ISSN 0233-6723

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ

СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Тематические обзоры

Том 142

Москва 2017

ISSN 0233–6723

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

ВСЕРОССИЙСКИЙ ИНСТИТУТ
НАУЧНОЙ И ТЕХНИЧЕСКОЙ ИНФОРМАЦИИ
(ВИНИТИ РАН)

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ

СЕРИЯ
СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА
И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

ТЕМАТИЧЕСКИЕ ОБЗОРЫ

Том 142

КОМПЛЕКСНЫЙ АНАЛИЗ

Москва 2017

СОДЕРЖАНИЕ

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 142 (2017). С. 3–13

УДК 517.547, 517.982

КЛАССИЧЕСКИЕ ОПЕРАТОРЫ В ВЕСОВЫХ БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ГОЛОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ

© 2017 г. **А. В. АБАНИН, ФАМ ЧОНГ ТИЕН**

Аннотация. Настоящий обзор посвящен исследованиям последних лет о классических операторах (вложения, дифференцирования и интегрирования) в весовых банаховых пространствах голоморфных функций с равномерными оценками. Формулируются и анализируются результаты, подтверждающие плодотворность подхода к изучению перечисленных операторов (равно как и других вопросов, решаемых в рамках таких пространств), основанного на использовании ассоциированных или существенных весов.

Ключевые слова: весовые банаховы пространства голоморфных функций, оператор вложения, оператор дифференцирования, оператор интегрирования.

AMS Subject Classification: 47B38, 46E15

1. Введение. Настоящий обзор посвящен некоторым разделам теории банаховых пространств голоморфных функций с равномерными весовыми нормами и классических операторов в них. Речь пойдет о пространствах следующего вида. Пусть G — область в комплексной плоскости $\mathbb{C}$ и $H(G)$ — пространство всех голоморфных в G функций. По данной непрерывной положительной функции (*весу*) v на G определим следующие банахова пространства:

$$H_v(G) := \left\{ f \in H(G) : \ \|f\|_v := \sup_{z\in G} \frac{|f(z)|}{v(z)} < \infty \right\},$$

$$H_{v0}(G) := \left\{ f \in H(G) : \ \frac{f(z)}{v(z)} \to 0, \ z \to \partial G \right\},$$

топология в которых задается нормой $\|\cdot\|_v$. При этом, по определению, $g(z) \to 0$ при $z \to \partial G$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой компакт K в G, что $|g(z)| < \varepsilon$ при всех $z \in G \setminus K$.

Пространства такого типа играют важную роль в теории аппроксимации, анализе Фурье, уравнениях в частных производных и в свертках, в теории распределений и др. В связи с этим в последние годы они интенсивно исследуются в работах многих авторов (см. [5–18, 20–25]).

Как известно (см., напр., [2, 10]), точное описание свойств пространств $H_v(G)$ и $H_{v0}(G)$ и операторов в них в терминах исходных весов в общем случае получить невозможно. Для этой цели нужно использовать ассоциированные веса, систематическое исследование и применение которых было инициировано в [10], хотя эпизодически они встречаются и в более ранних работах. Несмотря на это соображение, ассоциированные веса не так широко привлекаются для решения конкретных задач. Дело, видимо, заключается в том, что до сих пор нет внутреннего описания таких весов в известных терминах (гладкость, какого-либо рода выпуклость и т. п.). Более того, нам известен только один случай, когда удается дать такое описание: для радиальных весов в единичном круге.

Цель настоящего обзора — показать плодотворность и преимущества подходов, основанных на привлечении ассоциированных весов, за счет сравнения ряда новых результатов, полученных

Работа А. В. Абанина выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 15-01-01404). Работа Фам Чонг Тиена выполнена при поддержке Вьетнамского национального университета (проект № QG. 16. 08).

авторами обзора в последнее время для классических операторов, с недавними результатами других авторов.

Работа, кроме введения, содержит два раздела. Первый посвящен ассоциированным весам и вопросам структуры весовых банаховых пространств голоморфных функций, а второй — проблеме описания ограниченности классических операторов в таких пространствах.

2. Ассоциированные веса и структура весовых пространств. Напомним, что для данного веса v в области G его *ассоциированный вес* определяется по следующей формуле

$$\widetilde{v}(z) := \sup\Big\{|f(z)| : \ f \in H_v(G), \ \|f\|_v \leqslant 1\Big\}.$$

Для нетривиального пространства $H_v(G)$ всегда $0 < \widetilde{v} \leqslant v$ на $\mathbb{C}$, $\ln\widetilde{v}$ является непрерывной (даже локально липшицевой) субгармонической функцией в G и $H_{\widetilde{v}}(G) = H_v(G)$ изометрически. Последнее обстоятельство позволяет ограничиться в построении теории пространств голоморфных функций с равномерными оценками ассоциированными весами. Однако использование полученных на этом пути общих результатов для конкретных пространств затрудняется тем, что не всякая положительная непрерывная логарифмически субгармоническая функция является ассоциированным весом. Простейший пример, подтверждающий этот вывод, доставляет функция $(1+|z|)^p$ с нецелым $p > 1$ в $\mathbb{C}$. В связи с этим в ряде случаев полезным оказывается понятие существенного веса. Именно, вес v в G называется *существенным*, если он эквивалентен своему ассоциированному весу, т.е. имеется такая постоянная $C \geqslant 1$, что $\widetilde{v} \leqslant v \leqslant C\widetilde{v}$. Ясно, что эквивалентные веса определяют одно и то же пространство, и их можно равноправно применять для описания свойств как самих пространств, так и операторов в них.

Проблема внутреннего описания ассоциированных и существенных весов представляет значительный интерес для приложений и на данный момент времени является открытой. Пока не достигнуто никаких продвижений по ее решению для областей и весов общего вида. Полный ответ получен только для радиальных весов в единичном круге $\mathbb{D}$. Остановимся на этом подробнее, рассмотрев также случай радиальных весов на плоскости.

Напомним, что *радиальным весом* в $\mathbb{D}$ называется непрерывная положительная функция v в $\mathbb{D}$, для которой $v(z) = v(|z|)$ при всех $z \in \mathbb{D}$, $v(r)$ возрастает на $[0, 1)$ и $v(r) \to +\infty$ при $r \to 1$. Последнее ограничение естественно, так как для ограниченных v пространство $H_v(\mathbb{D})$ совпадает с пространством H^∞ всех ограниченных голоморфных в $\mathbb{D}$ функций, которое хорошо изучено. Ассоциированный с радиальным вес $\widetilde{v}$ также радиален (см. [10, с. 141]) и, следовательно, субгармоничность $\widetilde{v}$ эквивалентна тому, что функция $\ln\widetilde{v}(e^x)$ выпукла на $(-\infty, 0)$. Следуя многим авторам, мы будем называть возрастающую на $[0, 1)$ функцию v *log-выпуклой*, если $\ln v(e^x)$ выпукла на $(-\infty, 0)$ (не следует путать это понятие со стандартным понятием логарифмически выпуклой функции). Из сказанного выше следует, что при рассмотрении весовых пространств голоморфных функций в единичном круге, задаваемых радиальными весами, мы можем ограничиться log-выпуклыми весами. Оказывается, что в данном случае это и есть точное описание (с учетом эквивалентности) класса существенных или ассоциированных весов. Именно, справедливо следующее утверждение, вытекающее из сказанного выше и [16, лемма 5].

Предложение 1. *Всякий ассоциированный радиальный вес в $\mathbb{D}$ является* log-*выпуклым. Обратно, всякий* log-*выпуклый радиальный вес в $\mathbb{D}$ является существенным.*

В случае плоскости аналогичный результат не имеет места. Это следует из приведенного выше примера функции $(1+|z|)^p$ с нецелым $p > 1$. Не спасает положения дел и стандартное естественное условие на радиальный вес в $\mathbb{C}$:

$$\ln r = o(\ln v(r)) \quad \text{при } r \to \infty,$$

которое эквивалентно тому, что $H_v(\mathbb{C})$ содержит все полиномы. Чтобы это понять, достаточно взять, например, $v(r) = (1+r)^p e^r$ с нецелым $p > 0$. Из этих примеров вытекает, в частности, что правая оценка в следующем результате (см. [10, с. 157–158]) неулучшаема.

Предложение 2. *Всякий ассоциированный радиальный вес в $\mathbb{C}$ является* $\log$*-выпуклым. Обратно, пусть v — $\log$-выпуклый радиальный вес в $\mathbb{C}$, для которого $\ln r = o(\ln v(r))$ при $r \to \infty$. Тогда имеет место неравенство*

$$\widetilde{v}(r) \leqslant v(r) \leqslant r\widetilde{v}(r), \quad r \geqslant 1.$$

Аналог предложения 1 для плоскости получен для подкласса радиальных весов, выделенного Клуни и Ковари в [19]. Прежде, чем сформулировать соответствующий результат, напомним, что в соответствии с [19, теорема 4] каждая возрастающая log-выпуклая на $\mathbb{R}$ функция v может быть представлена в виде

$$v(r) = v(1) \exp \int_1^r \frac{\tau(\rho)}{\rho}\, d\rho, \quad r \geqslant 1, \tag{1}$$

с некоторой возрастающей функцией τ. Будем называть радиальный вес v на $\mathbb{C}$ *весом Клуни—Ковари*, если $v(r)$ является log-выпуклой функцией на $\mathbb{R}$ и, для τ как в (1), найдется такое $c > 1$, что $\tau(cr) - \tau(r) \geqslant 1$ при всех $r \geqslant 1$. Из [10, предложение 3.1(b)] вытекает следующий результат.

Предложение 3. *Всякий вес Клуни—Ковари на $\mathbb{C}$ является существенным.*

Перейдем теперь к вопросу об описании структуры пространств $H_v(G)$ и $H_{v0}(G)$, остановившись чуть подробнее только на тех вопросах, которые используются в изучении классических операторов.

В случае радиальных весов в единичном круге и на плоскости их полная изоморфная классификация была получена В. Луски в [25] (см. также библиографию в этой работе по поводу предшествующих исследований). Им было показано (см. [25, теорема 1]), что в этом случае все пространства $H_v(G)$, $G = \mathbb{D}$ или $G = \mathbb{C}$, распадаются ровно на два класса. Первые изоморфны пространству l_∞ всех ограниченных числовых последовательностей, а вторые — H^∞. Точнее, им было выделено точное условие (B) на радиальный вес v, выполнение которого влечет, что $H_v(G) \simeq l_\infty$, а невыполнение, — что $H_v(G) \simeq H^\infty$. Оно же разделяет на два класса и пространства вида $H_{v0}(G)$. В частности, если v удовлетворяет условию (B), то $H_{v0}(G)$ изоморфно пространству c_0 всех сходящихся к нулю последовательностей.

Для нерадиальных весов результатов почти нет, исключая теорему 1 в [18], которая утверждает, что для любого веса v в произвольной области G пространство $H_{v0}(G)$ почти изометрично некоторому замкнутому подпространству в c_0. Отсюда, в частности, следует, что если $H_{v0}(G)$ бесконечномерно, то пространства $H_v(G)$ и $H_{v0}(G)$ нерефлексивны. В связи с этим, а также другими задачами, представляют интерес вопросы об условиях бесконечномерности (или конечномерности) рассматриваемых весовых пространств и ограничениях, при которых имеет место естественный изоморфизм между вторым сопряженным $H_{v0}(G)^{**}$ и $H_v(G)$. Второй из них изучался в [12] (см. также библиографию в этой работе), а существенные продвижения по первому были достигнуты недавно в [2]. Именно, в [2] было дано полное описание класса областей, для которых не существует ни одного, кроме тривиального, конечномерного пространства вида $H_v(G)$. Более того, для тех областей, которые допускают нетривиальные конечномерные пространства, описаны (с точностью до эквивалентности) веса, задающие такие пространства. Приведем соответствующий результат (см. [2, теоремы 2.7 и 2.11]), напомнив, что замкнутое множество E в комплексной плоскости называется *нулевым множеством Пенлеве*, если всякая ограниченная голоморфная в $\mathbb{C} \setminus E$ функция является постоянной.

Теорема 1.

(1) *Если дополнение G^c области G до расширенной комплексной плоскости не является нулевым множеством Пенлеве, то каждое нетривиальное пространство вида $H_v(G)$ бесконечномерно, а $H_{v0}(G)$ либо тривиально, либо бесконечномерно.*

(2) *Если же дополнение G^c — нулевое множество Пенлеве, то существуют нетривиальные конечномерные пространства вида $H_v(G)$. В этом случае пространство такого вида p-мерно тогда и только тогда, когда оно может быть задано весом вида $(1+|z|)^{p-1}|f_0(z)|$, где f_0 — некоторая голоморфная функция в G, не имеющая нулей в G.*

В связи с теоремой 1 заметим, что полное описание нулевых множеств Пенлеве не так давно было получено Толса (см. [26, теорема 1.3]). Поскольку это описание является достаточно сложным, его трудно использовать для конкретных областей. С другой стороны, как хорошо известно, любое нулевое множество Пенлеве сильно разрежено. Отсюда вытекает такое полезное следствие теоремы 1.

Следствие 1. *Предположим, что область G такова, что хотя бы одна компонента связности ее дополнения G^c содержит более одной точки. Тогда любое нетривиальное пространство $H_v(G)$ бесконечномерно.*

3. Ограниченность классических операторов. В данном разделе приводятся результаты, касающиеся ограниченности и компактности классических операторов вложения, дифференцирования и интегрирования. В последнее время они, наряду с другими операторами (сдвига, Харди, композиции, умножения) привлекают внимание многих исследователей. Наша цель — представить некоторые новые общие соображения, позволяющие в изучавшихся ранее случаях получать результаты окончательного характера.

3.1. Оператор вложения. Пусть v и w — два веса в области G. При помощи теоремы Банаха о замкнутом графике легко видеть, что если $H_v(G) \subset H_w(G)$, то вложение непрерывно. Это простое соображение и определение ассоциированного и существенного весов легко приводят к следующему результату (см. [11, предложение 5]).

Предложение 4. *Пусть v и w — некоторые веса в области G. Следующие условия эквивалентны*:

(i) $H_v(G) \subset H_w(G)$,
(ii) $H_v(G)$ *непрерывно вложено в* $H_w(G)$,
(iii) *существует такое* $C > 0$, *что* $\widetilde{v} \leqslant Cw$ *на* G,
(iv) *существует такое* $C > 0$, *что* $\widetilde{v} \leqslant C\widetilde{w}$ *на* G.

В частности, если вес v является существенным, то любое из этих условий эквивалентно условию

(v) *существует такое* $C > 0$, *что* $v \leqslant Cw$ *на* G.

Гораздо более сложным и интересным является вопрос о компактности вложения одного весового пространства в другое. Он важен во многих задачах, связанных с изучением топологической структуры пространств голоморфных функций, и, в частности, с решением проблемы проективного описания индуктивных топологий (см. по этому поводу обзор Бонет [13] и недавние работы [4, 9]).

Как хорошо известно, достаточным условием компактного вложения пространства $H_v(G)$ в $H_w(G)$ является

$$\lim_{z \to \partial G} \frac{v(z)}{w(z)} = 0, \tag{2}$$

т.е. для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой компакт K в G, что $v(z) \leqslant \varepsilon w(z)$ для всех $z \in G \setminus K$. В противоположность приведенным выше условиям непрерывного вложения, (2), вообще говоря, не является необходимым для компактности тождественного оператора из $H_v(G)$ в $H_w(G)$ даже в том случае, если мы заменим v и w ассоциированными с ними весами (см. [10, с. 149]). В связи с этим в [10, теорема 2.1 (a)] был установлен следующий критерий.

Теорема 2. *Вложение пространства $H_v(G)$ в пространство $H_w(G)$ компактно в том и только в том случае, когда для любого $\varepsilon > 0$ существует такая непрерывная функция φ с компактным носителем в G, что*

$$\left(\min\left(v, \frac{1}{\varphi}\right)\right)^{\sim} \leqslant \varepsilon w \quad \text{на } G. \tag{3}$$

Здесь слева стоит вес, ассоциированный с функцией $\min(v, 1/\varphi)$.

Ясно, что проверка условия (3) представляет значительную трудность. В связи с этим возникает задача выявления таких ограничений общего характера, при которых естественное условие (2) будет не только достаточным, но и необходимым для компактности вложения. Одно такое ограничение было найдено в [11, теорема 8]. Оно заключается в требовании, чтобы замыкание единичного шара пространства $H_{v0}(G)$ в топологии равномерной сходимости на компактах из G совпадало с единичным шаром пространства $H_v(G)$. Очевидно, что и это требование не так просто проверить.

В [2] был разработан другой метод для решения данной проблемы. Основная идея заключалась в том, что необходимость (2) для компактности соответствующего вложения имеет место всегда, лишь бы пространство $H_v(G)$ было бесконечномерным. Частично эта идея была реализована в следующей теореме (см. [2, теорема 3.13]).

Теорема 3. *Пусть G — такая область в $\mathbb{C}$, что ее дополнение G^c содержит только компоненты связности, состоящие более чем из одной точки, и пространство $H_v(G)$ нетривиально. Тогда вложение $H_v(G)$ в $H_w(G)$ компактно в том и только том случае, когда выполнено условие* (2).

В [2, теорема 3.9] (см. также [2, теорема 1.1]) аналогичный результат был приведен также и для бесконечномерных весовых пространств целых функций. К сожалению, как было чуть позже сообщено авторами (см. [3]), его доказательство содержало невосполнимый пробел. Таким образом, на данный момент времени не ясно, будет ли условие

$$\lim_{z\to\infty}\frac{v(z)}{w(z)}=0$$

необходимым для того, чтобы бесконечномерное пространство $H_v(\mathbb{C})$ было компактно вложено в $H_w(\mathbb{C})$, или нет.

3.2. Оператор дифференцирования. В [21] было проведено детальное исследование ограниченности операторов дифференцирования и интегрирования в пространствах $H_v(G)$ для случаев, когда G — единичный круг или комплексная плоскость, а v — радиальный вес. При этом использовались достаточно сложные методы, развитые ранее Луски в упомянутой выше работе [25] для изоморфной классификации пространств $H_v(\mathbb{C})$ и $H_v(\mathbb{D})$, задаваемых радиальными весами v. Кроме того, все основные результаты были получены при следующем предположении:

(HL) *любое $r\in[0,a)$ является точкой глобального максимума для функции $\gamma_n(t):=t^n/v(t)$ при некотором $n\in(0,\infty)$,*

где $a=1$ для $G=\mathbb{D}$ и $a=+\infty$ для $G=\mathbb{C}$. Ясно, что данное предположение не так просто проверить.

Более того, часть результатов в [21] была установлена при дополнительном ограничении, что $H_v(G)$ изоморфно l_∞.

Как показал анализ условия (HL), оно эквивалентно тому, что функция v является log-выпуклой на $(0,a)$, т.е., как было отмечено в предыдущем разделе, естественному ограничению на радиальный вес.

В связи с этим авторами в [5] был предложен другой метод, основанный на привлечении ассоциированных и существенных весов. Он позволил подойти к исследованию свойств операторов дифференцирования и интегрирования в пространствах вида $H_v(G)$ с общих позиций и получить достаточно точные результаты для областей и весов произвольного вида. Применение этих общих результатов для случаев, изучавшихся ранее в [21], позволило снять дополнительные ограничения, использованные в [21], и получить полный ответ на вопрос об ограниченности операторов дифференцирования и интегрирования в весовых пространствах голоморфных функций в круге или в плоскости, задаваемых радиальными весами.

Ниже в этом пункте мы приведем часть наиболее важных результатов работы [5], касающихся оператора дифференцирования.

Следующие два результата содержат простые необходимые и достаточные (отдельно) условия ограниченности оператора дифференцирования в общем случае.

Предложение 5. *Пусть v и w — веса на G. Если оператор дифференцирования $D : H_v(G) \to H_w(G)$ ограничен, то имеется такая постоянная $C > 0$, что*

$$\limsup_{\Delta z \to 0} \left| \frac{\widetilde{v}(z+\Delta z) - \widetilde{v}(z)}{\Delta z} \right| \leqslant Cw(z) \quad \text{для всех } z \in G,$$

где, как и выше, $\widetilde{v}$ — вес, ассоциированный с v.

Поскольку для радиального веса v его ассоциированный $\widetilde{v}$ возрастает и является log-выпуклым, то $\widetilde{v}$ всюду на области определения имеет правую производную, которую мы будем обозначать через $\widetilde{v}'$.

Следствие 2. *Пусть v и w — два радиальных веса на $G = \mathbb{D}$ (соответственно, на $G = \mathbb{C}$). Если оператор дифференцирования $D : H_v(G) \to H_w(G)$ ограничен, то*

$$\limsup_{r\to 1} \frac{\widetilde{v}'(r)}{w(r)} < \infty \quad \left(\text{соответственно, } \limsup_{r\to \infty} \frac{\widetilde{v}'(r)}{w(r)} < \infty\right).$$

Произвольную непрерывную функцию $\rho : G \to (0, 1]$ назовем *функцией расстояния* в G, если $\rho(z) < \operatorname{dist}(z, \partial G)$ для любого z из G. Функция расстояния ρ порождает для каждого веса v новый вес

$$v_\rho(z) := \frac{1}{\rho(z)} \max_{|\zeta| \leqslant \rho(z)} v(z+\zeta), \quad z \in G.$$

Ясно, что $v(z) \leqslant v_\rho(z)$ всюду в G. Следующее предложение лежит в основе получения достаточных условий ограниченности оператора дифференцирования.

Предложение 6. *Для любых веса v и функции расстояния ρ на G оператор дифференцирования $D : H_v(G) \to H_{v_\rho}(G)$ ограничен.*

Его применение к радиальным весам приводит к такому результату.

Следствие 3. *Справедливы следующие утверждения*:

1. *Пусть v и w — такие радиальные веса на $\mathbb{D}$, что для некоторого $C > 0$*
$$\frac{1}{1-r} v\left(\frac{1+r}{2}\right) \leqslant Cw(r) \quad \text{при всех } r \in [0, 1).$$
Тогда оператор $D : H_v(\mathbb{D}) \to H_w(\mathbb{D})$ ограничен.
2. *Если радиальные веса v и w на $\mathbb{C}$ при некотором $C > 0$ удовлетворяют условию*
$$v(1+r) \leqslant Cw(r) \quad \text{при всех } r \in [0, \infty),$$
то оператор $D : H_v(\mathbb{C}) \to H_w(\mathbb{C})$ ограничен.

Как отмечено в [21, предложение 3.1], ни для одного радиального веса v на единичном круге оператор дифференцирования не может действовать из $H_v(\mathbb{D})$ в $H_v(\mathbb{D})$. С точки зрения роста, минимальным радиальным весом w, для которого оператор дифференцирования из $H_v(\mathbb{D})$ в $H_w(\mathbb{D})$ может быть ограничен, является $w(r) = v(r)/(1-r)$. Объединив лемму 2.6 с теоремой 2.8 из [5], получаем в этом случае следующий критерий.

Теорема 4. *Для log-выпуклого веса v на $\mathbb{D}$ эквивалентны следующие условия*:

(i) *Оператор $D : H_v(\mathbb{D}) \to H_w(\mathbb{D})$, где $w(r) = v(r)/(1-r)$, ограничен.*

(ii) $\limsup\limits_{r\to 1} \dfrac{(1-r)v'(r)}{v(r)} < \infty$.

(iii) $(1-r)^\alpha v(r)$ *убывает на $[r_0, 1)$ для некоторых $\alpha > 0$ и $r_0 \in [0, 1)$.*

(iv) $(1-r)^\alpha v(r)$ *почти убывает на $[0, 1)$ для некоторого $\alpha > 0$, т.е. существует такая постоянная $C > 0$, что для любых $r_1 < r_2$ имеет место неравенство $(1-r_2)^\alpha v(r_2) \leqslant C(1-r_1)^\alpha v(r_1)$.*

(v) $1/v$ *удовлетворяет условию* $(*)$ *из* [23, с. 310] *и* [24, определение 2.1], *т.е. выполняется условие*
$$\sup_n \frac{v(1-2^{-n-1})}{v(1-2^{-n})} < \infty.$$

(vi) *Существует такое* $\delta_0 \in (0,1)$, *что*

$$v\left(\frac{r+\delta_0}{1+\delta_0 r}\right) = O(v(r)) \quad \text{при } r \to 1.$$

(vii) $v(r) = O(v(r^2))$ *при* $r \to 1$.

В случае плоскости удается получить полное описание тех радиальных весов v, для которых ограничен оператор $H_v(\mathbb{C}) \to H_v(\mathbb{C})$ (см. [5, теорема 2.1]; ср. с [21, теорема 4.1]).

Теорема 5. *Пусть* v — log-*выпуклый вес на* $\mathbb{C}$. *Следующие условия эквивалентны*:

(i) *Оператор* $D : H_v(\mathbb{C}) \to H_v(\mathbb{C})$ *ограничен.*

(ii) $\limsup\limits_{r\to\infty} \dfrac{v'(r)}{v(r)} < \infty$.

(iii) $\ln v(r) = O(r)$ *при* $r \to \infty$.

Отметим, что в [21, теоремы 3.2, 4.1] также была доказана эквивалентность первых пяти условий теоремы 4 и первых двух теоремы 5. Однако использованный там метод был гораздо более сложным, чем в [5], из-за применения ограничения (HL) вместо естественного требования, что вес v является log-выпуклым. Последнее обстоятельство позволило предложить в [5] новые, как нам представляется, наиболее простые необходимые и достаточные условия ограниченности операторов дифференцирования в рассматриваемых случаях — (vii) в теореме 4 и (iii) в теореме 5. Представляет интерес также тот факт, что условия (iv), (v) и (vi) теоремы 4 возникают и при исследовании других вопросов (см. по этому поводу [20, 23, 24]).

В заключение этого пункта отметим, что в [5] построены примеры, показывающие, что требование log-выпуклости веса v в теоремах 4 и 5 существенно для их справедливости.

3.3. Оператор интегрирования. Гораздо более сложным для исследования оказался вопрос об операторе интегрирования

$$I : f \mapsto \int\limits_{z_0}^{z} f(t)\,dt,$$

где z_0 — фиксированная точка рассматриваемой области G, от которой требуется односвязность. В [21] для него удалось установить лишь следующий результат (см. предложение 2.2 этой работы; мы приводим его в наших обозначениях).

Предложение 7. *Пусть* v *и* w — *радиальные веса в* $G = \mathbb{D}$ *или* $G = \mathbb{C}$, *удовлетворяющие условию* (HL), *и, как и выше,* $a = 1$ *при* $G = \mathbb{D}$ *и* $a = +\infty$ *при* $G = \mathbb{C}$. *Справедливы следующие утверждения*:

(1) *Предположим, что* $H_v(G)$ *изоморфно* l_∞. *Если*

$$\limsup_{r\to a} \frac{w(r)}{v'(r)} < \infty,$$

то оператор интегрирования $I : H_w(G) \to H_v(G)$ *ограничен.*

(2) *Пусть* s_n — *наибольшая из точек глобального максимума функции* $r^n/w(r)$, $n \in \mathbb{N}$. *Если оператор* $I : H_w(G) \to H_v(G)$ *ограничен, то*

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{w^2(s_n)}{w'(s_n)v(s_n)} < \infty.$$

Если дополнительно известно, что последовательность $(s_{n+1}/s_n)_n$ *ограничена сверху, то также*

$$\limsup_{r\to a} \frac{w^2(r)}{w'(r)v(r)} < \infty.$$

Ясно, что достаточные (пункт (1)) и необходимые (пункт (2)) этого предложения существенно отличаются друг от друга. В [5] за счет использования тех же идей, что и для оператора дифференцирования, описанных выше, удалось установить как результаты общего плана, так и полностью охарактеризовать радиальные log-выпуклые веса v и w на $G = \mathbb{D}$ и $G = \mathbb{C}$, для которых оператор $I : H_w(G) \to H_v(G)$ ограничен. Перейдем к формулировке основных результатов [5, раздел 3] в этом направлении. Базовые достаточные условия ограниченности этого оператора содержит следующее утверждение.

Предложение 8. *Пусть v и w — веса на односвязной области G, для которых*

$$\sup_{z\in G} \frac{w_{in}(z)}{v(z)} < \infty,$$

где

$$w_{in}(z) := \inf_{\ell[z_0,z]} \int\limits_{\ell[z_0,z]} w(\zeta)\,|d\zeta|, \quad z \in G,$$

и нижняя грань берется по всем спрямляемым кривым $\ell[z_0, z]$, соединяющим z_0 и z. Тогда оператор $I : H_w(G) \to H_v(G)$ ограничен.

Применение предложения 8 к радиальным весам дает следующее утверждение.

Следствие 4. *Предположим, что v и w — радиальные веса на $G = \mathbb{D}$ или $G = \mathbb{C}$. Рассмотрим следующие условия*:

(i) $\limsup\limits_{r\to a} \dfrac{w(r)}{v'(r)} < \infty$.

(ii) $\limsup\limits_{r\to a} \dfrac{1}{v(r)} \int\limits_0^r w(t)\,dt < \infty$.

(iii) *Оператор $I : H_w(G) \to H_v(G)$ ограничен.*

Тогда (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii). *В частности, для любого радиального веса v на $\mathbb{D}$ оператор интегрирования $I : H_v(\mathbb{D}) \to H_v(\mathbb{D})$ ограничен.*

Таким образом, следствие 4 показывает, что утверждение пункта (1) предложения 2.2 из [21] верно без каких-либо дополнительных ограничений на радиальные веса. С другой стороны, нетрудно привести примеры, показывающие, что условие (ii) не всегда влечет (i) и, значит, (i), вообще говоря, не является необходимым условием ограниченности рассматриваемого интегрального оператора. В связи с этим представляет интерес выяснение вопроса о необходимости для ограниченности $I : H_w(G) \to H_v(G)$ условия (ii) следствия 4.

Будем говорить, что радиальный вес w на $G = \mathbb{D}$ или $G = \mathbb{C}$ принадлежит классу R_G, если существуют такие $c > 0$ и $r_0 \in (0, a)$, что для любого $r \in (r_0, a)$ найдется функция f_r из единичного шара $B_w(G)$, для которой

$$f_r(t) \geqslant cw(t) \quad \text{для всех } t \in [r_0, r].$$

Предложение 9. *Пусть $G = \mathbb{D}$ или $G = \mathbb{C}$, вес w принадлежит R_G, а радиальный вес v на G произволен. Оператор интегрирования $I : H_w(G) \to H_v(G)$ непрерывен в том и только в том случае, когда выполняется условие* (ii) *следствия* 4.

Из результатов и доказательств работы [1] следует, что каждый log-выпуклый вес на единичном круге принадлежит классу $R_{\mathbb{D}}$. Более того, для любого такого веса w найдутся такие функция f из единичного шара $B_w(\mathbb{D})$ и постоянные $c \in (0, 1)$ и $r_0 \in (0, 1)$, что

$$f(t) \geqslant cw(t) \quad \text{при всех } t \in [r_0, 1).$$

Отсюда и из предложения 9 следует полный ответ на вопрос об ограниченности оператора интегрирования в случае круга и log-выпуклых радиальных весов. Напомним, что требование log-выпуклости естественно при рассмотрении весовых банаховых пространств, задаваемых радиальными весами.

Теорема 6. *Пусть w и v — радиальные веса на $\mathbb{D}$, причем w — $\log$-выпуклый. Для того чтобы оператор интегрирования $I : H_w(\mathbb{D}) \to H_v(\mathbb{D})$ был ограничен, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие* (ii) *следствия* 4.

В случае плоскости пока не удалось установить полный аналог этого результата и, таким образом, вопрос о необходимости условия (ii) для этого случая остается открытым. Частично его решает следующий результат.

Предложение 10. *Пусть w — вес Клуни—Ковари на $\mathbb{C}$, а v — произвольный радиальный вес на $\mathbb{C}$. Для того чтобы оператор интегрирования $I : H_w(\mathbb{C}) \to H_v(\mathbb{C})$ был ограничен, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие* (ii) *следствия* 4.

Приведенные выше общие результаты позволяют полностью исследовать задачу об ограниченности оператора интегрирования в случаях, соответствующих рассмотренным выше для оператора дифференцирования, а именно для $w(r) = v(r)/(1-r)$ на $\mathbb{D}$ и $w = v$ на $\mathbb{C}$.

Теорема 7. *Пусть v — $\log$-выпуклый вес на $\mathbb{C}$. Следующие условия эквивалентны*:

(i) $\liminf\limits_{r\to\infty} \dfrac{v'(r)}{v(r)} > 0$.

(ii) $\limsup\limits_{r\to\infty} \dfrac{1}{v(r)} \displaystyle\int_0^r v(t)\,dt < \infty$.

(iii) *Оператор интегрирования $I : H_v(\mathbb{C}) \to H_v(\mathbb{C})$ ограничен.*

Из теорем 5 и 7 следует такое описание эпиморфности оператора дифференцирования.

Следствие 5. *Пусть v — $\log$-выпуклый вес на $\mathbb{C}$. Следующие условия эквивалентны*:

(i) *Оператор $D : H_v(\mathbb{C}) \to H_v(\mathbb{C})$ является эпиморфизмом.*

(ii) $0 < \liminf\limits_{r\to\infty} \dfrac{v'(r)}{v(r)} \leqslant \limsup\limits_{r\to\infty} \dfrac{v'(r)}{v(r)} < \infty$.

(iii) *Существуют такие постоянные $A, C \geqslant 1$, что*

$$\frac{1}{A}e^{r/C} \leqslant v(r) \leqslant Ae^{Cr} \quad \text{для всех } r \geqslant 0.$$

Случай круга (для $w(r) = v(r)/(1-r)$) оказался гораздо труднее для исследования, чем рассмотренный только что случай плоскости.

Предложение 11. *Пусть v — радиальный вес на $\mathbb{D}$ и $w(r) := v(r)/(1-r)$. Рассмотрим следующие условия*:

(i) *Имеет место неравенство*

$$\liminf_{r\to 1} \frac{(1-r)v'(r)}{v(r)} > 0. \tag{4}$$

(ii) *Имеет место неравенство*

$$\limsup_{r\to 1} \frac{1}{v(r)} \int_0^r \frac{v(t)}{1-t}\,dt < \infty. \tag{5}$$

(iii) *Оператор интегрирования $I : H_w(\mathbb{D}) \to H_v(\mathbb{D})$ ограничен.*

(iv) $\ln \dfrac{1}{1-r} = O(\ln v(r))$ *при $r \to 1$.*

Тогда (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (iv).

Назовем радиальный вес v на $\mathbb{D}$ *регулярным*, если существует предел

$$\lim_{r\to 1} \frac{(1-r)v'(r)}{v(r)} =: L_v.$$

Ясно, что $L_v \in [0, +\infty]$.

Следствие 6. *Пусть v — регулярный радиальный вес на $\mathbb{D}$ и $w(r) := v(r)/(1-r)$. Тогда оператор интегрирования $I : H_w(\mathbb{D}) \to H_v(\mathbb{D})$ ограничен в том и только в том случае, когда $L_v > 0$.*

Далее, для log-выпуклых радиальных весов на $\mathbb{D}$ имеет место следующий критерий.

Теорема 8. *Пусть v — log-выпуклый радиальный вес на $\mathbb{D}$ и $w(r) := v(r)/(1-r)$. Следующие условия эквивалентны:*

(i) *Оператор интегрирования $I : H_w(\mathbb{D}) \to H_v(\mathbb{D})$ ограничен.*
(ii) *v удовлетворяет (4).*
(iii) *v удовлетворяет (5).*
(iv) *Найдутся такие $\alpha > 0$ и $r_0 \in [0, 1)$, что функция $(1-r)^\alpha v(r)$ возрастает на $[r_0, 1)$.*
(v) *При некотором $\alpha > 0$ функция $(1-r)^\alpha v(r)$ является почти возрастающей на $[0, 1)$, т.е. имеется такое $C > 0$, что для любых $r_1 < r_2$ имеет место неравенство*

$$(1-r_1)^\alpha v(r_1) \leqslant C(1-r_2)^\alpha v(r_2).$$

(vi) *$1/v$ удовлетворяет условию $(**)$ из* [23, с. 310] *и* [24, определение 2.1], *т.е. найдется такое $k \in \mathbb{N}$, что*

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{v(1-2^{-n})}{v(1-2^{-n-k})} < 1.$$

(vii) *Найдется такое $\delta_0 \in (0, 1)$, что*

$$\limsup_{r\to 1} \frac{v(r)}{v\left(\dfrac{r+\delta_0}{1+\delta_0 r}\right)} < 1.$$

(viii) *Существует такое $\gamma > 1$, что*

$$\limsup_{r\to 1^-} \frac{v(r^\gamma)}{v(r)} < 1.$$

Из теорем 4 и 8, получим следующий критерий эпиморфности для оператора дифференцирования в случае круга.

Следствие 7. *Пусть v — log-выпуклый радиальный вес на $\mathbb{D}$ и $w(r) := v(r)/(1-r)$. Оператор дифференцирования $D : H_v(\mathbb{D}) \to H_w(\mathbb{D})$ является эпиморфизмом тогда и только тогда, когда*

$$0 < \liminf_{r\to 1} \frac{(1-r)v'(r)}{v(r)} \leqslant \limsup_{r\to 1} \frac{(1-r)v'(r)}{v(r)} < \infty.$$

В заключение отметим, что в [5] построена серия примеров, показывающих, что естественное предположение о log-выпуклости весов, фигурирующее в формулировках основных результатов раздела 3.3, существенно для их справедливости.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Abakumov E., Doubtsov E.*, Moduli of holomorphic functions and logarithmically convex radial weights// Bull. London Math. Soc. — 2015. — *47.* — С. 519–532.
2. *Abanin A. V., Pham Trong Tien.* Painlevè null sets, dimension and compact embedding of weighted holomorphic spaces// Stud. Math. — 2012. — *213.* — С. 169–187.
3. *Abanin A. V., Pham Trong Tien.* Erratum: Painlevè null sets, dimension and compact embedding of weighted holomorphic spaces// Stud. Math. — 2013. — *215.* — С. 287–288.
4. *Abanin A. V., Pham Trong Tien.* The algebraic equalities and their topological consequences on weighted spaces// J. Math. Anal. Appl. — 2015. — *422.* — С. 435–445.
5. *Abanin A. V., Pham Trong Tien.* Differentiation and integration operators on weighted Banach spaces of holomorphic functions/ `arXiv:1505.04350v2` (2016).
6. *Basallote M., Contreras M. D., Hernández-Mancera C., Martín M. J., Paúl P. J.* Volterra operators and semigroups in weighted Banach spaces of analytic functions// Collect. Math. — 2014. — *65.* — С. 233–249.
7. *Beltrán M. J., Bonet J., Fernández C.* Classical operators on weighted Banach spaces of entire functions// Proc. Am. Math. Soc. — 2013. — *141.* — С. 4293–4303.

8. *Beltrán M. J., Bonet J., Fernández C.* Classical operators on the Hörmander algebras// Discr. Contin. Dynam. Syst. — 2015. — *35.* — С. 637–652.
9. *Bierstedt K. D., Bonet J.* Weighted (LB)-spaces of holomorphic functions: $\mathcal{V}H(G) = \mathcal{V}_0H(G)$ and completeness of $\mathcal{V}_0H(G)$// J. Math. Anal. Appl. — 2006. — *323.* — С. 747–767.
10. *Bierstedt K. D., Bonet J., Taskinen J.* Associated weights and spaces of holomorphic functions// Stud. Math. — 1998. — *127.* — С. 137–168.
11. *Bonet J., Friz M., Jorda E.* Composition operators between weighted inductive limits of spaces of holomorphic functions// Publ. Math. Debrecen. — 2005. — *67.* — С. 333–348.
12. *Bierstedt K. D., Summers W. H.* Biduals of weighted Banach spaces of analytic functions// J. Austral. Math. Soc. Ser. A. — 1993. — *54.* — С. 70–79.
13. *Bonet J.* Weighted spaces of holomorphic functions and operators between them// Semin. Math. Anal. Coll. Abierta. — Seville: Univ. Sevilla Secr. Publ., 2002/2003. — *64.* — С. 117–138.
14. *Bonet J.* Dynamics of the differentiation operator on weighted spaces of entire functions// Math. Z. — 2009. — *261.* — С. 649–677.
15. *Bonet J., Bonilla A.* Chaos of the differentiation operator on weighted Banach spaces of entire functions// Complex Anal. Oper. Theory. — 2013. — *7.* — С. 33–42.
16. *Bonet J., Domanski P., Lindström M.* Essential norm and weak compactness of composition operators on weighted Banach spaces of analytic functions// Can. Math. Bull. — 1999. — *42.* — С. 139–148.
17. *Bonet J., Dománski P., Lindström M., Taskinen J.* Composition operators between weighted Banach spaces of analytic functions// J. Austral. Math. Soc. Ser. A. — 1998. — *64.* — С. 101–118.
18. *Bonet J., Wolf E.* A note on weighted Banach spaces of holomorphic functions// Arch. Math. — 2003. — *81.* — С. 650–654.
19. *Clunie J., Kövári T.* On integral functions having prescribed asymptotic growth II// Can. J. Math. — 1968. — *20.* — С. 7–20.
20. *Domański P., Lindström M.* Sets of interpolation and sampling for weighted Banach spaces of holomorphic functions// Ann. Polon. Math. — 2002. — *79.* — С. 233–264.
21. *Harutyunyan A., Lusky W.* On the boundedness of the differentiation operator between weighted spaces of holomorphic functions// Stud Math. — 2008. — *184.* — С. 233–247.
22. *Lusky W.* On the structure of $H_{v0}(D)$ and $h_{v0}(D)$// Math. Nachr. — 1992. — *159.* — С. 279–289.
23. *Lusky W.* On weighted spaces of harmonic and holomorphic functions// J. London Math. Soc. — 1995. — *51.* — С. 309–320.
24. *Lusky W.* Growth conditions for harmonic and holomorphic functions// In: Functional Analysis. — Trier: de Gruyter, 1996. — С. 281–291.
25. *Lusky W.* On the isomorphism classes of weighted spaces of harmonic and holomorphic functions// Stud. Math. — 2006. — *75.* — С. 19–45.
26. *Tolsa X.* Painlevé's problem and the semiadditivity of analytic capacity// Acta Math. — 2003. — *190.* — С. 105–149.

А. В. Абанин
Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону;
Южный математический институт Владикавказского научного центра РАН
E-mail: abanin@math.sfedu.ru

Фам Чонг Тиен
Вьетнамский национальный университет, Ханой, Вьетнам
E-mail: phamtien@mail.ru, phamtien@vnu.edu.vn

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 142 (2017). С. 14–27

УДК 517.538.2, 517.984.26, 517.547

ГЛАВНЫЕ ПОДМОДУЛИ В МОДУЛЕ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ, ДВОЙСТВЕННОМ К ПРОСТРАНСТВУ ШВАРЦА, И СЛАБЫЙ СПЕКТРАЛЬНЫЙ СИНТЕЗ В ПРОСТРАНСТВЕ ШВАРЦА

© 2017 г. **Н. Ф. АБУЗЯРОВА**

Аннотация. Получено достаточное условие слабой локализуемости главного подмодуля в модуле целых функций экспоненциального типа и полиномиального роста на вещественной оси. Рассмотрены применения к задаче (слабого) спектрального синтеза в пространстве Шварца $C^\infty(a;b)$.

Ключевые слова: целые функции, субгармонические функции, преобразование Фурье—Лапласа, локальное описание подмодулей, инвариантные подпространства, спектральный синтез.

AMS Subject Classification: 30D15, 30H99, 42A38, 47E05

1. Введение. Пусть $[a_1;b_1] \Subset [a_2;b_2] \Subset \dots$ — последовательность отрезков, исчерпывающая конечный или бесконечный интервал $(a;b)$ вещественной прямой, P_k — банахово пространство, состоящее из всех целых функций φ, для которых конечна норма

$$\|\varphi\|_k = \sup_{z\in\mathbb{C}} \frac{|\varphi(z)|}{(1+|z|)^k \exp(b_k y^+ - a_k y^-)}, \quad y^\pm = \max\{0, \pm y\}, \quad z = x+iy. \tag{1}$$

Обозначим через $\mathcal{P}(a;b)$ индуктивный предел последовательности $\{P_k\}$. Каждое из вложений $P_k \subset P_{k+1}$ вполне непрерывно; следовательно, $\mathcal{P}(a;b)$ является локально выпуклым пространством типа (LN^*) (см. [10]). Известно (см., например, [21, § 16.1]), что всякий элемент пространства $\mathcal{P}(a;b)$ является функцией вполне регулярного роста при порядке 1, индикаторная диаграмма которой есть отрезок мнимой оси $[ic_\varphi; id_\varphi] \subset (ia; ib)$.

В пространстве $\mathcal{P}(a;b)$ операция умножения на независимую переменную z непрерывна, поэтому $\mathcal{P}(a;b)$ — топологический модуль над кольцом многочленов $\mathbb{C}[z]$. Замкнутые подмодули модуля $\mathcal{P}(a;b)$ состоят в двойственности с замкнутыми подпространствами *пространства Шварца* $C^\infty(a;b)$, инвариантными относительно оператора дифференцирования, короче, D-*инвариантными* (см. [1, 2]). А именно, преобразование Фурье—Лапласа $\mathcal{F}$, действующее в сильном сопряженном пространстве $(C^\infty(a;b))'$ по правилу

$$\mathcal{F}(S)(z) = (S, e^{-itz}), \quad S \in (C^\infty(a;b))',$$

есть линейный топологический изоморфизм пространств $(C^\infty(a;b))'$ и $\mathcal{P}(a;b)$ (см. [12, теорема 7.3.1]). При этом между совокупностью $\{\mathcal{J}\}$ замкнутых подмодулей модуля $\mathcal{P}(a;b)$ и совокупностью $\{W\}$ D-инвариантых подпространств пространства $C^\infty(a;b)$ имеет место взаимно однозначное соответствие по правилу: $\mathcal{J} \leftrightarrow W$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{J} = \mathcal{F}(W^0)$, где замкнутое подпространство $W^0 \subset (C^\infty(a;b))'$ состоит из всех распределений $S \in (C^\infty(a;b))'$, аннулирующих W. Задача спектрального синтеза для D-инвариантых подпространств $W \subset C^\infty(a;b)$ была

Работа выполнена при поддержке Минобрнауки РФ.

впервые рассмотрена в [16] (для случая произвольного интервала $(a;b) \subset \mathbb{R}$). Эта задача двойственна задаче о (слабой) локализуемости замкнутых подмодулей в $\mathcal{P}(a;b)$ (см. [1]). Более подробно о двойственности будет сказано ниже, в разделе 3. Всюду далее, если не оговорено противное, будем пользоваться термином «подмодуль», имея в виду замкнутый подмодуль модуля $\mathcal{P}(a;b)$.

Напомним ряд понятий, характеризующих свойства подмодулей (см. [1–5]) и используемых в вопросах локального описания.

Для подмодуля $\mathcal{J} \subset \mathcal{P}(a;b)$ положим

$$c_{\mathcal{J}} = \inf_{\varphi\in\mathcal{J}} c_\varphi, \quad d_{\mathcal{J}} = \sup_{\varphi\in\mathcal{J}} d_\varphi.$$

Множество $[c_{\mathcal{J}}; d_{\mathcal{J}}]$ называется *индикаторным отрезком* подмодуля $\mathcal{J}$.

Дивизор функции $\varphi \in \mathcal{P}(a;b)$ для всех $\lambda \in \mathbb{C}$ определяется формулой

$$n_\varphi(\lambda) = \begin{cases} 0, & \text{если } \varphi(\lambda) \neq 0, \\ m, & \text{если } \lambda \text{ — нуль } \varphi \text{ кратности } m, \end{cases}$$

а *дивизор подмодуля* $\mathcal{J} \subset \mathcal{P}(a;b)$ — формулой

$$n_{\mathcal{J}}(\lambda) = \min_{\varphi\in\mathcal{J}} n_\varphi(\lambda).$$

Подмодуль $\mathcal{J}$ *слабо локализуем*, если он содержит *все* функции $\varphi \in \mathcal{P}(a;b)$, удовлетворяющие условиям:

1) $n_\varphi(z) \geqslant n_{\mathcal{J}}(z)$, $z \in \mathbb{C}$;
2) индикаторная диаграмма функции φ содержится в множестве $i[c_{\mathcal{J}}; d_{\mathcal{J}}]$.

В случае, если $c_{\mathcal{J}} = a$ и $d_{\mathcal{J}} = b$, слабая локализуемость $\mathcal{J}$ означает, что этот подмодуль *обильный* или *локализуемый.*

Подмодуль $\mathcal{J}$ называется *устойчивым в точке* $\lambda \in \mathbb{C}$, если выполнение условий $\varphi \in \mathcal{J}$ и $n_\varphi(\lambda) > n_{\mathcal{J}}(\lambda)$ влечет включение $\dfrac{\varphi}{z-\lambda} \in \mathcal{J}$. Подмодуль $\mathcal{J}$ *устойчив*, если он устойчив в любой точке $\lambda \in \mathbb{C}$.

Ясно, что *устойчивость подмодуля $\mathcal{J}$ является необходимым условием его слабой локализуемости.*

Главным подмодулем $\mathcal{J}_\varphi$, порожденным функцией $\varphi \in \mathcal{P}(a;b)$, называется замыкание в $\mathcal{P}(a;b)$ множества $\{p\varphi : \ p \in \mathbb{C}[z]\}$.

Из результатов [6, § 4] следует, что главный подмодуль в $\mathcal{P}(a;b)$ всегда устойчив. Это также нетрудно проверить непосредственно, используя определение устойчивости и описание топологии в $\mathcal{P}(a;b)$. В силу принципа двойственности (см. [2, предложение 1]) индикаторный отрезок главного подмодуля есть $[c_\varphi; d_\varphi]$.

Для функции $\varphi \in \mathcal{P}(a;b)$ обозначим через $\mathcal{J}(\varphi)$ слабо локализуемый подмодуль с дивизором, равным n_φ, и индикаторным отрезком $[c_\varphi; d_\varphi]$. Иначе говоря, подмодуль $\mathcal{J}(\varphi)$ состоит из *всех* функций $\psi \in \mathcal{P}(a;b)$, делящихся на φ и имеющих индикатор $h_\psi = h_\varphi$.

Подмодули $\mathcal{J}_\varphi$ и $\mathcal{J}(\varphi)$ имеют один и тот же дивизор, равный n_φ, и один и тот же индикаторный отрезок $[c_\varphi; d_\varphi]$. Поэтому справедливо включение

$$\mathcal{J}_\varphi \subset \mathcal{J}(\varphi).$$

Выполнение равенства

$$\mathcal{J}_\varphi = \mathcal{J}(\varphi) \tag{2}$$

эквивалентно слабой локализуемости главного подмодуля $\mathcal{J}_\varphi$.

Как показывают пример, построенный в [15, теорема 1.2], а также [3, теорема 3], равенство (2) имеет место не всегда. При изучении вопроса о справедливости этого равенства естественно рассматривать следующие два случая.

(I). Пусть подмодуль $\mathcal{J}(\varphi)$ (а значит, и главный подмодуль $\mathcal{J}_\varphi$) содержит только функции вида $p\varphi$, $p \in \mathbb{C}[z]$

$$\mathcal{J}(\varphi) = \mathcal{J}_\varphi = \{p\varphi : \ p \in \mathbb{C}[z]\}. \tag{3}$$

Иными словами, совокупность целых функций минимального типа при порядке 1, представимых в виде Φ/φ, $\Phi \in \mathcal{P}(a;b)$, совпадает с множеством многочленов $\mathbb{C}[z]$. Очевидно, что в этом случае главный подмодуль $\mathcal{J}_\varphi$ слабо локализуем.

Достаточное условие на функцию φ, при котором выполнены соотношения (3), состоит в требовании обратимости этой функции (в алгебре $\mathcal{P}(-\infty;+\infty)$). Функция $\varphi \in \mathcal{P}(-\infty;+\infty)$ называется *обратимой* (см. [17]), если выполнена импликация: из условия «$\Phi \in \mathcal{P}(-\infty;+\infty)$, Φ/φ — целая функция» следует, что $\Phi/\varphi \in \mathcal{P}(-\infty;+\infty)$.

Оказывается, что обратимость порождающей функции не является необходимым условием для справедливости (3): в [3, теорема 1] нами построен пример функции $\varphi \in \mathcal{P}(a;b)$, не являющейся обратимой, для которой выполнены соотношения (3).

(II). Предположим теперь, что множество

$$\mathcal{J}_a(\varphi) := \mathcal{J}(\varphi) \setminus \{p\varphi : \ p \in \mathbb{C}[z]\}$$

не пусто. Тогда для того, чтобы выполнялось соотношение (2), необходимо и достаточно, чтобы для каждой функции $\Phi \in \mathcal{J}_a(\varphi)$ существовала такая обобщенная последовательность многочленов p_α, что $p_\alpha\varphi \to \Phi$ в топологии пространства $\mathcal{P}(a;b)$. Введем обозначение $\mathcal{P}_0(a;b) = \mathcal{F}(C_0^\infty(a;b))$. Согласно теореме Пэли—Винера—Шварца (см. [12]) класс $\mathcal{P}_0(a;b)$ состоит из тех функций $\varphi \in \mathcal{P}(a;b)$, которые убывают на вещественной оси быстрее любой функции $|x|^{-n}$, $n \in \mathbb{N}$. В [3, теорема 2] доказано, что включение $\varphi \in \mathcal{P}_0(a;b)$ эквивалентно соотношению

$$\mathcal{J}_\varphi \setminus \{p\varphi, \ p \in \mathbb{C}[z]\} \neq \emptyset.$$

В частности, отсюда следует, что для слабой локализуемости главного подмодуля $\mathcal{J}_\varphi$ в $\mathcal{P}(a;b)$ в случае, когда $\mathcal{J}_a(\varphi) \neq \emptyset$, необходимо, чтобы образующая φ принадлежала классу $\mathcal{P}_0(a;b)$. С другой стороны, из упоминавшихся выше результатов [15, теорема 1.2] и [3, теорема 3] вытекает, что включение $\varphi \in \mathcal{P}_0(a;b)$ не является достаточным условием для слабой локализуемости главного подмодуля $\mathcal{J}(\varphi)$.

В следующем разделе мы приводим достаточное условие слабой локализуемости главного подмодуля $\mathcal{J}_\varphi$, порожденного функцией $\varphi \in \mathcal{P}_0(a;b)$ (теорема 1), и рассматриваем примеры ситуаций, в которых это условие выполняется. Последний раздел статьи содежит результаты о (слабом) спектральном синтезе в пространстве $C^\infty(a;b)$ (теоремы 3 и 4), полученные при помощи теоремы 1.

2. Главные подмодули в $\mathcal{P}(a;b)$.

2.1. Достаточное условие слабой локализуемости главного подмодуля. Пусть $\varphi \in \mathcal{P}_0(a;b)$, Λ_φ — нулевое множество функции φ. Не ограничивая общности, можем считать, что $0 \notin \Lambda_\varphi$. Положим

$$U_*(x) = \sup_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}} \frac{|x|^n}{M_n},$$

где $M_n = \max_{x\in\mathbb{R}} |x^n\varphi(x)|$, $n = 0, 1, \dots$, и пусть $u_*(x) = \ln U_*(x)$. Отметим, что в силу включения $\varphi \in \mathcal{P}_0(a;b)$ последовательность $\{M_n\}$ — неквазианалитическая, функция $U_*(x)$ — всюду конечная, четная, возрастающая при $x \geqslant 0$ $(x \leqslant 0)$, а функция $u_*(e^t)$ выпукла при всех $t \in \mathbb{R}$. Ясно, что $\ln|\varphi(x)| \leqslant -u_*(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

Теорема 1. *Предположим, что существует такая постоянная $L_0 > 0$, что для любого $x \in \mathbb{R}$ найдется $x' \in \mathbb{R}$ со свойствами*

$$|x - x'| \leqslant L_0 u_*(x), \quad \ln|\varphi(x')| \geqslant -L_0 u_*(x').$$

Тогда подмодуль $\mathcal{J}_\varphi$ слабо локализуем.

Доказательство. Положим $H(z) = h_\varphi(\arg z)|z|$ и обозначим через $V(z)$ наибольшую субгармоническую миноранту функции $\bigl(H(z)-\ln|\varphi(z)|\bigr)$. Согласно [13, теорема 5] существует целая функция ω, удовлетворяющая оценке

$$\bigl|V(z) - \ln|\omega(z)|\bigr| \leqslant C_1 \ln(e+|z|), \quad z \notin E, \tag{4}$$

где E — множество кружков с суммой радиусов, меньшей, чем $1/2$ (после отбрасывания конечного числа кружков), C_1 — положительная постоянная. Функция ω отлична от многочлена и имеет минимальный тип при порядке 1, а функция $\Phi = \omega\varphi$ принадлежит подмодулю $\mathcal{J}(\varphi)$.

Покажем, что

$$\mathcal{J}(\Phi) = \mathcal{J}_\Phi = \{p\Phi,\ p \in \mathbb{C}[z]\}. \tag{5}$$

Предположим противное: $\mathcal{J}_a(\Phi) \neq \emptyset$, т.е. существует такая функция $\Psi = \omega_0\Phi \in \mathcal{J}(\Phi)$, что ω_0 — целая функция минимального экспоненциального типа, отличная от многочлена. Имеем

$$\ln|\omega_0(x)| + \ln|\omega(x)| + \ln|\varphi(x)| \leqslant C_2 \ln(e+|x|), \quad x \in \mathbb{R},$$

где $C_2 > 0$ — некоторая постоянная. Поделив ω_0 на многочлен q_0 степени $[C_2]+1$, корни которого лежат в нулевом множестве функции ω_0, получим такую целую функцию $\omega_1 = \omega_0/q_0$, что $\Psi_1 = \omega_1\Phi \in \mathcal{J}_a(\varphi)$ и

$$\bigl|\omega_1(x)\omega(x)\varphi(x)\bigr| \leqslant C_3, \quad x \in \mathbb{R},$$

где $C_3 > 0$ — некоторая постоянная. Применяя теорему Фрагмена—Линделефа и учитывая, что $\omega_1\omega$ — целая функция минимального экспоненциального типа, выводим оценку

$$\bigl|\omega_1(z)\omega(z)\varphi(z)\bigr| \leqslant C_3 e^{H(z)}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Поэтому

$$\ln\bigl|\omega_1(z)\bigr| + \ln|\omega(z)| \leqslant \widetilde{C}_3 + V(z), \quad z \in \mathbb{C}.$$

Отсюда и из (4) получаем, что

$$\ln|\omega_1(x)| \leqslant (\widetilde{C}_1 + \widetilde{C}_3)\ln(e+|x|), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Так как ω_1 — целая функция нулевого экспоненциального типа, используя следствие из теоремы Фрагмена—Линделефа (см. [21, § 6.1, Problem 3]) , из последней оценки получаем, что ω_1 — многочлен, что противоречит включению $\Psi_1 \in \mathcal{J}_a(\Phi)$.

Из соотношений (5) и [1, теорема 1] следует, что для доказательства слабой локализуемости главного подмодуля $\mathcal{J}_\varphi$ достаточно убедиться в том, что $\Phi \in \mathcal{J}_\varphi$. При этом, не ограничивая общности, будем считать, что $\Phi(0) = 1$.

Заметим, что, так как функция $|\varphi(z)|$ ограничена в полосе $|\operatorname{Im} z| \leqslant 1/2$, из определения функции V и соотношения (4) в этой полосе, но вне исключительного множества E, справедлива оценка снизу

$$\ln|\omega(z)| \geqslant C_4 - C_1\ln(e+|z|), \tag{6}$$

где $C_4 > 0$ — постоянная.

Сформулируем и докажем несколько вспомогательных утверждений.

Лемма 1. *В условиях теоремы* 1

$$u_*(x) - a\ln(e+|x|) \leqslant V(x) \leqslant Au_*(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

где постоянные $a \geqslant 0$, $A \geqslant 1$ не зависят от x.

Доказательство. Определим субгармоническую в $\mathbb{C}$ функцию $u(z) := u_*(|z|)$. Из определения u_* вытекает оценка

$$u(x) + \ln|\varphi(x)| \leqslant 0, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{7}$$

Функция φ, как и все элементы пространства $\mathcal{P}(a;b)$, имеет вполне регулярный рост во всей плоскости, а функция u зависит только от $|z|$. Применяя теорему о сложении индикаторов [11, теорема 1], из (7) выводим, что u имеет минимальный тип при порядке 1.

Согласно [13, теорема 5] существует такая целая функция ω_0, что

$$\bigl|u(z) - \ln|\omega_0(z)|\bigr| \leqslant c_0\ln(e+|z|), \quad z \notin \tilde{E},$$

где $\tilde{E}$ — множество кружков с конечной суммой радиусов, c_0 — положительная постоянная. Отсюда нетрудно вывести оценку

$$\big|\omega_0(x)\varphi(x)\big| \leqslant c_1(e+|x|)^{[c_0]+1}, \quad x \in \mathbb{R},$$

из которой, применяя следствие теоремы Фрагмена—Линделефа, получим

$$\ln|\omega_0(z)| \leqslant V(z) + c_2\ln(e+|z|), \quad z \in \mathbb{C}.$$

Следовательно,

$$u_*(x) \leqslant V(x) + a\ln,(e+|x|), \quad x \in \mathbb{R}, \tag{8}$$

где постоянная $a \geqslant c_0 + c_2$ не зависит от x.

Докажем правое неравенство — оценку сверху для функции V. Для произвольной точки $x_0 > 0$ найдем точку $x \in (0; x_0)$ со свойством

$$x + L_0u_*(x) = x_0,$$

а для x — такую точку x', что

$$|x - x'| \leqslant L_0u_*(x), \quad \ln|\varphi(x')| \geqslant -L_0u_*(x').$$

Применим теорему об оценке снизу модуля аналитической функции в круге (см. [7, гл. 1, § 8]) к функции $f(z) = \varphi(z)/\varphi(x')$ и кругу $|z - x'| \leqslant R$, где $R = 3L_0u_*(x)$. Учитывая, что всюду в комплексной плоскости верна оценка

$$\big|\varphi(z)\big| \leqslant M_0e^{c_0|\operatorname{Im} z|},$$

где $c_0 = \max\left(h_\varphi(-\pi/2), h_\varphi(\pi/2)\right)$, h_φ — индикатор функции φ, получим, что на некоторой окружности $|z - x'| = R'$ радиуса $R' \in (2L_0u_*(x); 3L_0u_*(x))$ имеет место оценка снизу

$$\ln\big|\varphi(z)\big| \geqslant -C_1u_*(x'),$$

где C_1 — положительная постоянная, не зависящая от x_0 и z. Следовательно, в круге $|z-x'| \leqslant R'$ имеем

$$V(z) \leqslant \max_{|\xi - x'| = R'}\big(H(\xi) - \ln|\varphi(\xi)|\big) \leqslant c_0R' + C_1u_*(x') \leqslant Au_*(x_0),$$

где $A = 9c_0L_0 + C_1$, $H(z) = h_\varphi(\arg z)|z|$. Так как $|x_0 - x'| < R'$, отсюда получаем требуемую оценку

$$V(x_0) \leqslant Au_*(x_0).$$

Для $x_0 < 0$ доказательство аналогичное. □

Лемма 2. *Предположим, что $\psi \in \mathcal{J}(\varphi)$ и функция $f = \psi/\varphi$ удовлетворяет оценке*

$$\ln|f(x)| \leqslant u_*(x) + c_1\ln(1+|x|) + c_2, \quad x \in \mathbb{R},$$

где c_1, c_2 — положительные постоянные. Тогда $\psi \in \mathcal{J}_\varphi$.

Доказательство. Положим $W(x) = e^{u_*(x)+c_1\ln(1+|x|)+c_2}$, $x \in \mathbb{R}$. Рассуждая так же, как это было сделано в [3, лемма 3] — с использованием результатов П. Кусиса и де Бранжа [20, VI.H.1,2] — убеждаемся в том, что существует последовательность многочленов p_j, сходящаяся к функции f в весовой норме

$$\|f\| = \sup_{x\in\mathbb{R}}\frac{|f(x)|}{(1+|x|)^3W(x)}.$$

Учитывая определения функции W, получим

$$\ln\big|p_j(x)\varphi(x)\big| \leqslant C_0\ln(e+|x|), \quad x \in \mathbb{R}, \quad j \in \mathbb{N},$$

где постоянная $C_0 > 0$ не зависит от x и j. Применяя следствие теоремы Фрагмена—Линделефа, выводим оценки

$$\ln\big|p_j(z)\varphi(z)\big| \leqslant H(z) + \widetilde{C}_0\ln(e+|z|), \quad z \in \mathbb{C}, \quad j \in \mathbb{N}.$$

Из этих оценок и топологических свойств пространства $\mathcal{P}(a;b)$, как локально выпуклого пространства типа (LN^*), (см. [10, теорема 2 и ее следствия]) следует, что некоторая подпоследовательность последовательности $\{p_j\varphi\}$ сходится в топологии пространства $\mathcal{P}(a;b)$ к функции ψ. Поэтому верно требуемое включение $\psi \in \mathcal{J}_\varphi$. $\square$

Лемма 3.

1) *Для каждого $n \in \mathbb{N}$ существует представление функции ω в виде произведения таких двух целых функций $\omega_{1,n}$ и $\omega_{2,n}$, что при всех z, лежащих в полосе $|\operatorname{Im} z| \leqslant 1/2$, но вне исключительного множества E_0, для любого $p \in [1;|z|/2]$ справедливо неравенство*

$$\Big|\ln\big|\omega_{1,n}(z)\big| - 2^{-n}\ln\big|\omega(z)\big|\Big| \leqslant \frac{A_0}{p}\Big(H(z) - \ln|\Phi(z)|\Big) + B\ln(e+|z|) + Me^p, \tag{9}$$

где $H(z) = h_\Phi(\theta)r$, $z = re^{i\theta}$, h_Φ — индикатор функции Φ, положительные постоянные A_0, B, M не зависят от z, p, n, множество E_0 можно покрыть кружками $K(\mu_j, |\mu_j|^{-2})$ с центрами в нулях μ_j функции ω и радиуса $|\mu_j|^{-2}$.

2) *Существует подпоследовательность $\{\omega_{2,n_k}\varphi\}_{k=1}^{\infty}$, сходящаяся в топологии пространства $\mathcal{P}(a;b)$ к функции $\widetilde{\Phi}$, которая отличается от функции Φ на полиномиальный множитель.*

Замечание 1. Так как ряд

$$\sum_{\mu_j \in \Lambda_\omega} \frac{1}{|\mu_j|^2}$$

сходится, отбросив, если это необходимо, конечное число точек μ_j, всюду далее считаем, что объединение исключительных множеств E_0 и E (см. (4)) можно покрыть кружками с суммой радиусов меньшей, чем $1/2$.

Доказательство леммы 3.

1) Воспользуемся следующим утверждением.

Теорема 2 (теорема о факторизации, см. [14, § 1, основная теорема])**.** *Пусть f, F — целые функции, причем F делится на f, $F(0) = 1$ и выполняется оценка*

$$\ln|F(z)| \leqslant H(z), \tag{10}$$

где H — некоторая липшицева функция:

$$\big|H(z') - H(z'')\big| \leqslant \sigma|z' - z''|, \quad z', z'' \in \mathbb{C}.$$

Тогда f представляется в виде произведения двух целых функций, f_1 и f_2, так, что для всех z, $|\operatorname{Im} z| \leqslant 1/2$, и p, $p \in [1;|z|/2]$ выполняется соотношение

$$\Big|\ln\big|f_1(z)\big| - \ln\big|f_2(z)\big|\Big| \leqslant \frac{A_0}{p}\Big(H(z) - \ln|F(z)|\Big) + \widetilde{B}\ln^+|z| + C\ln^+\frac{1}{d(z,\Lambda_f)} + D + Me^p, \tag{11}$$

где $d(z,\Lambda_f)$ — расстояние от точки z до множества нулей функции f, A_0, $\widetilde{B}$, C, D, M — положительные постоянные, не зависящие от z и p.

Положим $f = \omega$, $F = \Phi$, $H(z) = h_\Phi(\theta)r$, $z = re^{i\theta}$ — как в условии леммы 3. Применяя теорему 2 и учитывая, что ω — целая функция нулевого экспоненциального типа, получаем представление функции ω в виде произведения двух целых функций, $\omega_{1,1}$ и $\omega_{2,1}$, причем для всех z, лежащих в полосе $|\operatorname{Im} z| \leqslant 1/2$, но вне множества E_0, будет

$$Big|\ln\big|\omega_{1,1}(z)\big| - \ln\big|\omega_{2,1}(z)\big|\Big| \leqslant \frac{A_0}{p}\Big(H(z) - \ln|\Phi(z)|\Big) + B\ln(e+|z|) + Me^p, \tag{12}$$

где $E_0 = \bigcup\limits_{\mu \in \Lambda_\omega} K(\mu, |\mu|^{-2})$, Λ_ω — множество нулей функции ω, положительные постоянные A_0, B, M не зависят от z и p.

Из (12) и соотношения

$$\ln|\omega| = \ln|\omega_{1,1}| + \ln|\omega_{2,1}|$$

для всех z, лежащих в полосе $|\operatorname{Im} z| \leqslant 1/2$, но вне множества E_0, выводим оценку

$$\Bigl|\ln\bigl|\omega_{1,1}(z)\bigr| - \frac{1}{2}\ln\bigl|\omega(z)\bigr|\Bigr| \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{A_0}{p}\left(H(z)-\ln|\Phi(z)|\right) + B\ln(e+|z|) + Me^p\right). \tag{13}$$

Применяя теперь теорему 2 к функции $f = \omega_{1,1}$ с теми же F, H, что и выше, получим представление

$$\omega_{1,1} = \omega_{1,2}\tilde{\omega}_{2,2},$$

в котором целая функция $\omega_{1,2}$ удовлетворяет оценке

$$\Bigl|\ln\bigl|\omega_{1,2}(z)\bigr| - \frac{1}{2}\ln\bigl|\omega_{1,1}(z)\bigr|\Bigr| \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{A_0}{p}\Bigl(H(z)-\ln|\Phi(z)|\Bigr) + B\ln(e+|z|) + Me^p\right),$$
$$|\operatorname{Im} z| \leqslant 1/2, \quad z \notin E_0.$$

Из этой оценки и (13) следует, что для всех z, лежащих в полосе $|\operatorname{Im} z| \leqslant 1/2$, но вне множества E_0,

$$\Bigl|\ln\bigl|\omega_{1,2}(z)\bigr| - \frac{1}{2^2}\ln\bigl|\omega(z)\bigr|\Bigr| \leqslant \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}\right)\left(\frac{A_0}{p}\Bigl(H(z)-\ln|\Phi(z)|\Bigr) + B\ln(e+|z|) + Me^p\right). \tag{14}$$

Продолжая этот процесс, через n шагов получим представление функции ω в виде произведения двух целых функций $\omega_{1,n}$ и $\omega_{2,n} = \omega_{2,1}\tilde{\omega}_{2,2}\ldots\tilde{\omega}_{2,n}$, причем для всех z, лежащих в полосе $|\operatorname{Im} z| \leqslant 1/2$, но вне множества E_0, будет выполняться требуемое соотношение (9).

2) В силу (9) для функции $\omega_{2,n} = \omega/\omega_{1,n}$ верна оценка

$$\Bigl|\ln\bigl|\omega_{2,n}(z)\bigr| - (1-2^{-n})\ln\bigl|\omega(z)\bigr|\Bigr| \leqslant \frac{A_0}{p}\Bigl(H(z)-\ln|\Phi(z)|\Bigr) +$$
$$+ B\ln(e+|z|) + Me^p, \quad |\operatorname{Im} z| \leqslant \frac{1}{2}, \quad z \notin E_0. \tag{15}$$

При $p = A_0$ (ясно, что в теореме 2 можно считать $A_0 \geqslant 1$) получим

$$\ln\bigl|\omega_{2,n}(z)\varphi(z)\bigr| \leqslant \Bigl(H(z) - 2^{-n}\ln\bigl|\omega(z)\bigr|\Bigr) + B\ln(e+|z|) + Me^{A_0}, \quad |\operatorname{Im} z| \leqslant \frac{1}{2}, \quad z \notin E_0.$$

Из этой оценки, оценки (6), учитывая определение функции H, выводим, что

$$\ln\bigl|\omega_{2,n}(z)\varphi(z)\bigr| \leqslant B_1\ln(e+|z|), \quad |\operatorname{Im} z| \leqslant \frac{1}{2}, \quad z \notin E_0 \cup E,$$

где $B_1 > 0$ — постоянная, не зависящая от n. В силу малости множеств E и E_0 (см. замечание 1) последняя оценка продолжается во всю полосу $|\operatorname{Im} z| \leqslant 1/2$ (с другой, но тоже не зависящей от n и z, постоянной B_2 вместо B_1). Отсюда, с учетом следствия из теоремы Фрагмена—Линделефа и топологических свойств пространства $\mathcal{P}(a;b)$ (см. [10, теорема 2 и ее следствия]), заключаем, что множество $\{\omega_{2,n}\varphi\}$ относительно компактно в этом пространстве. Значит, существует подпоследовательность $\omega_{2,n_k}\varphi$, сходящаяся в топологии $\mathcal{P}(a;b)$ к некоторой функции $\widetilde{\Phi}$, причем индикатор этой функции совпадает с равными между собой индикаторами функций Φ и φ. Соответствующая подпоследовательность целых функций минимального экспоненциального типа $\omega_{1,n_k} = \Phi/(\omega_{2,n_k}\varphi)$ сходится к целой функции $\Phi/\widetilde{\Phi}$, которая имеет минимальный тип при порядке 1. Из оценок (9) предельным переходом получаем полиномиальную оценку сверху для $|\Phi/\widetilde{\Phi}|$ в полосе $|\operatorname{Im} z| \leqslant 1/2$. Опять применяя следствие из теоремы Фрагмена—Линделефа, заключаем, что $\Phi/\widetilde{\Phi}$ — многочлен. □

Замечание 2. Из рассуждений, приведенных в начале доказательства теоремы (перед леммой 1) и второго утверждения леммы 3 следует, что для слабой локализуемости подмодуля $\mathcal{J}_\varphi$ достаточно, чтобы имели место включения $\omega_{2,n}\varphi \in \mathcal{J}_\varphi$, $n \in \mathbb{N}$.

Лемма 4. *Если $n_0 \in \mathbb{N}$ — фиксированное число, удовлетворяющее условию $2^{-n_0} < A^{-1}$, где постоянная A — из леммы 1, то $\varphi_1 = \omega_{1,n_0}\varphi \in \mathcal{J}_\varphi$.*

Доказательство. Из (4), (6), (9) выводим оценку для ω_{1,n_0}:

$$\ln\left|\omega_{1,n_0}(z)\right| \leqslant \left(\frac{1}{2^{n_0}}+\frac{A_0}{p}\right)\Bigl(H(z)-\ln|\varphi(z)|\Bigr)+B_0\ln(e+|z|)+Me^p, \quad |\operatorname{Im} z|\leqslant\frac{1}{2}, \quad z\notin E\cup E_0,$$

где положительные постоянные A_0, B_0, M не зависят от z, n_0, $p\in[1;|z|/2]$. Учитывая, что $\varphi\in\mathcal{P}_0(a;b)$, из этих оценок получаем, что для произвольного $\varepsilon>0$ найдется такая положительная постоянная B_ε (не зависящая от n_0 и z), что

$$\ln\left|\omega_{1,n_0}(z)\right| \leqslant \left(2^{-n_0}+\varepsilon\right)\Bigl(H(z)-\ln|\varphi(z)|\Bigr)+B_\varepsilon, \quad |\operatorname{Im} z|\leqslant\frac{1}{2}, \quad z\notin E\cup E_0.$$

Отсюда, используя принцип Фрагмена—Линделефа для субгармонических функций (см. [21, § 7.3]), получим, что

$$\ln\left|\omega_{1,n_0}(z)\right| \leqslant \left(2^{-n_0}+\varepsilon\right)V(z)+\widetilde{B}_\varepsilon, \quad z\in\mathbb{C}.$$

Из этой оценки, условия на n_0 и леммы 1 следует, что к функции ω_{1,n_0} применима лемма 2; следовательно, $\omega_{1,n_0}\varphi\in\mathcal{J}_\varphi$. □

Продолжим доказательство теоремы 1. Применив лемму 3 к функции $\nu=\Phi/\varphi_1$ вместо ω, получим для каждого $n\in\mathbb{N}$ представление $\nu=\nu_{1,n}\nu_{2,n}$.

Покажем, что функция $\varphi_2=\nu_{1,n_0}\varphi_1$ принадлежит подмодулю $\mathcal{J}_\varphi$, если число $n_0\in\mathbb{N}$ такое же, как в лемме 4. Для этого рассмотрим функцию V_1 — наибольшую субгармоническую миноранту функции $\bigl(H-\ln|\varphi_1|\bigr)$. В полосе $|\operatorname{Im} z|\leqslant 1/2$, но вне множества $E\cup E_0$, в силу (4), (6), (9), для всех $p\in[1;|z|/2]$ выполняется оценка

$$V_1(z)\leqslant\left(1-2^{-n_0}+\frac{A_0}{p}\right)\Bigl(H(z)-\ln|\varphi(z)|\Bigr)+B_2\ln(e+|z|)+Me^p,$$

где положительные постоянные A_0, B_2, M не зависят от p и z. Из этой оценки, используя принцип Фрагмена—Линделефа для субгармонических функций, нетрудно вывести, что

$$V_1(z)\leqslant\left(1-2^{-n_0}+\frac{A_0}{p}\right)V(z)+B_3\ln(e+|z|)+Me^p, \quad z\in\mathbb{C}, \quad p\in[1;|z|/2], \tag{16}$$

где постоянные A_0, B_3, M по-прежнему не зависят от p и z.

Для того чтобы оценить V_1 снизу через V, заметим, что

$$\ln\left|\omega_{2,n_0}(z)\right|\leqslant H(z)-\ln\left|\varphi_1(z)\right|+\mathrm{const} \tag{17}$$

(без ограничения общности считаем, что $|\Phi(z)|\leqslant\mathrm{const}\,e^{H(z)}$). Используя (4), (6) и лемму 3, из (17) получим соотношение

$$\frac{p}{A_0}\Bigl((1-2^{-n_0})V(z)+\ln|\varphi_1(z)|\Bigr)+\ln|\varphi(z)|-\frac{Mpe^p}{A_0}\leqslant B_4\ln(e+|z|), \quad |\operatorname{Im} z|\leqslant\frac{1}{2}, \quad z\notin E_0\cup E,$$

где $p\in[1;|z|/2]$ — произвольное, а положительные постоянные A_0, M (те же, что и выше), B_4 не зависят от p и z. Учитывая, что V имеет минимальный тип при порядке 1, а обе функции $\ln|\varphi_1|$ и $\ln|\varphi|$ всюду в $\mathbb{C}$ мажорируются функцией $(H+\mathrm{const})$, и также малый размер исключительных множеств E_0 и E, из последней оценки и принципа Фрагмена—Линделефа выводим, что

$$\left(1-2^{-n_0}-\frac{A_0}{p}\right)V(z)\leqslant V_1(z)+B_5\ln(e+|z|)+Me^p, \quad z\in\mathbb{C}, \quad p\in[1;|z|/2], \tag{18}$$

где, как и выше, A_0, M, B_5 не зависят от z и p.

Выбирая в оценках (16) и (18) достаточно большое значение p и принимая во внимание лемму 1 для функции V, убеждаемся в том, что

$$\tilde{u}(|x|)-\tilde{a}\ln(e+|x|)\leqslant V_1(x)\leqslant\tilde{A}\tilde{u}(x)+\tilde{a}\ln(e+|x|), \quad x\in\mathbb{R}, \tag{19}$$

где $\tilde{u}(e^t)$ — наибольшая выпуклая миноранта функции $\min(V_1(e^t),V_1(-e^t))$, постоянные $\tilde{a}\geqslant 0$, $\tilde{A}\geqslant A$ не зависят от x, но зависят от выбранного p. При этом p выбираем по фиксированному $n_0\in\mathbb{N}$ из леммы 4 столь большим, что $2^{-n_0}<\tilde{A}^{-1}$.

Далее, в силу леммы 3 для всех z, лежащих в полосе $|\operatorname{Im} z| \leqslant 1/2$, но вне множества E_0, имеем

$$\Big|\ln|\nu_{1,n}(z)| - 2^{-n}\ln|\nu(z)|\Big| \leqslant \frac{A_0}{p}\Big(H(z) - \ln|\Phi(z)|\Big) + B\ln(e+|z|) + Me^p, \tag{20}$$

где $p \in [1;|z|/2]$ и положительные постоянные A_0, B, M такие же, как и в лемме 3.

Из (20) с учетом (4), (6), (16), получим оценку

$$\ln\big|\nu_{1,n_0}(z)\big| \leqslant \left(\left(1 - 2^{-n_0} + \frac{A_0}{p}\right)2^{-n_0} + \frac{A_0}{p}\right)\Big(H(z) - \ln|\varphi(z)|\Big) + B_6\ln(e+|z|) + 2Me^p$$

при $\operatorname{Im}|z| \leqslant 1/2$, $z \notin E_0 \cup E$. Из этой оценки, принципа Фрагмена—Линделефа для субгармонических функций, с учетом оценки (18), выводим, что

$$\ln\big|\nu_{1,n_0}(z)\big| \leqslant \left(\left(1 - 2^{-n_0} + \frac{A_0}{p}\right)2^{-n_0} + \frac{A_0}{p}\right)\left(1 - 2^{-n_0} - \frac{A_0}{p}\right)^{-1} V_1(z) + \\ + B_7\ln(e+|z|) + 3Me^p, \quad z \in \mathbb{C},$$

где положительные постоянные A_0, M (те же, что и выше) и B_7 не зависят от z и $p \in [1;|z|/2]$. Выбирая p таким, что

$$\left(\left(1 - 2^{-n_0} + \frac{A_0}{p}\right)2^{-n_0} + \frac{A_0}{p}\right)\left(1 - 2^{-n_0} - \frac{A_0}{p}\right)^{-1} < \tilde{A}^{-1},$$

и принимая во внимание правое неравенстов в (19), получим оценку

$$\ln\big|\nu_{1,n_0}(x)\big| \leqslant \tilde{u}(|x|) + B_7\ln(e+|z|) + 3Me^p, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Теперь, рассуждая так же, как при доказательстве леммы 2, и учитывая левую оценку в (19), заключаем, что $\varphi_2 = \nu_{1,n_0}\varphi_1 \in \mathcal{J}_{\varphi_1} \subset \mathcal{J}_\varphi$.

Данный процесс можно продолжить: применяя лемму 3 для функции $\chi = \Phi/\varphi_2$, получить представления $\chi = \chi_{1,n}\chi_{2,n}$, $n \in \mathbb{N}$, и соответствующие оценки; затем, рассуждая так же, как и выше, убедиться в том, что $\varphi_3 = \chi_{1,n_0}\varphi_2 \in \mathcal{J}_\varphi$, и т. д. Введем следующие обозначения:

$$\varphi_0 = \varphi, \quad \omega^{(1)} = \omega_{1,n_0}, \quad \varphi_1 = \omega^{(1)}\varphi_0, \quad f_k = \omega^{(1)}\ldots\omega^{(k)},$$

где $\omega^{(j)}$, $j = 2, 3, \ldots,$ — первый множитель расщепления функции Φ/φ_{j-1}, проведенного при помощи леммы 3 для $n = n_0$ на j-м шаге, $\varphi_k = f_k\varphi$. Результатом описанного процесса являются включения $\varphi_k \in \mathcal{J}_\varphi$, $k \in \mathbb{N}$. Согласно замечанию 2 для завершения доказательства теоремы достаточно установить, что $\omega_{2,n}\varphi \in \mathcal{J}_\varphi$ для всех $n \in \mathbb{N}$.

Из оценки (15) следует, что в полосе $|\operatorname{Im} z| \leqslant 1/2$, но вне множества E_0 имеем

$$\ln\big|\omega_{2,n}(z)\big| \leqslant (1 - 2^{-n})\ln|\omega(z)| + \frac{A_0}{p}\Big(H(z) - \ln|\Phi(z)|\Big) + B\ln(e+|z|) + Me^p. \tag{21}$$

Оценим функцию $\ln|f_k(z)|$ снизу в полосе $|\operatorname{Im} z| \leqslant 1/2$, но вне множества $E_0 \cup E$. Нетрудно вывести, что для каждого $j \in \mathbb{N}$ найдется такая постоянная $\widetilde{D}_j > 0$, что

$$\ln\big|\omega^{(j)}(z)\big| \geqslant 2^{-n_0}(1 - 2^{-n_0})^{j-1}\ln|\omega(z)| - \widetilde{D}_j\left[\frac{A_0}{p}\Big(H(z) - \ln|\Phi(z)|\Big) + B\ln(e+|z|) + Me^p\right], \\ |\operatorname{Im} z| \leqslant \frac{1}{2}, \quad z \notin E_0 \cup E,$$

где постоянные A_0, B и M — те же, что и в лемме 3. Поэтому для всех z, лежащих в полосе $|\operatorname{Im} z| \leqslant 1/2$, но вне множества $E_0 \cup E$, выполняется неравенство

$$\ln|f_k(z)| \geqslant \Big(1 - (1 - 2^{-n_0})^k\Big)\ln|\omega(z)| - D_k\left[\frac{A_0}{p}\Big(H(z) - \ln|\Phi(z)|\Big) + B\ln(e+|z|) + Me^p\right], \tag{22}$$

где

$$D_k = \sum_{j=1}^{k}\widetilde{D}_j.$$

Выберем и фиксируем $k_n \in \mathbb{N}$, для которого

$$1 - (1 - 2^{-n_0})^{k_n} > 1 - 2^{-n}.$$

Из (21) и (22), с учетом (6), получаем оценку

$$\ln\left|\omega_{2,n}(z)\right| - \ln\left|f_{k_n}(z)\right| \leqslant \\ \leqslant C_0 \ln(e+|z|) + (D_{k_n}+1)\left[\frac{A_0}{p}\Big(H(z) - \ln|\Phi(z)|\Big) + B\ln(e+|z|) + Me^p\right] \quad (23)$$

для всех z, лежащих в полосе $|\operatorname{Im} z| \leqslant 1/2$, но вне множества $E_0 \cup E$, положительная постоянная C_0 зависит от n и не зависит от z и $p \in [1; |z|/2]$.

В силу [5, § 3, замечание 2] включение $\omega_{2,n}\varphi \in \mathcal{J}_\varphi$ будет следовать из *b-насыщенности* подмодуля $\mathcal{J}_\varphi$ по отношению к функции $\omega_{2,n}\varphi$. Напомним, что подмодуль $\mathcal{J} \subset \mathcal{P}(a;b)$ *b-насыщен относительно функции* $\Psi \in \mathcal{P}(a;b)$, если существует ограниченное множество $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(a;b)$, для которого выполнена импликация: если целая функция F во всей комплексной плоскости удовлетворяет неравенству $\left|F(z)\psi(z)\right| \leqslant |\psi(z)| + |\Psi(z)|$ для любого элемента $\psi \in \mathcal{B} \cap \mathcal{J}$, то $F = \mathrm{const}$.

Рассмотрим одноэлементное (и потому ограниченное в $\mathcal{P}(a;b)$) множество $\mathcal{B} = \{z^{m_0} f_{k_n}\varphi\}$, где $m_0 \in \mathbb{N}$ — фиксированное число, зависящее от k_n, правило выбора которого будет определено ниже. Пусть F — произвольная целая функция, удовлетворяющая условию импликации b-насыщенности:

$$\left|F(z) z^{m_0} f_{k_n}\varphi(z)\right| \leqslant \left|z^{m_0} f_{k_n}\varphi(z)\right| + \left|\omega_{2,n}(z)\varphi(z)\right|, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Из этого неравенства следует, что F имеет нулевой экспоненциальный тип, а также, с учетом (23) при $p = (D_{k_n}+1)A_0$, что

$$|F(z)| \leqslant 1 + |z|^{-m_0} \exp\left(\Big(H(z) - \ln|\Phi(z)|\Big) + \Big((D_{k_n}+1)B + C_0\Big)\ln(e+|z|) + Me^{(D_{k_n}+1)A_0}\right), \\ |\operatorname{Im} z| \leqslant \frac{1}{2}, \quad z \notin E_0 \cup E.$$

Отсюда, выбирая m_0 достаточно большим, получаем, что в полосе $|\operatorname{Im} z| \leqslant 1/2$ верна оценка

$$\left|F(z)\Phi(z)\right| \leqslant \mathrm{const}\,. \quad (24)$$

Из этой оценки, рассуждая так же, как и при обосновании соотношения (5), выводим, что F — многочлен. В силу (5) и [3, теорема 2], $\Phi \notin \mathcal{P}_0(a;b)$. Поэтому найдутся такие постоянная $c_0 > 0$, натуральное число j_0 и последовательность точек $\{x_i\} \subset \mathbb{R}$, что

$$|x_i| \to +\infty, \quad |\Phi(x_i)| \geqslant c_0 |x_i|^{-j_0}, \quad i = 1, 2, \ldots.$$

Рассматривая изначально вместо функции Φ функцию $(z+1)^{j_0}\Phi$, можно считать, что $|\Phi(x_i)| \geqslant c_0$, $i \in \mathbb{N}$. Тогда из (24) следует, что $\{F(x_i)\}$ — ограниченная последовательность. Следовательно, $F = \mathrm{const}$, и подмодуль $\mathcal{J}_\varphi$ b-насыщен относительно функции $\omega_{2,n}\varphi$. Согласно упоминавшемуся выше критерию из [5], $\omega_{2,n}\varphi \in \mathcal{J}_\varphi$, $n \in \mathbb{N}$. Учитывая замечание 2, заключаем, что $\mathcal{J}_\varphi$ — слабо локализуемый подмодуль. □

2.2. Примеры выполнения условий теоремы 1. В этом пункте рассмотрим ситуации, в которых применима доказанная теорема 1.

Пусть

$$\Phi(z) = e^{icz} \lim_{R\to\infty} \prod_{|\lambda_n|<R} \left(1 - \frac{z}{\lambda_n}\right) \in \mathcal{P}(a;b)$$

— обратимая функция (определение приведено во Введении), подчиненная дополнительному требованию: существует правильно распределенная при некотором порядке $\rho_0 \in (0;1]$ подпоследовательность $\mathcal{M} = \{\mu_k\}$ последовательности $\Lambda_\Phi = \{\lambda_n\}$, лежащая в некоторой горизонтальной полосе

$$\Pi_\tau = \big\{z : \ |\operatorname{Im} z| < \tau\big\}$$

и являющаяся *R-множеством* (см. [7]):

$$|\mu_{k+1}| - |\mu_k| \geqslant d|\mu_k|^{1-\rho_0}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

при некотором $d > 0$.

Замечание 3. Функцией, удовлетворяющей перечисленным выше условиям, является, например, любая функция $\Phi = e^{icz}\Psi \in \mathcal{P}(a;b)$, где Ψ — функция типа синуса. Действительно, одно из требований в определении функции типа синуса — это оценка снизу на горизонтальной прямой

$$\big|\Psi(x + iy_0)\big| \geqslant c_0 > 0, \quad x \in \mathbb{R},$$

из которой следует обратимость Ψ, а значит, и Φ. Далее, множество нулей $\Lambda_\Phi = \{\lambda_n\}$ функции Φ, как совпадающее с множеством нулей функции типа синуса Ψ, обладает следующими свойствами: $\Lambda_\Phi \subset \Pi_\tau$ для некоторого $\tau > 0$, число точек λ_n в любом прямоугольнике

$$P_{t,C,h} = \big\{z = x + iy,\ t \leqslant x \leqslant t + C,\ |y| \leqslant \tau\big\}$$

не превосходит некоторой постоянной ν_C, зависящей только от функции Ψ и величины $C > 0$ (см. [8, Sec. 1]). Отсюда нетрудно вывести существование правильно распределенной при порядке $\rho_0 = 1$ подпоследовательности $\mathcal{M} \subset \Lambda_\Phi$, являющейся также R-множеством.

Положим

$$\Delta_0 = \lim_{r\to\infty} \frac{n_{\mathcal{M}}(r)}{r^{\rho_0}}.$$

Пусть числа $\rho \in (0; 1/2)$, $\Delta > 0$ удовлетворяют соотношению

$$\varliminf_{r\to\infty} \frac{\Delta_0}{\Delta} r^{\rho_0-\rho} > 1.$$

Из [9, теорема 1.2.3] и условия $\mathcal{M} \subset \Pi_\tau$ следует, что существуют подпоследовательность $\widetilde{\mathcal{M}}\{\tilde\mu_j\}$ последовательности $\mathcal{M}$ и положительное число $\tilde d$, для которых

$$\lim_{r\to\infty} \frac{n_{\widetilde{\mathcal{M}}}(r)}{r^\rho} = \Delta, \quad |\tilde\mu_{j+1}| - |\tilde\mu_j| \geqslant \tilde d|\tilde\mu_j|^{1-\rho}, \quad j = 1, 2, \dots.$$

Покажем, что функция

$$\tilde\varphi = \frac{\Phi}{\tilde\omega},$$

где

$$\tilde\omega(z) = \prod_{\tilde\mu_j \in \widetilde{\mathcal{M}}} \left(1 - \frac{z}{\tilde\mu_j}\right),$$

удовлетворяет условиям теоремы 1. Действительно, функция $\tilde\omega$ имеет во всей комплексной плоскости вполне регулярный рост при порядке $\rho \in (0; 1/2)$. Из известного асимптотического соотношения для функций вполне регулярного роста (см. [7, гл. II, теорема 1]) следует, что ее индикатор $h_{\tilde\omega}$ всюду положителен, т.е.

$$0 < h_0 \leqslant h_{\tilde\omega}(\theta) \leqslant h_1 < +\infty, \quad \theta \in [0; 2\pi].$$

Так как множество нулей функции $\tilde\omega$ есть R-множество, из [9, теорема 1.2.6 и следующее замечание] выводим, что существуют положительные постоянные C_1, C_2, для которых

$$\frac{h_0}{2}|z|^\rho - C_1 \leqslant \ln|\tilde\omega(z)| \leqslant 2h_1|z|^\rho + C_2; \tag{25}$$

при этом правое неравенство имеет место для всех $z \in \mathbb{C}$, а левое — для таких $z \in \mathbb{C}$, что

$$|z - \tilde\mu_j| \geqslant \delta > 0, \quad j = 1, 2, \dots.$$

Без ограничения общности можем считать, что

$$|\Phi(x)| \leqslant \text{const}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Оценка функции Φ снизу дается аналитическим критерием обратимости, принадлежащим Л. Эренпрайсу (см. [19, теорема I]): *функция $\Phi \in \mathcal{P}(a;b)$ обратима тогда и только тогда, когда* *существует положительное число a, обладающее следующим свойством: для каждого $x \in \mathbb{R}$ найдется такое $x' \in \mathbb{R}$, что*

$$|x - x'| \leqslant a \ln(1 + |x|), \quad \Phi(x') \geqslant (a + |x'|)^{-a}.$$

Из оценок (25) и оценок для функции Φ нетрудно вывести, что для функции $\tilde{\varphi}$ выполнены условия теоремы 1; при этом $u_*(x) \asymp |x|^\rho$, т.е.

$$m|x|^\rho \leqslant u_*(x) \leqslant M|x|^\rho, \quad x \in \mathbb{R},$$

где m, M — положительные постоянные.

Заметим, что если порядок ρ_0 функции

$$\omega(z) = \prod_{\mu_j \in \mathcal{M}} \left(1 - \frac{z}{\mu_j}\right)$$

меньше, чем $1/2$, то функция $\varphi = \Phi/\omega$ тоже удовлетворяет условиям теоремы 1.

3. Слабый спектральный синтез для D-инвариантных подпространств в пространстве $C^\infty(a;b)$. Пусть $W \subset C^\infty(a;b)$ — D-инвариантное подпространство с *дискретным спектром*, что означает (см. [16]) дискретность спектра $\sigma(W)$ сужения оператора дифференцирования $D : W \to W$. Обозначим через $\operatorname{Exp} W$ совокупность всех экспоненциальных одночленов $t^k e^{-i\lambda t}$, содержащихся в W, и пусть $I_W \subset (a;b)$ — минимальный среди промежутков $I \subset (a;b)$ со свойством

$$W_I := \Big\{ f \in C^\infty(a;b) : \ f \equiv 0 \text{ на } I \Big\} \subset W.$$

Говорят, что подпространство W допускает *слабый спектральный синтез*, если

$$W = \overline{W_{I_W} + \mathcal{L}(\operatorname{Exp} W)},$$

где $\mathcal{L}(\ \cdot\ )$ — линейная оболочка множества $(\ \cdot\ )$ (см. [1]). Вопрос о слабом спектральном синтезе изучался в [1, 15, 16].

Двойственный подход, сводящий задачу спектрального синтеза в $C^\infty(a;b)$ к задаче локального описания подмодулей в $\mathcal{P}(a;b)$, использовался нами в [1]. Пусть $\mathcal{J} = \mathcal{F}(W^0) \subset \mathcal{P}(a;b)$ — *аннуляторный подмодуль* подпространства W (смысл обозначений W^0, $\mathcal{F}$ разъяснен во введении). Тогда, согласно принципу двойственности, доказанному в [2, предложение 1],

$$I_W = (a;b) \cap \big[c_{\mathcal{J}}; d_{\mathcal{J}}\big], \quad \sigma(W) = \Lambda_{\mathcal{J}},$$

где $\Lambda_{\mathcal{J}} = \big\{(\lambda_j, k_j) : \ n_{\mathcal{J}}(\lambda_j) = k_j > 0\big\}$ — *нулевое множество* подмодуля $\mathcal{J}$. В [1] отмечалось, что D-инвариантное подпространство W допускает слабый спектральный синтез тогда и только тогда, когда его аннуляторный подмодуль слабо локализуем.

Напомним, что *радиус полноты* последовательности кратных точек $\Lambda = \{(\lambda_j, m_j)\}$ — это число ρ_c, равное инфимуму радиусов (открытых) интервалов $I \subset \mathbb{R}$, для которых система экспоненциальных одночленов $\{t^k e^{\lambda_j t},\ k = 0, \dots, m_j - 1,\ j = 1, 2, \dots\}$ не полна в пространствах $\mathcal{E}(I)$, $C(I)$, $L^p(I)$, $1 \leqslant p < \infty$ (см. [18]).

Из результатов работ [1, 15] следует, что если *радиус полноты* ρ_c кратной последовательности $\sigma(W) = \Lambda_{\mathcal{J}}$ меньше, чем половина длины промежутка I_W, то W допускает слабый спектральный синтез. Из цитированного выше принципа двойственности видно, что случай, когда величина ρ_c больше, чем половина длины промежутка I_W, тривиален: в этом случае аннуляторный подмодуль $\mathcal{J}$ содержит только нулевую функцию, и значит, $W = C^\infty(a;b)$. Пограничной является ситуация, когда величина ρ_c равна половине длины промежутка I_W. К D-инвариантным подпространствам W с таким свойством применим установленный нами в [1, теорема 3] критерий, дающий общие условия допустимости слабого спектрального синтеза. С другой стороны, для этого случая имеются примеры подпространств, не допускающих синтеза в слабом смысле (см. [15, теорема 1.2], [3, теорема 3]), причем все они были обнаружены среди подпространств, аннуляторный подмодуль которых — главный, т.е. среди подпространств вида

$$W_S = \Big\{ f \in C^\infty(a;b) : \ (S, D^k f) = 0,\ k = 0, 1, 2, \dots \Big\}, \tag{26}$$

где $S \in (C^\infty(a;b))'$ — фиксированный функционал.

Доказанная в предыдущем разделе теорема 1, с учетом описанной выше двойственности задач спектрального синтеза D-инвариантных подпространств в $C^\infty(a;b)$ и локального описания подмодулей в $\mathcal{P}(a;b)$, позволяет указать класс подпространств вида (26), допускающих слабый спектральный синтез.

Теорема 3. *Пусть W_S — D-инвариантное подпространство вида* (26)*, где $S \in C_0^\infty(a;b) \subset (C^\infty(a;b))'$. Если функция $\varphi = \mathcal{F}(S)$ удовлетворяет условию теоремы* 1*, то подпространство W допускает слабый спектральный синтез.*

Критерий, полученный в [1, теорема 3] и теорема 1 приводят к следующему утверждению.

Теорема 4. *Пусть W — D-инвариантное подпространство с дискретным спектром, для которого величина ρ_c равна половине длины промежутка I_W. Если среди функционалов, аннулирующих W, имеется такой функционал $S \in C_0^\infty(a;b)$, что функция $\varphi = \mathcal{F}(S)$ удовлетворяет условию теоремы* 1*, то подпространство W допускает слабый спектральный синтез.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Абузярова Н.Ф.* Спектральный синтез в пространстве Шварца бесконечно дифференцируемых функций// Докл. РАН. — 2014. — *457*, № 5. — С. 510–513.
2. *Абузярова Н. Ф.* Замкнутые подмодули в модуле целых функций экспоненциального типа и полиномиального роста на вещественной оси// Уфим. мат. ж. — 2014. — *6*, № 4. — С. 3–18.
3. *Абузярова Н. Ф.* Некоторые свойства главных подмодулей в модуле целых функций экспоненциального типа и полиномиального роста на вещественной оси// Уфим. мат. ж. — 2016. — *8*, № 1. — С. 3–14.
4. *Красичков-Терновский И. Ф.* Инвариантные подпространства аналитических функций. I. Спектральный синтез на выпуклых областях// Мат. сб. — 1972. — *87 (129)*, № 4. — С. 459–489.
5. *Красичков-Терновский И. Ф.* Локальное описание замкнутых идеалов и подмодулей аналитических функций одной переменной, I// Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1979. — *43*, № 1. — С. 44–66.
6. *Красичков-Терновский И. Ф.* Локальное описание замкнутых идеалов и подмодулей аналитических функций одной переменной, II// Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1979. — *43*, № 2. — С. 309–341.
7. *Левин Б. Я.* Распределение корней целых функций. — М.: ГИТТЛ, 1956.
8. *Левин Б. Я., Островский И. В.* О малых возмущениях множества корней функций типа синуса// Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1979. — *43*, № 1. — С. 87–110.
9. *Леонтьев А. Ф.* Ряды экспонент. — М.: Наука, 1976.
10. *Себастьян-и-Сильва Ж.* О некоторых классах ЛВП, важных в приложениях// Математика. Сб. переводов инстранных статей. — 1957. — *1*, № 1. — С. 60–77.
11. *Фаворов С. Ю.* О сложении индикаторов целых и субгармонических функций многих переменных// Мат. сб. — 1978. — *105 (147)*, № 1. — С. 128–140.
12. *Хермандер Л.* Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. 1. Теория распределений и анализ Фурье. — М.: Мир, 1986.
13. *Юлмухаметов Р. С.* Аппроксимация субгармонических функций// Anal. Math. — 1985. — *11*. — С. 257–282.
14. *Юлмухаметов Р. С.* Решение проблемы Л. Эренпрайса о факторизации// Мат. сб. — 1999. — *190*, № 4. — С. 123–157.
15. *Aleman A., Baranov A., Belov Yu.* Subspaces of C^∞ invariant under the differentiation// J. Funct. Anal. — 2015. — *268*. — С. 2421–2439.
16. *Aleman A., Korenblum B.* Derivation-invariant subspaces of C^∞// Comput. Methods Function Theory. — 2008. — *8*, № 2. — С. 493–512.
17. *Berenstein C. A., Taylor B. A.* A new look at interpolation theory for entire functions of one variable// Adv. Math. — 1980. — *33*. — С. 109–143.
18. *Beurling A., Malliavin P.* On the closure of characters and the zeros of entire functions// Acta Math. — 1967. — *118*, №№ 1-4. — С. 79-93.
19. *Ehrenpreis L.* Solution of some problems of division, IV// Am. J. Math. — 1960. — *57*. — С. 522–588.
20. *Koosis P.* The logarithmic integral I. — Cambridge Univ. Press, 1998.

21. *Levin B., Lyubarskii Yu., Sodin M., Tkachenko V.* Lectures on entire functions. — Providence, Rhode Island: Am. Math. Soc., 1996.

Н. Ф. Абузярова
Башкирский государственный университет, Уфа
E-mail: abnatf@gmail.com

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 142 (2017). С. 28–41

УДК 517.5; 517.956.225

КОНФОРМНО ИНВАРИАНТНЫЕ НЕРАВЕНСТВА

© 2017 г. **Ф. Г. АВХАДИЕВ**

Аннотация. Изучаются конформно инвариантные, интегральные неравенства типа Харди и Реллиха, когда весовые функции являются степенями коэффициента метрики Пуанкаре.

***Ключевые слова*:** интегральное неравенство, равномерно совершенное множество, метрика Пуанкаре, конформно инвариантный интеграл.

***AMS Subject Classification*:** 39B72; 30C20

1. Введение. Будем обозначать через $C_0^\infty(\Omega)$ семейство гладких функций $u : \Omega \to \mathbb{R}$ с компактными носителями в области Ω. Гладкость $u(z)$ в бесконечно удаленной точке $z = \infty$ понимается как гладкость $u(1/z)$ в точке $z = 0$.

Предположим, что Ω — область на расширенной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$ комплексной переменной $z = x + iy$, имеющая не менее трех граничных точек, т.е. является областью гиперболического типа. Тогда определен коэффициент метрики Пуанкаре $\lambda_\Omega(z)$ с гауссовой кривизной $\kappa = -4$.

Пусть $F : \Omega \to \Omega_\zeta \subset \overline{\mathbb{C}}$ — некоторое однолистное конформное отображение области Ω на область Ω_ζ. Введем обозначения $\zeta = F(z)$, $\zeta = \xi + i\eta \in \Omega_\zeta$. По определению гиперболической метрики дифференциальные элементы длины $\lambda_\Omega(z)|dz|$ и площади $\lambda_\Omega^2(z)\,dx\,dy$ являются конформно инвариантными величинами, т.е. имеют место тождества (см. [4, гл. 3])

$$\lambda_\Omega(z)|dz| \equiv \lambda_{\Omega_\zeta}(z)|d\zeta|, \quad \lambda_\Omega^2(z)\,dx\,dy \equiv \lambda_{\Omega_\zeta}^2(\zeta)\,d\xi\,d\eta,$$

где $z = x + iy \in \Omega$, $\zeta = F(z) = \xi + i\eta \in \Omega_\zeta$.

Как обычно, через Δu и ∇u будем обозначать соответственно лапласиан и градиент гладкой функции u. Нам также потребуется числовой параметр $p \in [1, \infty)$.

Хорошо известно, что интеграл Дирихле

$$\iint\limits_\Omega |\nabla u|^2\,dx\,dy := \iint\limits_\Omega \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] dx\,dy$$

является конформно инвариантной величиной.

С использованием свойств гиперболической метрики и равенства $|F'(z)|^2\,dx\,dy = d\xi\,d\eta$ легко показать, что конформно инвариантными величинами являются следующие интегралы:

$$\iint\limits_\Omega |u|^p \lambda_\Omega^2(z)\,dx\,dy, \quad \iint\limits_\Omega |\nabla u|^p \lambda_\Omega^{2-p}(z)\,dx\,dy, \quad \iint\limits_\Omega |\Delta u|^p \lambda_\Omega^{2-2p}(z)\,dx\,dy. \tag{1}$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 14-01-00351а), а также при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований и Правительства Республики Татарстан (проект № 15-41-02433).

В частности, для гладких функций $u \in C_0^\infty(\Omega)$ и $U := u \circ F^{-1} \in C_0^\infty(\Omega_\zeta)$ имеют место равенства

$$\iint\limits_{\Omega} |u|^p \, \lambda_\Omega^2(z) \, dx \, dy = \iint\limits_{\Omega_\zeta} |U|^p \, \lambda_{\Omega_\zeta}^2(\zeta) \, d\xi \, d\eta,$$

$$\iint\limits_{\Omega} |\nabla u|^p \, \lambda_\Omega^{2-p}(z) \, dx \, dy = \iint\limits_{\Omega_\zeta} |\nabla U|^p \, \lambda_{\Omega_\zeta}^{2-p}(\zeta) \, d\xi \, d\eta,$$

$$\iint\limits_{\Omega} |\Delta u|^p \, \lambda_\Omega^{2-2p}(z) \, dx \, dy = \iint\limits_{\Omega_\zeta} |\Delta U|^p \, \lambda_{\Omega_\zeta}^{2-2p}(\zeta) \, d\xi \, d\eta.$$

При выводе этих соотношений мы воспользовались следующими хорошо известными тождествами:

$$\Delta U = 4\frac{\partial^2 U(\zeta)}{\partial \zeta \, \partial \overline{\zeta}} = 4\frac{\partial^2 u(z)}{\partial z \, \partial \overline{z}} \, |F'(z)|^2 = (\Delta u) \, |F'(z)|^2,$$

$$\nabla U = 2\frac{\partial U(\zeta)}{\partial \overline{\zeta}} = 2\frac{\partial u(z)}{\partial \overline{z}} \, \overline{F'(z)} = (\nabla u) \, \overline{F'(z)}.$$

Неравенства для функций $u \in C_0^\infty(\Omega)$, содержащие интегралы вида (1), естественно называть конформно инвариантными неравенствами. Мы рассмотрим ряд таких конформно инвариантных неравенств. Основными из них являются следующие неравенства типа Харди и Реллиха:

$$\iint\limits_{\Omega} |\nabla u|^p \lambda_\Omega^{2-p}(z) \, dx \, dy \geqslant A_p(\Omega) \iint\limits_{\Omega} |u|^p \lambda_\Omega^2(z) \, dx \, dy \quad \forall u \in C_0^\infty(\Omega), \tag{2}$$

$$\iint\limits_{\Omega} \frac{|\Delta u|^p}{\lambda_\Omega^{2p-2}(z)} \, dx \, dy \geqslant B_p(\Omega) \iint\limits_{\Omega} |\nabla u|^p \lambda_\Omega^{2-p}(z) \, dx \, dy \quad \forall u \in C_0^\infty(\Omega), \tag{3}$$

$$\iint\limits_{\Omega} \frac{|\Delta u|^p}{\lambda_\Omega^{2p-2}(z)} \, dx \, dy \geqslant C_p(\Omega) \iint\limits_{\Omega} |u|^p \lambda_\Omega^2(z) \, dx \, dy \quad \forall u \in C_0^\infty(\Omega), \tag{4}$$

где $p \in [1, \infty)$ — фиксированный параметр.

Константы $A_p(\Omega)$, $B_p(\Omega)$, $C_p(\Omega)$ в этих неравенствах будем считать максимальными из возможных. А именно, полагаем

$$A_p(\Omega) = \inf_{\substack{u \in C_0^\infty(\Omega), \\ u \not\equiv 0}} \left(\left[\iint\limits_{\Omega} |\nabla u|^p \, \lambda_\Omega^{2-p}(z) \, dx \, dy \right] \Big/ \left[\iint\limits_{\Omega} |u|^p \, \lambda_\Omega^2(z) \, dx \, dy \right] \right),$$

$$B_p(\Omega) = \inf_{\substack{u \in C_0^\infty(\Omega), \\ u \not\equiv 0}} \left(\left[\iint\limits_{\Omega} |\Delta u|^p \, \lambda_\Omega^{2-2p}(z) \, dx \, dy \right] \Big/ \left[\iint\limits_{\Omega} |\nabla u|^p \, \lambda_\Omega^{2-p}(z) \, dx \, dy \right] \right),$$

$$C_p(\Omega) = \inf_{\substack{u \in C_0^\infty(\Omega), \\ u \not\equiv 0}} \left(\left[\iint\limits_{\Omega} |\Delta u|^p \, \lambda_\Omega^{2-2p}(z) \, dx \, dy \right] \Big/ \left[\iint\limits_{\Omega} |u|^p \, \lambda_\Omega^2(z) \, dx \, dy \right] \right).$$

Следовательно, константы $A_p(\Omega)$, $B_p(\Omega)$, $C_p(\Omega)$ в неравенствах (2)–(4) являются однозначно определенными, неотрицательными, конформно инвариантными величинами. В частности, имеют место равенства

$$A_p(\Omega) = A_p(\Omega_\zeta), \quad B_p(\Omega) = B_p(\Omega_\zeta), \quad C_p(\Omega) = C_p(\Omega_\zeta),$$

и неравенства

$$0 \leqslant A_p(\Omega) < \infty, \quad 0 \leqslant B_p(\Omega) < \infty, \quad 0 \leqslant C_p(\Omega) < \infty.$$

Конформно инвариантное неравенство (2) изучалось в ряде работ (см. [9, 10, 14] для $p = 2$, [1] для $p \in [1, \infty)$). В частности, доказаны два следующих утверждения.

Теорема А (см. [9, 14])**.** *Если $\Omega \subset \overline{\mathbb{C}}$ — односвязная или двусвязная область гиперболического типа, то $A_2(\Omega) = 1$.*

Теорема В (см. [9] для $p = 2$, [1] для $p \in [1, \infty)$)**.** *Пусть $p \in [1, \infty)$. Если $\Omega \subset \overline{\mathbb{C}}$ — область гиперболического типа с равномерно совершенной границей, то $A_p(\Omega) > 0$.*

Основная цель настоящей статьи — доказательство аналогов теорем А и В для новых констант $B_p(\Omega)$ и $C_p(\Omega)$.

2. Неравенства (3) и (4) при $p = 2$ и их обобщения для односвязных и двусвязных областей. В этом пункте мы получим аналоги теоремы А для констант $B_2(\Omega)$ и $C_2(\Omega)$. Докажем также неравенства, обобщающие (3) и (4) при $p = 2$.

Теорема 1. *Пусть $\Omega \subset \overline{\mathbb{C}}$ — односвязная область гиперболического типа, g — любое из однолистных конформных отображений области Ω на верхнюю полуплоскость*

$$H_+ = \{\zeta = \xi + i\eta \in \mathbb{C} : \eta > 0\}.$$

Тогда для любой вещественнозначной функции $u \in C_0^\infty(\Omega)$ имеют место неравенства

$$\iint\limits_{\Omega} \frac{|\Delta u|^2}{\lambda_\Omega^2(z)}\, dx\, dy \geqslant \iint\limits_{\Omega} |u|^2 \lambda_\Omega^2(z)\, dx\, dy + \frac{1}{2} \iint\limits_{\Omega} |u|^2 \left|\frac{g'(z)}{g(z)}\right|^2 dx\, dy, \tag{5}$$

$$\iint\limits_{\Omega} \frac{|\Delta u|^2}{\lambda_\Omega^2(z)}\, dx\, dy \geqslant \iint\limits_{\Omega} |\nabla u|^2\, dx\, dy + \frac{1}{4} \iint\limits_{\Omega} |u|^2 \left|\frac{g'(z)}{g(z)}\right|^2 dx\, dy, \tag{6}$$

где $z = x + iy$.

Доказательство теоремы 1. Пусть u — вещественнозначная функция, $u \in C_0^\infty(\Omega)$. Предположим также, что $u \not\equiv 0$, так как для $u \equiv 0$ неравенства (5) и (6) тривиальны. Пользуясь формулой Грина

$$-\iint\limits_{\Omega} u \Delta u\, dx\, dy = \iint\limits_{\Omega} |\nabla u|^2\, dx\, dy$$

и элементарным неравенством вида $a^2 + b^2 \geqslant 2ab$ при

$$a = |u(z)|\, \lambda_\Omega(z), \quad b = |\Delta u(z)|\, \lambda_\Omega^{-1}(z),$$

получаем неравенство

$$\frac{1}{2} \iint\limits_{\Omega} |\Delta u|^2\, \lambda_\Omega^{-2}(z)\, dx\, dy + \frac{1}{2} \iint\limits_{\Omega} |u|^2 \lambda_\Omega^2(z)\, dx\, dy \geqslant \iint\limits_{\Omega} |\nabla u|^2\, dx\, dy. \tag{7}$$

Нам потребуется следующее утверждение (см. [1, теорема 1], где использовано обозначение $R(z, \Omega) = 1/\lambda_\Omega(z)$).

Теорема С. *Если Ω — односвязная область гиперболического типа, то для любой вещественнозначной функции $u \in C_0^\infty(\Omega)$ имеет место неравенство*

$$\iint\limits_{\Omega} |\nabla u|^2\, dx\, dy \geqslant \iint\limits_{\Omega} |u|^2 \lambda_\Omega^2(z)\, dx\, dy + \frac{1}{4} \iint\limits_{\Omega} |u|^2 \left|\frac{g'(z)}{g(z)}\right|^2 dx\, dy, \tag{8}$$

где $z = x + iy$, g — любое из однолистных конформных отображений области Ω на верхнюю полуплоскость.

Из формул (7) и (8) следует, что справедливы неравенства

$$\frac{1}{2} \iint\limits_{\Omega} |\Delta u|^2\, \lambda_\Omega^{-2}(z)\, dx\, dy \geqslant \frac{1}{2} \iint\limits_{\Omega} |u|^2 \lambda_\Omega^2(z)\, dx\, dy + \frac{1}{4} \iint\limits_{\Omega} |u|^2 \left|\frac{g'(z)}{g(z)}\right|^2 dx\, dy,$$

$$\frac{1}{2} \iint\limits_{\Omega} |\Delta u|^2\, \lambda_\Omega^{-2}(z)\, dx\, dy \geqslant \frac{1}{2} \iint\limits_{\Omega} |\nabla u|^2\, dx\, dy + \frac{1}{8} \iint\limits_{\Omega} |u|^2 \left|\frac{g'(z)}{g(z)}\right|^2 dx\, dy.$$

Умножая обе части этих неравенств на 2, получаем неравенства (5) и (6). Этим завершается доказательство теоремы 1. □

Пусть $\operatorname{dist}(z, \partial\Omega)$ — расстояние от точки z до границы области Ω. Для выпуклой области

$$\frac{1}{\lambda_\Omega(z)} \leqslant 2 \operatorname{dist}(z, \partial\Omega), \quad z \in \Omega,$$

в силу теоремы Левнера (см., например, [4, 5]). Поэтому справедливо следующее утверждение.

Следствие 1. *Пусть $\Omega \subset \mathbb{C}$ — выпуклая область, не совпадающая со всей плоскостью, g — любое из однолистных конформных отображений области Ω на верхнюю полуплоскость H_+. Тогда для любой вещественнозначной функции $u \in C_0^\infty(\Omega)$ имеют место неравенства*

$$\iint\limits_\Omega \operatorname{dist}^2(z, \partial\Omega) |\Delta u|^2 \, dx \, dy \geqslant \frac{1}{16} \iint\limits_\Omega \frac{|u|^2}{\operatorname{dist}^2(z, \partial\Omega)} \, dx \, dy + \frac{1}{8} \iint\limits_\Omega |u|^2 \left| \frac{g'(z)}{g(z)} \right|^2 dx \, dy,$$

$$\iint\limits_\Omega \operatorname{dist}^2(z, \partial\Omega) |\Delta u|^2 \, dx \, dy \geqslant \frac{1}{4} \iint\limits_\Omega |\nabla u|^2 \, dx \, dy + \frac{1}{16} \iint\limits_\Omega |u|^2 \left| \frac{g'(z)}{g(z)} \right|^2 dx \, dy,$$

где $z = x + iy$.

Для односвязной области $\Omega \subset \mathbb{C}$

$$\frac{1}{\lambda_\Omega(z)} \leqslant 4 \operatorname{dist}(z, \partial\Omega), \quad z \in \Omega,$$

в силу теоремы Кебе «об одной четвертой» (см. [4]). Поэтому имеет место следующее утверждение.

Следствие 2. *Пусть $\Omega \subset \mathbb{C}$ — односвязная область, не совпадающая со всей плоскостью, g — любое из однолистных конформных отображений области Ω на верхнюю полуплоскость H_+. Тогда для любой вещественнозначной функции $u \in C_0^\infty(\Omega)$ имеют место неравенства*

$$\iint\limits_\Omega \operatorname{dist}^2(z, \partial\Omega) |\Delta u|^2 \, dx \, dy \geqslant \frac{1}{256} \iint\limits_\Omega \frac{|u|^2}{\operatorname{dist}^2(z, \partial\Omega)} \, dx \, dy + \frac{1}{32} \iint\limits_\Omega |u|^2 \left| \frac{g'(z)}{g(z)} \right|^2 dx \, dy,$$

$$\iint\limits_\Omega \operatorname{dist}^2(z, \partial\Omega) |\Delta u|^2 \, dx \, dy \geqslant \frac{1}{16} \iint\limits_\Omega |\nabla u|^2 \, dx \, dy + \frac{1}{64} \iint\limits_\Omega |u|^2 \left| \frac{g'(z)}{g(z)} \right|^2 dx \, dy,$$

где $z = x + iy$.

Теорема 2. *Для любой односвязной области Ω гиперболического типа*

$$B_2(\Omega) = 1, \quad C_2(\Omega) = 1.$$

А именно, если Ω — односвязная область гиперболического типа, то имеют место неравенства

$$\iint\limits_\Omega \frac{|\Delta u|^2}{\lambda_\Omega^2(z)} \, dx \, dy \geqslant \iint\limits_\Omega |u|^2 \lambda_\Omega^2(z) \, dx \, dy \quad \forall u \in C_0^\infty(\Omega), \tag{9}$$

$$\iint\limits_\Omega \frac{|\Delta u|^2}{\lambda_\Omega^2(z)} \, dx \, dy \geqslant \iint\limits_\Omega |\nabla u|^2 \, dx \, dy \quad \forall u \in C_0^\infty(\Omega), \tag{10}$$

и, кроме того, для любого $\varepsilon > 0$ существуют такие функции $u_1 \in C_0^\infty(\Omega)$, $u_2 \in C_0^\infty(\Omega)$, что

$$\iint\limits_\Omega \frac{|\Delta u_1|^2}{\lambda_\Omega^2(z)} \, dx \, dy < (1 + \varepsilon) \iint\limits_\Omega |u_1|^2 \lambda_\Omega^2(z) \, dx \, dy, \tag{11}$$

$$\iint\limits_\Omega \frac{|\Delta u_2|^2}{\lambda_\Omega^2(z)} \, dx \, dy < (1 + \varepsilon) \iint\limits_\Omega |\nabla u_2|^2 \, dx \, dy. \tag{12}$$

Доказательство теоремы 2. Неравенства (9) и (10) являются простыми следствиями (5) и (6), соответственно. Сравнивая (9) и (10) с неравенствами (3) и (4) при $p = 2$ и учитывая определение констант как максимальных величин, допустимых в соответствующих вариационных неравенствах, получаем оценки $B_2(\Omega) \geqslant 1$ и $C_2(\Omega) \geqslant 1$.

В силу произвольности $\varepsilon > 0$ неравенства (11) и (12) эквивалентны противоположным оценкам $B_2(\Omega) \leqslant 1$ и $C_2(\Omega) \leqslant 1$. Чтобы убедиться в справедливости оценок $B_2(\Omega) \leqslant 1$ и $C_2(\Omega) \leqslant 1$, достаточно рассмотреть случай, когда область $\Omega = H_+ = \{x + iy \in \mathbb{C} : y > 0\}$ — верхняя полуплоскость, так как рассматриваемые неравенства являются конформно инвариантными. Нам потребуется известная формула $\lambda_{H_+}(x + iy) \equiv 1/(2y)$.

Предположим, что $B_2(H_+) = 1 + \varepsilon_0 > 1$. Тогда

$$\iint\limits_{H_+} y^2 |\Delta u|^2 \, dx\, dy \geqslant \frac{1+\varepsilon_0}{16} \iint\limits_{H_+} \frac{|u|^2}{y^2} \, dx\, dy \quad \forall u \in C_0^\infty(H_+).$$

Но это неравенство, как показано нами в [2, лемма 3, теорема 4], справедливо лишь при условии $\varepsilon_0 = 0$. Этим и завершается обоснование равенства $B_2(\Omega) = 1$.

Предположим теперь, что $C_2(H_+) = 1 + \varepsilon_0 > 1$. Тогда

$$\iint\limits_{H_+} y^2 |\Delta u|^2 \, dx\, dy \geqslant \frac{1+\varepsilon_0}{4} \iint\limits_{H_+} |\nabla u|^2 \, dx\, dy \quad \forall u \in C_0^\infty(H_+). \tag{13}$$

Покажем, что это неравенство справедливо лишь при условии $\varepsilon_0 = 0$. С этой целью выберем функции $u \in C_0^\infty(H_+)$ специальным образом.

Пусть a — произвольная положительная постоянная, а φ_0 — такая четная функция, что $\varphi_0 \in C_0^\infty(-1, 1)$, $\varphi_0(0) = 1$. Определим функцию $\varphi_a \in C_0^\infty(-\infty, \infty)$ следующими условиями: φ_a — четная функция,

$$\varphi_a(x) \equiv \begin{cases} 1, & 0 \leqslant x \leqslant a, \\ \varphi_0(x - a), & a < x < a + 1, \\ 0, & a + 1 \leqslant x < \infty. \end{cases}$$

Положим $u_a(x + iy) \equiv \varphi_a(x)\, \psi(y)$, где $\psi \in C_0^\infty(0, \infty)$. Применим неравенство (13) к функции $u = u_a$ и разделим полученное соотношение на $2a$. После простых преобразований, связанных с переходом к повторным интегралам и с применением равенств вида

$$\int\limits_{-a}^{a} dx = 2a, \qquad \int\limits_{a}^{a+1} \Phi(x, y)\, dx = \int\limits_{0}^{1} \Phi(x + a, y)\, dx,$$

будем иметь неравенство

$$\int\limits_0^\infty y^2 \left|\psi''(y)\right|^2 dy \geqslant \frac{1+\varepsilon_0}{4} \int\limits_0^\infty \left|\psi'(y)\right|^2 dy + \frac{X}{2a}, \tag{14}$$

где

$$X = -2 \int\limits_0^\infty y^2 dy \int\limits_0^1 \left|\varphi_0(x)\psi''(y) + \psi(y)\varphi_0''(x)\right|^2 \, dx + 2 \int\limits_0^\infty dy \int\limits_0^1 \left[\left|\varphi_0(x)\psi'(y)\right|^2 + \left|\psi(y)\varphi_0'(x)\right|^2\right] dx.$$

Поскольку X не зависит от a, то $X/(2a) \to 0$ при $a \to \infty$ для произвольных, но фиксированных функций $\varphi_0 \in C_0^\infty(-1, 1)$ и $\psi \in C_0^\infty(0, \infty)$. Поэтому из (14) следует, что

$$\int\limits_0^\infty y^2 \left|\psi''(y)\right|^2 dy \geqslant \frac{1+\varepsilon_0}{4} \int\limits_0^\infty \left|\psi'(y)\right|^2 dy \quad \forall \psi \in C_0^\infty(0, \infty). \tag{15}$$

Для любого $\gamma > 0$ функция

$$\psi_\gamma(y) = \begin{cases} 1, & 0 < y < 1, \\ y^{1/2-\gamma}, & 1 \leqslant y < \infty, \end{cases}$$

принадлежит замыканию семейства $C_0^\infty(0,\infty)$ по норме

$$\|\psi\| = \sqrt{\int\limits_0^\infty |\psi'(y)|^2\,dy} + \sqrt{\int\limits_0^\infty y^2\,|\psi''(y)|^2\,dy}.$$

Поэтому неравенство (15) должно выполняться и для функции ψ_γ с параметром $\gamma > 0$. Применяя (15) к функции ψ_γ и переходя к пределу при $\gamma \to 0$, получаем, что

$$\frac{1}{16} = \lim_{\gamma\to 0} 2\gamma \int\limits_0^\infty y^2\,\left|\psi_\gamma''(y)\right|^2 dy \geqslant \frac{1+\varepsilon_0}{4} \lim_{\gamma\to 0} 2\gamma \int\limits_0^\infty \left|\psi_\gamma'(y)\right|^2 dy = \frac{1+\varepsilon_0}{16}.$$

Полученное неравенство противоречит нашему допущению о том, что $\varepsilon_0 > 0$. Этим и завершается доказательство равенства $C_2(\Omega) = 1$ для любой односвязной области Ω. Теорема 2 доказана. □

Теорема 3. *Пусть* $\Omega \subset \overline{\mathbb{C}}$ *— двусвязная область гиперболического типа с модулем* $M = M(\Omega) \in (0,\infty]$, g *— однолистное конформное отображение области* Ω *на кольцо*

$$K(0;q,1) = \{\zeta \in \mathbb{C} : q < |\zeta| < 1\},$$

где $q = \exp(-2\pi M(\Omega)) \in [0,1)$. *Тогда для любой вещественнозначной функции* $u \in C_0^\infty(\Omega)$ *имеют место неравенства*

$$\iint\limits_\Omega \frac{|\Delta u|^2}{\lambda_\Omega^2(z)}\,dx\,dy \geqslant \iint\limits_\Omega |u|^2 \lambda_\Omega^2(z)\,dx\,dy + \frac{1}{8M^2} \iint\limits_\Omega |u|^2 \left|\frac{g'(z)}{g(z)}\right|^2 dx\,dy, \tag{16}$$

$$\iint\limits_\Omega \frac{|\Delta u|^2}{\lambda_\Omega^2(z)}\,dx\,dy \geqslant \iint\limits_\Omega |\nabla u|^2\,dx\,dy + \frac{1}{16M^2} \iint\limits_\Omega |u|^2 \left|\frac{g'(z)}{g(z)}\right|^2 dx\,dy, \tag{17}$$

где $M = M(\Omega)$, $z = x + iy$. *Если* $M = M(\Omega) = \infty$, *то в неравенствах* (16) *и* (17) *полагаем, что* $1/M^2 = 0$.

Доказательство теоремы 3. Пусть u — вещественнозначная функция, $u \in C_0^\infty(\Omega)$. Пользуясь формулой Грина, так же, как и при доказательстве теоремы 1, мы показываем, что справедливо неравенство (7). Далее, мы привлекаем следующее утверждение.

Теорема D (см. [1, теорема 1, п. 2]). *Если* Ω *— двусвязная область гиперболического типа с модулем* $M = M(\Omega)$, *то для любой вещественнозначной функции* $u \in C_0^\infty(\Omega)$ *имеет место неравенство*

$$\iint\limits_\Omega |\nabla u|^2\,dx\,dy \geqslant \iint\limits_\Omega |u|^2 \lambda_\Omega^2(z)\,dx\,dy + \frac{1}{16\,M^2} \iint\limits_\Omega |u|^2 \left|\frac{g'(z)}{g(z)}\right|^2 dx\,dy, \tag{18}$$

где $z = x + iy$, g *— однолистное конформное отображение* Ω *на кольцо* $K(0;q,1) = \{\zeta \in \mathbb{C} :\ q < |\zeta| < 1\}$, $q = \exp(-2\pi M(\Omega))$.

Нетрудно видеть, что неравенства (16) и (17) являются простыми следствиями системы неравенств (7) и (18). Теорема 3 доказана. □

Теорема 4. *Для любой двусвязной области* Ω *гиперболического типа*

$$B_2(\Omega) = 1, \quad C_2(\Omega) = 1.$$

А именно, если Ω *— двусвязная область гиперболического типа, то имеют место неравенства* (9) *и* (10); *кроме того, для любого* $\varepsilon > 0$ *существуют такие функции* $u_1 \in C_0^\infty(\Omega)$, $u_2 \in C_0^\infty(\Omega)$, *что имеют место неравенства* (11) *и* (12).

Доказательство теоремы 4. Фактически нужно доказать четыре следующих утверждения:

$$B_2(\Omega) \geqslant 1, \quad C_2(\Omega) \geqslant 1, \quad B_2(\Omega) \leqslant 1, \quad C_2(\Omega) \leqslant 1.$$

Неравенства $B_2(\Omega) \geqslant 1$ и $C_2(\Omega) \geqslant 1$ являются простыми следствиями (16) и (17) и определений констант как максимальных величин, допустимых в соответствующих вариационных неравенствах.

Неравенства $B_2(\Omega) \leqslant 1$ и $C_2(\Omega) \leqslant 1$ докажем от противного. Предположим, что $B_2(\Omega) > 1$ для некоторой двусвязной области гиперболического типа с модулем $M = M(\Omega) \in (0, \infty]$. Тогда

$$B_2(\Omega) = B_2(\Omega_q) > 1,$$

где $q = \exp(-2\pi M(\Omega)) \in [0, 1)$ и

$$\Omega_q = K(0; q, 1) = \{z \in \mathbb{C} : q < |z| < 1\}.$$

Следовательно, $B_2(\Omega_q) = 1 + \varepsilon_0 > 1$, и справедливо неравенство

$$\iint\limits_{\Omega_q} \frac{|\Delta u|^2}{\lambda^2_{\Omega_q}(z)}\, dx\, dy \geqslant (1 + \varepsilon_0) \iint\limits_{\Omega_q} |u|^2 \lambda^2_{\Omega_q}(z)\, dx\, dy \quad \forall u \in C_0^\infty(\Omega_q). \tag{19}$$

Покажем, что это неравенство справедливо лишь при условии $\varepsilon_0 = 0$. С этой целью перейдем к полярным координатам и выберем функции $u \in C_0^\infty(\Omega_q)$, зависящие лишь от радиуса $r = |z| \in (q, 1)$, т.е. положим $u(z) \equiv \psi(|z|)$, где $\psi \in C_0^\infty(q, 1)$.

Будем пользоваться хорошо известными явными формулами для коэффициента гиперболической метрики $\lambda_{\Omega_q}(z)$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda_{\Omega_q}(z)} &:= \rho_q(|z|) = \frac{2\,|z|\, \ln(1/q)}{\pi}\, \sin \frac{\pi \ln |z|}{\ln q}, && q \in (0, 1), \quad z \in \Omega_q, \\ \frac{1}{\lambda_{\Omega_0}(z)} &:= \rho_0(|z|) = 2\,|z|\, \ln(1/|z|) && q = 0, \qquad z \in \Omega_q. \end{aligned}$$

Из формулы (19) следует, что для любой функции $\psi \in C_0^\infty(q, 1)$

$$\int\limits_q^1 \rho_q^2(r)\, \left|\psi''(r) + r^{-1}\psi'(r)\right|^2\, r\, dr \geqslant (1 + \varepsilon_0) \int\limits_q^1 \frac{|\psi(r)|^2}{\rho_q^2(r)}\, r\, dr. \tag{20}$$

Ясно, что неравенство должно выполняться и для любой функции ψ_{ab}, которая принадлежит замыканию семейства $C_0^\infty(q, 1)$ по норме

$$\|\psi\| = \sqrt{\int\limits_q^1 \rho_q^2(r)\, |\psi''(r) + r^{-1}\psi'(r)|^2\, r\, dr} + \sqrt{\int\limits_q^1 \frac{|\psi(r)|^2}{\rho_q^2(r)}\, r\, dr}.$$

Пусть параметры a и b удовлетворяют неравенствам $a \in (0, 1/2)$, $b \in (0, 1/3 - q/3)$ и пусть

$$\psi_{ab}(r) = \begin{cases} \dfrac{(r - q)^2}{b^2} & \text{при } q < r < q + b, \\ 1 & \text{при } q + b \leqslant r \leqslant 1 - b, \\ \dfrac{(1 - r)^{1/2 + a}}{b^{1/2 + a}} & \text{при } 1 - b < r < 1. \end{cases}$$

Подставим $\psi(r) = \psi_{ab}(r)$ в неравенство (20), умножим обе части полученного неравенства на b и перейдем к пределу при $b \to 0$. Получим неравенство

$$X \geqslant (1 + \varepsilon_0) Y,$$

где

$$X = \lim_{b\to 0} b \int_q^1 \rho_q^2(r)\, \left|\psi''_{ab}(r) + r^{-1}\psi'_{ab}(r)\right|^2\, r\,dr = \lim_{b\to 0} b \int_{1-b}^1 \rho_q^2(r)\, \left|\psi''_{ab}(r) + r^{-1}\psi'_{ab}(r)\right|^2\, r\,dr =$$

$$= \lim_{b\to 0} b \int_{1-b}^1 4(1-r)^2\, \left|\psi''_{ab}(r) + r^{-1}\psi'_{ab}(r)\right|^2\, r\,dr = \lim_{b\to 0} \frac{4(1/4 - a^2)^2}{b^{2a}} \int_{1-b}^1 (1-r)^{-1+2a}\,dr = \frac{2(1/4-a^2)^2}{a},$$

$$Y = \lim_{b\to 0} b \int_q^1 \frac{|\psi_{ab}(r)|^2}{\rho_q^2(r)}\, r\,dr = \lim_{b\to 0} b \int_{1-b}^1 \frac{|\psi_{ab}(r)|^2}{4(1-r)^2}\,dr = \lim_{b\to 0} \frac{1}{4b^{2a}} \int_{1-b}^1 (1-r)^{-1+2a}\,dr = \frac{1}{8a}.$$

Следовательно, будем иметь

$$2\left(\frac14 - a^2\right)^2 \frac1a \geqslant \frac{1+\varepsilon_0}{8a}.$$

Умножая обе части этого неравенства на $8a$ и переходя к пределу при $a \to 0$, получаем неравенство $1 \geqslant 1+\varepsilon_0$, которое противоречит нашему допущению $\varepsilon_0 > 0$. Следовательно, $B_2(\Omega) \leqslant 1$ для любой двусвязной области гиперболического типа.

Предположим теперь, что $C_2(\Omega) > 1$ для некоторой двусвязной области гиперболического типа с модулем $M = M(\Omega) \in (0,\infty]$. Тогда

$$C_2(\Omega) = C_2(\Omega_q) = 1 + \varepsilon_0 > 1,$$

где $\Omega_q = K(0; q, 1) = \{z \in \mathbb{C} : q < |z| < 1\}$, $q = \exp(-2\pi M(\Omega)) \in [0,1)$.

Поэтому справедливо неравенство

$$\iint_{\Omega_q} \frac{|\Delta u|^2}{\lambda^2_{\Omega_q}(z)}\,dx\,dy \geqslant (1+\varepsilon_0) \iint_{\Omega_q} |\nabla u|^2\,dx\,dy \quad \forall u \in C_0^\infty(\Omega_q).$$

Рассуждая так же, как и в предыдущем случае, получаем, что для любой функции $\psi \in C_0^\infty(q,1)$

$$\int_q^1 \rho_q^2(r)\, \left|\psi''(r) + r^{-1}\psi'(r)\right|^2\, r\,dr \geqslant (1+\varepsilon_0) \int_q^1 \left|\psi'(r)\right|^2 r\,dr.$$

Отсюда следует неравенство

$$X \geqslant (1+\varepsilon_0) Y_1,$$

где

$$X = \lim_{b\to 0} b \int_q^1 \rho_q^2(r)\, \left|\psi''_{ab}(r) + r^{-1}\psi'_{ab}(r)\right|^2\, r\,dr = \frac2a \left(\frac14 - a^2\right)^2,$$

$$Y_1 = \lim_{b\to 0} b \int_q^1 \left|\psi'_{ab}(r)\right|^2\, r\,dr = \lim_{b\to 0} b \int_{1-b}^1 \left|\psi'_{ab}(r)\right|^2\,dr = \frac{1}{2a}\left(\frac12 + a\right)^2,$$

и поэтому

$$\frac2a \left(\frac14 - a^2\right)^2 \geqslant \frac{1+\varepsilon_0}{2a}\left(\frac12 + a\right)^2.$$

Умножим обе части этого неравенства на $8a$ и перейдем к пределу при $a \to 0$. Получаемое неравенство $1 \geqslant 1+\varepsilon_0$ противоречит допущению $\varepsilon_0 > 0$. Следовательно, $C_2(\Omega) \leqslant 1$ для любой двусвязной области гиперболического типа. Таким образом, теорема 4 доказана полностью. $\square$

3. Области с равномерно совершенными границами и оценки констант $B_2(\Omega)$ и $C_2(\Omega)$. Нам потребуются некоторые определения. Напомним сначала, что величина $M(K) = (2\pi)^{-1}\ln(r_2/r_1)$ называется конформным модулем кольца $K = \{z \in \mathbb{C} : r_1 < |z - z_0| < r_2\}$, $0 < r_1 < r_2 < \infty$. Если $r_1 = 0$ или $r_2 = \infty$, то модуль такого кольца считается равным бесконечности.

Если Ω' является двусвязной областью, конформно эквивалентной кольцу $K = \{z \in \mathbb{C} : r_1 < |z - z_0| < r_2\}$, то, по определению конформного модуля $M(\Omega') = M(K)$.

Следуя [8] (см. также [4]), определим максимальный модуль $M(\Omega)$ для любой области $\Omega \subset \overline{\mathbb{C}}$ гиперболического типа.

1) Если Ω является односвязной областью гиперболического типа, то полагаем $M(\Omega) = 0$.
2) Если Ω является двусвязной областью гиперболического типа, то полагаем, что максимальный модуль равен конформному модулю $M(\Omega)$ этой области.
3) Пусть Ω — область, имеющая три или более граничных компонент. Тогда максимальный модуль $M(\Omega)$ — точная верхняя граница конформных модулей двусвязных подобластей $\Omega' \subset \Omega$, разделяющих границу области Ω.

Говорят (см. [4, 7, 8, 11–13]), что граница области $\Omega \subset \overline{\mathbb{C}}$ гиперболического типа является *равномерно совершенной*, если $M(\Omega) < \infty$.

Очевидно, если области Ω_1 и Ω_2 конформно эквивалентны, то $M(\Omega_1) = M(\Omega_2)$. Таким образом, равномерная совершенность границы области является конформно инвариантным свойством. Отметим также, что имеется более десяти нетривиальных критериев равномерной совершенности границы области (см. [2, 4, 7, 8, 11–13]). Например, для любой области $\Omega \subset \mathbb{C}$ гиперболического типа (см. [7, 11–13])

$$M(\Omega) < \infty \iff \inf_{z\in\Omega} [\operatorname{dist}(z, \partial\Omega)\, \lambda_\Omega(z)] > 0.$$

Нетрудно установить, что граница любой конечносвязной области равномерно совершенна тогда и только тогда, когда она является совершенным компактом в $\overline{\mathbb{C}}$. Существуют простые примеры (см. [2, 3]) бесконечносвязных областей $\Omega \subset \mathbb{C}$, границы которых являются совершенными, но не являются равномерно совершенными множествами.

Известно (см. [10]), что существуют области гиперболического типа, для которых $A_2(\Omega) = 0$, т.е. существуют области $\Omega \subset \overline{\mathbb{C}}$, для которых неравенство (2) при $p = 2$ не является содержательным. Например, $A_2(\Omega) = 0$, если граница области состоит из конечного числа точек. Если $A_2(\Omega) = 0$, то граница такой области должна содержать не менее трех компонент в силу теоремы A.

Для случая $p = 2$ справедлив следующий аналог теоремы B.

Теорема 5. *Если $\Omega \subset \overline{\mathbb{C}}$ — область гиперболического типа с равномерно совершенной границей, то $B_2(\Omega) > 0$ и $C_2(\Omega) > 0$.*

Доказательство теоремы 5. Для односвязных и двусвязных областей теорема 5 является простым следствием теорем 2 и 4. Поэтому будем считать, что граница области $\Omega \subset \overline{\mathbb{C}}$ имеет три или более граничных компонент и является равномерно совершенным множеством. Тогда $A_2(\Omega) > 0$ по теореме B, и для любой функции $u \in C_0^\infty(\Omega)$ мы можем записать неравенство

$$\iint\limits_\Omega |\nabla u|^2\, dx\, dy \geqslant \frac{1}{2}\iint\limits_\Omega |\nabla u|^2\, dx\, dy + \frac{A_2(\Omega)}{2}\iint\limits_\Omega |u|^2 \lambda_\Omega^2(z)\, dx\, dy. \tag{21}$$

Пусть $u \in C_0^\infty(\Omega)$. Пользуясь формулой Грина

$$\iint\limits_\Omega \left(|\nabla u|^2 + u\Delta u\right)\, dx\, dy = 0$$

и элементарным неравенством вида $2ab \leqslant \alpha a^2 + b^2/\alpha$, где

$$\alpha = A_2(\Omega), \quad a = |u(z)|\, \lambda_\Omega(z), \quad b = |\Delta u(z)|\, \lambda_\Omega^{-1}(z),$$

получаем неравенство

$$\frac{1}{2\,A_2(\Omega)}\iint\limits_{\Omega}\frac{|\Delta u|^2}{\lambda_\Omega^2(z)}\,dx\,dy+\frac{A_2(\Omega)}{2}\iint\limits_{\Omega}|u|^2\lambda_\Omega^2(z)\,dx\,dy\geqslant\iint\limits_{\Omega}|\nabla u|^2\,dx\,dy.$$

Отсюда и из (21) следует, что

$$\iint\limits_{\Omega}\frac{|\Delta u|^2}{\lambda_\Omega^2(z)}\,dx\,dy\geqslant A_2(\Omega)\iint\limits_{\Omega}|\nabla u|^2\,dx\,dy\quad\forall u\in C_0^\infty(\Omega).\tag{22}$$

По определению, $B_2(\Omega)$ является максимальной константой в неравенстве (3) при $p=2$. Поэтому (22) влечет оценку

$$B_2(\Omega)\geqslant A_2(\Omega);\tag{23}$$

следовательно, $B_2(\Omega)>0$.

Применяя последовательно неравенства (3) и (2) при $p=2$, получаем, что для любой функции $u\in C_0^\infty(\Omega)$ справедливо неравенство

$$\iint\limits_{\Omega}\frac{|\Delta u|^2}{\lambda_\Omega^2(z)}\,dx\,dy\geqslant B_2(\Omega)\iint\limits_{\Omega}|\nabla u|^2\,dx\,dy\geqslant A_2(\Omega)\,B_2(\Omega)\iint\limits_{\Omega}|u|^2\lambda_\Omega^2(z)\,dx\,dy.$$

Отсюда с учетом определения константы $C_2(\Omega)$ будем иметь оценку

$$C_2(\Omega)\geqslant A_2(\Omega)\,B_2(\Omega).\tag{24}$$

Следовательно, $C_2(\Omega)>0$. Таким образом, теорема 5 доказана. □

В следующем утверждении нам потребуется евклидов максимальный модуль $M_0(\Omega)$. Величина $M_0(\Omega)$ определяется как точная верхняя граница модулей

$$M(K)=\frac{1}{2\pi}\ln\frac{r_2(K)}{r_1(K)}$$

всех колец вида

$$K=\{z\in\mathbb{C}:r_1(K)<|z-z_K|<r_2(K)\}\subset\Omega,$$

разделяющих границу Ω и таких, что

$$z_K\in\partial\Omega,\qquad 0<r_1(K)<r_2(K)<\infty.$$

Если таких колец нет, то полагаем $M_0(\Omega)=0$ по определению.

Для любой области $\Omega\subset\mathbb{C}$ имеют место неравенства (см. [4])

$$M_0(\Omega)\leqslant M(\Omega)\leqslant M_0(\Omega)+\frac{1}{2}.$$

Таким образом, граница области $\Omega\subset\mathbb{C}$ является равномерно совершенной тогда и только тогда, когда $M_0(\Omega)<\infty$.

Нам также потребуется следующее утверждение.

Теорема E (см. [1, теорема 3] для случая $p=2$, $\infty\notin\Omega$)**.** *Если $\Omega\subset\mathbb{C}$ — область, граница которой имеет не менее трех компонент и является равномерно совершенной, то справедливо неравенство*

$$A_2(\Omega)\geqslant\frac{4\pi^4}{\left[4\pi^3M_0(\Omega)+\Gamma^4(1/4)\right]^2},\tag{25}$$

где Γ — гамма-функция Эйлера, $M_0(\Omega)$ — евклидов максимальный модуль области Ω.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 6. *Пусть граница области $\Omega \subset \mathbb{C}$ является равномерно совершенной и содержит не менее трех компонент. Тогда справедливы оценки*

$$B_2(\Omega) \geqslant \frac{4\pi^4}{\left[4\pi^3 M_0(\Omega) + \Gamma^4(1/4)\right]^2}, \tag{26}$$

$$C_2(\Omega) \geqslant \frac{16\pi^8}{\left[4\pi^3 M_0(\Omega) + \Gamma^4(1/4)\right]^4}, \tag{27}$$

где Γ — гамма функция Эйлера, $M_0(\Omega)$ — евклидов максимальный модуль области Ω.

Доказательство теоремы 6. Очевидно, неравенство (26) является простым следствием оценок (23) и (25), а неравенство (27) вытекает из оценок (24), (25) и (26). Таким образом, теорема 6 доказана. □

Полагая $M_0(\Omega) = 0$ в оценках (26) и (27), получаем следующее утверждение.

Следствие 3. *Пусть граница области $\Omega \subset \mathbb{C}$ является равномерно совершенной и содержит не менее трех компонент. Если $M_0(\Omega) = 0$, то имеют место неравенства*

$$\iint\limits_{\Omega} \frac{|\Delta u|^2}{\lambda_\Omega^2(z)}\, dx\, dy \geqslant \frac{4\pi^4}{\Gamma^8(1/4)} \iint\limits_{\Omega} |\nabla u|^2\, dx\, dy \qquad \forall u \in C_0^\infty(\Omega),$$

$$\iint\limits_{\Omega} \frac{|\Delta u|^2}{\lambda_\Omega^2(z)}\, dx\, dy \geqslant \frac{16\pi^8}{\Gamma^{16}(1/4)} \iint\limits_{\Omega} |u|^2 \lambda_\Omega^2(z)\, dx\, dy \quad \forall u \in C_0^\infty(\Omega),$$

где $z = x + iy$, Γ — гамма-функция Эйлера.

Существуют области Ω произвольной связности, обладающие свойством $M_0(\Omega) = 0$. Ряд примеров таких областей можно найти в [2,3]. Приведем еще один пример бесконечносвязной области Ω_c, для которой евклидов максимальный модуль $M_0(\Omega_c)$ равен нулю.

Пример. Пусть $\Pi = \{x + iy : -1 < x < 1, -2 < y < 2\}$ — прямоугольник, g_c — классическое канторово множество, лежащее на отрезке $[0, 1]$ оси абсцисс. Определим компакт $G_c = \{x + iy : x \in g_c,\ -1 \leqslant y \leqslant 1\}$ и область $\Omega_c = \Pi \setminus G_c$. Имеем равенство $M_0(\Omega_c) = 0$, так как не существует окружности, лежащей в области Ω_c и разделяющей границу этой области. Действительно, если окружность радиуса R содержит внутри себя хотя бы одну граничную компоненту области Ω_c, то $R > 1$. Но такая окружность не может лежать внутри области $\Omega_c \subset \Pi$.

4. Некоторые дополнения и замечания.

4.1. Можно высказать следующую гипотезу: *если Ω — область гиперболического типа и ее граница является равномерно совершенным множеством, то $B_p(\Omega) > 0$ и $C_p(\Omega) > 0$ для любого $p \in (1, \infty)$.* Для случая $p = 2$ этот факт доказан выше. В этом пункте мы подтвердим гипотезу для $C_p(\Omega)$ при $p > 2$.

В следующем утверждении мы пользуемся стандартным обозначением: $C_0^m(\Omega)$ Э— семейство функций, имеющих непрерывные производные до порядка m и компактные в области $\Omega \subset \mathbb{C}$ носители.

Лемма 1. *Пусть $s \in [1, \infty)$ и $\Omega \subset \mathbb{C}$ — область. Тогда для любой вещественнозначной функции $u \in C_0^2(\Omega)$ имеют место неравенство*

$$\iint\limits_{\Omega} |u|^s\, |\Delta u|\, dx\, dy \geqslant s \iint\limits_{\Omega} |u|^{s-1}\, |\nabla u|^2\, dx\, dy \tag{28}$$

и равенство

$$-\iint\limits_{\Omega} |u(z)|^s\, \Delta u(z) \operatorname{sign} u(z)\, dx\, dy = s \iint\limits_{\Omega} |u(z)|^{s-1}\, |\nabla u(z)|^2\, dx\, dy. \tag{29}$$

Доказательство леммы 1. Пусть $u \in C_0^2(\Omega)$ — вещественнозначная функция. Предположим сначала, что $s \in (1, \infty)$. Определим функцию v равенством

$$v(z) = |u(z)|^s \ \operatorname{sign} u(z), \quad z \in \Omega.$$

С учетом неравенства $s > 1$ и тождества $\nabla v(z) \equiv s\,|u(z)|^{s-1}\,\nabla v(z)$ получаем, что $v \in C_0^1(\Omega)$. Применяя к паре функций $\{u, v\}$ формулу Грина

$$\iint\limits_{\Omega} [v\,\Delta u + (\nabla v, \nabla u)]\; dx\,dy = 0,$$

для $v(z) = |u(z)|^s \operatorname{sign} u(z)$ будем иметь равенство (29).

Очевидно, равенство (29) влечет неравенство (28). Итак, утверждение леммы доказано для случая, когда $s > 1$. Переходя к пределу при $s \to 1$ в (28) и (29) и пользуясь теоремой Лебега о мажорированной сходимости, получаем, что неравенство (28) и равенство (29) имеют место и для $s = 1$. Лемма 1 доказана. □

Отметим, что неравенство (28) и равенство (29) являются конформно инвариантными, т.е. имеют тот же вид при конформной замене независимой переменной.

Обобщением теоремы 5 является следующее утверждение.

Теорема 7. *Пусть $p \in [2, \infty)$ и пусть $\Omega \subset \overline{\mathbb{C}}$ — область гиперболического типа. Если граница этой области является равномерно совершенной, то*

$$C_p(\Omega) \geqslant \frac{4^p(p-1)^p}{p^{2p}} A_2^p(\Omega) > 0;$$

следовательно, для любой вещественнозначной функции $u \in C_0^\infty(\Omega)$ имеет место неравенство

$$\iint\limits_{\Omega} \frac{|\Delta u|^p}{\lambda_\Omega^{2p-2}(z)}\, dx\,dy \geqslant \frac{4^p(p-1)^p}{p^{2p}} A_2^p(\Omega) \iint\limits_{\Omega} |u|^p \lambda_\Omega^2(z)\, dx\,dy, \tag{30}$$

где$z = x + iy$.

Доказательство теоремы 7. Рассмотрим лишь случай $2 < p < \infty$, так как для $p = 2$ утверждение уже доказано ранее. Пусть $u \in C_0^1(\Omega)$ — фиксированная вещественнозначная функция, $u \not\equiv 0$. Подставляя $|u|^{p/2} \in C_0^1(\Omega)$ вместо u в формуле

$$\iint\limits_{\Omega} |\nabla u|^2\, dx\,dy \geqslant A_2(\Omega) \iint\limits_{\Omega} u^2 \lambda_\Omega^2(z)\, dx\,dy \quad \forall u \in C_0^1(\Omega),$$

получим

$$\iint\limits_{\Omega} |u|^{p-2}\,|\nabla u|^2\, dx\,dy \geqslant \frac{4}{p^2} A_2(\Omega) \iint\limits_{\Omega} |u|^p \lambda_\Omega^2(z)\, dx\,dy \quad \forall u \in C_0^1(\Omega). \tag{31}$$

Применяя (28) при $s = p - 1$ и формулу (31), приходим к неравенству

$$\iint\limits_{\Omega} |u|^{p-1}|\Delta u|\, dx\,dy \geqslant \frac{4(p-1)}{p^2} A_2(\Omega) \iint\limits_{\Omega} |u|^p \lambda_\Omega^2(z)\, dx\,dy \quad \forall u \in C_0^2(\Omega).$$

Оценивая сверху интеграл от произведения $|u|^{p-1}|\Delta u| = fg$, где

$$f(z) \equiv \lambda_\Omega^{2-2/p}(z)\,|u(z)|^{p-1}, \quad g(z) \equiv \frac{|\Delta u(z)|}{\lambda_\Omega^{2-2/p}(z)},$$

с помощью неравенства Гельдера с показателями $p/(p-1)$ и p будем иметь

$$\left(\iint\limits_{\Omega} |u|^p \lambda_\Omega^2(z)\,dx\,dy\right)^{1-1/p} \left(\iint\limits_{\Omega} \frac{|\Delta u|^p}{\lambda_\Omega^{2p-2}(z)}\,dx\,dy\right)^{1/p} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{4(p-1)}{p^2} A_2(\Omega) \iint\limits_{\Omega} |u|^p \lambda_\Omega^2(z)\,dx\,dy \quad \forall u \in C_0^2(\Omega). \quad (32)$$

Легко видеть, что (31) и (32) влекут неравенство (30). Следовательно,

$$C_p(\Omega) \geqslant \frac{4^p(p-1)^p}{p^{2p}} A_2^p(\Omega) > 0 \quad \text{для } p \in [2,\infty)$$

с учетом определения $C_p(\Omega)$ как максимальной константы в неравенстве (4). Таким образом, теорема 7 доказана. □

4.2. Теоремы 1 и 3 тесно связаны с задачей Брезиса—Маркуса, подробное описание которой можно найти в [1, 6].

4.3. По формуле Элстродта—Паттерсона—Сулливана (см. [14, с. 333]) имеем:

$$A_2(\Omega) = \begin{cases} 1 & \text{для } 0 \leqslant \beta \leqslant 1/2, \\ 4\beta(1-\beta) & \text{для } 1/2 \leqslant \beta \leqslant 1, \end{cases}$$

где $\beta = \beta(\Omega)$ — критический показатель сходимости рядов Пуанкаре—Дирихле для фундаментальной группы преобразований Ω. Из этой формулы следует, в частности, что $A_2(\Omega) \leqslant 1$ для любой области гиперболического типа. По-видимому, справедливы и два следующих утверждения:

$$B_2(\Omega) \leqslant 1, \quad C_2(\Omega) \leqslant 1$$

для любой области гиперболического типа. Но в настоящее время мы можем установить эти неравенства лишь при некоторых дополнительных ограничениях на область Ω.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Авхадиев Ф. Г.* Интегральные неравенства в областях гиперболического типа и их применения// Мат. сб. — 2015. — *206*, № 12. — С. 3–28.
2. *Avkhadiev F. G.* Hardy–Rellich inequalities in domains of the Euclidean space// J. Math. Anal. Appl. — 2016. — *442*. — С. 469–484.
3. *Avkhadiev F. G.* Hardy type inequalities in higher dimensions with explicit estimate of constants// Lobachevskii J. Math. — 2006. — *21*. — С. 3–31.
4. *Avkhadiev F. G., Wirths K.-J.* Schwarz–Pick Type Inequalities. — Basel–Boston–Berlin: Birkhäuser Verlag, 2009.
5. *Avkhadiev F. G., Wirths K.-J.* The conformal radius as a function and its gradient image// Isr. J. Math. — 2005. — *145*. — С. 349–374.
6. *Avkhadiev F. G., Wirths K.-J.* Unified Poincaré and Hardy inequalities with sharp constants for convex domains// Z. Angew. Math. Mech. — 2007. — *87*, №№ 8-9. — С. 632–642.
7. *Beardon A. F., Pommerenke C.* The Poincaré metric of plane domains// J. London Math. Soc. (2). — 1978. — *18*. — С. 475–483.
8. *Carleson L., Gamelin T. W.* Complex dynamics. — New York: Springer, 1993.
9. *Fernández J. L.* Domains with strong barrier// Revista Mat. Iberoam. — 1989. — *5*. — С. 47–65.
10. *Fernández J. L., Rodríguez J. M.* The exponent of convergence of Riemann surfaces, bass Riemann surfaces// Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A. I. Math. — 1990. — *15*. — С. 165–182.
11. *Sugawa T.* Modulus techniques in geometric function theory// J. Anal. — 2010. — *18*. — С. 373–397.
12. *Sugawa T.* Various domain constants related to uniform perfectness// Complex Variables Theory Appl. — 1998. — *36*. — С. 311–345.

13. *Pommerenke C.* Uniformly perfect sets and the Poincaré metric// Arch. Math. — 1979. — *32.* — С. 192–199.
14. *Sullivan D.* Related aspects of positivity in Riemannian geometry// J. Differ. Geom. — 1987. — *25.* — С. 327–351.

Ф. Г. Авхадиев
Казанский (Приволжский) федеральный университет
E-mail: avkhadiev47@mail.ru

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 142 (2017). С. 42–56

УДК 517.53

ПОРЯДОК РЯДА ДИРИХЛЕ В ПОЛУПОЛОСЕ

© 2017 г. **А. М. ГАЙСИН, Н. Н. АИТКУЖИНА**

Аннотация. Изучаются ряды Дирихле, сходящиеся лишь в полуплоскости, последовательность показателей которых допускает расширение до некоторой «правильной» последовательности. Доказано равенство k-порядков ряда Дирихле в любых полуполосах, ширина каждой из которых больше некоторого числа — специальной плотности распределения показателей. Работа включает обзор исследований по данной тематике.

Ключевые слова: R_k-плотность последовательности, ряд Дирихле, k-порядок, полуполоса, полуплоскость.

AMS Subject Classification: 30D10

1. Введение.

Пусть $\Lambda = \{\lambda_n\}$ $(0 < \lambda_n \uparrow \infty)$ — последовательность, удовлетворяющая условию

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{\ln n}{\lambda_n} = H < \infty.$$

При изучении целых функций, определенных всюду сходящимися рядами Дирихле

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{\lambda_n s}, \quad s = \sigma + it, \tag{1}$$

в свое время Риттом было введено понятие R-порядка. Приведем определение этой величины — наиболее употребительной характеристики роста для рядов Дирихле (1). Поскольку ряд (1) сходится во всей плоскости, в силу указанного условия он сходится во всей плоскости абсолютно. Положим

$$M(\sigma) = \sup_{|t|<\infty} \bigl|F(\sigma + it)\bigr|.$$

Порядком по Ритту (*R-порядком*) целой функции F, определенной рядом (1), называется величина

$$\rho_R = \varlimsup_{\sigma\to+\infty} \frac{\ln\ln M(\sigma)}{\sigma}$$

(см. [12]). Рассмотрим полосу $S(a, t_0) = \{s = \sigma + it : |t - t_0| \leqslant a\}$. Введем обозначение

$$M_s(\sigma) = \max_{|t-t_0|\leqslant a} \bigl|F(\sigma + it)\bigr|.$$

Величина

$$\rho_s = \varlimsup_{\sigma\to+\infty} \frac{\ln^+ \ln M_s(\sigma)}{\sigma}, \quad a^+ = \max(a, 0),$$

называется *R-порядком* функции F в полосе $S(a, t_0)$.

Пусть

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{n}{\lambda_n} = D < \infty, \quad D^* = \varlimsup_{\lambda\to+\infty} \frac{1}{\lambda}\int_0^{\lambda} D(x)\,dx,$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты №№ 14-01-00720, 15-01-01661).

где

$$D(x) = \frac{\Lambda(x)}{x}, \quad \Lambda(x) = \sum_{\lambda_n \leqslant x} 1$$

(D — верхняя плотность, D^* — усредненная верхняя плотность последовательности Λ). Известно, что $D^* \leqslant D \leqslant eD^*$ (см. [9]). В [9] доказано, что если

$$\varliminf_{n\to\infty} (\lambda_{n+1} - \lambda_n) = h > 0,$$

то R-порядок ρ_s функции F в полосе $S(a, t_0)$ при $a > \pi D^*$ равен R-порядку ρ_R во всей плоскости. Наиболее общий результат о равенстве R-порядков в разных полосах $S(a_i, t_i)$ $(i = 1, 2)$ установлен А. Ф. Леонтьевым в [7].

Приведем этот результат. Пусть

$$P(z) = \lim_{k\to\infty} \sum_{\nu=1}^{n_k} a_\nu^{(k)} e^{-\lambda_\nu z}$$

— целая функция (сходимость на компактах), а S_1 и S_2 — открытые горизонтальные полосы, содержащие соответственно $\overline{D}(\alpha_1)$ и $\overline{D}(\alpha_2)$, где $\overline{D}(\alpha)$ — смещение сопряженной диаграммы $\overline{D}$ целой функции

$$L(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{\lambda_n^2}\right), \quad z = x + iy,$$

на вектор α. Тогда R-порядки функции P в этих полосах равны (см. [7, гл. II, § 5, п. 3]).

Отметим, что величина $M(\sigma)$ для предельной функции P, вообще говоря, может быть равна бесконечности и, следовательно, нельзя определить R-порядок этой функции во всей плоскости (см. [7]).

Для полноты обзора приведем также некоторые результаты для замкнутых полос. Так, Г. С. Садыховым доказано следующее утверждение.

Предложение 1 (см. [10]). *Пусть последовательность Λ удовлетворяет условию*

$$\lambda(y) - \lambda(x) \leqslant b \ln \frac{y}{x} + K, 0 < x \leqslant y < \infty, \tag{2}$$

где K и b — некоторые положительные постоянные и

$$\lambda(t) = \sum_{\lambda_n \leqslant t} \frac{1}{\lambda_n}.$$

Тогда порядки функции P по Ритту в любых горизонтальных полосах $S(a_1, t_1)$ и $S(a_2, t_2)$ ширины не менее $2\pi b$ равны.

Этот результат актуален тем, что всегда существуют последовательности $\Lambda = \{\lambda_n\}$, удовлетворяющие условию (2) и имеющие плотность

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\lambda_n} = b.$$

В этом случае сопряженная диаграмма функции L есть вертикальный отрезок с центром в начале, длина которого равна $2\pi b$.

Как доказано в [11], условие (2) равносильно существованию целой функции Φ экспоненциального типа с простыми нулями в точках λ_n $(n = 1, 2, \ldots)$, удовлетворяющей оценке

$$|\Phi(iy)| \leqslant \exp(\pi b|y|), \quad y = \operatorname{Im} z.$$

В данной статье рассматриваются аналогичные вопросы в случае, когда предельная функция представлена в виде ряда (1), но его область сходимости — полуплоскость

$$\Pi_0 = \{s = \sigma + it : \ \sigma < 0\}.$$

При $H = 0$, если ряд (1) сходится в полуплоскости Π_0, то он сходится в Π_0, причем абсолютно. Тогда сумма ряда F аналитична в данной полуплоскости. Класс всех аналитических функций, представимых рядами Дирихле (1), сходящимися лишь в полуплоскости Π_0, обозначим через $D_0(\Lambda)$.

Пусть $S(a, t_0) = \big\{s = \sigma + it : \ |t - t_0| \leqslant a, \ \sigma < 0\big\}$ — полуполоса. Величины

$$\rho_R = \varlimsup_{\sigma \to 0-} \frac{\ln^+ \ln M(\sigma)}{|\sigma|^{-1}}, \quad \rho_s = \varlimsup_{\sigma \to 0-} \frac{\ln^+ \ln M_s(\sigma)}{|\sigma|^{-1}}$$

называются порядками по Ритту в полуплоскости Π_0 и полуполосе $S(a, t_0)$ функции F (см. [1]). В дальнейшем величины ρ_R и ρ_s будем называть просто порядками в полуплоскости и полуполосе. Если это необходимо, вместо ρ_R и ρ_s будем писать $\rho_R(F)$ и $\rho_s(F)$. Отметим, что при изучении роста функций из $D_0(\Lambda)$ вблизи прямой сходимости возникают принципиальные трудности, связанные с осциллирующей асимптотикой функции L на вещественной оси, что связано с нерегулярным распределением последовательности Λ ее нулей — показателей ряда (1). Другая трудность связана с тем, что поведение суммы ряда (1) зависит от расстояния до границы ее области регулярности, которая в данном случае стремится к нулю, а не к ∞.

В [1] показано, что если

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\ln \lambda_n}{\lambda_n} \ln n = 0,$$

то порядок ρ_R любой функции $F \in D_0(\Lambda)$ равен

$$\rho_R = \varlimsup_{n \to \infty} \frac{\ln \lambda_n}{\lambda_n} \ln^+ |a_n|. \tag{3}$$

Пусть последовательность Λ имеет конечную верхнюю плотность D. Тогда L — целая функция экспоненциального типа. Пусть $h(\varphi)$ — индикатриса роста функции L. Тогда

$$\tau = h\left(\pm\frac{\pi}{2}\right) \leqslant \pi D^*$$

(см. [9]). Очевидно, τ — тип функции L. Пусть

$$|L(x)| \leqslant e^{g(x)}, \quad x \geqslant 0, \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{g(x) \ln x}{x} = 0. \tag{4}$$

В этом случае $h(0) = h(\pi) = 0$. Следовательно, сопряженная диаграмма функции L есть отрезок $I = [-\tau i, \tau i]$, $h(\varphi) = \tau |\sin \varphi|$.

В [1] доказано, что если функция L удовлетворяет условиям (4) и имеет тип τ, $0 \leqslant \tau < \infty$, и

$$q = q(L) = \varlimsup_{n \to \infty} \frac{\ln \lambda_n}{\lambda_n} \ln \left|\frac{1}{L'(\lambda_n)}\right| < \infty, \tag{5}$$

то порядок ρ_s в полуполосе $S(a, t_0)$ при $a > \tau$ и порядок ρ_R любой функции $F \in D_0(\Lambda)$ в полуплоскости Π_0 удовлетворяют оценкам

$$\rho_s \leqslant \rho_R \leqslant \rho_s + q \tag{6}$$

(при $q = \infty$ правая оценка не содержательна). Отсюда следует, что для данной полуполосы величины ρ_s и ρ_R конечны и бесконечны одновременно, причем $\rho_s = \rho_R$, если $q = 0$. В общем случае $\rho_s \neq \rho_R$ (см. [1]). Подчеркнем также, что условия (4), (5) трудно проверяемы (они не сформулированы в терминах распределения последовательности Λ), а в общей ситуации пара условий (4) может и не выполняться. Однако может существовать целая функция Q экспоненциального типа, имеющая только вещественные нули, для которой условия (4) будут выполнены, причем $Q(\lambda_n) = 0$, $Q'(\lambda_n) \neq 0$, $\lambda_n \in \Lambda$, и $q(Q) = q^*$, где

$$q^* = \varlimsup_{n \to \infty} \frac{\ln \lambda_n}{\lambda_n} \int\limits_0^1 \frac{n(\lambda_n; t)}{t}\, dt,$$

$q(Q)$ — величина, определяемая точно так же, что и $q(L)$ в (5), а $n(\lambda_n; t)$ — число точек $\lambda_k \neq \lambda_n$ из отрезка $\{x : |x - \lambda_n| \leqslant t\}$ (см. [5, 6]). Для последовательностей Λ, имеющих конечную $G(R)$-плотность и удовлетворяющих естественным требованиям на шаг и концентрацию точек $\lambda_n \in \Lambda$, это достигается путем расширения Λ до некоторой правильной последовательности Γ. В этом случае верны точные оценки

$$\rho_s \leqslant \rho_R \leqslant \rho_s + q^*,$$

где ρ_s — порядок в полуполосе $S(a,t_0)$, $a > \pi G(R)$ (см. [6]). Как показано в [3], этот результат полностью переносится на случай так называемых k-порядков.

Цель статьи — в терминах специальной плотности $G(R_k)$ распределения последовательности Λ указать условия, при выполнении которых $\rho_{s_1} = \rho_{s_2}$, где ρ_{s_i} — k-порядки (2-порядок совпадает с порядком по Ритту) в произвольных полуполосах $S_i = S_i(a_i,t_i)$, $i = 1,2$, каждая из которых имеет ширину больше, чем $2\pi G(R_k)$. Оказывается, при этом соответствующие аналоги величин q и q^* могут быть любыми.

2. Предварительные сведения. Нам в дальнейшем потребуются некоторые специальные плотности распределения последовательности Λ. Пусть $\Lambda = \{\lambda_n\}$, $0 < \lambda_n \uparrow \infty$, — последовательность, имеющая конечную верхнюю плотность, L — класс положительных, непрерывных и неограниченно возрастающих на $[0,\infty)$ функций. Через K обозначим подкласс таких функций h из L, что

$$h(0) = 0, \quad h(t) = o(t) \quad \text{при } t \to \infty, \quad \frac{h(t)}{t}\downarrow \quad \text{при } t \uparrow \infty$$

($h(t)/t$ монотонно убывает при $t > t_0$). В частности, если $h \in K$, то $h(2t) \leqslant 2h(t)$, $t \geqslant t_0$.

K-Плотностью последовательности Λ называется величина

$$G(K) = \inf_{h\in K} \varlimsup_{t\to\infty} \frac{\mu_\Lambda(\omega(t))}{h(t)}, \tag{7}$$

где $\omega(t) = [t,\ t+h(t))$ — полуинтервал, $\mu_\Lambda(\omega(t))$ — число точек из Λ, попавших в полуинтервал $\omega(t)$ (см. [6]).

Пусть $\Omega = \{\omega\}$ — семейство полуинтервалов вида $\omega = [a,b)$. Через $|\omega|$ будем обозначать длину ω. Всякая последовательность $\Lambda = \{\lambda_n\}$, $0 < \lambda_n \uparrow \infty$, порождает целочисленную считающую меру μ_Λ:

$$\mu_\Lambda(\omega) = \sum_{\lambda_n\in\omega} 1, \quad \omega \in \Omega.$$

Пусть μ_Γ — считающая мера, порожденная последовательностью $\Gamma = \{\mu_n\}$, $0 < \mu_n \uparrow \infty$. Тогда включение $\Lambda \subset \Gamma$ означает, что $\mu_\Lambda(\omega) \leqslant \mu_\Gamma(\omega)$ для любого $\omega \in \Omega$. В этом случае говорят, что мера μ_Γ мажорирует меру μ_Λ.

Через $D(K)$ обозначим точную нижнюю грань тех чисел b, $0 \leqslant b < \infty$, для каждого из которых существует такая мера μ_Γ, мажорирующая μ_Λ, что для некоторой функции $h \in K$

$$\bigl|M(t) - bt\bigr| \leqslant h(t), \quad t \geqslant 0. \tag{8}$$

Здесь $\Lambda = \{\lambda_n\}$, $\Gamma = \{\mu_n\}$, $M(t) = \sum\limits_{\mu_n\leqslant t} 1$.

Лемма 1 (см. [6]). *Величины $D(K)$ и $G(K)$ совпадают*: $D(K) = G(K)$.

Введем еще следующие классы функций:

$$L_k = \Bigl\{h \in L:\ h(x)\ln_{k-1} x = o(x) \text{ при } x \to +\infty\Bigr\}, \quad k \geqslant 2,$$

$$R_k = \left\{h \in S:\ h(x)\ln\frac{x}{h(x)} = o\left(\frac{x}{\ln_{k-1} x}\right),\ x \to +\infty\right\}, \quad k \geqslant 2,$$

$$S = \left\{h \in K:\ \varlimsup_{x\to\infty} \frac{h(x)\ln h(x)}{x\ln\frac{x}{h(x)}} < \infty\right\},$$

где $\ln_0 t = t$, $\ln_m t = \underbrace{\ln\ln\ldots\ln}_{m} t$, $m \geqslant 1$. Отметим, что указанные классы R_k при любом $k \geqslant 2$ определены корректно. Так как $R_k \subset S \subset K$, то дословное повторение доказательства леммы 1 показывает, что $D(R_k) = G(R_k)$ (величины $D(R_k)$ и $G(R_k)$ определяются, как и выше, но с той лишь разницей, что в (7) и (8) считаем $h \in R_k$). В [6] показано, что если последовательность Λ

имеет конечную $G(R_2)$-плотность, то существует четная целая функция Q, имеющая в некотором смысле правильное поведение на вещественной оси. Все нули этой функции вещественные и простые, причем Λ — подмножество ее нулевого множества. Приведем формулировку данного результата для $G(R_k)$-плотности. Как видно из доказательств теоремы 1 в [5] и теоремы II в [6], это утверждение верно при любом $k \geqslant 2$.

Лемма 2. *Пусть $\Lambda = \{\lambda_n\}$, $0 < \lambda_n \uparrow \infty$, — последовательность, имеющая конечную R_k-плотность $G(R_k)$, $k \geqslant 2$. Тогда для любого $b > G(R_k)$ существует такая последовательность $\Gamma = \{\mu_n\}$, $0 < \mu_n \uparrow \infty$, содержащая Λ, что*

$$\bigl|M(t) - bt\bigr| \leqslant H(t), t \geqslant 0, \quad H \in R_k, \quad M(t) = \sum_{\mu_n \leqslant t} 1,$$

причем целая функция экспоненциального типа πb

$$Q(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{\mu_n^2}\right), \quad z = x + iy, \tag{9}$$

обладает следующими свойствами:

(1) *$Q(\lambda_n) = 0$, $Q'(\lambda_n) \neq 0$ для любого $\lambda_n \in \Lambda$;*
(2) *выполняется оценка*

$$\ln|Q(x)| \leqslant AH(x) \ln^+ \frac{x}{H(x)} + B. \tag{10}$$

Пусть Q — функция (9) из леммы 2, а γ — функция, ассоциированная с ней по Борелю.

Лемма 3 (см. [3])**.** *Пусть Q — функция из леммы 2. Для того чтобы существовала неотрицательная неубывающая на $[a, \infty)$ мажоранта $g(x)$ функции $\ln|Q(x)|$, удовлетворяющая условию*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{g(x)\ln_{k-1} x}{x} = 0, \quad k \geqslant 2,$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$\varlimsup_{\delta\to 0+} \delta \ln_k^+ |\gamma(t)| \leqslant 0, \quad k \geqslant 2, \quad \delta = |\operatorname{Re} t|, \tag{11}$$

где $\ln_k^+ a = \underbrace{\ln^+ \ln^+ \ldots \ln^+}_{k} a$.

3. Основной результат. Пусть L_k, R_k $(k \geqslant 2)$ — классы функций, введенные выше, а $G(R_k)$ — R_k-плотность последовательности Λ. Величины

$$\rho_k = \varlimsup_{\sigma\to 0-} \frac{\ln_k M(\sigma)}{|\sigma|^{-1}}, \quad \rho_s = \varlimsup_{\sigma\to 0-} \frac{\ln_k^+ M_s(\sigma)}{|\sigma|^{-1}}, \quad k \geqslant 2,$$

называются k-порядками функции $F \in D_0(\Lambda)$ в полуплоскости Π_0 и полуполосе $S = S(a, t_0)$. Имеет смысл считать, что $D_0(\Lambda)$ состоит только из функций F, для которых $\sup\limits_{\sigma<0} M(\sigma) = \infty$.

Теорема 1. *Пусть $\Lambda = \{\lambda_n\}$, $0 < \lambda_n \uparrow \infty$, — последовательность, для которой $G(R_k) < \infty$. Если $S_1 = S(a_1, t_1)$, $S_2 = S(a_2, t_2)$ — полуполосы*

$$S(a_i, t_i) = \Bigl\{s = \sigma + it : \ |t - t_i| \leqslant a_i, \ \sigma < 0\Bigr\}, \quad i = 1, 2,$$

каждая из которой имеет ширину больше $2\pi G(R_k)$, то $\rho_1 = \rho_2$. Здесь ρ_1 и ρ_2 — k-порядки любой функции $F \in D_0(\Lambda)$ в S_1 и S_2 соответственно.

Приведем аналогичный результат для порядков по Ритту (т.е. для 2-порядков).

Предложение 2 (см. [2]). *Если последовательность Λ принадлежит классу $\Lambda[\psi]$* (см. определение ниже)*, то для полуполос S_1 и S_2, каждая из которых имеет произвольную положительную ширину, для порядков по Ритту также имеет место равенство $\rho_1 = \rho_2$. Здесь ψ — некоторая функция, определенная на $[0, +\infty)$ и обладающая свойством*

$$0 < \psi(r) \uparrow 1, \quad [1 - \psi(r)] \ln\ln r \to 0, \quad r \to \infty.$$

Класс $\Lambda[\psi]$ определяется следующим образом. Положим

$$\psi_1(r) = \min_{\lambda_1 \leqslant t \leqslant r} D(t), \quad \psi_2(r) = \max_{r \leqslant t} D(t), \quad D(t) = \frac{\Lambda(t)}{t}, \quad \Lambda(t) = \sum_{\lambda_n \leqslant t} 1.$$

Очевидно, $\psi_1(r) \leqslant D(r) \leqslant \psi_2(r)$, $\psi_1(r) \downarrow$, $\psi_2(r) \downarrow$ при $r \to \infty$.

По определению, последовательность $\Lambda = \{\lambda_n\}$, $0 < \lambda_n \uparrow \infty$, принадлежит классу $\Lambda[\psi]$, если выполнены следующие условия (см. [2]):

(1) существует конечный предел

$$\Delta = \lim_{r \to \infty} \frac{\Lambda(r)}{r^{\rho(r)}}, \quad \rho(r) = 1 - \frac{\ln\ln r}{\ln r}, \quad r \geqslant e;$$

(2) при $r \to \infty$

$$\psi_2(r) - \psi_1(r) = O\left(\frac{1 - \psi(r)}{\ln r}\right).$$

Условиям (1), (2), например, удовлетворяет всякая последовательность $\{\lambda_n\}$, $0 < \lambda_n \uparrow \infty$, для которой (см. [2])

(a) числа n/λ_n не возрастают:

$$\frac{n}{\lambda_n} \geqslant \frac{n+1}{\lambda_{n+1}}, \quad n \geqslant 1;$$

(b) существует предел

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n \ln \lambda_n}{\lambda_n} = \Delta, \quad 0 < \Delta < \infty.$$

С другой стороны, для всякой последовательности Λ из класса $\Lambda[\psi]$ справедливы следующие утверждения (см. [2]):

(c) $L^* \leqslant 1 + \Delta < \infty$, где

$$L^* = \varlimsup_{r \to \infty} \frac{\Lambda(r) - \Lambda(r\psi(r))}{r^{\rho(r)}[1 - \psi(r)]};$$

(d) для любых $\alpha_1 > 0$ и $\alpha_2 > 0$ существует такое число $r_0 = r_0(\alpha_1, \alpha_2)$, зависящее только от $\alpha_1 > 0$ и $\alpha_2 > 0$, что при $r \geqslant r_0$ верна оценка

$$\ln\left|\frac{1}{L(re^{i\varphi})}\right| \leqslant \alpha_1 \ln\frac{1}{|\varphi|} \frac{r^{\rho(r)}}{\ln\ln r} + \alpha_2 r^{\rho(r)}, \quad r^{\rho(r)} = \frac{r}{\ln r}, \tag{12}$$

где

$$L(\lambda) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda^2}{\lambda_n^2}\right), \quad \lambda = re^{i\varphi}, \quad 0 < |\varphi| \leqslant \frac{\pi}{4}.$$

Доказательство теоремы 1, как и соответствующей теоремы из [2], основано на оценке типа (12) для $m(\varphi) = -\ln|L(re^{i\varphi})|$ при $\varphi \to 0$. Отметим, что для получения менее точной оценки для $m(\varphi)$ обычно пользуются характеристикой (см. [7, гл. I, § 3, п. 3])

$$L = \lim_{\xi \to 1-0} \varlimsup_{r \to \infty} \frac{\Lambda(r) - \Lambda(r\xi)}{r}$$

или максимальной плотностью Полиа

$$\tau = \lim_{\xi \to 1-0} \frac{\Lambda(r) - \Lambda(r\xi)}{r(1-\xi)},$$

где

$$\Lambda(x) = \sum_{\lambda_n \leqslant x} 1.$$

Как известно (см., например, [7]), $L < \infty$ тогда и только тогда, когда $D < \infty$ (D — верхняя плотность Λ).

Для доказательства равенства $\rho_1 = \rho_2$ для 2-порядков в [2] существенно использовалось как условие (1) определения класса $\Lambda[\psi]$ (существование конечной плотности Δ при уточненном порядке $\rho(r)$), так и оценка (12) на лучах $l_\varphi = \{z : |z| > 0,\ \arg z = \varphi\}$ при $\varphi \to 0$. При $k = 2$ в теореме 1 актуальна лишь величина R_2-плотности $G(R_2)$, $0 \leqslant G(R_2) < \infty$.

Убедимся, что для любой последовательности Λ, принадлежащей какому-либо классу $\Lambda[\psi]$, выполняется условие $G(R_2) = 0$. Действительно, имеем

$$\frac{\Lambda(x+h) - \Lambda(x)}{x+h} = D(x+h) - D(x)\frac{x}{x+h} \leqslant \psi_2(x+h) - \psi_1(x)\frac{x}{x+h} \leqslant \psi_2(x) - \psi_1(x) + \psi_1(x)\frac{h}{x+h},$$

где h — любая функция из R_2, $h(x) \leqslant x$ при больших x. Отсюда, учитывая свойство (2) класса $\Lambda[\psi]$, имеем

$$\Lambda(x+h) - \Lambda(x) \leqslant A\frac{x}{\ln x}[1 - \psi(x)] + \frac{h(x)\Lambda(x)}{x}, \quad x > 0. \tag{13}$$

Убедимся, что при определенном выборе функции h из R_2 правая часть в (13) представляет собой $o(h(x))$ при $x \to \infty$. Тем самым будет доказано, что $G(R_2) = 0$. Действительно, так как $[1 - \psi(x)]\ln\ln x = o(1)$ при $x \to \infty$, то найдется такая функция $\delta = \delta(x)$, заданная на $[e^e, \infty)$, что

$$[1 - \psi(x)]\ln\ln x \leqslant \delta(x), \quad \delta(x) \downarrow 0 \quad \text{при} \quad x \to \infty, \quad \delta(x) \geqslant \ln^{-1} x.$$

Тогда существует дифференцируемая на $[e, \infty)$ функция, обладающая следующими свойствами (см. [8, гл. I, § 2]):

$$\varphi(x) \uparrow \infty, \quad \frac{\varphi(x)}{x} \to 0, \quad \varphi'(x) \to 0 \quad x \to \infty,$$

причем

$$\delta(x) \leqslant e^{-\varphi(\ln x)}, \quad x \geqslant e^e.$$

Рассмотрим теперь функцию

$$h_0(x) = \frac{x}{\ln x \ln\ln x} e^{-\frac{\varphi(\ln x)}{2}}, \quad x \geqslant e^e.$$

Из свойств функции φ следует, что

$$h_0(x) \to \infty, \quad h_0'(x) \to 0 \quad \text{при } x \to \infty,$$

причем

$$h_0(x) \uparrow \infty, \quad \frac{h_0(x)}{x} \downarrow 0 \quad \text{при } x \geqslant x_0.$$

Имея это в виду, положим

$$h(x) = \begin{cases} h_0(x), & \text{если } x \geqslant x_0, \\ \dfrac{h_0(x_0)}{x_0}\, x, & \text{если } 0 < x < x_0. \end{cases}$$

Ясно, что $h \in K$. Покажем, что $h \in R_2$. Действительно, проверяется, что при $x \to \infty$

$$\frac{\ln x}{x} h(x) \ln\frac{x}{h(x)} = O\left(e^{-\frac{\varphi(\ln x)}{2}}\right) + o(1)e^{-\frac{\varphi(\ln x)}{2}(1+o(1))} = o(1).$$

Подставляя в (13) данную функцию h, а затем поделив на нее обе части неравенства, имеем далее

$$\frac{\Lambda(x+h) - \Lambda(x)}{h} \leqslant Ae^{\frac{\varphi(\ln x)}{2}}[1 - \psi(x)]\ln\ln x + \frac{\Lambda(x)}{x}, \quad x \geqslant x_0.$$

Так как

$$[1 - \psi(x)]\ln\ln x \leqslant \delta(x) \leqslant e^{-\varphi(\ln x)} \quad \text{при } x \geqslant x_0 \geqslant e^e, \qquad \frac{\Lambda(x)}{x} = o(1) \quad \text{при } x \to \infty,$$

то получаем
$$\frac{\mu_\Lambda(\omega(x))}{h(x)} \leqslant Ae^{-\frac{\varphi(\ln x)}{2}} + \frac{\Lambda(x)}{x} = o(1) \quad \text{при } x \to \infty.$$
Здесь $\omega = \omega(x) = [x,\, x + h(x))$ — переменный полуинтервал, $\mu_\Lambda(\omega)$ — число точек $\lambda_n \in \omega$. Таким образом, $G(R_2) = 0$, если $\Lambda \in \Lambda[\psi]$. Однако в рассматриваемом случае в теореме 1 последовательность Λ может и не принадлежать классу $\Lambda[\psi]$ ни при каком выборе подходящей функции ψ, если даже имеет нулевую плотность, т.е. $n = o(\lambda_n)$ при $n \to \infty$. Дело в том, что условие конечности (или равенства нулю) $G(R_2)$ вообще не означает выполнения условия (1) в определении класса $\Lambda[\psi]$.

Действительно, определим числа $\lambda_k^{(i)}$, $i = 1, 2$, $k = 1, 2, \dots$, из условий
$$\frac{k \ln(k+1)}{\lambda_k^{(1)}} = 1, \quad \frac{k \ln(k+1)}{\lambda_k^{(2)}} = 2.$$
Тогда каждая из последовательностей $\{\lambda_k^{(i)}\}$ удовлетворяет условиям (a), (b) (см. выше). Значит, при подходящем выборе функции ψ они принадлежат классу $\Lambda[\psi]$. Однако их объединение
$$\Lambda = \{\lambda_k\} = \{\lambda_k^{(1)}\} \cup \{\lambda_k^{(2)} + \varepsilon_k\}$$
($0 \leqslant \varepsilon_k \leqslant 1$, а ε_k подбирается так, чтобы среди λ_k не было кратных точек) не принадлежит $\Lambda[\psi]$ ни при каком ψ. Тем не менее для Λ величина R_2-плотности $G(R_2)$ равна нулю. Достаточно это проверить для одной из последовательностей, скажем, для $\Lambda_1 = \{\lambda_k^{(1)}\}$. Действительно, если положить $h(t) = \ln(t+1)$, то $h \in R_2$, и
$$\lim_{t\to\infty} \frac{\mu_{\Lambda_1}(\omega(t))}{h(t)} = 0, \quad \omega(t) = \big[t,\ t + \ln(t+1)\big).$$

Для доказательства теоремы 1 нам понадобится еще одно утверждение, а именно, оценка типа (12) для произведения Вейерштрасса
$$Q(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{\mu_n^2}\right), \tag{14}$$
последовательность нулей $M = \{\mu_n\}$, $0 < \mu_n \uparrow \infty$, которого имеет положительную плотность τ, причем для некоторой функции $h \in R_k$, $k \geqslant 2$, выполняется неравенство
$$\big|M(t) - \tau t\big| \leqslant h(t), \quad M(t) = \sum_{\mu_n \leqslant t} 1. \tag{15}$$

Лемма 4. *При условии* (15) *целая функция* (14) *имеет следующую оценку*: *существует такое* $\rho \geqslant 0$, *что*
$$\Big| \ln\big|Q(re^{i\varphi})\big| - \pi\tau\big|\sin\varphi\big| r\Big| \leqslant 6h(r)\ln\frac{r}{h(r)} + \frac{8\pi}{|\varphi|}\frac{h^2(r)}{r} + 3\mu_1\tau. \tag{16}$$
при $r \geqslant \rho$ *и всех* φ, $0 < |\varphi| \leqslant \pi/4$.

При $k = 2$ лемма доказана в [5]. Она справедлива при любом $k \geqslant 2$ (вообще говоря, для любого подкласса класса K).

Оценка (12) верна для последовательности Λ из класса $\Lambda[\psi]$. В общем случае, т.е. при $G(R_2) < \infty$, последовательность Λ может не принадлежать $\Lambda[\psi]$, но она допускает расширение до некоторой последовательности M, для которой выполняется условие (15). Тогда пользуемся оценкой (16) из леммы 4 (см. доказательство теоремы 1). Та же идея применяется здесь и при $G(R_k) < \infty$, $k \geqslant 2$, т.е. в случае, когда (15) выполняется при некоторой функции $h \in R_k$, $k \geqslant 2$.

4. Доказательство теоремы 1.

4.1. Основная идея и суть метода. Так как $G(R_k) < \infty$, то для любого $b > G(R_k)$, согласно лемме 2, существует такая последовательность $M = \{\mu_n\}$, $0 < \mu_n \uparrow \infty$, содержащая Λ, что если $M(t) = \sum\limits_{\mu_n \leqslant t} 1$, то

$$|M(t) - bt| \leqslant H(t), \quad t \geqslant 0, \quad H \in R_k, \tag{17}$$

причем целая функция экспоненциального типа πb

$$Q(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{\mu_n^2}\right), \quad z = x + iy, \tag{18}$$

обладает следующими свойствами:

1^0. $Q(\lambda_n) = 0$, $Q'(\lambda_n) \neq 0$, $n \geqslant 1$;

2^0. $\ln|Q(x)| \leqslant g(x)$, $x \geqslant 0$, $g \in L_k$.

Кроме того, на некоторой последовательности окружностей

$$K_n = \{\lambda : \ |\lambda| = r_n\}, \quad \frac{r_n}{r_{n+1}} \to 1, \quad n \to \infty, \tag{19}$$

имеют место оценки (см. [7, гл. I, § 3, п. 1])

$$\ln|Q(z)| \geqslant -V(r), \quad r = |z| = r_n, \tag{20}$$

где $0 < V(r) = o(r)$ при $r \to \infty$. Не теряя общности рассуждений, можно считать, что $n = o(r_n)$ при $n \to \infty$. Для этого, например, из последовательности $\{r_n\}$ исключим, если это необходимо, часть точек, оставляя в каждом полуинтервале вида $[n^2, (n+1)^2)$ не более одного члена исходной последовательности. При этом r_1 выберем так, чтобы $0 < r_1 < \min(1, \mu_1)$. Имея это в виду, через Γ_n обозначим замкнутый контур, образованный дугами окружностей $K_n = \{\lambda : \ |\lambda| = r_n\}$, $K_{n+1} = \{\lambda : \ |\lambda| = r_{n+1}\}$ и отрезками лучей $\{\lambda : \ \arg\lambda = \pm\varphi_n, \ 0 < \varphi_n < \pi/4\}$ (φ_n выберем позже).

Справедливо следующее представление:

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int\limits_{\Gamma_n} \frac{\omega_L(\mu, \alpha, \ F)}{L(\mu)}\, e^{\mu s}\, d\mu \right), \quad s = \sigma + it \in \Pi_0, \tag{21}$$

где F — сумма ряда Дирихле (1) из класса $D_0(\Lambda)$, L — четная целая функция с нулевым множеством $\pm\Lambda$, введенная в самом начале, а

$$\omega_L(\mu, \alpha, F) = e^{-\mu\alpha} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_C \gamma_L(t) \left(\int\limits_{\alpha_0}^{t} F(t + \alpha - \eta) e^{\mu\eta})\, d\eta \right) dt \tag{22}$$

— интерполирующая функция А. Ф. Леонтьева (см., например, [7, гл. I, § 2, п. 13]), где C — замкнутый жорданов контур, охватывающий сопряженную диаграмму целой функции L, γ_L — функция, ассоциированная по Борелю с L, и α, α_0 — комплексные параметры. Если, например, C — контур, звездообразный относительно начала координат, то обычно полагают $\alpha_0 = 0$. В этом случае η во внутреннем интеграле в (22) пробегает отрезок $[0, t]$. Тогда $t - \eta$ также пробегает этот отрезок, причем $(t - \eta) \in \overline{G}$, где $\overline{G}$ — замыкание области G, ограниченной контуром C. Тогда $(t + \alpha - \eta) \in \overline{G}_\alpha$, $\overline{G}_\alpha$ — сдвиг $\overline{G}$ на вектор α. По этой причине в (22) параметр α выбирается так, чтобы функция F была регулярна в $\overline{G}_\alpha$ (см. [7]).

Для последовательности $\Lambda = \{\lambda_n\}$ из класса $\Lambda[\psi]$ существует конечная плотность Δ при уточненном порядке $\rho(r)$, $r^{\rho(r)} = r/\ln r$, $r \geqslant e$. Поэтому существуют такие окружности (сохраним для них те же обозначения)

$$K_n = \big\{\lambda : \ |\lambda| = r_n\big\}, \quad n \geqslant 1, \quad \frac{r_n}{r_{n+1}} \to 1, \quad n \to \infty,$$

что для любого $\varepsilon > 0$ (см. [8, гл. I, § 2, п. 6])

$$-\ln\big|L(re^{i\varphi})\big| \leqslant \varepsilon r^{\rho(r)}, \quad r = r_n, \quad n \geqslant n_0(\varepsilon). \tag{23}$$

Кроме того, $n = o(\lambda_n)$, $n \to \infty$. Поэтому сопряженная диаграмма функции L есть $\overline{D} = \{0\}$. В данном случае для функции $\left|L(re^{i\varphi})\right|^{-1}$ выполняется оценка (12), а для $|L(x)|$, $x \in \mathbb{R}$, — условие (4).

В формуле (22), определяющей функцию $\omega_L(\mu, \alpha, F)$, в качестве C возьмем границу прямоугольника $P = \{t: \ |\operatorname{Re} t| \leqslant \varepsilon|\sigma|, \ |\operatorname{Im} t| \leqslant a_1\}$, где σ — вещественная часть аргумента s функции F в (21), $\varepsilon > 0$, $a_1 > 0$ — любые, но фиксированные ($2a_1$ — ширина полуполосы $S(a_1, t_1)$. Такой выбор параметров с учетом оценок (4), (12), (23) позволяет находиться в рамках применимости метода, примененного в [2]. Поэтому из интегрального представления (21) можно вывести требуемое равенство 2-порядков $\rho_1 = \rho_2$ для произвольных полуполос вида $S(a_1, t_1)$ и $S(a_2, t_2)$, где $a_1 > 0$, $a_2 > 0$ произвольны.

В более общей ситуации, когда известно лишь, что $G(R_2) < \infty$, а условие (23) вообще не выполняется, этот метод уже не применим, тем более, для функции L условия (4) могут и не выполняться. Но поскольку (см. [8, гл. IV, § 2, п. 4])

$$\frac{\omega_L(\mu, \alpha, F)}{L(\mu)} = \frac{\omega_Q(\mu, \alpha, F)}{Q(\mu)}$$

(Q — функция (18)), то в формуле (21) вместо L можно использовать целую функцию Q: в силу условий (1), (2) (см. лемму 2) и (20), она обладает требуемыми свойствами. Вместо (12) будем применять соответствующую оценку для $\left|Q(re^{i\varphi})\right|^{-1}$ из леммы 2. В остальном схема рассуждений (в том числе и при $k > 2$) та же, что и в [2].

4.2. Доказательство равенства $\rho_1 = \rho_2$ для k-порядков. Для всякого $b > G(R_k)$ последовательность Λ допускает расширение до некоторой последовательности $M = \{\mu_n\}$, $0 < \mu_n \uparrow \infty$, считающая функция которой подчинена условию (17) при каком-то $H \in R_k$. При этом функция Q, заданная формулой (18), обладает свойствами 1^0, 2^0, причем на некоторой системе окружностей $K_n = \{\lambda: \ |\lambda| = r_n\}$, $n \geqslant 1$, $0 < r_1 < \mu_1$, $r_n \uparrow \infty$, $r_n/r_{n+1} \to 1$, $n = o(r_n)$ при $n \to \infty$, для Q выполняется оценка (20). Как и выше, через Γ_n обозначим замкнутый контур, состоящий из дуг окружностей K_n и K_{n+1} и отрезков лучей $\{\lambda: \ |\lambda| > 0, \ \arg\lambda = \pm\varphi_n, \ 0 < \varphi_n < \pi/4, \ \varphi_n \downarrow 0\}$.

Пусть a_1, a_2 — любые числа, $a_1 > \pi G(R_k)$, $a_2 > \pi G(R_k)$, а $S_1 = S(a_1, t_1)$ и $S_2 = S(a_2, t_2)$ — полуполосы. Положим

$$a = \sup_{n \geqslant 1} \frac{r_{n+1}}{r_n}, \quad c = |t_1| + |t_2| + a_1 + a_2, \quad \varphi_n = \varepsilon_0 \frac{H(r_n)}{r_n}, \quad n \geqslant 1.$$

Так как $H \in R_k \subset K$, то $\varphi_n \downarrow 0$ при $n \to \infty$. Число ε_0 выберем так, чтобы $0 < \varphi_n < \pi/4$, $n \geqslant 1$.

Для любого $s = \sigma + it \in \Pi_0$ имеем

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int\limits_{\Gamma_n} \frac{\omega(\mu, \alpha, F)}{Q(\mu)} e^{\mu s}\, d\mu \right), \tag{24}$$

где

$$\omega(\mu, \alpha, F) = \omega_Q(\mu, \alpha, F) = e^{-\alpha\mu} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_C \gamma(t) \left(\int\limits_0^t F(t + \alpha - \eta) e^{\mu\eta}\, d\eta \right) dt, \tag{25}$$

$\gamma = \gamma(t)$ — функция, ассоциированная по Борелю с целой функцией Q, C — замкнутый (выпуклый) контур, охватывающий отрезок $[-\pi bi, \pi bi]$ — сопряженная диаграмма Q; α — произвольный комплексный параметр, выбранный так, чтобы $C_\alpha \subset \Pi_0$ (C_α — смещение C на вектор α).

Уточним выбор параметра α и контура C. Пусть $\gamma_2 \in (0, 1)$, $\gamma_1 = 2\gamma_2^2$. Положим

$$\alpha = -\sigma(1 - \gamma_2) + it_1, \quad \sigma = \operatorname{Re} s < 0.$$

В качестве C возьмем границу прямоугольника

$$P = \left\{z: \ |\operatorname{Re} z| \leqslant \gamma_1|\sigma|, \ |\operatorname{Im} z| \leqslant a_1\right\}.$$

Считаем, что $\pi G(R) < \pi b < a_1$. Пусть для удобства $\gamma_1|\sigma| \leqslant 1$.

Наша цель — пользуясь некоторым представлением типа (24), оценить $|F(s)|$ в полуполосе S_2 через максимум модуля функции F в полуполосе S_1. Проблема заключается в том, что в оценке (20) $V \notin L_k$ (при $\Lambda \in \Lambda[\psi]$ правая часть в (23) есть мажоранта из L_2). Чтобы преодолеть эту трудность, предварительно докажем следующее утверждение.

Лемма 5. *Пусть $s = \sigma + it \in S_2$, $\mu \in \Gamma_n$, $\eta \in C$, γ_2 — любое, но фиксированное число из интервала $(0,1)$. Тогда*

$$\left|e^{-\mu(\alpha-s-\eta)}\right| \leqslant A(\gamma_2)e^{-\gamma_2(1+\gamma_2)r_n|\sigma|+acH(r_n)}, \quad n \geqslant 1, \tag{26}$$

где a, c — числа, введенные выше, $H \in R_k$.

Доказательство. Полагая $\eta = \eta_1 + i\eta_2$, имеем

$$\alpha - s - \eta = -\gamma_2\sigma - \eta_1 - i(-t_1 + t + \eta_2).$$

Если $\mu = re^{i\varphi} = \mu_1 + i\mu_2$, $R = \operatorname{Re}[-\mu(\alpha - s - \eta)]$, то

$$R = \mu_1\gamma_2\sigma + \mu_1\eta_1 - \mu_2(-t_1 + t + \eta_2).$$

Отсюда получаем, что

$$R \leqslant -r\gamma_2|\sigma|\cos\varphi + r\gamma_1|\sigma|\cos\varphi + r|\sin\varphi|c, \quad r_n \leqslant r \leqslant r_{n+1}, \quad 0 < |\varphi| \leqslant \varphi_n < \frac{\pi}{4}.$$

Значит,

$$R \leqslant -r_n\gamma_2|\sigma|(1 + 2\gamma_2)\cos\varphi_n + c\varphi_n r_{n+1}, \quad n \geqslant 1.$$

Так как

$$r_{n+1} \leqslant ar_n, \quad n \geqslant 1, \qquad \varphi_n = \varepsilon\frac{H(r_n)}{r_n} \downarrow 0 \quad \text{при } n \to \infty,$$

то при $n \geqslant n_0(\gamma_2)$ имеем

$$R \leqslant -\gamma_2(1 + \gamma_2)r_n|\sigma| + acH(r_n).$$

Оценка (26) доказана. □

Вернемся к доказательству теоремы 1. Для $s \in S_2$, $\mu \in \Gamma_n$ оценим выражение

$$\left|\frac{\omega(\mu,\alpha,F)e^{\mu s}}{Q(\mu)}\right|.$$

Так как $\gamma_1|\sigma| \leqslant 1$, то

$$\left|\omega(\mu,\alpha,F)e^{\mu s}\right| \leqslant (1 + a_1^2)\left|e^{-\mu(\alpha-s)}\right| \max_{\eta\in P}\left|e^{\mu\eta}\right| \max_{t\in C}|\gamma(t)| \max_{u\in C_\alpha}|F(u)|.$$

Поскольку $\max\limits_{\eta\in P}|e^{\mu\eta}|$ достигается на контуре C, то, применяя лемму 5, имеем

$$\left|\omega(\mu,\alpha,F)e^{\mu s}\right| \leqslant B(\gamma_2)e^{-\gamma_2(1+\gamma_2)r_n|\sigma|+acH(r_n)} \max_{t\in C}|\gamma(t)| \max_{u\in C_\alpha}|F(u)|. \tag{27}$$

Здесь

$$B(\gamma_2) = (1 + a_1^2)A(\gamma_2), \quad \mu \in \Gamma_n, \quad n \geqslant 1, \quad \gamma_2 \in (0,1).$$

Далее, из свойства 2^0 функции Q следует, что

$$\varlimsup_{|x|\to\infty}\frac{\ln_{k-1}|x|}{|x|}g(x) \leqslant 0, \quad k \geqslant 2.$$

Следовательно, учитывая лемму 3, для любого $\gamma_3 > 0$ при $|\sigma| < \varepsilon_0 = \varepsilon_0(\gamma_3)$ на вертикальных участках контура C получаем оценку

$$|\gamma(t)| \leqslant \exp_k\left[\gamma_3\gamma_1^{-1}|\sigma|^{-1}\right], \quad |\operatorname{Re} t| = \gamma_1|\sigma|, \quad k \geqslant 2. \tag{28}$$

Так как на горизонтальных отрезках контура $|\gamma(t)| \leqslant N(a_1)$, то, полагая $\gamma_3 = \gamma_2^4$ и учитывая (28) и равенство $\gamma_1 = 2\gamma_2^2$, получим

$$\max_{t\in C}|\gamma(t)| \leqslant \exp_k\left[\gamma_2^2|\sigma|^{-1}\right], \quad |\sigma| < \varepsilon_1 = \varepsilon_1(\gamma_2). \tag{29}$$

Таким образом, из (27), (29) для $s \in S_2$ и $\mu \in \Gamma_n$ имеем

$$\left|\omega(\mu,\alpha,F)\exp^{\mu s}\right| \leqslant C(\gamma_2)\exp_k\left[\gamma_2^2|\sigma|^{-1}\right]\exp^{-\gamma_2(1+\gamma_2)r_n|\sigma|+acH(r_n)]}\max_{u\in C_\alpha}|F(u)|, \tag{30}$$

где $\gamma_1|\sigma| \leqslant 1$, $n \geqslant 1$, $H \in R_k$.

На дугах окружностей K_n и K_{n+1} контура Γ_n, в отличие от ситуации $k = 2$, рассмотренной в [2], вместо (23) выполняется лишь оценка (20): при $|z| = r = r_i$, $i = n, n+1$, имеем

$$-\ln|Q(z)| \leqslant V(r), \quad V(r) = o(r) \quad \text{при } r \to \infty. \tag{31}$$

Пусть γ_n — часть контура Γ_n без дуг C_n, C_{n+1}, $n \geqslant 2$, где C_n означает общую часть контуров Γ_n и Γ_{n+1}, $n \geqslant 1$. Считаем, что $\gamma_1 = \Gamma_1 \setminus C_1$, где $C_1 = \{z : |z| = r_1,\ |\arg z| \leqslant \varphi_1\}$. Из (30), (31) видно, что для любого фиксированного $s \in S_2$

$$\left|\frac{\omega(\mu,\alpha,F)e^{\mu s}}{Q(\mu)}\right| \leqslant e^{-\gamma_2|\sigma|r_n}, \quad \mu \in \gamma_n, \quad n \geqslant n_1.$$

Значит, для любого фиксированного $s \in S_2$

$$I_n = \int\limits_{C_n}\frac{\omega(\mu,\alpha,F)e^{\mu s}}{Q(\mu)}\,d\mu \to 0$$

при $n \to \infty$. А поскольку

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\int\limits_{\Gamma_k}\frac{\omega(\mu,\alpha,F)e^{\mu s}}{Q(\mu)}\,d\mu\right) = \sum_{k=1}^{n}\left(\int\limits_{\gamma_k}\frac{\omega(\mu,\alpha,F)e^{\mu s}}{Q(\mu)}\,d\mu\right) + I_n,$$

то на самом деле вместо (24) в S_2 имеет место представление

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\int\limits_{\gamma_n}\frac{\omega(\mu,\alpha,F)e^{\mu s}}{Q(\mu)}\,d\mu\right). \tag{32}$$

Теперь оценим $|Q(\mu)|$ на γ_n снизу, причем равномерно по φ, $\varphi_{n+1} \leqslant |\varphi| \leqslant \varphi_n$. Для этого обратимся к лемме 4, согласно которой найдется такое $\rho > 0$, что при $r \geqslant \rho$

$$\ln\left|Q(re^{i\varphi})\right| \leqslant 6H(r)\ln\frac{r}{H(r)} + \frac{8\pi}{|\varphi|}\frac{H^2(r)}{r} + 3\mu_1 b,$$

где

$$r_n \leqslant r \leqslant r_{n+1}, \quad \frac{r_{n+1}}{r_n} \to 1 \quad n \to \infty, \quad r_{n+1} \leqslant ar_n, \quad n \geqslant 1, \quad \varphi_{n+1} \leqslant |\varphi| \leqslant \varphi_n;$$

b — плотность последовательности $M = \{\mu_n\}$, $\pi G(R_k) < \pi b < a_1$. Так как

$$H(r) \uparrow \infty, \quad \frac{H(r)}{r} \downarrow 0 \quad \text{при } r \uparrow \infty, \quad \varphi_n = \varepsilon_0\frac{H(r_n)}{r_n},$$

то для $\mu = re^{i\varphi} \in \gamma_n$ при $n \geqslant n_2$ имеем:

$$(1) \quad 6H(r)\ln\frac{r}{H(r)} \leqslant 12H(r_n)\ln\frac{r_n}{H(r_n)};$$

$$(2) \quad \frac{8\pi}{|\varphi|}\frac{H^2(r)}{r} \leqslant \frac{16\pi}{\varepsilon_0}H(r_n).$$

Таким образом, на контуре γ_n имеем

$$-\ln|Q(\mu)| \leqslant 12H(r_n)\ln\frac{r_n}{H(r_n)} + \frac{16\pi}{\varepsilon_0}H(r_n), \quad n \geqslant n_2. \tag{33}$$

Так как $H \in R_k$, то функция $H(r)\ln(r/H(r))$, следовательно, и $H(r)$ принадлежат L_k, так что из (30), (33) окончательно имеем

$$\left|\frac{\omega(\mu,\alpha,F)e^{\mu s}}{Q(\mu)}e^{\mu s}\right| \leqslant D(\gamma_2)\exp_k\left[\gamma_2^2|\sigma|^{-1}\right]e^{-\gamma_2(1+\gamma_2)r_n|\sigma|+w(r_n)}\max_{u\in C_\alpha}|F(u)|, \tag{34}$$

где w — некоторая функция из L_k, $\gamma_1|\sigma| \leqslant 1$, $\mu \in \gamma_n$, $n \geqslant 1$.

Теперь можно оценить $M_{S_2}(\sigma)$ сверху через $M_{S_1}(\sigma)$. Из (32), учитывая (34), получаем

$$M_{S_2}(\sigma) = \max_{|t-t_2|\leqslant a_2} |F(\sigma+it)| \leqslant D(\gamma_2)\exp_k\Big[\gamma_2^2|\sigma|^{-1}\Big] \max_{u\in C_\alpha}|F(u)| \sum_{n=1}^{\infty} |\gamma_n| \exp\Big[w(r_n) - \gamma_2 r_n|\sigma|\Big], \quad (35)$$

где $w \in L_k$, $|\gamma_n|$ — длина γ_n.

Рассмотрим ряд Дирихле

$$\Phi(s) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{\nu_n s}, \quad (36)$$

где

$$\nu_n = \gamma_2 r_n, \quad n \geqslant 1, \quad b_n = |\gamma_n| \exp\left[w\left(\frac{\nu_n}{\gamma_2}\right)\right],$$

причем $n = o(\nu_n)$ при $n \to \infty$ согласно выбору r_n. Очевидно, ряд (36) сходится абсолютно в Π_0, а так как $w \in L_k$, то k-порядок функции Φ в полуплоскости Π_0 равен нулю (см. [3]):

$$\rho(\Phi) = \varlimsup_{n\to\infty} \frac{\ln_{k-1}\nu_n}{\nu_n} \ln^+|b_n| = 0, \quad k \geqslant 2.$$

Учитывая это обстоятельство, из (35) получаем

$$M_{s_2}(\sigma) \leqslant \max_{u\in C_\alpha}|F(u)|\exp_k\Big[2\gamma_2^2|\sigma|^{-1}\Big], \quad 0 < |\sigma| < \varepsilon_2(\gamma_2). \quad (37)$$

Выберем $\gamma_2 \in (0, 1/2)$. Так как $\alpha = |\sigma|(1-\gamma_2) + it_1$, то

$$\big|\operatorname{Im} u - t_1\big| \leqslant a_1, \quad |\sigma|(1-\gamma_2-\gamma_1) \leqslant \operatorname{Re} u \leqslant |\sigma|(1-\gamma_2+\gamma_1),$$
$$\gamma_1 = 2\gamma_2^2 < \gamma_2 \quad \text{при} \quad 0 < \gamma_2 < \frac{1}{2},$$

если $u \in C_\alpha$. Следовательно, если функция F имеет в полуполосе S_1 k-порядок, равный ρ_{s_1}, то из (37) окончательно имеем

$$M_{s_2}(\sigma) \leqslant \exp_k\Big[2\gamma_2^2|\sigma|^{-1}\Big]\exp_k\Big[\big(\rho_{s_1}+\gamma_2\big)\big(1-\gamma_2-\gamma_1\big)^{-1}|\sigma|^{-1}\Big], \quad 0 < |\sigma| < \varepsilon_3(\gamma_2).$$

Отсюда

$$M_{s_2}(\sigma) \leqslant \exp_k\Big[\big(\rho_{s_1}+3\gamma_2\big)\big(1-\gamma_2-\gamma_1\big)^{-1}|\sigma|^{-1}\Big], \quad 0 < |\sigma| < \varepsilon_4(\gamma_2).$$

Это означает, что k-порядок ρ_{s_2} в полуполосе S_2 удовлетворяет оценке

$$\rho_{s_2} \leqslant \frac{\rho_{s_1}+3\gamma_2}{1-\gamma_2-\gamma_1}, \quad \gamma_1 = 2\gamma_2^2, \quad 0 < \gamma_2 < \frac{1}{2}.$$

Так как $\gamma_2 \in (0, 1/2)$ — любое, то $\rho_{s_2} \leqslant \rho_{s_1}$. Аналогично показывается и обратное неравенство. Таким образом, $\rho_{s_1} = \rho_{s_2}$ для любых полуполос $S(a_1, t_1)$ и $S(a_2, t_2)$, если $a_1 > \pi G(R_k)$, $a_2 > \pi G(R_k)$.

Замечание 1. Теорема 1 не сводится к простому случаю $\rho_s = \rho_k$, где $\rho_k = \rho(F)$ — k-порядок функции F в полуплоскости Π_0 (он вычисляется по коэффициентам, см. [3]), а ρ_s — k-порядок в полуполосе $S(a, t_0)$, $a > \pi G(R_k)$.

Действительно, пусть Λ имеет конечную R_k-плотность $G(R_k)$,

$$q_k^* = \varlimsup_{n\to\infty} \frac{\ln_{k-1}\lambda_n}{\lambda_n} \int_0^1 \frac{n(\lambda_n; t)}{t}\,dt < \infty,$$

где $n(\lambda_n; t)$ — число точек $\lambda_m \neq \lambda_n$ из отрезка $\{x : |x-\lambda_n| \leqslant t\}$. В [3] показано, что если $a > \pi G(R_k)$, то

$$\rho_s \leqslant \rho_k \leqslant \rho_s + q_k^*, \quad k \geqslant 2.$$

Для любой последовательности Λ из теоремы 1 существует функция $F \in D_0(\Lambda)$, для которой $\rho_k = \rho_s + q_k^*$, где ρ_s — порядок в полуполосе ширины $> 2\pi G(R_k)$ (см. [4]). Это означает, что если $q_k^* > 0$, то в данном случае $\rho_k > \rho_s$.

В отличие от ρ_k, порядок ρ_s является локальной характеристикой роста для функции $F \in D_0(\Lambda)$. Смысл теоремы в том, что равенство $\rho_{s_1} = \rho_{s_2}$ не зависит от q_k^*.

При $G(R_k) = 0$ равенство $\rho_{s_1} = \rho_{s_2}$ верно для любых полуполос ($a_1 > 0$, $a_2 > 0$ — любые). Однако отметим, что аналог теоремы 1 для горизонтальных лучей в условиях теоремы 1 не верен (см. [2]).

Пусть область сходимости степенного ряда

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^{\lambda_n}, \quad \lambda_n \in \mathbb{N}, \tag{38}$$

— единичный круг $D(0,1) = \{z : \ |z| < 1\}$. Сделаем замену $z = e^s$ и рассмотрим функцию

$$F(s) = f(e^s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{\lambda_n s}, \quad s = \sigma + it.$$

Ясно, что $F \in D_0(\Lambda)$, где $\Lambda = \{\lambda_n\}$, $\lambda_n \in \mathbb{N}$.

Введем следующую характеристику роста функции f:

$$\tau(f) = \varlimsup_{r \to 1-} \frac{\ln_k M_f(r)}{(1-r)^{-1}}, \quad M_f(r) = \max_{|z|=r} |f(z)|, \quad r < 1.$$

При $\operatorname{Re} s = \sigma \to 0-$ имеем: $|z| = r \to 1-$, $|\sigma| = |\ln r| = 1 - r + o(1-r)$. Так как $M_f(e^\sigma) = M(\sigma)$, то $\rho_2(F) = \tau(f)$. Положим

$$\tau_\Delta(f) = \varlimsup_{r \to 1-} \frac{\ln_k^+ M_\Delta(r)}{(1-r)^{-1}}, \quad M_\Delta(r) = \max_{|\varphi - \varphi_0| \leqslant a} \bigl|f(re^{i\varphi})\bigr|.$$

Далее, сектору $\Delta(a,\varphi) = \bigl\{z = re^{i\varphi} : \ 0 \leqslant r < 1, \ |\varphi - \varphi_0| \leqslant a\bigr\}$ при замене $z = e^s$ соответствует некоторая полуполоса

$$S(a, t_0) = \bigl\{s = \sigma + it : \ |t - t_0| \leqslant a, \ \sigma < 0\bigr\}.$$

Видим, что $M_\Delta(r) = M_s(\sigma)$, так что $\tau_\Delta(f) = \rho_s(F)$. Поскольку $\Lambda \subset \mathbb{N}$, то

$$\int_0^1 \frac{n(\lambda_n; t)}{t}\, dt = 0,$$

и $q^* = 0$.

Следствие 1. Пусть последовательность $\Lambda = \{\lambda_n\}$, $\lambda_n \in \mathbb{N}$, имеет R_k-плотность $G(R_k) < 1$. Тогда для любого $a > \pi G(R_k)$ порядки функции (38) в круге $D(0,1)$ и секторе $\Delta(a,\varphi_0)$ совпадают: $\tau(f) = \tau_\Delta(f)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гайсин А. М.* Оценка роста функции, представленной рядом Дирихле, в полуполосе// Мат. сб. — 1982. — *117 (159)*, № 3. — С. 412–424.
2. *Гайсин А. М.* Поведение суммы ряда Дирихле в полуполосах// Мат. заметки. — 1987. — *42*, № 5. — С. 660–669.
3. *Гайсин А. М., Аиткужина Н. Н.* Двусторонняя оценка k-порядка ряда Дирихле в полуполосе// Уфим. мат. ж. — 2014. — *6*, № 4. — С. 19–31.
4. *Гайсин А. М., Аиткужина Н. Н.* Точность оценок для k-порядка ряда Дирихле в полуполосе// Уфим. мат. ж. — 2015. — *7*, № 4. — С. 15–24.
5. *Гайсин А. М., Сергеева Д. И.* Целые функции с заданной последовательностью нулей, имеющие правильное поведение на вещественной оси. I// Сиб. мат. ж. — 2007. — *48*, № 5. — С. 996–1008.
6. *Гайсин А. М., Сергеева Д. И.* Оценка ряда Дирихле в полуполосе в случае нерегулярного распределения показателей. II// Сиб. мат. ж. — 2008. — *49*, № 2. — С. 280–298.
7. *Леонтьев А. Ф.* Последовательности полиномов из экспонент. — М.: Наука, 1980.

8. *Леонтьев А. Ф.* Ряды экспонент. — М.: Наука, 1976.
9. *Мандельбройт С.* Примыкающие ряды. Регуляризация последовательностей, Применения. — М.: ИЛ, 1955.
10. *Садыхов Г. С.* Вопросы роста функций, определенных рядами Дирихле и другими более общими рядами/ Дисс. канд. физ.-мат. наук. — Москва, 1968.
11. *Malliavin P., Rubel L. A.* On small entire functions of exponential type with given zeros// Bull. Soc. Math. France. — 1961. — *89.* — С. 175–206.
12. *Ritt J. F.* On certain points in the theory of Dirichlet series// Am. J. Math. — 1928. — *50*, № 1. — С. 73–86.

А. М. Гайсин
Институт математики с вычислительным центром
Уфимского научного центра РАН
E-mail: `Gaisinam@mail.ru`

Н. Н. Аиткужина
Башкирский государственный университет, Уфа
E-mail: `Yusupovan@rambler.ru`

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 142 (2017). С. 57–72

УДК 517.53

КВАЗИАНАЛИТИЧЕСКИЕ КЛАССЫ ФУНКЦИЙ В ЖОРДАНОВЫХ ОБЛАСТЯХ КОМПЛЕКСНОЙ ПЛОСКОСТИ

© 2017 г. **Р. А. ГАЙСИН**

Аннотация. Изучаются классы Карлемана в жордановых областях комплексной плоскости. Установлен в некотором смысле универсальный для всех слабо равномерных областей критерий квазианалитичности регулярных классов Карлемана. Доказательство основано на решении задачи Дирихле с неограниченной граничной функцией, где по существу использован один результат Берлинга об оценке гармонической меры.

***Ключевые слова*:** квазианалитические классы в жордановых областях, регулярные последовательности, билогарифмическое условие квазианалитичности, гармоническая мера, задача Дирихле.

***AMS Subject Classification*:** 30D60

1. Обзор результатов и постановка задач. Пусть $\{M_n\}_{n=0}^{\infty}$ — последовательность положительных чисел. Некоторые из элементов последовательности M_n могут быть равны $+\infty$, но предполагается, что последовательность содержит бесконечное число конечных M_n. Классом $C\{M_n\}$ называется множество всех бесконечно дифференцируемых функций f, заданных на отрезке $I=[a,b]$, $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$, для каждой из которых существует такая постоянная K_f, что

$$\sup_{a<x<b} \left| f^{(n)}(x) \right| \leqslant K_f^n M_n, \quad n \geqslant 0$$

(см. [8]). В общем случае I может быть интервалом или полуинтервалом.

В 1912 г. Ж. Адамаром был поставлен следующий вопрос (см. [8]): каковы должны быть числа M_n, чтобы для всяких двух функций f и φ из класса $C\{M_n\}$, для которых в некоторой точке x_0 интервала $I=(a,b)$ при всех $n \geqslant 0$ выполняются равенства

$$f^{(n)}(x_0) = \varphi^{(n)}(x_0),$$

имело бы место тождество $f(x) \equiv \varphi(x)$, $a<x<b$?

Было замечено, что это во всяком случае так, если $M_n = n!$. Дело в том, что в этом случае класс $C\{n!\}$ совпадает с классом вещественно-аналитических на интервале (a,b) функций (см. [8]). В силу аддитивности классов $C\{M_n\}$ проблема Адамара может быть сформулирована и в такой форме: каковы должны быть числа M_n, чтобы класс $C\{M_n\}$ был квазианалитическим, т.е. всякая функция $f \in C\{M_n\}$, для которой в некоторой точке $x_0 \in I$

$$f^{(n)}(x_0) = 0, \quad n \geqslant 0,$$

тождественно равнялась нулю?

Ответ на вопрос Адамара был дан впервые А. Данжуа. Он установил квазианалитичность класса $C\{M_n\}$ для последовательностей $\{M_n\}$ вида

$$M_n = n!(\ln n)^n, \quad M_n = n!(\ln n)^n(\ln\ln n)^n, \ldots$$

и высказал гипотезу, что условие

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{M_n}} = \infty$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 15-01-01661).

является достаточным для квазианалитичности класса $C\{M_n\}$ (см. [8]).

Проблема квазианалитичности Адамара для отрезка (интервала, полуинтервала) I полностью решается так называемой теоремой Данжуа—Карлемана. Одна из эквивалентных ее формулировок, принадлежащая Островскому, следующая.

Предложение 1 (см. [8,9]). *Для того, чтобы класс $C\{M_n\}$ был квазианалитическим, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\int_1^\infty \frac{\ln T(r)}{r^2}dr = +\infty,$$

где $T(r) = \sup\limits_{n\geqslant 0} \frac{r^n}{M_n}$ — функция следа последовательности $\{M_n\}$.

Можно показать (см., например, [8]), что для последовательности $M_n = n^n$

$$T(r) \sim e^{r/e}, \quad r \to \infty.$$

Квазианалитичность класса $C\{n^n\}$ вытекает из приведенной теоремы, так как расходится интеграл

$$\int_1^\infty \frac{dr}{r}.$$

Последовательность Жевре

$$M_n = (n!)^\alpha, \quad \alpha > 1,$$

определяет неквазианалитический класс $C\{M_n\}$.

Пусть D — некоторая жорданова область в конечной комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Через $H(D, M_n)$ обозначим класс функций f, аналитических в D и удовлетворяющих условию

$$\sup_{z\in D}\left|f^{(n)}(z)\right| \leqslant c_f A^n M_n, \quad n \geqslant 0.$$

Предположим, что область D обладает тем свойством, что все производные $f^{(n)}$ функции $f \in H(D, M_n)$ непрерывно продолжаются до границы ∂D. В этом случае класс Карлемана $H(D, M_n)$ называется *квазианалитическим в точке* $z_0 \in \partial D$, если в данном классе нет такой отличной от тождественного нуля функции f, что

$$f^{(n)}(z_0) = 0, \quad n \geqslant 0,$$

где $f^{(n)}$, $n \geqslant 0$, — производные, непрерывно продолженные до границы ∂D.

Класс жордановых областей, для которых реализуется указанное предположение, дает следующее утверждение.

Лемма 1. *Если область D является слабо равномерной, то все производные функции $f \in H(D, M_n)$ продолжаются до непрерывных в $\overline{D}$ функций.*

Лемма доказывается тем же способом, что и лемма Фату (см. [10]).

По определению, односвязная ограниченная (или собственная подобласть $\mathbb{C}$) область G называется *равномерной*, если существуют такие постоянные a и b, что любую пару точек $z_1, z_2 \in G$ можно соединить дугой $\alpha \subset G$ со следующими свойствами:

1^0. $|\alpha| \leqslant a\,|z_1 - z_2|$ ($|\alpha|$ — длина α);

2^0. для любого $z \in \alpha$

$$\min(|\alpha_1|, |\alpha_2|) \leqslant b\, d(z, \partial G),$$

где α_1 и α_2 — компоненты множества $\alpha \setminus \{z\}$, а $d(z, \partial G) = \inf\limits_{\xi\in\partial G}|z-\xi|$.

Любую область $G \subset \mathbb{C}$ ($G \neq \mathbb{C}$), обладающую только (или по крайней мере) свойством 1^0, будем называть *слабо равномерной*. Таким образом, всякая равномерная область является слабо равномерной. Обратное, очевидно, неверно (соответствующий пример будет приведен в разделе 2 при доказательстве теоремы 7).

Сделаем краткий обзор результатов, связанных с проблемой квазианалитичности класса $H(D,M_n)$, и сформулируем задачу, которая здесь будет обсуждаться. Как известно, задача о квазианалитичности класса $H(\Delta_\gamma,M_n)$ для угла

$$\Delta_\gamma=\left\{z:\ |\arg z|<\frac{\pi}{2\gamma},\ 0<|z|<\infty\right\},\quad 1<\gamma<\infty,$$

впервые была поставлена и решена Р. Салинасом в 1955 г. (см. [16]): *класс $H(\Delta_\gamma,M_n)$ является квазианалитическим в точке $z=0$ тогда и только тогда, когда выполняется условие*

$$\int_1^\infty \frac{\ln T(r)}{r^{1+\gamma/(1+\gamma)}}dr=+\infty.$$

Следует заметить, что теорема Островского является предельным случаем теоремы Р. Салинаса (при $\gamma\to\infty$).

Критерий квазианалитичности класса $H(K,M_n)$, где K — круг, позже был обнаружен Б. И. Коренблюмом (см. [7]). Им доказано следующее утверждение: *класс $H(K,M_n)$ квазианалитичен в граничной точке круга тогда и только тогда, когда*

$$\int_1^\infty \frac{\ln T(r)}{r^{3/2}}dr=+\infty.$$

Отметим также, что в работах М. М. Джрбашяна и его учеников разработана теория α-квазианалитичности, которая включает классическую квазианалитичность при $\alpha=0$.

Условие, необходимое и достаточное для квазианалитичности класса $H(D,M_n)$ в граничной точке произвольной выпуклой (не обязательно ограниченной) области D, установлено Р. С. Юлмухаметовым в [13] (см. также [14]). Приведем этот результат.

Теорема 1 (см. [13])**.** *Пусть D — выпуклая, но необязательно ограниченная область, $z_0\in\partial D$,*

$$T(r)=\sup_{n\geqslant 0}\frac{r^n}{M_n}$$

— функция следа последовательности $\{M_n\}$. Через $\beta(z_0,s)$ обозначим величину угла между касательными к границе D, проведенными в точках, удаленных от точки z_0 на длину дуги границы, равной s. Положим

$$R(z_0,s)=\exp\int_s^\varepsilon \frac{\pi+\beta(z_0,x)}{\beta(z_0,x)}d\ln x,\quad 0\leqslant s<\varepsilon.$$

Тогда условие

$$\int_1^\infty \frac{\ln T(r)}{r^2R^{-1}(z_0,r)}dr=\infty \tag{1}$$

является необходимым и достаточным для квазианалитичности класса $H(D,M_n)$ в точке z_0.

В частности, из этой теоремы легко получить упомянутые выше условия квазианалитичности классов $H(D,M_n)$ в случае, если D — круг или угол раствора $\pi\alpha$, $0<\alpha<1$.

Теорема Р. С. Юлмухаметова, как и теоремы Салинаса и Коренблюма, доказана в терминах функции следа $T(r)$. Возникает задача: для каких областей достаточно общего вида (необязательно ограниченных, выпуклых и односвязных) существуют критерии квазианалитичности, которые явно зависят только от заданной последовательности $\{M_n\}$, причем для регулярных последовательностей допускают переформулировку в виде билогарифмического условия Левинсона?

Пусть $\{M_n\}$ — положительная последовательность чисел M_n, удовлетворяющая условию $M_n^{1/n}\to\infty$ при $n\to\infty$. Можно считать, что $M_0=1$. Последовательность $\{M_n\}$ называется *логарифмически выпуклой*, если выполняется условие

$$M_n^2\leqslant M_{n-1}M_{n+1},\quad n\geqslant 1.$$

Через $\{M_n^c\}$ обозначим последовательность, полученную из $\{M_n\}$ путем выпуклой регуляризации посредством логарифмов (см., например, [8, 9]).

В [3] приведены критерии квазианалитичности класса Карлемана $H(\Delta_\gamma, M_n)$ для угла

$$\Delta_\gamma = \left\{z: \ |\arg z| < \frac{\pi}{2\gamma}, \ 0 < |z| < \infty\right\}, \quad 1 < \gamma < \infty,$$

в формах, явно связанных с заданной последовательностью $\{M_n\}$ (или $\{M_n^c\}$), а именно, доказано следующее утверждение.

Теорема 2 (см. [3])**.** *Для того, чтобы класс $H(\Delta_\gamma, M_n)$ был квазианалитическим в точке $z = 0$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось любое из следующих эквивалентных условий*:

$$(1) \quad \int_1^\infty \frac{\ln T(r)}{r^{1+\gamma/(1+\gamma)}} dr = \infty, \quad \text{где} \quad T(r) = \sup_{n\geqslant 0} \frac{r^n}{M_n} \quad (\text{критерий Р. Салинаса});$$

$$(2) \quad \sum_{n=0}^\infty \left(\frac{M_n^c}{M_{n+1}^c}\right)^{\gamma/(1+\gamma)} = \infty;$$

$$(3) \quad \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{\beta_n^{\gamma/(1+\gamma)}} = \infty, \quad \text{где} \quad \beta_n = \inf_{k\geqslant n} M_k^{1/k}.$$

Перейдем теперь к рассмотрению вопроса о билогарифмическом условии квазианалитичности для угла. Для этого, следуя [4], введем в рассмотрение присоединенную последовательность $\{m_n\}$, где $m_n = M_n/n!$, а $\{M_n\}$ — любая положительная последовательность чисел. Теперь дополнительно предположим, что последовательность $\{M_n\}$ подчинена следующим требованиям:

$$\text{(a)} \quad m_n^2 \leqslant m_{n-1}m_{n+1}, \quad n \geqslant 1;$$

$$\text{(b)} \quad \sup_n \left(\frac{m_{n+1}}{m_n}\right)^{1/n} < \infty;$$

$$\text{(c)} \quad m_n^{1/n} \to \infty \quad \text{при } n \to \infty.$$

Если выполнены условия (a)–(c), то последовательность $\{M_n\}$ называется *регулярной*. Условие (a) — это условие логарифмической выпуклости последовательности $\{m_n\}$. Отметим также, что из условия (b) вытекает замкнутость класса

$$C\{M_n\} = \left\{f \in C^\infty[a,b]: \ \max_{x\in[a,b]} |f^{(n)}(x)| \leqslant K_f^n M_n, \ n \geqslant 0\right\}$$

относительно операции дифференцирования. Из условия (c) следует, что класс Карлемана $C\{M_n\}$ содержит и аналитические функции. Для регулярной последовательности $\{M_n\}$ введем так называемый ассоциированный вес (см. [5])

$$\omega(r) = \sup_{n\geqslant 0} \frac{r^n}{m_n}.$$

Из условия (a) следует, что $M_n^2 \leqslant M_{n-1}M_{n+1}$, т.е. сама последовательность $\{M_n\}$ логарифмически выпукла (это проверяется непосредственно). Поэтому, согласно теореме Данжуа—Карлемана, класс $C\{M_n\}$ является квазианалитическим тогда и только тогда, когда выполнено хотя бы одно из следующих эквивалентных условий (см. [8, 9]):

$$\text{(a)} \quad \int_1^\infty \frac{\ln T(r)}{r^2} dr = \infty; \qquad \text{(b)} \quad \sum_{n=0}^\infty \frac{M_n}{M_{n+1}} = \infty.$$

Как показал Е. М. Дынькин (см. [5]), для регулярной последовательности $\{M_n\}$, условие (b) (следовательно, и условие (a)) равносильно билогарифмическому условию Левинсона

$$\int\limits_0^d \ln\ln h(r)dr = +\infty,$$

где $h(r) = \omega(1/r)$, а величина $d > 0$ выбрана таким образом, что $h(d) \geqslant e$. Здесь

$$h(r) = \sup_{n\geqslant 0} \frac{1}{m_n r^n}, \quad m_n = \frac{M_n}{n!}, \quad r > 0.$$

Ясно, что h — убывающая функция, $\lim\limits_{r\to 0} h(r) = \infty$. Поскольку последовательность $\{m_n\}$ логарифмически выпукла, то имеет место обратное представление:

$$m_n = \sup_{r>0} \frac{1}{r^n h(r)}, \quad n \geqslant 0.$$

Теорема 3 (см. [3]). *Пусть последовательность $\{M_n\}$ $(n \geqslant 0)$ положительных чисел M_n такова, что измененная последовательность $\{M_n^*\}$, $M_n^* = M_n^{\gamma/(1+\gamma)}$, $1 < \gamma < \infty$, является регулярной. Класс $H(\Delta_\gamma, M_n)$ квазианалитичен в точке $z = 0$ тогда и только тогда, когда выполняется условие Левинсона*

$$\int\limits_0^d \ln\ln h_*(r)dr = +\infty, \tag{2}$$

где

$$h_*(r) = \sup_{n\geqslant 0} \frac{n!}{M_n^{1+\gamma/(1+\gamma)} r^n}, \quad 1 < \gamma < \infty.$$

Отметим, что теорема Данжуа—Карлемана является предельным случаем условий (1)–(3) теоремы 2. Аналог теоремы 3 для отрезка ранее был доказан Е. М. Дынькиным при выполнении билогарифмического условия, получающегося из условия Левинсона (2), если формально положить $\gamma = \infty$.

Как было сказано, критерий квазианалитичности класса $H(D, M_n)$ для выпуклой области доказан Р. С. Юлмухаметовым. Оказывается, если выпуклая область D в граничной точке z_0 удовлетворяет некоторому интегральному условию (зависящему от геометрии области), то условие (1) в теореме 1 допускает более простую формулировку.

Теорема 4 (см. [2]). *Пусть D — выпуклая, но не обязательно ограниченная область, $z_0 \in \partial D$,*

$$T(r) = \sup_{n\geqslant 0} \frac{r^n}{M_n}$$

— функция следа последовательности $\{M_n\}$. Через $\beta(z_0, s)$ обозначим величину угла между касательными к границе D, проведенными в точках[1], удаленных от точки z_0 на длину дуги границы, равной s. Предположим, что в точке z_0 выполняется условие

$$\sup_s \int\limits_s^\varepsilon \frac{\pi\alpha - \beta(z_0, x)}{x} dx < \infty, \quad \pi\alpha = \lim_{s\to 0} \beta(z_0, s), \quad 0 < \alpha \leqslant 1. \tag{3}$$

Класс $H(D, M_n)$ квазианалитичен в точке z_0 тогда и только тогда, когда

$$\int\limits_1^\infty \frac{\ln T(r)}{r^{(\alpha+2)/(\alpha+1)}} dr = +\infty. \tag{4}$$

[1]Если какая-нибудь из указанных точек угловая (таких точек не более чем счетное число), рассматривается касательная справа.

Таким образом, для выпуклых областей, для которых величина $\beta(z_0, s)$ подчинена требованию (3), критерий квазианалитичности класса $H(D, M_n)$ в точке $z_0 \in \partial D$ совпадает с критериями квазианалитичности Салинаса для угла

$$\Delta_\alpha = \left\{z:\ |\arg z| < \frac{\pi\alpha}{2}\right\}, \quad 0 < \alpha < 1,$$

и Коренблюма для полуплоскости Δ_1. Поскольку для угла Δ_α и для круга условие (3) выполняется автоматически, то теорема 4 естественно переходит в критерии Салинаса и Коренблюма.

Условие (4) может быть записано в терминах самой последовательности $\{M_n\}$. А именно, если последовательность $\{M_n\}$ логарифмически выпукла, то это условие эквивалентно требованию

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{M_n}{M_{n+1}}\right)^{1/(\alpha+1)} = \infty.$$

Пусть последовательность $\{M_n^{1/(1+\alpha)}\}$ является регулярной. В силу теоремы 3, для выпуклых областей с дополнительным условием (3) в точке $z_0 \in \partial D$ билогарифмический критерий квазианалитичности в данной точке имеет вид

$$\int_0^d \ln\ln h_*(r)dr = +\infty, \quad h_*(r) = \sup_{n\geqslant 0} \frac{n!}{M_n^{1/(1+\alpha)} r^n}, \tag{5}$$

где

$$\pi\alpha = \lim_{s\to 0} \beta(z_0, s).$$

Для областей достаточно общего вида (не обязательно выпуклых и даже односвязных), каждая из которых вблизи рассматриваемой граничной точки в некотором смысле близка к углу или сравнима с «двуугольниками», критерий типа Данжуа—Карлемана доказан в [2].

Пусть G — область комплексной плоскости, не содержащая бесконечно удаленную точку. Будем говорить, что область G удовлетворяет условию A, если ее граница C состоит из конечного числа кусочно гладких простых замкнутых кривых $c_1, c_2, \ldots, c_n$, каждая из которых имеет кусочно непрерывную кривизну и содержит не более конечного числа угловых точек, причем все внутренние (относительно области G) углы отличны от 0 и 2π. Обозначим внутренний угол между односторонними касательными к C в точке z через $\pi\alpha(z)$. Пусть $\alpha = \inf_{z\in C} \alpha(z) > 0$.

В сделанных предположениях верно следующее утверждение.

Теорема 5 (см. [2]). *Класс $H(G, M_n)$ квазианалитичен в точке $z \in C$ тогда и только тогда, когда*

$$\int_1^\infty \frac{\ln T(r)}{r^{(\alpha(z)+2)/(\alpha(z)+1)}} dr = +\infty.$$

Для регулярных последовательностей $\{M_n^{1/(1+\alpha)}\}$ последнее условие равносильно билогарифмическому условию (5), где $\alpha = \alpha(z)$.

Отметим, что критерий квазианалитичности класса $H(G, M_n)$, где G — область, удовлетворяющая условию A, другим способом доказан в [11].

Проблема квазианалитичности для невыпуклых, а именно, для ограниченных областей $D \subset \mathbb{C}$ со спрямляемой жордановой границей изучалась в [12]. Сформулируем основной результат из [12] применительно к ситуации, рассматриваемой здесь.

Пусть D — слабо равномерная область со спрямляемой границей $L = \partial D$. Отметим, что в общем случае (если даже D — равномерная область) контур L не обязан быть локально спрямляемым[1] (см. [1, гл. 1, § 3]).

[1]Кривая γ называется *локально спрямляемой*, если для всякой точки $z \in \gamma$ существует окрестность, в которой содержащая точку z компонента кривой γ спрямляема.

Теорема 6 (см. [12]). *Пусть последовательность $\{M_n\}$ регулярна, $0 \in \partial D$, где D — ограниченная слабо равномерная область со спрямляемой границей. Класс $H(D, M_n)$ не квазианалитичен в точке $z = 0$ тогда и только тогда, когда для каждого $q \in \mathbb{N}$, $q \geqslant q_0$, найдутся область D_q, содержащая $\overline{D} \setminus \{0\}$, гармоническая в D_q функция $u(\xi)$, равная на ее границе $\ln h(qd(\xi))$ и удовлетворяющая условию*

$$\lim_{|z|\to 0} \frac{u(z)}{-\ln|z|} = +\infty,$$

где

$$d(\xi) = \inf_{z\in D} |\xi - z|, \quad \xi \in G,$$

и $G = \overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{D}$ — дополнение $\overline{D}$ до расширенной плоскости.

В [12] доказаны еще несколько критериев неквазианалитичности класса $H(D, M_n)$, равносильных теореме 6. Однако они не сформулированы явно в терминах последовательности $\{M_n\}$. Возникает естественная задача: получить критерий неквазианалитичности регулярного класса Карлемана $H(D, M_n)$ в терминах M_n.

Цель статьи — найти в некотором смысле универсальный критерий квазианалитичности регулярного класса $H(D, M_n)$, справедливый для всех слабо равномерных областей со спрямляемой границей. Оказывается, для регулярных последовательностей такой критерий совпадает с условиями (a), (b) из теоремы Данжуа—Карлемана. В [13] показано, что для фиксированной выпуклой области D критерий квазианалитичности класса $H(D, M_n)$ зависит не только от последовательности $\{M_n\}$, но и от геометрических характеристик границы ∂D. Как было сказано выше, для областей достаточно общего вида (не обязательно выпуклых и даже односвязных), каждая из которых вблизи рассматриваемой граничной точки в некотором смысле близка к углу или сравнима с «двуугольниками», критерий типа Данжуа—Карлемана доказан в [2]. Вопрос о существовании какого-либо критерия в терминах $\{M_n\}$ для произвольной фиксированной жордановой области со спрямляемой границей, учитывающего его геометрические характеристики, пока остается открытым.

2. Универсальный критерий для слабо равномерных областей.

Теорема 7. *Пусть $\{M_n\}$ ($M_n > 0$) — регулярная последовательность. Для того, чтобы для любой слабо равномерной области G со спрямляемой границей L класс Карлемана $H(G, M_n)$ был квазианалитичен в каждой граничной точке, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{M_n}{M_{n+1}} = \infty. \tag{6}$$

Доказательство. Достаточность основана на следующей теореме Банга.

Предложение 2 (см. [15]). *Пусть γ — спрямляемая жорданова дуга или локально спрямляемая простая кривая. Предположим, что последовательность $\{M_n\}$ логарифмически выпукла и выполняется условие* (6). *Тогда класс*

$$C_\gamma(M_n) = \Big\{ f \in C^\infty(\gamma) : \sup_{z\in\gamma} \big|f^{(n)}(z)\big| \leqslant c_f M_n,\ n \geqslant 0 \Big\}$$

является квазианалитическим.

Действительно, для любой точки $a \in G$ найдется спрямляемая жорданова дуга γ, соединяющая эту точку с граничной точкой $z_0 \in \partial G$. Тогда любая функция $f \in H(G, M_n)$ принадлежит классу $C_\gamma(M_n)$. По предположению, выполняется условие (6), а γ — спрямляемая жорданова дуга. Значит, согласно теореме Банга, $f(z) \equiv 0$ на γ; следовательно, по теореме единственности, и в области G.

Прежде, чем приступить к доказательству обратного утверждения, приведем необходимые сведения о задаче Дирихле для жордановых областей.

Пусть D — некоторая ограниченная односвязная область со спрямляемой жордановой границей $C = \partial D$, φ — непрерывная функция, заданная на кривой C. Возьмем на границе C точки $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$, $\xi_{n+1} = \xi_1$, следующие друг за другом, и пусть $C_k = l(\xi_k, \xi_{k+1})$ — часть кривой C с концами в точках ξ_k и ξ_{k+1}. Обозначим через $\omega(z, C_k, D)$ гармоническую меру дуги C_k, $k = 1, 2, \dots, n$, относительно области D в точке z, т.е. решение задачи Дирихле в области D с граничными данными, равными единице на C_k и нулю на $C \setminus C_k$ (в предположении, что такое решение существует). Если, например, D — односвязная область, ограниченная кусочно гладкой кривой, а E — конечное или счетное множество дуг этой кривой, указанное решение $\omega(z, E, D)$ существует (см. [6]). Тогда сумма

$$u_n(z) = \sum_{k=1}^{n} \varphi(\xi_k)\omega(z, C_k, D), \quad \xi_k \in C_k,$$

является решением задачи Дирихле в области D с граничными данными, равными $\varphi(\xi_k)$ на C_k, $k = 1, 2, \dots, n$. Пусть u — решение задачи Дирихле в области D с непрерывной граничной функцией φ, т.е. гармоническая в D функция, $u(\xi) = \varphi(\xi)$ на C. Как известно, для любой односвязной жордановой области такая функция существует и единственна (см. [6]). По принципу максимума модуля для гармонических функций имеем:

$$\big|u(z) - u_n(z)\big| \leqslant \max_{1\leqslant k\leqslant n} d_k = \delta_n, \quad d_k = \max_{\xi', \xi'' \in C_k} \big|\varphi(\xi') - \varphi(\xi'')\big|.$$

Так как функция φ равномерно непрерывна на C, то $\delta_n \to 0$ независимо от способа разбиения C на C_k и выбора точек $\xi_k \in C_k$ при $\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n} |C_k| \to 0$, где $|C_k|$ — длина дуги C_k. Имея это в виду, предельную функцию u представим интегралом

$$u(z) = \lim_{n\to\infty} u_n(z) = \int\limits_C \varphi(\xi) d\omega(z, e_\xi), \tag{7}$$

поскольку для фиксированной точки z функция множества $\omega(z, e) = \omega(z, e, D)$ является мерой на системе борелевских множеств $e \subset C$, при этом $0 \leqslant \omega(z, e) \leqslant 1$, $\omega(z, C) = 1$. Отметим, что представление решения задачи Дирихле формулой (7) справедливо также в том случае, когда граничная функция φ кусочно непрерывна и ограничена. При этом функция u непрерывна вплоть до ∂D во всех точках непрерывности φ, и в этих точках $u(\xi) = \varphi(\xi)$ (см. [6]). В некоторых случаях равенство (7) имеет смысл и для неограниченных функций φ. Об этом речь пойдет ниже.

В дальнейшем нам понадобится одна теорема Берлинга об оценке гармонической меры.

Теорема 8 (см. [17]). *Пусть D — область, ограниченная конечным числом жордановых кривых, $E \subset \partial D$ — множество, лежащее на какой-либо компоненте ∂D. Предположим, что E состоит из конечного числа дуг. Далее, пусть $z_0 \in D$ (см. рис. 1). Тогда*

$$\omega(z_0, E, D) \leqslant 3\pi \exp\left\{-\pi \int\limits_\alpha^\beta \frac{dx}{\theta(x)}\right\},$$

где $\theta(x)$ — линейная мера множества

$$D \cap \{z : \operatorname{Re} z = x\}, \quad \alpha = \operatorname{Re} z_0, \quad \beta = \inf_{z\in E}\{\operatorname{Re} z\}.$$

Докажем теперь *необходимость*. Пусть для любой слабо равномерной области G со спрямляемой границей L класс $H(G, M_n)$ является квазианалитическим в каждой точке $z_0 \in L$, но

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{M_n}{M_{n+1}} < \infty.$$

Так как последовательность $\{M_n\}$ регулярная, то (см. [4])

$$\int\limits_0^d \ln\ln H(t) dt < \infty, \tag{8}$$

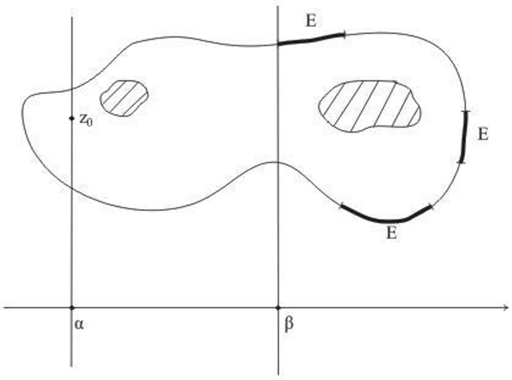

Рис. 1

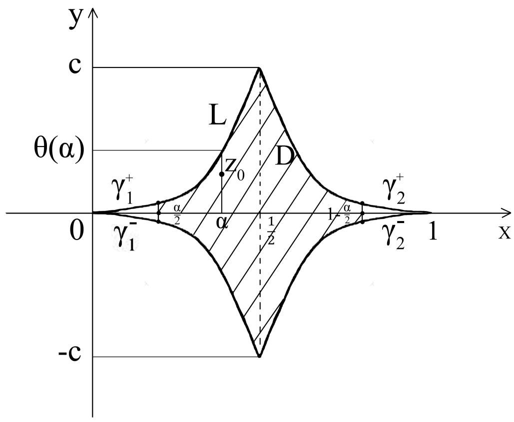

Рис. 2

где $d > 0$ таково, что $H(d) = e$, а

$$H(t) = \sup_{n \geqslant 0} \frac{1}{m_n t^n}, \quad m_n = \frac{M_n}{n!}.$$

Существует монотонно убывающая мажоранта H_1 функции H, непрерывно дифференцируемая на полуинтервале $(0, d]$ и подчиненная условию (8). Убедимся, что функция $H_1(t) = \exp\exp[m(t)]$, где

$$m(t) = \int\limits_{t/e}^{d} \frac{\ln\ln H(\tau)}{\tau} d\tau, \quad 0 < t \leqslant d,$$

обладает требуемыми свойствами. Кроме того, $0 < -tm'(t) \uparrow \infty$ при $t \downarrow 0$.

Действительно, $-tm'(t) = \ln\ln H(t/e)$, функция $H = H(t)$ убывает на $(0, d]$, $H(d) = e$, причем $H(t) \uparrow \infty$ при $t \downarrow 0$. Далее, функция H_1 непрерывно дифференцируема на $(0, d]$, а поскольку

$$m(t) \geqslant \int\limits_{t/e}^{t} \frac{\ln\ln H(\tau)}{\tau} d\tau \geqslant \ln\ln H(t), \quad 0 < t \leqslant d,$$

то $H(t) \leqslant H_1(t)$ на $(0, d]$. Осталось заметить, что функция H_1 удовлетворяет и условию (8). Это следует из того, что $m(t) = \ln\ln H_1(t)$, $-tm'(t) = \ln\ln H(t/e)$, а интегралы

$$\int\limits_0^d -tm'(t)dt, \quad \int\limits_0^d m(t)dt,$$

очевидно, сходятся одновременно с интегралом (8).

Полагая по определению $h(y) = h(-y) = e^{m(y)}$, $m^*(y) = m(y) + \ln(d/y)$, построим график возрастающей функции

$$x = \psi(y) = \tau \int\limits_0^y \big[m^*(t) - m^*(y)\big] dt, \quad 0 \leqslant y \leqslant c.$$

При фиксированном $\tau \geqslant \tau_0 \geqslant 4/\pi$ величину c, $0 < c \leqslant d$, можно подобрать так, чтобы $\psi(c) = 1/2$. Через $y = \theta(x)$, $0 \leqslant x \leqslant 1/2$ обозначим функцию, обратную к функции $x = \psi(y)$, $0 \leqslant y \leqslant c$. Поскольку

$$\theta'(x) = \frac{1}{\tau\big[1 - y(x)m'(y(x))\big]} \downarrow 0$$

при $x \downarrow 0$, то функция $y = \theta(x)$ выпукла при $0 \leqslant x \leqslant 1/2$. Далее, полагая $\psi(-y) = \psi(y)$, построим симметричный график для $y \leqslant 0$, а затем — график для $1/2 \leqslant x \leqslant 1$, отражая прежнюю кривую симметрично относительно прямой $\{z : \operatorname{Re} z = 1/2\}$. Полученная таким образом кусочно гладкая замкнутая кривая L (она состоит из четырех гладких кусков) ограничивает некоторую жорданову область, которую обозначим через D (см. рис. 2). Точный вид данной области не принципиален — нас будет интересовать только поведение ее границы вблизи точек $(0,0)$ и $(1,0)$.

Введем следующие обозначения (см. рис. 2):

$$\gamma_1^+ = \left\{\xi = x + iy \in L:\ 0 \leqslant x \leqslant \frac{\alpha}{2},\ y \geqslant 0\right\}, \quad \gamma_2^+ = \left\{\xi = x + iy \in L:\ 1 - \frac{\alpha}{2} \leqslant x \leqslant 1,\ y \geqslant 0\right\}.$$

Через γ_1^-, γ_2^- обозначим части границы L, симметричные γ_1^+ и γ_2^+ соответственно относительно вещественной оси.

Пусть $z_0 \in D$, $\operatorname{Re} z_0 = \alpha$; ради определенности пусть $\alpha \leqslant 1/2$. Убедимся, что

$$u(z_0) = \int_L \varphi(\xi)\,d\omega(z_0, e_\xi) \neq \infty,$$

где $\varphi(\xi) = \varphi(x+iy) = h(y)$ (h — положительная четная функция, определенная выше), $\xi \in L$. Поскольку функция φ непрерывна на части

$$L_\alpha = \left\{\xi = x + iy:\ \xi \in L,\ \frac{\alpha}{2} \leqslant x \leqslant 1 - \frac{\alpha}{2}\right\}$$

границы L, то достаточно показать, что существуют интегралы

$$\int_{\gamma_1^- \cup \gamma_1^+} h(y)\,d\omega(z_0, e_\xi), \qquad \int_{\gamma_2^+ \cup \gamma_2^-} h(y)\,d\omega(z_0, e_\xi).$$

Для этого определим последовательность $\{x_n\}$, $x_n \downarrow 0$, по правилу:

$$x_0 = \frac{\alpha}{2}, \quad h(\theta(x_n)) = 2h\big(\theta(x_{n-1})\big), \quad n \geqslant 1.$$

Пусть

$$C_k^+ = \gamma_2^+ \cap \big\{z:\ 1 - x_k \leqslant \operatorname{Re} z \leqslant 1 - x_{k+1}\big\}, \quad C_k^- = \gamma_2^- \cap \big\{z:\ 1 - x_k \leqslant \operatorname{Re} z \leqslant 1 - x_{k+1}\big\};$$

тогда

$$\int_{C_k^+} h(y)\,d\omega(z_0, e_\xi) \leqslant h\big(\theta(x_{k+1})\big)\omega(z_0, C_k^+) = 2h(\theta(x_k))\omega(z_0, C_k^+). \tag{9}$$

Применяя теорему Берлинга, оценим гармоническую меру $\omega(z_0, C_k^+)$. Имеем

$$\omega(z_0, C_k^+) \leqslant 3\pi \exp\left\{-\frac{\pi}{2}\int_\alpha^{1-x_k} \frac{dt}{\theta(1-t)}\right\} =$$

$$= 3\pi \exp\left\{\frac{\pi}{2}\int_{1-\alpha}^{x_k} \frac{dx}{\theta(x)}\right\} = 3\pi \exp\left\{-\frac{\pi\tau}{2}\int_{\theta(1-\alpha)}^{\theta(x_k)} \big[m^*(y)\big]' dy\right\},$$

где

$$m^*(y) = m(y) + \ln\frac{d}{y}, \quad m(y) = \ln h(y), \quad 0 < y \leqslant c \leqslant d.$$

Поскольку

$$[m^*(y)]' = m'(y) - \frac{1}{y},$$

то

$$\omega(z_0, C_k^+) \leqslant 3\pi \exp\left\{-\frac{\pi\tau}{2}\left(\ln\frac{h(\theta(x_k))}{h(\theta(\alpha))} + \ln\frac{\theta(\alpha)}{\theta(x_k)}\right)\right\}.$$

Если учесть, что

$$0 < \theta(x_k) \leqslant \theta(\frac{\alpha}{2}) < \theta(\alpha), \quad \tau \geqslant \frac{4}{\pi},$$

то отсюда получаем, что

$$\omega(z_0, C_k^+) \leqslant 3\pi \big[h(\theta(\alpha))\big]^{\pi\tau/2} \frac{1}{h^2(\theta(x_k))}, \quad k \geqslant 0. \tag{10}$$

Следовательно, из (9), (10) имеем

$$\int\limits_{C_k^+} h(y) d\omega(z_0, e_\xi) \leqslant c_f \frac{1}{2^k}, \quad k \geqslant 0,$$

где

$$c_f = 6\pi \frac{\big[h(\theta(\alpha))\big]^{\pi\tau/2}}{h(\theta(x_0))}, \quad x_0 = \frac{\alpha}{2}.$$

Точно такая же оценка верна и для интеграла по дуге C_k^-. Таким образом, для любого $N \geqslant 1$ имеем

$$\sum_{k=0}^{N} \left(\int\limits_{C_k^+ \cup C_k^-} h(y) d\omega(z_0, e_\xi) \right) \leqslant 2c_f \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{2^k} < 4\ c_f. \tag{11}$$

Значит,

$$0 < \int\limits_{\gamma_2^+ \cup \gamma_2^-} h(y) d\omega(z_0, e_\xi) < \infty.$$

Пусть

$$D_k^{\pm} = \gamma_1^{\pm} \cap \big\{z:\ x_{k+1} \leqslant \operatorname{Re} z \leqslant x_k\big\}, \quad k \geqslant 0.$$

Чтобы оценить меры $\omega(z_0, D_k^{\pm})$, теоремой Берлинга напрямую пользоваться нельзя, поскольку точка z_0 находится правее множества $D_k^{\pm}$. Поэтому повернем область D вокруг прямой $\{z : \operatorname{Re} z = 1/2\}$ на угол π и полученную при таком отображении w область обозначим D'. Тогда

$$w(D_k^{\pm}) = C_k^{\pm}, \quad w(z_0) = w_0, \quad \operatorname{Re} w_0 = 1 - \alpha, \quad \alpha = \operatorname{Re} z_0.$$

Поскольку отображение конформное, то

$$\omega(z_0, D_k^{\pm}) = \omega(w_0, C_k^{\pm})$$

(см. [6, гл. VIII, § 4]). Отсюда

$$\int\limits_{D_k^{\pm}} h(y) d\omega(z_0, e_\xi) \leqslant h(\theta(x_{k+1}))\omega(z_0, D_k^{\pm}) = 2h(\theta(x_k))\omega(w_0, C_k^{\pm}),$$

и по теореме 8

$$\omega(w_0, C_k^{\pm}) \leqslant 3\pi \exp\left\{ -\frac{\pi}{2} \int\limits_{\operatorname{Re} w_0}^{1-x_k} \frac{dt}{\theta(1-t)} \right\} = 3\pi \exp\left\{ -\frac{\pi}{2} \int\limits_{x_k}^{\alpha} \frac{d\tau}{\theta(\tau)} \right\}.$$

Следовательно, как и прежде, для всех $k = 0, 1, 2, \dots$ имеем

$$\int\limits_{D_k^{\pm}} h(y) d\omega(z_0, e_\xi) \leqslant 2h(\theta(x_k))\omega(w_0, C_k^{\pm}) \leqslant 6\pi h(\theta(x_k)) \exp\left\{ -\frac{\pi}{2} \int\limits_{x_k}^{\alpha} \frac{dt}{\theta(t)} \right\} \leqslant c_f \frac{1}{2^k},$$

где c_f — та же постоянная. Значит, для любого $N \geqslant 1$

$$\sum_{k=0}^{N} \left(\int\limits_{D_k^+ \cup D_k^-} h(y) d\omega(z_0, e_\xi) \right) \leqslant 2c_f \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{2^k} < 4c_f, \tag{12}$$

и поэтому

$$0 < \int\limits_{\gamma_1^+ \cup \gamma_1^-} h(y) d\omega(z_0, e_\xi) < \infty.$$

Убедимся, что функция

$$u(z) = \int\limits_L h(y) d\omega(z, e_\xi)$$

является решением следующей обобщенной задачи Дирихле: u гармонична в D и $u(x+iy) = h(y)$ для всех $x+iy \in L$, причем $u(0) = u(1) = h(0) = \infty$.

Действительно, пусть $z \in D$,

$$u_n(z) = \int\limits_L \varphi_n(\xi) d\omega(z, e_\xi), \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{13}$$

где

$$\varphi_n(\xi) = \varphi_n(x+iy) = \begin{cases} h(y), & \text{если } x \in [x_n, 1-x_n]; \\ 0, & \text{для остальных } x \in [0,1]. \end{cases}$$

Поскольку функция φ_n кусочно непрерывна и ограничена, то функция u_n, заданная интегралом (13), является решением задачи Дирихле с граничной функцией φ_n. Поскольку $0 \leqslant \varphi_n(\xi) \leqslant \varphi(\xi)$, $\varphi_n(\xi) > 0$ для $\operatorname{Re}\xi \in [x_n, 1-x_n]$, то $0 < u_n(z) \leqslant u(z) \neq \infty$, $z \in D$. Значит,

$$\int\limits_L \varphi_n(\xi) d\omega(z, e_\xi) \leqslant K_z < \infty, \quad n \geqslant 1.$$

Так как $x_n \downarrow 0$, то, кроме того, $u_n(z) \leqslant u_{n+1}(z)$, $n = 1, 2, \ldots$. Тогда, учитывая, что

$$\varphi_n(\xi) \to \varphi(\xi), \quad \xi \neq 0, 1, \quad n \to \infty,$$

и применяя теорему Леви, получаем

$$\lim_{n\to\infty} u_n(z) = u(z).$$

По теореме Гарнака, u — гармоническая в D функция, причем $u(z) \neq \infty$, $z \in D$.

Покажем, что $u(\xi) = \varphi(\xi)$ на L. Не теряя общности, можем считать, что $0 < \operatorname{Re}\xi \leqslant 1/2$, $\operatorname{Im}\xi > 0$, $\xi \in L$. Пусть

$$\xi_0 \in L, \quad 0 < \beta = \operatorname{Re}\xi_0 \leqslant \frac{1}{2}, \quad B\left(\xi_0, \frac{\beta}{2}\right) = \left\{z: \ |z - \xi_0| < \frac{\beta}{2}\right\}, \quad D' = \left\{z: \ z \in D, \ \operatorname{Re} z \leqslant \frac{1}{2}\right\}.$$

Тогда для любого z из $\omega_0 = B(\xi_0, \beta/2) \cap D'$, очевидно, имеем:

$$\frac{\beta}{2} \leqslant \alpha_z = \operatorname{Re} z \leqslant \frac{3\beta}{2}.$$

Если $z \in \omega_0$, $m > n$, то имеем также

$$0 < u_m(z) - u_n(z) = \int\limits_{C_{mn}} \varphi(\xi) d\omega(z, e_\xi),$$

где C_{mn} — объединение дуг $\{z : x_m \leqslant \operatorname{Re} z \leqslant x_n\} \cap C$ и $\{z : 1 - x_n \leqslant \operatorname{Re} z \leqslant 1 - x_m\} \cap C$, $C = \partial D$. Следовательно, из оценок типа (11), (12) получаем

$$\big|u_m(z) - u_n(z)\big| \leqslant 8 c_f \frac{1}{2^n}, \quad n \geqslant 1,$$

где

$$c_f = 6\pi \frac{\big[h(\theta(\alpha_z))\big]^{\pi\tau/2}}{h(\theta(\alpha_z/2))}.$$

Так как $\beta/2 \leqslant \alpha_z$ для любого $z \in \omega_0$, то для таких z и всех $m > n$

$$\big|u_m(z) - u_n(z)\big| \leqslant 8 C_f(\beta) \frac{1}{2^n}, \quad n \geqslant 1,$$

где

$$C_f(\beta) = \frac{6\pi}{h(\theta(1/4))}\left[h\left(\theta\left(\frac{\beta}{2}\right)\right)\right]^{\pi\tau/2}.$$

Отсюда, устремляя m к бесконечности, получаем

$$\sup_{z\in\omega_0}\bigl|u(z)-u_n(z)\bigr| \leqslant 8C_f(\beta)\frac{1}{2^n}, \quad n \geqslant 1.$$

Значит, последовательность $\{u_n\}$ сходится к u равномерно на множестве ω_0.

Для любого $z \in \omega_0$ имеем

$$\bigl|u(z)-\varphi(\xi_0)\bigr| \leqslant \sup_{t\in\omega_0}\bigl|u(t)-u_n(t)\bigr| + \bigl|u_n(z)-\varphi(\xi_0)\bigr| = A_n + B_n.$$

Для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такой достаточно большой номер $n_0 = n_0(\varepsilon)$, что $A_{n_0} < \varepsilon/2$ и $\varphi_{n_0}(\xi_0) = \varphi(\xi_0)$. А поскольку

$$\varphi_{n_0}(\xi_0) = \lim_{\substack{z\in\omega_0,\\ z\to\xi_0}} u_{n_0}(z),$$

то и $B_{n_0} < \varepsilon/2$ при $|z-\xi_0| < \delta$, $z \in \omega_0$. Таким образом,

$$\bigl|u(z)-\varphi(\xi_0)\bigr| < \varepsilon \quad \text{при } |z-\xi_0| < \delta,\ z\in\omega_0.$$

Значит,

$$u(\xi_0) = \lim_{\substack{z\in\omega_0,\\ z\to\xi_0}} u(z) = \varphi(\xi_0).$$

Аналогично рассматривается случай, когда точка ξ_0 принадлежит остальной части границы.

Таким образом, $u(\xi) = \varphi(\xi)$, $\xi \in L$ $(\xi \neq 0, 1)$. Так как

$$\lim_{\xi\to 0,1}\varphi(\xi) = \lim_{y\to 0} h(y) = \infty,$$

то $u(0) = u(1) = \infty$.

Пусть v — гармоническая функция, сопряженная с u, $F(z) = u(z) + iv(z)$. Тогда функция

$$f(z) = e^{-F(z)}$$

аналитична и ограничена в D, причем $f(z) \not\equiv 0$,

$$|f(z)| = e^{-u(z)} = e^{-h(y)} \leqslant 1 \quad \text{при } z = x+iy \in L, \quad f(0) = f(1) = 0.$$

Далее, область D ограничена жордановой спрямляемой кривой L и для некоторой последовательности спрямляемых кривых γ_n, сходящихся к L,

$$\int_{\gamma_n} |f(z)||dz| \leqslant C < \infty$$

(C не зависит от n). Значит, функция f принадлежит классу E_1 (по классификации В. И. Смирнова), который совпадает с классом функций, представимых в области D интегралом Коши через свои угловые граничные значения (своим интегралом Коши) (см. [10, гл. III, § 6-7]). Таким образом, имеем

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(\xi)}{\xi - z}d\xi, \quad z \in D.$$

Следовательно,

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_L \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}}d\xi, \quad n \geqslant 0, \quad z \in D.$$

Отсюда имеем

$$\bigl|f^{(n)}(z)\bigr| \leqslant \frac{1}{2\pi}|L|\sup_y \frac{n!}{H_1(y)\bigl[\rho(z)\bigr]^{n+1}}, \quad n \geqslant 0,$$

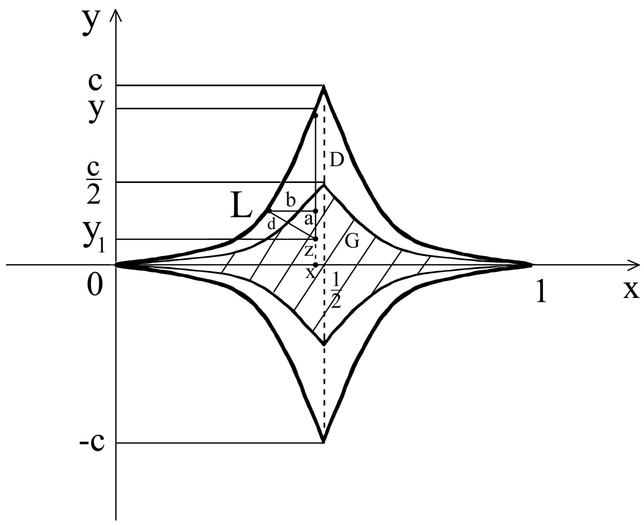

Рис. 3

где

$$H_1(y) = e^{h(y)}, \quad \rho(z) = \inf_{\xi \in L} |z - \xi|, \quad z \in D.$$

Рассмотрим область $G = \{z = x + iy : x + 2iy \in D\}$ (см. рис. 3). Тогда для $z \in G$ имеем

$$\left|f^{(n)}(z)\right| \leqslant \frac{1}{2\pi}|L| \sup_y \frac{n!}{H_1(y)\left[d(z)\right]^{n+1}}, \quad d(z) = \inf_{\xi \in L} |z - \xi|, \quad z \in G. \tag{14}$$

Оценим $d(z)$ снизу через $|y|$. Для этого нам понадобится следующий геометрический факт.

Лемма 2. *Пусть $z = x + iy_1 \in G$, $x + iy \in L = \partial D$, $0 < x < 1$, $|y_1| < |y|/2)$. Тогда*

$$\frac{|y|}{4} \leqslant d(z) \leqslant |y|, \quad d(z) = \inf_{\xi \in L} |\xi - z|.$$

Доказательство. Для доказательства леммы достаточно рассмотреть случай $y > 0$. Правая оценка очевидна: $d(z) \leqslant y - y_1 < y$. Докажем левое неравенство. Имеем (см. рис. 3): $d(z) \geqslant a$, $d(z) \geqslant b$. Отсюда

$$d(z) \geqslant \frac{a+b}{2}. \tag{15}$$

Но граница области D в точках $\xi = x + iy$, $0 \leqslant x \leqslant 1/2$, $0 \leqslant y \leqslant c$, была определена при помощи функции

$$x = \psi(y) = \tau \int_0^y \left[m^*(t) - m^*(y)\right] dt,$$

где

$$m^*(y) = m(y) + \ln \frac{d}{y}, \quad d \geqslant c.$$

Поскольку $-ym'(y) \geqslant 0, 0 < y \leqslant c$, то

$$y' = \left[\psi^{-1}(x)\right]' = \frac{1}{-\tau y(x) m'(y(x)) + \tau} \leqslant \frac{1}{\tau}.$$

Так как $\tau \geqslant 4/\pi$, то по теореме о среднем имеем

$$y - (y_1 + a) \leqslant \frac{1}{\tau} b < b.$$

С учетом этого из (15) получаем требуемую оценку

$$d = d(z) \geqslant \frac{a+b}{2} > \frac{y - y_1}{2} > \frac{y}{4}. \qquad \square$$

Продолжим доказательство теоремы. Применяя лемму 2 и учитывая свойство (b) регулярной последовательности, из (14) окончательно имеем

$$\sup_{z\in G}\bigl|f^{(n)}(z)\bigr| \leqslant \frac{1}{2\pi}|L|4^{n+1}\sup_{y}\frac{n!}{H_1(y)y^{n+1}} \leqslant \frac{1}{2\pi}|L|4^{n+1}M_{n+1} \leqslant K_f(L)\ A^n\ M_n, \quad n\geqslant 0.$$

Это означает, что $f\in H(G,M_n)$. Чтобы завершить доказательство, осталось проверить, что $f^{(n)}(0)=0$ и $f^{(n)}(1)=0$, $n\geqslant 0$. Действительно, пусть $z\in G$, $z\to 0$. Через Γ_z обозначим замкнутый контур, охватывающий точку z и состоящий из части ∂G, отсекаемой окружностью

$$C_z=\Bigl\{t:\ |t|=|z|+d(z),\ d(z)=\min_{\xi\in\partial G}|\xi-z|\Bigr\}$$

и дуги данной окружности. Так как $|\Gamma_z|\to 0$ при $z\in G$, $z\to 0$, а $H(t)\leqslant H_1(t)$, то

$$\sup_{\rho>0}\frac{n!}{H_1(\rho)\rho^n}\leqslant M_n<\infty, \quad n\geqslant 0,$$

и, пользуясь формулой Коши для области, ограниченной контуром Γ_z, получаем, что

$$\lim_{z\in G, z\to 0} f^{(n)}(z)=0, \quad n\geqslant 0.$$

Получено противоречие, и тем самым необходимое условие доказано полностью. □

Отметим, что построенная при доказательстве теоремы область G является слабо равномерной, но не равномерной: для области G условие 1^0 определения равномерной области выполнено, а условие 2^0 не имеет места. Действительно, пусть z_1, z_2 — произвольные точки области G. Если их можно соединить отрезком $[z_1,z_2]\subset G$, то доказывать нечего. Пусть отрезок $[z_1,z_2]$ не содержится целиком в G. Тогда он пересекает границу, скажем дугу $\gamma_{11}^+=\{z=x+iy : x+2iy\in\gamma_1^+\}$, в двух точках z_1', z_2', $z_1'\neq z_2'$ (случай $z_1'=z_2'$ проще, его не будем рассматривать). Уравнение дуги γ_{11}^+ имеет вид

$$y=\frac{\theta(x)}{2}, \quad 0\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}.$$

Пусть график функции $y_\varepsilon=\theta(x)/2-\varepsilon$, где $\varepsilon>0$ мало, пересекает отрезок $[z_1,z_2]$ в точках z_1'', z_2'', ближайших к z_1 и z_2 соответственно. При малом $\varepsilon>0$ дуга $\alpha=[z_1,z_1'']\cup l_\varepsilon(z_1'',z_2'')\cup[z_2'',z_2]$ лежит в G, причем

$$\bigl|l_\varepsilon(z_1'',z_2'')\bigr|\leqslant 2\bigl|l(z_1',z_2')\bigr|.$$

Здесь $l(z_1',z_2')$ — дуга графика функции y с концами в точках z_1', z_2', $|l(z_1',z_2')|$ — длина этой дуги, $l_\varepsilon(z_1'',z_2'')$ — аналогичная дуга графика функции y_ε.

Так как

$$|\theta'(x)|\leqslant\tau^{-1}, \quad 0\leqslant x\leqslant\frac{1}{2},$$

то

$$\bigl|l(z_1',z_2')\bigr|\leqslant\sqrt{1+\frac{1}{4\tau^2}}\,|z_1'-z_2'|.$$

Значит,

$$|\alpha|\leqslant 2\sqrt{1+\frac{1}{4}\tau^{-2}}\,|z_1-z_2|,$$

и область G слабо равномерна.

Убедимся, что, тем не менее, область G не является равномерной. Для этого возьмем $z_1,z_2\in\partial G$, $\operatorname{Re}z_1=\operatorname{Re}z_2=x<1/2$. Тогда

$$\frac{\operatorname{diam} l(z_1,z_2)}{|z_1-z_2|}\geqslant\frac{x}{\theta(x)}\sim\frac{1}{\theta'(x)}=\tau\bigl[1-y(x)m'(y(x))\bigr]\to\infty$$

при $x\to 0$. Таким образом, граница области G не является квазиокружностью, и потому G не является равномерной областью (см. [1]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Андриевский В. В., Белый В. И., Дзядык В. К.* Конформные инварианты в конструктивной теории функций комплексного переменного. — Киев: Наукова думка, 1998.
2. *Гайсин Р. А.* Критерии квазианалитичности типа Салинаса—Коренблюма для областей общего вида// Уфим. мат. ж. — 2013. *5*, № 3. — С. 28–40.
3. *Гайсин Р. А.* Эквивалентные критерии квазианалитичности класса Карлемана в угле// Сб. тр. Междунар. шк.-конф. «Фундаментальная математика и ее приложения в естествознании». — Уфа: РИЦ БашГУ, 2012. — Т. 1. Математика. — С. 69–76.
4. *Дынькин Е. М.* Псевдоаналитическое продолжение гладких функций. Равномерная шкала// Тр. VII Зимней школы «Математическое программирование и смежные вопросы. Теория функций и функциональный анализ» (Дрогобыч). — М.: ЦЭМИ, 1976. — С. 40–73.
5. *Дынькин Е. М.* Функции с заданной оценкой $\partial f/\partial \bar{z}$ и теорема Н. Левинсона// Мат. сб. — 1972. — *89 (131)*, № 2. — С. 182–190.
6. *Евграфов М. А.* Аналитические функции. — М.: Наука, 1965.
7. *Коренблюм Б. И.* Квазианалитические классы функций в круге// Докл. АН СССР. — 1965. — *164*, № 1. — С. 36–39.
8. *Мандельбройт С.* Квазианалитические классы функций. — М.-Л., 1937.
9. *Мандельбройт С.* Примыкающие ряды. Регуляризация последовательностей. Применения. — М.: ИЛ, 1955.
10. *Привалов И. И.* Граничные свойства аналитических функций. — М.-Л.: ГИТТЛ, 1950.
11. *Прилипко Т. И.* Квазианалитические классы функций в комплексной области// Укр. мат. ж. — 1967. — *19*, № 2. — С. 127–134.
12. *Трунов К. В., Юлмухаметов Р. С.* Квазианалитические классы Карлемана на ограниченных областях// Алгебра и анализ. — 2008. — *20*, № 2. — С. 178–217.
13. *Юлмухаметов Р. С.* Аппроксимация субгармонических функций и применения/ Дисс. на соиск. уч. степ. докт. физ.-мат наук. — Уфа: Ин-т мат. с ВЦ УНЦ РАН, 1986.
14. *Юлмухаметов Р. С.* Квазианалитические классы функций в выпуклых областях// Мат. сб. — 1986. — *130 (172)*, № 4. — С. 500–519.
15. *Bang T.* Om quasi-analytiske funktioner/ Thesis. — Copenhagen: Univ. of Copenhagen, 1946.
16. *Salinas R. B.* Functions with null moments// Rev. Acad. Ciencias. — Madrid, 1955. — С. 331–368.
17. *Sodin M.* Lars Ahlfors' thesis// Isr. Math. Conf. Proc. — 2000. — *14*. — С. 113–134.

Р. А. Гайсин
Башкирский государственный университет, Уфа
E-mail: rashit.gajsin@mail.ru

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 142 (2017). С. 73–80

УДК 517.53

ПОРОЖДАЮЩИЕ ФУНКЦИИ БАЗИСОВ В ГИЛЬБЕРТОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ

© 2017 г. **К. П. ИСАЕВ, А. В. ЛУЦЕНКО, Р. С. ЮЛМУХАМЕТОВ**

Аннотация. Доказано, что безусловные базисы в функциональном гильбертовом пространстве H имеют порождающую функцию тогда и только тогда, когда пространство H устойчиво. Получены необходимые и достаточные условия устойчивости пространств, сопряженных к весовым пространствам на интервале.

Ключевые слова: гильбертовы пространства, целые функции, воспроизводящие ядра, безусловные базисы.

AMS Subject Classification: 30H20, 46E22

1. Введение. Пусть H — функциональное гильбертово пространство целых функций. Функциональность понимается в том смысле, что точечные функционалы $\delta_z : f \longrightarrow f(z)$, $z \in \mathbb{C}$, непрерывны. В силу самосопряженности гильбертовых пространств эти функционалы порождаются элементами $k_z(\lambda)$ пространства H:

$$\delta_z(f) = f(z) = (f(\lambda), k_z(\lambda))_H \quad \forall f \in H.$$

Функция $K(\lambda, z) = k_z(\lambda)$ называется воспроизводящим ядром пространства H; этот объект подробно изучен в [5]. Данная работа посвящена вопросам, связанным с базисами и безусловными базисами из значений воспроизводящего ядра $K(\lambda, z_k)$, $\{z_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$.

Базис $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$ в некотором гильбертовом пространстве называется безусловным базисом (см. [8]), если для некоторого числа $P > 1$ и для любого конечного набора $a_n \in \mathbb{C}$, $n = 1, \ldots, N$, выполняется двусторонняя оценка

$$\frac{1}{P}\sum_{n=1}^{N} |a_n|^2 ||h_n||^2 \leqslant \left\|\sum_{n=1}^{N} a_n h_n\right\|^2 \leqslant P \sum_{n=1}^{N} |a_n|^2 ||h_n||^2.$$

Базисы и связанные с ними вопросы изучались, например, в [1, 6, 7, 9, 10]. Пространства целых функций рассматривались чаще интегрально-весовые. В [1] получены условия, при выполнении которых в абстрактном функциональном гильбертовом пространстве не существует безусловных базисов из значений воспроизводящего ядра.

Своим происхождением задача о (безусловных) базисах из значений воспроизводящего ядра обязана, видимо, классической теме представления рядами экспонент.

Если X — некоторое гильбертово пространство функций на множестве $G \subset \mathbb{C}$, в котором система всех экспонент e^{zt}, $z \in \mathbb{C}$, полна, то преобразование Фурье—Лапласа

$$\mathcal{L} : S \to \widehat{S}(z) = S(e^{zt}), \quad z \in \mathbb{C},$$

устанавливает изоморфизм между сопряженным пространством X^* и некоторым пространством целых функций $\widehat{X}$ с индуцированной структурой гильбертова пространства. Пространство $\widehat{X}$ будет функциональным, в нем существует воспроизводящее ядро $K(\lambda, z)$. Если $e^{z_k t}$, $k \in \mathbb{N}$, — (безусловный) базис в пространстве X, то система $K(\lambda, z_k)$, $k \in \mathbb{N}$, — (безусловный) базис в пространстве $\widehat{X}$.

Частое применение этой конструкции в явном или неявном виде в теории рядов экспонент связано с тем, что в известных случаях это позволяло воспользоваться аппаратом теории целых

ISSN 0233–6723

функций. А именно, если $K(\lambda, z_k)$, $k \in \mathbb{N}$, — базис в $\widehat{X}$ и $L_k(\lambda)$ — биортогональный базис, то оказывалось, что

$$L_k(\lambda) = \frac{L(\lambda)}{L'(z_k)(\lambda - z_k)}, \quad k \in \mathbb{N},$$

где L — так называемая порождающая целая функция с множеством простых нулей в точках z_k и понятными ограничениями на рост в бесконечности. В общем случае порождающая целая функция может и не существовать.

2. Критерий существования порождающей функции для безусловных базисов. Сначала рассмотрим порождающие функции на двух простых примерах.

Пример 1. Пусть

$$\varphi(\lambda) = n \ln \big(|\lambda| + 1\big) + \alpha \ln |\lambda - 1|,$$

где $n \in \mathbb{N}$, $\alpha \in (0,1)$ и

$$\mathcal{F}_\varphi = \left\{ f \in H(\mathbb{C}) : \ \|f\|^2 := \int\limits_{\mathbb{C}} \big|f(\lambda)\big|^2 e^{-2\varphi(\lambda)} dm(\lambda) < \infty \right\}.$$

1. Пусть $\alpha < 1/2$. В точке $\lambda = 1$ ничего не происходит, $\mathcal{F}_\varphi$ совпадает с множеством всех многочленов степени не выше $n-1$ и, тем самым, имеет размерность n. Для любого набора из n попарно различных точек z_k, $k = 1, \ldots, n$, система $K(\lambda, z_k)$ будет линейно независимой и, соответственно, безусловным базисом. В качестве порождающей функции можно взять любой многочлен степени n с простыми нулями в этих точках. Тем самым, порождающая функция определяется с точностью до ненулевого множителя, например,

$$L(\lambda) = (\lambda - z_1) \ldots (\lambda - z_n).$$

2. Пусть $\alpha = 1/2$. В этом случае $\mathcal{F}_\varphi$ совпадает с множеством всех многочленов степени не выше $n-1$, равных нулю в точке $\lambda = 1$, и имеет размерность $n-1$. Для любого набора из $n-1$ попарно различных и отличных от 1 точек z_k, $k = 1, \ldots, n-1$, система $K(\lambda, z_k)$ будет базисом. В качестве порождающей функции можно взять любой многочлен степени n с нулями в этих точках и в точке $\lambda = 1$. Тем самым, порождающая функция определяется с точностью до ненулевого множителя, например,

$$L(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - z_1) \ldots (\lambda - z_{n-1}).$$

3. Пусть $\alpha > 1/2$. В этом случае $\mathcal{F}_\varphi$ совпадает с множеством всех многочленов степени не выше n, равных нулю в точке $\lambda = 1$, и имеет размерность n. Для любого набора из n попарно различных и отличных от 1 точек z_k, $k = 1, \ldots, n$, система $K(\lambda, z_k)$ будет базисом. В качестве порождающей функции можно взять любой многочлен степени $n+1$ с нулями в этих точках и в точке $\lambda = 1$. Тем самым, порождающая функция определяется с точностью до ненулевого множителя, например,

$$L(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - z_1) \ldots (\lambda - z_n).$$

Порождающие функции во всех случаях существуют, хотя выглядят по-разному.

В примере 2 покажем, что порождающая функция может и не существовать.

Пример 2. Пусть H — подпространство $\mathcal{F}_\varphi$ с $\alpha < 1/2$, состоящее из функций $f(\lambda)$, производная которых равна 0 в точке 0, с индуцированной структурой гильбертова пространства. Другими словами H — ядро функционала $F \to F'(0)$. Для базисности системы $K(\lambda, z_k)$, $k = 1, \ldots, n-1$, значений воспроизводящего ядра этого пространства достаточно линейной независимости этой системы. Методами линейной алгебры легко показать, что для любого набора попарно различных точек z_k, $k = 1, \ldots, n-2$, и еще одной точки z_{n-1}, отличной от предыдущих и, возможно, отличной еще от некоторой точки z^*, система $K(\lambda, z_k)$, $k = 1, \ldots, n-1$, образует базис. Но эти базисы не имеют порождающей функции. Допустим, что порождающая функция $P(\lambda)$ существует. Тогда $P(z_k) = 0$ и

$$L_k(\lambda) = \frac{P(\lambda)}{P'(z_k)(\lambda - z_k)}, \quad k = 1, \ldots, n-1.$$

Из базисности системы следует, что хотя бы один элемент L_k, например, L_1, имеет степень $n-1$, а порождающая функция P имеет степень не менее n. Тем самым, L_1 имеет нуль z', отличный от z_k, $k=1,\dots,n-1$. Тогда $P(z')=0$; значит, $L_k(z')=0$ для всех k, и в силу базисности все элементы H в точке z' равны нулю, что неверно.

Для формулировки критерия существования порождающей целой функции дадим определения кратности нуля пространства и устойчивости пространства.

Кратность нуля целой функции f в точке a обозначим через $n_f(a)$, т.е. $f^{(j)}(a)=0$ для всех неотрицательных целых чисел $j<n_f(a)$.

Определение 1. *Кратностью* нуля гильбертова пространства целых функций H в точке a назовем целое число

$$n_H(a)=\min_{f\in H} n_f(a),$$

т.е.

$$f^{(j)}(a)=0, \quad 0\leqslant j<n_H(a) \quad \forall f\in H.$$

Определение 2. Пространство H будем называть *устойчивым в точке* a, если из $f\in H$, $n_f(a)>n_H(a)$ следует, что $f(\lambda)(\lambda-a)^{-1}\in H$. Пространство H будем называть *устойчивым*, если оно устойчиво в любой точке.

Оба этих термина использовались ранее, но применительно к модулям (см. [2]).

Теорема 1.

1. *Для того чтобы базис из значений воспроизводящего ядра $K(\lambda,z_k)$ имел порождающую функцию, достаточно, чтобы хотя бы для одного элемента L_m биортогонального базиса и для всех z_k, $k\neq m$, функция $L_m(\lambda)(\lambda-z_k)^{-1}$ принадлежала пространству H.*
2. *Если некоторый безусловный базис в пространстве H имеет порождающую функцию, то пространство H устойчиво.*

Доказательство. 1. Положим

$$L(\lambda)=L_m(\lambda)(\lambda-z_m), \quad \widetilde{L}_k(\lambda)=\frac{L(\lambda)}{L'(z_k)(\lambda-z_k)}, \quad k\in\mathbb{N}.$$

Тогда $L_m(\lambda)=\widetilde{L}_m(\lambda)$ и

$$\widetilde{L}_k(\lambda)=\frac{1}{L'(z_k)}L_m(\lambda)+\frac{(z_k-z_m)}{L'(z_k)}\frac{L_m(\lambda)}{\lambda-z_k}\in H,$$

причем $\widetilde{L}_k(z_n)=\delta_k^n=L_k(z_n)$. В силу базисности $\{K(\lambda,z_k)\}$ заключаем, что $\widetilde{L}_k(\lambda)\equiv L_k(\lambda)$ и L — порождающая функция.

2. Пусть безусловный базис $\{K(\lambda,z_k)\}$ в пространстве H имеет порождающую функцию L и пусть для некоторой функции $f\in H$ $n_f(a)>n_H(a)$. Из безусловной базисности следует, что отображение

$$A: F\to (F(z_k))_{k=1}^{\infty}, \quad F\in H,$$

устанавливает изоморфизм пространства H и пространства последовательностей комплексных чисел $c=(c_1,c_2,\dots)$ с нормой

$$\left\|(c_k)_{k=1}^{\infty}\right\|^2=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|c_k|^2}{K(z_k)}, \tag{1}$$

где

$$K(z_k)=K(z_k,z_k)=\left\|K(\lambda,z_k)\right\|_H^2.$$

Обратное отображение имеет вид

$$(c_k)_{k=1}^{\infty}\to\sum_{k=1}^{\infty}\frac{c_kL(\lambda)}{L'(z_k)(\lambda-z_k)}.$$

При этом ряд справа сходится в норме пространства H и, в частности, сходится поточечно. По формуле Лагранжа для любого $R > 0$, при котором на окружности $|w| = R$ нет точек z_k, имеем

$$F(\lambda) = \sum_{|z_k|<R} \frac{F(z_k)L(\lambda)}{L'(z_k)(\lambda - z_k)} + \frac{L(\lambda)}{2\pi i} \int\limits_{|w|=R} \frac{F(w)dw}{L(w)(w-\lambda)}.$$

Таким образом, если $F \in H$, то для любого $\lambda \in \mathbb{C}$

$$\lim_{R\to\infty} \int\limits_{|w|=R} \frac{F(w)dw}{L(w)(w-\lambda)} = 0. \tag{2}$$

Положим $f_1(\lambda) = f(\lambda)(\lambda - a)^{-1}$. Так как $f \in H$, то последовательность $f(z_k)$ принадлежит пространству (1). Этому же пространству принадлежит и последовательность $f_1(z_k)$; значит,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{f_1(z_k)L(\lambda)}{L'(z_k)(\lambda - z_k)} = \widetilde{f}(\lambda),$$

где $\widetilde{f}$ — некоторая функция из H, ряд сходится в норме H и поточечно. Применим к функции f_1 формулу Лагранжа

$$f_1(\lambda) - \sum_{|z_k|<R} \frac{f_1(z_k)L(\lambda)}{L'(z_k)(\lambda - z_k)} = \frac{L(\lambda)}{2\pi i} \int\limits_{|w|=R} \frac{f_1(w)dw}{L(w)(w-\lambda)}.$$

Поскольку в силу (2)

$$\frac{L(\lambda)}{2\pi i} \int\limits_{|w|=R} \frac{f(w)dw}{L(w)(w-a)(w-\lambda)} =$$

$$= \frac{1}{\lambda - a}\left(\frac{L(\lambda)}{2\pi i} \int\limits_{|w|=R} \frac{f(w)dw}{L(w)(w-\lambda)} - \frac{L(\lambda)}{2\pi i} \int\limits_{|w|=R} \frac{f(w)dw}{L(w)(w-a)} \right) \to 0, \quad R \to \infty,$$

то $f_1 = \widetilde{f} \in H$. Тем самым, пространство H устойчиво. Теорема доказана. □

Следствие 1. *Для того чтобы безусловные базисы в функциональном гильбертовом пространстве H имели порождающую функцию, необходимо и достаточно устойчивости пространства H.*

3. Устойчивость пространств, сопряженных к весовым пространствам на интервале. Пусть $W(t)$ — положительная функция на интервале $(-1; 1)$ и $L_2(W)$ — пространство локально интегрируемых на интервале $(-1; 1)$ функций, для которых конечна норма

$$\|f\|^2 := \int\limits_{-1}^{1} |f(t)|^2 W(t)dt.$$

Пространство $L_2(W)$ гильбертово; такие пространства много изучались, в частности, на тему базисов из экспонент (см. [4]). Мы будем предполагать, что все экспоненты e^{zt} входят в пространство $L_2(W)$ и система экспонент $\{e^{zt}\}_{z\in\mathbb{C}}$ полна в этом пространстве. Отсюда следует, что

$$\int\limits_{-1}^{1} W(t)dt < \infty \tag{3}$$

и преобразование Фурье—Лапласа устанавливает изоморфизм сопряженного пространства $L_2^*(W)$ и некоторого пространства целых функций $\widehat{L}_2(W)$ с индуцированной структурой гильбертового пространства. В [3] показано, что если $W(t) = e^{-2h(t)}$ с выпуклой функцией h, то $\widehat{L}_2(W)$ изоморфно пространству целых функций, удовлетворяющих ограничению на рост

$$\bigl|F(z)\bigr| \leqslant \mathrm{const} \cdot e^{\widetilde{h}(\operatorname{Re} z)},$$

с нормой

$$\|F\|^2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{|F(x+iy)|^2\,dy\,d\widetilde{h}'(x)}{K(x)},$$

где

$$\widetilde{h}(x) = \sup_{|t|<1}(xt - h(t)), \quad K(x) = \int\limits_{-1}^{1} e^{2xt-2h(t)}dt$$

($\widetilde{h}$ — функция, сопряженная по Юнгу). Таким образом, для таких весов пространство $\widehat{L}_2(W)$ устойчиво. Из следующей теоремы видно, что для произвольных весов устойчивости может и не быть.

Теорема 2. *Если пространство $\widehat{L}_2(W)$ устойчиво, то функция $1/W$ локально интегрируема на $(-1;1)$ и*

$$\int\limits_{-1}\left(\int\limits_{-1}^{t} W(x)dx\right)^2 \frac{dt}{W(t)} < \infty, \quad \int\limits^{1}\left(\int\limits_{t}^{1} W(x)dx\right)^2 \frac{dt}{W(t)} < \infty.$$

Доказательство. Поскольку пространство $\widehat{L}_2(W)$ инвариантно относительно сдвигов аргумента, то устойчивость сводится к устойчивости в точке $a=0$. Для краткости мы будем предполагать, что $n_{\widehat{L}_2(W)}(0) = 0$. В силу самосопряженности гильбертовых пространств элемент $F \in \widehat{L}_2(W)$ имеет вид

$$F(z) = \int\limits_{-1}^{1} e^{tz}\overline{g(t)}W(t)dt,$$

где g — некоторая функция из $L_2(W)$. Условие $F(0)=0$ означает, что

$$\int\limits_{-1}^{1} \overline{g(t)}W(t)dt = 0.$$

Пусть

$$v(t) := \overline{g}(t)W(t).$$

Тогда $v(t)$ интегрируема и в силу (3)

$$\int\limits_{-1}^{1}|v(t)|dt \leqslant \sqrt{\int\limits_{-1}^{1}|g(t)|^2W(t)dt}\,\sqrt{\int\limits_{-1}^{1}W(t)dt} < \infty, \quad \int\limits_{-1}^{1}\frac{|v(t)|^2}{W(t)}dt < \infty, \quad \int\limits_{-1}^{1} v(t)dt = 0. \tag{4}$$

Как известно из теории интегралов Лебега, функция

$$u(t) := \int\limits_{-1}^{t} v(x)dx$$

абсолютно непрерывна на $[-1;1]$, почти всюду на $(-1;1)$ дифференцируема и

$$u'(t) = v(t) \text{ п.в.}, \quad u(-1) = u(1) = 0.$$

Интегрированием по частям получим

$$\frac{F(z)}{z} = -\int_{-1}^{1} e^{tz} u(t)dt \quad \text{или} \quad \frac{F(z)}{z} = -\int_{-1}^{1} e^{tz} \frac{u(t)}{W(t)} W(t)dt.$$

Тот факт, что функция F/z лежит в $\widehat{L}_2(W)$, означает, что

$$\int_{-1}^{1} \frac{|u(t)|^2}{W(t)} dt < \infty. \tag{5}$$

Итак, из локальной устойчивости следует, что для любой функции v с свойствами (4) ее первообразная u должна удовлетворять условию (5). Пусть

$$\int_{-1}^{1} W(x)dx = 2m$$

и $a \in (-1; 1)$ — точка, для которой

$$\int_{-1}^{a} W(x)dx = m.$$

Функция

$$v(t) = \begin{cases} W(t), & t < a, \\ -W(t), & t \geqslant a \end{cases}$$

удовлетворяет условиям (4); значит, должно выполняться условие

$$\int_{-1}^{1} \left| \int_{-1}^{t} W(x)dx \right|^2 \frac{dt}{W(t)} < \infty.$$

Аналогично доказывается выполнение второго граничного условия.

Локальная интегрируемость функции $1/W$ следует из того, что первообразная от v непрерывна и положительна на интервале $(-1; 1)$. Теорема доказана. □

Теорема 3. *Если функция $1/W$ локально интегрируема на $(-1; 1)$ и*

$$\int_{-1} \left(\int_{-1}^{t} W(x)dx \right) \frac{dt}{W(t)} < \infty, \quad \int^{1} \left(\int_{t}^{1} W(x)dx \right) \frac{dt}{W(t)} < \infty,$$

то пространство $\widehat{L}_2(W)$ устойчиво.

Доказательство. Пусть функция v удовлетворяет условиям (4). Согласно неравенству Коши имеем

$$|u(t)|^2 = \left(\int_{-1}^{t} v(x)dx \right)^2 \leqslant \int_{-1}^{t} \frac{|v(x)|^2 dx}{W(x)} \int_{-1}^{t} W(x)dx \leqslant \text{const} \cdot \int_{-1}^{t} W(x)dx.$$

В условиях теоремы

$$\int_{-1} \frac{|u(t)|^2 dt}{W(t)} < \infty.$$

Аналогично доказывается, что

$$\int^{1} \frac{|u(t)|^2 dt}{W(t)} < \infty.$$

Значит, выполняется (5), и пространство $\widehat{L}_2(W)$ устойчиво. Теорема доказана. $\square$

Следствие 2. *Если функция* $1/W$ *локально интегрируема на* $(-1;1)$ *и* W *монотонна в окрестности точек* ± 1, *то пространство* $\widehat{L}_2(W)$ *устойчиво.*

Доказательство. Пусть W — неубывающая функция на интервале $(a;1)$. Тогда $W(t) \geqslant W(a)$ на этом интервале и

$$\int_a^1 \left(\int_t^1 W(x)dx\right)\frac{dt}{W(t)} \leqslant \frac{2}{W(a)}\int_{-1}^1 W(x)dx < \infty.$$

Если W — невозрастающая функция, то

$$\int_t^1 W(x)dx \leqslant W(t)(1-t), \qquad \int_a^1 \left(\int_t^1 W(x)dx\right)\frac{dt}{W(t)} \leqslant \int_{-1}^1 (1-t)dt < \infty.$$

Аналогично доказывается выполнение второго граничного условия теоремы. $\square$

Пример 3. Пространство $\widehat{L}_2(W)$ с весом $W(t) = |t|$ не будет локально устойчивым потому, что функция $1/t$ не интегрируема в окрестности 0.

Приведем пример, когда устойчивость пространства $\widehat{L}_2(W)$ отсутствует из-за невыполнения граничных условий в теореме 3. Как видно из следствия 2 теоремы 3, граничные условия могут не выполняться из-за сильной осцилляции весовой функции.

Пример 4. Возьмем положительную непрерывную на $[1/2;+\infty)$ функцию $\alpha(t)$ класса $L_1[1/2;+\infty) \setminus L_2[1/2;+\infty)$. Например,

$$\alpha(t) = \begin{cases} n^2, & n + \dfrac{1}{3n^4} \leqslant t \leqslant n + \dfrac{2}{3n^4},\ n \in \mathbb{N}, \\[2ex] n^{-2}, & n + \dfrac{1}{n^4} \leqslant t \leqslant n+1,\ n \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

полагая $\alpha(1/2) = 1$. На оставшейся части $[1/2;+\infty)$ доопределим функцию $\alpha(t)$ линейными функциями так, чтобы она оказалась непрерывной. Пусть

$$\beta(t) = 2\alpha(t) \Bigg/ \int_{1/2}^{+\infty} \alpha(\tau)d\tau;$$

тогда

$$\int_{1/2}^{+\infty} \beta(t)dt = 2, \qquad \int_{1/2}^{+\infty} \beta^2(t)dt = \infty.$$

Положим для $x \in (0;2]$

$$v(x) = \int_0^x \frac{1}{t^2}\beta\left(\frac{1}{t}\right)dt = \int_{1/x}^{\infty} \beta(t)dt.$$

Функция $v(x)$, $v(0) = 0$, $v(2) = 2$, — возрастающая и непрерывно дифференцируемая. Пусть $u(t)$ — функция обратная к функции $v(x)$. Тогда $u(x)$, $u(0) = 0$, $u(2) = 2$, — возрастающая и непрерывно дифференцируемая. Положим

$$W(t) = u'(t+1), \quad |t| < 1.$$

Функция $1/W$ положительна и локально интегрируема на интервале $(-1;1)$. Убедимся в том, что граничное необходимое условие в точке -1 нарушено. Прямые вычисления с заменой $x = v(t)$

дают

$$\int\limits_{-1} \left| \int\limits_{-1}^{x} W(t)dt \right|^2 \frac{dx}{W(x)} = \int\limits_{-1} \frac{u^2(x+1)dx}{u'(x+1)} = \int\limits_{0} \frac{u^2(x)dx}{u'(x)} =$$

$$= \int\limits_{0} t^2 v'^2(t)dt = \int\limits_{0} \beta^2 \left(\frac{1}{t}\right) \frac{dt}{t^2} = \int\limits^{\infty} \beta^2(x)dx = \infty.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Исаев К. П., Юлмухаметов Р. С.* Безусловные базисы из воспроизводящих ядер в гильбертовых пространствах целых функций// Уфим. мат. ж. — 2013. — *5*, № 3. — С. 67–77.
2. *Красичков-Терновский И. Ф.* Инвариантные подпространства аналитических функций. I. Спектральный синтез на выпуклых областях// Мат. сб. — 1972. — *87 (129)*, № 4. — С. 459–489.
3. *Луценко В. И., Юлмухаметов Р. С.* Обобщение теоремы Пэли—Винера на весовые пространства// Мат. заметки. — 1990. — *48*, № 5. — С. 80–87.
4. *Седлецкий А. М.* Классы аналитических преобразований Фурье и экспоненциальные аппроксимации. — М.: Физматлит, 2005.
5. *Aronszajn N.* Theory of reproducing kernels// Trans. Am. Math. Soc. — 1950. — *68*, № 3. — С. 337–404.
6. *Borichev A., Dhuez R., Kellay K.* Sampling and interpolation in large Bergman and Fock spaces// J. Funct. Anal. — 2007. — *242*, № 2. — С. 563–606.
7. *Borichev A., Lyubarskii Yu.* Riesz bases of reproducing kernels in Fock type spaces// J. Inst. Math. Jussieu. — 2010. — *9*. — С. 449–461.
8. *Hrushchev S. V., Nikol'skii N. K., Pavlov B. S.* Unconditional bases of exponentials and of reproductional kernels// Lect. Notes Math. — 1981. — *864*. — С. 214–335.
9. *Seip K.* Density theorems for sampling and interpolation in the Bargmann–Fock space, I// Reine Angew. Math. — 1992. — *429*. — С. 91—106.
10. *Seip K., Wallsten R.* Density theorems for sampling and interpolation in the Bargmann-Fock space, II// Reine Angew. Math. — 1992. — *429*. — С. 107–113.

К. П. Исаев
Институт математики с вычислительным центром Уфимского научного центра РАН;
Башкирский государственный университет, Уфа
E-mail: orbit81@list.ru

А. В. Луценко
Башкирский государственный университет, Уфа
E-mail: lutsenko.av@ya.ru

Р. С. Юлмухаметов
Институт математики с вычислительным центром Уфимского научного центра РАН;
Башкирский государственный университет, Уфа
E-mail: yulmukhametov@mail.ru

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 142 (2017). С. 81–87

УДК 517.162

(0,0)-ВЫПУКЛЫЕ ФУНКЦИИ И ИХ СВОЙСТВА

© 2017 г. **С. И. КАЛИНИН**

Аннотация. Вводится понятие (α,β)-выпуклой на промежутке функции. Основное внимание акцентируется на рассмотрении класса $(0,0)$-выпуклых функций. Изучаются свойства таких функций и их геометрическая характеризация.

Ключевые слова: выпуклая функция, (α,β)-выпуклость, $(0,0)$-выпуклые и вогнутые функции.

AMS Subject Classification: 26D15

1. Понятие (α,β)-выпуклой функции. Напомним классическое определение понятия выпуклой на промежутке функции.

Определение 1.1. Непрерывная на промежутке l числовой прямой Ox функция $f(x)$ называется *выпуклой* (строго выпуклой, выпуклой вниз, строго выпуклой вниз) на этом промежутке, если для любого отрезка $[a;b]\subset l$, и любого числа $\lambda\in(0;1)$ выполняется неравенство

$$f\big(\lambda a+(1-\lambda)b\big)<\lambda f(a)+(1-\lambda)f(b). \tag{1}$$

Если в условиях данного определения выполняется неравенство

$$f\big(\lambda a+(1-\lambda)b\big)>\lambda f(a)+(1-\lambda)f(b),$$

то функция $f(x)$ называется *вогнутой* (строго вогнутой, вогнутой вниз, строго вогнутой вниз) на промежутке l.

Кроме того, если для непрерывной на промежутке l функции $f(x)$ справедливо неравенство

$$f\big(\lambda a+(1-\lambda)b\big)\leqslant\lambda f(a)+(1-\lambda)f(b),\quad [a,b]\subset l,\quad \lambda\in[0,1], \tag{2}$$

то такую функцию называют *нестрого выпуклой* на этом промежутке. Аналогично определяется понятие *нестрого вогнутой* на промежутке l функции: в соотношении (2) знак строгого неравенства следует на знак нестрогого.

Заметим, что в неравенствах (1)–(2) выражение $\lambda a+(1-\lambda)b$ есть взвешенное среднее арифметическое чисел a и b с весами λ и $1-\lambda$ и что такое среднее есть значение взвешенного среднего степенного

$$F_{a,b}^{(\lambda,1-\lambda)}(x)=\begin{cases}\big(\lambda a^x+(1-\lambda)b^x\big)^{1/x}, & x\neq 0,\\ a^{\lambda}b^{1-\lambda}, & x=0,\end{cases} \tag{3}$$

положительных величин a и b при $x=1$; при таком x функция (3) имеет смысл при любых значениях a и b. Следовательно, в терминах взвешенного среднего степенного (3) неравенство (1) можно переписать в виде

$$f\left(F_{a,b}^{(\lambda,1-\lambda)}(1)\right)<F_{f(a),f(b)}^{(\lambda,1-\lambda)}(1). \tag{4}$$

Последнее обстоятельство инспирирует введение понятия (α,β)-выпуклой функции, обобщающего понятие выпуклой в обычном смысле функции.

Определение 1.2. Пусть $f:l\to\mathbb{R}$ — непрерывная на промежутке $l\subseteq(0;+\infty)$, функция, принимающая положительные значения. Функцию f будем называть (α,β)-*выпуклой* на рассматриваемом промежутке, если для любого отрезка $[a;b]\subset l$, и любого числа $\lambda\in(0;1)$ выполняется неравенство

$$f\left(F_{a,b}^{(\lambda,1-\lambda)}(\alpha)\right)<F_{f(a),f(b)}^{(\lambda,1-\lambda)}(\beta). \tag{5}$$

ISSN 0233–6723

Если в условиях определения 1.2 для любого отрезка $[a;b] \subset l$ и любого числа $\lambda \in [0;1]$ выполняется неравенство

$$f\left(F_{a,b}^{(\lambda,1-\lambda)}(\alpha)\right) \leqslant F_{f(a),f(b)}^{(\lambda,1-\lambda)}(\beta), \tag{6}$$

то функцию f условимся называть *нестрого* (α,β)*-выпуклой* на промежутке l.

Очевидно, в терминах приведенного определения 1.2 выпуклая (согласно определению 1.1) функция есть $(1,1)$-выпуклая функция.

Отметим также, что $(1,0)$-выпуклость функции на промежутке означает ее логарифмическую выпуклость на этом промежутке, $(0,1)$-выпуклость — GA-выпуклость, а $(-1,1)$-выпуклость — гармоническую выпуклость. Логарифмически выпуклым функциям посвящена, к примеру, работа [1], а с GA-выпуклыми и гармонически выпуклыми функциями читатель может познакомиться, обратившись к статьям [2] и [3] соответственно. Кроме того, в [4] авторы обращаются к рассмотрению гармонически логарифмически выпуклых функций. В терминах определения 1.2 такие функции являются $(-1,0)$-выпуклыми. В настоящей статье рассматриваются $(0,0)$-выпуклые функции.

2. $(0,0)$**-Выпуклые функции.** В силу (3) неравенство (5), характеризующее $(0,0)$-выпуклость функции f, можно записать в более компактной форме

$$f\left(a^{\lambda}b^{1-\lambda}\right) < f^{\lambda}(a)f^{1-\lambda}(b), \tag{7}$$

нестрогую же $(0,0)$-выпуклость функции f будет характеризовать неравенство

$$f\left(a^{\lambda}b^{1-\lambda}\right) \leqslant f^{\lambda}(a)f^{1-\lambda}(b), \tag{8}$$

вытекающее из (6).

Ясно, что $(0,0)$-вогнутость или нестрогую $(0,0)$-вогнутость функции f на промежутке l будут описывать соответственно неравенства

$$f\left(a^{\lambda}b^{1-\lambda}\right) > f^{\lambda}(a)f^{1-\lambda}(b), \tag{9}$$

$$f\left(a^{\lambda}b^{1-\lambda}\right) \geqslant f^{\lambda}(a)f^{1-\lambda}(b). \tag{10}$$

Приведем примеры $(0,0)$-выпуклых (вогнутых) функций. Покажем сначала, что экспонента $y = e^x$ является $(0,0)$-выпуклой на интервале $(0;+\infty)$ функцией. Действительно, для любого отрезка $[a;b]$, $0 < a < b < +\infty$, и любого $\lambda \in (0;1)$ в силу весового неравенства Коши имеем

$$(e^a)^{\lambda}(e^b)^{1-\lambda} = e^{\lambda a+(1-\lambda)b} > e^{a^{\lambda}b^{1-\lambda}}.$$

Для рассматриваемой функции реализуется неравенство (7); $(0,0)$-выпуклость экспоненты на интервале $(0;+\infty)$ установлена.

По аналогии нетрудно показать, что на интервале $(0;+\infty)$ $(0,0)$-выпуклой будет любая показательная функция вида $f(x) = \alpha c^{\beta x}$, где $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $c > 1$.

Приведем еще один пример $(0,0)$-выпуклой функции. Покажем, что на интервале $(0;+\infty)$ такой является функция $\overline{f}(x) = 1 + x$. С этой целью установим неравенство

$$1 + a^{\lambda}b^{1-\lambda} < (1+a)^{\lambda}(1+b)^{1-\lambda}, \quad a > 0, \quad b > 0, \quad a < b; \quad \lambda \in (0;1). \tag{11}$$

Для обоснования (11) введем в рассмотрение функцию $y = \ln(1+e^x)$. По знаку ее второй производной заключаем, что она является выпуклой на всей числовой прямой. Значит, для значений $a_1 = \ln a$, $b_1 = \ln b$, $\lambda \in (0;1)$ будет выполняться неравенство

$$\ln\left(1 + e^{\lambda a_1+(1-\lambda)b_1}\right) < \lambda\ln\left(1+e^{a_1}\right) + (1-\lambda)\ln\left(1+e^{b_1}\right),$$

или

$$\ln\left(1 + (e^{a_1})^{\lambda}(e^{b_1})^{1-\lambda}\right) < \ln(1+e^{a_1})^{\lambda}(1+e^{b_1})^{1-\lambda}.$$

Но последнее неравенство представляет собой соотношение (11).

Функция $g(x) = \log_c x$, $c > 1$, является $(0,0)$-вогнутой на интервале $(1;+\infty)$, поскольку для любых a и b, $1 < a < b < +\infty$, и любого $\lambda \in (0;1)$, имеем

$$g\left(a^{\lambda}b^{1-\lambda}\right) = \log_c a^{\lambda}b^{1-\lambda} = \lambda\log_c a + (1-\lambda)\log_c b > (\log_c a)^{\lambda}(\log_c b)^{1-\lambda} = g^{\lambda}(a)\cdot g^{1-\lambda}(b)$$

(реализуется неравенство (9); в получении оценки снова использовано весовое неравенство Коши).

Аналогично показывается, что функция $\overline{g}(x)\log_c x$, $0 < c < 1$, $(0,0)$-вогнута на интервале $(0;1)$. В отношении данной функции стоит заметить, что она является выпуклой на интервале $(0;1)$ в обычном смысле ($(1,1)$-выпуклой, см. (4)).

Так как для функции $h(x) = \alpha x^{\beta}$, $\alpha > 0$, $-\infty < \beta < +\infty$, $x > 0$, выполняется соотношение

$$\alpha\left(a^{\lambda}b^{1-\lambda}\right)^{\beta} = (\alpha a^{\beta})^{\lambda}(\alpha b^{\beta})^{1-\lambda},$$

где a и b удовлетворяют условию $0 < a < b < +\infty$, то данная функция в силу неравенств (8) и (10) будет нестрого $(0,0)$-выпуклой и нестрого $(0,0)$-вогнутой на интервале $(0;+\infty)$.

3. Геометрическая характеризация $(0,0)$-выпуклости. Для описания геометрической трактовки понятия $(0,0)$-выпуклой функции введем понятие степенной дуги (степенной кривой).

Определение 3.1. Всякую связную часть графика степенной функции $h(x) = \alpha x^{\beta}$, $\alpha > 0$, $-\infty < \beta < +\infty$, $x > 0$, условимся называть *степенной дугой*, или *степенной кривой.*

Существует ровно одна степенная дуга, соединяющая две точки первого квадранта плоскости xOy, не лежащие на одной вертикали. Так, точки $M_1(x_1;y_1)$ $(x_1 > 0,\ y_1 > 0)$ и $M_2(x_2;y_2)$ $(x_2 > 0,\ y_2 > 0,\ x_2 \neq x_1)$ соединяются степенной дугой

$$y = y_1^{\log_{\frac{x_2}{x_1}} x_2}\, y_2^{\log_{\frac{x_1}{x_2}} x_1}\, x^{\log_{\frac{x_1}{x_2}} \frac{y_1}{y_2}}. \tag{12}$$

Действительно, покажем сначала, что координаты точек M_1 и M_2 удовлетворяют уравнению (12). Имеем:

$$\begin{aligned} y(x_1) &= y_1^{\log_{\frac{x_2}{x_1}} x_2}\, y_2^{\log_{\frac{x_1}{x_2}} x_1}\, x_1^{\log_{\frac{x_1}{x_2}} \frac{y_1}{y_2}} = y_1^{\log_{\frac{x_2}{x_1}} x_2}\, y_2^{\log_{\frac{x_1}{x_2}} x_1}\, x_1^{\frac{\log_{x_1}\frac{y_1}{y_2}}{\log_{x_1}\frac{x_1}{x_2}}} = \\ &= y_1^{\log_{\frac{x_2}{x_1}} x_2}\, y_2^{\log_{\frac{x_1}{x_2}} x_1} \left(\frac{y_1}{y_2}\right)^{\frac{1}{\log_{x_1}\frac{x_1}{x_2}}} = y_1^{\log_{\frac{x_2}{x_1}} x_2 + \frac{1}{\log_{x_1}\frac{x_1}{x_2}}}\, y_2^{\log_{\frac{x_1}{x_2}} x_1 - \frac{1}{\log_{x_1}\frac{x_1}{x_2}}} = \\ &= y_1^{\log_{\frac{x_2}{x_1}} x_2 - \log_{\frac{x_2}{x_1}} x_1} = y_1; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y(x_2) &= y_1^{\log_{\frac{x_2}{x_1}} x_2}\, y_2^{\log_{\frac{x_1}{x_2}} x_1}\, x_2^{\log_{\frac{x_1}{x_2}} \frac{y_1}{y_2}} = y_1^{\log_{\frac{x_2}{x_1}} x_2}\, y_2^{\log_{\frac{x_1}{x_2}} x_1}\, x_2^{\frac{\log_{x_2}\frac{y_1}{y_2}}{\log_{x_2}\frac{x_1}{x_2}}} = \\ &= y_1^{\log_{\frac{x_2}{x_1}} x_2}\, y_2^{\log_{\frac{x_1}{x_2}} x_1} \left(\frac{y_1}{y_2}\right)^{\frac{1}{\log_{x_2}\frac{x_1}{x_2}}} = y_1^{\log_{\frac{x_2}{x_1}} x_2 + \frac{1}{\log_{x_2}\frac{x_1}{x_2}}}\, y_2^{\log_{\frac{x_1}{x_2}} x_1 - \frac{1}{\log_{x_2}\frac{x_1}{x_2}}} = \\ &= y_2^{\log_{\frac{x_1}{x_2}} x_1 - \frac{1}{\log_{x_2}\frac{x_1}{x_2}}} = y_2. \end{aligned}$$

Покажем, что степенная дуга, задаваемая уравнением (12), есть единственная степенная кривая, соединяющая точки M_1 и M_2. Для этого координаты данных точек подставим в общее уравнение степенной кривой $y = \alpha x^{\beta}$, что позволяет записать систему уравнений относительно α и β:

$$y_1 = \alpha x_1^{\beta}, \quad y_2 = \alpha x_2^{\beta}.$$

Решая систему, получаем

$$\beta = \log_{\frac{x_1}{x_2}} \frac{y_1}{y_2}, \quad \alpha = \frac{y_1}{x_1^{\log_{\frac{x_1}{x_2}} \frac{y_1}{y_2}}}.$$

Преобразуем выражение для α:

$$\alpha = \frac{y_1}{x_1^{\log_{x_1}\frac{y_1}{y_2}:\log_{x_1}\frac{x_1}{x_2}}} = \frac{y_1}{\left(\frac{y_1}{y_2}\right)^{\frac{1}{\log_{x_1}\frac{x_1}{x_2}}}} = y_1^{1-\frac{1}{\log_{x_1}\frac{x_1}{x_2}}} y_2^{\frac{1}{\log_{x_1}\frac{x_1}{x_2}}} =$$

$$= y_1^{1+\log_{\frac{x_2}{x_1}} x_1} y_2^{\log_{\frac{x_1}{x_2}} x_1} = y_1^{\log_{\frac{x_2}{x_1}} x_2} y_2^{\log_{\frac{x_1}{x_2}} x_1}.$$

Отсюда следует, что степенная кривая $y = \alpha x^\beta$ с найденными значениями α и β есть кривая (12). Требуемое установлено.

Заметим, что уравнение (12) может быть записано также в виде

$$y = y_1^{\log_{\frac{x_2}{x_1}} \frac{x_2}{x}} y_2^{\log_{\frac{x_1}{x_2}} \frac{x_1}{x}}, \tag{13}$$

поскольку

$$y_1^{\log_{\frac{x_2}{x_1}} x_2} y_2^{\log_{\frac{x_1}{x_2}} x_1} x^{\log_{\frac{x_1}{x_2}} \frac{y_1}{y_2}} = y_1^{\log_{\frac{x_2}{x_1}} x_2} y_2^{\log_{\frac{x_1}{x_2}} x_1} x^{\log_x \frac{y_1}{y_2}:\log_x \frac{x_1}{x_2}} =$$

$$= y_1^{\log_{\frac{x_2}{x_1}} x_2} y_2^{\log_{\frac{x_1}{x_2}} x_1} \left(\frac{y_1}{y_2}\right)^{\frac{1}{\log_x \frac{x_1}{x_2}}} = y_1^{\log_{\frac{x_2}{x_1}} x_2+\frac{1}{\log_x \frac{x_1}{x_2}}} y_2^{\log_{\frac{x_1}{x_2}} x_1-\frac{1}{\log_x \frac{x_1}{x_2}}} = y_1^{\log_{\frac{x_2}{x_1}} \frac{x_2}{x}} y_2^{\log_{\frac{x_1}{x_2}} \frac{x_1}{x}}.$$

Из (13) легко видеть, что если точки M_1 и M_2 лежат на одной горизонтали (в этом случае $y_1 = y_2$), то их соединяющая степенная дуга вырождается в отрезок горизонтальной прямой $y = y_1$.

Покажем, что если $f(x)$ — $(0,0)$-выпуклая на промежутке l функция, то для любого отрезка $[a;b] \subset l$ и любого $x \in (a;b)$ выполняется следующее условие: точка $(x; f(x))$ графика функции f лежит ниже точки степенной дуги, соединяющей точки $(a; f(a))$, $(b; f(b))$, с той же абсциссой x. Для этого составим уравнение экспоненциальной дуги, соединяющей точки $(a; f(a))$ и $(b; f(b))$:

$$y = (f(a))^{\log_{\frac{b}{a}} \frac{b}{x}} (f(b))^{\log_{\frac{a}{b}} \frac{a}{x}}, \tag{14}$$

и $x \in (a;b)$ представим в виде

$$x = a^{\log_{\frac{b}{a}} \frac{b}{x}} b^{\log_{\frac{a}{b}} \frac{a}{x}}. \tag{15}$$

Форма (14) обусловлена уравнением (13), а представление (15) поясняет следующая цепочка тождественных преобразований:

$$a^{\log_{\frac{b}{a}} \frac{b}{x}} b^{\log_{\frac{a}{b}} \frac{a}{x}} = a^{\log_a \frac{b}{x}:\log_a \frac{b}{a}} b^{\log_b \frac{a}{x}:\log_b \frac{a}{b}} = \left(\frac{b}{x}\right)^{\frac{1}{\log_a \frac{b}{a}}} \left(\frac{a}{x}\right)^{\frac{1}{\log_b \frac{a}{b}}} = \left(\frac{b}{x}\right)^{\log_{\frac{b}{a}} a} \left(\frac{a}{x}\right)^{\log_{\frac{a}{b}} b} =$$

$$= x^{\log_{\frac{a}{b}} a+\log_{\frac{b}{a}} b} a^{\log_{\frac{a}{b}} b} b^{\log_{\frac{b}{a}} a} = x a^{\log_{\frac{a}{b}} b} b^{\log_b a:\log_b \frac{b}{a}} = x a^{\frac{1}{\log_b \frac{b}{a}}+\log_{\frac{a}{b}} b} = x.$$

Так как

$$\log_{\frac{b}{a}} \frac{b}{x} \in (0;1), \quad \log_{\frac{a}{b}} \frac{a}{x} \in (0;1), \quad \log_{\frac{b}{a}} \frac{b}{x} + \log_{\frac{a}{b}} \frac{a}{x} = 1,$$

то в силу $(0,0)$-выпуклости функции f имеем:

$$f(x) = f\left(a^{\log_{\frac{b}{a}} \frac{b}{x}} b^{\log_{\frac{a}{b}} \frac{a}{x}}\right) < (f(a))^{\log_{\frac{b}{a}} \frac{b}{x}} (f(b))^{\log_{\frac{a}{b}} \frac{a}{x}}.$$

Полученное неравенство и означает, что точка $(a; f(x))$, $x \in (a;b)$, графика функции f лежит строго ниже точки $(x; (f(a))^{\log_{\frac{b}{a}} \frac{b}{x}} (f(b))^{\log_{\frac{a}{b}} \frac{a}{x}})$ экспоненциальной дуги (14).

Рассуждая аналогично, нетрудно показать, что если $f(x)$ — нестрого $(0,0)$-выпуклая на промежутке l функция, то для любого отрезка $[a;b] \subset l$, и любого $x \in (a;b)$ выполняется следующее условие: точка $(x; f(x))$ графика функции f лежит не выше точки степенной дуги, соединяющей точки $(a; f(a))$, $(b; f(b))$, с той же абсциссой x.

Соответствующую геометрическую характеризацию читатель без труда сформулирует и в отношении $(0,0)$-вогнутых в строгом или нестрогом смысле функций.

4. Некоторые свойства $(0,0)$-выпуклых функций. Рассмотрим наиболее характерные свойства $(0,0)$-выпуклых и $(0,0)$-вогнутых на промежутке функций.

1^0. *Произведение fg $(0,0)$-выпуклых на промежутке l функций f и g есть $(0,0)$-выпуклая на данном промежутке функция.*

Доказательство. Так как

$$f\left(a^\lambda b^{1-\lambda}\right) < f^\lambda(a)f^{1-\lambda}(b), \quad g\left(a^\lambda b^{1-\lambda}\right) < g^\lambda(a)g^{1-\lambda}(b), \quad [a;b]\subset l, \quad \lambda\in(0;1),$$

то перемножение данных неравенств позволяет записать

$$f\left(a^\lambda b^{1-\lambda}\right)\cdot g\left(a^\lambda b^{1-\lambda}\right) = (fg)\left(a^\lambda b^{1-\lambda}\right) < f^\lambda(a)f^{1-\lambda}(b)g^\lambda(a)g^{1-\lambda}(b) = (fg)^\lambda(a)(fg)^{1-\lambda}(b),$$

что устанавливает требуемое. □

Аналогично доказывается следующее свойство.

2^0. *Произведение fg $(0,0)$-вогнутых на промежутке l функций f и g есть $(0,0)$-вогнутая на данном промежутке функция.*

Очевидно, свойства 1^0 и 2^0 можно переформулировать и для нестрого $(0,0)$-выпуклых и $(0,0)$-вогнутых функций соответственно.

Элементарная техника, используемая в доказательстве свойства 1^0, позволяет сформулировать следующие утверждения.

3^0. *Если f — $(0,0)$-выпуклая на промежутке l функция, а функция g нестрого $(0,0)$-выпукла на данном промежутке, то их произведение fg есть $(0,0)$-выпуклая на l функция.*

4^0. *Если f — $(0,0)$-вогнутая на промежутке l функция, а функция g нестрого $(0,0)$-вогнута на данном промежутке, то их произведение fg есть $(0,0)$-вогнутая на l функция.*

В силу свойств 3^0, 4^0 функция $y=\alpha x^\beta e^x$ ($\alpha>0$, $-\infty<\beta<+\infty$) является $(0,0)$-выпуклой на интервале $(0;+\infty)$, а функция $y=\alpha x^\beta \ln x$ ($\alpha>0$, $-\infty<\beta<+\infty$) на интервале $(1;+\infty)$ является $(0,0)$-вогнутой.

5^0. *Если функция f — $(0,0)$-выпуклая (нестрого $(0,0)$-выпуклая) на промежутке l, то функция $1/f$ будет $(0,0)$-вогнутой (нестрого $(0,0)$-вогнутой) на этом интервале.*

Доказательство данного свойства следует из эквивалентности неравенств (7) и (8) неравенствам

$$\frac{1}{f}\left(a^\lambda b^{1-\lambda}\right) = \frac{1}{f\left(a^\lambda b^{1-\lambda}\right)} > \left(\frac{1}{f}\right)^\lambda(a)\left(\frac{1}{f}\right)^{1-\lambda}(b) = \frac{1}{f^\lambda(a)}\cdot\frac{1}{f^{1-\lambda}(b)},$$
$$\frac{1}{f}\left(a^\lambda b^{1-\lambda}\right) = \frac{1}{f\left(a^\lambda b^{1-\lambda}\right)} \geqslant \left(\frac{1}{f}\right)^\lambda(a)\left(\frac{1}{f}\right)^{1-\lambda}(b) = \frac{1}{f^\lambda(a)}\cdot\frac{1}{f^{1-\lambda}(b)}$$

соответственно. □

Аналогично устанавливается следующее свойство.

6^0. Если функция f — $(0,0)$-вогнутая (нестрого $(0,0)$-вогнутая) на промежутке l, то функция $1f$ будет $(0,0)$-выпуклой (нестрого $(0,0)$-выпуклой) на этом интервале.

5. Неравенство Иенсена для $(0,0)$-выпуклых функций.

Теорема 0.1. *Пусть f — $(0,0)$-выпуклая в строгом или нестрогом смысле на промежутке l числовой прямой функция; $a_1,\ldots,a_n$ — произвольные числа из l, $\lambda_k\in(0;1)$, $k=1,\ldots,n$, $\lambda_1+\ldots+\lambda_n=1$. Справедливо неравенство*

$$f\left(a_1^{\lambda_1}\cdot\ldots\cdot a_n^{\lambda_n}\right) \leqslant f^{\lambda_1}(a_1)\cdot\ldots\cdot f^{\lambda_n}(a_n), \tag{16}$$

в котором равенство достигается только в двух случаях:

(1) *f — степенная функция,*
(2) *$a_1=\ldots=a_n$.*

Доказательство. Обоснование (16) проведем по схеме доказательства классического неравенства Иенсена для выпуклых функций, обращаясь к методу математической индукции.

Установим базу индукции. При $n = 2$ неравенство (16) принимает вид

$$f\left(a_1^{\lambda_1} a_2^{\lambda_2}\right) \leqslant f^{\lambda_1}(a_1) f^{\lambda_2}(a_2), \quad a_1, a_2 \in l; \quad \lambda_1, \lambda_2 \in (0;1), \quad \lambda_1 + \lambda_2 = 1. \tag{17}$$

Справедливость (17) следует из определений $(0,0)$-выпуклой в строгом или нестрогом смысле функции f.

Легко видеть, что если функция f будет степенной функцией вида αx^{β} ($\alpha > 0$, $-\infty < \beta < +\infty$, $x > 0$), то в (17) знак неравенства будет заменяться знаком равенства. Если же f не является степенной функцией, то из геометрической трактовки $(0,0)$-выпуклости функции следует, что в (17) знак равенства будет достигаться только при $a_1 = a_2$.

Сделаем индукционное предположение: предположим, что неравенство (16) выполняется при $n = k$, $k \geqslant 2$, т.е. справедливо соотношение

$$\begin{gathered} f\left(a_1^{\lambda_1} \cdot \ldots \cdot a_k^{\lambda_k}\right) \leqslant f^{\lambda_1}(a_1) \cdot \ldots \cdot f^{\lambda_k}(a_k), \\ a_i \in l, \quad \lambda_i \in (0;1), \quad i = 1, \ldots, k, \quad \lambda_1 + \ldots + \lambda_k = 1, \end{gathered} \tag{18}$$

при этом равенство в (18) будет достигаться лишь в двух случаях: либо f — степенная функция, либо $a_1 = \ldots = a_k$.

Реализуем индукционный переход: покажем, что в имеющихся условиях будет выполняться неравенство

$$\begin{gathered} f\left(a_1^{\lambda_1} \cdot \ldots \cdot a_k^{\lambda_k} \cdot a_{k+1}^{\lambda_{k+1}}\right) \leqslant f^{\lambda_1}(a_1) \cdot \ldots \cdot f^{\lambda_k}(a_k) \cdot f^{\lambda_{k+1}}(a_k + 1), \\ a_i \in l, \quad \lambda_i \in (0;1), \quad i = 1, \ldots, k+1, \quad \lambda_1 + \ldots + \lambda_{k+1} = 1, \end{gathered} \tag{19}$$

в котором равенство может достигаться только тогда, когда f будет степенной функцией или когда $a_1 = \ldots = a_{k+1}$.

Оценим левую часть (19) следующим образом:

$$\begin{aligned} f\left(a_1^{\lambda_1} \cdot \ldots \cdot a_k^{\lambda_k} \cdot a_{k+1}^{\lambda_{k+1}}\right) \leqslant f\left(a_1^{\lambda_1} \cdot \ldots \cdot a_{k-1}^{\lambda_{k-1}} a_k^{\frac{\lambda_k}{\lambda_k+\lambda_{k+1}}} a_{k+1}^{\frac{\lambda_{k+1}}{\lambda_k+\lambda_{k+1}}}\right)^{\lambda_k+\lambda_{k+1}} \leqslant \\ \leqslant f^{\lambda_1}(a_1) \cdot \ldots \cdot f^{\lambda_{k-1}}(a_{k-1}) \cdot f^{\lambda_k+\lambda_{k+1}}\left(a_{k+1}^{\frac{\lambda_k}{\lambda_k+\lambda_{k+1}}} a_{k+1}^{\frac{\lambda_{k+1}}{\lambda_k+\lambda_{k+1}}}\right) \leqslant \\ \leqslant f^{\lambda_1}(a_1) \cdot \ldots \cdot f^{\lambda_{k-1}}(a_{k-1}) \cdot \left(f^{\frac{\lambda_k}{\lambda_k+\lambda_{k+1}}}(a_k) f^{\frac{\lambda_{k+1}}{\lambda_k+\lambda_{k+1}}}(a_{k+1})\right)^{\lambda_k+\lambda_{k+1}} = \\ = f^{\lambda_1}(a_1) \cdot \ldots \cdot f^{\lambda_{k-1}}(a_{k-1}) \cdot f^{\lambda_k}(a_k) \cdot f^{\lambda_{k+1}}(a_{k+1}). \end{aligned}$$

В приведенной цепочке соотношений первое неравенство записывается на основании индукционного предположения, а второе — на основании базы индукции. При этом заметим, что данные неравенства будут переходить в равенства, если f будет степенной функцией или если

$$a_1 = \ldots = a_{k-1} = a_k^{\frac{\lambda_k}{\lambda_k+\lambda_{k+1}}} = a_{k+1}^{\frac{\lambda_{k+1}}{\lambda_k+\lambda_{k+1}}}$$

и $a_k = a_{k+1}$, т.е. если $a_1 = \ldots = a_{k-1} = a_k = a_{k+1}$. Неравенство (16) полностью обосновано, теорема доказана. □

Ясно, что если в условиях теоремы f является $(0,0)$-вогнутой в строгом или нестрогом смысле на промежутке l функцией, то неравенство (16) перейдет в неравенство

$$f(a_1^{\lambda_1} \cdot \ldots \cdot a_n^{\lambda_n}) \geqslant f^{\lambda_1}(a_1) \cdot \ldots \cdot f^{\lambda_n}(a_n). \tag{20}$$

Условия достижения равенства в (20) будут теми же, что и для неравенства (16).

6. Простые доказательства неравенств Коши и Гюйгенса. Запишем неравенство Иенсена (16) для (0, 0)-выпуклой функции $y = e^x$:

$$e^{a_1^{\lambda_1}\cdot\ldots\cdot a_n^{\lambda_n}} \leqslant (e^{a_1})^{\lambda_1}\cdot\ldots\cdot(e^{a_n})^{\lambda_n}. \tag{21}$$

Здесь $a_1, \ldots, a_n$ — положительные числа, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ — набор положительных весов, удовлетворяющий условию $\lambda_1 + \ldots + \lambda_n = 1$. Равенство в (21) достигается тогда и только тогда, когда $a_1 = \ldots = a_n$.

Легко видеть, что неравенство (21) равносильно соотношению

$$a_1^{\lambda_1}\cdot\ldots\cdot a_n^{\lambda_n} \leqslant \lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_n a_n. \tag{22}$$

Неравенство (22) есть *весовое* (*обобщенное*) *неравенство Коши*; равенство в нем достигается только при условии $a_1 = \ldots = a_n$.

Приведенное обоснование неравенства Коши есть самое простое из известных нам десятков доказательств данного неравенства.

Напомним, при совпадении весов $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ неравенство (22) переходит в *простое* неравенство Коши

$$\sqrt[n]{a_1\cdot\ldots\cdot a_n} \leqslant \frac{a_1 + \ldots + a_n}{n}.$$

Обоснуем сейчас *обобщенное*, или *весовое неравенство Гюйгенса*

$$1 + a_1^{p_1}\cdot\ldots\cdot a_n^{p_n} \leqslant (1 + a_1)^{p_1}\cdot\ldots\cdot(1 + a_n)^{p_n}. \tag{23}$$

где $a_1, \ldots, a_n$ — набор положительных чисел, $p_1, \ldots, p_n$ — также положительные числа, связанные условием $p_1 + \ldots + p_n = 1$. Равенство в нем достигается только, если $a_1 = \ldots = a_n$.

Неравенство (23) мы получаем тотчас же, если запишем неравенство Иенсена (16) для функции $\overline{f}(x) = 1 + x$ $(x > 0)$ с набором чисел $a_1, \ldots, a_n$ и набором весов $\lambda_1 = p_1, \ldots, \lambda_n = p_n$. Так как функция $\overline{f}$ не является степенной, то равенство в (23) действительно будет достигаться только при условии $a_1 = \ldots = a_n$. Неравенство (23) полностью обосновано.

Неравенство (23) имеет следствие: при совпадении чисел $p_1, \ldots, p_n$ оно переходит в классическое неравенство Гюйгенса

$$1 + \sqrt[n]{a_1\cdot\ldots\cdot a_n} \leqslant \sqrt[n]{(1 + a_1)\cdot\ldots\cdot(1 + a_n)}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Аносов Д. В.* О сумме логарифмически выпуклых функций// Мат. просвещение. — 2001. — *3*, № 5. — С. 158–163.
2. *Guan Kaizhong.* GA-convexity and its applications// Anal. Math. — 2013. — *39*, № 3. — С. 189–208.
3. *İşcan İ., Wu Sh.* Hermite–Hadamard type inequalities for harmonically convex functions via fractional integrals// Appl. Math. Comput. — 2014. — *238*. — С. 237–244.
4. *Noor M. A., Noor K. I., Awan M. U.* Some characterizations of harmonically log-convex functions// Proc. Jangjeon Math. Soc. — 2014. — *17*, № 1. — С. 51–61.

С. И. Калинин
Вятский государственный университет, Киров
E-mail: kalinin_gu@mail.ru

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 142 (2017). С. 88–101

УДК 517.55, 517.51

ЭСКИЗ ТЕОРИИ РОСТА ФУНКЦИЙ, ГОЛОМОРФНЫХ В МНОГОМЕРНОМ ТОРЕ

© 2017 г. М. Н. ЗАВЬЯЛОВ, Л. С. МАЕРГОЙЗ

Аннотация. Разработан подход к построению теории роста класса $H(\mathbb{T}^n)$ функций, голоморфных в многомерном торе $\mathbb{T}^n$, базирующийся на структуре элементов этого класса и известных результатах теории роста целых функций многих комплексных переменных. Этот подход иллюстрируется в ситуации, когда рост функции $g \in H(\mathbb{T}^n)$ сравнивается с ростом ее максимума-модуля на остове полидиска. Исследуются свойства соответствующих характеристик роста функций класса $H(\mathbb{T}^n)$, их связь с коэффициентами разложения в ряды Лорана этих функций. Проводится сравнительный анализ этих результатов и аналогичных утверждений теории роста целых функций многих переменных.

Ключевые слова: целая функция многих переменных, голоморфная функция в многомерном торе, выпуклая функция, характеристики роста, кратный ряд Лорана, носитель, строго выпуклый конус.

AMS Subject Classification: 32A15, 30C45

1. Введение. В [4,5] был рассмотрен класс $H(\mathbb{T}^n)$ функций, голоморфных в многомерном торе $\mathbb{T}^n = \mathbb{C}_*^n$, где $\mathbb{C}_* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $n > 1$, являющийся расширением класса $H(\mathbb{C}^n)$ целых функций n комплексных переменных. В нем был выделен собственный подкласс $\mathcal{A}(\mathbb{T}^n)$ функций, эквивалентных целым функциям в следующем смысле: функция g принадлежит классу $\mathcal{A}(\mathbb{T}^n)$, если существует такое мономиальное голоморфное отображение $\mathcal{F}$, что $f = g \circ \mathcal{F}$ — целая функция. Интерес к этим классам объясняется современными исследованиями по анализу на торических многообразиях (см. [9,11]).

Теория целых функций многих переменных довольно хорошо разработана (см., например, [7,8,12]). Цель данной статьи — дать импульс к развитию теории роста функций, голоморфных в многомерном торе. Структура функций класса $H(\mathbb{T}^n)$ изучалась в [4,5], где рассматривались и показатели их роста. В [14] изложен подход к развитию теории роста функций класса $\mathcal{A}(\mathbb{T}^n)$ на примере изучения свойств их преобразования Лапласа—Бореля, опирающийся на соответствующие результаты в случае целых функций.

В данной статье исследуются свойства характеристик роста функций класса $H(\mathbb{T}^n)$ в случае, когда рост функции $g \in H(\mathbb{T}^n)$ сравнивается с ростом ее максимума-модуля

$$M_g(r) = \max\bigl\{|g(z)| : |z_k| = r_k,\ k = 1, \ldots, n\bigr\}, \quad r \in \mathbb{R}_0^n,\ \mathbb{R}_0 = \bigl\{r \in \mathbb{R} : r > 0\bigr\}, \tag{1}$$

на остове полидиска, опираясь на известные результаты по теории роста функций класса $H(\mathbb{C}^n)$ в [3,13]. В частности, изучается связь показателей роста с коэффициентами разложения функции g в ряд Лорана. Доказательства полученных утверждений приводятся лишь тогда, когда они существенно отличаются от доказательств аналогичных фактов в случае класса $H(\mathbb{C}^n)$.

2. Функции класса $H(\mathbb{T}^n)$, эквивалентные целым функциям. Естественным аналогом целых функций одной переменной являются функции, аналитические на сфере Римана, за исключением одной точки. Подобного аналога в случае нескольких переменных нельзя ожидать: аналитические функции многих переменных не имеют изолированных особенностей. «Макет» многомерного аналога этого результата подсказывает следующий вариант теоремы Адамара—Валирона.

Теорема 1. *Пусть* $g(z) = g(z_1, \dots, z_n)$ *— функция, голоморфная в торе* $\mathbb{T}^n$*,* $n > 1$*;* $M_g(r)$ *— ее модуль-максимум на остове полидиска* (см. (1))*. Тогда и* $M_g(r)$*, и* $\ln M_g(r)$ *— выпуклые функции от* $\ln r_1, \dots, \ln r_n$*.*

В том случае, когда g — след на $\mathbb{T}^n$ целой функции, $M_g(r)$ — возрастающая функция по каждой переменной. Поэтому

$$V_g(u) = \ln M_g(e^u) := \ln M_g\big(e^{u_1}, \dots, e^{u_n}\big), \quad u \in \mathbb{R}^n, \tag{2}$$

— выпуклая функция с выпуклым конусом K_V направлений ее убывания, содержащим $\mathbb{R}^n_- \setminus 0$, где $\mathbb{R}_- = \{u \in \mathbb{R} : u \leqslant 0\}$.

2.1. Выпуклые функции, эквивалентные возрастающим функциям. Для строгого определения конуса K_V понадобятся следующие факты выпуклого анализа.

Теорема 2 (см. [15, Theorem 8.5])**.** *Пусть* $V = V(u)$*,* $u \in \mathbb{R}^n$ *— конечная выпуклая функция. При любом* $a \in \mathbb{R}^n$ *существует не зависящий от* a *предел*

$$\gamma_V(u) = \lim_{t\to\infty} \frac{V(tu+a) - V(a)}{t} = \sup_{t>0} \left\{\frac{V(tu+a) - V(a)}{t}\right\} \quad \forall u \in \mathbb{R}^n. \tag{3}$$

Кроме того, функция γ_V *— положительно однородная выпуклая функция, принимающая, возможно, и значение* $+\infty$*.*

Функцию γ_V называют *асимптотической* (или рецессивной) функцией V. В [15, § 8] это определение дано в эквивалентной форме (см. [3], [13, гл. 1, § 6]).

Теорема 3 (см. [15, Theorem 8.6, Corollary 8.6.1])**.** *Для того чтобы след* $\varphi(t) = V(ut + a)$*,* $t \in \mathbb{R}$*, выпуклой функции* $V(x)$*,* $x \in \mathbb{R}^n$*,* $n > 1$*, на прямой* $\Gamma(u, a) = \{ut + a,\ t \in \mathbb{R}\}$*, где* $u \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$*,* $a \in \mathbb{R}^n$*, была непостоянной убывающей функцией, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие* $\gamma_V(u) \leqslant 0$*,* $\gamma_V(-u) > 0$*.*

В частности, если при фиксированном $u \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ имеем $\gamma_V(u) = \gamma_V(-u) = 0$, то функция V постоянна на прямой $\Gamma(u, a)$. Этот результат стимулировал ввести следующее определение.

Определение 1 (см. [4], [5, определение 1.6])**.** Пусть $V(u)$, $u \in \mathbb{R}^n$, $n > 1$, — выпуклая функция, а γ_V — ее асимптотическая функция. Множество

$$K_V = \big\{u \in \mathbb{R}^n :\ \gamma_V(u) \leqslant 0\big\} \tag{4}$$

назовем *конусом направлений убывания* функции V.

Перейдем к изложению критерия эквивалентности заданной выпуклой функции выпуклой функции, возрастающей по каждой переменной (обобщение теоремы 1.9 в [4], [5]). Для этого потребуется следующее утверждение.

Лемма 1. *В условиях и обозначениях определения* 1 *множество*

$$L_V = \big\{u \in K_V :\ \gamma_V(u) = \gamma_V(-u) = 0\big\} \tag{5}$$

является линейным подпространством $\mathbb{R}^n$*, причем* $V(u) \equiv V(0)$ *для всех* $u \in L_V$*.*

Доказательство. 1. Пусть $u \in L_V$, $\tau \in \mathbb{R}$. Из свойства положительной однородности функции γ_V имеем $\tau u \in L_V$ (см. теорему 2, (5)). Поскольку, кроме того, γ_V — выпуклая функция, то

$$\gamma_V[\pm(x+y)] \leqslant \gamma_V(\pm x)] + \gamma_V(\pm y) = 0 \quad \forall x, y \in L_V.$$

С другой стороны,

$$0 = \gamma_V(0) \leqslant \gamma_V(x+y) + \gamma_V[(-x-y)] \quad \forall x, y \in L_V.$$

Отсюда вытекает, что $\gamma_V(x+y) = \gamma_V[(-x-y)] = 0$, т.е. $x + y \in L_V$. Поэтому L_V — линейное подпространство $\mathbb{R}^n$.

При $a = 0$ из формулы (3) заключаем:

$$V(ut) \leqslant V(0) + \gamma_V(ut) \quad \forall t \geqslant 0,\ u \in \mathbb{R}^n.$$

Следовательно, $V(u) \leqslant V(0)$ для всех $u \in L_V$ (см. (5)). Так как функция V выпукла и ограничена сверху на L_V, то она постоянна на L_V (см. [15, Corollary 8.6.2]). Лемма доказана. $\square$

Теорема 4. *Пусть $V(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, — выпуклая функция, отличная от постоянной, γ_V — ее асимптотическая функция, K_V — конус направлений убывания V, L_V — подмножество K_V* (см. (3)–(5)). *Равенства $\dim K_V = n$, $\dim L_V = m$, где $0 \leqslant m < n$, выполняются тогда и только тогда, когда существует невырожденное линейное отображение $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $u = Av$, со следующим свойством: $W(v) := V(Av)$, $v \in \mathbb{R}^n$, — выпуклая функция, возрастающая по каждой из переменных $v_1, \dots, v_p$, где $p = n - m$, при условии $m > 0$ не зависящая от остальных переменных $v_{p+1}, \dots, v_n$.*

Доказательство. Необходимость. Допустим, что $m > 0$. По условию $V \neq \mathrm{const}$ и $\dim K_V = n$. Поэтому справедливо представление

$$\mathbb{R}^n = L_V^{\perp} \oplus L_V, \quad K_V = \mathcal{K}_V \oplus L_V,$$

причем $\dim L_V^{\perp} = \dim \mathcal{K}_V = p > 0$. Заметим, что $L_V = K_V \cap (-K_V)$ — максимальное линейное подпространство, содержащееся в K_V (см. [15, Theorem 2.7]). Следовательно, $\mathcal{K}_V$ — строго выпуклый конус[1]. Выберем базис $b^{(k)} \in K_V$, $k = 1, \dots, n$, в $\mathbb{R}^n$ так, чтобы в обозначениях формул (4), (5) выполнялось условие

$$b^{(k)} \in \mathcal{K}_V \subset L_V^{\perp}, \quad k = 1, \dots, p; \quad b^{(k)} \in L_V, \quad k = p+1, \dots, n.$$

Определим линейное отображение $D : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ с помощью условий $D[b^{(k)}] = -e_k$, $k = 1, \dots, n$, где $\{e_k\}_1^n$ — стандартный базис в $\mathbb{R}^n$. Оно обладает свойством $D(I_V) = \mathbb{R}^n_-$, где $I_V \subset K_V$ — выпуклый конус с вершиной в 0, порожденный n-мерным симплексом с вершинами $\{0, \{b_k\}_1^n\}$, а $\mathbb{R}^n_-$ — отрицательный октант в $\mathbb{R}^n$. Кроме того, $D(L_V) = \mathbb{R}^m$ — линейная оболочка векторов $\{e_k,\ k = p+1, \dots, n\}$, поскольку L_V — линейное подпространство $\mathbb{R}^n$ согласно лемме 1. Отсюда и из леммы 1 вытекает, что искомым является отображение $A = D^{-1}$. В случае $m = 0$ доказательство существенно упрощается.

Достаточность теоремы доказывается с помощью рассуждений в обратном порядке. $\square$

Итак, заданная в $\mathbb{R}^n$ выпуклая функция V при выполнении условия $\dim K_V = n$ «эквивалентна» выпуклой функции W, возрастающей по каждой переменной, причем W может зависеть от меньшего числа переменных. В случае, когда в обозначениях формулы (2) $V = V_g$ для функции g из некоторого подкласса функций, голоморфных в $\mathbb{T}^n$, $n > 1$, все коэффициенты отображения A могут быть выбраны целыми.

2.2. Структура функций, эквивалентных целым функциям, и их свойства. Рассмотрим собственный подкласс $\mathcal{A}(\mathbb{T}^n)$ класса $H(\mathbb{T}^n)$ функций, голоморфных в пространстве $\mathbb{T}^n$, эквивалентных в следующем смысле целым функциям.

Определение 2 (см. [4], [5, определение 3.1])**.** Будем говорить, что функция $g \in H(\mathbb{T}^n)$, $n > 1$, *эквивалентна целой функции* f, если существует такое мономиальное отображение

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_g : \mathbb{T}^n \to \mathbb{T}^n; \quad z = \mathcal{F}(w), \quad z_k = \prod_{j=1}^{n} w_j^{s_{kj}}, \quad k = 1, \dots, n, \tag{6}$$

где $B := \|s_{kj}\|$ — целочисленная невырожденная квадратная $(n \times n)$ матрица, что функция $f(w) = [g \circ \mathcal{F}](w)$ допускает аналитическое продолжение $F(w)$ в $\mathbb{C}^p$, где $p \leqslant n$. Это означает, что F — целая функция p комплексных переменных $w_1, \dots, w_p$, которая при $p < n$ не зависит[2] от $w_{p+1}, \dots, w_n$. В этом случае будем писать $g \sim f$.

Замечание 1 (см. [14, § 1])**.** Обратное отображение $\mathfrak{F}^{-1}$ является мономиальным отображением с дробными показателями, т.е. оно многозначное в $\mathbb{T}^n$. Однако $g_1(z) := [f \circ \mathcal{F}^{-1}](z)$, $z \in \mathbb{T}^n$ —

[1] Т.е. конус, не содержащий прямых.

[2] Это можно предполагать без ограничения общности.

такая однозначная функция, что $g_1(z) \equiv g(z)$, $z \in \mathbb{T}^n$. Чтобы в этом убедиться, понадобится понятие *носителей ряда Лорана*

$$g(z) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} a_k z^k, \quad z \in \mathbb{T}^n; \quad z^k = z_1^{k_1} \dots z_n^{k_n}, \tag{7}$$

в который разлагается функция g, и *степенного ряда*, представляющего целую функцию

$$f(w) = \big[g \circ \mathcal{F}\big](w) = \sum_{m\in\mathbb{Z}_+^p} c_m w^m, \quad w \in \mathbb{T}^p.$$

Так называют соответственно множества

$$S_g = \big\{k \in \mathbb{Z}^n : \ a_k \neq 0\big\}, \quad S_f = \big\{m \in \mathbb{Z}_+^p : \ c_m \neq 0\big\}.$$

Сравнивая коэффициенты этих рядов, получаем соотношение

$$S_f = B'[S_g], \quad c_m = a_k, \quad m = B'k \in S_f, \quad k \in S_g,$$

где B' — матрица, транспонированная по отношению к $B = \|s_{kj}\|$ (см. (6)). При этом удобно считать, что $S_f \subset \mathbb{Z}_+^n$, поскольку принятое в определении 2 условие о зависимости функции f при $p < n$ только от переменных $w_1, \dots, w_p$ означает, что $m_{p+1} = \dots = m_n = 0$ для всех $m \in S_f$. В этих обозначениях справедливо разложение

$$g_1(z) = \big[f \circ \mathcal{F}^{-1}\big](z) = \sum_{m\in S_f} c_m \big[\mathcal{F}^{-1}(z)\big]^m, \quad z \in \mathbb{T}^n.$$

Из найденных соотношений между носителями S_f, S_g выводим

$$\langle m, B^{-1}(lnz)\rangle = \langle B'k, B^{-1}(lnz)\rangle = \langle k, \ln z\rangle, \quad k = (B')^{-1}m \in S_g, \quad m \in S_f; \quad z \in \mathbb{T}^n.$$

Здесь и далее $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — скалярное произведение в $\mathbb{C}^n$. Отсюда и из соотношения между коэффициентами рядов, представляющих f и g, заключаем

$$c_m bbb[\mathcal{F}^{-1}(z) bbb]^m = a_k z^k, \quad k = (B')^{-1}m \in S_g, \quad m \in S_f; \quad z \in \mathbb{T}^n.$$

Из этих рассуждений и вытекает равенство $g_1 = g$.

Целую функцию $f = g \circ \mathcal{F}$ назовем *эквивалентной функции* $g \in \mathcal{A}(\mathbb{T}^n)$.

Пример 1 (см. [5, пример 1′]). Пусть K — тупой угол с вершиной в $0 \in \mathbb{R}^3$, направляющими векторами сторон которого являются $c_1 = (1, 2, -3)$, $c_2 = (-3, -1, 4)$, а $g(z)$ — голоморфная функция трех комплексных переменных в $\mathbb{T}^3$, представляемая рядом Лорана (7) при $n = 3$ с носителем $S_g = K \cap \mathbb{Z}^3$. Покажем, что $g \in \mathcal{A}(\mathbb{T}^3)$, опираясь на определение 2.

Нетрудно установить, что угол K расположен в плоскости $k_1 + k_2 + k_3 = 0$, $k \in \mathbb{R}^3$. Поэтому в данном случае ряд Лорана g в (7) допускает представление

$$g(z) = \sum_{k\in S_g} a_k \left(\frac{z_1}{z_3}\right)^{k_1} \cdot \left(\frac{z_2}{z_3}\right)^{k_2}, \quad z \in \mathbb{T}^3; \quad k_3 = -k_1 - k_2.$$

Рассмотрим отображение

$$z = \mathcal{F}w, \quad w \in \mathbb{T}^3, \quad z_1 = \frac{w_3}{w_1 w_2^2}, \quad z_2 = w_1^3 w_2 w_3, \quad z_3 = w_3$$

и ряд

$$f(w) = \big[g \circ \mathcal{F}\big](w) = \sum_{m\in S_f} b_m w_1^{m_1} w_2^{m_2}, \quad b_m = a_k, \quad m_1 = -k_1 + 3k_2, \quad m_2 = -2k_1 + k_2, \quad m_3 = 0.$$

Здесь $k \in S_g \subset K$, причем $k_3 = -k_1 - k_2$, а $(k_1, k_2) \in \hat{K}$, где $\hat{K}$ — проекция угла K на $\mathbb{R}^2$. Отсюда выводим: $(k_1, k_2) = m_1 h_1 + m_2 h_2$, $m \in S_f$, где $h_1 = (1, 2)/5$, $h_2 = (-3, -1)/5$ — направляющие векторы сторон угла $\hat{K}$. Из элементарных фактов геометрии следует, что $m_i \geqslant 0$, $i = 1, 2$, т.е. для любого элемента m носителя S_f имеем $(m_1, m_2) \in \mathbb{Z}_+^2$. Итак, $g \sim f$.

Из теоремы 4 вытекает следующее свойство функций класса $\mathcal{A}(\mathbb{T}^n)$, $n > 1$.

Следствие 1. *Пусть $g \in \mathcal{A}(\mathbb{T}^n)$, $M_g(r)$ — ее модуль-максимум на остове полидиска,*

$$V(u) := V_g(u) = \ln M_g(e^u), \quad u \in \mathbb{R}^n$$

(*см. определение* 2, (1)–(2)). *Тогда в обозначениях формул* (4), (5) *выполняются равенства*

$$\dim K_V = n, \quad \dim L_V = m := n - p,$$

где $0 \leqslant m < n$.

Доказательство. Пусть f — целая функция, эквивалентная функции g. Согласно определению 2 (см. (6)) найдется отображение

$$E : \mathbb{R}_0^n \to \mathbb{R}_0^n; \quad r = E(q), \quad r_k = \prod_{j=1}^{n} q_j^{s_{kj}}, \quad k = 1, \dots, n, \tag{8}$$

где E — след отображения $\mathcal{F}$ на $\mathbb{R}_0^n$, $B = \|s_{kj}\|$ — такая целочисленная невырожденная квадратная $(n \times n)$ матрица, что $M_f(q) = M_g \circ E(q)$, $q \in \mathbb{R}_0^n$. Здесь M_f — модуль-максимум f на остове полидиска. Из (8) заключаем, что линейное отображение $B : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $u = Bv$, определяемое матрицей B, обладает свойством

$$V_f(v) := \ln M_f(e^v) = V_g(Bv), \quad v \in \mathbb{R}^n, \tag{9}$$

причем выпуклая функция V_f (см. теорему 1) возрастает по каждой из переменных $v_1, \dots, v_p$, а при условии $p < n$ не зависит от остальных переменных $v_{p+1}, \dots, v_n$. Для завершения доказательства остается применить теорему 4. □

Сформулируем критерий принадлежности классу $\mathcal{A}(\mathbb{T}^n)$ функции g из класса $H(\mathbb{T}^n)$, опираясь на геометрические свойства коэффициентов ее разложения в ряд Лорана.

Теорема 5 (см. [4], [5, теорема 3.2]). *Пусть функция $g(z)$ принадлежит классу $H(\mathbb{T}^n)$, $n > 1$, и дано ее разложение вида* (7) *в кратный ряд Лорана. Пусть K_g — наименьший замкнутый выпуклый конус с вершиной в $0 \in \mathbb{R}^n$, содержащий носитель S_g ряда* (7). *Функция g принадлежит классу $\mathcal{A}(\mathbb{T}^n)$ (т.е. в терминах определения* 2 *$f(w) = \big[g \circ \mathcal{F}\big](w)$ является целой функцией; см.* (6)) *тогда и только тогда, когда множество K_g — строго выпуклый конус. Кроме того, верны следующие утверждения*:

(1) *носитель S_f степенного ряда, в который разлагается функция f, принадлежит некоторой подрешетке $\mathbb{Z}_+^n$ и обладает свойством $S_f = B'[S_g]$, где S_g — носитель ряда Лорана* (7), *а $B' : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — отображение, порождаемое матрицей, транспонированной по отношению к матрице $B = \|s_{kj}\|$ (см. определение* 2 *и замечание к нему*);

(2) *если $\dim K_g = p \leqslant n$, то f — целая функция p комплексных переменных.*

Функции класса $\mathcal{A}(\mathbb{T}^n)$ играют «образующую» роль в структуре элементов класса $H(\mathbb{T}^n)$. Справедлив следующий *многомерный аналог теоремы Лорана.*

Теорема 6 (см. [4], [5, теорема 3.3]). *Пусть $g \in H(\mathbb{T}^n)$. Тогда*

$$g(z) = \sum_{i=1}^{m} g_i(z), \quad z \in \mathbb{T}^n, \quad m = m(g) \leqslant n + 1, \tag{10}$$

где $\{g_i\}_1^m \subset H(\mathbb{T}^n)$ — функции, эквивалентные целым функциям (см. определение 2), *причем у любой функции g_i носитель $S(g_i)$ обладает свойством $S(g_i) \subset K_i$ для всех $i = 1, \dots, m$, где K_i — такой строго выпуклый конус в $\mathbb{R}^n$ с вершиной в* 0, *что $\dim K_i = n$. Кроме того,*

$$K_i \cap K_j = \varnothing, \quad i \neq j, \quad (i, j) \subset \{1, \dots, m\}.$$

3. Характеристики роста функций класса $H(\mathbb{T}^n)$ и их свойства.

В [4, 5] по аналогии с показателями роста целых функций многих переменных (см. [1–3, 13]) были введены асимптотические характеристики роста функций класса $H(\mathbb{T}^n)$. Напомним их определения, необходимые для дальнейшего изложения.

3.1. Функция порядков. Пусть $g \in H(\mathbb{T}^n)$, M_g — максимум модуля функции g на остове полидиска (см. (1)).

Определение 3 (см. [4], [5, определение 3.5]). *Функцией порядков* функции $g \in H(\mathbb{T}^n)$ называется функция

$$\rho_g(u) = \limsup_{t\to\infty} \frac{\ln^+ \ln^+ M_g(t^u)}{\ln t}, \quad t^u = t^{u_1}, \dots, t^{u_n}, \quad t > 0, \quad u \in \mathbb{R}^n. \tag{11}$$

Здесь $\ln^+ S = \max|\ln S, 1|$, $S > 0$. Функция g называется функцией *конечного порядка*, если ее функция порядков $\rho_g(u)$, $u \in \mathbb{R}^n$, — конечная функция.

Как отмечено в [5, предложение 3.6], функция порядков ρ_g функции $g \in H(\mathbb{T}^n)$ — неотрицательная сублинейная функция в $\mathbb{R}^n$, возможно, не всюду конечная. Если g — не целая функция, то ρ_g не является возрастающей функцией по каждой переменной; более того, конус ее направлений убывания (см. определение 1) может быть пустым множеством. Однако геометрический смысл функции порядков ρ_g для $g \in H(\mathbb{T}^n)$ остается таким же, как и в случае целых функций. Чтобы в этом убедиться, понадобится следующее понятие выпуклого анализа.

Определение 4 (см. [15, § 8]). Пусть T — неограниченное замкнутое выпуклое множество в $\mathbb{R}^n$, причем $\dim T = n$. *Асимптотическим конусом* $A(T)$ множества T называется максимальный конус с вершиной в 0, сдвиг которого помещается в множество T, т.е.

$$A(T) = \{u \in \mathbb{R}^n : \ T + u \subset T\}.$$

Предложение 1 (см. [15, § 8], [3], [13, гл. 1, теорема 6.5]). *Пусть $V(u)$, $u \in \mathbb{R}^n$ — выпуклая функция,*

$$\operatorname{epi} V = \{(u, u_{m+1}) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} : \ u_{m+1} \geqslant V(u)\}$$

— ее надграфик. Тогда асимптотический конус $A(\operatorname{epi} V)$ надграфика функции V совпадает с надграфиком $\operatorname{epi}\gamma_V$ ее асимптотической функции γ_V (см. теорему 2).

Обсудим теперь геометрическое свойство функции ρ_g (см. (11)). Полагаем

$$\Phi_g(r) = \ln^+ M_g(r), \quad r \in \mathbb{R}_0^n; \qquad W_g(u) = \ln^+ \Phi_g(e^u), \quad u \in \mathbb{R}^n. \tag{12}$$

Если W_g — выпуклая функция, то функция ρ_g является ее асимптотической функцией (ср. (2), теоремы 1 и 2), и, согласно предложению 1, надграфик $\operatorname{epi}\rho_g$ — асимптотический конус $A(\operatorname{epi} W_g)$ надграфика функции W_g. Подобное свойство функции ρ_g справедливо и в общем случае, когда $V := W_g$ — квазивыпуклая функция, т.е. удовлетворяющая неравенству

$$V(\lambda x + (1-\lambda)y) \leqslant \max\{V(x), V(y)\} \quad \forall \lambda \in [0,1], \ x, y \in \mathbb{R}^n$$

(см. [3], [13, гл. 6, § 2]).

Покажем, что определение функции порядков ρ_g для $g \in H(\mathbb{T}^n)$ не зависит от выбора параболического луча более общей структуры

$$L(r,u) = \{rt^u = (r_1 t^{u_1}, \ \dots, \ r_n t^{u_n}) : \ t > 0\}, \quad u \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \quad r \in \mathbb{R}_0^n, \tag{13}$$

как в случае целых функций (см. [3], [13, гл. 6, лемма 2.8]) и функций класса $\mathcal{A}(\mathbb{T}^n)$ (см. [4], [5, теорема 3.9]).

Теорема 7. *В принятых обозначениях для любого заданного $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ след функции $\Phi_g = \ln^+ M_g$ на каждом параболическом луче системы $\{L(r,x), \ r \in \mathbb{R}_0^n\}$ (см. (13)) имеет порядок роста*

$$\psi_x(r) = \limsup_{t\to\infty} \frac{\ln^+ \Phi_g(rt^x)}{\ln t} \equiv \rho_g(x), \quad r \in \mathbb{R}_0^n, \tag{14}$$

где ρ_g — функция порядков для $g \in H(\mathbb{T}^n)$.

Доказательство. Если $\psi_x(r) \not\equiv \infty$ при $r \in \mathbb{R}_0^n$, то существует такая точка $a \in \mathbb{R}_0^n$, что $0 \leqslant \psi_x(a) < \infty$. Пусть $r \in \mathbb{R}_0^n \setminus \{a\}$. По теореме 1 $\Phi_g(r) = \ln^+ M_g(r)$ — выпуклая функция, а $\ln^+ \Phi_g(r)$ — квазивыпуклая функция от $\ln r_1, \dots, \ln r_n$. Поэтому справедливо неравенство

$$\Phi_g\big(t_1^\lambda s_1^\mu,\ \dots,\ t_n^\lambda s_n^\mu\big) \leqslant \max\big\{\Phi_g(t),\ \Phi_g(s)\big\} \quad \forall \{t,s\} \in \mathbb{R}_0^n, \tag{15}$$

где $\lambda \in (0,1)$, $\mu = 1-\lambda$. Полагая $t_i = a_i \cdot t^{x_i/\lambda}$ и $s_i = a_i^{-\lambda/\mu} \cdot r_i^{1/\mu}$, $i = 1, \dots, n$, находим из (15) и (14):

$$\Phi_g(rt^x) \leqslant \max\big\{\Phi_g(at^{x/\lambda}),\ A\big\} \leqslant \max\big\{t^{\varepsilon+\psi_x(a)/\lambda},\ A\big\} \quad \forall t > t_0(\varepsilon), \tag{16}$$

где $A = \Phi\big(r_1^{1/\mu} \cdot a_1^{-\lambda/\mu},\ \dots,\ r_n^{1/\mu} \cdot a_n^{-\lambda/\mu}\big)$, $\varepsilon > 0$. Отсюда выводим:

$$\psi_x(r) \leqslant \varepsilon + \frac{\psi_x(a)}{\lambda}$$

или (при переходе к пределу $\lambda \to 1$, $\varepsilon \to 0$)

$$\psi_x(r) \leqslant \psi_x(a).$$

Итак, $\psi_x(r)$ — ограниченная функция в $\mathbb{R}_0^n$.

Меняя в этих рассуждениях местами a и r заключаем, что $\psi_x(a) \leqslant \psi_x(r)$. Следовательно,

$$\psi_x(r) \equiv \psi_x(a), \quad r \in \mathbb{R}_0^n, \qquad \rho_g(x) = \psi_x(\mathbb{I}) = \psi_x(a) \quad \forall a \in \mathbb{R}_0^n, \quad \mathbb{I} = (1, \dots, 1). \qquad \square$$

Обратим внимание на следующий критерий функции конечного порядка в случае класса $\mathcal{A}(\mathbb{T}^n)$.

Предложение 2 (см. [4], [5, предложение 3.8])**.** *Пусть функция g принадлежит классу $\mathcal{A}(\mathbb{T}_n)$, а K_V — конус направлений убывания функции $V_g(u) = \ln M_g(e^u)$, $u \in \mathbb{R}^n$ (см. определение* 1) *с вершиной в* 0. *Пусть x — такой произвольный фиксированный элемент $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, что $-x \in \operatorname{int} K_V$, а ρ_g — функция порядков для g. Если $\rho_g(x) < \infty$, то g — функция конечного порядка.*

Из положительной однородности функции порядков ρ_g для $g \in H(\mathbb{T}^n)$ вытекает, что ее (конечные) положительные значения определяются множеством

$$T_g = \{u \in \mathbb{R}^n:\ \rho_g(u) = 1\}, \tag{17}$$

которое называется *гиперповерхностью порядков* функции g.

Пример 2. При $n = 1$ из теоремы Лорана о разложении голоморфной функции в кольце следует, что для любой функции $g \in H(\mathbb{T})$ справедливо представление

$$g(z) = g_+(z) + g_-\left(\frac{1}{z}\right), \quad z \in \mathbb{T} = \mathbb{C} \setminus \{0\},$$

где g_+, g_- — целые функции. Если они имеют конечные ненулевые порядки ρ_+ и ρ_- соответственно, то функция порядков

$$\rho_g(u) = \begin{cases} \rho_+ u, & u > 0,\\ \rho_- u, & u \leqslant 0. \end{cases}$$

Поэтому множество T_g состоит из двух точек $1/\rho_+$ и $1/\rho_-$.

3.2. Функция типов по заданному направлению роста. Рассмотрим теперь более тонкий показатель роста функций класса $H(\mathbb{T}^n)$.

Определение 5 (см. [4], [5, определение 3.10])**.** Пусть $g \in H(\mathbb{T}^n)$, ρ_g — функция порядков для функции g. Полагаем $\rho_g(x) \in (0, \infty)$ для фиксированного $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Функция

$$\sigma_g(r; x) = \limsup_{t \to \infty} \frac{\ln^+ M_g(rt^x)}{t^{\rho_g(x)}}, \quad r \in \mathbb{R}_0^n, \tag{18}$$

называется *функцией типов по направлению x* или *функцией x-типов* для функции g, а величину $\sigma_g(x) := \sigma_g(\mathbb{I}; x)$, где $\mathbb{I} = (1, \dots, 1)$, — ее *типом по направлению x*.

Справедлива формула (см. [4], [5, замечание к определению 3.10])

$$\sigma_g(\cdot;x) = \sigma_g(\cdot;x\tau) \quad \forall\tau > 0.$$

Поэтому без ограничения общности при определении функции x-типов достаточно потребовать выполнение условия $x \in T_g$ (см. (17), (18)). Отметим простейшие свойства функции x-типов (см. [4], [5, предложение 3.11]).

Предложение 3. *Функции* $\sigma_g(e^u;x)$, $\delta_g^x(u) := \ln\sigma_g(e^u;x)$ *являются выпуклыми функциями в области их определения* D, *причем если* $x \in T_g$, *то*

$$\sigma_g(rt^x;x) = t\sigma_g(r;x) \quad \forall r \in \mathbb{R}_0^n, \quad t > 0; \qquad \delta_g^x(u + x\tau) = \delta_g^x(u) + \tau \quad \forall u \in \mathbb{R}^n, \quad \tau \in \mathbb{R}. \tag{19}$$

Как и в случае функции порядков, $\sigma_g(\cdot;x)$, δ_g^x принадлежат к более широкому классу функций по сравнению с ситуацией, когда $g \in H(\mathbb{C}^n)$ (см. п. 3.1). Покажем, что несмотря на это геометрическое свойство функции δ_g^x, $g \in H(\mathbb{T}^n)$ вполне аналогично подобному свойству в $H(\mathbb{C}^n)$.

Для простоты изложения в обозначениях предложения 3 полагаем $D = \mathbb{R}^n$. Из (19) заключаем: надграфик (см. предложение 1) $I_g(x) := \operatorname{epi}\delta_g^x$ функции δ_g^x — выпуклый цилиндр. Пусть $\Phi_g = \ln^+ M_g$, $W_g(u) = \ln^+\Phi_g(e^u)$, $u \in \mathbb{R}^n$. Из (18)–(19) следует равенство

$$\limsup_{\tau\to\infty}\Big[W_g(x\tau + u) - \tau - \delta_g^x(u)\Big] = \limsup_{\tau\to\infty}\Big[W_g(x\tau + u) - \delta_g^x(x\tau + u)\Big] = 0, \quad u \in \mathbb{R}^n.$$

Поэтому по аналогии со случаем целых функций (см. [3], [13, гл. 6, определения 3.5, 3.6]) введем следующее понятие.

Определение 6. При каждом фиксированном $u \in \mathbb{R}^n$ невертикальную прямую

$$E = \Big\{\big(x\tau + u,\ \tau + \delta_g^x(u)\big) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} :\ \tau \in \mathbb{R}\Big\}$$

назовем (верхней одномерной) *x-асимптотой функции* W_g, а цилиндр $I_g(x) = \operatorname{epi}\delta_g^x$, граница которого (график функции $y = W_g(u)$, $u \in \mathbb{R}^n$) является линейчатой поверхностью, образованной всеми x-асимптотами функции W_g, назовем *асимптотическим x-цилиндром* надграфика $\operatorname{epi} W_g$ функции W_g.

Отметим важное нетривиальное свойство функции x-типов для функций класса $H(\mathbb{T}^n)$, содержащее критерий конечной функции типов по заданному направлению роста и ее структуру.

Обозначим символом $Y_H = \{\rho\}$ класс всех конечных неотрицательных сублинейных функций в $\mathbb{R}^n$ за исключением функции $\rho_0(u) \equiv 0$, $u \in \mathbb{R}^n$. Пусть $\rho \in Y_H$,

$$\mathfrak{M}_n(\rho) = \Big\{g \in H(\mathbb{T}^n) :\ \rho_g(u) \equiv \rho(u),\ u \in \mathbb{R}^n\Big\}, \tag{20}$$

где ρ_g — функция порядков g (см. (11)), $\mathfrak{M}_n(\rho)$ — подкласс $H(\mathbb{T}^n)$ с заданной функцией порядков (или с заданной гиперповерхностью порядков (см. (17)) $T^\rho = \{u \in \mathbb{R}^n :\ \rho(u) = 1\}$). Рассмотрим класс

$$\mathfrak{N}_n^x(\rho) = \Big\{g \in \mathfrak{M}_n(\rho) :\ 0 < \sigma_g(x) < \infty\Big\}, \tag{21}$$

где $x \in T^\rho$, а $\sigma_g(x)$ — тип g по направлению x (см. (17)). Ассоциируем с функцией $\rho \in Y_H$ выпуклый компакт

$$K_\rho = \Big\{y \in \mathbb{R}^n :\ \langle y, u\rangle \leqslant \rho(u)\ \forall u \in \mathbb{R}^n\Big\}, \tag{22}$$

опорной функцией которого является ρ. Пусть

$$\partial\rho(x) = \Big\{y \in K_\rho :\ \langle y, x\rangle = \rho(x)\Big\} \tag{23}$$

— грань K_ρ, ортогональная вектору $x \in T^\rho$, или

$$\partial\rho(x) = \Big\{y \in \mathbb{R}^n :\ \rho(u) \geqslant \rho(x) + \langle u - x, y\rangle\ \forall u \in \mathbb{R}^n\Big\}$$

— субдифференциал выпуклой функции ρ в точке x (см. [15, гл. 5, § 23]). Опираясь на метод доказательства теоремы 3.9 в [3] (см. также [13]), получаем следующее утверждение в обозначениях формул (18)–(23).

Теорема 8 (см. [3,13]). *Пусть $g \in \mathfrak{N}_n^x(\rho)$, где $\rho \in Y_H$, $x \in T^\rho$ (см. (21), (17)). Ассоциируем с функцией $\rho \in Y_H$ выпуклый компакт. Тогда функция x-типов $\sigma_g(\cdot;x)$ функции g обладает следующими свойствами*:

(1) $\sigma_g(rt^x;x) \equiv t\sigma_g(r;x)$ *для всех* $t \geqslant 0$, $r \in \mathbb{R}_0^n$;

(2) *существует такая единственная выпуклая полунепрерывная снизу функция* $\psi : \partial\rho(x) \to (-\infty,\infty]$, $\psi \not\equiv \infty$, *что справедливо представление*

$$\sigma_g(r;x) = \sup\Big\{r_1^{y_1}\dots r_n^{y_n}\exp\{-\psi(y)\} : \ y \in \partial\rho(x)\Big\}, \quad r \in \mathbb{R}_0^n. \tag{24}$$

В частности, если функция $\rho \in Y_H$ дифференцируема в точке $x \in T^\rho$, то найдется постоянная $A_g = A_g(x) > 0$ со свойством

$$\sigma_g(r;x) = A_g \cdot \prod_{i=1}^n r_i^{\partial\rho/\partial x_i}, \quad r \in \mathbb{R}_0^n. \tag{25}$$

Замечание 2. Дадим другую, полезную в дальнейшем формулировку теоремы 8.

Символом $N_n^x(\rho)$, где $\rho \in Y_H$, $x \in T^\rho$, обозначим класс положительных в $\mathbb{R}_0^n$ функций $\{\varphi\}$, логарифмически выпуклых[1] относительно $\ln r_1,\dots,\ln r_n$ и обладающих свойствами (1) и (2) x-тип-функций, указанных в теореме 8. В этих обозначениях справедливо соотношение

$$\big\{\sigma_g(\cdot;x),\ g \in \mathfrak{N}_n^x(\rho)\big\} \subset N_n^x(\rho).$$

Выясним геометрический смысл теоремы 8, предполагая для простоты изложения, как и в теореме 7, что W_g — выпуклая функция (см. примечание к теореме 3.9 в [3], а также [13, гл. 6]). Из (24) имеем в обозначениях предложения 3:

$$\delta_g^x(u) = \ln\sigma_g(e^u;x) = \sup\Big\{\langle u,y\rangle - \psi(y),\ y \in \partial\rho(x)\Big\}, \quad u \in \mathbb{R}^n,$$

где $\langle u,y\rangle$ — скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$. Но

$$\psi(y) = (\delta_g^x)^*(y) = \sup\Big\{\langle u,y\rangle - \delta_g^x(u),\ u \in \mathbb{R}^n\Big\}, \quad y \in \mathbb{R}^n, \quad \Big\{y \in \mathbb{R}^n :\ (\delta_g^x)^*(y) < \infty\Big\} \subset \partial\rho(x)$$

— преобразование Юнга функции δ_g^x (см. [15, гл. 3], [3], [13, гл. 1, предложение 5.3, следствие 5.4]). Поэтому *каждая опорная гиперплоскость к асимптотическому x-цилиндру $I_g(x) = \operatorname{epi}\delta_g^x$ надграфика* $\operatorname{epi} W_g$ *функции W_g (см.* (12)*) параллельна некоторой опорной гиперплоскости к асимптотическому конусу* $A(\operatorname{epi} W_g) = \operatorname{epi}\rho_g$ *выпуклого множества* $\operatorname{epi} W_g$, *проходящей через луч* $\big\{(xt,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R},\ t > 0\big\}$ (см. определения 6, 4 и пояснения к ним).

В случае класса $\mathcal{A}(\mathbb{T}^n)$ (см. определение 2) существуют простые формулы связи между характеристиками роста функций этого класса и соответствующих им эквивалентных целых функций. В близкой форме они имеются в [14, теорема 2].

Предложение 4. *Пусть $g \in \mathcal{A}(\mathbb{T}^n)$; ρ_g — конечная функция порядков для функции g, f — целая функция, эквивалентная g, $B = \|s_{kj}\|$ — целочисленная невырожденная квадратная $(n\times n)$ матрица из показателей такого мономиального отображения $\mathcal{F}$, что $f = [g\circ\mathcal{F}]$ (см. (6)). Полагаем $\mathcal{B}_p = \pi_p \circ B^{-1}$, где*

$$p \leqslant n, \quad \pi_p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p, \quad \pi_p(v_1,\dots,v_n) = (v_1,\dots,v_p), \quad \mathcal{E}_p = \pi_p \circ E^{-1},$$

E — след отображения $\mathcal{F}$ на $\mathbb{R}_0^n$ (см. (8)).

1. *Тогда*

$$\rho_f[\mathcal{B}_p(u)] \equiv \rho_g(u), \quad u \in \mathbb{R}^n,$$

где ρ_f — функция порядков для f.

2. *Если, кроме того, для фиксированного $x \in \mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ выполняются условия $0 < \rho_g(x) < \infty$, $0 < \sigma_g(x) < \infty$, где $\sigma_g(x)$ — x-тип g, то функции типов g и f соответственно по направлениям x и $y = \mathcal{B}_p(x)$ связаны соотношением*

$$\sigma_f(q;y) \equiv \sigma_g(r;x), \quad q = \mathcal{E}_p(r), \quad r \in \mathbb{R}_0^n.$$

[1] Т.е. функция $W_\varphi(u) = \ln\varphi(e^u)$, $u \in \mathbb{R}^n$ является выпуклой для всех $\varphi \in N_n^x(\rho)$.

Доказательство. Воспользуемся обозначениями из доказательства следствия 1. Утверждение 1 вытекает из формулы (9) и определения 3 (см. (11)). При этом учитываем, что при $p < n$ функция $V_f(v) := \ln M_f(e^v)$, $v \in \mathbb{R}^n$, не зависит от переменных $v_{p+1}, \dots, v_n$. Здесь M_f — максимум модуля целой функции f на остове полидиска.

Поскольку по условию ρ_g — конечная функция и $0 < \rho_g(x) < \infty$, $0 < \sigma_g(x) < \infty$, то по теореме 8 конечной является и функция типов $\sigma_g(\cdot; x)$. Утверждение 2 — следствие равенства

$$M_f(q) = [M_g \circ E](q), \quad q \in \mathbb{R}^n_0,$$

и определения 5 (см. (18)), если снова учесть, что при $p < n$ функция $M_f(q)$ не зависит от переменных $q_{p+1}, \dots, q_n$ (см. определение 2). □

4. Характеристики роста функций класса $H(\mathbb{T}^n)$ и коэффициенты их разложения в ряд Лорана. Этот раздел посвящен выводу формул, устанавливающих связь между характеристиками роста функций класса $H(\mathbb{T}^n)$, $n > 1$, и коэффициентами их разложения в ряды Лорана. Эти формулы — полный аналог соответствующих результатов для класса $H(\mathbb{C}^n)$ целых функций (см. [3], [13, гл. 7, теорема 1.4]), но их доказательство существенно усложняется.

Для каждой функции $g \in H(\mathbb{T}^n)$ справедливо разложение в n-кратный ряд Лорана, всюду сходящийся в $\mathbb{T}^n$ (см. [10, с. 50]):

$$g(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} a_k z^k, \quad z^k = z_1^{k_1} \dots z_n^{k_n}, \quad a_k = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int\limits_{\Gamma_r} \frac{g(z)dz}{z^{k+I}}, \quad z^{k+I} = z_1^{k_1+1} \dots z_n^{k_n+1}. \tag{26}$$

Здесь $dz = dz_1 \dots dz_n$, $\Gamma_r = \{z \in \mathbb{T}^n : |z_j| = r_j,\ j = 1, \dots, n\}$ — топологическое произведение окружностей радиусов $r_j \in (0, \infty)$, $j = 1, \dots, n$. Всюду в дальнейшем считаем, что носитель ряда Лорана — неограниченное множество в $\mathbb{Z}^n$, т.е. функция g не является многочленом Лорана.

Следующее утверждение дает критерий сходимости кратного ряда Лорана всюду в $\mathbb{T}^n$.

Теорема 9 (см. [4], [5, теорема 3.4]). *Для того чтобы n-кратный ряд Лорана* (26) *сходился всюду в $\mathbb{T}^n$, необходимо и достаточно, чтобы его коэффициенты удовлетворяли условию*

$$\lim_{\|k\| \to \infty} \sqrt[\|k\|]{|a_k|} = 0, \quad \|k\| = \sum_{j=1}^n |k_j|. \tag{27}$$

Рассмотрим следующую характеристику неограниченного носителя S_g функции g.

Определение 7. Пусть $u \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $g \in H(\mathbb{T}^n)$. Рассмотрим заданную на носителе S_g ряда Лорана (26) функцию $\lambda = \lambda_u(k) = \langle k, u \rangle$, $k \in S_g$. Множество D_g всех таких векторов $\{u\}$, что функция λ_u неограничена сверху, назовем *конусом роста носителя* S_g.

Следующее утверждение показывает, что множество D_g является конусом направлений более быстрого по сравнению со степенным роста функции g.

Предложение 5. *Пусть $g \in H(\mathbb{T}^n)$. Элемент $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ в обозначениях определения* 7 *не принадлежит конусу D_g тогда и только тогда, когда для максимума-модуля g на остове полидиска справедлива оценка*

$$M_g(rt^x) \leqslant C(r)t^s, \quad t \geqslant t_0 > 0. \tag{28}$$

Кроме того, $\rho_g(x) = 0$, $x \notin D_g$, где ρ_g — функция порядков функции g (см. определение 3*).*

Доказательство. Необходимость. Как и в случае целых функций, праведливо неравенство (см. (26))

$$M_g(r) \leqslant S_g(r) := \sum_{k \in S_g} |a_k| r^k, \quad r \in \mathbb{R}^n_0.$$

Пусть $x \notin D_g$, $s < \infty$ — верхняя граница функции $\lambda_x(k) = \langle k, x \rangle$, $k \in S_g$. Из упомянутого неравенства для всякого фиксированного $r \in \mathbb{R}^n_0$ получаем оценку (28), в которой $C = S_g(r)$.

Достаточность. Полный аналог неравенства Коши для коэффициентов Тейлора целой функции справедлив для коэффициентов разложения функции g в ряд Лорана (см. (26))

$$|a_k|r^k \leqslant M_g(r) \quad \forall r \in \mathbb{R}_0^n, \quad k \in S_g.$$

Отсюда при выполнении условия (28) для некоторого $s \in \mathbb{R}$ и фиксированного $r \in \mathbb{R}_0^n$ находим

$$|a_k|r^k t^\lambda \leqslant C(r)t^s, \quad \lambda = \langle k, x\rangle, \quad k \in S_g, \quad t \geqslant t_0 > 0.$$

Это означает, что $\lambda = \lambda_x(k) \leqslant s$, $k \in S_g$, т.е. $x \notin D_g$.

Заключительное утверждение предложения 5 вытекает из определения 3 и теоремы 7. □

Замечание 3. Если $s \leqslant 0$ в обозначениях оценки (28), то $x \in K_V$, где K_V — конус направлений убывания функции $V_g(u) = \ln M_g(e^u)$, $u \in \mathbb{R}^n$ (см. (2), определение 1), т.е. $K_V \subset \mathbb{R}^n \setminus D_g$. (В общем случае возможно $K_V = \varnothing$.)

Лемма 2. *Пусть $g \in H(\mathbb{T}^n)$, $x \in D_g$, где D_g — конус роста носителя S_g (см. определение7). Предположим, что для фиксированного $r \in \mathbb{R}_0^n$ существуют такие постоянные $\Delta, A > 0$, что*

$$M_g(rt^x) < \exp\{At^\Delta\} \quad \forall t > t_0. \tag{29}$$

Тогда коэффициенты разложения функции g в ряд Лорана (см. (26)) удовлетворяют неравенству

$$|a_k|r^k < \left(\frac{Ae\Delta}{\lambda}\right)^{\lambda/\Delta} \qquad \forall \lambda > \lambda_0; \quad \lambda = \langle k, x\rangle. \tag{30}$$

Доказательство. Из неравенства Коши для коэффициентов разложения функции g в ряд Лорана (см. доказательство предложения 5) и неравенства (29) выводим для достаточно больших $\lambda = \langle k, x\rangle$, учитывая, что $x \in D_g$, и полагая $\tau = \ln t$:

$$-\ln\left(|a_k|r^k\right) > \sup_{\tau > \tau_0}\left[\lambda\tau - Ae^{\Delta\tau}\right] = \frac{\lambda}{\Delta}\ln\frac{\lambda}{Ae\Delta}.$$

Теперь после элементарных преобразований приходим к неравенству (30). □

Далее понадобится дополнительное свойство функций, эквивалентных целым функциям (см. определение 2). Пусть $g \in \mathcal{A}(\mathbb{T}^n)$, f — такая целая функция, что $g \sim f$. Ассоциируем с функцией g, представленной рядом (7), голоморфную функцию G, разлагающуюся в ряд Лорана, обладающий тем же носителем, что и ряд (7):

$$G(z) = \sum_{k \in S_g} z^k, \quad z^k = z_1^{k_1}\dots z_n^{k_n}. \tag{31}$$

Этот ряд эквивалентен степенному ряду

$$H(w) = \big[G \circ \mathcal{F}\big](w) = \sum_{m \in S_f} w^m, \quad w^m = w_1^{m_1}\dots w_p^{m_p}, \quad p \leqslant n,$$

носитель которого совпадает с носителем ряда, представляющего целую функцию f, поскольку в обозначениях определения 2 и замечания к нему

$$w^m = z^k, \quad c_m = a_k, \quad z = \mathcal{F}(w), \quad w \in \mathbb{T}^n; \quad k \in S_g, \quad m = B'k \in S_f \subset \mathbb{Z}_+^p \subset \mathbb{Z}_+^n. \tag{32}$$

Здесь $\mathcal{F} = \mathcal{F}_g$ — мономиальное отображение вида (6), $\{c_m\}$, $\{a_k\}$ — соответственно коэффициенты Тейлора функции f и коэффициенты разложения функции g в ряд Лорана, B' — матрица, транспонированная по отношению к $B = \|s_{kj}\|$ (см. (6)). Очевидно, степенной ряд $H(w)$ абсолютно сходится в области $D_p = \{w \in \mathbb{T}^p :\ 0 < |w_i| < 1,\ i = 1, \dots, p\}$. Поэтому можно выделить в ней расположенное в $\mathbb{R}_0^n$ множество сходимости ряда (31).

Предложение 6. *В упомянутых обозначениях области сходимости ряда* (31) *принадлежит множество*

$$\Big\{b(\alpha) := E(\alpha) = E(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}_0^n,\ \alpha \in (0,1)^n\Big\},$$

где E — след отображения $\mathcal{F}$ на $\mathbb{R}_0^n$ (см. (8)), причем $b(\alpha) \to I$ при $\alpha \to I$, где $I = (1, \dots, 1)$.

Лемма 3. *Пусть функция $g \in \mathcal{A}(\mathbb{T}^n)$, $n > 1$, эквивалентна целой функции f, $x \in D_g$ (см. определения 2, 7). Предположим коэффициенты разложения функции g в ряд Лорана вида (7) удовлетворяют неравенству (ср. (30))*

$$|a_k| \left(\frac{r}{b}\right)^k < \left(\frac{Ae\Delta}{\lambda}\right)^{\lambda/\Delta} \quad \forall \lambda > \lambda_0; \quad \frac{r}{b} = \frac{r_1}{b_1} \dots \frac{r_n}{b_n}; \quad \lambda = \langle k, x \rangle, \tag{33}$$

при некоторых $r \in \mathbb{R}_0^n$, $\alpha \in (0,1)^n$, $A > 0$, $\Delta > 0$, где в обозначениях предложения 6 $b = b(\alpha) = E(\alpha)$. Тогда существует такая постоянная C, что

$$M_g(rt^x) < Ce^{At^\Delta} \quad \forall t > t_0; \quad rt^x = (r_1 t^{x_1}, \dots, r_n t^{x_n}). \tag{34}$$

Доказательство. Заменим переменные в неравенстве (33) следующим образом. Полагаем $r = E(q)$, где $q \in \mathbb{R}_0^n$ (см. (8)). Преобразуем левую часть неравенства (33), опираясь на формулу (32):

$$|a_k| \left(\frac{r}{b}\right)^k = |a_k| \left[\frac{E(q)}{E(\alpha)}\right]^k = |a_k| \left[E\left(\frac{q}{\alpha}\right)\right]^k = |c_m| \left(\frac{q}{\alpha}\right)^m, \quad m = B'k, \quad k \in S_g, \tag{35}$$

где $\{c_m,\ m \in S_f\}$ — коэффициенты Тейлора целой функции $f = g \circ \mathfrak{F}$ (см. (6)). Теперь трансформируем параметр λ в правой части неравенства (33):

$$\lambda = \langle k, x \rangle = \langle k, By \rangle = \langle B'k, y \rangle = \langle m, y \rangle, \quad k \in S_g, \quad m = B'k \in S_f,$$

где $y := (y_1, \dots, y_n) = B^{-1}x \in \mathbb{R}_0^n$, $B = \|s_{kj}\|$ — невырожденная матрица, определяющая мономиальное отображение $\mathcal{F}$ (см. (6)), B' — матрица, транспонированная по отношению к B. Но при $p < n$ имеем $S_f \subset \mathbb{Z}_+^p$, т.е. координаты $m_{p+1}, \dots, m_n$ вектора m равны нулю (см. определение 2 и замечание к нему). Поэтому в общем случае справедливо равенство

$$\lambda = \langle k, x \rangle = \langle m, y \rangle_p := \sum_{i=1}^p m_i y_i, \quad k \in S_g, \quad m = B'k \in S_f. \tag{36}$$

Отсюда и из (35) заключаем, что неравенство (33) преобразуется к следующему неравенству для коэффициентов Тейлора функции f:

$$|c_m| \left(\frac{q}{\alpha}\right)^m < \left(\frac{Ae\Delta}{\lambda}\right)^{\lambda/\Delta} \quad \forall \lambda > \lambda_0; \quad \lambda = \langle m, y \rangle_p.$$

Из равенства

$$M_f(qt^y) = M_g(rt^x), \quad r = E(q) \quad t > 0, \tag{37}$$

учитывая, что при $p < n$ функция $M_f(v) = M_g \circ E(v)$, $v \in \mathbb{R}_0^n$, не зависит от переменных $v_{p+1}, \dots, v_n$ (см. определение 2), заключаем, что $(y_1, \dots, y_p) \in D_f$, где D_f — конус роста носителя S_f функции $f \in H(\mathbb{C}^p)$, поскольку $x \in D_g$.

При выполнении этих условий существует такая постоянная $C > 0$, что целая функция f удовлетворяет неравенству

$$M_f(qt^y) < Ce^{At^\Delta} \quad \forall t > t_0; \quad qt^y = (q_1 t^{y_1}, \dots, q_p t^{y_p})$$

(см. [3], [13, гл. 7, лемма 1.3]). Возвращаясь к прежним переменным, убеждаемся в справедливости леммы (см. (36)–(37)). □

Перейдем теперь непосредственно к выводу формул связи между характеристиками роста функций класса $H(\mathbb{T}^n)$, $n > 1$, и коэффициентами их разложения в ряды Лорана.

Теорема 10 (см. [3], [13, гл. 7, теорема 1.4])**.** *Пусть $g \in H(\mathbb{T}^n)$, D_g — конус роста носителя S_g (см. определение 7). Полагаем*

$$\beta_g(u) = \limsup_{\lambda \to \infty} \frac{\lambda \ln \lambda}{-\ln |a_k|}, \quad \lambda = \langle k, u \rangle; \quad u \in D_g, \tag{38}$$

где $\{a_k\}$ — коэффициенты разложения функции g в ряд Лорана (см. (26)), причем $(-\ln |a_k|)^{-1} = 0$, если $a_k = 0$. Тогда справедливы следующие утверждения.

(1) *Функция порядков g (см. определение 3) обладает свойством $\rho_g(u) \equiv \beta_g(u)$, $u \in D_g$.*

(2) *Если* $\rho \in Y_H$, $g \in \mathfrak{M}_n(\rho)$ *в обозначениях формул* (20)–(21), *то для каждого* $x \in \{u \in \mathbb{R}^n : \rho(u) > 0\}$ *функция типов* $\sigma_g(r;x)$ *функции* g (*см. определение* 5) *определяется формулой*

$$\Big[\sigma_f(r;x)e\rho(x)\Big]^{1/\rho(x)} = \limsup_{\lambda\to\infty} \lambda^{1/\rho(x)} \cdot (|a_k|r^k)^{1/\lambda}, \quad \lambda = \langle k,x\rangle, \quad \rho(x) = \rho_g(x), \quad r \in \mathbb{R}^n_0. \tag{39}$$

Доказательство. 1. Зафиксируем $x \in D_g$. Если $\rho_g(x) < \infty$, то неравенство (29) справедливо при $A = 1$, $r = \mathbb{I}$, $\Delta = \rho_g(x) + \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$. При этих ограничениях, опираясь на лемму 2, заключаем, что верно неравенство (30). Отсюда после элементарных преобразований получаем (см. (38)):

$$\beta_g(x) \leqslant \rho_g(x) + \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0,$$

т.е. $\beta_g(x) \leqslant \rho_g(x)$. Заметим, что $\beta_g(u) \geqslant 0$, $u \in D_g$, так как $\ln|a_k| \to -\infty$ при $\lambda \to \infty$ (см. (38), (27)). Итак, $\beta_g(x) = \rho_g(x)$, если $\rho_g(x) = 0$.

2. Пусть теперь $\rho_g(x) > 0$. Согласно теореме 6 для функции $g \in H(\mathbb{T}^n)$ справедлива формула (10). В ее обозначениях рассмотрим подмножество $\{g_j \in \mathcal{A}(\mathbb{T}^n),\ j \in A_x\}$ слагаемых, «образующих» функцию g, где

$$A_x = \Big\{i \in (1,\dots,m):\ S(g_i) \cap \Pi_x \neq \varnothing\Big\}, \quad \Pi_x = \Big\{k \in \mathbb{Z}^n:\ \lambda = \langle k,x\rangle > \lambda_0\Big\} \tag{40}$$

при любых достаточно больших значениях $\lambda_0 > 0$. Убедимся, что $A_x \neq \varnothing$. Иначе найдется такое число λ_0, что $\langle k,x\rangle \leqslant \lambda_0$ для всех $k \in S_g$, где S_g — носитель функции g. Это означает, что $x \notin D_g$, противоречие.

Допустим, что $\beta_g(x) < \infty$ (см. (38)). Символом $\beta_i(x)$ обозначим число, отличающееся от $\beta_g(x)$ лишь тем, что в (38) при $u = x$ полагаем $k \in S(g_i)$, где $S(g_i)$ — носитель слагаемого $g_i \in \mathcal{A}(\mathbb{T}^n)$ функции g (см. (40)). Пусть $\mathcal{F}_i$ — мономиальное отображение вида (6), существующее для функции g_i, E_i — след отображения $\mathcal{F}_i$ на $\mathbb{R}^n_0$, $b^{(i)} = b^{(i)}(\alpha) = E_i(\alpha)$, $\alpha \in (0,1)^n$ (см. определение 2 и предложение 5). Из теоремы 9 вытекает соотношение (ср. (38))

$$\beta_i(x) = \limsup_{\lambda\to\infty} \frac{\lambda(\ln\lambda - \ln e\Delta)}{-\ln|a_k| + \langle k, \ln b^{(i)}\rangle} \leqslant \Delta, \quad \lambda = \langle k,x\rangle, \quad k \in S(g_i); \quad i \in A_x; \quad \Delta = \beta_g(x) + \varepsilon,$$

где $\varepsilon > 0$. Поэтому справедлива оценка для коэффициентов Лорана слагаемого g_i функции g

$$|a_k| < [b^{(i)}]^k \left(\frac{e\Delta}{\lambda}\right)^{\lambda/\Delta} \quad \forall \lambda > \lambda_0; \quad \lambda = \langle k,x\rangle, \quad k \in S(g_i), \quad i \in A_x.$$

Отсюда, применяя лемму 3, приходим к следующему неравенству при $A = 1$, $r = \mathbb{I}$, $\Delta = \beta_g(x) + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$:

$$M_{g_i}(t^x) < Ce^{t^\Delta} \quad \forall t > t_i; \quad i \in A_x. \tag{41}$$

Наконец, из формулы (10) выводим в обозначениях соотношения (40)

$$M_g(r) \leqslant \sum_{i=1}^m M_{g_i}(r) = \Sigma_1 + \Sigma_2, \quad \Sigma_1 = \sum_{i \in A_x} M_{g_i}(r), \quad \Sigma_2 = \sum_{i \notin A_x} M_{g_i}(r), \quad r \in \mathbb{R}^n_0.$$

Теперь, опираясь на неравенство (41) и предложение 5, заключаем, что найдутся такие постоянные $C_j > 0$, $j = 1,2$, и $s \in \mathbb{R}$, что

$$M_g(t^x) < C_1 e^{t^\Delta} + C_2 t^s, \quad t > 0.$$

Применяя формулу (11), выводим

$$\rho_g(x) \leqslant \Delta = \beta_g(x) + \varepsilon, \quad \rho_g(x) \leqslant \beta_g(x).$$

Противоположное неравенство было доказано выше. Кроме того, доказано, что предположение о конечности одного из чисел $\rho_g(x)$, $\beta_g(x)$ означает конечность другого. Поэтому равенство $\rho_g(x) = \beta_g(x)$ справедливо и в том случае, когда одно из этих чисел равно ∞. Итак, формула (38) верна.

3. Утверждение (2) теоремы доказывается тем же способом. При использовании лемм 2, 3 полагаем $\Delta = \rho(x) = \rho_g(x)$. Согласно теореме 8, функция x-типов $\sigma_g(\cdot;x)$ является конечной. Это

определяет конечность и выпуклой относительно $\ln r_1, \dots, \ln r_n$ функции $A_g(r;x)$, $r \in \mathbb{R}_0^n$, определяемой правой частью формулы (39). В частности, если $g \in \mathcal{A}(\mathbb{T}^n)$, то, применяя предложение 6, находим в его обозначениях равенство

$$A_g(r;x) = \lim_{\alpha \to I} A_g \left[\frac{r}{b(\alpha)}; x \right], \quad I = (1, \dots, 1), \quad r \in \mathbb{R}_0^n,$$

используемое при доказательстве формулы (39). □

Замечание 4. При условии $g \in \mathcal{A}(\mathbb{T}^n)$ доказательство теоремы существенно упрощается: оно опирается на аналогичные формулы для целых функций (см. [3], [13, гл. 7, теорема 1.4]). В этом можно убедиться, применяя метод замены переменных, продемонстрированный при доказательстве леммы 3 (см. также [14]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Маергойз Л. С.* Функции порядков и шкалы роста целых функций многих переменных// Сиб. мат. ж. — 1972. — *13*, № 1. — С. 118–132.
2. *Маергойз Л. С.* Функции типов целой функции многих переменных по направлению ее роста// Сиб. мат. ж. — 1973. — *14*, № 5. — С. 1037–1056.
3. *Маергойз Л. С.* Асимптотические характеристики целых функций и их приложения в математике и биофизике. — Новосибирск: Наука, 1991.
4. *Маергойз Л. С.* Многомерный аналог разложения голоморфной функции в ряд Лорана и смежные вопросы// Докл. РАН. — 2013. — *452*, № 5. — С. 486–489.
5. *Маергойз Л. С.* Расширения класса целых функций многих переменных и смежные вопросы// Сиб. мат. ж. — 2014. — *55*, № 5. — С. 1137–1159.
6. *Райков Д. А.* Векторные пространства. — М.: Физматгиз, 1962.
7. *Ронкин Л. И.* Введение в теорию целых функций многих переменных. — М.: Наука, 1971.
8. *Ронкин Л. И.* Целые функции// Итоги науки и техн. Совр. пробл. мат. Фундам. направл. — М.: ВИНИТИ, 1986. — *9*. — С. 5–36.
9. *Хованский А. Г.* Многогранники Ньютона (разрешение особенностей)// Итоги науки и техн. Совр. пробл. мат. Новейшие достижения. — М.: ВИНИТИ, 1983. — *22*. — С. 207–239.
10. *Шабат Б. В.* Введение в комплексный анализ. Ч. II. — М.: Наука, 1985.
11. *Fulton W.* Introduction to Toric Varieties. — Princeton, New Jersey: Princeton Univ. Press, 1993.
12. *Lelong P., Gruman L.* Entire Functions of Several Complex Variables. — Berlin: Springer-Verlag, 1986.
13. *Maergoiz L. S.* Asymptotic Characteristics of Entire Functions and Their Applications in Mathematics and Biophysics. — Dordrecht–Boston–London: Kluwer Academic, 2003.
14. *Maergoiz L. S.* Laplace–Borel transformation of functions holomorphic in the torus and equivalent to entire functions// in: Methods of Fourier Analysis and Approximation Theory. — Basel: Birkhäuser, 2016. — C. 195–209.
15. *Rockafellar P. T.* Convex Analysis. — Princeton, New Jersey: Princeton Univ. Press, 1970.

М. Н. Завьялов
Сибирский федеральный университет, Красноярск
E-mail: zavyalovmn@mail.ru

Л. С. Маергойз
Сибирский федеральный университет, Красноярск
E-mail: bear.lion@mail.ru

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 142 (2017). С. 102–110

УДК 517.544.4, 517.983

МЕТРИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА ОГРАНИЧЕННЫХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

© 2017 г. Ш. А. МАХМУТОВ, М. С. МАХМУТОВА

Аннотация. В работе рассматриваются классы аналитических функций, отображающих единичный круг в себя. Функции из этих классов описываются в терминах гиперболической производной и гиперболической метрики. При подборе соответствующих метрик эти классы образуют метрические пространства. Функции из изучаемых гиперболических классов порождают операторы композиции из пространства Блоха в классические пространства аналитических функций в единичном круге.

Ключевые слова: ограниченная аналитическая функция, гиперболическая производная, гиперболическая метрика, оператор композиции.

AMS Subject Classification: 30H05, 47B33

1. Введение. В работе рассмотрены гиперболические классы аналитических функций, отображающих единичный круг $D = \{z : |z| < 1\}$ в себя. Обычно эти классы описываются в терминах гиперболической производной или гиперболической метрики. Гиперболические классы ограниченнных функций изучались как самостоятельные объекты с точки зрения граничного поведения, распределения значений таких функций (см. [1,3,5–7,10–12,14,15,18–23]). В середине девяностых годов 20 века было обнаружено (см. [9]), что функции из гиперболических классов порождают операторы композиции на пространстве Блоха. В этой связи к гиперболическим классам возродился интерес с точки зрения операторов композиции (см. [1,3,5–8,10–12,14,16,23]).

Определим в круге D гиперболическое расстояние

$$\sigma(a,b) = \frac{1}{2}\ln\frac{|1-\overline{a}b| + |a-b|}{|1-\overline{a}b| - |a-b|}, \quad a,b \in D.$$

Обозначим множество аналитических функций $\varphi : D \to D$ через $B(D)$, а гиперболическую производную φ — через

$$\varphi^\star(z) := \frac{|\varphi'(z)|}{1-|\varphi(z)|^2}.$$

Нетрудно заметить, что для любых функций $\varphi, \psi \in B(D)$ произведение $\varphi\psi \in B(D)$, но $\varphi \pm \psi$ может не принадлежать $B(D)$.

Согласно теореме Шварца—Пика для произвольной функции $\varphi \in B(D)$ имеем

$$(1-|z|^2)\varphi^\star(z) \leqslant 1, \quad z \in D. \tag{1}$$

Скажем, что функция φ принадлежит классу $B_0(D)$, если

$$\lim_{|z|\to 1}(1-|z|^2)\varphi^\star(z) = 0;$$

класс $B_0(D)$ называют гиперболическим классом малых функций Блоха (см. [2,3,6,10,15]). Очевидно, что $B_0(D) \subset B(D)$.

Работа выполнена при поддержке гранта IG/SCI/DOMS/16/02 университета султана Кабуса.

В [1] ограниченные аналитические функции изучались с точки зрения распределения значений. Предположим, что характеристика Неванлинны в гиперболической форме имеет вид

$$T_*(r,\varphi)=\frac{1}{\pi}\iint\limits_{|z|\leqslant r}\big(\varphi^*(z)\big)^2\ln\frac{r}{|z|}\,dx\,dy,\quad 0<r<1,$$

гиперболическая функция приближения $m_*(r,\varphi,a)$, $a\in D$, задана в виде

$$m_*(r,\varphi,a)=\begin{cases}-\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int\limits_0^{2\pi}\ln\sqrt{\left|\frac{1-\overline{a}\varphi(re^{i\theta})}{\varphi(re^{i\theta})-a}\right|^2-1}d\theta+\ln\sqrt{\left|\frac{1-\overline{a}\varphi(0)}{\varphi(0)-a}\right|^2-1}, & \text{если } \varphi(0)\neq a,\\ -\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int\limits_0^{2\pi}\ln\sqrt{\left|\frac{1-\overline{a}\varphi(re^{i\theta})}{\varphi(re^{i\theta})-a}\right|^2-1}d\theta-\ln|c_k(a)|, & \text{если } \varphi(0)=a\end{cases}$$

где $c_k(a)=\lim\limits_{w\to0}\dfrac{\varphi(w)-a}{w^k}\neq0$. Тогда имеем следующий результат.

Теорема 1 (см. [1]). *Для произвольной функции $\varphi\in B(D)$*

$$T_*(r,\varphi)=m_*(r,\varphi,a)-N(r,\varphi,a)$$

для любого $a\in D$ и $0<r<1$.

Отметим, что максимальный рост $T_*(r,\varphi)=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1}{1-r^2}$ достигается, если $\varphi(z)=z$.

2. Гиперболические классы функций. История.

Класс $B(D)$ содержит все аналитические отображения единичного круга D в себя. Этот класс описан в терминах гиперболической производной (1) согласно теореме Шварца—Пика.

2.1. Гиперболические классы функций в исследованиях до 1990 г.

(A) Гиперболические классы Харди H_h^p, $p>0$, и гиперболический класс Дирихле $\mathcal{D}_h$ (см. [18–20]);
(B) гиперболические классы Липшица $\sigma\Lambda_\alpha$, $0<\alpha\leqslant1$ (см. [21]);
(C) класс функций с ограниченной гиперболической осцилляцией $BMOA_h$ (см. [22]).

2.2. Гиперболические классы функций. Дальнейшие исследования.

(a) Гиперболический класс малых функций Блоха $B_0(D)$ (см. [2, 3, 9, 14, 15]);
(b) гиперболические классы Бесова (см. [10, 16, 23]);
(c) гиперболический класс $VMOA$ (см. [1, 11, 16]);
(d) гиперболические Q_p классы (см. [1, 6, 8, 14]);
(e) гиперболические α-Блох классы (совпадают с $\sigma\Lambda_\alpha$) (см. [12]);
(f) гиперболические весовые классы Дирихле $\mathcal{D}_s^h$, $s>-1$ (см. [7]).

Другие гиперболические классы функций (например, гиперболические классы Бергмана, F-классы) в настоящей работе рассматриваться не будут.

3. Гиперболические классы Харди.

3.1. Гиперболические классы Харди H_h^p. Аналитическая функция $\varphi\in B(D)$ принадлежит гиперболическому классу Харди H_h^p, $0<p<\infty$, если

$$\sup_{0<r<1}\int\limits_0^{2\pi}\left(\log\frac{1}{1-|\varphi(re^{i\theta})|^2}\right)^p d\theta<\infty.$$

Класс H_h^∞ содержит функции φ, удовлетворяющие оценке $|\varphi(z)|\leqslant M<1$ для всех $z\in D$ (см. [19, 20]). Ямашита получил следующие описания функций из классов H_h^p.

Теорема 2 (см. [19]). *Пусть $\varphi,\psi\in H_h^p$ и $0<p\leqslant\infty$. Тогда*

(1) $\varphi\psi\in H_h^p$;

(2) $t\,\varphi+(1-t)\psi \in H_h^p$ *для всех* $0<t<1$.

Теорема 3 (см. [20]). *Для любой пары* p,q, $0<p<q\leqslant\infty$, *справедливо вложение* $H_h^q\subset H_h^p$.

Теорема 4 (см. [20]). $H_h^q \subset \bigcap\limits_{0<p<q} H_h^p$ *для любого* q, $0<q\leqslant\infty$.

3.2. Гиперболические метрические пространства H_h^p. Так как $H_h^p\subset B(D)$, то для любой функции $\varphi\in H_h^p$ угловое предельное значение $\widehat{\varphi}$ существует почти в каждой точке $\zeta=e^{it}$ единичной окружности $|z|=1$.

Определим метрику на H_h^p следующим образом:

$$d_p(\varphi,\psi):=\begin{cases}\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int\limits_0^{2\pi}\sigma\big(\widehat{\varphi}(t),\widehat{\psi}(t)\big)^p\,dt, & 0<p<1,\\ \left(\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int\limits_0^{2\pi}\sigma\big(\widehat{\varphi}(t),\widehat{\psi}(t)\big)^p\,dt\right)^{1/p}, & 1\leqslant p<\infty,\\ \sup\limits_{0\leqslant t\leqslant 2\pi}\sigma\big(\widehat{\varphi}(t),\widehat{\psi}(t)\big), & p=\infty.\end{cases}$$

Теорема 5 (см. [19, 20]). *Пространство* (H_h^p,d_p) *является полным метрическим пространством для всех* $0<p\leqslant\infty$.

3.3. Гиперболический класс Харди H_h^1. Отдельно рассмотрим описание класса H_h^1.

Теорема 6. *Пусть* $\varphi\in B(D)$. *Следующие условия равносильны*:

(1) $\varphi\in H_h^1$;
(2) $T_*(1,\varphi)<\infty$;
(3) $\displaystyle\iint\limits_{|a|<1}\frac{N(1,\varphi,a)}{(1-|a|^2)^2}\,dm(a)<\infty$.

Отсюда следует, что H_h^1 является классом функций с ограниченной гиперболической характеристикой (см. также [19, 20])

4. Гиперболические классы Q_p^h. Отнесем $\varphi\in B(D)$ к гиперболическому классу Q_p^h, $p>0$ (см. [6–8, 14]), если

$$\|\varphi\|^2_{Q_p^h}=\sup_{a\in D}\iint\limits_D\big(\varphi^\star(z)\big)^2 g^p(z,a)\,dA(z)<\infty,$$

где $g(z,a)=\ln\left|\dfrac{1-\overline{a}z}{a-z}\right|$, $a\in D$, и $dA(z)=\dfrac{1}{\pi}dxdy$ — нормированный элемент евклидовой площади круга D.

Известно, что $Q_p^h=B(D)$ при $p>1$. Класс Q_1^h совпадает с классом функций с ограниченной гиперболической осцилляцией $BMOA_h$ (см. [22]) и при $0<p<1$ получаются классы $Q_p^h\subset B(D)$. Класс Q_0^h совпадает с гиперболическим классом функций Дирихле $\mathcal{D}_h$.

Отнесем φ к подклассу $Q_{p,0}^h$, если $\varphi\in B(D)$ и

$$\lim_{|a|\to 1}\iint\limits_D\big(\varphi^\star(z)\big)^2 g^p(z,a)\,dA(z)=0,\quad p>0.$$

Отметим, что $Q_{p,0}^h\subset Q_p^h$. Если $p>1$, то $Q_{p,0}^h=B_0(D)$. При $p=1$ мы получим $Q_{1,0}^h=VMOA_h$ — подкласс функций с исчезающей средней гиперболической осцилляцией (см. [1, 11]). Функции из $VMOA_h$ удовлетворяют условию

$$\lim_{|a|\to 1}\int\limits_{|z|=1}\sigma\big(\varphi\circ S_a(z),\varphi(a)\big)|dz|=0.$$

Теорема 7 (см. [6]). *Для произвольных $\varphi, \psi \in Q_p^h$, $p > 0$, имеем:*

(1) $\varphi\psi \in Q_p^h$;

(2) $t\,\varphi + (1-t)\psi \in Q_p^h$ *для любого* $0 \leqslant t \leqslant 1$.

Теорема 8 (см. [6]). *Вложение $Q_p^h \subset Q_q^h$ — точное для любой пары p, q, где $0 < p < q$.*

4.1. Гиперболические метрические пространства Q_p^h. Наделив Q_p^h метрикой в виде (см. [12])

$$d_Q(\varphi,\psi : Q_p^h) := d_{Q_p^h}(\varphi,\psi) + \|\varphi-\psi\|_{Q_p} + |\varphi(0)-\psi(0)| =$$

$$:= \left(\sup_{a\in D}\iint\limits_D \left|\frac{\varphi'(z)}{1-|\varphi(z)|^2} - \frac{\psi'(z)}{1-|\psi(z)|^2}\right|^2 g^p(z,a)\;dA(z)\right)^{1/2} + \|\varphi-\psi\|_{Q_p} + |\varphi(0)-\psi(0)|,$$

где

$$\|\varphi\|_{Q_p}^2 = \sup_{a\in D}\iint\limits_D |\varphi'(z)|^2 g^p(z,a)\;dA(z), \tag{2}$$

получим следующий результат.

Теорема 9. *(Q_p^h, d_Q) — полное метрическое пространство.*

5. Гиперболические классы Бесова. Согласно определению, данному в [10] (см. также [16, 23]) функция $\varphi \in B(D)$ принадлежит гиперболическому классу Бесова $\varphi \in B_p^h$, $p > 1$, если

$$\|\varphi\|_{B_p^h}^p = \iint\limits_D \left(1-|z|^2\right)^{p-2} (\varphi^\star(z))^p\;dA(z) < \infty.$$

Функции из гиперболических классов Бесова описаны в терминах средних осцилляций в гиперболической метрике.

Теорема 10 (см. [10]). *Пусть $\varphi \in B(D)$. Для того, чтобы $\varphi \in B_p^h$, $p > 1$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие*

$$\iint\limits_D \iint\limits_D \frac{[\sigma(\varphi(z),\varphi(w))]^p}{|1-z\bar{w}|^4}\,dA(z)\,dA(w) < \infty.$$

5.1. Мультипликативная замкнутость и выпуклость классов B_p^h. Очевидно, что произведение функций из класса $B(D)$ также принадлежат классу $B(D)$. Справедливо ли аналогичное утверждение, если рассмотреть произведение функций из B_p^h?

Теорема 11. *Классы B_p^h, $p > 1$, замкнуты относительно умножения.*

Доказательство. Пусть $\varphi, \psi \in B_p^h$. Тогда

$$\iint\limits_D \left(1-|z|^2\right)^{p-2} ((\varphi(z)\psi(z))^\star)^p\,dA(z) =$$

$$= \iint\limits_D \left(1-|z|^2\right)^{p-2} \left(\frac{|(\varphi(z)\psi(z))'|}{1-|\varphi(z)\psi(z)|^2}\right)^p dA(z) =$$

$$= \iint\limits_D \left(1-|z|^2\right)^{p-2} \left(\frac{|\varphi'(z)\psi(z)+\varphi(z)\psi'(z)|}{1-|\varphi(z)\psi(z)|^2}\right)^p dA(z) \leqslant$$

$$\leqslant \iint\limits_D \left(1-|z|^2\right)^{p-2} 2^{p-1} \frac{|\varphi'(z)\psi(z)|^p + |\varphi(z)\psi'(z)|^p}{(1-|\varphi(z)\psi(z)|^2)^p}\,dA(z) =$$

$$= 2^{p-1}\iint\limits_D \left(1-|z|^2\right)^{p-2} \left(\frac{|\varphi'(z)\psi(z)|^p}{(1-|\varphi(z)\psi(z)|^2)^p} + \frac{|\varphi(z)\psi'(z)|^p}{(1-|\varphi(z)\psi(z)|^2)^p}\right) dA(z) \leqslant$$

$$\leqslant 2^{p-1}\iint\limits_D (1-|z|^2)^{p-2}\left(\frac{|\varphi'(z)|^p}{(1-|\varphi(z)|^2)^p}+\frac{|\psi'(z)|^p}{(1-|\psi(z)|^2)^p}\right) dA(z)<\infty.$$

Отсюда следует, что $\varphi\psi \in B_p^h$. □

Теорема 12. *Классы B_p^h, $p>1$, являются выпуклыми множествами.*

Доказательство. Пусть $\varphi,\psi \in B_p^h$, где $p>1$. Требуется доказать, что $t\varphi+(1-t)\psi \in B_p^h$ для любых значений t, $0<t<1$. Имеем

$$\begin{aligned}
I &= \iint\limits_D (1-|z|^2)^{p-2}\left(\frac{\big|(t\varphi(z)+(1-t)\psi(z))'\big|}{1-|t\varphi(z)+(1-t)\psi(z)|^2}\right)^p dA(z) \leqslant \\
&\leqslant \iint\limits_D (1-|z|^2)^{p-2}2^{p-1}\frac{|t\varphi'(z)|^p+|(1-t)\psi'(z)|^p}{(1-|t\varphi(z)+(1-t)\psi(z)|^2)^p}\, dA(z) = \\
&= 2^{p-1}\iint\limits_D (1-|z|^2)^{p-2}\frac{t^p|\varphi'(z)|^p}{(1-|t\varphi(z)+(1-t)\psi(z)|^2)^p}\, dA(z)+ \\
&\qquad + 2^{p-1}\iint\limits_D (1-|z|^2)^{p-2}\frac{(1-t)^p|\psi'(z)|^p}{(1-|t\varphi(z)+(1-t)\psi(z)|^2)^p}\, dA(z) \\
&= 2^{p-1}I_1+2^{p-1}I_2.
\end{aligned}$$

Оценим интеграл I_1:

$$\begin{aligned}
I_1 &= \iint\limits_D (1-|z|^2)^{p-2}\frac{t^p|\varphi'(z)|^p}{(1-|t\varphi(z)+(1-t)\psi(z)|^2)^p}\, dA(z) = \\
&= \iint\limits_D (1-|z|^2)^{p-2}\frac{t^p|\varphi'(z)|^p}{(1-(t^2|\varphi(z)|^2+2t(1-t)|\varphi(z)||\psi(z)|+(1-t)^2|\psi(z)|^2))^p}\, dA(z) \leqslant \\
&\leqslant \iint\limits_D \big(1-|z|^2\big)^{p-2}\frac{t^p|\varphi'(z)|^p}{(1-(t^2|\varphi(z)|^2+2t(1-t)+(1-t)^2))^p}\, dA(z) = \\
&= \iint\limits_D \big(1-|z|^2\big)^{p-2}\frac{t^p|\varphi'(z)|^p}{(1-(t^2|\varphi(z)|^2+1-t^2))^p}\, dA(z) = \\
&= \iint\limits_D (1-|z|^2)^{p-2}\frac{t^p|\varphi'(z)|^p}{(t^2-t^2|\varphi(z)|^2)^p}\, dA(z) = \\
&= \frac{1}{t^p}\iint\limits_D (1-|z|^2)^{p-2}(\varphi^\star(z))^p\, dA(z)<\infty.
\end{aligned}$$

Аналогичным образом доказывается, что

$$I_2 \leqslant \frac{1}{(1-t)^p}\iint\limits_D \big(1-|z|^2\big)^{p-2}\big(\psi^\star(z)\big)^p\, dA(z)<\infty.$$

Следовательно,

$$I \leqslant 2^{p-1}I_1+2^{p-1}I_2<\infty.$$

Это доказывает, что $t\varphi+(1-t)\psi \in B_p^h$ для любых значений t, $0<t<1$. □

5.2. Гиперболические метрические пространства B_p^h. Классы B_p^h, $p>1$, не образуют линейного пространства, однако и на них можно определить естественную метрику. Опираясь на идеи из [12], определим метрику на классах B_p^h, $p>1$, следующим образом:

$$d(\varphi,\psi;B_p^h):=d_{B_p^h}(\varphi,\psi)+\|\varphi-\psi\|_{B_p}+|\varphi(0)-\psi(0)|$$

$$:=\left(\iint\limits_D \left|\frac{\varphi'(z)}{1-|\varphi(z)|^2}-\frac{\psi'(z)}{1-|\psi(z)|^2}\right|^p \left(1-|z|^2\right)^{p-2}dA(z)\right)^{1/p}+\|\varphi-\psi\|_{B_p}+|\varphi(0)-\psi(0)|\ ,$$

где

$$\|\varphi\|_{B_p}^p=\iint\limits_D \left(1-|z|^2\right)^{p-2}\left(\varphi'(z)\right)^p\, dA(z)<\infty.$$

Для краткости введем обозначение $d_B(\varphi,\psi):=d(\varphi,\psi;B_p^h)$.

Нетрудно проверить, что аксиомы метрики

$$d_B(\varphi,\psi)\geqslant 0,\quad d_B(\varphi,\psi)=d_B(\psi,\varphi),\quad d_B(\varphi,\psi)\leqslant d_B(\varphi,\zeta)+d_B(\zeta,\psi),\quad d_B(\varphi,\varphi)=0$$

справедливы для всех $\varphi,\psi,\zeta\in B_p^h$. Кроме того, если $d_B(\varphi,\psi)=0$, то $\varphi=\psi$. Следовательно, d_B определяет метрику на B_p^h.

Теорема 13. *Классы B_p^h, $p>1$, с введеной метрикой $d(B_p^h;d_B)$ образуют полное метрическое пространство.*

Доказательство. Возьмем произвольную фундаментальную последовательность $\{\varphi_n\}$ из B_p^h, т.е. для любого $\varepsilon>0$ существует такое $N=N(\varepsilon)>0$, что $d_B(\varphi_n,\psi_m)<\varepsilon$ для всех $m,n>N$. Так как $\{\varphi_n\}\subset B(D)$, то семейство равномерно ограничено и, следовательно, нормально в D. Отсюда следует, что существует сходящаяся подпоследовательность $\{\varphi_{n_k}\}$ к некоторой функции $\varphi\in B(D)$ на компактных подмножествах единичного круга D, и в силу интегральной формулы Коши, аналогичное свойство справедливо и для производных. Возьмем $m>N$ и $0<r<1$. Тогда в силу леммы Фату имеем

$$\iint\limits_{|z|\leqslant r}\left|\frac{\varphi(z)}{1-|\varphi(z)|^2}-\frac{\varphi_m(z)}{1-|\varphi_m(z)|^2}\right|^p\left(1-|z|^2\right)^{p-2}dA(z)=$$

$$=\iint\limits_{|z|\leqslant r}\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\varphi_n(z)}{1-|\varphi_n(z)|^2}-\frac{\varphi_m(z)}{1-|\varphi_m(z)|^2}\right|^p\left(1-|z|^2\right)^{p-2}dA(z)\leqslant$$

$$\leqslant\lim_{n\to\infty}\iint\limits_{|z|\leqslant r}\left|\frac{\varphi_n(z)}{1-|\varphi_n(z)|^2}-\frac{\varphi_m(z)}{1-|\varphi_m(z)|^2}\right|^p\left(1-|z|^2\right)^{p-2}dA(z)\leqslant\varepsilon^p. \tag{3}$$

Полагая, что $r\to 1^-$, получаем, что

$$\iint\limits_D(\varphi^\star(z))^p\left(1-|z|^2\right)^{p-2}dA(z)\leqslant 2^{p-1}\varepsilon^p+2^{p-1}\iint\limits_D(\varphi_m^\star(z))^p\,(1-|z|^2)^{p-2}dA(z).$$

Следовательно, $\varphi\in B_p^h$. Кроме того, из (3) и полноты B_p^h получаем, что $\varphi_n\to\varphi$ относительно метрики d_B. □

5.3. Гиперболические классы Бесова и гиперболические классы Q_p^h. В этом разделе мы установим соотношение между гиперболическими классами Бесова и гиперболическими Q-классами.

Классы B_p^h удовлетворяют условию $B_p^h\subset B_q^h\subset B_0(D)$, если $1<p<q$, (см. [10, теорема 3]). В [11, теорема 6.2] доказано, что классы B_p^h, $p>1$, являются подклассами гиперболического класса $VMOA$ функций, т.е. $B_p^h\subset VMOA_h$ для всех $p>1$. Последний результат уточним следующим образом (доказательство теоремы не приводится в виду громоздкости оценок).

Теорема 14. *Для любого $p \geqslant 2$ справедливо вложение*

$$B_p^h \subset \bigcap_{\frac{p-2}{p}<q<1} Q_{q,0}^h, \tag{4}$$

а при $1 < p < 2$

$$B_p^h \subset \bigcap_{0<q<1} Q_{q,0}^h \ . \tag{5}$$

5.4. Распределение значений функций из гиперболических классов Бесова. Рассмотрим считающую функцию $N_{p,h}^B(\varphi, w)$, $p > 1$, $w \in D$, для функций из гиперболических классов Бесова (см. также [16, 17], где считающая функция дается в терминах производной)

$$N_{p,h}^B(\varphi, w) = \sum_{z\in\{\varphi^{-1}(w)\cap D\}} \Big\{\big(1-|z|^2\big)\varphi^\star(z)\Big\}^{p-2}.$$

Теорема 15. *Пусть $\varphi \in B_p^h$, $p > 1$. Тогда*

$$\iint\limits_D \big(1-|z|^2\big)^{p-2}\big(\varphi^\star(z)\big)^p\,dA(z) = \iint\limits_D \frac{N_{p,h}^B(\varphi, w)}{(1-|w|^2)^2}\,dA(w).$$

Доказательство. Так как $\varphi \in B_p^h$, то

$$\iint\limits_D \big(1-|z|^2\big)^{p-2}(\varphi^\star(z))^p\,dA(z) = \iint\limits_D \big(1-|z|^2\big)^{p-2}(\varphi^\star(z))^{p-2}\frac{|\varphi'(z)|^2 dA(z)}{(1-|\varphi(z)|^2)^2} < \infty.$$

Сделав замену переменной $w = \varphi(z)$, получим

$$\iint\limits_D \big(1-|z|^2\big)^{p-2}\big(\varphi^\star(z)\big)^{p-2}\frac{|\varphi'(z)|^2 dA(z)}{(1-|\varphi(z)|^2)^2} =$$

$$= \iint\limits_D \sum_n \chi_n\big(1-|\varphi_n^{-1}(w)|^2\big)^{p-2}\Big(\varphi^\star\big(\varphi_n^{-1}(w)\big)\Big)^{p-2}\frac{dA(w)}{(1-|w|^2)^2} = \iint\limits_D \frac{N_{p,h}^B(\varphi, w)}{(1-|w|^2)^2}\,dA(w). \quad \square$$

6. Операторы композиции. Гиперболические классы аналитических функций в единичном круге играют важную роль в порождении операторов композиции на пространстве Блоха $\mathcal{B}$.

Напомним, что аналитическая функция $f(z)$ в единичном круге D называется *функцией Блоха* (обозначение $f \in \mathcal{B}$), если f удовлетворяет условию

$$\|f\|_{\mathcal{B}} = \sup_{z\in D}\big(1-|z|^2\big)|f'(z)| < \infty.$$

Пространство $\mathcal{B}$ функций Блоха с нормой $\|f\| = |f(0)| + \|f\|_{\mathcal{B}}$ является банаховым пространством.

Любая функция $\varphi \in B(D)$ порождает линейный оператор композиции $C_\varphi f = f \circ \varphi$ из пространства аналитических функций $H(D)$ в себя (см. [13]). Основные результаты относительно приложения гиперболических классов функций к операторам композиции в краткой форме можно сформулировать следующим образом.

Теорема 16. *Пусть φ — произвольное аналитическое отображение единичного круга D в себя.*

(1) *$C_\varphi : \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ — ограниченный оператор для любой функции $\varphi \in B(D)$* (см. [9]).

(2) *Оператор $C_\varphi \colon \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ компактен тогда и только тогда, когда* (см. [9])

$$\limsup_{\substack{z:|\varphi(z)|>r,\\ r\to 1-}} \big(1-|z|^2\big)\varphi^*(z) = 0.$$

(3) *Оператор $C_\varphi \colon \mathcal{B} \to B_p$, $p>1$, компактен тогда и только тогда, когда $\varphi \in B_p^h$* (см. [10, 16, 23]).

(4) *Оператор* $C_\varphi \colon \mathcal{B} \to Q_p$, $p>0$, *ограничен тогда и только тогда, когда* $\varphi \in Q_p^h$ (см. [8,11,14,16]).
(5) *Оператор* $C_\varphi \colon \mathcal{B} \to Q_{p,0}$, $p>0$, *компактен тогда и только тогда, когда* $\varphi \in Q_{p,0}^h$ (см. [8, 11, 14, 16]).
(6) *Оператор* $C_\varphi \colon \mathcal{B} \to H^{2p}$, $p>0$, *компактен тогда и только тогда, когда* $\varphi \in H_p^h$ (см. [5, 23]).

7. Примеры. Приведем примеры, подтверждающие нетривиальность новых классов.

Пример 1. Пусть $K_\alpha = \{z = x + iy : |x|^\alpha + |y|^\alpha < 1\}$, $0 < \alpha \leqslant 1$, и φ_α — конформное отображение D на K_α. Тогда $\varphi_1 \notin B_2^h$. Если $\alpha < 1$, тогда $\varphi_\alpha \in B_2^h$.

Пример 2. Ли показала (см. [6]), что отображение $\varphi(z) = 1-(1-z)^\alpha$, $0 < \alpha < 1$, принадлежит всем классам Q_p^h, $p > 0$.

Пример 3. Ямашита показал (см. [19]), что функция $\psi(z) = (1 + z)/2$ принадлежит всем классам H_h^p, $p > 0$, однако $\psi \notin B_0(D)$.

Пример 4. Рассмотрим ограниченную аналитическую функцию φ в D, удовлетворяющую условию $\|\varphi\|_\infty \leqslant k < 1$. Если φ непрерывна на замкнутом круге $\overline{D}$ и $\varphi(e^{i\theta}) \in \Lambda_\alpha$, $0 < \alpha \leqslant 1$, то согласно теореме Харди—Литтлвуда (см. [4, теорема 5.1])

$$\left(1 - |z|^2\right) |\varphi'(z)| = O\big((1 - |z|^2)^\alpha\big), \quad |z| \to 1,$$

и также

$$\left(1 - |z|^2\right)\varphi^*(z) = O((1 - |z|^2)^\alpha), \quad |z| \to 1.$$

Получается, что $\varphi \in B_p^h$ для $p > 1/\alpha$.

Пример 5. Рассмотрим однолистную функцию φ в D. Пусть $G = \varphi(D) \subseteq D$. Обозначим через $\delta_G(w)$ евклидово расстояние от точки $w \in G$ до границы ∂G области G. Цао доказал (см. [23]), что $\varphi \in B_p^h$, $p > 1$, тогда и только тогда, когда

$$\iint\limits_D \frac{(\delta_G(w))^{p-2}}{(1 - |w|^2)^2}\, dA(w) < \infty. \tag{6}$$

Используя оценку (6), Цао построил пример функции φ из гиперболического класса Бесова B_p^h в точности по заданному параметру p, удовлетворяющий условию, что пересечение $\overline{\varphi(D)} \cap \{z : |z| = 1\}$ является бесконечным множеством.

Замечание 1. В силу вложений (4) и (5), пример Цао показывает существование функций, принадлежащих всем гиперболическим Q-классам, и при этом $\overline{\varphi(D)} \cap \{z : |z| = 1\}$ является бесконечным множеством.

Замечание 2. Отдельно отметим, что если

$$\lim_{|z|\to 1} \left(1 - |z|^2\right)^\alpha \varphi^*(z) < \infty, \quad 0 < \alpha < 1,$$

то $\|\varphi\|_\infty \leqslant k < 1$, и поэтому операторы композиции, порожденные такими функциями всегда компактны. Авторы признательны профессору Е. С. Дубцову за то, что он обратил наше внимание на это свойство гиперболических α-функций Блоха.

В [2, 15] рассматриваются условия существования внутренних функций в D, которые принадлежат $B_0(D)$, т.е.

$$\|\varphi\|_\infty = 1, \quad \lim_{|z|\to 1} \left(1 - |z|^2\right)\varphi^*(z) = 0$$

(см. также [3]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Махмутов Ш. А.* Гиперболический вариант основной теоремы Неванлинны// Докл. РАН. — 2000. — *370*, № 3. — С. 309–312.
2. *Aleksandrov A. B., Anderson J. M., Nicolau A.* Inner functions, Bloch spaces and symmetric measures// Proc. London Math. Soc. (3). — 1999. — *79*, № 2. — С. 318–352.
3. *Doubtsov E.* Inner mappings, hyperbolic gradients and composition operators// Integral Equations Operator Theory. — 2012. — *73*, № 4. — С. 537–551.
4. *Duren P.* Theory of H^p-Spaces. — New York: Academic Press, 1970.
5. *Kwon E. G.* Composition of Blochs with bounded analytic functions// Proc. Am. Math. Soc. — 1996. — *124*, № 5. — С. 1473–1480.
6. *Li X.* On hyperbolic Q classes/ Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. Diss. — 2005. — *145*.
7. *Li X., Pérez-González F., Rättyä J.* Composition operators in hyperbolic Q-classes// Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. — 2006. — *31*, № 2. — С. 391-–404.
8. *Lindström M., Makhmutov S., Taskinen J.* The essential norm of a Bloch-to-Q_p composition operator// Can. Math. Bull. — 2004. — *47*, № 1. — С. 49–59.
9. *Madigan P. K., Matheson A.* Compact composition operators on the Bloch space// Trans. Am. Math. Soc. — 1995. — *347*. — С. 2679–2687.
10. *Makhmutov S.* Hyperbolic Besov functions and Bloch-to-Besov composition operators// Hokkaido Math. J. — 1997. — *26*, № 3. — С. 699–711.
11. *Makhmutov S., Tjani M.* Composition operators on some Möbius invariant Banach spaces// Bull. Austr. Math. Soc. — 2000. — *62*. — С. 1–19.
12. *Pérez-González F., Rättyä J., Taskinen J.* Lipschitz continuous and compact composition operators in hyperbolic classes// Mediterr. J. Math. — 2011. — *8*, № 1. — С. 125–135.
13. *Shapiro J. H.* Composition Operators and Classical Function Theory. — New York: Springer-Verlag, 1993.
14. *Smith W., Zhao R.* Composition operators mapping into the Q_p spaces// Analysis. — 1997. — *17*. — С. 239–263.
15. *Smith W.* Inner Functions in the Hyperbolic Little Bloch Class// Michigan Math. J. — 1998. — *45*. — С. 103–114.
16. *Tjani M.* Compact composition operators on some Möbius invariant Banach spaces/ Ph.D. Dissertation. — Michigan State University, East Lansing, MI, 1996.
17. *Tjani M.* Compact composition operator on Besov spaces// Trans. Am. Math. Soc. — 2003. — *355*, № 11. — С. 4683–4698.
18. *Yamashita S.* Hyperbolic Hardy class H^1// Math. Scand. — 1979. — *45*. — С. 261–266.
19. *Yamashita S.* Hyperbolical Hardy classes and hyperbolically Dirichlet finite functions// Hokkaido Math. J. — 1981. — *10*, Special Issue. — С. 709–722.
20. *Yamashita S.* On hyperbolic Hardy classes// Comment. Math. Univ. St. Paul. — 1981. — *30*, № 1. — С. 65–69.
21. *Yamashita S.* Smoothness of the boundary values of functions bounded and holomorphic in the disc// Trans. Am. Math. Soc. — 1982. — *272*, № 2. — С. 539–544.
22. *Yamashita S.* Holomorphic functions of hyperbolically bounded mean oscillation// Bull. U.M.I. — 1986. — *5-B*, № 6. — С. 983–1000.
23. *Zhao R.* Composition operators from Bloch type spaces to Hardy and Besov spaces// J. Math. Anal. Appl. — 1999. — *233*. — С. 749–766.

Ш. А. Махмутов
Университет султана Кабуса, Маскат, Оман
E-mail: `makhm@squ.edu.om, shmakhm@gmail.com`

М. С. Махмутова
Университет султана Кабуса, Маскат, Оман
E-mail: `marinam@squ.edu.om`

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 142 (2017). С. 111–120

УДК 517.9

ОБ ИНВАРИАНТНЫХ ПОДПРОСТРАНСТВАХ ОПЕРАТОРА ПОММЬЕ В ПРОСТРАНСТВАХ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОГО ТИПА

© 2017 г. **О. А. ИВАНОВА, С. Н. МЕЛИХОВ**

Аннотация. Описаны собственные замкнутые инвариантные подпространства оператора Поммье в (LF)-пространстве целых функций экспоненциального типа. Это пространство топологически изоморфно (посредством преобразования Лапласа) сильному сопряженному к пространству всех ростков функций, аналитических на выпуклом локально замкнутом подмножестве комплексной плоскости.

Ключевые слова: инвариантное подпространство, оператор Поммье, целая функция экспоненциального типа.

AMS Subject Classification: 47A16, 47B38, 46E10

1. Введение. В настоящей работе идет речь о собственных замкнутых инвариантных подпространствах оператора Поммье D_{0,g_0} в (LF)-пространстве E целых функций, изоморфном посредством преобразования Лапласа сильному сопряженному к пространству $H(Q)$ всех ростков функций, аналитических на выпуклом локально замкнутом множестве $Q \subset \mathbb{C}$. Семейство таких множеств содержит все выпуклые открытые и выпуклые замкнутые множества в $\mathbb{C}$ (см. раздел 2). Оператор D_{0,g_0} ассоциирован с некоторой функцией $g_0 \in E$, удовлетворяющей условию $g_0(0) = 1$. Если $g_0 \equiv 1$, то D_{0,g_0} является классическим оператором Поммье, получившим такое имя после выхода в свет работ [11–13].

Рассматриваемый здесь оператор D_{0,g_0} в весовых пространствах целых функций естественным образом используется при изучении разложений аналитических функций в ряды экспонент, уравнений свертки. В [1] была выяснена роль оператора D_{0,g_0} в теории интерполирующей функции А. Ф. Леонтьева (более общим образом, интерполирующего функционала). В [4,5] он был использован в случае $g_0 = e^P$, где P — некоторый многочлен. Рассмотренный в [4,5] оператор действует в (LB)-пространстве целых функций, рост которых определяется ρ-тригонометрически выпуклой ($\rho > 0$) функцией со значениями в $(-\infty, +\infty]$. Сопряженный к нему назван в [4] оператором обобщенного интегрирования. В [2] описан коммутант оператора $D_{0,g_0}(f)$ в алгебре всех линейных непрерывных операторов в некотором весовом (LF)-пространстве целых функций. Класс рассмотренных в [2] (LF)-пространств содержит и пространство E. В [8] получены критерии того, что функция f является циклическим вектором оператора D_{0,g_0} в E, т.е. того, что линейная оболочка орбиты $\{D^n_{0,g_0} \mid n \geqslant 0\}$ функции f плотна в E. Для пространства E, рассмотренного в данной статье, в [8] описаны все его собственные замкнутые D_{0,g_0}-инвариантные подпространства в случае, когда функция g_0 не имеет нулей, т.е. $g_0(z) = e^{\lambda z}$, $z \in \mathbb{C}$, для некоторого $\lambda \in Q$.

В разделе 3 настоящей работы описаны все собственные замкнутые D_{0,g_0}-инвариантные подпространства E для функции $g_0(z) = P(z)e^{\lambda z}$, $z \in \mathbb{C}$, где λ — некоторая точка из Q, а P — многочлен степени не меньше 1. Для такой функции g_0 оператор D_{0,g_0}, в отличие от случая $g_0 := e^{\lambda z}$, не является одноклеточным, т.е. его собственные замкнутые подпространства не образуют цепь. Их совокупность состоит уже из двух множеств: первое (конечное) содержит пространства конечной коразмерности, а второе (счетное) — пространства конечной размерности (теорема 2). В разделе 4 получена аналитическая реализация $*$ в $H(Q)$ умножения $\otimes$, задаваемого оператором сдвига для оператора Поммье в топологическом сопряженном E' к E. С помощью теоремы 2 и принципа двойственности описаны все собственные замкнутые идеалы в алгебре $(H(Q), *)$, изоморфной $(E', \otimes)$.

2. Предварительные сведения. Далее Q — выпуклое множество в $\mathbb{C}$. Предполагается, что Q локально замкнуто, т.е. Q имеет фундаментальную последовательность компактных подмножеств. Класс таких множеств введен в [9], они подробно изучены в [7,10]. Согласно [10, лемма 1.2] Q является объединением его относительной внутренности и (относительно) открытого подмножества его относительной границы. Семейство таких множеств содержит все выпуклые области и выпуклые замкнутые множества в $\mathbb{C}$. Далее считаем, что $0 \in Q$. Пусть $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ — возрастающая фундаментальная последовательность компактных подмножеств Q. Без ограничения общности можно считать, что все компакты Q_n выпуклые. Далее $H(Q_n)$ — пространство всех функций, аналитических на Q_n, т.е. аналитических в некоторой открытой окрестности Q_n. В $H(Q_n)$ вводится естественная топология индуктивного предела последовательности банаховых пространств. Пусть $H(Q)$ — векторное пространство всех функций, аналитических на Q, т.е. аналитических в некоторой открытой окрестности Q. Справедливо алгебраическое равенство

$$H(Q) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} H(Q_n),$$

и в $H(Q)$ вводится топология проективного предела пространств $H(Q_n)$, $n \in \mathbb{N}$, относительно естественных вложений $H(Q)$ в $H(Q_n)$.

Для множества $\Omega \subset \mathbb{C}$ символом H_Ω обозначим его опорную функцию:

$$H_\Omega(z) := \sup_{t\in\Omega} \operatorname{Re}(tz), \quad z \in \mathbb{C}.$$

Определим пространства Фреше

$$E_n := \left\{ f \in H(\mathbb{C}) \;\middle|\; \sup_{z\in\mathbb{C}} |f(z)| \exp(-H_{Q_n}(z) - |z|/k) < +\infty \ \forall k \in \mathbb{N} \right\}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Пространство E_n непрерывно вложено в E_{n+1} для любого $n \in \mathbb{N}$. Пусть

$$E := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n.$$

Введем в E топологию индуктивного предела пространств E_n, $n \in \mathbb{N}$, относительно вложений E_n в E.

Положим $e_z(t) := e^{zt}$, $t, z \in \mathbb{C}$. Для локально выпуклого пространства H символ H' обозначает топологическое сопряженное к H.

Согласно [10, лемма 1.10] преобразование Лапласа

$$\mathcal{F}(\varphi)(z) := \varphi(e_z), \quad \varphi \in H(Q)', \quad z \in \mathbb{C},$$

является топологическим изоморфизмом сильного сопряженного к $H(Q)$ на (LF)-пространство E.

Зафиксируем такую целую функцию g_0, что $g_0(0) = 1$. Оператор Поммье D_{0,g_0}, ассоциированный с g_0, определим равенствами

$$D_{0,g_0}(f)(t) := \begin{cases} \dfrac{f(t) - g_0(t)f(0)}{t}, & t \neq 0, \\ f'(0) - g_0'(0)f(0), & t = 0, \end{cases} \qquad f \in H(\mathbb{C}).$$

Ниже предполагается, что $g_0 \in E$. Тогда оператор D_{0,g_0} линейно и непрерывно отображает E в E (см. [1, лемма 6].

В [8] описаны циклические векторы оператора D_{0,g_0} в E, т.е. такие функции $f \in E$, что линейная оболочка множества $\{D_{0,g_0}^n(f) \mid n \geqslant 0\}$ (орбиты f) плотна в E. Справедлива следующая теорема.

Теорема 1 (см. [8, теорема 19]).

(I) *Пусть функция $g_0 \in E$ имеет бесконечно много нулей. Следующие утверждения равносильны*:

(i) *f — циклический вектор D_{0,g_0} в E;*
(ii) *функции f и g_0 не имеют общих нулей.*

(II) *Пусть $g_0 = Pe_\lambda$ для некоторых $\lambda \in Q$ и многочлена P такого, что $P(0) = 1$. Следующие утверждения равносильны*:
(i) *f — циклический вектор D_{0,g_0} в E;*
(ii) *функции f и g_0 не имеют общих нулей и f не является функцией вида Re_λ, где R — многочлен.*

Эта теорема естественным образом используется при описании собственных замкнутых D_{0,g_0}-инвариантных подпространств E. Именно, применяется следующее утверждение: собственное замкнутое подпространство E является D_{0,g_0}-инвариантным тогда и только тогда, когда оно не содержит ни одного циклического вектора оператора D_{0,g_0}.

Оператор сдвига T_z, $z \in \mathbb{C}$, для оператора Поммье D_{0,g_0} определяется равенством (см. [2, § 2])

$$T_z(f)(t) := \begin{cases} \dfrac{tf(t)g_0(z) - zf(z)g_0(t)}{t-z}, & t \neq z, \\ zg_0(z)f'(z) - zf(z)g_0'(z) + f(z)g_0(z), & t = z, \end{cases} \qquad f \in E.$$

Оператор T_z, $z \in \mathbb{C}$, линейно и непрерывно отображает E в E.

Для φ, $\psi \in E'$, $f \in E$ положим

$$(\varphi \otimes \psi)(f) := \varphi_z(\psi(T_z(f))).$$

Из [2, лемма 9(iii)] следует, что бинарная операция $\otimes$ корректно определена. Она ассоциативна и коммутативна.

Пусть $\mathcal{L}(E)$ — пространство всех линейных непрерывных операторов в E. Обозначим через $\mathcal{K}(D_{0,g_0})$ коммутант оператора D_{0,g_0} в алгебре $\mathcal{L}(E)$ с обычным умножением — суперпозицией операторов, т.е. множество всех таких операторов $B \in \mathcal{L}(E)$, что $BD_{0,g_0} = D_{0,g_0}B$ в E.

Для $\varphi \in E'$ положим

$$\kappa(\varphi)(f)(z) := \varphi(T_z(f)), \quad f \in E, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Отображение κ является представлением алгебры $(E', \otimes)$ в $\mathcal{L}(E)$. Согласно [2, следствие 18] отображение $\kappa : (E', \otimes) \to \mathcal{K}(D_{0,g_0})$ является изоморфизмом алгебр.

Для множества $T \subset E$ символом T^0 обозначим поляру T в E'. Введем в E' топологию Макки $\tau(E', E)$, т.е. топологию равномерной сходимости на семействе всех абсолютно выпуклых $\sigma(E, E')$-компактных подмножеств E (см. [6, гл. 8, 8.3.3] (она совпадает с сильной топологией $\beta(E', E)$). При этом $\sigma(E, E')$ — слабая топология в E, заданная естественной двойственностью между E и E'. Справедлив следующий принцип двойственности.

Лемма 1 (см. [8, лемма 21]). *Следующие утверждения равносильны*:
(i) *Множество $L \subset E'$ является собственным замкнутым идеалом в $(E', \otimes)$.*
(ii) *Существует такое собственное замкнутое D_{0,g_0}-инвариантное подпространство H пространства E, что $L = H^0$.*

3. Описание инвариантных подпространств оператора Поммье. Далее мы предполагаем, что $g_0 = Pe_\lambda$, где $\lambda \in Q$, а P — многочлен степени не меньше 1. Пусть $\mathbb{C}[z]$ (соответственно, $\mathbb{C}[z]_n$, $n \geqslant 0$) — пространство всех многочленов (соответственно, многочленов степени не выше n) над полем $\mathbb{C}$. Для функции $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ и множества A функций $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ положим

$$hA := \{hf \mid f \in A\}.$$

Пусть $\mathcal{D}(P)$ — множество всех таких многочленов q, на которые делится P, что $q(0) = 1$. Ниже мы покажем, что все собственные замкнутые D_{0,g_0}-инвариантные подпространства E представляются в виде qE или $qe_\lambda\mathbb{C}[z]_n$ для некоторых $q \in \mathcal{D}(P)$ и n.

Для двух таких многочленов q, r, что $q(0) = r(0) = 1$, символом $(q, r)_1$ обозначим наибольший общий делитель d многочленов q и r, для которого $d(0) = 1$.

Лемма 2 (о расщеплении)**.** *Пусть $f = wh$, где w — такая целая функция, что $v := g_0/w \in H(\mathbb{C})$ и $w(0) = 1$, и $h \in H(\mathbb{C})$. Тогда для любого $n \geqslant 0$*

$$D^n_{0,g_0}(f) = wD^n_{0,v}(h).$$

Доказательство. Это верно при $n = 0$. Если это так для некоторого $n \geqslant 0$, то для $t \neq 0$

$$D^{n+1}_{0,g_0}(f)(t) = \frac{D^n_{0,g_0}(f)(t) - g_0(t)D^n_{0,g_0}(f)(0)}{t} = \frac{w(t)D^n_{0,v}(h)(t) - v(t)w(t)D^n_{0,v}(h)(0)}{t} =$$
$$= w(t)\frac{D^n_{0,v}(h)(t) - v(t)D^n_{0,v}(h)(0)}{t} = w(t)D^{n+1}_{0,v}(h)(t). \quad \square$$

Лемма 3.

(i) *qE — собственное замкнутое D_{0,g_0}-инвариантное подпространство E для любого многочлена $q \in \mathcal{D}(P)$ степени не меньше 1.*

(ii) *$qe_\lambda\mathbb{C}[z]_n$ — собственное замкнутое D_{0,g_0}-инвариантное подпространство E для любого многочлена $q \in \mathcal{D}(P)$ и любого $n \geqslant 0$, удовлетворяющего условию $n \geqslant \deg(P) - \deg(q) - 1$.*

Доказательство. Утверждение (i) вытекает из леммы 2.

(ii) Возьмем функцию $f = qe_\lambda h$, $h \in \mathbb{C}[z]_n$. Тогда для $v := P/q$ имеем

$$D_{0,g_0}(f)(t) = q(t)e^{\lambda t}\frac{h(t) - v(t)h(0)}{t}, \quad t \neq 0.$$

Степень многочлена v равна $\deg(P) - \deg(q)$, а значит, не превосходит $n + 1$. Следовательно, степень многочлена $(h(t) - v(t)h(0))/t$ не выше n. Поэтому $D_{0,g_0}(f) \in qe_\lambda\mathbb{C}[z]_n$. Подпространство $qe_\lambda \cdot \mathbb{C}[z]_n$ конечномерно, а значит, замкнуто в E. Кроме того, оно отлично от $\{0\}$ и от E. $\square$

Следующее утверждение очевидно.

Лемма 4. *Если многочлены h и v взаимно просты, то многочлены $D_{0,v}(h)$ и v также взаимно просты.*

Выясним далее, какой вид имеют решения однородного $D_{0,v}$-уравнения конечного порядка с постоянными коэффициентами для целой функции v. Символом I обозначим тождественный оператор в E.

Лемма 5. *Пусть v — такая целая функция, что $v(0) = 1$. Если целая функция f удовлетворяет однородному уравнению*

$$\sum_{j=1}^s c_j D^j_{0,v}(f) = 0, \quad s \in \mathbb{N}, \quad c_s \neq 0,$$

то существуют такие многочлены r и p степени не выше $s - 1$, что $f = rv/p$.

Доказательство. Если $s = 1$, то существует такая постоянная C, что $f = Cv$. Пусть $s \geqslant 2$. Введем оператор

$$L := \sum_{j=1}^s c_j D^j_{0,v}.$$

Пусть $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{s-1}$ — все корни многочлена $\sum\limits_{j=1}^s c_j z^{j-1}$. Тогда

$$L = c_s D_{0,v}(D_{0,v} - \alpha_1 I)(D_{0,v} - \alpha_2 I)\ldots(D_{0,v} - \alpha_{s-1}I).$$

Найдется такая постоянная C, что

$$(D_{0,v} - \alpha_1 I)(D_{0,v} - \alpha_2 I)\ldots(D_{0,v} - \alpha_{s-1}I)(f) = Cv.$$

Отсюда следует, что

$$(D_{0,v} - \alpha_2 I)\ldots(D_{0,v} - \alpha_{s-1}I)(f)(t) = \frac{Ct + f(0)}{1 - \alpha_1 t}v(t), \quad t \in \mathbb{C}.$$

Рассуждая по индукции, нетрудно показать, что для некоторого многочлена r степени не выше $s-1$ выполняется равенство

$$f(t) = \frac{r(t)}{(1-\alpha_1 t)(1-\alpha_2 t)\dots(1-\alpha_{s-1}t)} v(t), \quad t \in \mathbb{C}. \qquad \square$$

Лемма 6. *Пусть h и v — взаимно простые многочлены,* $\deg(v) \geqslant 1$. *Тогда система* $\{D^j_{0,v}(h) \mid 1 \leqslant j \leqslant \deg(v)\}$ *линейно независима.*

Доказательство. Пусть $\sum\limits_{j=1}^{l} c_j D^j_{0,v}(h) = 0$, где $l := \deg(v)$. Предположим, что не все c_j равны 0, а s — наибольший из индексов j, при которых $c_j \neq 0$. По лемме 5 существуют многочлены r, p степени не выше $s-1$, для которых $h = rv/p$. Поскольку $\deg(v) > l-1$, это противоречит взаимной простоте h и v. $\square$

Лемма 7. *Пусть H — замкнутое D_{0,g_0}-инвариантное подпространство E, для которого $H \backslash \big(e_\lambda \mathbb{C}[z]\big) \neq \varnothing$. Тогда существует такой многочлен $q \in \mathcal{D}(P)$, что* $\deg(q) \geqslant 1$ *и* $qE \subset H$.

Доказательство. Возьмем функцию $f \in H \backslash \big(e_\lambda \mathbb{C}[z]\big)$. Из теоремы 1 (II) следует, что существует такой многочлен $q \in \mathcal{D}(P)$ степени не меньше 1, что $f = qh$ для некоторой функции $h \in E$, не имеющей общих нулей с P. По лемме 2 для любого $n \geqslant 0$, для функции $v := g_0/q$ имеем

$$D^n_{0,g_0}(f) = qD^n_{0,v}(h).$$

По теореме 1(II) h — циклический вектор оператора $D_{0,v}$ в E. Отсюда следует, что $qE \subset H$. $\square$

Лемма 8. *Пусть H — замкнутое D_{0,g_0}-инвариантное подпространство E. Если $H \subset e_\lambda \cdot \mathbb{C}[z]$, то существуют такие многочлен $q \in \mathcal{D}(P)$ и число $n \geqslant \max(0, \deg(P) - \deg(q) - 1)$, что $q\mathbb{C}[z]_n \subseteq H$.*

Доказательство. Пусть $f = re_\lambda \in H$, где $r \in \mathbb{C}[z]$. Положим $q := (r, P)_1$. По лемме 2 для $n \geqslant 0$ имеем

$$D^n_{0,g_0}(f) = qe_\lambda D^n_{0,v}(h), \tag{1}$$

где $h = r/q$, $v = P/q$. Покажем, что $qe_\lambda \mathbb{C}[z]_n \subset H$, где $n := \max\{\deg(P) - \deg(q) - 1, \deg(h)\}$.

Положим $k := \deg(h)$, $s := \deg(v)$ (тогда $s = \deg(P) - \deg(q)$). Пусть $s \geqslant 1$. По лемме 6 система функций $\{D^j_{0,v}(h) \mid 1 \leqslant j \leqslant s\}$ линейно независима. Если $0 \leqslant k \leqslant s-1$, то $\deg(D^j_{0,v}(h)) \leqslant s-1$, $1 \leqslant j \leqslant s$, а значит, $\{D^j_{0,v}(h) \mid 1 \leqslant j \leqslant s\}$ — базис в $\mathbb{C}[z]_{s-1}$. Учитывая равенство (1), получим, что $qe_\lambda \mathbb{C}[z]_{s-1} \subset H$.

Пусть $k = s$. Система $\{D^j_{0,v}(h) \mid 1 \leqslant j \leqslant s\}$ является базисом в $\mathbb{C}[z]_{s-1}$, а $\{D^j_{0,v}(h) \mid 0 \leqslant j \leqslant s\}$ — базисом в $\mathbb{C}[z]_s$. Отсюда следует, что $qe_\lambda \mathbb{C}[z]_s \subset H$.

Пусть теперь $k > s$. Тогда $\deg(D^j_{0,v}(h)) = k - j$, $0 \leqslant j \leqslant k-s$. По лемме 4 многочлены $D^{k-s}_{0,v}(h)$ и v взаимно просты. Значит, по лемме 6 система $\{D^j_{0,v}(h) \mid k-s+1 \leqslant j \leqslant k\}$, содержащаяся в $\mathbb{C}[z]_{s-1}$, линейно независима. Следовательно, система $\{D^j_{0,v}(h) \mid 0 \leqslant j \leqslant k\}$ является базисом в $\mathbb{C}[z]_k$. Поэтому $qe_\lambda \mathbb{C}[z]_k \subset H$.

Пусть $s = 0$. Тогда степень многочлена $D^j_{0,v}(h)$, $0 \leqslant j \leqslant k$, равна $k - j$. Отсюда следует, что $qe_\lambda \mathbb{C}[z]_k \subset H$. $\square$

Замечание 1. Отметим следующий факт, установленный при доказательстве леммы 8. Пусть H — замкнутое D_{0,g_0}-инвариантное подпространство E, последовательность многочленов $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ такова, что $\deg(p_n) \to +\infty$ и $p_n e_\lambda \in H$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда существует многочлен $q \in \mathcal{D}(P)$, для которого $q\mathbb{C}[z] \subset H$. В силу [3, теорема 4.4] последнее вложение влечет $qE \subset H$.

Лемма 9. *Пусть H — замкнутое D_{0,g_0}-инвариантное подпространство E.*

(i) *Если H содержит пространства q_1E и q_2E, $q_1, q_2 \in \mathcal{D}(P)$, то H содержит $(q_1, q_2)_1 E$.*

(ii) *Если H содержит q_1E и $q_2 e_\lambda \mathbb{C}[z]_n$, $q_1, q_2 \in \mathcal{D}(P)$, $n \geqslant 0$, то H содержит $(q_1, q_2)_1 E$.*

(iii) *Если H содержит $q_1e_\lambda\mathbb{C}[z]_n$ и $q_2e_\lambda\mathbb{C}[z]_m$, $q_1,q_2\in\mathcal{D}(P)$, $n,m\geqslant 0$, то H содержит $(q_1,q_2)_1e_\lambda\mathbb{C}[z]_s$, где*

$$s:=\max\{n+\deg(q_1);m+\deg(q_2)\}-\deg(q_1,q_2)_1.$$

Доказательство. (i) Имеем

$$H\supset q_1E+q_2E=(q_1,q_2)_1(r_1E+r_2E),$$

где

$$r_1:=\frac{q_1}{(q_1,q_2)_1},\quad r_2:=\frac{q_2}{(q_1,q_2)_1}$$

— взаимно простые многочлены. Поскольку функция $f\equiv 1$ принадлежит E, пространство H содержит $(q_1,q_2)_1\mathbb{C}[z]$. Так как $\mathbb{C}[z]$ плотно в E, то H содержит $(q_1,q_2)_1E$.

(ii) По условию

$$H\supset(q_1,q_2)_1(r_1E+r_2e_\lambda\mathbb{C}[z]_n),$$

где r_1, r_2 — взаимно простые многочлены. Найдется такая целая функция f типа 0 при порядке 1, отличная от многочлена, что $h=r_1f+r_2e_\lambda$ не имеет общих нулей с P. Ясно, что $h\in E$. Поскольку $h\notin e_\lambda\mathbb{C}[z]$, то по теореме 1 h является циклическим вектором оператора $D_{0,v}$ в E для $v=Pe_\lambda/q$. Отсюда следует, что $(q_1,q_2)_1E\subseteq H$.

(iii) По условию

$$H\supset de_\lambda(r_1\mathbb{C}[z]_n+r_2\mathbb{C}[z]_m),$$

где $d:=(q_1,q_2)_1$, $r_1:=q_1/d$, $r_2:=q_2/d$. Нетрудно убедиться, что существуют такие многочлены $f_1\in\mathbb{C}[z]_n$, $f_2\in\mathbb{C}[z]_m$, что многочлен $h=r_1f_1+r_2f_2$ взаимно прост с $v:=P/d$ (т.е. не имеет с ним общих нулей), а его степень равняется $s:=\max(n+\deg(r_1),m+\deg(r_2))$. По лемме 2 имеем

$$D^j_{0,g_0}(de_\lambda h)=de_\lambda D^j_{0,v}(h),\quad j\geqslant 0.$$

Как и ранее при доказательстве леммы 8, покажем, что $de_\lambda\mathbb{C}[z]_s\subset H$. Кроме того, заметим, что $r_1\mathbb{C}[z]_n+r_2\mathbb{C}[z]_m\subset C[z]_s$. $\square$

Теорема 2. *Пусть $g_0=Pe_\lambda$, где $\lambda\in Q$, а P — такой многочлен степени не меньше 1, что $P(0)=1$.*

(i) *qE является собственным замкнутым D_{0,g_0}-инвариантным подпространством E для любого многочлена $q\in\mathcal{D}(P)$ степени не меньше 1.*

(ii) *$qe_\lambda\mathbb{C}[z]_n$ является собственным замкнутым D_{0,g_0}-инвариантным подпространством E для любого многочлена $q\in\mathcal{D}(P)$ и любого $n\geqslant 0$, удовлетворяющего условию*

$$n\geqslant\deg(P)-\deg(q)-1.$$

(iii) *Для любого собственного замкнутого D_{0,g_0}-инвариантного подпространства H пространства E существует такой многочлен $q\in\mathcal{D}(P)$ степени не меньше 1, что $H=qE$ либо найдутся многочлен $q\in\mathcal{D}(P)$ и число $n\geqslant\max(0,\deg(P)-\deg(q)-1)$, для которых $H=qe_\lambda\mathbb{C}[z]_n$.*

Доказательство. Утверждения (i) и (ii) — это лемма 3.

(iii) Пусть H — собственное замкнутое D_{0,g_0}-инвариантное подпространство E. Предположим, что $H\backslash(e_\lambda\mathbb{C}[z])\neq\varnothing$. Тогда по лемме 7 H содержит пространства вида qH, где $q\in\mathcal{D}(P)$. По лемме 9 существует максимальное подпространство вида qE, $q\in\mathcal{D}(P)$, содержащееся в H. Допустим, что существует $f\in H\backslash(qE)$. Если f не является функцией вида Re_λ, где R — некоторый многочлен, то получим противоречие с максимальностью qE.

Пусть $f=Re_\lambda$ для некоторого многочлена R. Возьмем целую функцию h типа 0 при порядке 1, отличную от многочлена. Тогда функция $f+qhe_\lambda=(R+qh)e_\lambda$ принадлежит H, имеет бесконечно много нулей. Поскольку она не делится на q, получим противоречие с максимальностью qE. Таким образом, $H=qE$.

Пусть теперь $H\subset e_\lambda\mathbb{C}[z]$. Положим

$$H(P):=\Big\{r\in\mathbb{C}[z]\;\Big|\;\exists q\in\mathcal{D}(P):\ qre_\lambda\in H\Big\}.$$

Предположим, что $m(H) := \sup\{\deg(r) \mid r \in H(P)\} = +\infty$. Тогда найдутся такие многочлены $p \in \mathcal{D}(P)$ и r_n, что $\deg(r_n) \to +\infty$ и $pr_ne_\lambda \in H$, $n \in \mathbb{N}$. Отсюда следует (см. замечание 1), что H содержит $qe_\lambda\mathbb{C}[z]$ для некоторого $q \in \mathbb{D}(P)$. , а значит, и qE. Противоречие. Таким образом, $m(H) < +\infty$. Из леммы 9 следует, что среди пространств $pe_\lambda\mathbb{C}[z]_m$, где $p \in \mathcal{D}(P)$, $m \geqslant 0$, есть максимальное $qe_\lambda\mathbb{C}[z]_n$, совпадающее с H. При этом $n \geqslant \max(0, \deg(P) - \deg(q) - 1)$. □

4. Применение к описанию идеалов в алгебре $(H(Q), *)$**.** Линейное отображение

$$\mathcal{J} : E' \to H(Q), \quad \varphi \mapsto \varphi(e_z),$$

является топологическим изоморфизмом сильного сопряженного к E на $H(Q)$ (см., например, [8, 3.4]). Билинейная форма

$$\langle f, h\rangle := \mathcal{J}^{-1}(h)(f), \quad f \in E, h \in H(Q),$$

задает двойственность между E и E'. Выясним, как посредством изоморфизма $\mathcal{J}$ реализуется произведение $\otimes$ в $H(Q)$ (см. § 2).

Для функции $g_0 \in E$, удовлетворяющей условию $g_0(0) = 1$, $z \in \mathbb{C}$ и $f \in E$ положим

$$\widetilde{T}_z(f)(t) := \begin{cases} \dfrac{f(t)g_0(z) - f(z)g_0(t)}{t - z}, & t \neq z, \\ f'(z)g_0(z) - f(z)g_0'(z), & t \neq z. \end{cases}$$

Для любого $z \in \mathbb{C}$ оператор $\tilde{T}_z$ линеен и непрерывен в E. Заметим, что $T_z = \widetilde{T}_z M$, $z \in \mathbb{C}$, где $M : E \to E$ — оператор умножения на независимую переменную. Если $g_0 \equiv 1$, то оператор $\widetilde{T}_t$ обозначим символом A_t.

Далее, $g_0 = Pe_\lambda$, где $\lambda \in Q$, а P — такой многочлен степени не меньше 1, что $P(0) = 1$.

Лемма 10. *Для любого $t \in \mathbb{C}$ сопряженный к A_t оператор $A_t' : H(Q) \to H(Q)$ удовлетворяет равенству*

$$A_t'(f)(z) = \int_\lambda^z e^{t\xi} f(z + \lambda - \xi)\,d\xi, \quad f \in H(Q), \tag{2}$$

где интегрирование ведется по отрезку $[\lambda, z]$.

Доказательство. Вследствие полноты системы $\{e_\mu \mid \mu \in \mathbb{C}\backslash\{t\}\}$ в $H(Q)$ и линейности и непрерывности в $H(Q)$ операторов A_t' и

$$L(f)(z) = \int_\lambda^z e^{t\xi} f(z + \lambda - \xi)\,d\xi$$

достаточно показать, что $A_t'(e_\mu) = L(e_\mu)$ для любого $\mu \neq t$. Действительно, для $\mu \neq t$, $z \in \mathbb{C}$ имеем

$$L(e_\mu)(z) = \int_\lambda^z e^{t\xi} e^{\mu(z+\lambda-\xi)}\,d\xi = e^{\mu(z+\lambda)} \int_\lambda^z e^{(t-\mu)\xi}\,d\xi = \frac{e^{\mu z}e^{\lambda t} - e^{zt}e^{\mu\lambda}}{\mu - t} = A_t(e_z)(\mu) = A_t'(e_\mu)(z). \quad \square$$

Введем многочлен переменных t, z:

$$\widetilde{P}(t, z) := \frac{P(t) - P(z)}{t - z}.$$

Пусть $\deg(P) = m \in \mathbb{N}$. Тогда

$$\widetilde{P}(t, z) = \sum_{j=0}^{m-1} p_j(t) z^j, \quad t, z \in \mathbb{C},$$

где p_j — многочлены степени не выше $m-1$. Определим дифференциальные операторы

$$\widetilde{P}(t,D)(f) := \sum_{j=0}^{m-1} p_j(t) f^{(j)}, \quad t \in \mathbb{C}.$$

Лемма 11. *Для любого $t \in \mathbb{C}$ сопряженный к $\widetilde{T}_t$ оператор $\widetilde{T}'_t : H(Q) \to H(Q)$ удовлетворяет равенству*

$$\widetilde{T}'_t(f)(z) = P(t) \int_\lambda^z e^{t\xi} f(z+\lambda-\xi)d\xi - e^{zt}\widetilde{P}(t,D)(f)(\lambda), \quad f \in H(Q). \tag{3}$$

Доказательство. Равенство (3) вытекает из равенства (2) и того факта, что для любого $\mu \neq t$

$$\frac{e^{z\mu}P(t)e^{\lambda t} - e^{zt}P(\mu)e^{\lambda\mu}}{\mu - t} = P(t)\frac{e^{z\mu}e^{\lambda t} - e^{zt}e^{\lambda\mu}}{\mu - t} - \frac{P(\mu)-P(t)}{\mu - t}e^{zt}e^{\lambda\mu} =$$
$$= P(t)A'(e_\mu)(z) - e^{zt}\widetilde{P}(t,D)(e_\mu)(\lambda). \quad \square$$

Найдем далее $\mathcal{J}(\varphi \otimes \psi)$ для $\varphi, \psi \in E'$. Ниже $M' : H(Q) \to H(Q)$ — оператор, сопряженный к оператору $M : E \to E$ умножения на независимую переменную; M' совпадает с оператором дифференцирования (см., например, [2, лемма 21 (ii)]). Положим $\widehat{\varphi} := \mathcal{J}(\varphi)$, $\varphi \in E'$. Заметим, что для любых $h \in H(Q)$, $f \in E$, $\mu \in Q$, $n \geqslant 0$ выполняются равенства

$$\mathcal{J}^{-1}(h)_z(z^n e^{\mu z}) = h^{(n)}(\mu), \quad \mathcal{J}_z^{-1}(z^n e^{\mu z})(f) = f^{(n)}(\mu). \tag{4}$$

Для многочлена $p(t) = \sum\limits_{j=0}^{m} a_j t^j$ положим

$$p(D)(f) := \sum_{j=0}^{m} a_j f^{(j)}.$$

Пусть $\tilde{p}_j(t) := tp_j(t)$, $0 \leqslant j \leqslant m-1$, $t \in \mathbb{C}$.

Для $\varphi, \psi \in E'$ имеем

$$(\widehat{\varphi \otimes \psi})(z) = (\varphi \otimes \psi)(e_z) = \varphi_t(\psi(T_t(e_z))) = \varphi_t(\psi(\widetilde{T}_t(M(e_z)))) = \varphi_t(\langle M'\widetilde{T}'_t(\hat{\psi}), e_z\rangle).$$

По лемме 11

$$M'(\widetilde{T}'_t(\widehat{\psi}))(\tau) = \frac{d}{d\tau}\left(P(t)\int_\lambda^\tau e^{t\xi}\widehat{\psi}(\tau+\lambda-\xi)d\xi - e^{\tau t}\widetilde{P}(t,D)(f)(\lambda)\right)(\tau) =$$
$$= P(t)\left(\widehat{\psi}(\lambda)e^{t\tau} + \int_\lambda^\tau e^{t\xi}\widehat{\psi}'(\tau+\lambda-\xi)d\xi\right) - te^{\tau t}\widetilde{P}(t,D)(f)(\lambda).$$

Отсюда и из равенства (4) следует, что

$$(\widehat{\varphi \otimes \psi})(z) = \widehat{\psi}(\lambda)P(D)(\widehat{\varphi})(z) + \int_\lambda^z P(D)(\widehat{\varphi})(\xi)\widehat{\psi}'(z+\lambda-\xi)d\xi - \varphi_t\Big(te^{zt}\widetilde{P}(t,D)(f)(\lambda)\Big) =$$
$$= \widehat{\psi}(\lambda)P(D)(\widehat{\varphi})(z) + \int_\lambda^z P(D)(\widehat{\varphi})(\xi)\widehat{\psi}'(z+\lambda-\xi)d\xi - \sum_{j=0}^{m-1}\widetilde{p}_j(D)(\widehat{\varphi})(z)(\widehat{\psi})^{(j)}(\lambda).$$

При этом z принадлежит объединению таких выпуклых областей G_n, $n \in \mathbb{N}$, что $Q_n \subset G_n$ и функции $\widetilde{\psi}$, $\widetilde{\varphi}$ аналитичны в каждой области G_n (объединение $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} G_n$ — звездная область относительно 0).

Таким образом, умножение $\otimes$ в E' реализуется в виде умножения в $H(Q)$ следующим образом:

$$f * h(z) = h(\lambda)P(D)(f)(z) + \int_{\lambda}^{z} P(D)(f)(\xi)h'(z+\lambda-\xi)d\xi - \sum_{j=0}^{m-1} \widetilde{p}_j(D)(f)(z)h^{(j)}(\lambda).$$

Пространство $H(Q)$ с умножением $*$ является алгеброй. Опишем собственные замкнутые идеалы в ней. Пусть μ_k, $1 \leqslant k \leqslant s$, — все попарно различные нули P, m_j — кратность нуля μ_j. Для любого $l = (l_j)_{j=1}^{s}$, для которого $0 \leqslant l_j \leqslant m_j$, положим

$$q_l(z) := \prod_{j=1}^{s} (z-\mu_j)^{l_j}.$$

Для конечного множества $\Delta \subset \mathbb{N}$, множеств $M_j \subset H(Q)$ символом $\bigoplus\limits_{j\in\Delta} M_j$ обозначим сумму множеств M_j, $j \in \Delta$. Учитывая теорему 2 и лемму 1, получим следующий результат.

Теорема 3.

(i) *Для любого непустого подмножества Δ множества $\{j \in \mathbb{N} \mid 1 \leqslant j \leqslant s\}$, любых l_j, удовлетворяющих условию $0 \leqslant l_j \leqslant m_j - 1$, $j \in \Delta$, множества*

$$I_{\Delta,l} := \bigoplus_{j\in\Delta} \left(e_{\mu_j}\mathbb{C}[z]_{l_j}\right)$$

являются собственными замкнутыми идеалами в $(H(Q), *)$.

(ii) *Для любых l_j, $1 \leqslant j \leqslant s$, и $n \geqslant 0$, удовлетворяющих условиям*

$$0 \leqslant l_j \leqslant m_j - 1, \quad n \geqslant m - \sum_{j=1}^{s} l_j - 1,$$

множества

$$I_{q_l,n} := \left\{ h \in H(Q) \;\middle|\; q_l(D)(h^{(k)})(\mu_j) = 0,\ 0 \leqslant k \leqslant n \right\}$$

являются собственными замкнутыми идеалами в $(H(Q), *)$.

(iii) *Для любого собственного замкнутого идеала L выполняется следующая альтернатива: либо существуют такие непустое подмножество Δ множества $\{j \in \mathbb{N} \mid 1 \leqslant j \leqslant s\}$ и число l_j, $j \in \Delta$, что $0 \leqslant l_j \leqslant m_j - 1$, для которых $L = I_{\Delta,l}$, либо найдутся такие числа l_j, $1 \leqslant j \leqslant s$, и $n \geqslant 0$, что $1 \leqslant l_j \leqslant m_j$ и $n \geqslant m - \sum\limits_{j=1}^{s} l_j - 1$, для которых $L = I_{q_l,n}$.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Иванова О. А., Мелихов С. Н.* Об интерполирующей функции А. Ф. Леонтьева// Уфим. мат. ж. — 2014. — *6*, № 3. — С. 17–27.
2. *Иванова О. А., Мелихов С. Н.* Об операторах, перестановочных с оператором типа Поммье в весовых пространствах целых функций// Алгебра и анализ — 2016. — *28*, № 2. — С. 114–137.
3. *Красичков-Терновский И. Ф.* Инвариантные подпространства аналитических функций. I. Спектральный синтез на выпуклых областях// Мат. сб. — 1972. — *87 (129)*, № 4. — С. 459–489.
4. *Ткаченко В. А.* Инвариантные подпространства и одноклеточность операторов обобщенного интегрирования в пространствах аналитических функционалов// Мат. заметки. — 1977. — *22*, № 2. — С. 613–618.
5. *Ткаченко В. А.* Об операторах, коммутирующих с обобщенным интегрированием в пространствах аналитических функционалов// Мат. заметки. — 1979. — *25*, № 2. — С. 271–282.
6. *Эдвардс Р.* Функциональный анализ. Теория и приложения. — М.: Мир, 1969.
7. *Bonet J., Meise R., Melikhov S. N.* The dual of the space of holomorphic functions on locally closed convex sets// Publ. Mat. — 2005. — *49*. — С. 487–509.
8. *Ivanova O. A., Melikhov S. N.* On the completeness of orbits of a Pommiez operator in weighted (LF)-spaces of entire functions/ `http://arxiv.org/abs/1608.03850`
9. *Martineau A.* Sur la topologie des espaces de functions holomorphes// Math. Ann. — 1966. — *163*. — С. 62–88.

10. *Melikhov S. N., Momm S.* Analytic solutions of convolution equations on convex sets with an obstacle in the boundary// Math. Scand. — 2000. — *86*, № 4. — С. 293–319.
11. *Pommiez M.* Sur les zéros des reste successifs des séries de Taylor// Acad. Sci. Univ. Toulouse. — 1960. — *250*, № 7. — С. 1168–1170.
12. *Pommiez M.* Sur les restes successifs des séries de Taylor// C. R. Acad. Sci. — 1960. — *250*, № 15. — С. 2669–2671.
13. *Pommiez M.* Sur les restes et les dérivées des séries de Taylor// C. R. Acad. Sci. — 1960. — *251*, № 17. — С. 1707–1709.

О. А. Иванова
Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону
E-mail: `ivolga@sfedu.ru`

С. Н. Мелихов
Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону;
Южный математический институт Владикавказского научного центра РАН, Владикавказ
E-mail: `melih@math.rsu.ru`