslant \|x\| \leqslant \nu+1\big\}, \quad P_\nu = \big(K_{\nu+1} \setminus K_\nu\big) \cap \big\{\|x\| \leqslant \nu\big\}.$$

Отметим, что для каждого $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \varphi_k(x) - \varphi_{k+1}(x) &\geqslant \ln(1+\nu) - a_k - b_k, && x \in R_\nu,\\ \varphi_k(x) - \varphi_{k+1}(x) &\geqslant \ln\nu - a_k - b_k, && x \in P_\nu. \end{aligned}$$

Таким образом, для каждого $s \in \mathbb{N}$ получаем

$$\sup_{\substack{x\in R_\nu,\\ 1\leqslant|\alpha|\leqslant m}} \frac{|F_\nu(x)|}{\theta_m(x)} \leqslant \frac{2^{mn}4^{n+m}p_{m+s}(f)(\nu+1)^{3n+2m}}{(1+\nu)^s e^{-a_m-\dots-a_{m+s}-b_m-\dots-b_{m+s}}},$$

$$\sup_{\substack{x\in P_\nu,\\ 1\leqslant|\alpha|\leqslant m}} \frac{|F_\nu(x)|}{\theta_m(x)} \leqslant \frac{2^{mn}4^{n+m}p_{m+s}(f)(\nu+1)^{3n+2m}}{\nu^s e^{-a_m-\dots-a_{m+s}-b_m-\dots-b_{m+s}}}.$$

Полагая $s = 3n + 2m + 1$, из этих двух оценок и (7) получаем, что для любого $m \in \mathbb{N}$

$$\sup_{\substack{x\in\Omega,\\ 1\leqslant|\alpha|\leqslant m}} \frac{|F_\nu(x)|}{\theta_m(x)} \to 0 \quad \text{при } \nu\to\infty. \tag{8}$$

Оценим второе слагаемое в (6). Для любого $m \in \mathbb{N}$ имеем

$$\sup_{\substack{x\in\Omega,\\ 1\leqslant|\alpha|\leqslant m}} \frac{|(D^\alpha f)(x)(\eta_\nu(x)-1)|}{\theta_m(x)} \leqslant \sup_{\substack{x\in\Omega\setminus K_\nu,\\ 1\leqslant|\alpha|\leqslant m}} \frac{|(D^\alpha f)(x)|}{\theta_m(x)} \leqslant$$
$$\leqslant p_{m+1}(f)\exp\Big(\sup_{x\in\Omega\setminus K_\nu}\big(\varphi_{m+1}(x)-\varphi_m(x)\big)\Big).$$

Пользуясь (4), имеем

$$\sup_{\substack{x\in\Omega,\\ 1\leqslant|\alpha|\leqslant m}} \frac{|(D^\alpha f)(x)(\eta_\nu(x)-1)|}{\theta_m(x)} \to 0, \quad \nu\to\infty.$$

Отсюда, из (8) и (5) следует, что $p_m(f_\nu - f) \to 0$ при $\nu \to \infty$ при любом $m \in \mathbb{N}$. Таким образом, последовательность $(f_\nu)_{\nu=1}^\infty$ сходится к f в $\mathcal{E}(\Phi)$ при $\nu \to \infty$.

2. Зафиксируем натуральное число $\nu \geqslant \nu_0$. Пусть $h \not\equiv 0$ — такая целая функция экспоненциального типа не больше 1, что $h \in L_1(\mathbb{R})$ и $h(x) \geqslant 0$ для $x \in \mathbb{R}$. Например, можно взять функцию $h(z) = \sin^2(z/2)/z^2$, $z \in \mathbb{C}$. По теореме Пэли—Винера существует такая функция $g \in C(\mathbb{R})$ с носителем в $[-1, 1]$, что

$$h(z) = \int_{-1}^{1} g(t)e^{izt}\,dt, \quad z\in\mathbb{C}.$$

Из этого представления следует, что для любого $k \in \mathbb{Z}_+$

$$|h^{(k)}(x)| \leqslant 2\max_{|t|\leqslant 1}|g(t)|, \quad x\in\mathbb{R}. \tag{9}$$

Положим $H(z_1, z_2, \dots, z_n) = h(z_1)h(z_2)\cdots h(z_n)$. Из (9) следует, что найдется такая константа $C_H > 0$, что для любого $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$

$$|(D^\alpha H)(x)| \leqslant C_H, \quad x\in\mathbb{R}^n. \tag{10}$$

Пусть

$$\int_{\mathbb{R}^n} H(x)\,dx = A.$$

Определим функцию $\tilde f_\nu$ на $\mathbb{R}^n$ следующим образом:

$$\tilde f_\nu(x) = \begin{cases} f_\nu(x), & x\in\Omega,\\ 0, & x\in\mathbb{R}^n\setminus\Omega. \end{cases}$$

Очевидно, $\tilde f_\nu \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Для $\lambda > 1$ пусть

$$\tilde f_{\nu,\lambda}(x) = \frac{\lambda^n}{A}\int_{\mathbb{R}^n} \tilde f_\nu(y)H(\lambda(x-y))\,dy, \quad x\in\mathbb{R}^n.$$

Ясно, что $\tilde{f}_{\nu,\lambda} \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, причем $\tilde{f}_{\nu,\lambda}$ допускает голоморфное продолжение в $\mathbb{C}^n$. Отметим, что для всех $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ и $x \in \mathbb{R}^\ltimes$

$$|(D^\alpha \tilde{f}_{\nu,\lambda})(x)| \leqslant \frac{\lambda^n}{A} \int\limits_{\mathbb{R}^n} |(D^\alpha \tilde{f}_\nu)(y)| H(\lambda(x-y))\,dy \leqslant$$

$$\leqslant \max_{y \in K_{\nu+1}} |(D^\alpha f_\nu)(y)| \cdot \frac{\lambda^n}{A} \int\limits_{\mathbb{R}^n} H(\lambda(x-y))\,dy = \max_{y \in K_{\nu+1}} |(D^\alpha f_\nu)(y)|.$$

Пусть $f_{\nu,\lambda}$ — сужение $\tilde{f}_{\nu,\lambda}$ на Ω. Очевидно, $f_{\nu,\lambda} \in \mathcal{E}(\varPhi)$.

Покажем, что $f_{\nu,\lambda} \to f_\nu$ в $\mathcal{E}(\varPhi)$ при $\lambda \to +\infty$. Пусть $m \in \mathbb{N}$ произвольно и пусть $r(\lambda) = \lambda^{-2n/(2n+1)}$, $\lambda > 1$. Отметим, что для всех $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$, $x \in \Omega$ имеет место соотношение

$$\big(D^\alpha f_{\nu,\lambda}\big)(x) - \big(D^\alpha f_\nu\big)(x) = \frac{\lambda^n}{A} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Big(\big(D^\alpha \tilde{f}_\nu\big)(y) - \big(D^\alpha \tilde{f}_\nu\big)(x)\Big) H\big(\lambda(x-y)\big)\,dy =$$

$$= \frac{\lambda^n}{A} \int\limits_{\{y \in \mathbb{R}^n : \|y-x\| \leqslant r(\lambda)\}} \Big(\big(D^\alpha \tilde{f}_\nu\big)(y) - \big(D^\alpha \tilde{f}_\nu\big)(x)\Big) H\big(\lambda(x-y)\big)\,dy +$$

$$+ \frac{\lambda^n}{A} \int\limits_{\{y \in \mathbb{R}^n : \|y-x\| > r(\lambda)\}} \Big(\big(D^\alpha \tilde{f}_\nu\big)(y) - \big(D^\alpha \tilde{f}_\nu\big)(x)\Big) H\big(\lambda(x-y)\big)\,dy.$$

Обозначим слагаемые в правой части этого равенства через $I_{1,\alpha}(x)$ и $I_{2,\alpha}(x)$, соответственно. Пусть

$$C_{\nu,m} = \sup_{\substack{t \in \mathbb{R}^n,\\ |\beta| \leqslant m+1}} |(D^\beta \tilde{f}_\nu)(t)|.$$

Тогда

$$\sup_{\substack{x \in \Omega,\\ |\alpha| \leqslant m}} |I_{1,\alpha}(x)| \leqslant \frac{\pi^{\frac{n}{2}} \sqrt{n} C_H C_{\nu,m}}{A\Gamma(n/2+1)} \lambda^{-n/(2n+1)}, \quad \sup_{\substack{x \in \Omega,\\ |\alpha| \leqslant m}} |I_{2,\alpha}(x)| \leqslant \frac{2C_{\nu,m}}{A} \int\limits_{\|u\| > \lambda^{1/(2n+1)}} H(u)\,du.$$

Из этих двух оценок следует, что

$$\sup_{\substack{x \in \Omega,\\ |\alpha| \leqslant m}} \Big|\big(D^\alpha f_{\nu,\lambda}\big)(x) - \big(D^\alpha f_\nu\big)(x)\Big| \xrightarrow[\lambda \to +\infty]{} 0$$

Следовательно, $p_m\big(f_{\nu,\lambda} - f_\nu\big) \xrightarrow[\lambda \to +\infty]{} 0$. Так как $m \in \mathbb{N}$ произвольно, то $f_{\nu,\lambda} \xrightarrow[\lambda \to +\infty]{} f_\nu$ в $\mathcal{E}(\varPhi)$.

3. Для фиксированного $\lambda > 0$ и натурального числа $\nu \geqslant \nu_0$ аппроксируем $f_{\nu,\lambda}$ полиномами в $\mathcal{E}(\varPhi)$. Для $N \in \mathbb{N}$ пусть

$$U_N(x) = H(0) + \sum_{k=1}^N \frac{1}{k!} \sum_{1 \leqslant i_1 \leqslant n} \cdots \sum_{1 \leqslant i_k \leqslant n} \frac{\partial^k H}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_k}}(0) x_{i_1} \cdots x_{i_k}.$$

Для любого $x \in \mathbb{R}^n$ имеем

$$|H(x) - U_N(x)| \leqslant \frac{1}{(N+1)!} \sum_{1 \leqslant i_1 \leqslant n} \cdots \sum_{1 \leqslant i_{N+1} \leqslant n} \sup_{\xi \in [0,x]} \left| \frac{\partial^{N+1} H}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_{N+1}}}(\xi) x_{i_1} \cdots x_{i_{N+1}} \right|.$$

Пользуясь неравенством (10), имеем

$$|H(x) - U_N(x)| \leqslant \frac{C_H n^{N+1} \|x\|^{N+1}}{(N+1)!}, \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{11}$$

Пусть

$$V_N(x) = \frac{\lambda^n}{A} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \tilde{f}_\nu(y) U_N\bigl(\lambda(x-y)\bigr)\, dy, \quad x \in \mathbb{R}^n;$$

V_N — полином степени не выше N. Покажем, что последовательность $(V_N)_{N=1}^\infty$ сходится к $f_{\nu,\lambda}$ в $\mathcal{E}(\Phi)$ при $N \to \infty$. Пусть $m \in \mathbb{N}$ произвольно. Для $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ и $x \in \Omega$ имеем

$$\bigl(D^\alpha f_{\nu,\lambda}\bigr)(x) - \bigl(D^\alpha V_N\bigr)(x) = \frac{\lambda^n}{A} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \bigl(D^\alpha \tilde{f}_\nu\bigr)(y) \Bigl(H\bigl(\lambda(x-y)\bigr) - U_N\bigl(\lambda(x-y)\bigr)\Bigr)\, dy.$$

Пользуясь неравенством (11) и принимая во внимание, что носитель $\tilde{f}_\nu$ ограничен, можно найти такие положительные постоянные C_1 и C_2 (зависящие от n, λ, ν и m), что для всех $N \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ с $|\alpha| \leqslant m$ и $x \in \Omega$ выполнено неравенство

$$\Bigl|\bigl(D^\alpha f_{\nu,\lambda}\bigr)(x) - \bigl(D^\alpha V_N\bigr)(x)\bigr)\Bigr| \leqslant \frac{C_1 C_2^N (1+\|x\|)^{N+1}}{(N+1)!}.$$

Таким образом, для каждого $N \in \mathbb{N}$

$$p_m(f_{\nu,\lambda} - V_N) \leqslant \frac{C_1 C_2^N}{(N+1)!} \sup_{x\in\Omega} \frac{(1+\|x\|)^{N+1}}{\theta_m(x)}.$$

Далее,

$$\begin{aligned}
\sup_{x\in\Omega} \frac{(1+\|x\|)^{N+1}}{\theta_m(x)} &\leqslant \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \frac{(1+\|x\|)^{N+1}}{e^{\psi_m(x)}} = \\
&= \exp\left(\sup_{\substack{r>0,\\ \sigma\in S^{n-1}}} \Bigl((N+1)\ln(r+1) - \psi_m(r\sigma)\Bigr)\right) \leqslant \\
&\leqslant 2^{N+1} \exp\left(\left(\sup_{\substack{r>1,\\ \sigma\in S^{n-1}}} \Bigl((N+1)\ln r - \psi_m(r\sigma)\Bigr)\right)^+\right) = \\
&= 2^{N+1} \exp\left(\left(\sup_{\substack{t>0,\\ \sigma\in S^{n-1}}} \Bigl((N+1)t - \psi_m(e^t\sigma)\Bigr)\right)^+\right) = \\
&= 2^{N+1} \exp\left(\left(\sup_{\sigma\in S^{n-1}} \Bigl(\sup_{t>0} \bigl((N+1)t - \psi_{m,\sigma}(e^t)\bigr)\Bigr)\right)^+\right) = \\
&= 2^{N+1} \exp\left(\left(\sup_{\sigma\in S^{n-1}} \bigl(\psi_{m,\sigma}[e]\bigr)^*(N+1)\right)^+\right).
\end{aligned}$$

Теперь, применяя лемму 1, получим

$$\sup_{x\in\Omega} \frac{(1+\|x\|)^{N+1}}{\theta_m(x)} \leqslant 2^{N+1} \max\left(1,\ \frac{(N+1)^{N+1}}{e^{N+1} \exp\Bigl(\inf\limits_{\sigma\in S^{n-1}} \bigl(\psi^*_{m,\sigma}[e]\bigr)^*(N+1)\Bigr)}\right).$$

Таким образом, для любого $N \in \mathbb{N}$

$$p_m(f_{\nu,\lambda} - V_N) \leqslant \frac{C_1 C_2^N 2^{N+1}}{(N+1)!} \max\left(1,\ \frac{(N+1)^{N+1}}{e^{N+1} \exp\Bigl(\inf\limits_{\sigma\in S^{n-1}} \bigl(\psi^*_{m,\sigma}[e]\bigr)^*(N+1)\Bigr)}\right). \tag{12}$$

Так как $N! \geqslant N^N/e^N$ для всех $N \in \mathbb{N}$, то

$$\frac{C_1 C_2^N 2^{N+1}}{(N+1)!} \cdot \frac{(N+1)^{N+1}}{e^{N+1} \exp\left(\inf\limits_{\sigma \in S^{n-1}} \left(\psi^*_{m,\sigma}[e]\right)^*(N+1)\right)} \leqslant \frac{C_1 C_2^N 2^{N+1}}{\exp\left(\inf\limits_{\sigma \in S^{n-1}} \left(\psi^*_{m,\sigma}[e]\right)^*(N+1)\right)}. \tag{13}$$

Отметим, что равномерно по $\sigma \in S^{n-1}$ имеем

$$\lim_{\xi \to +\infty} \frac{(\psi^*_{m,\sigma}[e])^*(\xi)}{\xi} = +\infty. \tag{14}$$

Действительно, для любого $\sigma \in S^{n-1}$

$$\left(\psi^*_{m,\sigma}[e]\right)^*(\xi) \geqslant \xi t - \psi^*_{m,\sigma}(e^t), \quad \xi > 0,\ t > 0,$$

и

$$\psi^*_{m,\sigma}(e^t) = \sup_{r \geqslant 0} \left(e^t r - \psi_{m,\sigma}(r)\right) \leqslant \sup_{\substack{r \geqslant 0, \\ \sigma \in S^{n-1}}} \left(e^t r - \psi_m(r\sigma)\right) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left(e^t \|x\| - \psi_m(x)\right).$$

Пользуясь (13) и (14), из (12) получаем, что $p_m(f_{\nu,\lambda} - V_N) \xrightarrow[N \to \infty]{} 0$.

Из вышеизложенного следует, что полиномы плотны в $\mathcal{E}(\varPhi)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Маннанов М. М.* Описание некоторого класса аналитических функционалов// Сиб. мат. ж. — 1990. — *31*, № 3. — С. 62–72.
2. *Напалков В. В.* Пространства аналитических функций заданного роста вблизи границы// Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1980. — *44*, № 6. — С. 1308–1328.
3. *Хермандер Л.* Введение в теорию функций нескольких комплексных переменных. — М.: Мир, 1966.

И. Х. Мусин
Институт математики с вычислительным центром Уфимского научного центра РАН
E-mail: `musin_ildar@mail.ru`

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 143 (2017). С. 48–62

УДК 517.98

МНОЖЕСТВО ПОКАЗАТЕЛЕЙ ДЛЯ ИНТЕРПОЛЯЦИИ СУММАМИ РЯДОВ ЭКСПОНЕНТ ВО ВСЕХ ВЫПУКЛЫХ ОБЛАСТЯХ

© 2017 г. **С. Г. МЕРЗЛЯКОВ, С. В. ПОПЕНОВ**

Аннотация. Изучена проблема кратной интерполяции, во всех выпуклых областях комплексной плоскости, с помощью сумм абсолютно сходящихся рядов экспонент с показателями из заданного множества Λ. Найдено условие на множество Λ, которое является критерием разрешимости этой проблемы: любое направление в бесконечности должно быть предельным для множества Λ. Обнаружено, что эта проблема равносильна некоторым частным проблемам простой интерполяции, а также поточечной аппроксимации, с помощью сумм рядов экспонент в некоторых специальных областях. Такое же описание получено и для проблем простой интерполяции и поточечной апроксимации, во всех выпуклых областях, с помощью функций из подпространств, инвариантных относительно оператора дифференцирования и допускающих спектральный синтез, в пространствах голоморфных функций в этих областях.

Ключевые слова: выпуклая область, интерполяция, ряд экспонент, инвариантное подпространство, показатель экспоненты, предельное направление, двойственность.

AMS Subject Classification: 30E05, 30D05

1. Ряды экспонент с заданным множеством показателей. Пусть D — произвольная выпуклая область комплексной плоскости $\mathbb{C}$, $H(D)$ — пространство голоморфных функций в D. Если $\{K_j\}$, $j \in \mathbb{N}$, — некоторое исчерпание области D выпуклыми компактами, т.е. $D = \bigcup K_j$, $K_j \subset \operatorname{int} K_{j+1}$, то топология в $H(D)$ определяется последовательностью норм

$$p_{K_j}(f) = \max_{t \in K_j} |f(t)|, \quad f \in H(D).$$

Пусть Λ — некоторое бесконечное подмножество комплексной плоскости, обозначим

$$\Sigma(D,\Lambda) = \left\{ u : u(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{\lambda_n z},\ z \in D,\ \{\lambda_n\} \subset \Lambda \right\}.$$

Предполагаем, что ряды экспонент сходятся абсолютно для всех $z \in D$.

Множество $\Sigma(D,\Lambda)$ непустое. Действительно, для каждого $j \in \mathbb{N}$ выберем c_j так, чтобы

$$|c_j| p_{K_j}(e^{\lambda_j \cdot}) \leqslant \frac{1}{2^j},$$

Тогда для всех $z \in K_j$ и $n \geqslant j+1$ имеем

$$|c_n| p_{K_j}(e^{\lambda_n \cdot}) \leqslant \frac{1}{2^n},$$

т.е. абсолютно сходится ряд

$$\sum_{n=j+1}^{\infty} c_n e^{\lambda_n z}.$$

В частности, такой ряд сходится в топологии $H(D)$.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты №№ 17-01-00794 и 15-01-01661).

ISSN 0233–6723

Известно (см., например, [8, 11]), что любой ряд экспонент, который сходится абсолютно в выпуклой области D, сходится в ней равномерно, и даже нормально, т.е. для любого компакта $K \subset D$ сходится числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n| p_K\big(e^{\lambda_n \cdot}\big) = \sum_{n=1}^{\infty} |c_n| e^{H_K(\lambda_n)},$$

где

$$H_K(z) = \sup_{\sigma \in K} \operatorname{Re}(\sigma z), \quad z \in \mathbb{C},$$

— опорная функция компакта K в смысле комплексного анализа. Следовательно, ряды в определении $\Sigma(D, \Lambda)$ сходится равномерно на всех компактных подмножествах D и $\Sigma(D, \Lambda)$ является линейным подпространством $H(D)$.

Известно, что $H_K(z) = h_K(\theta)|z|$, $z = |z|e^{i\theta}$, где

$$h_K(\theta) = \sup_{\sigma \in K} \operatorname{Re}(\sigma e^{i\theta})$$

— опорная функция (в смысле $\mathbb{R}^2$) выпуклого компакта $\overline{K}$. комплексно сопряженного с K.

1.1. Проблема интерполяции суммами рядов экспонент. Обозначим через

$$\mathcal{M} = \big\{\mu_k \in D, \ k \in \mathbb{N}\big\}$$

— множество узлов интерполяции (с учетом кратностей m_k, $k \in \mathbb{N}$). Предполагаем, что оно дискретное в области D, т.е. не имеет в ней конечных предельных точек.

В пространстве $H(D)$ рассмотрим следующую проблему кратной интерполяции суммами абсолютно сходящихся рядов экспонент с показателями из Λ: *для произвольного дискретного множества узлов $\mathcal{M} \subset D$ и любых интерполяционных данных $b_{k,j} \in \mathbb{C}$ требуется найти такую функцию $u \in \Sigma(D, \Lambda)$, что $u^{(j)}(\mu_k) = b_{k,j}$, $k \in \mathbb{N}$, $j = 0, \ldots, m_k - 1$.*

Для разрешимости в заданной области проблемы интерполяции функциями u из $\Sigma(D, \Lambda)$ необходимо, чтобы множество Λ было неограниченным.

Если это не так, любая функция $u \in \Sigma(D, \Lambda)$ продолжается до целой функции экспоненциального типа. Действительно, если в ряде экспонент

$$u(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{\lambda_n z}, \quad |\lambda_n| \leqslant C,$$

это утверждение следует из абсолютной сходимости ряда в некоторой точке $z_0 \in D$ и простой оценки

$$|e^{\lambda_n z}| \leqslant e^{C|z - z_0|} |e^{\lambda_n z_0}|.$$

Справедлива оценка

$$|u(z)| \leqslant e^{C|z - z_0|} \sum_{n=1}^{\infty} |c_n| |e^{\lambda_n z_0}|.$$

Отсюда вытекает, что в случае, когда множество узлов интерполяции имеет конечную предельную точку на границе области, любая функция $u \in \Sigma(D, \Lambda)$ ограничена в некоторой окрестности этой точки; следовательно, простая интерполяция $u(\mu_k) = b_k$ невозможна для любых неограниченных последовательностей b_k интерполяционных данных. Если же область D неограничена, а множество узлов уходит в бесконечность, простая интерполяция также невозможна для интерполяционных данных, имеющих быстрый рост, например, для

$$|b_k| \geqslant k e^{C|\mu_k - z_0|}, \quad z_0 \in D.$$

Условия разрешимости рассматриваемой проблемы интерполяции формулируются в терминах предельных направлений в бесконечности для множества Λ. В дальнейшем для простоты будем считать, что Λ может иметь конечные предельные точки только в ограниченной части плоскости.

Пусть $\mathbb{S} = \{s \in \mathbb{C} : |s| = 1\}$. Элементы $\mathbb{S}$ будем обозначать $s = s_t$, $s_t = e^{it}$. Для любого неограниченного множества $\Lambda \subset \mathbb{C}$ множество предельных направлений $\mathcal{P}(\Lambda) \subset \mathbb{S}$ в бесконечности состоит из всех таких $s \in \mathbb{S}$, что

$$s = \lim_{|\lambda_{n_k}| \to \infty} \frac{\lambda_{n_k}}{|\lambda_{n_k}|}$$

для некоторой неограниченной подпоследовательности $\{\lambda_{n_k}\} \subset \Lambda$.

Отметим, что $\mathcal{P}(\Lambda)$ — замкнутое множество и

$$\mathcal{P}(\Lambda + \lambda_0) = \mathcal{P}(\Lambda), \quad \mathcal{P}(re^{it_0}\Lambda) = e^{it_0}\mathcal{P}(\Lambda), \quad \lambda_0 \in \mathbb{C},\ r > 0.$$

Если $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}$, для $H(\mathbb{C})$ нами полностью решена в [12] проблема интерполяции суммами рядов экспонент. При условии, что область содержит часть вещественной оси и $\mathcal{M} \subset \mathbb{R} \cap D$ (или $\mathcal{M}$ лежит на части некоторой прямой в области) она решена в [13] для $H(D)$ лишь в одном случае, когда множество $\mathcal{M}$ узлов имеет единственную конечную предельную точку на границе области. Найдены точные условия на Λ в терминах расположения предельных направлений $\mathcal{P}(\Lambda)$ и структуры границы ∂D области в окрестности этой конечной предельной точки множества $\mathcal{M}$. Эти условия дают критерии разрешимости рассматриваемой проблемы.

Обозначим через $I(D, \mathcal{M})$ замкнутый идеал, состоящий из всех функций h в $H(D)$, которые обращаются в нуль на $\mathcal{M}$, с учетом кратностей m_k:

$$I(D, \mathcal{M}) = \Big\{u^{(j)}(\mu_k) = 0,\ k \in \mathbb{N},\ j = 0, \ldots, m_k - 1\Big\}.$$

Проблема интерполяции суммами рядов экспонент равносильна представлению

$$H(D) = \Sigma(D, \Lambda) + I(D, \mathcal{M}), \tag{1}$$

для каждого дискретного $\mathcal{M} \subset D$. Это легко следует из разрешимости классической интерполяционной задачи в $H(D)$, что является следствием из теорем Вейерштрасса и Миттаг-Леффлера.

1.2. Проблема интерполяции функциями из ядра сверточного оператора. В [14,15] для операторов свертки изучалась многоточечная проблема Валле-Пуссена, с узлами в точках вещественной оси, которую можно рассматривать как проблему интерполяции функциями из ядра $\operatorname{Ker} M_\varphi$ любого оператора M_φ свертки, который корректно определен в $H(D)$. Здесь φ — целая функция экспоненциального типа, порождающая оператор M_φ.

Действительно, в этих работах впервые были найдены достаточное условие, в терминах нулевого множества функции φ, для возможности представления

$$H(D) = \operatorname{Ker} M_\varphi + I(D, \mathcal{M}), \tag{2}$$

для каждого дискретного $\mathcal{M} \subset D \cap \mathbb{R}$, которое равносильно разрешимости указанной проблемы интерполяции. Нам известны примеры, показывающие, что условия в этих работах не являются необходимыми для разрешимости этой проблемы, и задача полного описания операторов свертки в рамках этой проблемы остается открытой.

Эти результаты вытекают из упомянутых выше критериев интерполяции суммами рядов экспонент, с вещественными узлами интерполяции. При этом снимаются введенные в [14,15] излишние ограничения на функцию φ. Действительно, пусть для некоторых множеств узлов найдено условие для существования представления (1) для $H(D)$. Для таких узлов получаем и разрешимость многоточечной задачи Валле-Пуссена для операторов свертки M_φ, рассмотренных в [14,15]. Действительно, обозначим через Z_φ нулевое множество функции φ. Если $\lambda_n \in Z_\varphi$, то $\exp \lambda_n z \in \operatorname{Ker} M_\varphi$. Если удалось выделить подмножество $\Lambda \subset Z_\varphi$, удовлетворяющее условию, тогда $\Sigma(D, \Lambda) \subset \operatorname{Ker} M_\varphi$. Из (1) следует представление (2).

Для $H(\mathbb{C})$ в [16] найдены ограничительные, и далекие от необходимых, достаточные условия для разрешимости проблемы интерполяции функциями из ядра оператора свертки в случае, когда комплексные узлы интерполяции лежат в некотором угле. Этот случай, как и более общие случаи расположения комплексных узлов, требует отдельного изучения.

Единственность в представлении (1) отсутствует, а тогда и в (2) тоже. Пусть для некоторой области D выполнены достаточные условия на множество Λ, при которых разрешима проблема интерполяции функциями из $\Sigma(D,\Lambda)$. Тогда подпространство $\Sigma(D,\Lambda)\cap I(D,\mathcal{M})$ бесконечномерно. Это доказано в [12] для $D=\mathbb{C}$ и $\mathcal{M}\subset\mathbb{R}$, но для общей ситуации рассуждения абсолютно аналогичные. Более того, несложно показать следующее.

Лемма 1. *Предположим, что для некоторого множества узлов $\mathcal{M}\subset D$ разрешима проблема интерполяции функциями из $\Sigma(D,\Lambda)$. Кроме того, пусть множество $\mathcal{M}_1\subset D$ узлов таково, что $\mathcal{M}\cap\mathcal{M}_1=\varnothing$ и для множества $\mathcal{M}=\mathcal{M}\cup\mathcal{M}_1$ также разрешима эта проблема. Тогда*

$$H(D)=\Sigma(D,\Lambda)\cap I(D,\mathcal{M}_1)+I(D,\mathcal{M}).$$

Доказательство. По условию любая функция $f\in H(D)$ представляется в виде $f=g+h$, где $g\in\Sigma(D,\Lambda)$, $h\in I(D,\mathcal{M})$. Пусть $\mathcal{M}=\{\mu_k\}$, с кратностями m_k, $\mathcal{M}_1=\{\nu_k\}$, с кратностями n_k; тогда по условию в подпространстве $\Sigma(D,\Lambda)$ существует функция u, которая обращается в нуль во всех точках μ_k с кратностями m_k, при этом функция $g-u\in\Sigma(D,\Lambda)$ обращается в нуль во всех точках ν_k с кратностями n_k. Получили представление $f=(g-u)+(u+h)$ с требуемыми свойствами. □

Результат указывает на особую структуру представления; в частности, из него можно независимо получить, что подпространство $\Sigma(D,\Lambda)\cap I(D,\mathcal{M})$ бесконечномерно.

1.3. Сведение к проблеме интерполяции функциями из ядра специального оператора свертки. Отметим, что если удастся найти такое подмножество $\Lambda_1\subset\Lambda$, что имеет место представление $H(D)=\Sigma(D,\Lambda_1)+I(D,\mathcal{M})$ для каждого $\mathcal{M}\subset D$, то верно представление (1), т.е. рассматриваемая задача интерполяции функциями из $\Sigma(D,\Lambda)$ разрешима.

Рассмотрим специальную процедуру выделения из множества Λ разреженного подмножества, с сохранением множества предельных направлений в бесконечности.

Лемма 2. *Пусть Λ — произвольное неограниченное множество показателей экспонент. Существует последовательность $\{\lambda_n\}\subset\Lambda$ со следующими свойствами*:

(1) $\mathcal{P}(\{\lambda_n\})=\mathcal{P}(\Lambda)$;
(2) $|\lambda_{n+1}|>2|\lambda_n|$.

Доказательство. Обозначим через $\{r_j=e^{i\theta_j}\}$ счетное всюду плотное подмножество $\mathcal{P}(\Lambda)$ и введем вспомогательную последовательность t_n, состоящую из всех r_j, в бесконечном количестве (например, последовательность $r_1,r_1,r_2,r_1,r_2,r_3,r_1,r_2,\dots$). По индукции, используя определение $\mathcal{P}(\Lambda)$, выбираем последовательность λ_n:

$$\left|\frac{\lambda_n}{|\lambda_n|}-t_n\right|<\frac{1}{n},\quad |\lambda_{n+1}|>2|\lambda_n|.$$

Легко видеть, что выбранная последовательность удовлетворяет условиям леммы. □

В случае произвольного множества Λ подпространство $\Sigma(\Lambda,D)$ из представления (1), вообще говоря, не замкнутое. Пусть $\Lambda_1=\{\lambda_n\}\subset\Lambda$. Далее будет показано, что $\Sigma(\Lambda_1,D)$ совпадает с ядром некоторого непрерывного оператора свертки, определенного в $H(D)$, и, в частности, это замкнутое подпространство $H(D)$.

Последовательность $\{\lambda_n\}$ имеет нулевую плотность. Обозначим через G целую функцию с простыми нулями λ_n:

$$G(z)=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{\lambda_n}\right).$$

Функция G имеет минимальный тип при порядке 1. Величина

$$\delta=\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{|\lambda_n|}\ln\frac{1}{|G'(\lambda_n)|}$$

есть индекс конденсации Гельфонда—Леонтьева. Используя утверждение (2) леммы 2, можно показать, что индекс конденсации $\delta=0$. Это доказано в [12].

Из [9, теорема 4.2.2] вытекает следующее важное утверждение.

Предложение 1. *Пусть $\delta = 0$. Тогда для любой функции из замыкания в топологии $H(D)$ линейной оболочки системы экспоненциальных мономов с множеством показателей, имеющим нулевую плотность с учетом кратностей, соответствующий ей ряд экспонент сходится внутри области D.*

Функция G порождает линейный непрерывный сюръективный оператор свертки M_G на пространстве $H(D)$. Ядро $\operatorname{Ker} M_G$ оператора M_G свертки — это замкнутое подпространство, инвариантное относительно оператора дифференцирования и допускающее спектральный синтез, т.е. оно совпадает с замыканием линейной оболочки всех экспонент $e^{\lambda_n z}$, содержащихся в нем. Тогда, с учетом [9, теорема 4.2.3], получаем следующее утверждение.

Лемма 3. *Ядро $\operatorname{Ker} M_G$ состоит из всех функций $f(z)$, которые представляются рядами экспонент,*

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{\lambda_n z}, \quad z \in D,$$

сходящимися в топологии пространства $H(D)$, т.е. $\operatorname{Ker} M_G = \Sigma(\Lambda_1, D)$.

Следует отметить, что в многомерном случае, в более общей ситуации инвариантных подпространств, в [2] изучался фундаментальный принцип (в нашей ситуации это утверждение последней леммы). Самая общая постановка этой задачи для комплексной плоскости рассмотрена в [7]. В [4] подробно изучен случай рядов с вещественными показателями $\{\lambda_n\}$. Доказательство леммы можно также получить, используя введенную там новую локальную характеристику S конденсации.

В силу леммы 3, для произвольного неограниченного множества Λ, разрешимость проблемы интерполяции функциями из $\Sigma(D, \Lambda)$ является следствием из представления

$$H(D) = \operatorname{Ker} M_G + I(D, \mathcal{M}), \tag{3}$$

если оно имеет место для любого дискретного множества узлов $\mathcal{M} \subset D$. Действительно в силу леммы 3

$$\operatorname{Ker} M_G = \Sigma(\Lambda_1, D) \subset \Sigma(\Lambda, D),$$

где последовательность $\{\lambda_n\} = \Lambda_1 \subset \Lambda$ построена по лемме 2, поэтому из (3) следует представление (1).

Существование представления (3) в любой выпуклой области будет доказано при доказательстве достаточности условия интерполяции в основной теореме, где будут применены соображения двойственности, позволяющие свести доказательство существования представления (3) к рассмотрению эквивалентных ему двойственных утверждений в классическом пространстве P_D целых функций экспоненциального типа.

1.4. Двойственная формулировка проблемы интерполяции. В дальнейшем, как и ранее в [12, 13], используется схема, описанная в [17], основанная на двойственности с использованием преобразования Лапласа функционалов.

Обозначим через P_D пространство всех целых функций экспоненциального типа, сопряженные индикаторные диаграммы которых содержатся в D. В P_D вводится традиционная топология индуктивного предела весовых банаховых пространств целых функций, которая обеспечивает топологический изоморфизм между сильным сопряженным пространством $H^*(D)$ и пространством P_D, реализующийся с помощью преобразования Лапласа $\mathcal{L}$ функционалов $F \in H^*(D)$. Точнее, линейное непрерывное взаимнооднозначное преобразование Лапласа $\mathcal{L}$ функционалов $F \in H^*(D)$ определяется следующим образом:

$$\mathcal{L} : F \mapsto \mathcal{L}F(z) = \left\langle F_\lambda, e^{\lambda z} \right\rangle, \quad \mathcal{L}F \in P_D.$$

Топология в (LN^*)-пространстве P_D не описывается в терминах сходимости последовательностей, однако секвенциально замкнутые подпространства являются замкнутыми (см. [19]). Точное определение сходимости последовательностей в этой топологии будет приведено далее при доказательстве достаточности условия основной теоремы.

Определим раздельно непрерывную билинейную форму $[\cdot,\cdot] : H(D)\times P_D \mapsto \mathbb{C}$ по формуле

$$[\psi,\varphi]=\left\langle \mathcal{L}^{-1}\varphi,\,\psi\right\rangle,\quad \psi\in H(D),\ \varphi\in P_D.$$

С помощью отображения

$$\varphi\mapsto[\cdot,\phi]=\left\langle \mathcal{L}^{-1}\varphi,\cdot\right\rangle,\quad \mathcal{L}^{-1}\varphi\in H^*(D),$$

задается изоморфизм между P_D и сильным сопряженным пространством $H^*(D)$. Согласно введенной двойственности, любая функция из пространства P_D взаимнооднозначно соответствует некоторому линейному непрерывному функционалу из $H^*(D)$.

Каждая функция $G\in P_D$, $G\not\equiv 0$, имеющая минимальный тип при порядке один, порождает в пространстве $H(D)$ оператор свертки $M_G : H(D)\mapsto H(D)$, который в рассматриваемой двойственности можно определить следующим образом:

$$M_G[\psi](z)=\Big[S_z\big(\psi(\lambda)\big),\ G_\lambda\Big]=\Big\langle\big(\mathcal{L}^{-1}G\big)_\lambda,\ \psi(z+\lambda)\Big\rangle,$$

где S_z — оператор сдвига: $S_z\big(\psi(\lambda)\big)=\psi(\lambda+z)$.

Обозначим через $\operatorname{Ker} M_G=\{f\in H(D) : M_G[f]=0\}$ ядро оператора свертки M_G, которое является замкнутым подпространством в $H(D)$, инвариантным относительно оператора дифференцирования и допускающим спектральный синтез.

Существует функция $\psi\in H(D)$ с нулевым множеством с учетом кратностей, т.е. все $\mu_k\in\mathcal{M}$ и только они являются нулями функции ψ кратности m_k. Тогда идеал $I(D,\mathcal{M})$ совпадает с главным идеалом $\big(\psi\big)$, порожденным функцией ψ:

$$I(D,\mathcal{M})=\big(\psi\big)=\Big\{h\in H(D) : h=\psi\cdot r,\ r\in H(D)\Big\},$$

и существование представления (3) равносильно следующим двум утверждениям (I) и (II).

Предложение 2.

(I) *Подпространство* $\operatorname{Ker} M_G+\big(\psi\big)$ *всюду плотно в пространстве* $H(D)$;

(II) *подпространство* $\operatorname{Ker} M_G+\big(\psi\big)$ *замкнуто в пространстве* $H(D)$.

Пусть U — подпространство в топологическом векторном пространстве X; U^0 обозначим через его поляру (или аннулятор), т.е. множество функционалов из X^*, которые обращаются в нуль на U.

Утверждение (I) эквивалентно тому, что

$$\big(\operatorname{Ker} M_G+(\psi)\big)^0=\big(\operatorname{Ker} M_G\big)^0\cap\big((\psi)\big)^0=\{0\}.$$

Из [10, лемма 2] следует, что утверждение (II) эквивалентно тому, что подпространство $\big(\operatorname{Ker} M_G\big)^0+\big((\psi)\big)^0$ замкнуто в P_D.

Далее обсуждается двойственная реализация этих аннуляторов в пространстве P_D, представляющим собой модуль над кольцом многочленов.

Сопряженный оператор к оператору свертки M_G — это оператор A_G умножения на характеристическую функцию G, корректно определенный на функциях $v\in P_D$ следующим образом: $v\mapsto G\cdot v$. С учетом двойственности, поляра $\big(\operatorname{Ker} M_G\big)^0$ совпадает с подмодулем, определяемым как

$$\big(G\big)_{P_D}=\Big\{h\in P_D : h=G\cdot v;\ v\in P_D\Big\}.$$

Это образ сопряженного оператора A_G.

Из теоремы деления в P_D на функцию G минимального типа следует (см. [13]), что

$$\big(G\big)_{P_D}=\big(G\big)\cap P_D,$$

где $\big(G\big)$ — замкнутый идеал в $H(\mathbb{C})$, порожденный функцией G. В частности, отсюда следует, что подмодуль $\big(G\big)_{P_D}$ замкнут, так как топология P_D сильнее топологии поточечной сходимости.

Как известно, (M^*)-пространство $H(D)$ рефлексивно, т.е. его сильное второе сопряженное пространство $H^{**}(D)$ канонически изоморфно пространству $H(D)$. Поэтому отображение $\psi\mapsto[\psi,\cdot]$

с учетом этого канонического изоморфизма определяет изоморфизм между (M^*)-пространством $H(D)$ и сильным сопряженным P_D^*. Любая функция из $H(D)$ взаимно однозначно соответствует некоторому линейному непрерывному функционалу из сильно сопряженного пространства P_D^*.

Более точно, это отображение понимается следующим образом: канонический изоморфизм пространств $H(D)$ и $H^{**}(D)$ имеет вид

$$\psi \mapsto \Theta\psi = F_\psi, \quad F_\psi \in P_D^*, \quad \langle F_\psi, \varphi\rangle = [\psi, \varphi] = \langle \mathcal{L}^{-1}\varphi,\ \psi\rangle,$$

где $\psi \in H(D)$, $\varphi \in P_D$.

Каждая функция $\psi \in H(D)$, $\psi \not\equiv 0$, порождает в пространстве P_D оператор свертки

$$\widetilde{M}_\psi : P_D \mapsto P_D, \quad \widetilde{M}_\psi[\varphi](z) = \Big[(\Theta\psi)_\lambda,\ S_z\big(\varphi(\lambda)\big)\Big], \quad \varphi \in P_D,$$

где S_z — оператор сдвига, $S_z\big(\varphi(\lambda)\big) = \varphi(\lambda + z)$, $\lambda \in \mathbb{C}$.

Далее,

$$\widetilde{M}_\psi[\varphi](z) = \Big\langle \big(\mathcal{L}^{-1} S_z\varphi\big)_\lambda,\ \psi(\lambda)\Big\rangle = \Big\langle e^{z\lambda}\big(\mathcal{L}^{-1}\varphi\big)_\lambda,\ \psi(\lambda)\Big\rangle = \Big\langle \big(\mathcal{L}^{-1}\varphi\big)_\lambda,\ e^{z\lambda}\psi(\lambda)\Big\rangle$$

для всех $\varphi \in P_D$.

Используя известную формулу для обратного преобразования Бореля (см. [9]), отсюда получаем, что оператор свертки $\widetilde{M}_\psi$ имеет следующий вид:

$$\widetilde{M}_\psi[\varphi](z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \psi(\lambda) e^{z\lambda}\gamma_\varphi(\lambda)\, d\lambda, \quad \varphi \in P_D,$$

где γ_φ — функция, ассоциированная по Борелю с функцией φ, а C — спрямляемый замкнутый контур, охватывающий все особые точки функции γ_φ.

Известно, что $\widetilde{M}_\psi$ — линейный, непрерывный и сюръективный оператор, являющийся сопряженным к оператору $\widetilde{A}_\psi$ умножения на функцию ψ в пространстве $H(D)$, действующему на функциях $g \in H(D)$ по правилу $g \mapsto \psi \cdot g$. Оператор $\widetilde{A}_\psi$ линеен и непрерывен, а его образ совпадает с замкнутым идеалом (ψ). Введем обозначение

$$\operatorname{Ker} \widetilde{M}_\psi = \Big\{ f \in P_D : \widetilde{M}_\psi[f] = 0\Big\};$$

это множество является замкнутым подпространством в P_D.

С учетом двойственности поляра $\big((\psi)\big)^0$ совпадает с $\operatorname{Ker} \widetilde{M}_\psi$.

Итак, в силу введенной двойственности, утверждения (I) и (II) в (M^*)-пространстве $H(D)$ равносильны соответственно двум двойственным утверждениям в (LN^*)-пространстве P_D:

(I*) справедливо равенство $\big(G\big)_{P_D} \cap \operatorname{Ker} \widetilde{M}_\psi = \{0\}$;

(II*) подпространство $\big(G\big)_{P_D} + \operatorname{Ker} \widetilde{M}_\psi$ замкнуто в пространстве P_D.

Таким образом, получен следующий результат, который является инструментом для изучения различных проблем интерполяции и поточечной аппроксимации.

Теорема 1. *Пусть $\mathcal{M} \subset D$ — произвольное дискретное множество узлов, $\widetilde{M}_\psi$ — оператор свертки в P_D, порожденный функцией $\psi \in H(D)$, имеющей $\mathcal{M}$ в качестве нулевого множества с кратностями $\{\mu_k\}$, M_G — любой оператор свертки, порожденной целой функцией G минимального типа при порядке 1 с простыми нулями λ_n. Существование представления* (3) *для $H(D)$, равносильно двойственным утверждениям* (I*) *и* (II*) *в пространстве P_D.*

Представление (3) эквивалентно разрешимости в области D проблемы кратной интерполяции функциями из ядра оператора свертки M_G, порожденного целой функцией G минимального типа.

2. Описание множества показателей экспонент для кратной интерполяции во всех областях.

Теорема 2. *Для заданного неограниченного множества Λ показателей проблема интерполяции функциями из $\Sigma(\Lambda, D)$ разрешима для всех выпуклых областей тогда и только тогда, когда $\mathcal{P}(\Lambda) = \mathbb{S}$.*

2.1. Доказательство достаточности условия $\mathcal{P}(\Lambda) = \mathbb{S}$. Для доказательства достаточности этого условия будет доказано существование представления (3). Теорема 1 позволяет свести доказательство к рассмотрению утверждений (I*) и (II*) в пространстве P_D.

Пусть D — произвольная выпуклая область и выполнено условие $\mathcal{P}(\Lambda) = \mathbb{S}$. Без ограничения общности можно считать, что $0 \in D$. Действительно, для любого фиксированного $h \in \mathbb{C}$, в силу свойств экспоненты

$$c_n e^{\lambda_n(z-h)} = (c_k e^{-\lambda_n h}) e^{\lambda_n z}$$

и свойства $\mathcal{P}(\Lambda + h) = \mathcal{P}(\Lambda)$, при преобразовании плоскости $z \mapsto z - h$ множества $\Sigma(D, \Lambda)$, $\mathcal{P}(\Lambda)$ сохраняются.

Применяя лемму 2, выделяем из Λ прореженную последовательность $\{\lambda_n\}$. Если не оговорено обратное, не меняя обозначений, в доказательстве достаточности условия $\mathcal{P}(\Lambda) = \mathbb{S}$ будем полагать, что Λ это последовательность $\{\lambda_n\}$ из леммы 2, для которой выполнено условие $\mathcal{P}(\Lambda) = \mathbb{S}$. С учетом этого и в силу двойственной формулировки проблемы интерполяции для доказательства достаточности условия $\mathcal{P}(\Lambda) = \mathbb{S}$ нужно доказать двойственные утверждения (I*) и (II*) в пространстве P_D.

Следующий хорошо известный факт является важным моментом в доказательстве утверждений (I*) и (II*). Это несложно доказываемый фундаментальный принцип для $\operatorname{Ker} \widetilde{M}_\psi$ в пространстве P_D.

Предложение 3. *Подпространство* $\operatorname{Ker} \widetilde{M}_\psi \subset P_D$ *представляет собой линейную оболочку системы всех мономов вида* $\{z^\nu e^{\mu_k z}\}$, $k \in \mathbb{N}$, $\nu = 0, 1, \ldots, m_k - 1$, *т.е. оно состоит только из полиномов из экспонент следующего вида*:

$$p(z) = \sum_{\mathrm{Fin}_p(\mathcal{M})} a_k(z) e^{\mu_k z}, \tag{4}$$

где $a_k(z)$ — *это некоторые многочлены степени не выше* $m_k - 1$. *Справа стоит сумма по всем* μ_k *из некоторого конечного множества* $\mathrm{Fin}_p(\mathcal{M}) \subset \mathcal{M}$.

Отметим также, что сходимость последовательности $\{g_l\}_{l \in \mathbb{N}}$ в (LN^*)-топологии пространства P_D означает следующее:

(1) последовательность $\{g_l\}$ сходится к g в топологии пространства $H(\mathbb{C})$ равномерной сходимости на компактах из $\mathbb{C}$;

(2) существуют такие постоянная $A > 0$ и компакт $K \subset D$, что для всех $l \in \mathbb{N}$ справедлива оценка

$$|g_l(z)| \leqslant A e^{H_K(z)},\ z \in \mathbb{C}. \tag{5}$$

Как и ранее,

$$H_K(z) = \sup_{\sigma \in K} \operatorname{Re}(z\sigma)$$

— опорная функция компакта в смысле комплексного анализа. Если $z = |z|e^{i\theta}$, функция $h_K(\theta) = H_K(z)/|z|$ является опорной функцией (в смысле $\mathbb{R}^2$) компакта $\overline{K}$, комплексно сопряженного с K.

Иногда удобно интерпретировать $h_K(\theta)$ как наименьшую верхнюю грань проекций точек из компакта K на луч $\{te^{-i\theta},\ t > 0\}$. Другими словами, если $k(\theta, K) : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{R}$ — опорная функция (в смысле $\mathbb{R}^2$) компакта K в направлении $e^{i\theta}$, то $k(\theta, K) = h_K(-\theta)$. Отметим, что опорная полуплоскость $\Pi(\overline{s}, K)$ (в смысле $\mathbb{R}^2$) компакта K с направлением нормали $\overline{s}_\theta = e^{-i\theta}$ имеет вид

$$\Pi(\overline{s}, K) = \Pi_0(\overline{s}_\theta) + \overline{s}_\theta h_K(\theta),$$

где

$$h_K(\theta) = k(-\theta, K), \quad \Pi_0(\overline{s}_\theta) = \bigl\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(s_\theta z) < 0\bigr\}.$$

Выпуклый компакт есть пересечение по всем $s \in \mathbb{S}$ замыканий опорных полуплоскостей $\Pi(\overline{s}, K)$.

Докажем утверждение (II*). Как известно (см. [19]), в (LN^*)-пространстве P_D замкнутость любого подпространства X равносильна его секвенциальной замкнутости.

Пусть $\{g_l\}_{l\in\mathbb{N}}$ — произвольная последовательность функций из $(G)_{P_D} + \operatorname{Ker}\widetilde{M}_\psi$, сходящаяся в пространстве P_D к функции $g \in P_D$. Нужно показать, что предельная функция g принадлежит подпространству $(G)_{P_D} + \operatorname{Ker}\widetilde{M}_\psi$.

Последовательность $\{g_l\}$ имеет вид $g_l = p_l + R_l$, где $p_l \in \operatorname{Ker}\widetilde{M}_\psi$ для каждого $l \in \mathbb{N}$ и $R_l \in (G)_{P_D}$, т.е., в частности, $R_l(\lambda_n) = 0$, $n \in \mathbb{N}$.

Если в последовательности $\{g_l\}$ содержится бесконечное множество членов с $R_l \equiv 0$, то в силу непрерывности оператора свертки предельная функция g лежит в $\operatorname{Ker}\widetilde{M}_\psi$. Если же последовательность $\{g_l\}$ такова, что в ней содержится бесконечно много членов с $p_l \equiv 0$, то $g \in (G)_{P_D}$, так как топология в P_D сильнее топологии поточечной сходимости и в силу теоремы деления в P_D на функцию G минимального типа.

Мы получили, что для таких двух типов последовательностей $\{g_l\}$ их предельная функция g лежит в $(G)_{P_D} + \operatorname{Ker}\widetilde{M}_\psi$. Следовательно, в дальнейшем можно считать, что последовательность $\{g_l\} = \{p_l + R_l\}$ такова, что $R_l \not\equiv 0$, $p_l \not\equiv 0$, для всех $l \in \mathbb{N}$.

Зафиксируем произвольное $l \in \mathbb{N}$. Так как $p_l \in \operatorname{Ker}\widetilde{M}_\psi$, $p_l \not\equiv 0$, в силу фундаментального принципа (4) это полином из экспонент вида

$$p_l(z) = \sum_{\operatorname{Fin}_{p_l}(\mathcal{M})} a_k^l(z) e^{\mu_k z}, \tag{6}$$

где $a_k^l(z)$ — некоторые ненулевые многочлены степени не выше $m_k - 1$. Справа стоит сумма по всем μ_k из некоторого конечного множества $\operatorname{Fin}_{p_l}(\mathcal{M}) \subset \mathcal{M}$.

В силу условия (5) сходимости последовательности $\{g_l\}$ в P_D, выполнена оценка

$$|g_l(z)| \leqslant A e^{H_K(z)}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

В частности, так как $R_l(\lambda_n) = 0$, для всех $n \in \mathbb{N}$,

$$|g_l(\lambda_n)| = |p_l(\lambda_n)| \leqslant A e^{H_K(\lambda_n)}. \tag{7}$$

Покажем, что из этой оценки вытекает следующее утверждение.

Предложение 4. *Для каждого $l \in \mathbb{N}$ все показатели $\mu_k \in \operatorname{Fin}_{p_l}(\mathcal{M})$ из представления* (6) *принадлежат компакту K.*

Предположим, что это не так и обозначим через T замкнутую выпуклую оболочку множества $\operatorname{Fin}_{p_l}(\mathcal{M}) \cup K$. По предположению, $T \neq K$. Компакт T совпадает с замкнутой выпуклой оболочкой своих крайних точек. Так как $T \neq K$, в представлении (6) существует такая точка $\mu_q \in \operatorname{Fin}_{p_l}(\mathcal{M})$, что $\mu_q \notin K$, и она является крайней точкой компакта T.

Замкнутая выпуклая оболочка компакта T есть пересечение по всем $s \in \mathbb{S}$ замыканий опорных полуплоскостей $\Pi(\overline{s}, T)$. Существует такое направление $s_{\theta_0} = e^{i\theta_0}$, что на границе опорной полуплоскости $\Pi(\overline{s_{\theta_0}}, T)$ лежит только одна крайняя точка $\mu_q \in \operatorname{Fin}_{p_l}(\mathcal{M})$. Граница $\Pi(\overline{s_{\theta_0}}, T)$ — это опорная прямая

$$l(\overline{s_{\theta_0}}, T) = \left\{ z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z e^{i\theta_0} = h_T(\theta_0) \right\}$$

с направлением нормали $\overline{s_{\theta_0}} = e^{-i\theta_0}$. Отметим также, что $\operatorname{Re}\mu_q e^{i\theta_0} = h_T(\theta_0)$.

Пусть $r_l(z) = p_l(z) - a_k^q(z) e^{\mu_q z}$. Положим

$$\operatorname{Fin}_{r_l}(\mathcal{M}) = \left\{ \mu_k \in \operatorname{Fin}_{p_l}(\mathcal{M}) : \ \mu_k \neq \mu_q \right\}$$

и обозначим через T_1 замкнутую выпуклую оболочку множества $\operatorname{Fin}_{r_l}(\mathcal{M}) \cup \overline{K}$. Тогда по предположению $T \neq T_1$. Отметим, что $K \subset T_1$, возможно $K = T_1$.

Действительно, в силу выбора направления s_{θ_0} компакт $\operatorname{Fin}_{r_l}(\mathcal{M}) \cup K$ лежит в открытой опорной полуплоскости $\Pi(\overline{s_{\theta_0}}, T)$. Это означает, что

$$\operatorname{Re} z e^{i\theta_0} < \operatorname{Re}\mu_q e^{i\theta_0} \quad \forall z \in \operatorname{Fin}_{r_l}(\mathcal{M}) \cup K.$$

В силу непрерывности $\operatorname{Re} z e^{i\theta_0}$ существует такое $z_0 \in \operatorname{Fin}_{r_l}(\mathcal{M}) \cup K$, что

$$\sup_{z \in \operatorname{Fin}_{r_l}(\mathcal{M})} \operatorname{Re} z e^{i\theta_0} = \operatorname{Re} z_0 e^{i\theta_0} < \operatorname{Re}\mu_q e^{i\theta_0}.$$

Далее, так как $\operatorname{Re} z_0 e^{i\theta_0} = h_{T_1}(\theta_0)$, получаем, что для некоторого $\varepsilon > 0$ справедливо неравенство

$$\operatorname{Re} \mu_q e^{i\theta_0} > h_{T_1}(\theta_0) + 2\varepsilon.$$

Из непрерывности следует, что для некоторого $\delta > 0$

$$\operatorname{Re} \mu_q e^{i\theta} > h_{T_1}(\theta) + 2\varepsilon, \quad |\theta - \theta_0| < \delta.$$

Далее используем эту оценку и тот факт, что для всех $z = re^{i\theta}$ полином из экспонент

$$r_l(z) = p_l(z) - a_k^q(z) e^{\mu_q z}$$

удовлетворяет оценке

$$|r_l(z)| \leqslant C_\varepsilon e^{(h_{T_1}(\theta)+\varepsilon)|z|}.$$

Для всех $z = re^{i\theta}$ в угле

$$\Gamma_\delta(-\theta_0) = \Big\{ z = re^{i\theta} : \ |\theta - \theta_0| < \delta \Big\}, \quad \{|z| > r\},$$

получаем оценку

$$\begin{aligned} \big|p_l(z)\big| \geqslant \Big|a_k^q(z) \exp\big(\mu_q z\big)\Big| - \big|r_l(z)\big| \geqslant \\ \geqslant \exp\big(\operatorname{Re} \mu_q e^{i\theta}|z|\big)\Big(1 - C_\varepsilon \exp\Big(\big(h_{T_1}(\theta) + \varepsilon\big)|z| - \operatorname{Re} \mu_q e^{i\theta}|z|\Big)\Big) > \\ > \exp\Big(\operatorname{Re} \mu_q e^{i\theta}|z|\Big)\Big(1 - C_\varepsilon e^{-\varepsilon|z|}\Big); \end{aligned}$$

в частности, в круге $\{|z| \leqslant r\}$ могут лежать возможные общие нули многочленов $a_k^l(z)$ из представления (6).

В силу выбора направления s_{θ_0} имеем

$$\operatorname{Re} \mu_q e^{i\theta_0} = h_T(\theta_0).$$

Можно так выбрать $\delta_1 > 0$, $\delta_1 < \delta$, чтобы $\operatorname{Re} \mu_q e^{i\theta} = h_T(\theta)$ для всех $|\theta - \theta_0| < \delta_1$. Действительно, точка μ_q является концом двух примыкающих отрезков на границе T и для справедливости последнего неравенства достаточно выбрать любое δ, которое меньше, чем величина острого угла между перпендикулярами к этим отрезкам с концом в точке μ_q.

Получили, что для всех z в угле $\Gamma_{\delta_1}(\theta_0) \subset \Gamma_\delta(\theta_0)$, верна оценка

$$\operatorname{Re} \mu_q e^{i\theta}|z| = H_T(\theta) > H_{T_1}(\theta) + 2\varepsilon|z|.$$

Тогда из последней оценки $|p_l(z)|$ следует, что справедлива оценка

$$|p_l(z)| > Ae^{H_{T_1}(z)+\varepsilon|z|}$$

для всех $z = re^{i\theta}$ в некотором множестве

$$\Gamma_{\delta_1, r_1}(\theta_0) = \Gamma_{\delta_1}(\theta_0) \cap \{|z| > r_1\}, \quad r_1 > r,$$

где A — постоянная из неравенства (7).

В этом множестве $\Gamma_{\delta_1, r_1}(\theta_0)$ лежит бесконечная подпоследовательность показателей $\{\lambda_{n_k}\} \subset \Lambda$, так как в силу условия $\mathcal{P}(\Lambda) = \mathbb{S}$ направление $s_{\theta_0} = e^{i\theta_0}$ является предельным направлением в бесконечности для множества Λ.

Таким образом, получена оценка

$$\Big|p_l(\lambda_{n_k})\Big| > A \exp\Big(H_{T_1}(\lambda_{n_k}) + \varepsilon|\lambda_{n_k}|\Big), \quad \{\lambda_{n_k}\} \subset \Gamma_{\delta_1, r_1}(\theta_0),$$

которая противоречит оценке (7), так как $H_K(z) \leqslant H_{T_1}(z)$ для всех z.

Доказано, что $\operatorname{Fin}_{p_l}(\mathcal{M}) \subset K$, для всех $l \in \mathbb{N}$.

Из дискретности множества $\mathcal{M}$ в D следует, что для любой последовательности вида $g_l = p_l + R_l$, $R_l \not\equiv 0$, $p_l \not\equiv 0$, сходяшейся в пространстве P_D, последовательность $\{p_l\}$ принадлежит некоторому конечномерному подпространству $X \subset \operatorname{Ker} \widetilde{M}_\psi$.

Известно, что в любом топологическом векторном пространстве алгебраическая сумма конечномерного и замкнутого подпространств является замкнутым подпространством (см. [18, с. 41]).

Итак, предельная функция g последовательности $g_l = p_l + R_l$ принадлежит $\operatorname{Ker}\widetilde{M}_\psi + (G)_{P_D}$. Доказательство утверждения утверждения (II*) закончено.

Из приведенного доказательства вытекает и утверждение (I*). Действительно, для доказательства (I*) нужно показать, что никакой полином p из экспонент, $p \in \operatorname{Ker}\widetilde{M}_\psi$, $p \not\equiv 0$, не может принадлежать $(G)_{P_D}$.

Предположим противное, т.е. пусть $p \in (G)_{P_D}$ и $p \not\equiv 0$. Тогда $p(\lambda_n) = 0$, $n \in \mathbb{N}$. Полином p из экспонент имеет представление (4). Рассмотрим стационарную последовательность $p_l = p$ для всех $l \in \mathbb{N}$. Выберем такой компакт $K_0 \subset D$, что $\overline{K_0}$ не содержит ни одной точки $\mu_k \in \operatorname{Fin}_p(\mathcal{M})$. Справедлива очевидная оценка

$$0 = \bigl|p_l(\lambda_n)\bigr| < A \exp\bigl(H_{K_0}(\lambda_n)\bigr), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Но в доказательстве утверждения (II*) показано, что из этой оценки следует, что все $\mu_k \in \operatorname{Fin}_p(\mathcal{M})$ должны лежать в $\overline{K_0}$. Противоречие показывает, что $p \equiv 0$. Утверждение (I*) доказано.

Конечно, утверждение (I*) можно доказать и независимо: для произвольного полинома p, $p \not\equiv 0$, вида (4) обозначим через $T = T_p$ выпуклую оболочку множества $\operatorname{Fin}_p(\mathcal{M})$. Тогда T — выпуклый многоугольник. Так же, как выше, для некоторого направления $s_{\theta_0} = e^{i\theta_0}$, связанного с произвольной крайней точкой μ_q компакта T, получаем простую оценку

$$|p| > \exp\Bigl(\operatorname{Re}\mu_q e^{i\theta_0}|z|\Bigr)\Bigl(1 - C_\varepsilon e^{-\varepsilon|z|}\Bigr) > 0$$

для всех z, $|z| > r$, в некотором угле $\Gamma_\delta(\theta_0)$. Итак, у p нет нулей в некотором угле $\Gamma_\delta(\theta_0)$ и во внешности некоторого круга $\{z : |z| > r\}$. В таком множестве лежит бесконечно много точек из Λ, так как по условию $s_{\theta_0} \in \mathcal{P}(\Lambda)$. Получили, что $p \notin (G)_{P_D}$. Значит $p \equiv 0$, если $p \in (G)_{P_D}$.

По теореме 1 утверждения (I*) и (II*) эквивалентны существованию представления (3) для $\Lambda_1 = \{\lambda_n\} \subset \Lambda$ из леммы 2. С учетом леммы 3

$$\operatorname{Ker} M_G = \Sigma(\Lambda_1, D) \subset \Sigma(\Lambda, D),$$

из чего следует, что имеет место представление (1) для исходного множества Λ. Достаточность условия $\mathcal{P}(\Lambda) = \mathbb{S}$ доказана.

2.2. Доказательство необходимости условия $\mathcal{P}(\Lambda) = \mathbb{S}$. Для доказательства необходимости будет использован известный эффект принудительного аналитического продолжения сумм рядов экспонент (см., например, [5, 6, 11]). Приведем некоторые определения и результаты из [11] в объеме, необходимом для доказательства.

Пусть D — выпуклая область в $\mathbb{C}$. Положим

$$h_D(\theta) = \sup_{\sigma \in D} \operatorname{Re}(e^{i\theta}\sigma).$$

Легко видеть, что $h_D(\theta)$ — опорная функция (в смысле $\mathbb{R}^2$) области $\overline{D}$, комплексно сопряженной с D. Другими словами, как легко видеть, для каждого $s_\theta = e^{i\theta}$, если положить $d(s_\theta) = h_D(\theta)$, то $d(s_\theta)$ — наименьшая верхняя грань проекций точек из области D на луч $\{te^{-i\theta},\ t > 0\}$.

Функция

$$H_D(z) = \sup_{\sigma \in D} \operatorname{Re}(z\sigma) = h_D(\theta)|z|, \quad z = |z|e^{i\theta} \in \mathbb{C},$$

— позитивно однородная выпуклая функция. Для ограниченной области D функции H_D, h_D непрерывны в $\mathbb{C}$ и на $\mathbb{S}$, соответственно.

Определение. Пусть S — некоторое замкнутое подмножество $\mathbb{S}$. Множество

$$D_S = \Bigl\{z \in \mathbb{C} :\ \operatorname{Re}(s_\theta z) < d(s_\theta),\ s_\theta = e^{i\theta} \in S, \Bigr\}$$

называется S-выпуклой оболочкой области D.

По определению, S-выпуклая оболочка D_S произвольной области D — это пересечение по всем $s_\theta = e^{i\theta} \in S$ множеств
$$X(\overline{s}_\theta, D) = \{z \in \mathbb{C}:\ \mathrm{Re}(s_\theta z) < d(s_\theta)\}.$$

Если существует такое $t_\alpha = e^{i\alpha} \in S$, что $d(t_\alpha) = \infty$, то $X(\overline{t}_\alpha, D) = \mathbb{C}$. Если при этом существует хотя бы одно число $s_\theta \in S$, для которого $d(s_\theta) < \infty$, то такие $t_\alpha \in S$ в определении D_S можно не учитывать.

Если $d(s_\theta) < \infty$, то множество
$$X(\overline{t}_\alpha, D) = \Pi(\overline{s}_\theta, D) = \{z \in \mathbb{C}:\ \mathrm{Re}(s_\theta z) < d(s_\theta)\}$$
— это опорная полуплоскость области D с направлением нормали $\overline{s}_\theta$. Это означает, что $D \subset \Pi(\overline{s}_\theta, D)$ и $\partial D \cap \partial\Pi(\overline{s}_\theta, D) \neq \varnothing$.

Легко видеть, что
$$\Pi(\overline{s}_\theta, D) = \Pi_0(\overline{s}_\theta) + \overline{s}_\theta d(s_\theta),$$
где $\Pi_0(\overline{s}_\theta) = \{z \in \mathbb{C}:\ \mathrm{Re}(s_\theta z) < 0\}$ — полуплоскость с направлением нормали $\overline{s}_\theta = e^{-i\theta}$.

Воспользуемся следующими результатами.

Предложение 5. *Пусть D — выпуклая область и ряд экспонент*
$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{\omega_n z}$$
абсолютно сходится для всех $z \in D$ Тогда ряд абсолютно сходится и для $z \in D_S$, где $S = \mathcal{P}(\{\omega_n\})$ — множество предельных направлений в бесконечности для множества $\{\omega_n\}$ показателей в этом ряде экспонент. Область $D_{\mathcal{P}(\{\omega_n\})}$ выпукла, а сумма ряда аналитически продолжается в эту область.

Первое утверждение вытекает из предложений 16 и 8 работы [11]. Для любого замкнутого множества $S \in \mathbb{S}$ множество D_S является выпуклой областью (см., например, [5, 11]); более того, она S-выпукла (см. [11]). Аналитичность суммы ряда вытекает из того, что ряд, абсолютно сходящийся в выпуклой области $D_{\mathcal{P}(\{\omega_n\})}$, сходится и в топологии пространства $H(D_{\mathcal{P}(\{\omega_n\})})$ равномерной сходимости на компактах в области $D_{\mathcal{P}(\{\omega_n\})}$ (см. [11]).

Приступая к доказательству необходимости, предположим что произвольное неограниченное множество Λ таково, что проблема интерполяции функциями из $\Sigma(D, \Lambda)$ разрешима в любой выпуклой области. Рассмотрим открытый круг $D = \{|z| < r\}$.

Предположим, что условие $\mathcal{P}(\Lambda) = \mathbb{S}$ не выполнено. Множество $\mathcal{P}(\Lambda)$ замкнуто, поэтому найдется открытая в $\mathbb{S}$ дуга (s_α, s_β) (здесь $s_\theta = e^{i\theta}$), не пересекающаяся с $\mathcal{P}(\Lambda)$.

Обозначим через S_1 дополнение (s_α, s_β) до $\mathbb{S}$; оно является замкнутым подмножеством в $\mathbb{S}$ и $\mathcal{P}(\Lambda) \subset \mathcal{P}(S_1)$. Из определения S-выпуклой оболочки следует, что $D_{S_1} \subset D_{\mathcal{P}(\Lambda)}$.

Выпуклая область D_{S_1} содержит дугу $(re^{-i\alpha}, re^{-i\beta})$ на окружности ∂D в комплексно сопряженных направлениях. Действительно, легко показать, что D_{S_1} содержит внутренность треугольника с двумя вершинами $re^{-i\alpha}$ и $re^{-i\beta}$ (эти точки на ∂D круга являются точками опоры двух опорных прямых к кругу D с направлениями нормалей $e^{-i\alpha}$ и $e^{-i\beta}$, соответственно) и третьей вершиной в точке пересечения этих опорных прямых.

Любая функция u из $\Sigma(D, \Lambda)$ аналитически продолжается на дугу $(re^{-i\alpha}, re^{-i\beta})$. Действительно, произвольным образом, представим ряд для u в виде суммы $u = u_1 + u_2$, где множество показателей в ряде u_1 имеет предельные точки только в бесконечности, а в ряде u_2 оно ограничено, т.е. может иметь только конечные предельные точки. Сумма ряда u_2 является целой функцией экспоненциального типа. Сумма ряда u_1 аналитична в области $D_{\mathcal{P}(\Lambda)}$, в силу отмеченного выше результата. Значит, функция u_1 аналитична на дуге $(re^{-i\alpha}, re^{-i\beta}) \subset D_{S_1}$.

Получили, что любая функция u из $\Sigma(D, \Lambda)$ аналитична в некоторой окрестности любой точки из $(re^{-i\alpha}, re^{-i\beta})$; следовательно, она ограничена в этой окрестности.

Рассмотрим произвольное множество узлов $\mathcal{M} \subset D$, которое имеет предельную точку на дуге $(re^{-i\alpha}, re^{-i\beta})$. Тогда для такого множества узлов невозможна простая интерполяция функциями

u из $\Sigma(D, \Lambda)$ для всех неограниченных интерполяционных данных. Полученное противоречие завершает доказательство необходимости условия $\mathcal{P}(\Lambda) = \mathbb{S}$.

3. Равносильные частные проблемы интерполяции и поточечной аппроксимации функциями из $\Sigma(D, \Lambda)$ и элементами инвариантных подпространств. Следует особо отметить, что метод приведенного доказательства необходимости условия $\mathcal{P}(\Lambda) = \mathbb{S}$ в условиях теоремы 2 остается в силе и при значительно более слабых исходных предположениях. Метод позволяет доказать более сильные утверждения о необходимости этого условия. Как следствие, это приводит к формулировкам ряда равносильных проблем, для которых условие $\mathcal{P}(\Lambda) = \mathbb{S}$ также является критерием разрешимости.

Начнем с того, что в доказательстве необходимости условия в теореме 2 не использовались кратности μ_k; значит, это условие необходимо и для простой интерполяции функциями из $\Sigma(D, \Lambda)$.

Область будем называть областью без угловых точек, если ее граница не содержит частей, состоящих из примыкающих отрезков. Пусть в некоторой ограниченной области D без угловых точек разрешима следующая частная проблема простой интерполяции: рассматривается возможность интерполяции не для всех дискретных множеств $\mathcal{M}$ узлов, а всего лишь для одного специфического множества узлов $\mathcal{M}_0$, предельные точки которого всюду плотны на границе D.

Предположим, что условие $\mathcal{P}(\Lambda) = \mathbb{S}$ не выполнено. Из того факта, что область D не имеет угловых точек, следует, так же как в доказательстве основной теоремы 2, что на ее границе существует открытый участок, через который осуществляется принудительное аналитическое продолжение любой функции $u \in \Sigma(D, \Lambda)$. Значит все функции u из $\Sigma(D, \Lambda)$ ограничены в некоторой окрестности любой точки из этого участка. Это означает, что интерполяция невозможна для всех множеств узлов с предельными точками на указанном участке границы и неограниченных интерполяционных данных. В частности, она невозможна для множества $\mathcal{M}_0$, так как, по определению, на любом открытом участке границе найдется предельная точка этого множества.

Таким образом, условие $\mathcal{P}(\Lambda) = \mathbb{S}$ является необходимым для разрешимости сформулированной частной проблемы простой интерполяции с одним специфическим множеством узлов в одной конкретной выпуклой области без угловых точек. Тогда оно является необходимым и для проблемы интерполяции для всех дискретных множеств узлов в такой области.

Дополнительно, рассмотрим в произвольной выпуклой области D следующую проблему поточечной апроксимации функциями из $\Sigma(D, \Lambda)$: *для заданной последовательности $\varepsilon_k > 0$, для любого дискретного множества узлов $\mathcal{M} \subset D$ и для любых данных $b_k \in \mathbb{C}$ требуется найти такую функцию $u \in \Sigma(D, \Lambda)$, что $|u(\mu_k) - b_k| < \varepsilon_k$, $\mu_k \in \mathcal{M}$.*

Легко видеть, что условие $\mathcal{P}(\Lambda) = \mathbb{S}$ необходимо для разрешимости и этой проблемы во всех выпуклых областях. Если это условие не выполняется, рассмотрим эту проблему в некотором круге и получим, аналогичными рассуждениями , как в доказательстве необходимости теоремы 2, что она не разрешима для некоторых множеств узлов в этом круге (с предельными точками на указанной там дуге границы) и неограниченных интерполяционных данных.

Более того, как и ранее в этом разделе, можно рассмотреть как проблему поточечной аппроксимации в одной ограниченной выпуклой области без угловых точек для всех дискретных множеств узлов, так и частную проблему поточечной аппроксимации в такой области лишь для одного специфического множества $\mathcal{M}_0$ узлов со всюду плотным предельным множеством на границе. Легко видеть условие $\mathcal{P}(\Lambda) = \mathbb{S}$ является необходимым для разрешимости этих двух проблем. Доказательство фактически не меняется.

С другой стороны, в основной теореме 2 доказано, что из условия $\mathcal{P}(\Lambda) = \mathbb{S}$ следует разрешимость проблемы кратной интерполяции, во всех областях, функциями из $\Sigma(D, \Lambda)$. Но тогда разрешима и такая же проблема простой аппроксимации. Разрешимы и все слабые частные проблемы простой интерполяции, для каждой конкретной области и для специфических множеств узлов. Тем более разрешимы и сформулированные выше различные еще более слабые проблемы поточечной аппроксимации.

Из указанных результатов о необходимости условия $\mathcal{P}(\Lambda) = \mathbb{S}$ и утверждения о его достаточности из теоремы 2 вытекают критерии разрешимости всех сформулированных частных проблем интерполяции и аналогичных проблем поточечной аппроксимации. Более того, получили, что все эти проблемы являются равносильными.

Теорема 3.

1. *Проблемы кратной интерполяции и простой интерполяции функциями из* $\Sigma(D, \Lambda)$ *во всех выпуклых областях и для всех дискретных множеств узлов равносильны.*
2. *Условие* $\mathcal{P}(\Lambda) = \mathbb{S}$ *является необходимым и достаточным для разрешимости следующих равносильных проблем простой интерполяции функциями из* $\Sigma(D, \Lambda)$:
   (a) *для некоторой ограниченной выпуклой области* D *без угловых точек и только для одного дискретного множества узлов в* D*, предельные точки которого всюду плотны на границе* D;
   (b) *для некоторой ограниченной выпуклой области* D *без угловых точек и для всех дискретных множеств узлов в* D*.*

Теорема 4. *Условие* $\mathcal{P}(\Lambda) = \mathbb{S}$ *является необходимым и достаточным для разрешимости следующих равносильных проблем поточечной аппроксимации функциями из* $\Sigma(D, \Lambda)$:

1) *для некоторой ограниченной выпуклой области* D *без угловых точек и только для одного дискретного множества узлов в* D*, предельные точки которого всюду плотны на границе* D;
2) *для некоторой ограниченной выпуклой области* D *без угловых точек и для всех дискретных множеств узлов в* D;
3) *во всех выпуклых областях и для всех дискретных множеств узлов, лежащих в них.*

В заключение рассмотрим проблему кратной интерполяции функциями из произвольного замкнутого подпространства $W \subset H(D)$, инвариантного относительно оператора дифференцирования и допускающего спектральный синтез. Эта проблема равносильна существованию представления

$$H(D) = W + I(\mathcal{M}, D)$$

для всех дискретных множеств узлов $\mathcal{M} \subset D$.

В этой проблеме в качестве Λ выступает спектр инвариантного подпространства W. Для всех $\lambda \in \Lambda$, множество экспонент $\{\exp \lambda z\} \subset W$ образует полную систему в W. Тогда из теоремы 2 следует, что условие $\mathcal{P}(\Lambda) = \mathbb{S}$ достаточно для разрешимости как этой проблемы, так и более слабой проблемы поточечной аппроксимации элементами из W во всех выпуклых областях, так как $\Sigma(D, \Lambda) \subset W$.

Рассмотренными выше методами несложно доказать, что условие $\mathcal{P}(\Lambda) = \mathbb{S}$ на множество показателей экспонент является необходимым для разрешимости этой проблемы как во всех, так и в конкретной выпуклой области без угловых точек. Оно необходимое и для проблемы поточечной аппроксимации элементами из W. Эти результаты о необходимости более сильные, чем полученные выше, так как $\Sigma(D, \Lambda) \subset W$.

Для доказательства этих утверждений, по аналогии с приведенным выше доказательством необходимости, достаточно привлечь известные описания эффекта принудительного аналитического продолжения элементов подпространств, инвариантных относительно оператора дифференцирования в выпуклых областях, принадлежащие И. Ф. Красичкову-Терновскому [1] и А. С. Кривошееву [3].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Красичков-Терновский И. Ф.* Инвариантные подпространства аналитических функций. Аналитическое продолжение// Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1973. — *37*, № 4. — С. 931–945.
2. *Кривошеев А. С.* Фундаментальный принцип для инвариантных подпространств в выпуклых областях// Изв. РАН. Сер. мат. — 2004. — *68*, № 2. — С. 71–136.
3. *Кривошеев А. С.* Критерий аналитического продолжения функций из главных инвариантных подпространств в выпуклых областях из $\mathbb{C}^n$// Алгебра и анализ. — 2010. — *22*, № 4. — С. 137–197.
4. *Кривошеев А. С., Кривошеева О. А.* Замкнутость множества сумм рядов Дирихле// Уфим. мат. ж. — 2013. — *5*, № 3. — С. 96–120.

5. *Кривошеева О. А.* Область сходимости рядов экспоненциальных мономов// Уфим. мат. ж. — 2011. — *3*, № 2. — С. 43–56.
6. *Кривошеева О. А.* Область сходимости рядов экспоненциальных многочленов// Уфим. мат. ж. — 2013. — *5*, № 4. — С. 84–90.
7. *Кривошеева О. А., Кривошеев А. С.* Критерий выполнения фундаментального принципа для инвариантных подпространств в ограниченных выпуклых областях комплексной плоскости// Функц. анал. прилож. — 2012. — *46*, № 4. — С. 14–30.
8. *Леонтьев А. Ф.* Ряды экспонент. — М.: Наука, 1976.
9. *Леонтьев А. Ф.* Последовательности полиномов из экспонент. — М.: Наука, 1980.
10. *Мерзляков С. Г.* Инвариантные подпространства оператора кратного дифференцирования// Мат. заметки. — 1983. — *33*, № 5. — С. 701–713.
11. *Мерзляков С. Г.* Интегралы от экспоненты по мере Радона// Уфим. мат. ж. — 2011. — *3*, № 2. — С. 57–80.
12. *Мерзляков С. Г., Попенов С. В.* Кратная интерполяция рядами экспонент в $H(C)$ с узлами на вещественной оси// Уфим. мат. ж. — 2013. — *5*, № 3. — С. 130–143.
13. *Мерзляков С. Г., Попенов С. В.* Интерполяция рядами экспонент в $H(D)$, с вещественными узлами// Уфим. мат. ж. — 2015. — *7*, № 1. — С. 46–58.
14. *Напалков В. В., Зименс К. Р.* Кратная задача Валле-Пуссена на выпуклых областях в ядре оператора свертки// Докл. РАН. — 2014. — *458*, № 4. — С. 387–389.
15. *Напалков В. В., Нуятов А. А.* Многоточечная задача Валле-Пуссена для операторов свертки// Мат. сб. — 2012. — *203*, № 2. — С. 77–86.
16. *Напалков В. В., Нуятов А. А.* Многоточечная задача Валле-Пуссена для операторов свертки с узлами, заданными в угле// Теор. мат. физ. — 2014. — *180*, № 2. — С. 264–271.
17. *Напалков В. В., Попенов С. В.* Голоморфная задача Коши для оператора свертки в аналитически равномерных пространствах и разложения Фишера// Докл. РАН. — 2001. — *381*, № 2. — С. 164–166.
18. *Рудин У.* Функциональный анализ. — М.: Мир. 1975.
19. *Себаштьян-и-Сильва Ж.* О некоторых классах локально выпуклых прострасть, важных в приложениях// Сб. перев. Математика. — 1957. — *1*, № 1. — С. 60–77.

С. Г. Мерзляков
Институт математики с Вычислительным центром Уфимского научного центра РАН
E-mail: `msg2000@mail.ru`

С. В. Попенов
Институт математики с Вычислительным центром Уфимского научного центра РАН
E-mail: `spopenov@gmail.com`

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 143 (2017). С. 63–80

УДК 517.982.256

НЕКОТОРЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ПРИБЛИЖЕНИЯ

© 2017 г. И. Г. ЦАРЬКОВ

Аннотация. Изучаются множества с непрерывной выборкой из почти наилучших приближений, обсуждаются приложения геометрической теории приближения к вопросам выборок из многозначных отображений, существования неподвижных точек и изучения гладких решений уравнения эйконала.

Ключевые слова: непрерывные выборки, солнца, неподвижные точки, уравнение эйконала.

AMS Subject Classification: 41A65, 54C65,78A05

1. Введение. Будем называть пару, состоящую из линейного пространства X и полунормы $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}_+$, линейным полунормированным пространством. В этой работе наряду с нормой (полунормой) мы также будем рассматривать понятие несимметричной полунормы (несимметричной нормы) на линейном пространстве X и обозначать ее символом $\|\cdot|$ (ср. с обозначением $\|\cdot\|$ нормы (полунормы)). От несимметричной полунормы будут требоваться условия:

(1) $\|\alpha x| = \alpha\|x|$ для всех $\alpha \geqslant 0$, $x \in X$;
(2) $\|x + y| \leqslant \|x| + \|y|$ для всех $x, y \in X$.

Везде далее мы будем предполагать, что несимметричное пространство симметризуемо, т.е. для полунормы $\|x\| := \max\{\|x|, \|-x|\}$ найдется такое число $K \geqslant 1$, что

$$\frac{1}{K}\|x\| \leqslant \|x| \leqslant \|x\| \quad \forall x \in X$$

(именно это число будет фигурировать в теореме 1).

Через $B(x,r)$ и $\mathring{B}(x,r)$ будем обозначать соответственно замкнутый и открытый шар в линейном полунормированном (несимметричном полунормированном) пространстве $\mathcal{X} = (X, \|\cdot\|)$ ($\mathcal{X} = (X, \|\cdot|)$) радиуса r с центром x, т.е. соответственно множества

$$\big\{y \in X \mid \|y - x\| \leqslant r\big\}, \quad \big\{y \in X \mid \|y - x\| < r\big\}$$
$$\Big(\big\{y \in X \mid \|y - x| \leqslant r\big\}, \quad \big\{y \in X \mid \|y - x| < r\big\}\Big).$$

Через $S(x,r)$ обозначим сферу с центром x радиуса r, т.е. множество $\big\{y \in X \mid \|y - x| = r\big\}$.

Для произвольного множества M в некотором несимметричном полунормированном (полунормированном) пространстве $\mathcal{X}$ через $\varrho(y, M)$ ($y \in X$, $M \subset X$) обозначим расстояние до множества M, т.е. величину $\inf\limits_{z \in M} \|z - y|$. Отметим некоторые простые свойства функции расстояния $\varrho(\cdot, M)$:

$$(1) \quad \varrho(x, M) \leqslant \varrho(y, M) + \|y - x| \qquad \forall x, y \in X;$$
$$(2) \quad \big|\varrho(x, M) - \varrho(y, M)\big| \leqslant \max\big\{\|y - x|,\ \|x - y|\big\} \quad \forall x, y \in X.$$

Доказательство (1): так как

$$\varrho(x, M) \leqslant \|z - x| \leqslant \|z - y| + \|y - x|$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 16-01-00295-а).

для всех $z \in M$, то

$$\varrho(x, M) \leqslant \inf_{z\in M}(\|z - y| + \|y - x|) = \varrho(y, M) + \|y - x|. \qquad \square$$

Через $P_M x$ обозначим множество всех ближайших точек из M для $x \in X$, т.е. множество $\{y \in M \mid \|y - x| = \varrho(x, M)\}$.

Определение 1. Пусть $\varepsilon > 0$, $M \subset X$. Отображение $\varphi : X \to M$ называется *аддитивной ε-выборкой*, если для всех $x \in X$ выполняется неравенство

$$\|\varphi(x) - x| \leqslant \varrho(x, M) + \varepsilon,$$

и *мультипликативной ε-выборкой*, если для всех $x \in X$ выполняется неравенство

$$\|\varphi(x) - x| \leqslant (1 + \varepsilon)\varrho(x, M)).$$

Геометрически эти неравенства означают, что $\varphi(x) \in B(x, \varrho(x, M) + \varepsilon) \cap M$ (соответственно, $\varphi(x) \in B(x, (1 + \varepsilon)\varrho(x, M)) \cap M$) для всех $x \in X$.

Различные результаты о множествах, допускающих устойчивую ε-выборку, содержатся в [1, 2, 4–9, 12, 13]. Отметим только, что в случае, когда множество M из предыдущего определения представляет собой множество классических дробно-рациональных функций $R_{m,n}$, $m \geqslant n$, метрическая проекция на M разрывна, но при этом, как доказал С. В. Конягин, для любого $\varepsilon > 0$ существует непрерывная ε-выборка. Также непрерывная выборка есть и для сфер бесконечномерных пространств.

Тесно связанными с вопросом существования непрерывных выборок на множество оказываются свойства этих множеств быть $\overset{\circ}{B}$-бесконечно связными и $\overset{\circ}{B}$-стягиваемыми.

Определение 2. Множество A в полуметрическом пространстве (X, ν) называется *бесконечно связным*, если для всех $n \in \mathbb{N}$ и единичного шара $B \subset \mathbb{R}^n$ и произвольного непрерывного отображения $\varphi : \partial B \to A$ существует непрерывное продолжение $\tilde{\varphi} : B \to A$. Множество $M \subset X$ называется *$\overset{\circ}{B}$-бесконечно связным* (*B-бесконечно связным*), если пересечение множества M с любым открытым (замкнутым) шаром либо пусто, либо бесконечно связно. Множество $M \subset X$ называется *$\overset{\circ}{B}$-стягиваемым* (*B-стягиваемым*), если пересечение множества M с любым открытым (замкнутым) шаром либо пусто, либо стягиваемо.

Отметим, что $\overset{\circ}{B}$-бесконечно связное множество не обязано быть B-бесконечно связным, т.е. пересечение с некоторым замкнутым шаром может быть не бесконечно связным и даже несвязным (см. пример в [10, теорема 5]). Отметим также, что $\overset{\circ}{B}$-бесконечно связным и даже B-бесконечно связным множеством является такой классический объект, как множество обобщенных рациональных дробей в пространстве непрерывных функций $C(Q)$.

В [9] установлено, что свойство замкнутого множества быть $\overset{\circ}{B}$-бесконечно связным ($\overset{\circ}{B}$-стягиваемым) равносильно существованию непрерывной ε-выборки для всех $\varepsilon > 0$.

В данной статье мы покажем, что в несимметричных полных пространствах замкнутые множества, обладающие непрерывной ε-выборкой для всех $\varepsilon > 0$, будут $\overset{\circ}{B}$-стягиваемыми. Далее охарактеризуем строгие солнца, на которые существует непрерывная ε-выборка для всех $\varepsilon > 0$. Для гильбертова пространства покажем, что для всякого замкнутого множества, обладающего непрерывной ε-выборкой для всех $\varepsilon > 0$, его непустое пересечение с любым конечным набором открытых шаров также обладает непрерывной ε-выборкой для всех $\varepsilon > 0$. В качестве приложения изучим непрерывные выборки для устойчивых снизу многозначных отображений, образы которых не обязательно выпуклы. Далее получим новую теорему о неподвижных точках и в завершение рассмотрим методы геометрической теории приближения, позволяющие исследовать и описывать гладкие решения уравнения эйконала.

2. Множества, допускающие непрерывную ε-выборку в несимметричных пространствах. Покажем, что множества (в несимметричном пространстве), для которых существует непрерывная ε-выборка для каждого $\varepsilon > 0$, являются $\mathring{B}$-стягиваемыми.

Теорема 1. *Пусть $(X, \|\cdot|)$ — полное линейное несимметричное полунормированное пространство, подмножество $M \subset X$ замкнуто и обладает для любого $\varepsilon > 0$ непрерывной аддитивной (мультипликативной) ε-выборкой. Если множество $M \cap \mathring{B}(x_0, R)$ непусто, то оно является ретрактом шара $\mathring{B}(x_0, R)$.*

Доказательство. Достаточно разобрать случай аддитивной выборки. Из условий вытекает, что $\varrho(x_0, M) < R - \delta$ для некоторого $\delta > 0$. Без потери общности будем, считать, что $R = 1$. Построим непрерывную $\delta 2^{-8(n+1)}$-выборку φ_n для множества M. Рассмотрим непрерывное отображение на шаре $\mathring{B}(x_0, R)$

$$\theta_n(x) = \begin{cases} x_0, & \text{если } \varrho(x) \geqslant r(x), \\ x + \dfrac{\varrho(x)}{r(x)}(x_0 - x), & \text{если } \varrho(x) < r(x), \end{cases}$$

где $\varrho(x) = \varrho(x, M)$ и $r(x) = r_n(x) = R - \delta 2^{-n} - \|x - x_0|$. Отметим, что $\theta_n(x) \in [x, x_0]$ для всех $x \in \mathring{B}(x_0, R)$, и $\theta_n(x) = x_0$, если $\varrho(x) \geqslant r(x)$.

Для всех точек $x \in B(x_0, R - \delta 2^{-n})$, удовлетворяющих условию $\varrho(x) < r(x)$, верно неравенство

$$\varrho(\theta_n(x)) + \delta 2^{-n} \leqslant \varrho(x) + \big\|x - \theta_n(x)\big| + \delta 2^{-n} < r(x) + \frac{\varrho(x)}{r(x)}\big\|x - x_0\big| + \delta 2^{-n} \leqslant$$
$$\leqslant R - \big\|x - x_0\big| + \frac{\varrho(x)}{r(x)}\big\|x - x_0\big| = R - \frac{r(x) - \varrho(x)}{r(x)}\big\|x - x_0\big| = R - \big\|\theta_n(x) - x_0\big|,$$

т.е.

$$\varrho(\theta_n(x)) < R - \delta 2^{-n} - \big\|\theta_n(x) - x_0\big| = r_n(\theta_n(x)),$$

поэтому

$$\|\varphi_n(\theta_n(x)) - x_0| \leqslant \|\varphi_n(\theta_n(x)) - \theta_n(x)| + \|\theta_n(x) - x_0| \leqslant$$
$$\leqslant \varrho(\theta_n(x)) + \delta 2^{-8(n+1)} + \|\theta_n(x) - x_0| < R - \delta 2^{-n} + \delta 2^{-8(n+1)},$$

т.е.

$$\varphi_n(\theta_n(x)) \in \mathring{B}\Big(x_0, R - \delta 2^{-n} + \delta 2^{-8(n+1)}\Big).$$

Если $x \in B(x_0, R - \delta 2^{-n})$ удовлетворяет условию $\varrho(x) \geqslant r(x)$, то

$$\varphi_n(\theta_n(x)) = \varphi_n(x_0) \in \mathring{B}\Big(x_0, R - \delta + \delta 2^{-8(n+1)}\Big).$$

Таким образом,

$$\varphi_n(\theta_n(x)) \in \mathring{B}\Big(x_0, R - \delta 2^{-n} + \delta 2^{-8(n+1)}\Big)$$

для всех $x \in B(x_0, R - \delta 2^{-n})$. Пусть

$$Q_n = \Big(B(x_0, R - \delta 2^{-n}) \cap M\Big) \cup \Big(X \setminus \mathring{B}(x_0, R - \delta 2^{-n})\Big).$$

Положим

$$\psi_n(x) = x + \eta_n(x)\Big(\varphi_n(\theta_n(x)) - x\Big),$$

где $\eta_n(x) = \min\{1, 2^{6(n+1)}\delta^{-2} K \varrho(x, Q_n)\}$. Тогда $\psi_n : X \to X$ — непрерывное отображение, тождественное на множестве Q_n и совпадающее с $\varphi_n(\theta_n(x))$ на дополнении $\delta^2 2^{-6(n+1)}/K$-окрестности Q_n.

Изучим свойства отображений ψ_n $(n \in \mathbb{N})$. Пусть $y \in B(x_0, R - \delta 2^{-m})$ для некоторого $m \in \mathbb{N}$. Если $\varrho(y) \geqslant r_m(y)$, то $\theta_m(y) = x_0$ и

$$\varphi_m\big(\theta_m(y)\big) = \varphi_m(x_0) \in B\Big(x_0, R - \delta + \delta 2^{-8(m+1)}\Big).$$

Следовательно,

$$y_1 = \psi_m(y) \in [y, \varphi_m(x_0)] \subset B\Big(x_0, R - \delta 2^{-m}\Big), \quad r_{m+1}(y_1) \geqslant \delta 2^{-m-1}.$$

Отсюда, если $\varrho(y_1) \geqslant \delta^2 2^{-6(m+1)}/K$, то

$$y_2 = \psi_{m+1}(y_1) = \varphi_{m+1}(\theta_{m+1}(y_1)) \in M.$$

Остается случай

$$\varrho(y_1) < \frac{1}{K}\delta^2 2^{-6(m+1)} < \delta 2^{-m-1} \leqslant r_{m+1}(y_1).$$

Рассмотрим более общий случай: $z \in B(x_0, R - \delta 2^{-l})$: $r_l(z) > \varrho(z)$ для некоторого $l \in \mathbb{N}$ (здесь z рассматривается вместо y_1 и l вместо m). Если $\varrho(z) \geqslant \delta^2 2^{-6(l+1)}/K$ (и, следовательно, z лежит вне $\delta^2 2^{-6(l+1)}/K$-окрестности множества Q_l), то

$$z_1 = \psi_l(z) = \varphi_l(\theta_l(z)) \in M.$$

Если $\varrho(z) < \delta^2 2^{-6(l+1)}/K$, то

$$z_1 = \psi_l(z) \in \Big[z, \varphi_l(\theta_l(z))\Big]$$

и в силу выпуклости шара пространства

$$z_1 \in \Big[z, \varphi_l(\theta_l(z))\Big] \subset B\Big(x_0, R - \delta 2^{-l} + \delta 2^{-8(l+1)}\Big).$$

Отсюда

$$r_{l+1}(z_1) \geqslant \delta 2^{-l-1} - \delta 2^{-8(l+1)} > \delta 2^{-l-2}.$$

Если $\varrho(z_1) \geqslant \delta^2 2^{-6(l+2)}/K$, то $z_2 = \psi_{l+1}(z_1) \in M$. Изучим случай

$$\varrho(z_1) < \frac{1}{K}\delta^2 2^{-6(l+2)} < \delta 2^{-l-2} \leqslant r_{l+1}(z_1).$$

В этом случае

$$\theta_{l+1}(z_1) = z_1 + \frac{\varrho(z_1)}{r_{l+1}(z_1)}(x_0 - z_1), \quad \big\|z_1 - \theta_{l+1}(z_1)\big| = \frac{\varrho(z_1)}{r_{l+1}(z_1)}\big\|z_1 - x_0\big| < \frac{1}{K}\delta 2^{-5(l+2)}$$

и поэтому

$$\|\theta_{l+1}(z_1) - z_1\| < \delta 2^{-5(l+2)}.$$

Далее, в частности, мы будем пользоваться известным свойством несимметричного расстояния. Верны следующие оценки:

$$\varrho(\theta_{l+1}(z_1)) \leqslant \frac{1}{K}\delta 2^{-5(l+2)} + \varrho(z_1) < \delta 2^{-5(l+2)} + \delta 2^{-6(l+2)} < \delta 2^{-5l-8},$$

$$\begin{aligned} \Big\|\varphi_{l+1}(\theta_{l+1}(z_1)) - z_1\Big| &\leqslant \Big\|\varphi_{l+1}(\theta_{l+1}(z_1)) - \theta_{l+1}(z_1)\Big| + \Big\|\theta_{l+1}(z_1) - z_1\Big| \leqslant \\ &\leqslant \varrho(\theta_{l+1}(z_1)) + \delta 2^{-8(l+2)} + \delta 2^{-5(l+2)} < \delta 2^{-5l-8} + \delta 2^{-8(l+2)} + \delta 2^{-5(l+2)} < \delta 2^{-5l-7{,}5}, \end{aligned}$$

и для точки

$$z_2 = \psi_{l+1}(z_1) \in \Big[z_1, \varphi_{l+1}(\theta_{l+1}(z_1))\Big] \subset B\Big(x_0, R - \delta 2^{-l} + \delta 2^{-8(l+1)} + \delta 2^{-5l-7)}\Big) \subset B\Big(x_0, R - \delta 2^{-l-1}\Big)$$

верны соотношения

$$\big\|z_1 - z_2\big| = \big\|z_1 - \psi_{l+1}(z_1)\big| < \frac{1}{K}\delta 2^{-5l-7{,}5},$$

а поэтому

$$\big\|z_2 - z_1\big\| < \delta 2^{-5l-7{,}5}, \quad r_{l+2}(z_2) \geqslant \delta 2^{-l-2}.$$

Если $\varrho(z_2) \geqslant \delta^2 2^{-6(l+3)}/K$, то

$$z_3 = \psi_{l+2}(z_2) = \varphi_{l+2}(\theta_{l+2}(z_2)) \in M.$$

При этом

$$\varrho(z_2) \leqslant \varrho(z_1) + \left\| z_1 - \varphi_{l+1}\big(\theta_{l+1}(z_1)\big)\right| < \delta 2^{-6(l+2)} + \delta 2^{-5l-7,5} < \delta 2^{-5l-7,3},$$
$$\left\| z_2 - \theta_{l+2}(z_2)\right| = \frac{\varrho(z_2)}{r_{l+2}(z_2)} \| z_2 - x_0| \leqslant \frac{1}{K} 2^{-4l-5,3},$$

$$\| z_2 - z_3| = \left\| z_2 - \varphi_{l+2}\big(\theta_{l+2}(z_2)\big)\right| \leqslant \left\| \theta_{l+2}(z_2) - \varphi_{l+2}\big(\theta_{l+2}(z_2)\big)\right| + \left\| z_2 - \theta_{l+2}(z_2)\right| \leqslant$$
$$\leqslant \varrho\big(\theta_{l+2}(z_2)\big) + 2^{-8(l+3)} + 2^{-4l-5,3} \leqslant \varrho(z_2) + 2^{-4l-5,3} + 2^{-4l-5,3} + 2^{-8(l+3)} < 2^{-4(l+1)}.$$

Кроме того, $z_{n+1} = \psi_{l+n}(z_n)$ совпадает с z_3 для всех $n \geqslant 2$.

Если $\varrho(z_2) < \frac{1}{K}\delta^2 2^{-6(l+3)}$, то, рассуждая аналогично вышеизложенному, получим неравенство

$$\| z_2 - z_3| < \delta 2^{-5(l+1)-7},$$

где $z_3 = \psi_{l+2}(z_2)$ и т. д.

Тем самым, объединяя оценки, мы получим

$$\left\| z_{n+1} - z_n \right\| \leqslant 2^{-4(l-1)-4n} = R 2^{-4(l-1)-4n}, \quad \varrho(z_n) \leqslant \delta 2^{-5(l-1)-6n}$$

для всех $n \in \mathbb{N}$, т.е. последовательность $\{z_n\}$ сходится к некоторой точке $\widehat{z} \in M \cap B(x_0, R - \delta 2^{-l-2})$. Действительно,

$$\left\| z_n - \widehat{z} \right\| \leqslant \sum_{k=n}^{\infty} \left\| z_{k+1} - z_k \right\| \leqslant \frac{16}{15} R 2^{-4(l-1)-4n}, \quad \varrho(z_n) < \delta 2^{-5(l-1)-6n}.$$

Возьмем в качестве z произвольную точку $x \in \mathring{B}(x_0, R)$; тогда найдется минимальное число l, для которого $x \in \mathring{B}(x_0, R - \delta 2^{-l})$. Тогда для произвольной точки $y \in O(x) \subset \mathring{B}(x_0, R - \delta 2^{-l})$ (как и самой точки x) выполнены оценки

$$\| y_n - \widehat{y} \| \leqslant \frac{16}{15} R 2^{-4(l-1)-4n}, \quad \varrho(y_n) < \delta 2^{-5(l-1)-6n},$$

где $y_n = \psi_{l+n-1}(y_{n-1})$, $y_0 = y$, $\widehat{y} = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$. При этом $\widehat{y} \in \mathring{B}(x_0, R - \delta 2^{-l-2})$. Поэтому отсюда для функции $\Psi(u) = \lim\limits_{n\to\infty} \psi_n \circ \psi_{n-1} \circ \ldots \circ \psi_1(u)$ вытекает ее непрерывность. Кроме того, по построению

$$\Psi : \mathring{B}(x_0, R) \to \mathring{B}(x_0, R), \quad \Psi(\mathring{B}(x_0, R)) \subset M.$$

Учитывая, что на M функция Ψ тождественна, мы получим, что Ψ — ретракция шара $\mathring{B}(x_0, R)$ на $M \cap \mathring{B}(x_0, R)$. $\square$

Из предыдущей теоремы непосредственно вытекает следующее утверждение.

Следствие 1. *Пусть $(X, \|\cdot|)$ — полное линейное несимметричное полунормированное пространство, множество $M \subset X$ замкнуто и обладает для любого $\varepsilon > 0$ непрерывной аддитивной (мультипликативной) ε-выборкой. Тогда множество M является $\mathring{B}$-стягиваемым ($\mathring{B}$-бесконечно связным).*

Замечание 1. На самом деле можно доказать, что обладание замкнутым множеством $M \subset X$ для любого $\varepsilon > 0$ непрерывной аддитивной (мультипликативной) ε-выборки равносильно тому, что множество M является $\mathring{B}$-стягиваемым ($\mathring{B}$-бесконечно связным).

3. Строгие солнца и непрерывная ε-выборка. Здесь мы ограничимся случаем (симметричных) линейных нормированных пространств X.

Определение 3. Пусть $\varnothing \neq M \subset X$. Точка $x \in X \setminus M$ называется *точкой солнечности*, если существует такая точка $y \in P_M x \neq \varnothing$ (называемая *точкой светимости*), что $y \in P_M((1-\lambda)y + \lambda x)$ для всех $\lambda \geqslant 0$ (это геометрически означает, что из точки y исходит луч, проходящий через x, для каждой точки которого y является ближайшей из M).

Точка $x \in X \setminus M$ называется *точкой строгой солнечности*, если $P_M x \neq \varnothing$ и каждая точка $y \in P_M x$ является точкой светимости. Если все точки из $X \setminus M$ являются точками солнечности (строгой солнечности), то множество M называют *солнцем* (*строгим солнцем*).

Теорема 2. *Пусть M — строгое солнце в линейном нормированном пространстве X, обладающее непрерывной аддитивной (мультипликативной) ε-выборкой для любого $\varepsilon > 0$. Тогда множество $\widehat{M} = M \cap B(x_0, R)$ стягиваемо, если $\mathring{B}(x_0, R) \cap M \neq \varnothing$.*

Доказательство. Без потери общности будем считать, что $R \leqslant 1/2$. Рассмотрим стягиваемое множество
$$K = \bigcup_{y \in \widehat{M}} [x_0, y].$$
Для любой точки $z \in [x_0, y)$, где $y \in \widehat{M} : \|x_0 - y\| = R$, множество $\mathring{B}(z, \|y - z\|) \cap \widehat{M}$ не пусто, иначе $y \in P_M z$ и в силу строгой солнечности
$$\mathring{B}(x_0, \|x_0 - y\|) \cap \widehat{M} = \mathring{B}(x_0, \|x_0 - y\|) \cap M = \varnothing,$$
что противоречит условию теоремы.

Рассмотрим непрерывную функцию $\psi(z) = R - \|z - x_0\| - \varrho(z, M)$ для всех точек $z \in [x_0, y]$, где y — произвольная точка из $\widehat{M}$. В силу вышеизложенного функция ψ положительна на $\mathring{K} := K \cap \mathring{B}(x_0, R)$. Следовательно, найдется область D, содержащая $\mathring{K}$, на которой ψ положительна. Из [9, следствие 1] вытекает существование такой непрерывной функции $\varphi : D \to M$, что
$$\|\varphi(x) - x\| \leqslant (1 + \psi(x))\varrho(x, M) < \varrho(x, M) + \psi(x) \quad \forall x \in D.$$
Доопределим функцию φ на $\partial B(x_0, R) \cap K$ тождественным отображением. Тогда φ — ретракция множества K на $\widehat{M}$, и, следовательно, $\widehat{M}$ стягиваемо. □

Определение 4. Компакт Y называется *клеточноподобным*, если существует абсолютный окрестностный ретракт Z и такое вложение $i : Y \to Z$, что образ $i(Y)$ стягиваем в любой своей окрестности $U \subset Z$ (см. [14]).

Отметим, что счетное пересечение стягиваемых множеств, образующих вложенную последовательность, является клеточноподобным (см. [14]).

Теорема A (см. [14])**.** *Пусть отображение $F : K \to 2^Y$ — полунепрерывное сверху отображение компактного ANR K в пространство Y с клеточноподобными значениями. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ имеется непрерывная ε-аппроксимация $f : K \to Y$ многозначного отображения F, т.е. $\varrho(f(x), F(O_\varepsilon(x))) < \varepsilon$.*

Определение 5. Множество $M \subset X$ называется *B-клеточноподобным* (*P-клеточноподобным*), если пересечение множества M с любым замкнутым шаром либо пусто, либо клеточноподобно (если $P_M x$ клеточноподобно для всех $x \in X$).

Теорема 3. *Пусть M — строгое солнце в линейном нормированном пространстве X. Тогда следующие условия равносильны*:

(a) *множество M обладает непрерывной аддитивной (мультипликативной) ε-выборкой для любого $\varepsilon > 0$;*

(b) *множество M является $\mathring{B}$-бесконечно связным*;

(c) *пересечение M с произвольным замкнутым шаром $B(x_0,R)$ бесконечно связно (стягиваемо), если $M\cap \mathring{B}(x_0,R)\neq\varnothing$.*

Доказательство. (a)$\Leftrightarrow$(b) вытекает из замкнутости солнца M и [9, теорема 7].

(a)$\Rightarrow$(c) вытекает из предыдущей теоремы.

(c)$\Rightarrow$(b). Пусть $M\cap \mathring{B}(x_0,R)\neq\varnothing$; тогда существует последовательность положительных чисел $\{R_n\}\uparrow\uparrow R$, и $M\cap \mathring{B}(x_0,R_n)\neq\varnothing$ для всех $n\in\mathbb{N}$. Возьмем произвольное непрерывное отображение

$$\varphi:\partial B^m\to M\cap \mathring{B}(x_0,R),$$

где $B^m\subset\mathbb{R}^m$ — единичный шар. Найдется номер N, для которого

$$\varphi(\partial B^m)\subset M\cap \mathring{B}(x_0,R_N).$$

Поскольку $M\cap B(x_0,R_N)$ стягиваемо, то существует непрерывное продолжение φ на шар B^m с образами в $M\cap B(x_0,R_N)\subset M\cap \mathring{B}(x_0,R)$. Отсюда следует, что M является $\mathring{B}$-бесконечно связным. Теорема доказана. □

Следствие 2. *Пусть M — строгое солнце в конечномерном линейном нормированном пространстве X. Тогда следующие условия равносильны*:

(a) *множество M обладает непрерывной аддитивной (мультипликативной) ε-выборкой для любого $\varepsilon>0$;*
(b) *множество M является B-клеточноподобным;*
(c) *множество M является P-клеточноподобным.*

Доказательство. (a)$\Rightarrow$(b). Поскольку стягиваемое множество клеточноподобно и пересечение вложенной последовательности стягиваемых компактов клеточноподобно, то в силу предыдущей теоремы

$$P_Mx=M\cap B(x_0,\varrho(x,M))=\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\left(B\left(x_0,\varrho(x,M)+\frac{1}{n}\right)\cap M\right)$$

клеточноподобно ($x\in X$) и $M\cap B(x_0,R)$ ($R>\varrho(x,M)$) клеточноподобно. Таким образом, M является B-клеточноподобным.

(b)$\Rightarrow$(c) очевидно.

(c)$\Rightarrow$(a). Отображение $P=P_M:X\to 2^M$ полунепрерывно сверху и его образы клеточноподобны. Тогда по теореме A для любого выпуклого компакта $K\subset X$ и любого числа $\varepsilon>0$ существует отображение $\varphi\in C(K,M)$, являющееся ε-аппроксимацией отображения P, т.е.

$$\varrho\Big(\varphi(x),P(O_{\varepsilon/3}(x))\Big)<\frac{\varepsilon}{3}.$$

Следовательно, $\varphi(K)\subset O_\varepsilon(M)$, и

$$\big\|\varphi(x)-x\big\|\leqslant\inf_{y\in O_{\varepsilon/3}(x)}\Big(\varrho\big(\varphi(x),P_My\big)+\varrho(y,M)+\|x-y\|\Big)\leqslant\frac{\varepsilon}{3}+\varrho(x,M)+\frac{2\varepsilon}{3}=\varrho(x,M)+\varepsilon.$$

В силу [8, лемма 2] отсюда следует, что множество M обладает непрерывной аддитивной (мультипликативной) ε-выборкой для любого $\varepsilon>0$. Следствие доказано. □

4. Непрерывная выборка в гильбертовых пространствах.

Обозначим через $|\cdot|$ гильбертову норму.

Лемма 1. *Пусть в гильбертовом пространстве H шары $\mathring{B}(x_0,r_0)$ и $\mathring{B}(y_0,R_0)$ пересекаются (т.е. $r:=|x_0-y_0|<r_0+R_0$) и ни один из них не содержит другой. Тогда существует положительная непрерывная функция $\varphi:[x_0,y_0]\to\mathbb{R}$, для которой множество*

$$A:=\mathring{B}(x_0,r_0)\cap\mathring{B}(y_0,R_0)$$

содержится в шаре $\overset{\circ}{B}(x,\varphi(x))$ *для всех* $x\in[x_0,y_0]$, *и для всех* $x\in(x_0,y_0)$ *множество* $\overset{\circ}{B}(x,\varphi(x))\setminus \overline{A}$ *разделяется на две области*:

$$U=\overset{\circ}{B}(x,\varphi(x))\setminus B(y_0,R_0),\quad V=\overset{\circ}{B}(x,\varphi(x))\setminus B(x_0,r_0).$$

Поэтому для любых точек $p\in U$ *и* $q\in V$ *соединяющий их путь пересекает сначала* $S(y_0,R_0)\cap \overset{\circ}{B}(x_0,r_0)$, *а затем* $S(x_0,r_0)\cap\overset{\circ}{B}(y_0,R_0)$. *При этом* $\varphi(x_0)=r_0$ *и* $\varphi(y_0)=R_0$.

Доказательство. Без потери общности будем считать, что $R_0\geqslant r_0$. Центр z_0 сферы пересечения $S_0:=S(x_0,r_0)\cap S(y_0,R_0)$ находится на расстоянии $u:=(r^2-(R_0^2-r_0^2))/2r$ от точки x_0 и на расстоянии $v:=(r^2+(R_0^2-r_0^2))/2r$ от точки y_0. Радиус S_0 равен $h:=\sqrt{r_0^2-u^2}=\sqrt{R_0^2-v^2}$. Поэтому для всех точек $x\in[x_0,z_0]$ расстояние до всех точек сферы S_0 равно $\varphi(x):=\sqrt{h^2+(u-|x-x_0|)^2}$, а в случае $x\in[z_0,y_0]$ расстояние до всех точек этой сферы равно $\varphi(x):=\sqrt{h^2+(x-|x-y_0|)^2}$. При этом $\varphi(x)>r_0-|x-x_0|$ для всех точек $x\in(x_0,z_0]$ и $\varphi(x)>R_0-|x-y_0|$ для всех точек $x\in[z_0,y_0)$. По построению функция φ непрерывна и положительна на отрезке $[x_0,y_0]$, и для всех точек $x\in[x_0,y_0]$ множество A содержится в шаре $\overset{\circ}{B}(x,\varphi(x))$, и для всех $x\in(x_0,y_0)$ множество $\overset{\circ}{B}(x,\varphi(x))\setminus\overline{A}$ распадается на две области: $\overset{\circ}{B}(x,\varphi(x))\setminus B(y_0,R_0)$ и $\overset{\circ}{B}(x,\varphi(x))\setminus B(x_0,r_0)$. Лемма доказана. ☐

Теорема 4. *Пусть* M — $\overset{\circ}{B}$*-бесконечно связное множество в гильбертовом пространстве* H. *Тогда непустое пересечение* M *с произвольным открытым шаром* $\overset{\circ}{B}(x_0,r_0)$ *также является* $\overset{\circ}{B}$*-бесконечно связным множеством.*

Доказательство. Докажем методом от противного. Допустим, что существует шар $B(y_0,R_0)$, имеющий непустое пересечение с множеством $M\cap\overset{\circ}{B}(x_0,r_0)$, и это пересечение не является бесконечно связным. Из этого предположения и условия теоремы вытекает, что $x_0\neq y_0$ (или ни один шар не содержит другой), так как иначе соответствующее пересечение свелось бы к пересечению M с одним из шаров, а такое пересечение бесконечно связно. Итак, в этом случае $0<r:=|x_0-y_0|<R_0+r_0$ и существует такое $n\in\mathbb{N}$, что некоторое непрерывное отображение ψ единичной сферы $\partial B^n\subset\mathbb{R}^n$ в множество $\widehat{M}=M\cap\overset{\circ}{B}(x_0,r_0)\cap\overset{\circ}{B}(y_0,R_0)$ нельзя продолжить до непрерывного отображения единичного шара $B^n\subset\mathbb{R}^n$ во множество $\widehat{M}$. Найдется максимально удаленная от точки x_0 точка $x'\in[x_0,y_0]$, для которой отображение ψ нельзя продолжить до непрерывного отображения единичного шара $B^n\subset\mathbb{R}^n$ во множество $M\cap\overset{\circ}{B}(x',\varphi(x'))\cap\overset{\circ}{B}(y_0,R_0)$ (здесь φ — функция, построенная в предыдущей лемме). Не теряя общности переобозначим x' и $\varphi(x')$ соответственно как x_0 и r_0. По построению для любой точки $x\in(x_0,y_0]$ отображение ψ продолжается до непрерывного отображения единичного шара $B^n\subset\mathbb{R}^n$ во множество $M\cap\overset{\circ}{B}(x,\varphi(x))\cap\overset{\circ}{B}(y_0,R_0)$. Затем, повторив аналогичную процедуру для точки y_0 и сделав аналогичное переобозначение, можно считать, что для любой точки $y\in[x_0,y_0)$ отображение ψ продолжается до непрерывного отображения единичного шара $B^n\subset\mathbb{R}^n$ во множество $M\cap\overset{\circ}{B}(x_0,r_0)\cap\overset{\circ}{B}(y,\varphi(y))$.

По построению для любой точки $\omega\in(x_0,y_0)$ существует такое непрерывное продолжение

$$\psi^1=\psi^1_\omega:B^n\to M^1:=M\cap\overset{\circ}{B}(\omega,\varphi(\omega))\cap\overset{\circ}{B}(x_0,r_0),$$

что $\psi^1(B^n)\setminus\overset{\circ}{B}(y_0,R_0)\neq\varnothing$. Аналогично, существует такое непрерывное продолжение

$$\psi^2=\psi^2_\omega:B^n\to M^2:=M\cap\overset{\circ}{B}(\omega,\varphi(\omega)))\cap\overset{\circ}{B}(y_0,R_0)$$

что $\psi^2(B^n)\setminus\overset{\circ}{B}(x_0,r_0)\neq\varnothing$. Без потери общности можно считать, что

$$\psi^1(0)\notin\overset{\circ}{B}(y_0,R_0),\quad \psi^2(0)\notin\overset{\circ}{B}(x_0,r_0).$$

Отображения ψ^1 и ψ^2 порождают непрерывное отображение

$$\psi^3 : \partial(B^n \times [-1,1]) \to M \cap \mathring{B}(x,\varphi(x))$$

по формулам

$$\psi^3(x,1) := \psi^2(0), \quad \psi^3(x,-1) := \psi^1(0),$$

где $x \in B^n$, и

$$\psi^3(x,t) := \begin{cases} \psi^2((1-t)x), & (x,t) \in \partial B^n \times [0,1], \\ \psi^2((1-|t|)x) & (x,t) \in \partial B^n \times [-1,0]. \end{cases}$$

Из бесконечной связности $M \cap \mathring{B}(x,\varphi(x))$ следует, что существует непрерывное продолжение

$$\psi_0 : B^n \times [-1,1] \to M \cap \mathring{B}(x,\varphi(x))$$

для ψ^3. Для каждой точки $x \in B^n$ рассмотрим интервал $J_x = (a_x, b_x) \subset [-1,1]$, где

$$b_x = \sup\Big\{t \in [-1,1] \;\Big|\; \psi_0(x,u) \in \mathring{B}(x_0,r_0) \ \forall u < t\Big\},$$
$$a_x = \inf\Big\{t \in [-1,b_x] \mid \psi_0(x,u) \in \mathring{B}(y_0,R_0) \ \forall u > t\Big\}.$$

Из построения вытекает, что что для всех точек $p \in J_x$ и $x \in B^n$ имеем

$$\psi_0(x,p) \in \mathring{B}(x_0,r_0) \cap \mathring{B}(y_0,R_0),$$

а из предыдущей леммы — что $J_x \neq \varnothing$ для всех $x \in B^n$. Нетрудно видеть, что отображение F, ставящее в соответствие каждой точке $x \in B^n$ интервал J_x, является полунепрерывным снизу. Кроме того, $0 \in J_x$ для всех точек $x \in \partial B^n$. Это вытекает из свойств отображений ψ^1 и ψ^2, из которых составлено отображение ψ_0 на $\partial B^n \times [-1,1]$ и того факта, что $\psi_0(\cdot,0) = \psi^1(\cdot) = \psi^2(\cdot)$ принимает значения в $M \cap \mathring{B}(x_0,r_0) \cap \mathring{B}(y_0,R_0)$. В силу теоремы Майкла (см. [15]) существует непрерывная выборка

$$f : B^n \to \mathbb{R} : \quad f(x) \in J_x = F(x) \quad \forall x \in B^n,$$

равная нулю на ∂B^n. Отсюда следует, что отображение $\psi_0(x, f(x))$ непрерывно и его образы лежат в $\widehat{M}$. Кроме того, оно является непрерывным продолжением отображения ψ на шар B^n, что противоречит предположению о невозможности такого продолжения. Теорема доказана. □

Определение 6. Множество $M \subset X$ называется $\mathring{B}^2$*-бесконечно связным*, если пересечение с любым открытым шаром либо пусто, либо $\mathring{B}$-бесконечно связно.

Следствие 3. *В гильбертовом пространстве класс всех $\mathring{B}$-бесконечно связных множеств совпадает с классом всех $\mathring{B}^2$-бесконечно связных множеств.*

Следствие 4. *В гильбертовом пространстве непустое пересечение с $\mathring{B}$-бесконечно связным множеством конечного числа открытых шаров является $\mathring{B}$-бесконечно связным множеством.*

Из [9, теорема 2] следствия 4 непосредственно вытекает следующее утверждение.

Следствие 5. *Предположим, что для любого $\varepsilon > 0$ на замкнутое множество M в гильбертовом пространстве существует непрерывная аддитивная ε-выборка. Тогда на любое непустое пересечение множества M с любым конечным числом открытых шаров существует непрерывная аддитивная ε-выборка для всех $\varepsilon > 0$, а на замыкание такого пересечения существует непрерывная мультипликативная ε-выборка для всех $\varepsilon > 0$.*

5. Выборки из полунепрерывных снизу отображений и теорема о неподвижной точке.

Определение 7. Пусть (X,q) — полуметрическое пространство. Отображение $\chi : X \to \overline{\mathbb{R}}$ называется *полунепрерывным снизу* на этом полуметрическом пространстве, если для любых точки $x \in X$ и последовательности $\{x_n\} \subset X$, обладающих свойством $q(x,x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ верно неравенство

$$\varliminf_{n\to\infty} \chi(x_n) \geqslant \chi(x).$$

Определение 8. Пусть (X,q), (Y,ν) — полуметрические пространства, $M \subset Y$. Отображение $F : X \to 2^M$ назовем *устойчивым снизу*, если $F(x) \neq \varnothing$ для всех $x \in X$ и для любых $x_0 \in X$ и $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\delta > 0$, что

$$\varrho(y,F(x)) - \varrho(y,F(x_0)) \leqslant \varepsilon$$

для всех $y \in Y$ и $x \in X$, удовлетворяющих неравенству $q(x,x_0) \leqslant \delta$.

Для двух непустых подмножеств $A, B \subset Y$ обозначим через $d(A,B)$ одностороннее хаусдорфово расстояние:

$$d(A,B) = \sup_{y\in B} \varrho(y,A).$$

Отметим, что $\sup\limits_{y\in Y}(\varrho(y,F(x)) - \varrho(y,F(x_0)))$ представляет собой одностороннее хаусдорфово расстояние между множествами $F(x)$ и $F(x_0)$. В случае, когда образы отображения компактны, устойчивость снизу отображения F равносильна его полунепрерывности снизу.

В дальнейшем будем предполагать, что $(X,\|\cdot\|)$, $(Y,\|\cdot\|)$ — линейные полунормированные пространства, $M \subset Y$. Также будем предполагать, что некоторое отображение $F : X\times[0,\vartheta] \to 2^M$ удовлетворяет следующим условиям:

(1) отображение $F(\cdot,t)$ устойчиво снизу для всех $t \in [0,\vartheta]$;
(2) для любых чисел t_1, t_2 $(t_1 < t_2)$ и произвольного ограниченного множества $\mathcal{A} \subset X$ найдется такое число $\delta > 0$, что $O_\delta(F(x,t_1)) \subset F(x,t_2)$ для всех $x \in \mathcal{A}$;
(3) функция $d(F(x,0),F(x,t))$ непрерывна по x для каждого $t \in [0,\vartheta]$ и равномерно стремится к нулю при $t \to 0+$ на любом ограниченном множестве $\mathcal{A} \subset X$;
(4) множества $F(x,t)$ бесконечно связны для всех $x \in X$ и $t \in (0,\delta_0)$.

Введем обозначение

$$\Psi_\delta(x,t) \overset{\text{def}}{=} \Big\{u \in M \;\Big|\; \varrho(u,F(x,t)) < \delta\Big\} = M \cap O_\delta(F(x,t))$$

для всех $(x,t) \in X\times[0,\vartheta]$ и $\delta \in (0,\delta_0)$.

Будем также полагать, что $\chi : X \to \overline{\mathbb{R}}$ — некоторая полунепрерывная снизу положительная функция. Без потери общности будем считать, что $\chi(\cdot) \leqslant \delta_0$ (для некоторого $\delta_0 > 0$), рассматривая при необходимости вместо χ функцию $\min\{\chi(\cdot),\delta_0\}$.

Лемма 2. *Пусть $S \subset X$ — невырожденный симплекс размерности n, множество Q представляет собой объединение некоторых его собственных граней, и задано такое непрерывное отображение $\varphi : Q \to M$, что $\varphi(x) \in F(x,t_0)$ для некоторого числа $t_0 \in (0,\vartheta)$ и*

$$d(F(x,0),F(x,t_0)) < \chi(x) \quad \forall x \in Q.$$

Тогда существует такое непрерывное продолжение $\varphi : S \to M$, что $\varphi(x) \in F(x,t)$ для некоторого числа $t \in (t_0,\vartheta)$ и

$$\varrho(\varphi(x),F(x,0)) \leqslant d(F(x,0),F(x,t)) < \chi(x) \quad \forall x \in S.$$

Доказательство. Существует число $t > t_0$, для которого

$$d(F(x,0),F(x,t)) < \chi(x) \quad \forall x \in S.$$

Пусть $t_0 < t_0' < t_1 < t_1' < \ldots < t_n < t_n' < t$. Найдутся такие числа $\delta_k > 0$, что

$$O_{\delta_k}(F(x,t_{k-1})) \subset F(x,t_{k-1}'), \quad O_{\delta_k}(F(x,t_{k-1}')) \subset F(x,t_k) \quad \forall x \in S, \quad k = \overline{1,n+1}.$$

Положим

$$\delta = \frac{1}{2} \min_{k=\overline{1,n+1}} \delta_k.$$

Для каждой точки $x \in S$ найдется такое число $r = r(x) \in (0, \delta)$, что для всех точек $y \in O_{2r}(x)$ верно неравенство

$$\sup_{u \in Y} \Big(\varrho\big(u, F(y, t_k)\big) - \varrho\big(u, F(x, t_k)\big) \Big) < \delta, \quad k = \overline{1, n}).$$

Из открытого покрытия $\{O_{r(x)}(x)\}$ множества S выделим конечное подпокрытие $\{O_{r(x_j)}(x_j)\}_{j=1}^{N}$. Разобьем симплекс S на конечное число симплексов $\{S_i\}$ размерности n так, чтобы их диаметр был меньше δ и чтобы каждый из них содержался хотя бы в одной окрестности $O_{r(x_j)}(x_j)$. Кроме того, будем считать, что различные симплексы этого разбиения пересекаются по не более, чем одной собственной грани размерности $<n$.

1°. Для каждой нульмерной грани s симплексов $\{S_i\}$ (т.е. вершины) найдется такой индекс $j = j_s$, для которого число $r(x_j)$ максимально среди тех, что грань s принадлежит окрестности $O_{r(x_j)}(x_j)$. Если $s \notin Q$, то поставим точке s в соответствие некоторую точку

$$y \stackrel{\text{def}}{=} \varphi(s) \in F(x_j, t_0) \subset F(x_j, t_0').$$

Тогда

$$\varrho\big(\varphi(s), F(s, t_0')\big) < \varrho\big(\varphi(s), F(x_j, t_0')\big) + \delta,$$

т.е.

$$\varphi(s) \in \Psi_\delta(s, t_0').$$

Если же $s \in Q$, то

$$\varrho(\varphi(s), F(s, t_0')) = 0 < \delta,$$

т.е. для всех нульмерных граней

$$\varphi(s) \in \Psi_\delta(s, t_0') \subset F(s, t_1).$$

2°. Предположим, что отображение φ непрерывно продолжено на множество T_m, являющееся объединением граней $\{\Delta_{ik}\}$ размерности m симплексов набора $\{S_i\}$ и при этом $\varphi(x) \in F(x, t_{m+1})$ для всех $x \in T_m$.

Более того, для каждой грани Δ_{ik} найдется индекс $j = j_{ik} = j_{\Delta_{ik}}$, для которого

$$\Delta_{ik} \subset O_{r(x_j)}(x_j), \quad \varphi(\Delta_{ik}) \subset F(x_j, t_m').$$

Возьмем произвольную $(m+1)$-мерную грань $\Delta \not\subset Q$ какого-либо симплекса из набора $\{S_i\}$. На его относительной границе $\partial\Delta$ определена функция $\varphi : T_m \to M$. Каждой грани P границы $\partial\Delta$ размерности $k \leqslant m$ поставим в соответствие максимальное из чисел $r(x_l)$, $l = l_P$, для которых эта грань содержится в окрестности $O_{r(x_l)}(x_l)$. Указанные окрестности также поставим в соответствие грани P. Пусть $j = j_\Delta$ — такой индекс, что число $r(x_j)$ максимально среди чисел $r(x_k)$, для которых грань Δ содержится в $O_{r(x_k)}(x_k)$. Для каждой грани Δ_{ik} из границы $\partial\Delta$ значения функции φ на ней содержатся в $F(x_{j_{ik}}, t_m') \subset F(x_{j_{ik}}, t_{m+1})$ $(j_{ik} = j_{\Delta_{ik}})$. Учитывая, что окрестность $O_{r(x_{j_{ik}})}(x_{j_{ik}})$ имеет максимальный радиус среди тех, которые содержат грань Δ_{ik}, получим неравенство

$$r(x_{j_{ik}}) \geqslant r(x_j).$$

Отсюда из условия $x_j \in O_{2r(x_{j_{ik}})}(x_{j_{ik}})$ вытекает неравенство

$$\varrho\big(y, F(x_j, t_{m+1})\big) - \varrho\big(y, F(x_{j_{ik}}, t_{m+1})\big) < \delta.$$

Следовательно,

$$\varrho\big(\varphi(x), F(x_j, t_{m+1})\big) \leqslant \varrho\big(\varphi(x), F(x_{j_{ik}}, t_{m+1})\big) + \delta, \quad x \in \Delta_{ik},$$

и поэтому

$$\varphi(x) \in \Psi_\delta(x_j, t_{m+1}), \quad x \in \Delta_{ik}.$$

Таким образом,

$$\varphi(\partial\Delta) \subset \Psi_\delta(x_j, t_{m+1}) \subset F(x_j, t_{m+1}').$$

Поскольку $F(x_j, t'_{m+1})$ бесконечно связно, то существует такое непрерывное продолжение φ на Δ, что $\varphi(\Delta) \subset F(x_j, t'_{m+1})$. Так как

$$\varrho\big(\varphi(x), F(x, t'_{m+1})\big) \leqslant \varrho\big(\varphi(x), F(x_j, t'_{m+1})\big) + \delta \quad \forall x \in \Delta,$$

то

$$\varphi(x) \in \Psi_\delta(x, t'_{m+1}) \subset F(x, t_{m+2}) \quad \forall x \in \Delta.$$

Поскольку все различные грани размерности $m+1$ пересекаются только по собственным граням, то отображение φ корректно определено на множестве T_{m+1}, представляющем собой объединение всех граней размерности $m+1$ симплексов из набора $\{S_i\}$. При этом $\varphi \in C(T_{m+1})$.

3°. Из принципа математической индукции вытекает, что на множестве $T_n = S$ построено такое непрерывное отображение $\varphi : T_n \to M$, что $\varphi(x) \in F(x,t)$, $x \in S$. Тем самым для всех $y \in S$ верно неравенство

$$\varrho\big(\varphi(y), F(y,0)\big) \leqslant d\big(F(y,0), F(y,t)\big) < \chi(y),$$

т.е. φ — искомое отображение. □

Лемма 3. *Пусть $(X, \|\cdot\|)$ и $(Y, \|\cdot\|)$ — линейные полунормированные пространства*; $M \subset Y$, *$\{x_\alpha\}_\alpha$ — набор векторов из X; $\Sigma = \{S_\beta\}_\beta$ — набор симплексов, вершины которых составляют конечный поднабор из $\{x_\alpha\}_\alpha$, и при этом все различные симплексы S_β либо не пересекаются, либо пересекаются по своим собственным граням, либо один из них является собственной гранью другого*; *T — объединение некоторых симплексов набора Σ*; *F — многозначное отображение из леммы 2. Тогда существует такое отображение $\varphi : T \to M$, что*

$$\varrho\big(\varphi(x), F(x,0)\big) < \chi(x) \quad \forall x \in T,$$

и отображение φ непрерывно на каждом из симплексов, составляющих T.

Доказательство. Без потери общности будем считать, что все грани симплексов S_β также принадлежат набору Σ. Для каждого нульмерного симплекса s из набора Σ (т.е. какой-либо точки из набора $\{x_\alpha\}_\alpha$) определим $\varphi(s)$ как некоторый элемент $y \in M$, удовлетворяющий неравенству $\varrho(y, F(s,0)) < \chi(s)$.

1°. Согласно лемме 2 существует такое непрерывное продолжение отображения φ на каждый одномерный симплекс $S \in \Sigma$, что

$$\varrho\big(\varphi(y), F(y,0)\big) < \chi(y) \quad \forall y \in S.$$

2°. Пусть отображение $\varphi : T_m \to M$ построено на объединении T_m всех m-мерных симплексов из набора Σ и непрерывно на каждом таком симплексе. При этом для любого $(m+1)$-мерного симплекса $S \in \Sigma$ на его относительной границе ∂S непрерывное отображение φ удовлетворяет неравенству

$$\varrho\big(\varphi(y), F(y,0)\big) < \chi(y) \quad y \in \partial S.$$

В силу леммы 2 существует такое непрерывное продолжение $\varphi : S \to M$, что

$$\varrho\big(\varphi(y), F(y,0)\big) < \chi(y) \quad \forall y \in S.$$

Построенное отображение будет корректно определено на объединении всех $(m+1)$-мерных симплексов набора Σ, так как различные $(m+1)$-мерные симплексы пересекаются только по собственным граням (если они вообще пересекаются). При этом на каждом таком симплексе это отображение непрерывно.

3°. Таким образом, мы построим такое отображение $\varphi : T \to M$, что

$$\varrho\big(\varphi(x), F(x,0)\big) < \chi(x) \quad \forall x \in T,$$

и отображение φ непрерывно на каждом из симплексов, составляющих T. Лемма доказана. □

Замечание 2. Поскольку любое конечномерное пространство X можно представить в виде множества T из леммы 3, то существует такое $\varphi \in C(X, M)$, что $\varrho(\varphi(x), F(x,0)) < \chi(x))$ для всех $x \in X$.

В следующей теореме нам понадобится следующее утверждение (см. [9, следствие 4]): *любая замкнутая (открытая) r-окрестность ($r > 0$) $\overset{\circ}{B}$-бесконечно связного замкнутого множества в банаховом пространстве является $\overset{\circ}{B}$-бесконечно связным множеством, а, следовательно, непустое пересечение этой окрестности и произвольного открытого шара является бесконечно связным множеством.*

Теорема 5. *Пусть $(X, \|\cdot\|)$ — конечномерное банахово пространство, $(Y, \|\cdot\|)$ — полное линейное полунормированное пространство, а многозначное отображение $\Phi : X \to 2^Y$ устойчиво снизу и имеет замкнутые $\overset{\circ}{B}$-бесконечно связные в $(Y, \|\cdot\|)$ образы. Тогда существует такое отображение $\varphi \in C(X, Y)$, что $\varphi(x) \in \Phi(x)$ для всех $x \in X$.*

Доказательство.

1^0. Пусть $\psi_1 \in C(X, Y)$ таково, что $\varrho(\psi_1(x), \Phi(x)) < 1/2$, $x \in X$.

2^0. Пусть построено такое отображение $\psi_n \in C(X, Y)$, что $\varrho(\psi_n(x), \Phi(x)) < 1/2^n$. Положим

$$\chi(x) = 2^{-n-1} - \frac{1}{2}\varrho(\psi_n(x), \Phi(x)), \delta(x) = \frac{1}{2}\varrho(\psi_n(x), \Phi(x)).$$

Рассмотрим многозначные отображения

$$H(x, t) = O_{\delta(x)+t}(\Phi(x)), \quad G(x, t) = O_{2^{-n-1}+t}(\psi_n(x)), \quad x \in X.$$

Тогда множества $F(x, t) = H(x, t) \cap G(x, t)$ непусты для всех $t \geqslant 0$ и бесконечно связны. Более того, нетрудно видеть, что отображение F удовлетворяет условиям, сформулированным перед леммой 2, а, следовательно, для него верно утверждение замечания 2. Поэтому существует такое отображение $\psi_{n+1} \in C(X, Y)$, что

$$\varrho\big(\psi_{n+1}(x), F(x, 0)\big) < \chi(x), \quad x \in X.$$

Отсюда получаем

$$\varrho\big(\psi_{n+1}(x), \Phi(x)\big) < \delta(x) + \chi(x) = 2^{-n-1}, \quad \|\psi_{n+1}(x) - \psi_n(x)\| < 2^{-n}.$$

3^0. Последовательность $\{\psi_n(x)\}$ равномерно фундаментальна в $(Y, \|\cdot\|)$, поэтому сходится к некоторому непрерывному отображению $\varphi : X \to Y$. При этом

$$\varrho\big(\psi_{n+1}(x), \Phi(x)\big) < 2^{-n-1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

и, следовательно, $\varrho(\varphi(x), \Phi(x)) = 0$, т.е. $\varphi(x) \in \Phi(x)$ для всех $x \in X$. □

Теорема 6. *Пусть $(X, \|\cdot\|)$ — конечномерное линейное нормированное пространство, $\mathcal{K}$ — замкнутый компакт в пространстве X, являющийся $\overset{\circ}{B}$-бесконечно связным множеством, отображение $\Psi : \mathcal{K} \to 2^{\mathcal{K}}$ полунепрерывно снизу и для всех $y \in \mathcal{K}$ множество $\Psi(y)$ является $\overset{\circ}{B}$-бесконечно связным компактом. Тогда найдется неподвижная точка $x_0 \in \mathcal{K}$, $x_0 \in \Psi(x_0)$.*

Доказательство. В силу $\overset{\circ}{B}$-бесконечно связности компакта $\mathcal{K}$ на него существует непрерывная мультипликативная ε-выборка $\psi : X \to \mathcal{K}$ (для некоторого $\varepsilon > 0$), которая является ретрактом всего пространства X на $\mathcal{K}$. Тогда отображение $\Phi = \Psi \circ \psi$ является устойчивым снизу. Как мы уже отмечали ранее, если образы полунепрерывного снизу отображения компактны, то оно устойчиво снизу. Применяя предыдущее утверждение, мы построим такое непрерывное отображение $\varphi : X \to X$, что $\varphi(x) \in \Phi(x)$, $x \in X$.

В силу теоремы Брауэра для непрерывного отображения φ, суженного на выпуклую оболочку компакта $\mathcal{K}$, существует неподвижная точка $x_0 \in \mathcal{K}$. Тогда $x_0 = \varphi(x_0) \in \Phi(x_0) = \Psi(x_0)$. □

Замечание 3. В предыдущей теореме можно ослабить условие на компакт $\mathcal{K}$, считая его ретрактом пространства X.

6. Приложения к задаче о гладких решениях уравнения эйконала. В этом разделе будем изучать свойства особых и регулярных множеств. С подробностями связи этих множеств для поверхностей уровня решений уравнения эйконала с гладкостью этих решений можно ознакомиться в [2]. Задача описания класса всех гладких решений уравнения эйконала тесно связана с задачей описания вида поверхностей с конкретными особыми множествами. Эта последняя задача интересна и сама по себе.

Определение 9. Точка $x \in X \setminus M$ называется *регулярной* для замкнутого множества $M \subset X$, если все точки некоторой окрестности $O(x)$ являются точками единственности (т.е. для них существует единственная ближайшая в M) и однозначный оператор P_M непрерывен на $O(x)$. Точки, не являющиеся регулярными или принадлежащие замыканию $\operatorname{int} M$, будем называть *особыми*. Множество всех особых точек называется *особым множеством* (для M), а дополнение к нему — *регулярным множеством*.

Из определения видно, что регулярное множество открыто, а особое множество замкнуто. Отметим, что гладкие решения уравнения эйконала локально представляются с точностью до константы и знака в виде функции-расстояния до некоторого множества. Гладкость же функции-расстояния нарушается в особых точках и сохраняется в регулярных точках (см. [2]). Добавим (без доказательства), что гладкое решение уравнения эйконала часто имеет вид $c \pm \varrho(x, M_c)$, где M_c — поверхность уровня этого решения, например, это верно в областях Ω, обладающих следующими свойствами: для любых точек $x_0, y_0 \in \Omega$ существует отрезок $[x, y] \subset \Omega$, концы которого сколь угодно близки к точкам x_0, y_0.

Определение 10. Банахово пространство X называется *равномерно выпуклым пространством*, если его модуль выпуклости

$$\omega(\varepsilon) := \inf \left\{ 1 - \frac{\|x+y\|}{2} \;\Big|\; \|x\| = \|y\| = 1,\ \|x-y\| \geqslant \varepsilon \right\}$$

является положительной функцией для всех $\varepsilon \in (0, 2]$. Говорят, что (равномерно выпуклое) пространство имеет модуль выпуклости второго порядка, если для некоторого числа $C > 0$ и произвольных чисел $\varepsilon \in [0, 2]$ верно неравенство

$$\omega(\varepsilon) \geqslant C\varepsilon^2.$$

Через $\operatorname{diam} A$ обозначим диаметр непустого множества $A \subset X$, т.е. величину

$$\operatorname{diam} A = \sup_{x,y \in A} \|x - y\|.$$

Лемма 4. *Пусть $(X, \|\cdot\|)$ — равномерно выпуклое пространство, $M \subset X$ — непустое замкнутое множество, шар $B(x, \delta)$, $x \in X \setminus M$, состоит из регулярных точек для M. Тогда существует точка $y \in S(x, \delta)$, для которой $x \in [y, x']$, где $x' \in M$ — единственная ближайшая в M для точки x. При этом точка x' также является ближайшей в M для y.*

Доказательство. В силу [3, предложение 1.4, лемма 0.1]) существует такая последовательность $\{y_n\} \subset S(x, \delta)$, что

$$\varrho(y_n, M) - \varrho(x, M) \xrightarrow[n\to\infty]{} \delta.$$

Следовательно,

$$B(y_n, \varrho(y_n, M)) \supset B(x, \varrho(x, M) - \varepsilon_n)$$

для $\varepsilon_n = \delta - (\varrho(y_n, M) - \varrho(x, M)) > 0$, $n \in \mathbb{N}$. Из равномерной выпуклости X вытекает, что

$$\eta_n := \operatorname{diam} \Big(B(x, \varrho(x, M)) \setminus B(y_n, \varrho(y_n, M)) \Big) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

так как $\varepsilon_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Отсюда вытекает, что точка $z_n = x + \dfrac{\varrho(x, M)}{\delta}(x - y_n)$ (здесь $\|z_n - x\| = \varrho(x, M)$) удалена от точки x' на расстояние, не большее η_n. Следовательно,

$$y_n = \frac{\delta}{\varrho(x, M)}(x - z_n) + x \to x + \frac{\delta}{\varrho(x, M)}(x - x') \stackrel{\text{def}}{=} y.$$

Тогда

$$\varrho(y, M) = \delta + \varrho(x, M), \quad B(x, \varrho(x, M)) \subset B(y, \varrho(y, M)).$$

Отсюда следует, что x' — ближайшая точка для y. Кроме того, $x \in [y, x']$. Лемма доказана. □

Замечание 4. Шар $B(x, \delta)$ в предыдущей лемме можно заменить на $O_\delta(x)$.

Доказательство. Действительно, рассмотрим положительную последовательность $\{\delta_n\} \uparrow\uparrow \delta$. По лемме 4 существует такая последовательность $\{y^n\}$, что $\|y^n - x\| = \delta_n$, $x \in [y^n, x']$, и x' — ближайшая точка для y^n. Нетрудно видеть, что точки y^n лежат на луче ℓ с началом x', проходящем через x. Поэтому $y^n \to y \in \ell$, где $\|y - x\| = \delta$. Из того, что x' — ближайшая для y^n, вытекает, что

$$\varrho(y, M) = \lim_{n\to\infty} \varrho(y^n, M) = \lim_{n\to\infty} \|y^n - x'\| = \|y - x'\|,$$

т.е. x' — некоторая ближайшая точка для y. □

Следствие 6. *В условиях леммы* 4 *для всех точек пересечения* $\ell \cap O_\delta(x)$ *точка* x' *является единственной ближайшей, где* $\ell = \ell_x$ — *луч, исходящий из* x' *и проходящий через* x.

Замечание 5 (см. [11])**.** Отметим, что точка x' является единственной ближайшей для всех точек отрезка $[x, x']$ в силу строгой выпуклости пространства X. Кроме того, если дополнительно пространство X имеет модуль выпуклости второго порядка, а M — замкнутый след C^2-поверхности, то все точки полуинтервала $(x, x']$ являются регулярными точками.

Следствие 7. *Пусть выполнены условия леммы* 4, G — *множество регулярных точек для* M, ℓ_x — *луч следствия* 6. *Тогда для всех точек связной компоненты пересечения* $G \cap \ell_x$, *содержащей точку* x, *единственной ближайшей является точка* x'.

Замечание 6. Предположим, что для любой точки $x \in X \setminus M$ и некоторой ее ближайшей x' существуют такие последовательности $\{y_n\}$ и $\{y'_n\}$, что y'_n — некоторая ближайшая к y_n, $n \in \mathbb{N}$,

$$\alpha_n := \varrho(x, [y_n, y'_n]) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0, \quad \alpha = \varliminf_{n\to\infty} \|y_n - y'_n\| > \|x - x'\|.$$

Тогда x' — единственная ближайшая для x, и $y'_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x'$.

Доказательство. Без потери общности можно считать, что

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} \|y_n - y'_n\| \in \mathbb{R}_+.$$

Из включения

$$B(x, \varrho(x, M) - \alpha_n) \subset B(y_n, \varrho(y_n, M))$$

и соображений равномерной выпуклости пространства X так же, как и при доказательстве леммы 4, получим, что $y'_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x'$ и x' — ближайшая точка в M для x. □

Обозначим через $\mathbb{X}$ расширение пространства X добавлением бесконечной точки (окрестности такой точки определяются дополнениями замкнутых шаров из X). Бесконечную точку будем считать, особой для любых множеств $M \subset X$. Следующая теорема устанавливает геометро-топологические свойства особого множества.

Теорема 7. *Пусть* X — *банахово пространство с модулем выпуклости второго порядка,* $G \subset X$ — *область, граница которой является следом* C^2*-поверхности. Тогда множество особых точек* E *в* $\mathbb{X}$ *для множества* $M = \partial G$ *является гомотопией* (*ретракцией*) $\overline{G}$.

Доказательство. Для любой регулярной точки $x \in G$ множества M и ее единственной ближайшей $x' \in M = \partial G$ существует такая регулярная точка y, что $x \in (y, x']$, а из замечания 5 вытекает, что полуинтервал $(y, x']$ состоит из регулярных точек, для которых x' — единственная ближайшая. Рассмотрим луч ℓ_x, исходящий из x' и проходящий через x. Тогда существует особая точка (возможно, бесконечно удаленная) $a \in \ell_x$, для которой все точки полуинтервала $(a, x']$ регулярны, а все остальные точки луча являются особыми точками. Отображение f, ставящее в соответствие регулярной точке $x \in G$ точку $a = f(x)$, является непрерывным. Действительно, если последовательность точек $\{x_n\}$ сходится к точке x, то последовательность $\{x'_n\}$ (x'_n — ближайшая для x_n) сходится к x'. Отсюда следует, что лучи l_{x_n} в угловой метрике сходятся к лучу ℓ_x, т.е.

$$\frac{x_n - x'_n}{\|x_n - x'_n\|} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{x - x'}{\|x - x'\|}.$$

Если бы $a_n := f(x_n) \nrightarrow f(x) = a$ при $n \to \infty$, то существовала бы точка $b \in \ell_x$, предельная для последовательности особых точек $\{a_n\}$ и отличная от a. Поэтому точка b является особой точкой и в силу замечания 5 не принадлежит полуинтервалу $(a, x']$, состоящему из регулярных точек. Поскольку x' — ближайшая точка и для b, то полуинтервал $(b, x']$ состоит из регулярных точек и, следовательно, не содержит точки a. Полученное противоречие доказывает, что $f(x_n) \to f(x)$. Кроме того, в силу сходимости вышеупомянутых лучей в угловой метрике нетрудно получить, что отображение f по непрерывности продолжается на множество регулярных точек границы ∂G.

Построим гомотопию $\varphi : \overline{G} \times [0,1] \to E$. Если $a \in \mathbb{X}$ — бесконечно удаленная точка, то положим

$$\varphi(x,\lambda) = x' + \frac{x - x'}{\lambda} \quad \forall \lambda \in (0,1], \qquad \varphi(x,0) = a.$$

Если $a \in \mathbb{X}$ — конечная точка, то положим

$$\varphi(x,\lambda) = \lambda x + (1-\lambda)a \quad \forall \lambda \in [0,1].$$

Нетрудно видеть, что отображение φ непрерывно в топологическом пространстве $\mathbb{X} \times [0,1]$. Доопределим при необходимости отображение φ на множестве $E \times [0,1]$, положив там $\varphi(y,\lambda) = y$. Нетрудно убедиться, что φ — гомотопия множества $\overline{G}$ на множество E. Теорема доказана. $\square$

Следствие 8. *В условиях предыдущей теоремы особое множество E связно в $\mathbb{X}$. В частности, если G — ограниченная область в X, то E связно в X.*

На следующих примерах мы проиллюстрируем, как упомянутый выше факт связности особого множества, влияет на отбор C^1-решений уравнения эйконала.

Пример 1. Рассмотрим уравнение эйконала $|\nabla u| \equiv 1$ на области $\Omega = \mathbb{R}^n \setminus \{a_1, \dots, a_n\}$, $n \geqslant 2$. Как было отмечено в [2, 11], поверхности уровня C^1-решений уравнения эйконала в этом случае должны содержаться в границе области Ω. Поскольку особое множество связно, то оно либо пусто, либо состоит из одной точки. Отсюда в силу известных теорем геометрической теории приближения весь класс C^1-решений уравнения эйконала на Ω состоит из функций вида $c \pm x^*(x)$, где $|x^*| = 1$, и $c \pm |x - a_j|$, $j = \overline{1,n}$.

В более общей ситуации, когда $\Omega = \mathbb{R}^n \setminus \Big(\bigcup\limits_{j\in\mathbb{N}} A_j\Big)$ и множества A_j замкнуты и попарно не пересекаются в $\mathbb{X}$, класс всех C^1-решений уравнения эйконала на этой области Ω состоит из объединения классов всех C^1-решений уравнения эйконала на областях $\Omega_j = \mathbb{R}^n \setminus A_j$.

Пример 2. В случае, когда уравнение эйконала рассматривается на области $\Omega = \mathbb{R}^n \setminus [a,b]$, $n \geqslant 3$, поверхности уровня C^1-решений могут иметь особое множество только в границе области (в отрезке $[a,b]$). Следовательно, это множество либо пусто, либо является подотрезком отрезка $[a,b]$. Это также позволяет полностью описать класс всех C^1-решений уравнения эйконала на данной области (см. [2]). Для этого требуется провести дополнительный отбор решений, используя, например, теорему 9 (см. далее).

Пример 3. Можно показать, что некоторые поверхности уровня C^1-решений уравнения эйконала на области с компактной границей, должны быть выпуклыми (см. [2]; это утверждение также можно получить и из теоремы 9). Поскольку окружность не может быть ретракцией такой области, то не существует C^1-решений уравнения эйконала, особенность которых составляет окружность в пространстве $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$.

Обозначим через X^* пространство, сопряженное с X, а через S_{X^*} — его единичную сферу.

Теорема 8. *Пусть X — гладкое равномерно выпуклое банахово пространство, $M \subset X$ — такое замкнутое непустое множество, что его замкнутая выпуклая оболочка N не совпадает с X и все точки внешности некоторой окрестности $O_r(N)$ (множества N) являются регулярными для M. Тогда $\partial N \subset M$.*

Доказательство. Проведем доказательство от противного. Предположим, что $\partial N \setminus M \neq \varnothing$; тогда найдется точка $x_0 \in \partial N$, для которой $\delta = \varrho(x_0, M) > 0$. Из равномерной выпуклости пространства вытекает, что найдется такое число $\alpha > 0$, что для любого опорного функционала $x^* \in S_{X^*}$ множество $\{x \in B(0, r+\alpha) \mid x^*(x) \geqslant r\}$ имеет диаметр, меньший δ. Замкнутая $(\alpha/2)$-окрестность множества N есть выпуклое тело V, для которого в любой точке его границы можно построить (согласно теореме Хана—Банаха) опорную гиперплоскость. Возьмем такую точку $y_0 \in \partial V$, что $\|x_0 - y_0\| \leqslant \alpha/2$. Через точку y_0 проведем опорную гиперплоскость π, по другую сторону от гиперплоскости π построим шар $B(z_0, r)$, для которого эта гиперплоскость является опорной в точке y_0. Без потери общности можно считать, что $z_0 = 0$. Тогда

$$x_0 \in \mathring{B}(0, r+\alpha), \quad \operatorname{diam}\Big(\mathring{B}(0, r+\alpha) \cap N\Big) < \delta.$$

Поэтому $\varrho(0, M) > \|x_0\|$. Так как $r = \varrho(0, V) < \varrho(0, N)$, то $0 \in X \setminus O_r(M)$, т.е. 0 — регулярная точка для M. Следовательно, существует точка $x' \in M \subset N \subset O_r(N)$, ближайшая для 0. Пусть ℓ_0 — луч, начинающийся в x' и проходящий через 0. Тогда его подлуч ℓ, начинающийся в точке 0, содержится в $X \setminus O_r(M)$; следовательно, луч ℓ состоит из регулярных точек. Следовательно, для всех точек ℓ (в силу следствия 7) точка x' является ближайшей. Поскольку $\bigcup\limits_{x \in \ell} B(x, \varrho(x, M))$ (в силу гладкости X) образует открытое полупространство (как гомотетичное бесконечное раздутие шара относительно граничной точки), то это полупространство является опорным к M в точке x' и содержит точку x_0, что противоречит условию $x_0 \in \partial N$. Следовательно, верно утверждение леммы. □

Пример 4. Пусть E — замкнутый след неограниченной (в обе стороны) локально спрямляемой кривой γ, содержащейся в собственном подпространстве гладкого и равномерно выпуклого пространства X. Для того, чтобы E было особым множеством C^1-гиперповерхности Γ в X, необходимо и достаточно, чтобы E было прямой, а Γ была границей цилиндра Π с осью E, т.е. $\Pi = \bigcup\limits_{x \in E} B(x, r)$ для некоторого $r > 0$.

Теорема 9. *Пусть X — гладкое равномерно выпуклое банахово пространство, $D \subset X$ — область, не содержащая особых точек своей границы. Тогда множество $X \setminus D$ выпукло.*

Доказательство. Возьмем любую точку $x \in D$ (эта точка регулярна) и ее единственную ближайшую $x' \in \partial D$. Пусть ℓ — луч, начинающийся в точке x' и проходящий через точку x. Тогда в силу следствия 7 все точки связной компоненты пересечения $\ell \cap D$, содержащей точку x, являются регулярными точками, ближайшая для которых будет точка x'. Следовательно,

$$\varrho(y, \partial D) = \|y - x'\| \geqslant \|x - x'\| > 0 \quad y \in (\ell \setminus [x', x)) \cap D.$$

Поэтому луч после точки x не пересекает границы области D, так что все точки его относительной внутренности являются регулярными для границы, и ближайшей для них всех будет точка x'. Это означает, что множество

$$\Pi = \bigcup_{y \in \ell} B(y, \|y - x'\|),$$

являющееся (в силу гладкости пространства) полупространством, является опорным в точке x' к границе ∂D. Нетрудно видеть, что из произвольности выбора точки x вытекает, что для каждой точки границы ∂D существует открытое опорное полупространство в этой точке к ∂D, содержащееся в D. Отсюда следует утверждение теоремы. □

Пример 5. Пусть E — замкнутое ограниченное множество в гладком и равномерно выпуклом пространстве X, а $\Omega = X \setminus E$ — область. Тогда всякое C^1-решение уравнения эйконала на области Ω, ограниченное на любом ограниченном подмножестве этой области, имеет некоторую выпуклую поверхность уровня.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Алимов А. Р., Царьков И. Г.* Связность и другие геометрические свойства солнц и чебышевских множеств// Фундам. прикл. мат. — 2014. — *63*, № 4. — С. 21–91.
2. *Алимов А. Р., Царьков И. Г.* Связность и солнечность в задачах наилучшего и почти наилучшего приближения// Усп. мат. наук. — 2016. — *71*, № 1 (427). — С. 3–84.
3. *Балаганский В. С., Власов Л. П.* Проблема выпуклости чебышевских множеств// Усп. мат. наук. — 1996. — *51*, № 6 (312). — С. 125–188.
4. *Конягин С. В.* О непрерывных операторах обобщенного рационального приближения// Мат. заметки. — 1988. — *44*, № 3. — С. 404.
5. *Лившиц Е. Д.* Об устойчивости оператора ε-проекции на множество сплайнов в пространстве $C[0,1]$// Изв. РАН. Сер. мат. — 2003. — *67*, № 1. — С. 99–130.
6. *Рютин К. С.* Непрерывность операторов обобщенного рационального приближения в пространстве $L_1[0;1]$// Мат. заметки. — 2003. *73*, № 1. — С. 148–153.
7. *Рютин К. С.* Равномерная непрерывность обобщенных рациональных приближений// Мат. заметки. — 2002. — *71*, № 2. — С. 261–270.
8. *Царьков И. Г.* Локальная и глобальная непрерывная ε-выборка// Изв. РАН. — 2016. — *80*, № 2. — С. 165–184.
9. *Царьков И. Г.* Непрерывная ε-выборка// Мат. сб. — 2016. — *207*, № 2. — С. 123–142.
10. *Царьков И. Г.* О связности некоторых классов множеств в банаховых пространствах// Мат. заметки. — 1986. — *40*, № 2. — С. 174–196.
11. *Царьков И. Г.* Поведение локальных минимумов расстояния// Материалы междунар. конф. «Математика и механика», 14–17 марта 2016 г. — МПГУ. — С. 96–100.
12. *Царьков И. Г.* Свойства множеств, обладающих непрерывной выборкой из оператора P^δ// Мат. заметки. — 1990. — *48*, № 4. — С. 122–131.
13. *Царьков И. Г.* Свойства множеств, обладающих устойчивой ε-выборкой// Мат. заметки. — 2011. — *89*, № 4. — С. 608–613.
14. *Górniewicz L.* Topological fixed point theory of multivalued mappings. — Springer-Verlag, Dordrecht (2006).
15. *Michael E.* Continuous selections// J. Ann. Math. Ser. 2. — 1956. — *63*, № 2. — С. 361–381.

И. Г. Царьков
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
E-mail: tsar@mech.math.msu.su

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 143 (2017). С. 81–86

УДК 517.54

ОБ ОДНОЛИСТНОСТИ ОТОБРАЖЕНИЙ ОБОБЩЕННОЙ ФОРМУЛОЙ КРИСТОФФЕЛЯ—ШВАРЦА

© 2017 г. **П. Л. ШАБАЛИН, Э. Н. КАРАБАШЕВА**

Аннотация. В данной работе рассматривается существование однолистных отображений верхней полуплоскости с фиксированным множеством прообразов вершин на полигональную область.

Ключевые слова: краевая задача Гильберта, интеграл Кристоффеля—Шварца, завихрения на бесконечности, однолистные функции.

AMS Subject Classification: 30C20

1. Введение. Рассмотрим на комплексной плоскости переменной z некоторый n-угольник с внутренними углами $\alpha_1\pi$, $\alpha_2\pi$, ..., $\alpha_n\pi$. Конформное отображение канонической области (единичного круга или верхней полуплоскости) комплексной плоскости ζ на этот n-угольник задается интегралом Кристоффеля—Шварца

$$z(\zeta) = Ce^{i\beta}\int\limits_{t_1}^{\zeta}\prod_{k=1}^{n}(t-t_k)^{\alpha_k-1}dt + C_1;$$

здесь символами $t_1, t_2, \ldots, t_n$ обозначены прообразы вершин $A_1, A_2, \ldots, A_n$ многоугольника. В формулу конформного отображения входят в качестве параметров величины α_k, $k=\overline{1,n}$, прообразы вершин t_k, $k=\overline{1,n}$, и вещественные числа C, C_1, β, отвечающие за преобразования подобия, переноса и поворота.

Если n-угольник задан, то величины углов $\alpha_k\pi$, $k=\overline{1,n}$, известны, а точки t_k, называемые акцессорными параметрами, подлежат определению. Процедура нахождения акцессорных параметров весьма нетривиальна и в различных ситуациях исследовалась многими авторами (см., например, [5] и библиографию там).

На базе формулы Кристоффеля—Шварца можно рассмотреть и другую задачу (см. [4, с. 179]). Можно считать точки t_k и числа α_k, $k=\overline{1,n}$, заданными; тогда интеграл Кристоффеля—Шварца полностью определен. В этом случае к формуле (1) можно относиться как к структурной формуле класса конформных отображений канонической области (с произвольно выбранными прообразами вершин на границе канонической области) на n-угольник $D_n(\alpha_1\ldots,\alpha_n)$ с заданными углами при неизвестных вершинах. Ясно, что в этом случае отображение (1) не обязательно будет однолистным. Более того, корректен вопрос, всегда ли в данном классе отображений есть однолистные (см. [9]).

Последняя задача исследовалась в [2], где изучалось отображение единичного круга интегралом (1) на многоугольник $D_n(\alpha_1\ldots,\alpha_n)$ с заданными углами.

Теорема 1 (см. [2, с. 64]). *При данной последовательности вещественных величин* $\{\alpha_k\}_{k=1}^{n}$ *с условием*

$$0<\alpha_k<2,\quad k=\overline{1,n},\quad \sum_{k=1}^{n}\alpha_k = n-2$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 14-01-00351-а).

существует такая упорядоченная последовательность различных комплексных чисел $t_k = e^{i\varphi_k}$, $k = \overline{1,n}$, $0 \leqslant \varphi_1 < \varphi_2 < \ldots < \varphi_n < 2\pi$, *что функция* (1) *осуществляет однолистное отображение замкнутого единичного круга на многоугольник* $\overline{D}_n(\alpha_1 \ldots, \alpha_n)$.

Будем рассматривать близкую задачу, изучая однолистность отображения полуплоскости на многоугольник с бесконечным числом вершин и вводя класс отображений с фиксированным множеством прообразов вершин.

2. Основной результат. Символом D_z обозначим односвязную полигональную область, вообще говоря, многолистную. Ее граница $L_z = \partial D_z$ состоит из двух ломаных L_z^1 и L_z^2 с начальной общей точкой $A_0(0,0)$. Ломаные L_z^1 и L_z^2 имеют бесконечное число прямолинейных звеньев. Вершинами L_z^1 служат точки $A_1, A_2, \ldots$, пронумерованные последовательно от A_0, вершинами L_z^2 — точки $A_{-1}, A_{-2}, \ldots$. При обходе границы области от точки A_0 вдоль ломаной L_z^1 область D_z остается слева, а вдоль L_z^2 — справа. Углы, образованные действительной осью и звеньями A_0, A_1 и A_0, A_{-1} обозначим $\eta_0^1\pi$ и $\eta_0^2\pi$ соответственно. Считаем эти углы известными, причем $0 \leqslant \eta_0^1\pi < 2\pi$, $0 < \eta_0^2\pi - \eta_0^1\pi < \pi/2$. Также считаем известными внутренние по отношению к области D_z углы при вершинах A_k и A_{-k}, которые обозначим $\alpha_k\pi$ и $\alpha_{-k}\pi$, причем $0 < \alpha_k < 1$, $1 < \alpha_{-k} < 2$, $k = \overline{1,\infty}$. Внутренний для полигональной области D_z угол при вершине A_0 равен разности $(\eta_0^2 - \eta_0^1)\pi$.

Будем рассматривать конформные отображения $z(\zeta)$ верхней полуплоскости E^+ комплексной плоскости ζ с двумя фиксированными монотонными последовательностями точек $\{t_k\}_{k=1}^{\infty}$, $t_k > 0$, и $\{t_{-k}\}_{k=1}^{\infty}$, $t_{-k} < 0$, на полигональную область D_z указанного вида. При этом считаем, что точки t_k, t_{-k} являются прообразами при отображении $z(\zeta)$ вершин A_k и A_{-k}, соответственно, $z(0) = 0$. Дополнительно потребуем выполнения условий

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{t_k} < \infty, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|t_{-k}|} < \infty. \tag{1}$$

Кроме того, введя считающие функции

$$n_-^*(\xi) = \begin{cases} 0, & 0 < \xi < -t_{-1}, \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{k} \kappa_{-j}, & -t_{-k} < \xi < -t_{-k-1}, \end{cases} \qquad n_+^*(\xi) = \begin{cases} 0, & 0 < \xi < t_1, \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{k} \kappa_j, & t_k < \xi < t_{k+1}, \end{cases}$$

где

$$\kappa_k = 1 - \alpha_k, \quad \kappa_{-k} = \alpha_{-k} - 1, \quad k = \overline{1,\infty},$$

потребуем выполнения следующих ограничений:

$$\left| n_+^*(\xi) - \Delta \ln^\alpha \xi \right| < C, \quad \left| n_-^*(\xi) - \Delta \ln^\alpha \xi \right| < C \tag{2}$$

с положительными постоянными Δ, α, C.

Для отображения верхней полуплоскости E^+ на полигональную область с бесконечным числом вершин в случае, когда заданы величины углов при неизвестных вершинах, заданы прообразы этих вершин на вещественной оси и эти параметры удовлетворяют условиям (1), (2), в [10] доказана формула

$$z(\zeta) = a_0 \int_0^{\zeta} \frac{e^{i\eta_0^1\pi}}{\zeta^{1-(\eta_0^2-\eta_0^1)}} \frac{\prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \dfrac{\zeta}{t_{-k}}\right)^{\kappa_{-k}}}{\prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \dfrac{\zeta}{t_k}\right)^{\kappa_k}} d\zeta. \tag{3}$$

Данная формула обобщает интеграл Кристоффеля—Шварца на случай полигональной области с бесконечным множеством вершин.

Введем класс отображений полуплоскости E^+ на D_z с фиксированными последовательностями точек $\{t_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\{t_k\}_{k=1}^{\infty}$, удовлетворяющими условию (1), параметрами κ_k, κ_{-k}, $k = \overline{1,\infty}$, плотность распределения которых удовлетворяет условиям (2), и структурной формулой (3). Исследуем вопрос о существовании однолистных отображений в данном классе.

Теорема 2. *Для того, чтобы в классе отображений* (1), (2), (2) *существовали однолистные отображения, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство* $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$.

Доказательство. Нам понадобится необходимое условие однолистности аналитической в верхней полуплоскости E^+ функции $f(\zeta)$ в виде неравенства

$$\left|\frac{f''(\zeta)}{f'(\zeta)}\right| \leqslant \frac{3}{\eta}, \quad \zeta \in E^+, \quad \zeta = \xi + i\eta, \tag{4}$$

которое получается (см. [1, с.75]) из неравенства Бибербаха (см. [3, с. 52]) заменой переменной, и достаточное условие однолистности вида

$$2\eta\left|\frac{f''(\zeta)}{f'(\zeta)} + \frac{1-\beta}{\zeta}\right| < \beta \operatorname{tg}\left(\frac{\beta\pi}{4}\right), \quad \zeta = \xi + i\eta, \quad 0 < \beta \leqslant 1, \tag{5}$$

полученное в [10].

Как и в [6], введем аналитические в верхней полуплоскости функции

$$P_+(\zeta) = \prod_{k=1}^{\infty}\left(1 - \frac{\zeta}{t_k}\right)^{\kappa_k}, \quad P_-(\zeta) = \prod_{k=1}^{\infty}\left(1 - \frac{\zeta}{t_{-k}}\right)^{\kappa_{-k}},$$

где

$$\left(1 - \frac{\zeta}{t_j}\right)^{\kappa_j} = \left|1 - \frac{\zeta}{t_j}\right|^{\kappa_j} e^{i\kappa_j \arg(1-\zeta/t_j)}, \quad j = \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

причем для $\arg(1 - \zeta/t_j)$ выбирается однозначная ветвь, обращающаяся в нуль при $\zeta = 0$ и непрерывная в плоскости ζ, разрезанной по части вещественной оси, соединяющей точки $t = t_j$, $t = +\infty$ при $j > 0$ и соединяющей точки $t = -\infty$, $t = t_j$ при $j < 0$. Из формулы (3) с учетом введенных обозначений получим

$$\frac{z''(\zeta)}{z'(\zeta)} + \frac{1 - (\eta_0^2 - \eta_0^1)}{\zeta} = \big(\ln P_-(\zeta) - \ln P_+(\zeta)\big)'. \tag{6}$$

Для функций $\ln P_+(\zeta)$, $\ln P_-(\zeta)$ в [7] (см. также [10]) были доказаны формулы, которые для нашего случая будут записаны в следующем виде:

$$\ln P_+(\zeta) = -\zeta\Delta\int_{t_1}^{+\infty}\frac{\ln^\alpha \tau d\tau}{\tau(\tau-\zeta)} + I_+(\zeta), \quad I_+(\zeta) = -\zeta\int_{t_1}^{+\infty}\frac{n_+^*(\tau) - \Delta\ln^\alpha\tau}{\tau(\tau-\zeta)}d\tau, \tag{7}$$

$$\ln P_-(\zeta) = \zeta\Delta\int_{-t_{-1}}^{+\infty}\frac{\ln^\alpha \tau d\tau}{\tau(\tau+\zeta)} + I_-(\zeta), \quad I_-(\zeta) = \zeta\int_{-t_{-1}}^{+\infty}\frac{n_-^*(\tau) - \Delta\ln^\alpha\tau d\tau}{\tau(\tau+\zeta)}. \tag{8}$$

Далее нам понадобится формула П. Г. Юрова (см. [8]):

$$\frac{\zeta}{2\pi}\int_R^{+\infty}\frac{\ln^\alpha\tau}{\tau(\tau-\zeta)}d\tau = -\frac{i(2\pi i)^\alpha}{\alpha+1}B_{\alpha+1}\left(\frac{\ln\zeta}{2\pi i}\right) - \frac{(2\pi i)^\alpha}{\alpha+1}\cdot\frac{\zeta}{2\pi}\int_R^{+\infty}\frac{\varphi_\alpha(\tau)}{\tau(\tau-\zeta)}d\tau + P_\alpha(\zeta),$$

где $R \geqslant 1$, $\alpha > 0$, $B_{\alpha+1}(w)$ — многочлен Бернулли:

$$B_{\alpha+1}(w) := \sum_{k=0}^{[\alpha]+2} C_{\alpha+1}^k B_k w^{\alpha+1-k},$$

$C_{\alpha+1}^k$ — биномиальные коэффициенты, B_k — числа Бернулли: $B_0 = 1$, $B_1 = -1/2$, $B_2 = 1/6$, $B_3 = 0$, $B_4 = -1/30$ и т. д.; однозначные ветви функций $\ln z$, $\ln^\alpha z$ выбраны так, чтобы выполнялись неравенства $\ln\tau > 0$, $\ln^\alpha\tau > 0$ на верхнем берегу разреза, проведенного по вещественной полуоси от точки $\tau = 1$ до бесконечно удаленной точки; $P_\alpha(z)$ — функция, голоморфная при $|\zeta| > R$,

$$\varphi_\alpha(\tau) := \sum_{m=[\alpha]+2+k_0}^{\infty} \left(\sum_{n=0}^{[\alpha]+2} C_{\alpha+1}^{n} B_n C_{\alpha+1-n}^{m-n}\right) \left(\frac{2\pi i}{\ln\tau}\right)^{m-\alpha-1};$$

наконец, $k_0 = 3$, если $[\alpha]$ четно, и $k_0 = 2$, если $[\alpha]$ нечетно. (Для натурального α имеем тождество $\varphi_\alpha(\tau) \equiv 0$.)

Формулы (7), (8) перепишем с учетом формулы П. Г. Юрова:

$$\ln P_+(\zeta) = \frac{\Delta}{1+\alpha}\ln^{\alpha+1}\zeta - i\pi\Delta\ln^\alpha\zeta - \frac{\alpha\pi^2\Delta}{3}\ln^{\alpha-1}\zeta + I_+(\zeta) + P_\alpha(\zeta),$$

$$\ln P_-(\zeta) = \frac{\Delta}{1+\alpha}\ln^{1+\alpha}(-\zeta) - i\pi\Delta\ln^\alpha(-\zeta) - \frac{\alpha\pi^2\Delta}{3}\ln^{\alpha-1}(-\zeta) + I_-(\zeta) + P_\alpha(-\zeta).$$

Следовательно,

$$\Big(\ln P_-(\zeta) - \ln P_+(\zeta)\Big)' = \frac{\Delta}{1+\alpha}\Big(\ln^{1+\alpha}(-\zeta) - \ln^{\alpha+1}\zeta\Big)' - \\ - i\pi\Delta\Big(\ln^\alpha(-\zeta) - \ln^\alpha\zeta\Big)' + I'_-(\zeta) + P'_\alpha(-\zeta) - I'_+(\zeta) - P'_\alpha(\zeta). \quad (9)$$

Доказательство необходимости. Предположим, что $\alpha > 1$. Из формул (6), (9) следует, что главная часть функции $z''(\zeta)/z'(\zeta)$ при $\zeta = \eta$ удовлетворяет неравенству

$$2\alpha\frac{|\pi\Delta\ln^{\alpha-1}(i\eta)|}{\eta} = 2\alpha\frac{\pi\Delta|\ln\eta + i\pi/2|^{\alpha-1}}{\eta} \geqslant 2\alpha\pi\Delta\frac{\ln^{\alpha-1}\eta}{\eta},$$

что противоречит условию (4). Итак, при $\alpha > 1$ среди функций (1), (2), (3) однолистных нет.

Доказательство достаточности. Рассмотрим два случая. В случае, когда $|\pi/\ln\zeta| \geqslant 1$, в правой части равенства (9) оцениваем каждое слагаемое по модулю, имея в виду, что

$$\left|\left(\ln^{\alpha+1}\zeta\right)'\right| \leqslant \frac{(\alpha+1)|\ln\zeta|^\alpha}{r} \leqslant \frac{(\alpha+1)\pi^\alpha}{r}, \quad \zeta = re^{i\theta},$$

$$\left|(\ln^\alpha\zeta)'\right| = \frac{\alpha}{r|\ln^{1-\alpha}\zeta|} = \frac{\alpha}{r|\ln r + i\theta|^{1-\alpha}} < \frac{\alpha}{r|\theta|^{1-\alpha}} < \frac{\alpha}{r|\sin\theta|^{1-\alpha}} < \frac{\alpha}{\eta}.$$

Функция $P_\alpha(\zeta)$ голоморфна в окрестности бесконечности; следовательно, $P'_\alpha(\zeta)$ голоморфна при $|\zeta| < 1$ и обращается в нуль при $\zeta = \infty$. После применения леммы Шварца для функции, пересаженной в круг, и обратной замены переменной получим оценку

$$\left|P'_\alpha(\zeta)\right| < \frac{Q}{\eta}$$

с некоторой постоянной $Q > 0$. Для оценки $I'_+(\zeta)$ запишем

$$I'_+(\zeta) = -\int_{t_1}^{+\infty} \frac{n_+^*(\tau) - \Delta\ln^\alpha\tau}{(\tau-\zeta)^2}\,d\tau.$$

Теперь с использованием условия (2) получим

$$\left|I'_+(\zeta)\right| \leqslant \int_{t_1}^{+\infty} \frac{|n_+^*(\tau) - \Delta\ln^\alpha\tau|}{(\tau-\xi)^2 + \eta^2}\,d\tau < \frac{\pi C}{2\eta}, \quad \zeta = \xi + i\eta.$$

Таким образом, находим

$$\left|(\ln P_-(\zeta) - \ln P_+(\zeta))'\right| < \frac{C_0}{\eta} \quad (10)$$

с некоторой постоянной $C_0 > 0$.

В случае, когда $\left|\pi/\ln\zeta\right| < 1$, формулу (9) преобразуем к виду

$$(\ln P_-(\zeta) - \ln P_+(\zeta))' = \frac{i\pi\Delta\alpha\ln^{\alpha-1}\zeta}{\zeta} + S'_\alpha(\zeta) + I'_-(\zeta) - I'_+(\zeta) + P'_\alpha(-\zeta) - P'_\alpha(\zeta),$$

где

$$S_\alpha(\zeta) = \sum_{k=2}^{n} \frac{\Delta(i\pi)^k}{(k+1)!\ln^{k-\alpha}\zeta} \prod_{j=1}^{k}(\alpha - j + 1).$$

Следовательно, $S'_\alpha(\zeta)$ — аналитическая функция, исчезающая на бесконечности и ограниченная на окружности $|\zeta| = e^\pi$. По лемме Шварца имеем

$$\left|S'_\alpha(\zeta)\right| \leqslant \frac{C_1}{\eta}$$

с некоторой положительной постоянной $C_1 > 0$. Осталось получить оценку для главной части формулы

$$\left|\frac{-i\pi\Delta\ln^{\alpha-1}\zeta}{\zeta}\right| \leqslant \frac{\pi\Delta|\ln^{\alpha-1}\zeta|}{|\zeta|} = \frac{\pi\Delta(\ln|\zeta| + i\theta)^{\alpha-1}}{|\zeta|} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{\pi\Delta(\pi^2+\pi^2)^{(\alpha-1)/2}}{|\zeta|} \leqslant \frac{\pi\Delta(2\pi^2)^{(\alpha-1)/2}}{\eta} = \frac{\Delta 2^{(\alpha-1)/2}\pi^{\alpha-1}}{\eta}.$$

Теперь оценка (10) доказана и в случае $\left|\pi/\ln\zeta\right| < 1$.

В силу формулы (6) получим

$$\left|\frac{z''(\zeta)}{z'(\zeta)} + \frac{1-(\eta_0^2-\eta_0^1)}{\zeta}\right| < \frac{C_0}{\eta}. \tag{11}$$

Рассмотрим те же последовательности точек $\{t_k\}$, $\{t_{-k}\}$ вещественной оси, удовлетворяющие условиям (1), обозначим через λ малое положительное число и рассмотрим последовательности чисел $\{\lambda\kappa_k,\}$ $\{\lambda\kappa_{-k}\}$, по которым построим функцию

$$z_\lambda(\zeta) = a_0\int_0^\zeta \frac{e^{i\eta_0^1\pi}P_{-,\lambda}(\zeta)}{\zeta^{1-(\eta_0^2-\eta_0^1)}P_{+,\lambda}(\zeta)}d\zeta$$

согласно формуле (3). При этом имеем

$$n_-^\lambda(\xi) = \lambda n_-^*(\xi), \quad n_+^\lambda(\xi) = \lambda n_+^*(\xi).$$

Таким образом, последовательности чисел $\lambda\kappa_k$, $\lambda\kappa_{-k}$, очевидно, удовлетворяют условиям (2) с $\Delta_\lambda = \lambda\Delta$.

Функция $z_\lambda(\zeta)$ будет отображать верхнюю полуплоскость на некоторую полигональную область с заданными углами $\tilde{\alpha}_k\pi$, $\tilde{\alpha}_{-k}\pi$, $k = \overline{1,\infty}$, $\tilde{\alpha}_k = 1 - \lambda\kappa_k$, $\tilde{\alpha}_{-k} = \lambda\kappa_{-k} + 1$, при неизвестных вершинах A_k, A_{-k}. При этом имеем

$$P_{+,\lambda}(\zeta) = \prod_{k=1}^{\infty}\left(1 - \frac{\zeta}{t_k}\right)^{\lambda\kappa_k}, \quad P_{-,\lambda}(\zeta) = \prod_{k=1}^{\infty}\left(1 - \frac{\zeta}{t_{-k}}\right)^{\lambda\kappa_{-k}};$$

следовательно,

$$P_{-,\lambda}(\zeta) - P_{+,\lambda}(\zeta) = \lambda\bigl[\ln P_-(\zeta) - \ln P_+(\zeta)\bigr],$$

и с учетом (11)

$$\left|\bigl(\ln P_{-,\lambda}(\zeta) - \ln P_{+,\lambda}(\zeta)\bigr)'\right| \leqslant \lambda\frac{C_0}{\eta}. \tag{12}$$

Находим

$$\frac{z''_\lambda(\zeta)}{z'_\lambda(\zeta)} + \frac{1-(\eta_0^2-\eta_0^1)}{\zeta} = \bigl(\ln P_{-,\lambda}(\zeta)\bigr)' - \bigl(\ln P_{+,\lambda}(\zeta)\bigr)'.$$

Полагая теперь $\beta = \eta_0^2 - \eta_0^1$ и учитывая достаточное условие однолистности (5), заключаем, что при достаточно малых λ функция $z_\lambda(\zeta)$ будет осуществлять однолистное отображение верхней полуплоскости.

Итак, доказано, что при выполнении условия $0 < \alpha \leqslant 1$ и ограничений (1), (2) существует бесконечно много последовательностей чисел $\{\alpha_{-k}\}$, $\{\alpha_k\}$, $k = \overline{1, \infty}$, для которых отображение (3) будет однолистным. $\square$

Отметим, что подробное доказательство достаточности условия в случае $\alpha = 1$ приведено в [10] при несколько более жестких ограничениях.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Авхадиев Ф. Г.* Конформные отображения и краевые задачи. — Казанский фонд «Математика», 1996.
2. *Авхадиев Ф. Г., Аксентьев Л. А., Бильченко Г. Г.* Классы однолистных и многолистных интегралов Кристоффеля—Шварца и их приложения// Изв. вузов. Сер. мат. — 1997. — № 3. — С. 64–67.
3. *Голузин Г. М.* Геометрическая теория функций комплексного переменного. — М.: Наука, 1965.
4. *Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.* Методы теории функций комплексного переменного. — М.: Наука, 1973.
5. *Накипов Н. Н., Насыров С. Р.* Параметрический метод нахождения акцессорных параметров в обобщенных интегралах Кристоффеля—Шварца// Уч. зап. Казан. ун-та. Сер. физ.-мат. науки. — 2016. — *158*, № 2. — С. 202–220.
6. *Салимов Р. Б., Шабалин П. Л.* Одно обобщение формулы Шварца—Кристоффеля// Сиб. ж. индустр. мат. — 2010. — *13*, № 4. — С. 109–117.
7. *Салимов Р. Б., Шабалин П. Л.* Однородная задача Гильберта со счетным множеством точек разрыва коэффициентов и логарифмической особенностью индекса// Изв. вузов. Сер. мат. — 2013. — № 12. — С. 83–88.
8. *Юров П. Г.* Асимптотические оценки целых функций, заданных каноническими произведениями// Мат. заметки. — 1971. — *10*, № 6. — С. 641–648.
9. *Kaplan W.* Convexity and the Schwarz–Christoffel mapping// Michigan Math. J. — 1993. — *40*, № 2. — С. 217–227.
10. *Karabasheva E. N., Shabalin P. L.* Univalence of mappings from half-plane to a polygonal domains wiht infinite sets of vertices// Lobachevskii J. Math. — 2015. — *36*, № 2. — С. 144–153.

П. Л. Шабалин

Казанский государственный архитектурно-строительный университет

E-mail: pavel.shabalin@mail.ru

Э. Н. Карабашева

Казанский государственный архитектурно-строительный университет

E-mail: enkarabasheva@bk.ru

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 143 (2017). С. 87–94

УДК 512.622, 517.272

КРАТНЫЕ ДИСКРИМИНАНТЫ И ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ МНОГОЧЛЕНОВ ОТ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

© 2017 г. **Р. А. ШАРИПОВ**

Аннотация. Экстремальное значение функции — это значение функции в одной из ее точек экстремума. Каждая точка экстремума дифференцируемой функции многих переменных описывается системой уравнений, получаемой приравниванием к нулю всех ее частных производных. Однако в общем случае не удается написать в явной форме уравнения, которому удовлетворяло бы значение функции в каждой ее точке экстремума. Случай полиномов в этом смысле стоит особняком. В данной работе выводится уравнение для экстремальных значений заданного полинома от многих переменных.

Ключевые слова: полином, дискриминант, точка экстремума, экстремальное значение.

AMS Subject Classification: 12D10, 35B38

1. Введение. Пусть $f(x_1, \ldots, x_n)$ — гладкая вещественнозначная функция нескольких переменных, заданная в $\mathbb{R}^n$ или в некоторой открытой области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Точки экстремума функции f определяются путем решения следующей системы уравнений относительно переменных $x_1, \ldots, x_n$:

$$\frac{\partial f(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_1} = 0, \quad \ldots, \quad \frac{\partial f(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_n} = 0. \tag{1}$$

Это могут быть максимумы, минимумы, седловые точки и другие виды экстремумов.

Пусть v — значение функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ в одной из ее точек экстремума, заданной уравнениями (1). Тогда мы можем дополнить систему уравнения (1) следующим образом:

$$\frac{\partial f(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_1} = 0, \quad \ldots, \quad \frac{\partial f(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_n} = 0, \quad f(x_1, \ldots, x_n) - v = 0. \tag{2}$$

Параметр v в (2) трактуется как новая переменная, независимая от $x_1, \ldots, x_n$, т.е. (2) — это система из $n+1$ уравнений на $n+1$ переменных. Теоретически можно исключить переменные $x_1, \ldots, x_n$ из системы (2) и таким путем получить одно уравнение на одну переменную v, которая и есть экстремальное значение f:

$$F(v) = 0. \tag{3}$$

На практике бывает довольно трудно вывести такое уравнение. В данной работе мы выводим уравнение вида (3) для случая, когда $f(x_1, \ldots, x_n)$ — полином от многих переменных. Для простоты, начиная с этого места, всюду далее мы считаем $x_1, \ldots, x_n$ комплексными переменными, так что они составляют точку в $\mathbb{C}^n$.

2. Случай полинома от одной переменной. Начнем со случая $n = 1$. Обозначив для простоты $x_1 = x$, будем считать, что $f(x)$ — полином n-й степени от x:

$$f(x) = a_0\, x^n + a_1\, x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\, x + a_n.$$

Тогда $p(x) = f(x) - v$ — тоже полином n-й степени от x:

$$p(x) = a_0\, x^n + a_1\, x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\, x + (a_n - v). \tag{4}$$

Используя $p(x)$, в этом случае мы можем записать систему уравнений (2) в виде

$$p'(x) = 0, \quad p(x) = 0.$$

Известно, что полином от одной переменной $p(x)$ обращается в нуль вместе со своей производной $p'(x)$ в некоторой точке $x \in \mathbb{C}$ тогда и только тогда, когда его дискриминант равен нулю (см. [3]):

$$D_p = 0. \tag{5}$$

Один из коэффициентов полинома $p(x)$ в (4) зависит от v. Поэтому дискриминант D_p в (5) зависит от v. Запишем (5) в виде

$$D_p(v) = 0. \tag{6}$$

Уравнение (6) и является требуемым уравнением вида (3).

Теорема 1. *Комплексное число v является экстремальным значением полинома от одной переменной $f(x)$ в том и только в том случае, когда оно является корнем уравнения* (6)*, где $D_p(v)$ — дискриминант полинома $p(x) = f(x) - v$.*

Теорема 1 немедленно следует из упомянутого выше основного свойства дискриминанта полиномов от одной переменной обращаться в нуль в том и только в том случае, когда полином имеет общий корень со своей производной.

3. Случай полинома от многих переменных. Этот случай в чем-то похож на предыдущий случай. Здесь мы можем заменить полином от многих переменных $f(x_1, \ldots, x_n)$ на полином

$$p(x_1, \ldots, x_n) = f(x_1, \ldots, x_n) - v \tag{7}$$

и затем, используя (7), записать уравнения (2) в виде

$$\frac{\partial p(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_1} = 0, \quad \ldots, \quad \frac{\partial p(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_n} = 0, \quad p(x_1, \ldots, x_n) = 0. \tag{8}$$

Понятие дискриминанта для полиномов от многих переменных не является общеизвестным. Определение такого дискриминанта можно найти в [1] (см. также [7, 8]).

Определение 1. *Дискриминант D_p полинома от многих переменных $p(x_1, \ldots, x_n)$ — это такая полиномиальная функция от коэффициентов полинома p, что*

(1) ее собственные коэффициенты являются целыми числами из $\mathbb{Z}$;
(2) она неприводима над кольцом целых чисел $\mathbb{Z}$;
(3) она обращается в ноль в том и только в том случае, когда уравнения (8) *имеют по меньшей мере одно решение в комплексных числах $x_1, \ldots, x_n$.*

Как сказано в [1] со ссылкой на [4], дискриминанты полиномов от многих переменных были впервые рассмотрены Дж. Булем (G. Boole), именем которого названы булевы алгебры. Ссылка [4] взята из [1] в том виде, в каком она там есть; она выглядит странной, поскольку не содержит указания на издателя или издательство. Имеется в виду издательство *Cambridge University Press*, которое довольно регулярно издает собрания статей А. Кэли. В издании 1889 г. в т. 1 на с. 80–112 приводятся две работы Кэли. Они озаглавлены «On the theory of linear transformations» и «On linear transformations». Обе работы доступны в интернете по следующим ссылкам:

`https://archive.org/stream/collectedmathema01cayluoft#page/80/mode/2up`

`https://archive.org/stream/collectedmathema01cayluoft#page/94/mode/2up`

Первая из этих работ была опубликована Кэли в *Cambridge Mathematical Journal* в 1845 г., т. 4, вып. 23, с. 193–209, вторая — в журнале *Cambridge and Dublin Mathematical Journal* в 1846 г., том 1, вып. 3, с. 104–122. Фактически это один и тот же журнал, который в разные годы назывался слегка по-разному. В том же 1846 г. обе статьи были объединены в одну и с некоторыми дополнениями были опубликованы в переводе на французский язык под названием «Mémoire sur les Hyperdéterminants» в *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, т. 1846, вып. 30, с. 1–37. Этим объясняется странная ссылка [4], взятая из [1]. Более подробное историческое исследование можно найти в [5, 6].

Один из коэффициентов полинома $p(x_1, \ldots, x_n)$ в (7) зависит от v; поэтому дискриминант D_p зависит от v, и мы можем записать уравнение

$$D_p(v) = 0. \tag{9}$$

Уравнение (9) имеет вид (3); оно решает проблему сведения уравнений (2) к одному уравнению по переменной v в виде следующей теоремы, которая немедленно вытекает из приведенного выше определения 1.

Теорема 2. *Комплексное число v является экстремальным значением полинома от многих переменных $f(x_1,\ldots,x_n)$ в том и только в том случае, когда оно является корнем уравнения* (9)*, где $D_p(v)$ — дискриминант полинома* (7)*.*

Однако дело в том, что нет простого рецепта для вычисления дискриминанта D_p в случае полиномов от многих переменных. Он не существовал изначально, либо был утрачен (не дошел до наших дней со времен Дж. Буля). По этой причине в данной работе мы применяем иной подход для вывода уравнения вида (3) из (2).

4. Экстремумы дискриминантов. Пусть $p(x,y)$ — полином n-й степени по переменной x, т.е.

$$p(x,y) = a_n(y)\,x^n + a_{n-1}(y)\,x^{n-1} + \ldots + a_1(y)\,x + a_0(y), \tag{10}$$

коэффициенты которого являются дифференцируемыми функциями комплексной переменной $y \in \mathbb{C}$. Пусть в некоторой точке $(x_0,y_0) \in \mathbb{C}^2$, где $a_n(y_0) \neq 0$, выполняются следующие уравнения:

$$p'_x(x_0,y_0) = 0, \quad p'_y(x_0,y_0) = 0, \quad p(x_0,y_0) = 0. \tag{11}$$

Теорема 3. *Если p — полином от одной переменной вида* (10)*, коэффициенты которого являются дифференцируемыми функциями комплексной переменной y, и если уравнения* (11) *выполнены в некоторой точке $(x_0,y_0) \in \mathbb{C}^2$, где $a_n(y_0) \neq 0$, то из этих уравнений вытекают уравнения*

$$D'(y_0) = 0, \quad D(y_0) = 0 \tag{12}$$

для дискриминанта D полинома p, которые выполняются в точке $y_0 \in \mathbb{C}$, где y_0 — это вторая координата соответствующей точки $(x_0,y_0) \in \mathbb{C}^2$.

Поскольку $a_n(y_0) \neq 0$ в теореме 3, мы можем разделить полином (10) на $a_n(y)$ и перейти к следующему полиному с единичным старшим коэффициентом:

$$\tilde{p}(x,y) = x^n + \frac{a_{n-1}(y)}{a_n(y)}\,x^{n-1} + \ldots + \frac{a_1(y)}{a_n(y)}\,x + \frac{a_0(y)}{a_n(y)}. \tag{13}$$

Дискриминанты полиномов (10) и (13) связаны следующим образом:

$$D_p(y) = (a_n(y))^{2n-2}\,D_{\tilde{p}}(y). \tag{14}$$

Основываясь на (14), мы можем записать полином с единичным старшим коэффициентом

$$p(x,y) = x^n + a_{n-1}(y)\,x^{n-1} + \ldots + a_1(y)\,x + a_0(y) \tag{15}$$

и после этого переформулировать теорему 3 следующим образом.

Теорема 4. *Если p — полином с единичным старшим коэффициентом вида* (15)*, коэффициенты которого являются дифференцируемыми функциями комплексной переменной y, и если уравнения* (11) *выполнены в некоторой точке $(x_0,y_0) \in \mathbb{C}^2$, то из этих уравнений вытекают уравнения* (12) *для дискриминанта D полинома p, которые выполняются в точке $y_0 \in \mathbb{C}$, где y_0 — это вторая координата соответствующей точки $(x_0,y_0) \in \mathbb{C}^2$.*

Теоремы 3 и 4 равносильны друг другу в силу соотношения (14).

5. Доказательство теоремы 4 в случае многочлена второй степени. Пусть $n = 2$ в (15). Тогда $p(x,y)$ — многочлен второй степени:

$$p(x,y) = x^2 + a_1(y)\,x + a_0(y). \tag{16}$$

Легко вычислить частные производные полинома $p(x,y)$:

$$p'_x(x,y) = 2\,x + a_1(y), \quad p'_y(x,y) = a'_1(y)\,x + a'_0(y). \tag{17}$$

Подставляя (16) и (17) в (11), мы выводим систему из трех уравнений:

$$\begin{cases} 2x_0 + a_1(y_0) = 0, \\ a_1'(y_0)\,x_0 + a_0'(y_0) = 0, \\ (x_0)^2 + a_1(y_0)\,x_0 + a_0(y_0) = 0. \end{cases} \tag{18}$$

Дискриминант полинома (16) вычисляется по следующей формуле:

$$D(y) = (a_1(y))^2 - 4\,a_0(y); \tag{19}$$

его производную $D'(y)$ также легко найти:

$$D'(y) = 2a_1(y)\,a_1'(y) - 4a_0'(y). \tag{20}$$

Заметим, что первое уравнение в (18) можно разрешить относительно x_0:

$$x_0 = -\frac{a_1(y_0)}{2}. \tag{21}$$

Подставляя (21) в третье уравнение (18), выводим

$$-\frac{(a_1(y_0))^2}{4} + a_0(y_0) = 0. \tag{22}$$

Сравнивая (22) с (19), мы видим, что из (18) вытекает уравнение

$$D(y_0) = 0. \tag{23}$$

Теперь мы подставим (21) во второе уравнение (18) и получим

$$-\frac{a_1(y_0)\,a_1'(y_0)}{2} + a_0'(y_0) = 0. \tag{24}$$

Сравнивая (24) с (20), видим, что из (18) вытекает

$$D'(y_0) = 0. \tag{25}$$

Остается лишь заметить, что (25) и (23) совпадают с (12), и сделать вывод, что из (11) вытекает (12) в случае полинома (16). Таким образом, теорема 4 доказана для случая полиномов степени два.

6. Доказательство теоремы 4 в случае многочлена с двукратным корнем. Если значение переменной $y = y_0$ зафиксировано, то уравнения (11) означают, что полином p обращается в нуль вместе со своей производной p'_x в точке $x = x_0$, т.е. имеет кратный корень в этой точке. Случай двукратного корня в данной ситуации наиболее прост.

Пусть $x_1, \ldots, x_n$ — корни полинома (15); они зависят от y, т.е.

$$x_i = x_i(y), \quad i = 1, \ldots, n. \tag{26}$$

Известно, что корни полинома от одной переменной непрерывным образом зависят от его коэффициентов (см. [11]). Следовательно в нашем случае корни (26) непрерывным образом зависят от y. Два из них стремятся к x_0 при $y \to y_0$. Без ограничения общности можем считать, что при $y \to y_0$

$$x_1(y) \to x_0, \quad x_2(y) \to x_0. \tag{27}$$

Мы считаем, что корни $x_3(y_0), \ldots, x_n(y_0)$ различны и что они отличаются от двукратного корня $x_1(y_0) = x_2(y_0) = x_0$. При этом предположении корни

$$x_3(y), \ \ldots, \ x_n(y) \tag{28}$$

являются дифференцируемыми функциями от y в некоторой окрестности точки $y = y_0$ (см. [11]). В отличие от них корни $x_1(y)$ и $x_2(y)$ уравнения (27) не обязательно дифференцируемым образом зависят от y, хотя они и непрерывны в некоторой окрестности точки $y = y_0$.

Используя корни (27) и (28), мы определим два полинома, которые являются взаимно дополняющими множителями исходного полинома $p(x,y)$ в (15):

$$q(x,y) = \prod_{i=1}^{2}(x - x_i(y)), \quad r(x,y) = \prod_{i=3}^{n}(x - x_i(y)). \tag{29}$$

Действительно, из (29) легко выводим равенство

$$p(x,y) = q(x,y)\,r(x,y). \tag{30}$$

Коэффициенты полинома $r(x,y)$ в (29) являются дифференцируемыми функциями от y, поскольку они суть элементарные симметричные функции от дифференцируемых корней (28) (см. [3]). Полином $q(x,y)$ в (29) имеет степень 2:

$$q(x,y) = x^2 + \beta_1(y)\,x + \beta_0(y). \tag{31}$$

Его коэффициенты также являются дифференцируемыми функциями от y, поскольку в силу (30) полином (31) может быть получен из $p(x,y)$ применением алгоритма деления полиномов с остатком (см. [2]), в котором полином $r(x,y)$ с единичным старшим коэффициентом выступает в качестве делителя:

$$q(x,y) = p(x,y) \div r(x,y).$$

Вспомним, что корни $x_3(y_0),\dots,x_n(y_0)$ отличаются от двукратного корня x_0. Поэтому из (29) мы выводим неравенство

$$r(x_0,y_0) = \prod_{i=3}^{n}(x_0 - x_i(y_0)) \neq 0. \tag{32}$$

Аналогичным образом, применяя (27) к $q(x,y)$ в (29), мы выводим равенство

$$q(x_0,y_0) = 0. \tag{33}$$

Дифференцируя равенство (30), находим, что

$$\begin{aligned} p'_x(x_0,y_0) &= q'_x(x_0,y_0)\,r(x_0,y_0) + q(x_0,y_0)\,r'_x(x_0,y_0),\\ p'_y(x_0,y_0) &= q'_y(x_0,y_0)\,r(x_0,y_0) + q(x_0,y_0)\,r'_y(x_0,y_0). \end{aligned} \tag{34}$$

Теперь, применяя (33) к (34), получаем равенства

$$\begin{aligned} p'_x(x_0,y_0) &= q'_x(x_0,y_0)\,r(x_0,y_0),\\ p'_y(x_0,y_0) &= q'_y(x_0,y_0)\,r(x_0,y_0). \end{aligned} \tag{35}$$

Если уравнения (11) выполнены, то тогда, используя (32), из (35) выводим

$$q'_x(x_0,y_0) = 0, \quad q'_y(x_0,y_0) = 0. \tag{36}$$

Равенства (36) совместно с (33) означают, что уравнения (11) для p, будучи выполненными, дают аналогичные уравнения

$$q'_x(x_0,y_0) = 0, \quad q'_y(x_0,y_0) = 0, \quad q(x_0,y_0) = 0 \tag{37}$$

для полинома второй степени (31), коэффициенты которого являются дифференцируемыми функциями от y. Теорема 4 уже доказана нами для полиномов второй степени. Поэтому, применив эту теорему к $q(x,y)$ в (37), выводим равенства

$$D'_q(y_0) = 0, \quad D_q(y_0) = 0, \tag{38}$$

где $D_q(y)$ — дискриминант полинома $q(x,y)$ из (31).

Перейдем к дискриминанту $D(y)$ полинома $p(x,y)$ в (15). В терминах корней полинома дискриминант $D(y)$ задается формулой

$$D(y) = \prod_{i<j}^{n}(x_i(y) - x_j(y))^2 \tag{39}$$

(см. [3]). Если обозначить через $D_r(y)$ дискриминант полинома $r(x,y)$ в (29), то можно разложить дискриминант (39) на множители следующим образом:

$$D(y) = D_q(y)\,D_r(y)\,\prod_{i=1}^{2}\prod_{j=3}^{n}\bigl(x_i(y) - x_j(y)\bigr)^2. \tag{40}$$

Принимая во внимание формулу для $q(x,y)$ в (29), мы можем преобразовать (40) к виду

$$D(y) = D_q(y)\,D_r(y)\left(\prod_{j=3}^{n} q(x_j(y),y)\right)^{2}. \tag{41}$$

Основываясь на (41), введем следующее обозначение:

$$\alpha(y) = D_r(y)\left(\prod_{j=3}^{n} q(x_j(y),y)\right)^{2}. \tag{42}$$

Функция $\alpha(y)$ в (42) — это дифференцируемая функция от y, поскольку коэффициенты полинома $q(x,y)$ в (31) и корни $x_3(y),\ldots,x_n(y)$ полинома $r(x,y)$ в (28) являются дифференцируемыми функциями y. Применив (42) к (41), получаем

$$D(y) = D_q(y)\,\alpha(y). \tag{43}$$

Оба сомножителя $D_q(y)$ и $\alpha(y)$ в (43) являются дифференцируемыми функциями y; поэтому, дифференцируя равенство (43), мы выводим следующую формулу:

$$D'(y_0) = D'_q(y_0)\,\alpha(y_0) + D_q(y_0)\,\alpha'(y_0). \tag{44}$$

Остается лишь применить (38) к (43) и к (44) и вывести (12). В итоге мы доказали, что из (11) вытекает (12) в рассматриваемом нами в данный момент случае. Теорема 4 доказана для полиномов вида (15) с ровно одним двукратным корнем и остальными простыми корнями.

7. Доказательство теоремы 4 в общем случае. Заметим, что полином $p(x,y)$ в (15) зависит от y через свои коэффициенты. По этой причине производная $D'(y)$ его дискриминанта вычисляется следующим образом:

$$D'(y) = \sum_{i=0}^{n-1}\frac{\partial D}{\partial a_i}\,a'_i(y). \tag{45}$$

Введем обозначение $\delta p(x,y) = p'_y(x,y)$. Тогда, дифференцируя (15), получим

$$\delta p(x,y) = a'_{n-1}(y)\,x^{n-1} + \ldots + a'_1(y)\,x + a'_0(y). \tag{46}$$

Обозначим $a_i = a_i(y_0)$, $b_i = a'_i(y_0)$ и $\delta D = D'(y_0)$. Тогда, подставив $y = y_0$ в (15), в (46) и в (45), получим два полинома

$$\begin{aligned} p(x) &= x^n + a_{n-1}\,x^{n-1} + \ldots + a_1\,x + a_0,\\ \delta p(x) &= b_{n-1}\,x^{n-1} + \ldots + b_1\,x + b_0 \end{aligned} \tag{47}$$

с чисто числовыми коэффициентами и числовую величину

$$\delta D = \sum_{i=0}^{n-1}\frac{\partial D}{\partial a_i}\,b_i, \tag{48}$$

связанную с полиномами (47). Следующее определение является чисто терминологическим. Оно необходимо для большей красноречивости последующих формулировок.

Определение 2. *Полином $\delta p(x)$ в (47) называется первой вариацией полинома $p(x)$, а числовая величина (48) называется первой вариацией дискриминанта D полинома $p(x)$, связанной с его вариацией $\delta p(x)$.*

Оказывается, функциональная природа коэффициентов полинома $p(x, y)$ в (15) несущественна для теоремы 4. Эту теорему можно переформулировать следующим образом.

Теорема 5. *Если полином с единичным старшим коэффициентом $p(x)$ в (47) имеет корень кратности $m \geqslant 2$ и если этот корень является также и корнем его первой вариации $\delta p(x)$, то дискриминант D полинома $p(x)$ обращается в нуль вместе со своей первой вариацией δD, определяемой согласно* (48).

Теорема 5 равносильна теореме 4. Равносильность устанавливается путем рассмотрения линейных функций $a_i(y) = a_i + b_i\,(y - y_0)$ в (15). Результат предыдущего раздела означает, что мы уже доказали теорему 5 для полинома $p(x)$ с единичным старшим коэффициентом, имеющего ровно один двукратный корень и остальные простые корни.

Общему случаю соответствует полином $p(x)$ с единичным старшим коэффициентом, имеющий по крайней мере один кратный корень x_0. Такой полином может быть получен как предел некоторой последовательности полиномов с единичным старшим коэффициентом, имеющих ровно один двукратный корень $x = x_0$ и остальные простые корни. Предположим, что корень $x = x_0$ является общим для $p(x)$ и его первой вариации $\delta p(x)$ в (47). Тогда

$$\delta p(x_0) = 0. \tag{49}$$

Равенство (49) записывается как линейное соотношение по отношению к коэффициентам $b_0, \dots, b_{n-1}$ полинома $\delta p(x)$ из (47):

$$x_0^{n-1}\,b_{n-1} + \ldots + x_0\,b_1 + b_0 = 0. \tag{50}$$

Коэффициенты линейной комбинации (50) зависят только от корня x_0, который является общим для $p(x)$ и для полиномов в последовательности $p_s(x)$. Это означает, что $p(x)$ и полиномы $p_s(x)$ имеют общую первую вариацию $\delta p(x)$, удовлетворяющую соотношению (49). Эта первая вариация $\delta p(x)$, сочетаясь с полиномами $p_s(x)$ согласно формуле (48), производит числовую последовательность δD_s. Дискриминант D и его частные производные в (48) являются дифференцируемыми (а значит, и непрерывными) функциями от коэффициентов полинома $a_0, \dots, a_{n-1}$. Поэтому мы имеем предельный переход

$$\delta D = \lim_{s\to\infty} \delta D_s. \tag{51}$$

Остается применить теорему 5 к каждому полиному в последовательности $p_s(x)$ в сочетании с $\delta p(x)$. Это дает $\delta D_s = 0$. Подставляя $\delta D_s = 0$ в (51), выводим требуемый результат $\delta D = 0$. Таким образом, теорема 5 доказана во всей ее полноте. То же самое верно для теорем 4 и 3, которые эквивалентны теореме 5.

8. Применение к задаче об экстремальных значениях. Вооружившись теоремой 3, теперь мы возвращаемся к нашей исходной задаче по выводу уравнения вида (3) из уравнений (2) в случае полинома от многих переменных $f(x_1, \dots, x_n)$. Переходя от полинома $f(x_1, \dots, x_n)$ к полиному $p(x_1, \dots, x_n)$ в (7), мы рассматриваем $p(x_1, \dots, x_n)$ как полином от одной переменной $x = x_n$, а остальные переменные $x_1, \dots, x_{n-1}$ и v считаем параметрами. После этого мы вычисляем дискриминант D полинома $p(x_1, \dots, x_n)$ относительно последней переменной $x = x_n$:

$$\tilde{p}(x_1, \dots, x_{n-1}) = D\big(x_n, p(x_1, \dots, x_n)\big). \tag{52}$$

Дискриминант D в (52) действует как нелинейный оператор, переводящий полином $p(x_1, \dots, x_n)$ от n переменных в полином $\tilde{p}(x_1, \dots, x_{n-1})$ от $n-1$ переменных. Обозначая $y = x_i$ и применяя теорему 3 для каждого значения $i = 1, \dots, n-1$, мы выводим следующую систему уравнений из уравнений (8):

$$\frac{\partial \tilde{p}(x_1, \dots, x_{n-1})}{\partial x_1} = 0, \quad \dots, \quad \frac{\partial \tilde{p}(x_1, \dots, x_{n-1})}{\partial x_{n-1}} = 0, \quad \tilde{p}(x_1, \dots, x_{n-1}) = 0. \tag{53}$$

Уравнения (53) имеют ту же структуру, что и уравнения (8), поэтому мы можем применять оператор (52) повторно (итеративно):

$$DD_p = D(x_1, D(x_2, \dots, D(x_n, p(x_1, \dots, x_n)) \dots)). \tag{54}$$

Определение 3. *Числовая величина DD_p, вводимая по формуле* (54)*, называется кратным дискриминантом полинома от многих переменных $p(x_1, \ldots, x_n)$.*

Вообще говоря, кратный дискриминант DD_p может отличаться от дискриминанта D_p полинома от многих переменных, который был введен определением 1. Вопрос о возможном совпадении DD_p м D_p требует отдельной проработки. В отличие от D_p, явная формула (54) дает простой и ясный алгоритм для вычисления DD_p.

Последний коэффициент полинома $p(x_1, \ldots, x_n)$ в (7) зависит от v. Поэтому кратный дискриминант DD_p также зависит от v. Следовательно, мы можем записать уравнение

$$DD_p(v) = 0, \tag{55}$$

где $DD_p(v) = D\Big(x_1, D\big(x_2, \ldots, D\big(x_n, f(x_1, \ldots, x_n) - v\big)\big) \ldots\Big)$.

Теорема 6. *Если комплексное число v является экстремальным значением полинома от нескольких переменных $f(x_1, \ldots, x_n)$, то оно является корнем уравнения* (55).

Теорема 6 доказывается многократным повторным применением теоремы 3, как это сделано выше при выводе формулы (54). Теорема 6 похожа на теорему 2, однако она несколько слабее в силу возможного несовпадения $DD_p(v)$ и $D_p(v)$.

9. Выводы. Теорема 6 вместе с уравнением (55) и формулой (54) составляют основной результат данной работы. Этот результат может оказаться полезным, например, для выяснения положительности конкретных многочленов многих переменных четной степени по каждой из переменных. Данная проблематика связана с 17-й проблемой Гильберта. Автором она затрагивалась в [9, 10].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гельфанд И. М., Капранов М. М., Зелевинский А. В.* О дискриминантах многочленов от многих переменных// Функц. анал. прилож. — 1990. — *24*, № 1. — С. 1–4.
2. Деление многочленов столбиком/ Wikipedia.
3. *Ленг С.* Алгебра. — М.: Мир, 1968.
4. *Cayley A.* Memoir on hyperdeterminants// Collected Papers. — 1889. — *1*, № 13/14. — С. 80–112.
5. *Crilly T.*, The rise of Cayley's invariant theory (1841–1862)// Historia Math. — 1986. — *13*, № 3. — С. 241–254.
6. *Fink K.* A Brief History of Mathematics. — New York: Cosimo, 2007.
7. *Gelfand I. M., Kapranov M. M., Zelevinsky A. V.* Discriminants, Resultants, and Multidimensional Determinants. — Boston: Birkhäuser, 2008.
8. *Paul S. T.* On a result of Gelfand, Kapranov, and Zelevinsky// Adv. Math. — 2009. — *221*, № 4. — С. 1345–1363.
9. *Sharipov R. A.* On some higher degree sign-definite multivariate polynomials associated with definite quadratic forms/ Cornell Univ. e-print archive (2015); `arXiv:1507.05056`.
10. *Sharipov R. A.* On positive bivariate quartic forms/ Cornell Univ. e-print archive (2015); `arXiv:1507.07125`
11. *Whitney H.* Complex Analytic Varieties. — Massachusetts: Addison Wesley, 1972.

Р. А. Шарипов
Башкирский государственный университет, Уфа
E-mail: `r-sharipov@mail.ru`

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 143 (2017). С. 95–105

УДК 517.957

ОТСУТСТВИЕ РЕШЕНИЙ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ НЕРАВЕНСТВ С ПРЕОБРАЗОВАННЫМ АРГУМЕНТОМ

© 2017 г. **О. А. САЛИЕВА**

Аннотация. Получены достаточные условия отсутствия решений для некоторых нелинейных неравенств в частных производных с преобразованным аргументом.

***Ключевые слова*:** отсутствие решений, нелинейные неравенства, преобразования аргумента.

***AMS Subject Classification*:** 35J60, 35K55, 35R55

1. Введение. В последние годы условия отсутствия решений нелинейных уравнений и неравенств в частных производных привлекли внимание многих математиков. Эта проблема не только интересна сама по себе, но имеет важные математические и физические приложения. В частности, теоремы типа Лиувилля об отсутствии нетривиальных неотрицательных решений нелинейных уравнений во всем пространстве или полупространстве могут использоваться для получения априорных оценок решений соответствующих задач в ограниченных областях [4, 7].

В [2, 8, 9] (см. также ссылки в этих работах) были получены достаточные условия отсутствия решений для различных классов нелинейных эллиптических и параболических неравенств методом нелинейной емкости, предложенным С. И. Похожаевым [3]. С другой стороны, существует развитая теория уравнений в частных производных с преобразованным аргументом, разработанная А. Л. Скубачевским и его школой [10]. Но задача о достаточных условиях отсутствия решений неравенств в частных производных с преобразованным аргументом остается открытой. Некоторые частные случаи таких задач со сдвигом временного аргумента были рассмотрены в [5, 6].

В настоящей работе мы получаем достаточные условия отсутствия решений для нескольких классов эллиптических и параболических неравенств с преобразованным пространственным аргументом и для систем эллиптических неравенств этого типа.

Структура статьи следующая. В разделе 2 мы доказываем теоремы об отсуствии решений для полулинейных эллиптических неравенств высокого порядка, в разделе 3 — для квазилинейных эллиптических неравенств, в разделе 4 — для систем квазилинейных эллиптических неравенств, а в разделе 5 — для нелинейных параболических неравенств с преобразованным пространственным аргументом.

Буква c с различными индексами или без них обозначает положительные константы, которые могут зависеть от параметров рассматриваемых неравенств и систем.

2. Полулинейные эллиптические неравенства. Пусть $k \in \mathbb{N}$, $q \in \mathbb{R}$. Рассмотрим полулинейное эллиптическое неравенство

$$(-\Delta)^k u(x) \geqslant a(x)|u(g(x))|^q, \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{1}$$

где $g \in C^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ — такое отображение (преобразование аргумента), что:

(g1) существуют такие константы $c_1 > 0$ и $\beta \in \mathbb{R}$, что

$$|J_g^{-1}(x)| \geqslant c_1 |x|^\beta > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n;$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 14-01-00736).

(g2) $|g(x)| \geqslant |x|$ для всех $x \in \mathbb{R}^n$,

а $a : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция, причем существуют такие константы $c_2 > 0$ и $\alpha \in \mathbb{R}$, что

$$a(x) \geqslant c_2 |g(x)|^{\alpha} \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Пример 1. Отображения вида $g(x) = c(1+|x|^{\beta})x$, где $|c^{-n}\beta| \geqslant 1$, удовлетворяют условиям (g1) с $c_1 = |c^{-n}\beta|$ и (g2).

Пример 2. Преобразование вращения $g(x) = Ax$, где A — унитарная матрица размерности $n \times n$ (и поэтому $|g(x)| = |x|$ для всех $x \in \mathbb{R}^n$), также удовлетворяет условиям (g1) с $c_1 = 1$, $\beta = 0$ и (g2).

Определение 1. Будем называть слабым решением неравенства (1) функцию $u \in L^q_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$, удовлетворяющую интегральному неравенству

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} u(x) \cdot (-\Delta)^k \varphi(x)\, dx \geqslant \int\limits_{\mathbb{R}^n} a(x) |u(g(x))|^q \varphi(x)\, dx \tag{2}$$

для любой неотрицательной функции $\varphi \in C_0^{2k}(\mathbb{R}^n)$.

Для доказательства последующих теорем нам потребуется следующее утверждение.

Лемма 1. *Существует функция $\varphi(s) \geqslant 0$, $2k$ раз непрерывно дифференцируемая, монотонно убывающая на $[0, \infty)$ и удовлетворяющая условиям*

$$\varphi(s) = \begin{cases} 1, & 0 \leqslant s \leqslant 1, \\ 0, & s \geqslant 2, \end{cases} \tag{3}$$

$$\int\limits_1^2 |\varphi'(s)|^{q'} s^{-\frac{\alpha+\beta}{q-1}} \varphi^{1-q'}(s)\, ds < \infty, \tag{4}$$

$$\int\limits_1^2 |\varphi'(s)|^{\frac{p(q+\lambda)}{q-p+1}} s^{-\frac{\alpha(\lambda+p-1)}{q-p+1}} \varphi^{1-\frac{p(q+\lambda)}{q-p+1}}(s)\, ds < \infty \tag{5}$$

при достаточно малых по модулю $\lambda < 0$ и

$$\int\limits_1^2 |\Delta^k \varphi(s)|^{q'} s^{-\frac{\alpha+\beta}{q-1}} \varphi^{1-q'}(s)\, ds < \infty, \tag{6}$$

где $q' = q/(q-1)$.

Доказательство. Достаточно взять $\varphi(s)$ равной $(1-s)^{\theta}$ с достаточно большим $\theta > 0$ в некоторой левой окрестности 1. $\square$

Теорема 1. *Пусть g удовлетворяет условиям* (g1) *и* (g2), *причем*

$$\alpha + \beta < 2k, \quad 1 < q \leqslant \frac{n - \alpha - \beta}{n - 2k}.$$

Тогда неравенство (1) *не имеет нетривиальных слабых решений $u \in L^q_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$.*

Доказательство. Пусть $0 < R < \infty$. В качестве *пробной функции* для неравенства (1) будем использовать $\varphi_R(x) = \varphi(|x|/R)$, где $\varphi(s)$ — функция из леммы 1.

Предположим, что утверждение теоремы неверно, т. е. неравенство (1) имеет нетривиальное слабое решение. Тогда, подставляя в (2) пробную функцию φ_R, получим

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} |u(x)| \cdot |\Delta^k \varphi_R(x)|\, dx \geqslant \int\limits_{\mathbb{R}^n} a(x) |u(g(x))|^q \varphi_R(x)\, dx. \tag{7}$$

Используя (g1), (g2) и монотонность φ_R относительно $|x|$, можно оценить правую часть (7) снизу:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} a(x)|u(g(x))|^q\varphi_R(x)\,dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n} a(g^{-1}(x))|u(x)|^q\varphi_R(g^{-1}(x))|J_g^{-1}(x)|\,dx \geqslant$$
$$\geqslant c\int\limits_{\mathbb{R}^n}|x|^{\alpha+\beta}|u(x)|^q\varphi_R(g^{-1}(x))\,dx \geqslant c\int\limits_{\mathbb{R}^n}|u(x)|^q|x|^{\alpha+\beta}\varphi_R(x)\,dx, \quad (8)$$

где $c = c_1c_2 > 0$. С другой стороны, применяя параметрическое неравенство Юнга к левой части (7), получим

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n}|u(x)|\cdot\Big|\Delta^k\varphi_R(x)\Big|\,dx \leqslant$$
$$\leqslant \frac{c}{q}\int\limits_{\mathbb{R}^n}|u(x)|^q|x|^{\alpha+\beta}\varphi_R(x)\,dx + \frac{c^{-q'}}{q'}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\Big|\Delta^k\varphi_R\Big|^{q'}|x|^{-\frac{\alpha+\beta}{q-1}}\varphi_R^{1-q'}(x)\,dx \overset{x=Ry}{\leqslant}$$
$$\overset{x=Ry}{\leqslant} \frac{c}{q}\int\limits_{\mathbb{R}^n}|u(x)|^q|x|^{\alpha+\beta}\varphi_R(x)\,dx + \frac{c^{-q'}}{q'}R^{n-\frac{\alpha+\beta+2kq}{q-1}}\int\limits_{1\leqslant|y|\leqslant 2}\Big|\Delta^k\varphi_1(y)\Big|^{q'}|y|^{-\frac{\alpha+\beta}{q-1}}\varphi_1^{1-q'}(y)\,dy. \quad (9)$$

Из (7)–(9) с учетом (6) будем иметь

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n}|u(x)|^q\varphi_R(x)\,dx \leqslant c^{-1-q'}AR^{n-\frac{\alpha+\beta+2kq}{q-1}},$$

где

$$A := \int\limits_{1\leqslant|y|\leqslant 2}\Big|\Delta^k\varphi_1(y)\Big|^{q'}|y|^{-\frac{\alpha+\beta}{q-1}}\varphi_1^{1-q'}(y)\,dy < \infty.$$

Устремляя $R \to \infty$, при условиях теоремы получим противоречие с предположением о существовании нетривиального решения u, что доказывает утверждение. Критический случай $q = \dfrac{n-\alpha-\beta}{n-2k}$ рассматривается стандартным образом (см. [2]). □

Замечание 1. Если заменить условие (g2) следующим:

(g′2) существуют такие константы $\rho > 0$ и $c_3, c_4 > 0$, что

$$c_3|x| \geqslant |g(x)| \geqslant c_4|x| \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus B_\rho(0),$$

то легко убедиться, модифицируя приведенное доказательство, что утверждение теоремы остается верным в классе таких решений $u \in L^q_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$, что для некоторого $\rho \geqslant 0$

$$\lim_{R\to\infty}\frac{\displaystyle\int\limits_{B_{2R}(0)} u^q|x|^{\alpha+\beta}\,dx}{\displaystyle\int\limits_{B_{c_4R}(0)\setminus B_\rho(0)} u^q|x|^{\alpha+\beta}\,dx} < \infty, \quad (10)$$

в частности, при $\alpha+\beta = 0$ — для $u \in L^q(\mathbb{R}^n)$.

Пример 3. Преобразование сжатия $g(x) = \gamma x$ с $\gamma \in \mathbb{R}$, $0 < |\gamma| < 1$, удовлетворяет условиям (g1) с $c_2 = |\gamma|^{-n}$ и (g′2) с $c_3 = c_4 = |\gamma|$ и любым $\rho > 0$.

Пример 4. Преобразование сдвига $g(x) = x - x_0$ с фиксированным $x_0 \in \mathbb{R}^n$ удовлетворяет условиям (g1) с $c_2 = 1$ и (g′2) с $c_3 = 2$, $c_4 = 1/2$ и $\rho = 2|x_0|$.

3. Квазилинейные эллиптические неравенства. Далее рассмотрим неравенство

$$-\Delta_p u(x) \geqslant a(x)u^q(g(x)), \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{11}$$

где $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ удовлетворяет условиям (g1) с $0 \leqslant \alpha < n$, $\beta = 0$ и (g$'$2), а функция $a(x)$ такая же, как в предыдущем разделе. Без ограничения общности можно положить $a(x) = c_2|g(x)|^\alpha$.

Определение 2. Будем называть слабым решением неравенства (11) функцию $u \in W^{1,p}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n) \cap L^q_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$, удовлетворяющую интегральному неравенству

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} |Du|^{p-2}(Du, D\varphi)\,dx \geqslant \int\limits_{\mathbb{R}^n} a(x)u^q(g(x))\varphi(x)\,dx \tag{12}$$

для любой неотрицательной функции $\varphi \in C^1_0(\mathbb{R}^n)$.

Теорема 2. *Пусть g удовлетворяет условиям* (g1) *с $0 \leqslant \alpha < n$, $\beta = 0$ и* (g$'$2) *и*

$$p - 1 < q \leqslant \frac{(n-\alpha)(p-1)}{n-p}.$$

Тогда неравенство (11) *не имеет нетривиальных неотрицательных слабых решений $u \in W^{1,p}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n) \cap L^q_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$, удовлетворяющих условию* (10) *с $\beta = 0$.*

Замечание 2. При $\alpha = \beta = 0$ условие (10) выполняется для всех неотрицательных решений $u \in W^{1,p}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ неравенства (11) (и даже более общего неравенства $-\Delta_p u \geqslant 0$) вследствие слабого неравенства Харнака (см. [11])

$$\forall s \in \left(0, \frac{n(p-1)}{n-p}\right)\ \exists C = C(n,p,s) > 0 :\ \forall R > 0\ \min_{x \in B_R(0)} u(x) \geqslant CR^{-\frac{n}{s}}\|u\|_{L^s(B_{2R}(0))}. \tag{13}$$

Доказательство. Предположим, что утверждение теоремы неверно, т.е. неравенство (11) имеет нетривиальное неотрицательное слабое решение u. Тогда, подставляя в определение слабого решения (11) пробную функцию $u^\lambda\varphi_R$ с $1 - p < \lambda < 0$ (что допустимо в силу результатов [2]) и применяя неравенство Юнга с параметром $\eta > 0$, получим

$$\begin{aligned}
\lambda \int\limits_{\mathbb{R}^n} u^{\lambda-1}(x)|Du(x)|^p\varphi_R(x)\,dx + \int\limits_{\mathbb{R}^n} u^\lambda(x)|Du(x)|^{p-1}|D\varphi_R(x)|\,dx \geqslant \\
\geqslant \int\limits_{\mathbb{R}^n} a(x)u^q(g(x))u^\lambda(x)\varphi_R(x)\,dx \geqslant \\
\geqslant c_\eta \int\limits_{\mathbb{R}^n} a(x)u^{q+\lambda}(g(x))\varphi_R(x)\,dx - \eta \int\limits_{\mathbb{R}^n} a(x)u^{q+\lambda}(x)\varphi_R(x)\,dx.
\end{aligned} \tag{14}$$

Далее отметим, что из неравенств $c_3|x| \geqslant |g(x)| \geqslant c_4|x|$ (см. условие (g$'$2)) следует

$$c_2c_3^\alpha|x|^\alpha \geqslant a(x) = c_2|g(x)|^\alpha \geqslant c_2c_4^\alpha|x|^\alpha, \tag{15}$$

а из (10) —

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\mathbb{R}^n} a(g^{-1}(x))u^{q+\lambda}(x)\varphi_R(g^{-1}(x))|J_g^{-1}(x)|\,dx \geqslant c_5 \int\limits_{\mathbb{R}^n} |x|^\alpha u^{q+\lambda}(x)\varphi_R(g^{-1}(x))\,dx \geqslant \\
\geqslant c_5 \int\limits_{B_{c_4R}(0)\setminus B_\rho(0)} |x|^\alpha u^{q+\lambda}(x)\,dx \geqslant c_6 \int\limits_{B_{2R}(0)} |x|^\alpha u^{q+\lambda}(x)\,dx
\end{aligned} \tag{16}$$

с некоторыми константами $c_5, c_6 > 0$.

Далее, используя (g1), (g$'$2) и (29)–(16), при достаточно малом $\eta > 0$ (отметим, что $c_\eta \to \infty$ при $\eta \to 0_+$) можно оценить правую часть (14) снизу:

$$c_\eta \int\limits_{\mathbb{R}^n} a(x)u^{q+\lambda}(g(x))\varphi_R(x)\,dx - \eta\int\limits_{\mathbb{R}^n} a(x)u^{q+\lambda}(x)\varphi_R(x)\,dx =$$
$$= c_\eta \int\limits_{\mathbb{R}^n} a(g^{-1}(x))u^{q+\lambda}(x)\varphi_R(g^{-1}(x))|J_g^{-1}(x)|\,dx - \eta\int\limits_{\mathbb{R}^n} a(x)u^{q+\lambda}(x)\varphi_R(x)\,dx \geqslant$$
$$\geqslant c_\eta c_6 \int\limits_{B_{2R}(0)} |x|^\alpha u^{q+\lambda}(x)\,dx - c_2c_3^\alpha\eta\int\limits_{\mathbb{R}^n} |x|^\alpha u^{q+\lambda}(x)\varphi_R(x)\,dx \geqslant$$
$$\geqslant c_\eta c_6 \int\limits_{B_{2R}(0)} |x|^\alpha u^{q+\lambda}(x)\,dx - c_2c_3^\alpha\eta\int\limits_{B_{2R}(0)} |x|^\alpha u^{q+\lambda}(x)\,dx = c_7\int\limits_{\mathbb{R}^n} |x|^\alpha u^{q+\lambda}(x)\,dx \quad (17)$$

с константой $c_7 = c_\eta c_6 - c_2c_3^\alpha\eta > 0$.

С другой стороны, применяя к левой части (14) параметрическое неравенство Юнга и учитывая (5), аналогично доказательству теоремы 1 получим

$$\lambda\int\limits_{\mathbb{R}^n} u^{\lambda-1}(x)|Du(x)|^p\varphi_R(x)\,dx + \int\limits_{\mathbb{R}^n} u^{\lambda}(x)|Du(x)|^{p-1}|D\varphi_R(x)|\,dx \leqslant$$
$$\leqslant (\lambda+\varepsilon)\int\limits_{\mathbb{R}^n} u^{\lambda-1}(x)|Du(x)|^p\varphi_R(x)\,dx + c_\varepsilon\int\limits_{\mathbb{R}^n} u^{\lambda+p-1}(x)|D\varphi_R(x)|^p\varphi_R^{1-p}(x)\,dx \leqslant$$
$$\leqslant (\lambda+\varepsilon)\int\limits_{\mathbb{R}^n} u^{\lambda-1}(x)|Du(x)|^p\varphi_R(x)\,dx + \frac{c_7}{2}\int\limits_{\mathbb{R}^n} |x|^\alpha u^{q+\lambda}(x)\varphi_R(x)\,dx +$$
$$+ c_8\int\limits_{\mathbb{R}^n} |D\varphi_R(x)|^{\frac{p(q+\lambda)}{q-p+1}}|x|^{-\frac{\alpha(\lambda+p-1)}{q-p+1}}\varphi_R^{1-\frac{p(q+\lambda)}{q-p+1}}(x)\,dx \leqslant (\lambda+\varepsilon)\int\limits_{\mathbb{R}^n} u^{\lambda-1}(x)|Du(x)|^p\varphi_R(x)\,dx +$$
$$+ \frac{c_7}{2}\int\limits_{\mathbb{R}^n} |x|^\alpha u^{q+\lambda}(x)\varphi_R(x)\,dx + c_9R^{n-\frac{\alpha(\lambda+p-1)+p(q+\lambda)}{q-p+1}} \quad (18)$$

с некоторыми константами $\varepsilon, c_\varepsilon, c_8, c_9 > 0$. Выбирая $\varepsilon < |\lambda|$, из (14)–(18) будем иметь

$$\frac{c_7}{2}\int\limits_{\mathbb{R}^n} |x|^\alpha u^{q+\lambda}(x)\varphi(x)\,dx \leqslant c_9R^{n-\frac{\alpha(\lambda+p-1)+p(q+\lambda)}{q-p+1}}.$$

Выбирая λ достаточно близким к 0 и устремляя $R\to\infty$, при условиях теоремы получим противоречие с предположением о существовании нетривиального решения u, что доказывает утверждение. Критический случай рассматривается стандартным образом (см. [2]). $\square$

Аналогично предыдущему можно рассмотреть неравенства

$$(-\Delta)^k u(x) \geqslant a(x)|Du(g(x))|^q, \quad x\in\mathbb{R}^n,$$
$$-\Delta_p u(x) \geqslant a(x)|Du(g(x))|^q, \quad x\in\mathbb{R}^n.$$

4. Системы квазилинейных эллиптических неравенств. Рассмотрим систему квазилинейных дифференциальных неравенств

$$\begin{cases} -\Delta_p u(x) \geqslant a(x)v^{q_1}(g_1(x)), & x\in\mathbb{R}^n,\\ -\Delta_q v(x) \geqslant b(x)u^{p_1}(g_2(x)), & x\in\mathbb{R}^n, \end{cases} \quad (19)$$

где $p, q, p_1, q_1 > 1$, причем $p-1 < p_1$, $q-1 < q_1$, $g_i \in C^1(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$, $i = 1,2$ — такие отображения, что

(g1) существуют такие константы $c_i > 0$ и $\beta_i\in\mathbb{R}$, $i = 1,2$, что

$$|J_{g_i}^{-1}(x)| \geqslant c_i|x|^{\beta_i} > 0 \quad \forall x\in\mathbb{R}^n;$$

(g′2) существуют такие константы $\rho, c_3, \dots, c_6 > 0$, что

$$c_{i+2}|x| \geqslant |g_i(x)| \geqslant c_{i+4}|x|, \quad i = 1, 2, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus B_\rho(0),$$

а $a, b : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — непрерывные функции, причем существуют такие константы $c_7, c_8 > 0$ и $\alpha_i \in \mathbb{R}$, что

$$a(g_1^{-1}(x)) \geqslant c_7|x|^{\alpha_1}, \quad b(g_2^{-1}(x)) \geqslant c_8|x|^{\alpha_2} \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Определение 3. Будем называть слабым решением системы (19) пару функций

$$(u, v) \in (W^{1,p}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n) \cap L^{q_1}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)) \times (W^{1,q}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n) \cap L^{p_1}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)),$$

удовлетворяющую интегральным неравенствам

$$\begin{aligned} \int\limits_{\mathbb{R}^n} |Du|^{p-2}(Du, D\varphi_1)\, dx &\geqslant \int\limits_{\mathbb{R}^n} a(x)|v(g_1(x))|^{q_1}\varphi(x)\, dx, \\ \int\limits_{\mathbb{R}^n} |Dv|^{q-2}(Dv, D\varphi_1)\, dx &\geqslant \int\limits_{\mathbb{R}^n} b(x)|u(g_2(x))|^{p_1}\varphi(x)\, dx \end{aligned} \tag{20}$$

для любых неотрицательных функций $\varphi_1, \varphi_2 \in C_0^1(\mathbb{R}^n)$.

Введем величины

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{((\alpha_1+\beta_1)(q-1) + (\alpha_2+\beta_2-q)q_1)(p-1) - pp_1q_1}{p_1q_1 - (p-1)(q-1)}, \\ \tau &= \frac{((\alpha_2+\beta_2)(p-1) + (\alpha_1+\beta_1-p)p_1)(q-1) - qp_1q_1}{p_1q_1 - (p-1)(q-1)}. \end{aligned} \tag{21}$$

Имеет место следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть* $\min(\sigma, \tau) \leqslant -n$. *Тогда система* (19) *не имеет нетривиальных неотрицательных слабых решений, удовлетворяющих условиям*

$$\lim_{R\to\infty} \frac{\displaystyle\int\limits_{B_{2R}(0)} v^{q_1}|x|^{\alpha_1}\, dx}{\displaystyle\int\limits_{B_{c_0'R}(0)\setminus B_\rho(0)} v^{q_1}|x|^{\alpha_1}\, dx} < \infty, \qquad \lim_{R\to\infty} \frac{\displaystyle\int\limits_{B_{2R}(0)} u^{p_1}|x|^{\alpha_2}\, dx}{\displaystyle\int\limits_{B_{c_0'R}(0)\setminus B_\rho(0)} u^{p_1}|x|^{\alpha_2}\, dx} < \infty. \tag{22}$$

Доказательство. Предположим, что существует нетривиальное неотрицательное слабое решение (u, v) системы (19). Пусть $\varphi_R \in C_0^1(\overline{\mathbb{R}^n}; \mathbb{R}_+)$ — то же семейство пробных функций, что и в предыдущих разделах.

Подставляя в определение слабого решения первого из неравенств (19) пробную функцию $u_\varepsilon^\lambda\varphi_R$, а второго — $v_\varepsilon^\lambda\varphi_R$, где $u_\varepsilon = u + \varepsilon$, $v_\varepsilon = v + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$ и $\max\{1-p, 1-q\} < \lambda < 0$, и оценивая левые части полученных неравенств снизу аналогично доказательствам предыдущих теорем, будем иметь

$$\int a(x)v^{q_1}(g_1(x))u_\varepsilon^\lambda(x)\varphi_R(x)\, dx \leqslant \lambda \int |Du|^p u_\varepsilon^{\lambda-1}\varphi_R\, dx + \int |Du|^{p-1}|D\varphi_R|u_\varepsilon^\lambda\, dx, \tag{23}$$

$$\int b(x)u^{p_1}(g_2(x))v_\varepsilon^\lambda(x)\varphi_R(x)\, dx \leqslant \lambda \int |Dv|^q v_\varepsilon^{\lambda-1}\varphi_R\, dx + \int |Dv|^{q-1}|D\varphi_R|v_\varepsilon^\lambda\, dx. \tag{24}$$

Применение неравенства Юнга к первым слагаемым в правых частях полученных соотношений приводит к неравенствам

$$\int \tilde{a}(x)v^{q_1}(x)u_\varepsilon^\lambda(g_1^{-1}(x))\varphi_R(g_1^{-1}(x))\, dx + \frac{|\lambda|}{2}\int |Du|^p u_\varepsilon^{\lambda-1}\varphi_R\, dx \leqslant c_\lambda \int \frac{|D\varphi_R|^p}{\varphi_R^{p-1}} u_\varepsilon^{\lambda+p-1}\, dx, \tag{25}$$

$$\int \tilde{b}(x)u^{p_1}(x)v_\varepsilon^\lambda(g_2^{-1}(x))\varphi_R(g_2^{-1}(x))\, dx + \frac{|\lambda|}{2}\int |Dv|^q v_\varepsilon^{\lambda-1}\varphi_R\, dx \leqslant d_\lambda \int \frac{|D\varphi_R|^q}{\varphi_R^{q-1}} v_\varepsilon^{\lambda+q-1}\, dx, \tag{26}$$

где

$$\tilde a(x)=a(g_1^{-1}(x))|J_{g_1}^{-1}(x)|,\quad \tilde b(x)=b(g_2^{-1}(x))|J_{g_2}^{-1}(x)|,$$

а константы c_λ и d_λ зависят только от p, q и λ. Далее, подставляя в определение слабого решения неравенств (19) пробную функцию φ_R, аналогично доказательству теоремы **??** придем к соотношениям

$$\int\limits_{B_{2R}(0)}\tilde a v^{q_1}\,dx\leqslant\left(\int|Du|^p u_\varepsilon^{\lambda-1}\varphi_R\,dx\right)^{\frac{p-1}{p}}\left(\int\frac{|D\varphi_R|^p}{\varphi_R^{p-1}}u_\varepsilon^{(1-\lambda)(p-1)}\,dx\right)^{\frac1p},\tag{27}$$

$$\int\limits_{B_{2R}(0)}\tilde b u^{p_1}\,dx\leqslant\left(\int|Dv|^q v_\varepsilon^{\lambda-1}\varphi_R\,dx\right)^{\frac{q-1}{q}}\left(\int\frac{|D\varphi_R|^q}{\varphi_R^{q-1}}v_\varepsilon^{(1-\lambda)(q-1)}\,dx\right)^{\frac1q}.\tag{28}$$

Комбинируя (25)–(28) и устремляя $\varepsilon\to0_+$, получим априорные оценки

$$\int\limits_{B_{2R}(0)}\tilde a v^{q_1}\varphi_R\,dx\leqslant D_\lambda\left(\int\frac{|D\varphi_R|^p}{\varphi_R^{p-1}}u^{\lambda+p-1}\,dx\right)^{\frac{p-1}{p}}\left(\int\frac{|D\varphi_R|^p}{\varphi_R^{p-1}}u^{(1-\lambda)(p-1)}\,dx\right)^{\frac1p},\tag{29}$$

$$\int\limits_{B_{2R}(0)}\tilde b u^{p_1}\varphi_R\,dx\leqslant E_\lambda\left(\int\frac{|D\varphi_R|^q}{\varphi_R^{q-1}}v^{\lambda+q-1}\,dx\right)^{\frac{q-1}{q}}\left(\int\frac{|D\varphi_R|^q}{\varphi_R^{q-1}}v^{(1-\lambda)(q-1)}\,dx\right)^{\frac1q},\tag{30}$$

где D_λ, $E_\lambda>0$ зависят только от p, q и λ.

Применим неравенство Гельдера с параметром r к первому интегралу в правой части (29):

$$\left(\int\frac{|D\varphi_R|^p}{\varphi_R^{p-1}}u^{\lambda+p-1}\,dx\right)^{\frac{p-1}{p}}\leqslant\left(\int\tilde b u^{(\lambda+p-1)r}\varphi_R\,dx\right)^{\frac{p-1}{pr}}\left(\int\tilde b^{-\frac{r'}{r}}\frac{|D\varphi_R|^{pr'}}{\varphi_R^{pr'-1}}\,dx\right)^{\frac{p-1}{pr'}},\tag{31}$$

где

$$\frac1r+\frac1{r'}=1.$$

Выбирая показатель r так, что $(\lambda+p-1)r=p_1$, из (29) и (31) будем иметь

$$\int\limits_{B_{2R}(0)}\tilde a v^{q_1}\varphi_R\,dx\leqslant D_\lambda\left(\int\tilde b u^{p_1}\varphi_R\,dx\right)^{\frac{p-1}{pr}}\times$$
$$\times\left(\int\tilde b^{-\frac{r'}{r}}\frac{|D\varphi_R|^{pr'}}{\varphi_R^{pr'-1}}\,dx\right)^{\frac{p-1}{pr'}}\left(\int\frac{|D\varphi_R|^p}{\varphi_R^{p-1}}u^{(1-\lambda)(p-1)}\,dx\right)^{\frac1p}.\tag{32}$$

Применяя неравенство Гельдера с параметром $y>1$ к последнему интегралу в правой части (32), получим

$$\int\frac{|D\varphi_R|^p}{\varphi_R^{p-1}}u^{(1-\lambda)(p-1)}\,dx\leqslant\left(\int\tilde b u^{(1-\lambda)(p-1)y}\varphi_R\,dx\right)^{\frac1y}\left(\int\tilde b^{-\frac{y'}{y}}\frac{|D\varphi_R|^{py'}}{\varphi_R^{py'-1}}\,dx\right)^{\frac1{y'}},\tag{33}$$

где

$$\frac1y+\frac1{y'}=1.$$

Выбирая y в (33) так, что $(1-\lambda)(p-1)y=p_1$, и учитывая (32), приходим к оценке

$$\int\limits_{B_{2R}(0)}\tilde a v^{q_1}\varphi_R\,dx\leqslant D_\lambda\left(\int\tilde b u^{p_1}\varphi_R\,dx\right)^{\frac{p-1}{pr}}\left(\int\frac{|D\varphi_R|^{pr'}}{\varphi_R^{pr'-1}}\,dx\right)^{\frac{p-1}{pr'}}\times$$

$$\times \left(\int \tilde{b} u^{p_1} \varphi_R \, dx \right)^{\frac{1}{py}} \left(\int \tilde{b}^{-\frac{y'}{y}}) \frac{|D\varphi_R|^{py'}}{\varphi_R^{py'-1}} \, dx \right)^{\frac{1}{py'}},$$

т.е.

$$\int\limits_{B_{2R}(0)} \tilde{a} v^{q_1} \varphi_R \, dx \leqslant D_\lambda \left(\int \tilde{b} u^{p_1} \varphi_R \, dx \right)^{\frac{p-1}{pr} + \frac{1}{py}} \times$$

$$\times \left(\int \tilde{b}^{-\frac{r'}{r}} \frac{|D\varphi_R|^{pr'}}{\varphi_R^{pr'-1}} \, dx \right)^{\frac{p-1}{pr'}} \left(\int \tilde{b}^{-\frac{y'}{y}} \frac{|D\varphi_R|^{py'}}{\varphi_R^{py'-1}} \, dx \right)^{\frac{1}{py'}}, \quad (34)$$

где параметры r и y выбраны так, что

$$\begin{cases} \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{y'} = 1, & (1-\lambda)(p-1)y = p_1, \\ \dfrac{1}{r} + \dfrac{1}{r'} = 1, & (\lambda + p - 1)r = p_1. \end{cases} \quad (35)$$

Отметим, что такой выбор r и y возможен в силу наших предположений относительно p и p_1 при условии, что $\lambda < 0$ достаточно мало по абсолютной величине. Аналогично, выбирая такие s и z, что

$$\begin{cases} \dfrac{1}{z} + \dfrac{1}{z'} = 1, & (1-\lambda)(q-1)z = q_1, \\ \dfrac{1}{s} + \dfrac{1}{s'} = 1, & (\lambda + q - 1)s = q_1, \end{cases} \quad (36)$$

и оценивая правую часть (32) с помощью неравенства Гельдера, получаем

$$\int\limits_{B_{2R}(0)} \tilde{b} u^{p_1} \varphi_R \, dx \leqslant E_\lambda \left(\int\limits_{B_{2R}(0)} \tilde{a} v^{q_1} \varphi_R \, dx \right)^{\frac{q-1}{qs} + \frac{1}{qz}} \times$$

$$\times \left(\int \tilde{a}^{-\frac{s'}{s}} \frac{|D\varphi_R|^{qs'}}{\varphi_R^{qs'-1}} \, dx \right)^{\frac{q-1}{qs'}} \left(\int \tilde{a}^{-\frac{z'}{z}} \frac{|D\varphi_R|^{qz'}}{\varphi_R^{qz'-1}} \, dx \right)^{\frac{1}{qz'}}. \quad (37)$$

Объединяя (34) и (37), окончательно приходим к следующим неравенствам:

$$\left(\int\limits_{B_{2R}(0)} \tilde{a} v^{q_1} \varphi_R \, dx \right)^{1-\mu\nu} \leqslant D_\lambda E_\lambda^\nu \left(\int \tilde{a}^{-\frac{s'}{s}} \frac{|D\varphi_R|^{qs'}}{\varphi_R^{qs'-1}} \, dx \right)^{\frac{\nu(q-1)}{qs'}} \times$$

$$\times \left(\int \tilde{a}^{-\frac{z'}{z}} \frac{|D\varphi_R|^{qz'}}{\varphi_R^{qz'-1}} \, dx \right)^{\frac{\nu}{qz'}} \left(\int \tilde{b}^{-\frac{r'}{r}} \frac{|D\varphi_R|^{pr'}}{\varphi_R^{pr'-1}} \, dx \right)^{\frac{p-1}{pr'}} \times \left(\int \tilde{b}^{-\frac{y'}{y}} \frac{|D\varphi_R|^{py'}}{\varphi_R^{py'-1}} \, dx \right)^{\frac{1}{py'}} \quad (38)$$

и

$$\left(\int\limits_{B_{2R}(0)} \tilde{b} u^{p_1} \varphi_R \, dx \right)^{1-\mu\nu} \leqslant E_\lambda D_\lambda^\mu \left(\int \tilde{b}^{-\frac{r'}{r}} \frac{|D\varphi_R|^{pr'}}{\varphi_R^{pr'-1}} \, dx \right)^{\frac{\mu(p-1)}{pr'}} \times$$

$$\times \left(\int \tilde{b}^{-\frac{y'}{y}} \frac{|D\varphi_R|^{py'}}{\varphi_R^{py'-1}} \, dx \right)^{\frac{\mu}{py'}} \left(\int \tilde{a}^{-\frac{s'}{s}} \frac{|D\varphi_R|^{qs'}}{\varphi_R^{qs'-1}} \, dx \right)^{\frac{q-1}{qs'}} \times \left(\int \tilde{a}^{-\frac{z'}{z}} \frac{|D\varphi_R|^{qz'}}{\varphi_R^{qz'-1}} \, dx \right)^{\frac{1}{qz'}}, \quad (39)$$

где

$$\mu := \frac{q-1}{qs} + \frac{1}{qz}, \quad \nu := \frac{p-1}{pr} + \frac{1}{py}. \quad (40)$$

Несложные вычисления с учетом (35) и (36) дают явные значения μ и ν, а именно
$$\mu = \frac{q-1}{q_1}, \quad \nu = \frac{p-1}{p_1}. \tag{41}$$
Из наших предположений вытекает, что показатель в левой части (38), (39) таков, что
$$1 - \mu\nu = \frac{p_1 q_1 - (p-1)(q-1)}{p_1 q_1} > 0.$$
После подстановки выражений для r, y, s, z и упрощения из (39) имеем
$$\int\limits_{B_{2R}(0)} \tilde{a} v^{q_1}\,dx \leqslant CR^{n+\sigma}, \qquad \int\limits_{B_{2R}(0)} \tilde{b} u^{p_1}\,dx \leqslant CR^{n+\tau} \tag{42}$$
с некоторой константой $C > 0$. Устремляя $R \to \infty$ в (42), при условиях теоремы приходим к противоречию, что и завершает доказательство. □

Аналогично можно рассмотреть систему
$$\begin{cases} -\Delta_p u(x) \geqslant a(x)|Dv(g_1(x))|^{q_1}, & x \in \mathbb{R}^n, \\ -\Delta_q v(x) \geqslant b(x)|Du(g_2(x))|^{p_1}, & x \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \tag{43}$$
где $p, q, p_1, q_1 > 1$, причем $p - 1 < p_1$, $q - 1 < q_1$.

5. Параболические неравенства. Рассмотрим параболическое неравенство
$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) + (-\Delta)^k u(x,t) \geqslant a(x,t)|u(g_t(x),t)|^q, \quad x \in \mathbb{R}^n,\ t \in \mathbb{R}_+, \tag{44}$$
с начальным условием
$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{45}$$
где $u_0 \in C^{2k}(\mathbb{R}^n)$ и $g_t \in C^1(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$ — такое семейство отображений, что

(gt1) существуют такие константы $c_2 > 0$ и $\beta \in \mathbb{R}$, что
$$|J_{g_t}^{-1}(x)| \geqslant c_2|x|^\beta > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n;$$
(gt2) $|g_t(x)| \geqslant |x|$ для всех $x \in \mathbb{R}^n$,

$a(x,t) \in C(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+)$, причем существуют такие константы $c_1 > 0$ и $\alpha \in \mathbb{R}$, что
$$a(g_t^{-1}(x),t) \geqslant c_1|x|^\alpha, \quad x \in \mathbb{R}^n,\ t \in \mathbb{R}_+. \tag{A}$$

Определение 4. Неотрицательная измеримая функция u называется слабым (локальным) решением задачи (44)–(45), если она удовлетворяет интегральному неравенству
$$\int\limits_{t_0}^{t_1}\int\limits_{\Omega} a(x,t)|u(g_t(x),t)|^q \psi\,dx\,dt - \int\limits_{\Omega} (u(x,t_1)\psi(x,t_1) - u(x,t_0)\psi(x,t_0))\,dx \leqslant \\ \leqslant \int\limits_{t_0}^{t_1}\int\limits_{\Omega} u\left(\frac{\partial\psi}{\partial t} + (-\Delta)^k\psi\right)dx\,dt \tag{46}$$
для некоторого $t^* > 0$, для всех t_0 и t_1, удовлетворяющих условию $0 \leqslant t_0 < t_1 \leqslant t^*$, и для любой неотрицательной функции $\psi \in C^1(\Omega \times [t_0,t_1])$, удовлетворяющей при всех $t \in [t_0,t_1]$ условию $\psi(\cdot,t) \in C_0^{2k}(\Omega)$, где предполагается, что все интегралы существуют и $\lim\limits_{t\to 0_+} u(x,t) = u_0(x)$ для всех $x \in \Omega$. Точная верхняя грань всех возможных значений $\tau = t_1 - t_0$ называется *временем жизни* решения u. Если время жизни решения бесконечно, решение называется *глобальным.*

Теорема 4. *Пусть a удовлетворяет условию* (A), *а g_t — условиям* (gt1) *и* (gt2), *причем* $1 < q \leqslant 1 + \dfrac{2k+\alpha+\beta}{n}$. *Тогда задача* (44)–(45) *не имеет нетривиальных глобальных решений.*

Доказательство. Пусть $0 < R, T < \infty$. Будем использовать в качестве пробной функции для задачи (44)–(45) произведение двух функций

$$\Phi(x,t) = \varphi\left(\frac{|x|}{R}\right) \cdot \varphi\left(\frac{t}{T}\right),$$

где функция $\varphi(s)$ удовлетворяет условиям леммы 1. Умножая обе части (44) на пробную функцию Φ и интегрируя по частям, получим

$$-\int\limits_{\mathbb{R}^n} u_0(x)\Phi(x,0)\,dx + \int\limits_0^\infty \int\limits_{\mathbb{R}^n} a(x,t)|u(x,t)| \cdot \left|\frac{\partial \Phi(x,t)}{\partial t}\right| dx\,dt + \\ + \int\limits_0^\infty \int\limits_{\mathbb{R}^n} |u(x,t)| \cdot \left|\Delta^k \Phi(x,t)\right| dx\,dt \geqslant \int\limits_0^\infty \int\limits_{\mathbb{R}^n} a(x,t)|u(g_t(x),t)|^q \Phi(x,t)\,dx. \quad (47)$$

Так как $\varphi(s)$ — монотонно невозрастающая функция, с учетом условий (A), (gt1) и (gt2) можно оценить правую часть (47) снизу:

$$\int\limits_0^\infty \int\limits_{\mathbb{R}^n} a(x,t)|u(g_t(x),t)|^q \Phi(x,t)\,dx\,dt = \\ = \int\limits_0^\infty \int\limits_{\mathbb{R}^n} a(g_t^{-1}(x),t)|u(x,t)|^q \Phi(g_t^{-1}(x),t)|J_{g_t^{-1}}(x)|\,dx\,dt \geqslant \\ \geqslant c \int\limits_0^\infty \int\limits_{\mathbb{R}^n} |u(x,t)|^q |x|^{\alpha+\beta} \Phi(x,t)\,dx\,dt. \quad (48)$$

С другой стороны, применяя параметрическое неравенство Юнга и лемму 1 ко второму и третьему слагаемым левой части (47) соответственно, получим

$$\int\limits_0^\infty \int\limits_{\mathbb{R}^n} |u(x,t)| \cdot \left|\frac{\partial \Phi(x,t)}{\partial t}\right| dx\,dt \leqslant \\ \leqslant \frac{c}{4} \int\limits_0^\infty \int\limits_{\mathbb{R}^n} |u(x,t)|^q |x|^{\alpha+\beta} \Phi(x,t)\,dx\,dt + c_1 \int\limits_0^\infty \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left|\frac{\partial \Phi(x,t)}{\partial t}\right|^{q'} |x|^{-\frac{\alpha+\beta}{q-1}} \Phi^{1-q'}(x,t)\,dx\,dt \leqslant \\ \leqslant \frac{c}{4} \int\limits_0^\infty \int\limits_{\mathbb{R}^n} |u(x,t)|^q \Phi(x,t)\,dx\,dt + c_2 R^{n-\frac{\alpha+\beta}{q-1}} T^{1-q'} \quad (49)$$

и

$$\int\limits_0^\infty \int\limits_{\mathbb{R}^n} |u(x,t)| \cdot \left|\Delta^k \Phi(x,t)\right| dx\,dt \leqslant \\ \leqslant \frac{c}{4} \int\limits_0^\infty \int\limits_{\mathbb{R}^n} |u(x,t)|^q |x|^{\alpha+\beta} \Phi(x,t)\,dx\,dt + c_3 \int\limits_0^\infty \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left|\Delta^k \Phi\right|^{q'} |x|^{-\frac{\alpha+\beta}{q-1}} \Phi^{1-q'}(x,t)\,dx\,dt \leqslant \\ \leqslant \frac{c}{4} \int\limits_0^\infty \int\limits_{\mathbb{R}^n} |u(x,t)|^q \Phi(x,t)\,dx\,dt + c_4 R^{n-\frac{\alpha+\beta+2kq}{q-1}} T \quad (50)$$

с некоторыми константами $c_1, \ldots, c_4 > 0$. Комбинируя (47)–(50), будем иметь

$$\frac{1}{2}\int\limits_0^\infty \int\limits_{\mathbb{R}^n} |u(x,t)|^q \Phi(x,t)\, dx\, dt \leqslant R^{n-\frac{\alpha+\beta}{q-1}} T(c_2 T^{-q'} + c_4 R^{-2kq'}).$$

Полагая $T = R^{2k}$ и устремляя $R \to \infty$, получим противоречие при $1 < q < 1 + \dfrac{2k+\alpha+\beta}{n}$, что и требовалось доказать. Критический случай $q = 1 + \dfrac{2k+\alpha+\beta}{n}$ рассматривается стандартным образом (см. [2]). $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Галахов Е. И., Салиева О. А.* Разрушение решений некотрых нелинейных неравенств с особенностями на неограниченных множествах// Мат. заметки. — 2015. — *98.* — С. 187–195.
2. *Митидиери Э., Похожаев С. И.* Априорные оценки и отсутствие решений нелинейных уравнений и неравенств в частных производных/ Тр. МИАН им. В. А. Стеклова. — М.: Наука, 2001. — *234.*
3. *Похожаев С. И.* Существенно нелинейные емкости, порожденные дифференциальными операторами// Докл. РАН. — 1997. — *357.* — С. 592–594.
4. *Azizieh C., Clement P., Mitidieri E.* Existence and apriori estimates for positive solutions of p-Laplace systems// J. Differ. Equ. — 2002. — *184.* — С. 422–442.
5. *Casal A., Diaz J., Vegas J.* Blow-up in some ordinary and partial differential equations with time-delay// Dynam. Syst. Appl. — 2009. — *18.* — С. 29–46.
6. *Casal A., Diaz J., Vegas J.* Blow-up in functional partial differential equations with large amplitude memory terms// Proc. “CEDYA 2009. — Univ. Castilla-La Mancha, Spain, 2009. — С. 1–8.
7. *Clement P., Manasevich R., Mitidieri E.* Positive solutions for a quasilinear system via blow-up// Commun. PDEs. — 1993. — *18.* — С. 2071–2106.
8. *Galakhov E., Salieva O.* On blow-up of solutions to differential inequalities with singularities on unbounded sets// J. Math. Anal. Appl. — 2013. — *408.* — С. 102–113.
9. *Galakhov E., Salieva O.* Blow-up for nonlinear inequalities with singularities on unbounded sets// Proc. IXth ISAAC Congress. — Basel: Birkhäuser, 2015. — С. 299–305.
10. *Skubachevskii A.* Elliptic functional differential equations and applications. — Basel: Birkhäuser, 1997.
11. *Trudinger N. S.* On Harnack type inequalities and their applications to quasilinear elliptic equations// Commun. Pure Appl. Math. — 1967. — *20.* — С. 721–747.

О. А. Салиева
Московский государственный технологический университет «Станкин»
E-mail: olga.a.salieva@gmail.com