ISSN 0233-6723

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ

СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Тематические обзоры

Том 141

Москва 2017

ISSN 0233–6723

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

ВСЕРОССИЙСКИЙ ИНСТИТУТ
НАУЧНОЙ И ТЕХНИЧЕСКОЙ ИНФОРМАЦИИ
(ВИНИТИ РАН)

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ

СЕРИЯ
СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

ТЕМАТИЧЕСКИЕ ОБЗОРЫ

Том 141

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ. СПЕКТРАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ

Москва 2017

СОДЕРЖАНИЕ

Идентификация нераспадающихся краевых условий
(*А. М. Ахтямов, А. В. Муфтахов*) 3

Оценка начальных масштабов для слоев с малыми случайными отрицательно определенными возмущениями
(*Д. И. Борисов*) 13

Сходимость собственных элементов задачи типа Стеклова в полуполосе с малым отверстием
(*Д. Б. Давлетов, О. Б. Давлетов*) 42

Об условиях локализации спектра несамосопряженного оператора Штурма—Лиувилля с медленно растущим потенциалом
(*Л. Г. Валиуллина, Х. К. Ишкин*) 48

Вычисление спектральных характеристик возмущенных самосопряженных операторов методами регуляризованных следов
(*С. И. Кадченко, С. Н. Какушкин*) 61

О разделимости нелинейных дифференциальных операторов второго порядка с матричными коэффициентами в весовом пространстве
(*О. Х. Каримов*) 79

О разделимости оператора Штурма—Лиувилля в весовых пространствах мультипликаторов
(*А. С. Касым, Л. К. Кусаинова*) 86

Характеристические свойства данных рассеяния разрывного уравнения Шрёдингера
(*Х. Р. Мамедов*) 95

Об асимптотике решений некоторых линейных дифференциальных уравнений
(*К. А. Мирзоев, Н. Н. Конечная, Т. А. Сафонова, Р. Н. Тагирова*) 103

Обратные задачи по определению начальных условий в смешанной задаче для телеграфного уравнения
(*К. Б. Сабитов, А. Р. Зайнуллов*) 111

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 141 (2017). С. 3–12

УДК 517.984.54

ИДЕНТИФИКАЦИЯ НЕРАСПАДАЮЩИХСЯ КРАЕВЫХ УСЛОВИЙ

© 2017 г. А. М. АХТЯМОВ, А. В. МУФТАХОВ

Аннотация. Рассматривается задача идентификации нераспадающихся краевых условий задачи по пяти собственным значениям. На основе условий Плюккера, возникающих при восстановлении матрицы по ее минорам максимального порядка, построено множество корректности задачи и доказана корректность ее по А. Н. Тихонову. Построено решение задачи идентификации матрицы нераспадающихся краевых условий, выписанное в терминах характеристического определителя соответствующей спектральной задачи. Приведены соответствующие примеры и контрпример.

***Ключевые слова*:** нераспадающееся краевые условия, спектральная задача, корректность по А. Н. Тихонову, условия Плюккера.

***AMS Subject Classification*:** 34A55, 34B09

1. Постановка задачи. Различным вопросам решения некорректных задач посвящены работы [8–11, 26, 27]. Обратные спектральные задачи рассматривались в работах [1–7, 12, 14, 16, 17, 19–25, 30, 32–36].

Первой работой, посвященной изучению обратной несамосопряженной задачи с неизвестными (нераспадающимися) краевыми условиями была статья В. А. Садовничего [19], в которой было показано, что в случае уравнения вида

$$-y'' + q(x)y = \lambda y$$

для однозначности восстановления функции $q(x)$ и коэффициентов нераспадающихся краевых условий требуется три спектра связанных между собой задач и другие дополнительные спектральные данные. Впоследствии восстановлению коэффициентов дифференциального уравнения и нераспадающихся краевых условий посвятили свои работы М. Г. Гасымов, И. М. Гусейнов, И. М. Набиев, О. А. Плаксина, В. А. Юрко, Б. Е. Кангужин и другие авторы (см. [1–6, 16, 17, 21–24, 30, 34–36]).

Были изучены и неполные обратные задачи — задачи восстановления только краевых условий (подробнее см. [3]). Так, в [2] были рассмотрены две краевые спектральные задачи, порожденные одним общим уравнением

$$l(y,\lambda) = \frac{d^2y}{dx^2} + p_1(x,\lambda)\frac{dy}{dx} + p_2(x,\lambda)y = 0, \tag{1}$$

и различными краевыми условиями:

$$U_j(y) = \sum_{k=1}^{2} \left(a_{jk} y^{(k-1)}(0) + a_{j,k+n} y^{(k-1)}(1) \right) = 0, \quad j = 1,2, \tag{2}$$

$$\widetilde{U}_j(y) = \sum_{k=1}^{2} \left(\widetilde{a}_{jk} y^{(k-1)}(0) + \widetilde{a}_{j,k+n} y^{(k-1)}(1) \right) = 0, \quad j = 1,2, \tag{3}$$

Работа выполнена при поддержке Совета по грантам Президента РФ (проект НШ-7461.2016.1), Российского фонда фундаментальных исследований (проекты т 15-01-01095а, 14-01-97010р-Поволжье-а) и Министерства образования и науки РФ (проект т 2561 в рамках базовой части государственного задания в сфере научной деятельности).

ISSN 0233–6723

где λ — спектральный параметр, $x \in [0,1]$,

$$p_1(x,\lambda) = \lambda p_{10} + p_{11}(x), \quad p_2(x,\lambda) = \lambda^2 p_{20} + \lambda p_{21}(x) + p_{22}(x),$$
$$p_{i1}(x) \in C^1[0,1], \quad p_{22}(x) \in C[0,1], \quad p_{i0} = \mathrm{const}, \quad i = 1,2,$$
$$\mathrm{rank}(a_{jk})_{2\times 4} = \mathrm{rank}(a_{jk})_{2\times 4} = 2, \quad a_{jk},\ \widetilde{a}_{jk} \in \mathbb{C}, \quad j = 1,2, \quad k = 1,2,3,4.$$

Теорема 1 (см. [2])**.** *Если собственные значения краевых задач* (1),(2) *и* (1), (3) *совпадают с учетом их кратностей и, кроме того, если выполнены следующие три условия*:

1) $p_{10}^2 - 4p_{20} \neq 0$,
2) $p_{10} \neq 0$,
3) $p_{20} \neq 0$,

то совпадают и сами краевые задачи.

Теорема 1 означает единственность восстановления нераспадающихся краевых условий (2) по всем собственным значениям задачи (1), (2). В [2] была показана и существенность каждого условия теоремы. Заметим, что в классическом случае уравнения Штурма—Лиувилля $-y'' + q(x)y = \lambda^2 y$ с симметрическим потенциалом (например, при $q(x) = 0$) задача идентификации нераспадающихся краевых условий (2) имеет бесконечное число решений.

Ниже показано, что во многих случаях для идентификации условий (2) в качестве входных данных нет необходимости в использовании всех собственных значений; достаточно только пяти из них, удовлетворяющих определенным условиям. Более того, доказано, что задача идентификации нераспадающихся краевых условий по пяти собственным значениям не является корректной по Адамару, но корректна по А. Н. Тихонову.

Обозначим матрицу, составленную из неизвестных коэффициентов a_{lk} краевых условий (2) через A, а ее миноры — через M_{ij} $(1 \leqslant i < j \leqslant 4)$:

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{Vmatrix}, \quad M_{ij} = \begin{vmatrix} a_{1i} & a_{1j} \\ a_{2i} & a_{2j} \end{vmatrix}. \tag{4}$$

Обратная задача формулируется следующим образом: *коэффициенты a_{lk} форм $U_l(y)$, $l = 1,2$, задачи* (1), (2) *неизвестны;* $\mathrm{rank}\, A = 2$; *известны собственные значения λ_m задачи* (1), (2). *Требуется найти краевые условия $U_l(y)$, $l = 1,2$, т.е. восстановить матрицу A вида* (4) *с точностью до линейных преобразований строк.*

Отыскание решения задачи будем искать в два этапа. На первом этапе найдем миноры M_{12}, M_{13}, M_{14}, M_{23}, M_{24}, M_{34} матрицы A. На втором этапе по этим значениям найдем саму матрицу A с точностью до линейных преобразований ее строк.

2. Условие Плюккера и множество корректности. Условия Плюккера возникают при отыскании рангового подпространства по его направляющему бивектору (см. [18]). Их можно также интерпретировать в терминах проективной геометрии, как условия, возникающие при отыскании проективной прямой по координатам Плюккера (см. [13,29]), а также в терминах грассмановой алгебры как плюккеровы условия простоты грассманового агрегата (см. [28]). Однако нам представляется более правильным не прибегать к дополнительной терминологии. В настоящей статье предлагается другой подход к условиям Плюккера как к условиям, возникающим при восстановлении (с точностью до линейных преобразований строк) матрицы по ее минорам максимального порядка. При этом новым является запись искомой матрицы непосредственно с помощью миноров, а не через систему уравнений, как это делается обычно. Такой подход делает условие Плюккера более наглядным и позволяет предъявить явное решение задачи отыскания краевых условий.

Теорема 2. *Пусть* $\mathrm{rank}\, A = 2$. *Чтобы матрицу*

$$\widetilde{A} = \begin{Vmatrix} \widetilde{a}_{11} & \widetilde{a}_{12} & \widetilde{a}_{13} & \widetilde{a}_{14} \\ \widetilde{a}_{21} & \widetilde{a}_{22} & \widetilde{a}_{23} & \widetilde{a}_{24} \end{Vmatrix}$$

можно было получить из матрицы A с помощью невырожденного линейного преобразования строк необходимо и достаточно, чтобы наборы миноров второго порядка этих матриц совпадали с точностью до ненулевого множителя, не зависящего от индексов.

Доказательство. Необходимость. Итак, пусть матрицу $\widetilde{A}$ можно получить из матрицы A (см. (4)) с помощью линейного преобразования строк, т.е. существует такая невырожденная матрица S размера 2×2, что $\widetilde{A} = S \cdot A$, где $\det S = k \neq 0$. Тогда для всех подматриц $\widetilde{A}_{i_1 i_2}$ и $A_{i_1 i_2}$ размера 2×2 матриц $\widetilde{A}$ и A верно соотношение

$$\widetilde{A}_{i_1 i_2} = S \cdot A_{i_1 i_2},$$

где $1 \leqslant i_1 < i_2 \leqslant 4$. Следовательно,

$$\widetilde{M}_{i_1 i_2} = \det \widetilde{A}_{i_1 i_2} = \det (S \cdot A_{i_1 i_2}) = \det S \cdot \det A_{i_1 i_2} = k \cdot M_{i_1 i_2},$$

что и требовалось доказать.

Достаточность. Пусть $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2)$ — набор строк матрицы A, а $(\widetilde{\boldsymbol{a}}_1, \widetilde{\boldsymbol{a}}_2)$ — набор строк матрицы $\widetilde{A}$. Нетрудно видеть, что для того, чтобы матрицу $\widetilde{A}$ можно было получить из матрицы A с помощью линейного преобразования строк, необходимо и достаточно, чтобы $\mathrm{Span}\,(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2) = \mathrm{Span}\,(\widetilde{\boldsymbol{a}}_1, \widetilde{\boldsymbol{a}}_2)$. Найдем условие, при котором вектор-строка $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ лежит в $\mathrm{Span}\,(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2)$. Для этого рассмотрим следующую матрицу размера 3×4:

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{Vmatrix}.$$

Для того, чтобы $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ лежал в $\mathrm{Span}\,(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2)$, необходимо и достаточно, чтобы все миноры третьего порядка данной матрицы равнялись нулю. Отсюда получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} M_{23}\, x_1 - M_{13}\, x_2 + M_{12}\, x_3 = 0, \\ M_{24}\, x_1 - M_{14}\, x_2 + M_{12}\, x_4 = 0, \\ M_{34}\, x_1 - M_{14}\, x_3 + M_{13}\, x_4 = 0, \\ M_{34}\, x_2 - M_{24}\, x_3 + M_{23}\, x_4 = 0. \end{cases} \tag{5}$$

Ранг этой системы равен 2, так как $\dim \mathrm{Span}\,(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2) = 2$. Без ограничения общности будем считать, что $M_{12} \neq 0$. Тогда

$$\begin{cases} M_{23}\, x_1 - M_{13}\, x_2 + M_{12}\, x_3 = 0, \\ M_{24}\, x_1 - M_{14}\, x_2 + M_{12}\, x_4 = 0. \end{cases} \tag{6}$$

Отсюда получим два линейно независимых решения

$$\boldsymbol{x}_1 = \left(1,\ 0,\ -\frac{M_{23}}{M_{12}},\ -\frac{M_{24}}{M_{12}}\right), \quad \boldsymbol{x}_2 = \left(0,\ 1,\ \frac{M_{13}}{M_{12}},\ \frac{M_{14}}{M_{12}}\right),$$

по которым можно построить матрицу A:

$$A = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & -\dfrac{M_{23}}{M_{12}} & -\dfrac{M_{24}}{M_{12}} \\ 0 & 1 & \dfrac{M_{13}}{M_{12}} & \dfrac{M_{14}}{M_{12}} \end{Vmatrix}.$$

Проделаем тоже самое с матрицей $\widetilde{A}$. Так как наборы миноров максимального порядка этих матриц совпадают с точностью до ненулевого множителя, не зависящего от индексов, то соответствующие системы линейных однородных уравнений эквивалентны, а значит,

$$\mathrm{Span}\,(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2) = \mathrm{Span}\,(\widetilde{\boldsymbol{a}}_1, \widetilde{\boldsymbol{a}}_2)\,.$$

Отсюда следует, что матрицу $\widetilde{A}$ можно получить из матрицы A с помощью линейного преобразования строк, что и требовалось доказать. □

Заметим, что, решая систему (5), можно восстановить матрицу A по ее минорам второго порядка с точностью до линейного преобразования строк.

Действительно, ранг матрицы A равен двум. Без ограничения общности будем считать, что $M_{12} \neq 0$; тогда матрицу A с помощью линейных преобразований можно свести к следующей матрице:

$$\widetilde{A} = \left\| \begin{matrix} 1 & 0 & -\dfrac{M_{23}}{M_{12}} & -\dfrac{M_{24}}{M_{12}} \\ 0 & M_{12} & M_{13} & M_{14} \end{matrix} \right\|. \tag{7}$$

Обратим внимание, что в записи матрицы $\widetilde{A}$ не используется минор M_{34}. Его можно вычислить:

$$M_{34} = \begin{vmatrix} -\dfrac{M_{23}}{M_{12}} & -\dfrac{M_{24}}{M_{12}} \\ M_{13} & M_{14} \end{vmatrix} = \frac{-M_{23}M_{14} + M_{24}M_{13}}{M_{12}}.$$

Это значит, что если

$$M_{34}M_{12} \neq -M_{23}M_{14} + M_{24}M_{13},$$

то восстановить матрицу по данным минорам невозможно, поскольку таковой не существует.

Условие $M_{12} \neq 0$ не является существенным. К такому же неравенству придем, когда отличен от нуля другой минор второго порядка матрицы A.

Отсюда вытекает следующее утверждение.

Теорема 3 (условие Плюккера). *Для того чтобы набор чисел M_{12}, M_{13}, M_{14}, M_{23}, M_{24}, M_{34} являлся набором миноров второго порядка некоторой матрицы A размера 2×4 и ранга 2, необходимо и достаточно выполнение следующего соотношения, называемого соотношением Плюккера*:

$$M_{12}M_{34} - M_{13}M_{24} + M_{14}M_{23} = 0. \tag{8}$$

3. Корректность по А. Н. Тихонову поставленной задачи. Пусть λ_m, $m = \overline{1,5}$, — собственные значения задачи (1), (2). Общее решение уравнения (1) имеет вид:

$$y(x,\lambda) = C_1 y_1(x,\lambda) + C_2 y_2(x,\lambda), \tag{9}$$

где $y_1(x) = y_1(x,\lambda)$ и $y_2(x) = y_2(x,\lambda)$ — линейно независимые решения уравнения (1), удовлетворяющие условиям $y_n^{(k-1)}(0) = \delta_{nk}$, $n,k = 1,2$.

Для определения констант C_i, $i = 1,2$, используем краевые условия (2). Подставим (9) в краевые условия (2), получим следующую систему уравнений:

$$C_1 U_l(y_1) + C_2 U_l(y_2) = 0, \quad l = 1,2.$$

Ненулевое решение для C_i, $i = 1,2$, существует тогда и только тогда, когда равен нулю определитель (см. [15, с. 1–16]):

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} U_1(y_1) & U_1(y_2) \\ U_2(y_1) & U_2(y_2) \end{vmatrix} \tag{10}$$

соответствующей системы. Преобразовывая (10), получим

$$\Delta(\lambda) = M_{12}f_{12}(\lambda) + M_{13}f_{13}(\lambda) + M_{14}f_{14}(\lambda) + M_{23}f_{23}(\lambda) + M_{24}f_{24}(\lambda) + M_{34}f_{34}(\lambda). \tag{11}$$

Здесь

$$\begin{cases} f_{12}(\lambda) = y_1(0)\,y_2'(0) - y_1'(0)\,y_2(0), & f_{13}(\lambda) = y_1(0)\,y_2(1) - y_1(1)\,y_2(0), \\ f_{14}(\lambda) = y_1(0)\,y_2'(1) - y_1'(1)\,y_2(0), & f_{23}(\lambda) = y_1'(0)\,y_2(1) - y_1(1)\,y_2'(0), \\ f_{24}(\lambda) = y_1'(1)\,y_2'(0) - y_1'(0)\,y_2'(1), & f_{34}(\lambda) = y_1(1)\,y_2'(1) - y_1'(1)\,y_2(1). \end{cases} \tag{12}$$

Подставим значения λ_m, $m = \overline{1,5}$, в (11), получим систему из 5 однородных уравнений от 6 неизвестных M_{ij}:

$$M_{12}f_{12}(\lambda_m) + M_{13}f_{13}(\lambda_m) + M_{14}f_{14}(\lambda_m) + M_{23}f_{23}(\lambda_m) + M_{24}f_{24}(\lambda_m) + M_{34}f_{34}(\lambda_m) = 0, \tag{13}$$

где $m = \overline{1,5}$, а $f_{ij}(\lambda_m)$, $i = 1,2,3$, $j = 2,3,4$, $i < j$, определены формулой (12).

Нетрудно показать, что если матрица

$$F = \left\| \begin{matrix} f_{12}(\lambda_1) & f_{13}(\lambda_1) & f_{14}(\lambda_1) & f_{23}(\lambda_1) & f_{24}(\lambda_1) & f_{34}(\lambda_1) \\ f_{12}(\lambda_2) & f_{13}(\lambda_2) & f_{14}(\lambda_2) & f_{23}(\lambda_2) & f_{24}(\lambda_2) & f_{34}(\lambda_2) \\ f_{12}(\lambda_3) & f_{13}(\lambda_3) & f_{14}(\lambda_3) & f_{23}(\lambda_3) & f_{24}(\lambda_3) & f_{34}(\lambda_3) \\ f_{12}(\lambda_4) & f_{13}(\lambda_4) & f_{14}(\lambda_4) & f_{23}(\lambda_4) & f_{24}(\lambda_4) & f_{34}(\lambda_4) \\ f_{12}(\lambda_5) & f_{13}(\lambda_5) & f_{14}(\lambda_5) & f_{23}(\lambda_5) & f_{24}(\lambda_5) & f_{34}(\lambda_5) \end{matrix} \right\|. \tag{14}$$

системы уравнений (13) имеет ранг 5, то из этой системы уравнений набор чисел M_{ij} находится однозначно с точностью до множителя t, не зависящего от индексов:

$$\begin{cases} M_{12} = F_{12}t, \quad M_{13} = -F_{13}t, \quad M_{14} = F_{14}t, \\ M_{23} = -F_{23}t, \quad M_{24} = F_{24}t, \quad M_{34} = -F_{34}t, \end{cases} \quad t \in \mathbb{C}, \tag{15}$$

где F_{ij} — минор матрицы F, получаемый вычеркиванием столбца с элементами $f_{ij}(\lambda_m)$, $m = \overline{1,5}$. (Действительно, если, например, $F_{12} \neq 0$, то положив $M_{12} = t$ и считая $-M_{12}f_{12}(\lambda_m)$ «свободными членами» уравнений системы (12), из формул Крамера и теоремы 2 получим (15).)

Уравнение (15) представляет собой явное решение отыскания миноров M_{12}, M_{13}, M_{14}, M_{23}, M_{24}, M_{34} по собственным значениям λ_m, $m = \overline{1,5}$.

Для того, чтобы говорить о единственности решения, будем требовать выполнения условия

$$\begin{array}{l} \text{один из миноров } M_{12}, M_{13}, M_{14}, M_{23}, M_{24}, M_{34} \text{ равен единице,} \\ \text{а остальные по модулю не больше единицы.} \end{array} \tag{16}$$

Это условие будем называть *условием каноничности.*

Если числа λ_m, $m = \overline{1,5}$, а значит, и F_{ij}, даны приближенно, то, вообще говоря, найденные по формуле (15) значения M_{12}, M_{13}, M_{14}, M_{23}, M_{24}, M_{34} могут не быть минорами матрицы A. Это связано с тем, что может не выполняться условие Плюккера.

Будем называть *множеством корректности* M такой набор миноров

$$v = \big(M_{12}, M_{13}, M_{14}, M_{23}, M_{24}, M_{34}\big),$$

для которого выполнены условия (8) и (16). Из определения вытекает, что M является компактом.

С помощью введенного множества корректности нетрудно показать корректность по А. Н. Тихонову задачи отыскания миноров матрицы A по значениям λ_m, $m = \overline{1,5}$, для которых система уравнений (13) имеет ранг 5.

Пусть V — это пространство $\mathbb{C}^6$ элементов $v = (M_{12}, M_{13}, M_{14}, M_{23}, M_{24}, M_{34})$ с нормой

$$\|v\| = \max\Big(|M_{12}|,\ |M_{13}|,\ |M_{14}|,\ |M_{23}|,\ |M_{24}|,\ |M_{34}|\Big);$$

Λ — это пространство $\mathbb{C}^5$ элементов $z = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5)$ с аналогичной нормой, образ множества M в пространстве Λ при отображении с помощью неявной функции R, задаваемой равенствами (11), есть множество Z, т.е. $Z = RM$.

Задача $Rv = z$ удовлетворяет следующим условиям:

1) для точно заданных $z = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5)$ существует единственное решение задачи принадлежащее компакту M пространства V;
2) для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для любых $z, \widetilde{z} \in \Lambda = RM$ и таких, что $\|z - \widetilde{z}\|_Z < \delta$, выполнено неравенство $\|v - \widetilde{v}\|_V < \varepsilon$.

Второе условие вытекает из двукратной непрерывной дифференцируемости $f_{ij}(\lambda)$ по λ. Поэтому задача $Rv = z$ является *корректной по А. Н. Тихонову* (см. [8–10]).

4. Метод канонических краевых условий. Наиболее известны два метода решения корректных по А. Н. Тихонову задач: метод квазирешения и метод подбора.

Метод квазирешения для идентификации краевых условий был применен в работе авторов [31]. Ввиду того, что M_{ij} являются комплексными числами, метод квазирешения, основанный на поиске условного минимума выражения $\|v - \widetilde{v}\|_V$ при условиях (8) и (16) для нашей задачи, оказывается громоздким.

В настоящей статье предлагается метод решения идентификации краевых условий, который по сути представляет собой метод подбора. При применении этого метода использована идея записи матрицы A в терминах матрицы F.

Пусть λ_m, $m = \overline{1,5}$, — точные собственные значения задачи (1), (2) и априори известно, что искомая матрица A существует, все F_{ij} найдены точно и $F_{12} \neq 0$. Тогда условия (8) выполнены, $M_{12} \neq 0$, а сама матрица A имеет вид (7). Если дополнительно известно, что F_{12} является наибольшим по модулю минором третьего порядка матрицы F, то из (7) и (15) получаем, что M_{12} является наибольшим по модулю минором матрицы A, а сама матрица A с точностью до линейных преобразований строк может быть записана следующим образом:

$$\widetilde{A} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & -\dfrac{M_{23}}{M_{12}} & -\dfrac{M_{24}}{M_{12}} \\ 0 & 1 & \dfrac{M_{13}}{M_{12}} & \frac{M_{14}}{M_{12}} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & \dfrac{F_{23}}{F_{12}} & -\dfrac{F_{24}}{F_{12}} \\ 0 & 1 & -\dfrac{F_{13}}{F_{12}} & \dfrac{F_{14}}{F_{12}} \end{Vmatrix}, \tag{17}$$

причем ее миноры лежат в множестве корректности M. Все условия корректности по А. Н. Тихонову выполнены, в том числе и третье. Действительно, для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для любых

$$z = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5), \quad \widetilde{z} = (\widetilde{\lambda}_1, \widetilde{\lambda}_2, \widetilde{\lambda}_3, \widetilde{\lambda}_4, \widetilde{\lambda}_5) \in \Lambda = RM$$

и таких, что

$$\|z - \widetilde{z}\|_{\mathbb{C}^5} < \delta,$$

выполнено неравенство

$$\left\| \bigl(F_{12}, F_{13}, F_{14}, F_{23}, F_{24}, F_{34}\bigr) - \bigl(\widetilde{F}_{12}, \widetilde{F}_{13}, \widetilde{F}_{14}, \widetilde{F}_{23}, \widetilde{F}_{24}, \widetilde{F}_{34}\bigr) \right\|_{\mathbb{C}^6} < \varepsilon.$$

Последнее вытекает из двукратной непрерывной дифференцируемости (а значит, и непрерывности) функций $f_{ij}(\lambda)$ по параметру λ.

Если числа λ_1, λ_2, λ_3, λ_4, λ_5, а значит, и F_{ij} даны приближенно, то равенство (8) может не выполняться, и поэтому формально по минорам F_{ij} матрицу A построить невозможно. Однако в записи (17) для матрицы A не используется минор F_{34}, поэтому если $F_{12} \neq 0$, то его значение нам фактически не нужно. Если F_{12} является наибольшим по модулю минором второго порядка матрицы F, то матрицу (17) можно считать приближенным решением задачи идентификации матрицы A. Причем, как следует из вышеизложенного, чем ближе числа λ_1, λ_2, λ_3, λ_4, λ_5 к точным, тем ближе к точным значениям и элементы матрицы A.

Аналогично с помощью равенств (5) и (15) можно выписать явные приближенные решения матрицы A в случаях, если наибольшим по модулю минором второго порядка матрицы F является не F_{12}, а другой минор матрицы F.

Если F_{13} является наибольшим по модулю минором матрицы F, то

$$\widetilde{A} = \begin{Vmatrix} 1 & \dfrac{M_{23}}{M_{13}} & 0 & -\dfrac{M_{34}}{M_{13}} \\ 0 & \dfrac{M_{12}}{M_{13}} & 1 & \dfrac{M_{14}}{M_{13}} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & \dfrac{F_{23}}{F_{13}} & 0 & -\dfrac{F_{34}}{F_{13}} \\ 0 & -\dfrac{F_{12}}{F_{13}} & 1 & -\dfrac{F_{14}}{F_{13}} \end{Vmatrix}; \tag{18}$$

если таковым является F_{14}, то

$$\widetilde{A} = \begin{Vmatrix} 1 & \dfrac{M_{24}}{M_{14}} & \dfrac{M_{34}}{M_{14}} & 0 \\ 0 & \dfrac{M_{12}}{M_{14}} & \dfrac{M_{13}}{M_{14}} & 1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & \dfrac{F_{24}}{F_{14}} & -\dfrac{F_{34}}{F_{14}} & 0 \\ 0 & \dfrac{F_{12}}{F_{14}} & -\dfrac{F_{13}}{F_{14}} & 1 \end{Vmatrix}; \tag{19}$$

если F_{23}, то

$$\widetilde{A} = \begin{Vmatrix} \dfrac{M_{13}}{M_{23}} & 1 & 0 & -\dfrac{M_{34}}{M_{23}} \\ -\dfrac{M_{12}}{M_{23}} & 0 & 1 & \dfrac{M_{24}}{M_{23}} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \dfrac{F_{13}}{F_{23}} & 1 & 0 & -\dfrac{F_{34}}{F_{23}} \\ \dfrac{F_{12}}{F_{23}} & 0 & 1 & -\dfrac{F_{24}}{F_{23}} \end{Vmatrix}; \tag{20}$$

если F_{24}, то

$$\widetilde{A} = \left\| \begin{matrix} \dfrac{M_{14}}{M_{24}} & 1 & \dfrac{M_{34}}{M_{24}} & 0 \\ -\dfrac{M_{12}}{M_{24}} & 0 & \dfrac{M_{23}}{M_{24}} & 1 \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} \dfrac{F_{14}}{F_{24}} & 1 & -\dfrac{F_{34}}{F_{24}} & 0 \\ -\dfrac{F_{12}}{F_{24}} & 0 & -\dfrac{F_{23}}{F_{24}} & 1 \end{matrix} \right\|; \tag{21}$$

если F_{34}, то

$$\widetilde{A} = \left\| \begin{matrix} \dfrac{M_{14}}{M_{34}} & \dfrac{M_{24}}{M_{34}} & 1 & 0 \\ -\dfrac{M_{13}}{M_{34}} & -\dfrac{M_{23}}{M_{34}} & 0 & 1 \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} -\dfrac{F_{14}}{F_{34}} & -\dfrac{F_{24}}{F_{34}} & 1 & 0 \\ -\dfrac{F_{13}}{F_{34}} & -\dfrac{F_{23}}{F_{34}} & 0 & 1 \end{matrix} \right\|. \tag{22}$$

Таким образом, верна следующая теорема.

Теорема 4. *Если λ_1, λ_2, λ_3, λ_4, λ_5 являются собственными значениями краевой задачи* (1), (2), $\operatorname{rank} F = 5$, *то задача отыскания матрицы A по собственным значениям λ_1, λ_2, λ_3, λ_4, λ_5 является корректной по А. Н. Тихонову. Множеством корректности решения этой задачи является компакт M, определенный уравнениями* (8) *и* (16). *Явное представление решения задачи дается в терминах матрицы F. В зависимости от того, какой из миноров F_{12}, F_{13}, F_{14}, F_{23}, F_{24}, или F_{34} является наибольшим по модулю, решение дается соответственно одной из матриц* (17), (18), (19), (20), (21) *или* (22).

Краевые условия, соответствующие матрицам (17), (18), (19), (20), (21) или (22), будем называть *каноническими.*

5. Примеры.

Пример 1. Рассмотрим следующую спектральную задачу:

$$l(y) = y''(x) - 3i\lambda y'(x) - 2\lambda^2 y(x) = 0, \quad i = \sqrt{-1}, \tag{23}$$

$$U_l(y) = \sum_{k=1}^{2} \Big(a_{lk} y^{(k-1)}(0) + a_{l,k+2} y^{(k-1)}(1) \Big) = 0, \quad l = 1, 2. \tag{24}$$

Пусть известны 5 собственных значений задачи (23), (24) с точностью до 10 значащих цифр:

$$\lambda_1 = 5{,}693280894 - 0{,}6736886741 \cdot i, \qquad \lambda_2 = 11{,}97646620 - 0{,}6736886741 \cdot i,$$
$$\lambda_3 = 34{,}55751919 + 1{,}347377348 \cdot i, \qquad \lambda_4 = 63{,}42175748 - 0{,}6736886742 \cdot i,$$
$$\lambda_5 = 99{,}94106050 - 0{,}6736886742 \cdot i.$$

Требуется найти матрицу $A = \|a_{ij}\|$ краевых условий (24).

Линейно независимыми решениями уравнения (23), удовлетворяющими условиям

$$y_j^{(r-1)}(0, \lambda) = \begin{cases} 0, & \text{при } j \neq r, \\ 1, & \text{при } j = r, \end{cases} \qquad j, r = 1, 2,$$

будут следующие функции:

$$y_1(\lambda) = 2\exp(i\lambda x) - \exp(2i\lambda x), \quad y_2(\lambda) = -\frac{i}{\lambda}\big(-\exp(i\lambda x) + \exp(2i\lambda x)\big).$$

Поэтому характеристический определитель имеет вид (11), где

$$f_{12} = 1, \quad f_{13} = -i\frac{1}{\lambda}\left(-\exp(i\lambda) + \exp(2i\lambda)\right), \quad f_{14} = \exp(i\lambda) - 2\exp(2i\lambda),$$
$$f_{23} = 2\exp(i\lambda) + \exp(2i\lambda), \quad f_{24} = 2i\lambda\big(\exp(i\lambda) - \exp(2i\lambda)\big), \quad f_{34} = \exp(3i\lambda).$$

Ранг матрицы (14) равен 5. Вычислим миноры F_{ij} матрицы F:

$$F_{12} = -138{,}7813102 + 2882{,}796470\, i, \qquad F_{13} = -0{,}0002308 + 0{,}0004124\, i,$$
$$F_{14} = -138{,}7812461 + 2882{,}796763\, i, \qquad F_{23} = -138{,}7813601 + 2882{,}796258\, i,$$
$$F_{24} = 0{,}1455 \cdot 10^{-6} - 0{,}178 \cdot 10^{-6}\, i, \qquad F_{34} = 138{,}7814026 - 2882{,}796686\, i.$$

Условие Плюккера не выполняется:

$$F_{12}\,F_{34} - F_{13}\,F_{24} + F_{14}\,F_{23} = 0,374 + 0,3260\,i \neq 0.$$

Так как наибольшим по модулю является минор F_{14} ($|F_{14}| = 2886,135376$), то подставив найденные значения в (19), с точностью до 6 знаков после запятой получим требуемую матрицу краевых условий:

$$\widetilde{A} = \left\| \begin{matrix} 1 & \dfrac{F_{24}}{F_{14}} & -\dfrac{F_{34}}{F_{14}} & 0 \\ 0 & \dfrac{F_{12}}{F_{14}} & -\dfrac{F_{13}}{F_{14}} & 1 \end{matrix} \right\| \approx \left\| \begin{matrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{matrix} \right\|.$$

Значит, искомые канонические краевые условия

$$y(0) + y(1) = 0, \quad y'(0) + y'(1) = 0.$$

Пример 2. Рассмотрим спектральную задачу с другим уравнением:

$$l(y) = y''(x) - 3\lambda y'(x) + 2\lambda^2 y(x) = 0, \quad i = \sqrt{-1}, \tag{25}$$

$$U_l(y) = \sum_{k=1}^{2} \Big(a_{lk} y^{(k-1)}(0) + a_{l,k+2} y^{(k-1)}(1) \Big) = 0, \quad l = 1, 2. \tag{26}$$

Пусть известны 5 собственных значений задачи (25), (26) с точностью до 10 значащих цифр:

$$\lambda_1 = 0{,}3339402341 - 2{,}137329143\,i, \qquad \lambda_2 = 0{,}3339402341 + 2{,}137329143\,i,$$
$$\lambda_3 = -0{,}7228558643 - 5{,}653943118\,i, \qquad \lambda_4 = -0{,}7228558643 + 5{,}653943118\,i,$$
$$\lambda_5 = -0{,}5523207258 - 8{,}430691491\,i.$$

Требуется найти матрицу $A = \|a_{ij}\|$ краевых условий (26).

Линейно независимыми решениями уравнения (25), удовлетворяющими условиям

$$y_j^{(r-1)}(0, \lambda) = \begin{cases} 0, & \text{при } j \neq r, \\ 1, & \text{при } j = r, \end{cases} \qquad j, r = 1, 2,$$

будут следующие функции:

$$y_1(\lambda) = 2\exp(\lambda x) - \exp(2\lambda x), \quad y_2(\lambda) = \frac{1}{\lambda}\left(-\exp(\lambda x) + \exp(2\lambda x)\right).$$

Поэтому характеристический определитель имеет вид (11), где

$$f_{12} = 1, \quad f_{13} = \frac{1}{\lambda}\big(-\exp(\lambda) + \exp(2\lambda)\big), \quad f_{14} = \exp(\lambda) - 2\exp(2\lambda),$$
$$f_{23} = -2\exp(\lambda) + \exp(2\lambda), \quad f_{24} = 2\lambda\big(\exp(\lambda) - \exp(2\lambda)\big), \quad f_{34} = \exp(3\lambda).$$

Ранг матрицы (14) равен 5. Вычислим миноры F_{ij} матрицы F:

$$F_{12} = 0{,}29 \cdot 10^{-7} - 0{,}294 \cdot 10^{-7}\,i, \qquad F_{13} = -467{,}7779120 + 93{,}73846877\,i,$$
$$F_{14} = 0{,}1043 \cdot 10^{-6} - 0{,}3051 \cdot 10^{-7}\,i, \qquad F_{23} = 0{,}293 \cdot 10^{-8} + 0{,}186 \cdot 10^{-7}\,i,$$
$$F_{24} = 0{,}792 \cdot 10^{-8} + 0{,}44 \cdot 10^{-8}\,i, \qquad F_{34} = -233{,}8889560 + 46{,}86923426\,i.$$

Условие Плюккера не выполняется:

$$F_{12}\,F_{34} - F_{13}\,F_{24} + F_{14}\,F_{23} = -0,1287573910 \cdot 10^{-5} + 0,9551357242 \cdot 10^{-5}\,i \neq 0.$$

Так как наибольшим по модулю является минор F_{14} ($|F_{13}| = 477,0776409$), то подставив найденные значения в (18), с точностью до 9 знаков после запятой получим требуемую матрицу краевых условий:

$$\widetilde{A} = \left\| \begin{matrix} 1 & \dfrac{F_{23}}{F_{13}} & 0 & -\dfrac{F_{34}}{F_{13}} \\ 0 & -\dfrac{F_{12}}{F_{13}} & 1 & -\dfrac{F_{14}}{F_{13}} \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & -0{,}5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{matrix} \right\|.$$

Значит, искомые канонические краевые условия

$$y(0) + 0{,}5y'(1) = 0, \quad y(1) = 0.$$

6. Контрпример. Приведем пример, показывающий, что условие $\operatorname{rank} F = 5$ является существенным, т.е. если ранг матрицы F меньше 5 или же для восстановления A используется меньше 5 собственных значений, то однозначного восстановления краевых условий может и не быть.

Пример 3. Рассмотрим спектральную задачу из примера 1. Выберем 4 ее собственных значения:

$$\lambda_1 = 5{,}693280894 - 0{,}6736886741\, i, \qquad \lambda_2 = 11{,}97646620 - 0{,}6736886741\, i,$$
$$\lambda_3 = 34{,}55751919 + 1{,}347377348\, i, \qquad \lambda_4 = 63{,}42175748 - 0{,}6736886742\, i.$$

Подставив их в уравнения (13), получим систему 4 линейных однородных уравнений от 6 неизвестных M_{12}, M_{13}, M_{14}, M_{23}, M_{24}, M_{34}, решением которой является следующее множество:

$$M_{13} = C_1, \qquad M_{23} = C_2,$$
$$M_{12} = (0,12623 + 0,19970 \cdot i)\, C_1 - C_2, \qquad M_{14} = (0,39408 + 0,063105 \cdot i)\, C_1 - C_2,$$
$$M_{24} = (0,00716 + 0,00126 \cdot i)\, C_1, \qquad M_{34} = (0,28421 + 0,24703 \cdot i)\, C_1 - C_2,$$

где C_1 и C_2 — произвольные числа, не равные нулю одновременно. В частности, при $C_1 = 0$ и $C_2 = -1$ получаем решение, найденное в примере 1. Однако помимо этого решения получим бесконечное множество других.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ахтямов А. М.* К единственности решения одной обратной спектральной задачи// Диффер. уравн. — 2003. — *8*. — С. 1011–1015.
2. *Ахтямов А. М.* О единственности восстановления краевых условий спектральной задачи по ее спектру// Фундам. прикл. мат. — 2000. — *6*, т 4. — С. 995–1006.
3. *Ахтямов А. М.* Теория идентификации краевых условий и ее приложения. — М.: Физматлит, 2009.
4. *Ахтямов А. М., Муфтахов А. В.* К вопросу об идентификации нераспадающихся краевых условий// Ж. Средневолж. мат. о-ва. — 2012. — *14*, т 2. — С. 40–47.
5. *Гасымов М. Г., Гусейнов И. М., Набиев И. М.* Обратная задача для оператора Штурма—Лиувилля с неразделенными самосопряженными граничными условиями// Сиб. мат. ж. — 1990. — *31*, т 6. — С. 46–54.
6. *Гусейнов И. М., Набиев И. М.* Обратная спектральная задача для пучков дифференциальных операторов// Мат. сб. — 2007. — *198*, т 11. — С. 47–66.
7. *Гусейнов И. М., Набиев И. М.* Решение одного класса обратных краевых задач Штурма—Лиувилля// Мат. сб. — 1995. — *186*, т 5. — С. 35–48.
8. *Денисов А. М.* Введение в теорию обратных задач. — М.: Изд-во МГУ, 1994.
9. *Иванов В. К., Васин В. В., Танана В. П.* Теория линейных некорректных задач и ее приложения. — М.: Наука, 1978.
10. *Лаврентьев М. М.* Теория операторов и некорректные задачи. — Новосибирск: Изд-во Ин-та мат., 1999.
11. *Лаврентьев М. М., Романов В. Г., Шишатский С. П.* Некорректные задачи математической физики и анализа. — М.: Наука, 1980.
12. *Левитан Б. М.* Обратные задачи Штурма—Лиувилля. — М.: Наука. 1984.
13. *Мамфорд Д. Б.* Алгебраическая геометрия. Т. 1. Комплексные многообразия. — М.: Мир, 1979.
14. *Марченко В. А.* Операторы Штурма—Лиувилля и их приложения. — Киев: Наукова думка, 1977.
15. *Наймарк М. А.* Линейные дифференциальные операторы. — М.: Наука, 1969.
16. *Плаксина О. А.* Обратные задачи спектрального анализа для операторов Штурма—Лиувилля с нераспадающимися краевыми условиями, I// Мат. сб. — 1986. — *131*, т 1. — С. 3–26.
17. *Плаксина О. А.* Обратные задачи спектрального анализа для операторов Штурма—Лиувилля с нераспадающимися краевыми условиями, II// Мат. сб. — 1988. — *136*, т 1. — С. 140–159.
18. *Постников М. М.* Линейная алгебра и дифференциальная геометрия. — М.: Наука, 1979.

19. *Садовничий В. А.* Единственность решения обратной задачи в случае уравнения второго порядка с нераспадающимися условиями, регуляризованные суммы части собственных чисел. Факторизация характеристического определителя// Докл. АН СССР. — 1972. — *206*, т 2. — С. 293–296.
20. *Садовничий В. А.* Единственность решения обратной задачи для уравнения второго порядка с нераспадающимися краевыми краевыми условиями// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. мех. — 1974. — т 1. — С. 143–151.
21. *Садовничий В. А., Кангужин Б. И.* О связи между спектром дифференциального оператора с симметрическими коэффициентами и краевыми условиями// Докл. АН СССР. — 1982. — *267*, т 2. — С. 310–313.
22. *Садовничий В. А., Султанаев Я. Т., Ахтямов А. М.* О корректности обратной задачи Штурма—Лиувилля с нераспадающимися краевыми условиями// Докл. РАН. — 2004. — *395*, т 5. — С. 592–595.
23. *Садовничий В. А., Султанаев Я. Т., Ахтямов А. М.* Обобщение теоремы единственности Борга на случай нераспадающихися краевых условий// Докл. РАН. — 2011. — *438*, т 1. — С. 26—29.
24. *Садовничий В. А., Султанаев Я. Т., Ахтямов А. М.* Обратная задача Штурма—Луивилля с нераспадающимися краевыми условиями. — М.: Изд-во МГУ, 2009.
25. *Станкевич И. В.* Об одной обратной задаче спектрального анализа для уравнения Хилла// Докл. АН СССР. — 1970. — *192*, т 1. — С. 34–37.
26. *Тихонов А. Н., Гончарский А. В., Степанов В. В., Ягола А. Г.* Численные методы решения некорректных задач. — М.: Наука, 1990.
27. *Тихонов А. Н., Леонов А. С., Ягола А. Г.* Нелинейные некорректные задачи. — М.: Наука, 1995.
28. *Фиников С. П.* Теория пар конгруэнций. — М.: Гостехиздат, 1956.
29. *Ходж В., Пидо Д.* Методы алгебраической геометрии. Т. 1–3. — М.: ИЛ, 1954–1955.
30. *Юрко В. А.* Обратная задача для дифференциальных операторов второго порядка с регулярными краевыми условиями// Мат. заметки. — 1975. — *18*, т 4. — С. 569–576.
31. *Akhtyamov A. M., Mouftakhov A. V.* Identification of boundary conditions using natural frequencies// Inv. Probl. Sci. Eng. — 2004. — *12*, т 4. — С. 393–408.
32. *Ambarzumian V. A.* Über eine Frage der Eigenwerttheorie// Z. Phys. — 1929. — *53*. — С. 690–695.
33. *Borg G.* Eine Umkehrung der Sturm Liouvilleschen Eigenwertanfgabe. Bestimmung der Differentialgleichung durch die Eigenwarte// Acta Math. — 1946. — *78*, т 1. — С. 1–96.
34. *Efendiev R. F.* Spectral analysis for one class of second-order indefinite non-self-adjoint differential operator pencil// Appl. Anal. — 2011. — *90*, т 12. — С. 1837–1849.
35. *Nizhnik L.* Inverse nonlocal Sturm–Liouville problem// Inv. Probl. — 2010. — *26*. — С. 6–9.
36. *Yurko V. A.* The inverse spectral problems for differential operators with nonseparated boundary conditions// J. Math. Anal. Appl. — 2000. — *250*. — С. 266–289.

А. М. Ахтямов
Башкирский государственный университет, Уфа
E-mail: akhtyamovam@mail.ru

А. В. Муфтахов
Инженерный Академический Колледж им. Сами Шамуна, Израиль
E-mail: muftahov@yahoo.com

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 141 (2017). С. 13–41

УДК 517.958, 517.984, 519.21

ОЦЕНКА НАЧАЛЬНЫХ МАСШТАБОВ ДЛЯ СЛОЕВ С МАЛЫМИ СЛУЧАЙНЫМИ ОТРИЦАТЕЛЬНО ОПРЕДЕЛЕННЫМИ ВОЗМУЩЕНИЯМИ

© 2017 г. **Д. И. БОРИСОВ**

Аннотация. В работе рассматривается оператор Шредингера в многомерном слое с малыми случайными возмущениями. Возмущения распределены по ячейкам периодичности для произвольно выбранной периодической решетки. Каждой ячейке ставится в соответствие случайная величина. Эти случайные величины независимы и одинаково распределены. На каждой ячейке возмущение описывается одним и тем же абстрактным симметричным оператором, который зависит от случайной величины, умноженной на глобальный малый параметр. Рассматривается случай, когда возмущения сдвигают влево край спектра невозмущенного оператора на величину порядка квадрата малого параметра. При таких условиях установлен основной результат — оценка начальных масштабов. Приведены частные примеры, демонстрирующие основной результат.

Ключевые слова: оценка начальных масштабов, малое случайное возмущение, спектр, спектральная локализация.

AMS Subject Classification: 60H25, 82B44, 35P15, 35C20

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение . . . 13
2. Постановка задачи и формулировка результатов . . . 14
3. Примеры . . . 19
4. Нижние оценки для спектров операторов $\mathcal{H}^{\delta}_{\square}$ и $\mathcal{H}^{\varepsilon}(\omega)$ . . . 26
5. Нижняя оценка для спектра оператора $\mathcal{H}^{\varepsilon}_{\alpha,N}(\omega)$ . . . 30
6. Оценка вероятности . . . 39
Список литературы . . . 40

1. Введение

Для описания волновых процессов в неупорядоченных квантовых системах нередко используют подход, основанный на использовании случайных гамильтонианов, представляющих собой эллиптические операторы в неограниченных областях, зависящие от счетного числа независимых одинаково распределенных случайных величин. Обычно такие операторы устроены по аналогии с периодическими: имеется периодическая решетка, но на каждой из ячеек периодичности оператор зависит от случайной величины как от параметра, причем каждая ячейка периодичности «управляется» соответствующей ей случайной величиной. Классическим примером здесь служит оператор на оси

$$-\frac{d^2}{dx^2}+\sum_{k\in\mathbb{Z}}\xi_k V(x-k),$$

где V — достаточно гладкая функция, заданная на отрезке $[0,1]$, ξ_k — независимые одинаково распределенные случайные величины.

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект т 14-11-00078).

Одним из важных свойств, нередко обнаруживаемых у спектров подобных операторов, является спектральная локализация. Ее суть состоит в том, что весь спектр рассматриваемого оператора либо какая-то его часть является чисто точечным с вероятностью 1. Такое свойство было установлено для многих частных примеров (см., например, [6–8, 10–24] и ссылки в этих работах). Одним из основных способов доказательства спектральной локализации является многомасштабный анализ (см. [13, 20]), основу которого составляет определенная индукция, базой которой является оценка начальных масштабов.

В указанных выше работах нередко использовалась монотонность рассматриваемого оператора по случайным переменным, что существенно облегчало исследования. Отказ от монотонности требует пересмотра используемых подходов и разработки новых методик. Одним из примеров операторов, для которых подобное удалось сделать, являются малые случайные геометрические возмущения, рассмотренные в [7, 8], где изучался лапласиан с условием Дирихле в бесконечной плоской полосе, границы которой случайным образом слегка искривлялись. Были рассмотрены два случая: границы полосы получаются параллельным переносом вдоль поперечной оси (см. [7]) и параллельный перенос производится вдоль вектора нормали к одной из границ (см. [8]). Основным результатом здесь стала оценка начальных масштабов для нижней части спектра.

Исследования, начатые [7, 8], получили дальнейшее развитие в [3, 9], где полоса заменялась на многомерный слой, в котором рассматривался оператор Шредингера с потенциалом, зависящим от поперечной переменной. К нему добавлялись случайные возмущения, которые на каждой ячейке периодичности описывались абстрактным оператором, зависящим от параметра. Сам оператор выглядел следующим образом:

$$\mathcal{L}(t) = t\mathcal{L}_1 + t^2\mathcal{L}_2 + t^3\mathcal{L}_3(t),$$

где $\mathcal{L}_i$, $i = 1, 2, 3,$ — некоторые симметричные операторы, действующие на подходящих пространствах Соболева. Далее параметр t заменялся на соответствующую ячейке случайную величину, умноженную на глобальный малый параметр ε. Рассматривалась также аналогичная модель, когда слой заменялся на все пространство. В [9] исследовался случай, когда операторы $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}_2$ были устроены так, что край спектра невозмущенного оператора смещался вправо при добавлении данного возмущения, причем сдвиг края спектра имел порядок $O(\varepsilon^2)$. Основным результатом здесь вновь было доказательство оценки начальных масштабов для нижней части спектра. Подход работы [9] позволил рассмотреть широкие классы операторов с малыми случайными регулярными возмущениями, см. соответствующие примеры в этой статье. Более того, как было показано в [3], этот подход позволяет доказать оценки начальных масштабов и для некоторых сингулярных возмущений.

В настоящей работе мы вновь рассматриваем модель, предложенную в [9]. Однако сейчас на операторы $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}_2$ накладываются условия, которые обеспечивают сдвиг влево для края спектра невозмущенного оператора; сдвиг вновь имеет порядок $O(\varepsilon^2)$. Оказывается, что рассматриваемая здесь ситуация сдвига края спектра влево более сложная по сравнению с [9] и требует дополнительных приемов в исследовании. В результате при некоторых дополнительных условиях на операторы $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}_2$ нам удается доказать оценку начальных масштабов для нашей модели.

Кратко опишем структуры статьи. В разделе 2 ставится задача и формулируются основные результаты. В разделе 3 приводятся некоторые примеры, демонстрирующие основные результаты работы. Разделы 4–6 посвящены доказательству основных результатов.

2. Постановка задачи и формулировка результатов

Пусть $x' = (x_1, \dots, x_n)$, $x = (x', x_{n+1})$ — декартовы координаты в $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^{n+1}$, $n \geqslant 1$, $\Pi := \{x : 0 < x_{n+1} < d\}$ — многомерный слой, где $d > 0$ — ширина слоя. В пространстве $\mathbb{R}^n$ произвольным образом выберем периодическую решетку Γ с базисом $e_1, \dots, e_n$ и ячейкой периодичности

$$\square' := \left\{ x' : x' = \sum_{j=1}^{n} a_j e_j,\ a_j \in (0, 1) \right\}.$$

Обозначим $\square := \square' \times (0, d)$.

Для произвольной области Q и многообразия $S \subset \overline{Q}$ через $\mathring{W}_2^2(Q,S)$ обозначим пространство Соболева функций из $W_2^2(Q)$, обращающихся в нуль на S. Пусть $\mathcal{L}(t)$, $t \in [-t_0, t_0]$, $t_0 > 0$, — семейство операторов вида

$$\mathcal{L}(t) = t\mathcal{L}_1 + t^2\mathcal{L}_2 + t^3\mathcal{L}_3(t),$$

где $\mathcal{L}_i$ — линейные ограниченные симметричные операторы, действующие из $\mathring{W}_2^2(\Box, \partial\Box \cap \partial\Pi)$ в $L_2(\Box)$, причем для $\mathcal{L}_3(t)$ предполагается равномерная ограниченность относительно $t \in [-t_0, t_0]$. Кроме того, считаем, что для оператора $\mathcal{L}_3(t)$ выполнено следующее условие: для любой функции $u \in \mathring{W}_2^2(\Box, \partial\Box \cap \partial\Pi)$ и любых $t_1, t_2 \in [-t_0, t_0]$ верна оценка

$$\left\| \big(\mathcal{L}_3(t_2) - \mathcal{L}_3(t_1)\big)u \right\|_{L_2(\Box)} \leqslant C|t_2 - t_1| \|u\|_{W_2^2(\Box)}, \tag{2.1}$$

где константа C не зависит от u, t_1, t_2.

Для произвольной функции $u \in \mathring{W}_2^2(\Pi, \partial\Pi)$ ее сужение на $\Box$ есть элемент $\mathring{W}_2^2(\Box, \partial\Box \cap \partial\Pi)$, и потому функция $\mathcal{L}_i u$ определена корректно как элемент $L_2(\Box)$. Продолжив эту функцию нулем в $\Pi \setminus \Box$, получим элемент пространства $L_2(\Pi)$. В смысле описанного продолжения операторы $\mathcal{L}_i$, $\mathcal{L}$ можно рассматривать как неограниченные линейные симметричные операторы в $L_2(\Pi)$ с областью определения $\mathring{W}_2^2(\Pi, \partial\Pi)$.

Пусть ε — малый положительный параметр, $\{\omega_k\}_{k\in\Gamma}$ — последовательность чисел из интервала $[a, 1]$, $-1 < a < 1$, $V_0 = V_0(x_{n+1})$ — непрерывная вещественная функция на отрезке $[0, d]$, $\mathcal{S}(k)$, $k \in \Gamma$, — оператор сдвига, определяемый формулой

$$(\mathcal{S}(k)u)(x) = u(x' + k, x_{n+1}).$$

Основной объект исследований настоящей работы — оператор

$$\mathcal{H}^\varepsilon(\omega) := -\Delta + V_0 + \mathcal{L}^\varepsilon(\omega), \quad \mathcal{L}^\varepsilon(\omega) := \sum_{k\in\Gamma} \mathcal{S}(k)\mathcal{L}(\varepsilon\omega_k)\mathcal{S}(-k)$$

в $L_2(\Pi)$ с краевым условием Дирихле. Область определения этого оператора — пространство $\mathring{W}_2^2(\Pi, \partial\Pi)$. Ввиду описанных выше свойств операторов $\mathcal{L}_i$ и теоремы Като—Реллиха, оператор $\mathcal{H}^\varepsilon(\omega)$ самосопряжен при достаточно малых ε. Отметим еще, что действие оператора $\mathcal{L}^\varepsilon(\omega)$ можно описать следующим образом. Для произвольной функции $u \in \mathring{W}_2^2(\Pi, \partial\Pi)$ рассматривается ее сужение на ячейку $\Box_k := \{x : x - (k, 0) \in \Box\}$, $k \in \Gamma$. Затем эта ячейка отождествляется с $\Box$ и к сужению функции u применяется оператор $\mathcal{L}(\varepsilon\omega_k)$. Результат действия есть сужение функции $\mathcal{L}^\varepsilon(\omega)u$ на $\Box_k$.

Далее нам понадобится вспомогательный оператор

$$\mathcal{H}_\Box^\delta := -\Delta + V_0 + \mathcal{L}(\delta), \quad \delta \in [\varepsilon a, \varepsilon],$$

в $L_2(\Box)$ с краевым условием Дирихле на $\partial\Box \cap \partial\Pi$ и периодическими краевыми условиями на $\gamma := \partial\Box \setminus \partial\Pi$. Область определения оператора $\mathcal{H}_\Box^\delta$ — пространство Соболева функций из $\mathring{W}_2^2(\Box, \partial\Box \cap \partial\Pi)$, удовлетворяющих периодическим краевым условиям на γ. Оператор $\mathcal{H}_\Box^\delta$ самосопряжен.

Пусть $\varepsilon = 0$. Первое собственное значение оператора $\mathcal{H}_\Box^0$ равно первому собственному значению Λ_0 оператора $-d^2/dx_{n+1}^2 + V_0$ на интервале $(0, d)$ с краевым условием Дирихле на концах интервала. Соответствующую собственную функцию Ψ_0 нормируем следующим образом:

$$\|\Psi_0\|_{L_2(0,d)} = \frac{1}{\sqrt{|\Box'|}}.$$

Относительно оператора $\mathcal{L}_1$ сделаем следующее предположение.

(A1) Выполнено равенство

$$(\mathcal{L}_1\Psi_0, \Psi_0)_{L_2(\Box)} = 0.$$

В частности, из этого предположения следует, что уравнение

$$(\mathcal{H}_\Box^0 - \Lambda_0)\Psi_1 = -\mathcal{L}_1\Psi_0 \tag{2.2}$$

разрешимо и имеет единственное решение, ортогональное Ψ_0 в $L_2(\Box)$. Всюду далее символом Ψ_1 обозначим именно такое решение.

Сделаем еще одно предположение.

(A2) Выполнено неравенство

$$\Lambda_2 := (\Psi_1, \mathcal{L}_1\Psi_0)_{L_2(\square)} + (\mathcal{L}_2\Psi_0, \Psi_0)_{L_2(\square)} < 0.$$

Через $\Phi_1 \in \mathring{W}_2^2(\square, \partial\square \cap \partial\Pi)$ обозначим решение задачи

$$\begin{cases} (-\Delta + V_0 - \Lambda_0)\Phi_1 = -\mathcal{L}_1\Psi_0 & \text{в } \square, \\ \Phi_1 = 0 & \text{на } \partial\square \cap \partial\Pi, \\ \dfrac{\partial\Phi_1}{\partial\nu} = 0 & \text{на } \gamma, \end{cases} \tag{2.3}$$

ортогональное Ψ_0 в $L_2(\square)$. В разделе 4 будет показано, что такое решение определено однозначно.

Относительно функции Φ_1 сделаем следующее предположение.

(A3) Выполнено неравенство

$$\eta := -(a+1)\Lambda_2 + (1-a)\Big(\operatorname{Re}(\Phi_1 - \Psi_1),\ \operatorname{Re}\mathcal{L}_1\psi_0\Big)_{L_2(\square)} \geqslant 0.$$

Пусть Λ_δ — наименьшее собственное значение оператора $\mathcal{H}_\square^\delta$.

Первая часть наших результатов носит детерминистический характер, иИ первый такой результат описывает минимум функции Λ_δ.

Лемма 2.1. *Для достаточно малых ε при $\delta \in [\varepsilon a, \varepsilon]$ выполнено равенство*

$$\inf_{\delta\in[\varepsilon a,\varepsilon]} \Lambda_\delta = \Lambda_\varepsilon. \tag{2.4}$$

Справедлива асимптотика

$$\Lambda_\varepsilon = \Lambda_0 + \varepsilon^2\Lambda_2 + O(\varepsilon^3). \tag{2.5}$$

Собственное значение Λ_ε — простое. Собственную функцию $\Psi_\varepsilon(x)$ оператора $\mathcal{H}_\square^\varepsilon$, соответствующую Λ_ε, нормируем следующим образом:

$$(\Psi_\varepsilon, \Psi_0)_{L_2(\square)} = 1.$$

Для нее верна асимптотика в норме $W_2^2(\square)$:

$$\Psi^\varepsilon = \Psi_0 + \varepsilon\Psi_1 + \varepsilon^2\Psi_2 + O(\varepsilon^3), \tag{2.6}$$

где Ψ_2 — решение уравнения

$$\mathcal{H}_\square^0\Psi_2 = \Lambda_0\Psi_2 - \mathcal{L}_1\Psi_1 - \mathcal{L}_2\Psi_0 + \Lambda_2\Psi_0, \tag{2.7}$$

ортогональное Ψ_0 в $L_2(\square)$.

Символом $\sigma(\cdot)$ будем обозначать спектр оператора.

Наш следующий результат описывает положение края спектра оператора $\mathcal{H}^\varepsilon(\omega)$.

Теорема 2.1. *Для достаточно малых ε и всех ω справедлива оценка*

$$\inf\sigma\left(\mathcal{H}^\varepsilon(\omega)\right) \geqslant \Lambda_\varepsilon.$$

Далее мы рассматриваем сужения оператора $\mathcal{H}^\varepsilon(\omega)$ на большие конечные куски слоя Π:

$$\Pi_{\alpha,N} := \left\{x:\ x' = \alpha + \sum_{j=1}^n a_j e_j,\ a_j \in (0,N),\ 0 < x_{n+1} < d\right\},$$

где $\alpha \in \Gamma$, $N \in \mathbb{N}$. Положим

$$\Gamma_{\alpha,N} := \left\{x' \in \Gamma:\ x' = \alpha + \sum_{j=1}^n a_j e_j,\ a_j = 0, 1, \ldots, N-1\right\}$$

и отметим очевидное равенство:

$$\Pi_{\alpha,N} = \bigcup_{k\in\Gamma_{\alpha,N}} \square_k$$

с точностью до множества меры нуль.

На боковой поверхности γ ячейки $\square$ рассмотрим функцию

$$\rho_\varepsilon := \frac{1}{\Psi^\varepsilon}\frac{\partial \Psi^\varepsilon}{\partial \nu},$$

где ν — внешняя нормаль. Так как функция Ψ_ε — $\square$-периодическая, то ее можно периодически продолжить на боковые поверхности всех ячеек $\square_k$, $k \in \Gamma$, и тем самым ρ_ε определена для каждой такой ячейки. Относительно введенной функции сделаем следующее предположение.

(A4) Функция ρ_ε вещественна. Функции ρ_ε, Ψ_1, Ψ_2, $\partial\Psi_1/\partial\nu$, $\partial\Psi_2/\partial\nu$ кусочно непрерывны на γ. Для каждой боковой грани γ^j, входящей в γ, в норме $C^1(\gamma^j)$ справедливо асимптотическое равенство

$$\rho_\varepsilon = \varepsilon\rho_1 + \varepsilon^2\rho_2 + O(\varepsilon^3), \quad \rho_1 := \frac{1}{\Psi_0}\frac{\partial\Psi_1}{\partial\nu}, \quad \rho_2 := \frac{1}{\Psi_0}\frac{\partial\Psi_2}{\partial\nu} - \frac{\Psi_1}{\Psi_0^2}\frac{\partial\Psi_1}{\partial\nu}, \tag{2.8}$$

причем функции ρ_1, ρ_2 также кусочно непрерывны на γ.

Введем оператор

$$\mathcal{H}^\varepsilon_{\alpha,N}(\omega) := -\Delta + V_0 + \sum_{k\in\Gamma_{\alpha,N}} \mathcal{S}(k)\mathcal{L}(\varepsilon\omega_k)\mathcal{S}(-k)$$

в $L_2(\Pi_{\alpha,N})$ с краевым условием Дирихле на $\partial\Pi_{\alpha,N} \cap \partial\Pi$ и краевым условием

$$\frac{\partial u}{\partial\nu} = \rho_\varepsilon u \quad \text{на } \gamma_{\alpha,N}. \tag{2.9}$$

Оператор $\mathcal{H}^\varepsilon_{\alpha,N}(\omega)$ рассматривается как неограниченный в $L_2(\Pi_{\alpha,N})$. Область определения этого оператора состоит из функций класса $\mathring{W}_2^2(\Pi_{\alpha,N}, \partial\Pi_{\alpha,N}\cap\partial\Pi)$, удовлетворяющих краевому условию (2.9). Оператор $\mathcal{H}^\varepsilon_{\alpha,N}(\omega)$ самосопряжен.

Пусть $\Lambda^\varepsilon_{\alpha,N}(\omega)$ — наименьшее собственное значение оператора $\mathcal{H}^\varepsilon_{\alpha,N}(\omega)$. Следующая теорема дает нижнюю оценку разности $\Lambda^\varepsilon_{\alpha,N}(\omega) - \Lambda_\varepsilon$.

Теорема 2.2. *Существуют такие константы $N_1 \in \mathbb{N}$ и $c_0 > 0$, что для любых $\alpha \in \Gamma$, $N \geqslant N_1$, $\varepsilon \leqslant c_0 N^{-4}$ выполнено неравенство*

$$\Lambda^\varepsilon_{\alpha,N}(\omega) - \Lambda_\varepsilon \geqslant \frac{\varepsilon^2}{\eta N^n}\sum_{k\in\Gamma_{\alpha,N}}(1-\omega_k). \tag{2.10}$$

Наш последний детерминистический результат — это оценка Комба—Томаса.

Теорема 2.3. *Пусть $\alpha, \beta_1, \beta_2 \in \Gamma$, $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$ таковы, что*

$$B_1 := \Pi_{\beta_1,m_1} \subset \Pi_{\alpha,N}, \quad B_2 := \Pi_{\beta_2,m_2} \in \Pi_{\alpha,N}.$$

Существует такое $N_2 \in \mathbb{N}$, что для $N \geqslant N_2$ выполнена оценка

$$\left\|\chi_{B_1}\Big(\mathcal{H}^\varepsilon_{\alpha,N}(\omega) - \lambda\Big)^{-1}\chi_{B_2}\right\| \leqslant \frac{C_1}{\delta} e^{-C_2\delta\,\mathrm{dist}(B_1,B_2)},$$

где C_1, C_2 — положительные константы, не зависящие от ε, α, N, B_1, B_2, m_1, m_2, λ и $\delta := \mathrm{dist}(\lambda, \sigma(\mathcal{H}^\varepsilon_{\alpha,N}(\omega))) > 0$, $\chi_\cdot$ — характеристическая функция множества, $\|\cdot\|$ — норма ограниченного оператора в $L_2(\Pi_{\alpha,N})$.

Эта теорема была доказана в [9] (см. [9, теорема 2.4]), где рассматривался такой же оператор $\mathcal{H}^\varepsilon_{\alpha,N}(\omega)$, но формулировка предположений (A1)–(A4) была иной. Вместе с тем в доказательстве теоремы в [9] эти предположения не использовались. Поэтому доказательство без изменений переносится из [9] и на нашу теорему 2.3, и в настоящей работе мы отдельно ее не доказываем.

Вторая часть наших основных результатов носит вероятностный характер. Введем необходимые обозначения. Пусть $\xi = \{\xi_k\}_{k\in\Gamma}$ — последовательность независимых одинаково распределенных нетривиальных случайных величин. Вероятностное распределение, соответствующее ξ_k, обозначим через μ и считаем, что носитель μ есть $[a,1]$. Также считаем, что $a = \min\operatorname{supp}\mu$, $1 = \max\operatorname{supp}\mu$. Введем вероятностную меру

$$\mathbb{P} = \bigotimes_{k\in\Gamma}\mu$$

на конфигурационном пространстве

$$\Omega := \bigtimes_{k\in\Gamma}[a,1];$$

элементами этого пространства являются последовательности ξ. Через $\mathbb{E}(\cdot)$ обозначим математическое ожидание случайной величины по мере μ.

Наш первый вероятностный результат выглядит следующим образом.

Теорема 2.4. *Пусть $\gamma\in\mathbb{N}$, $\gamma\geqslant 17$. Тогда для $N\geqslant N_1$, где N_1 определено в теореме* 2.2, *интервал*

$$J_N := \left[\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\eta\mathbb{E}(|\omega_0|)}}\frac{1}{N^{\frac14}},\ \frac{c_0}{N^{\frac{4}{\gamma}}}\right]$$

непуст и для

$$N\geqslant \max\left\{N_1^\gamma,\ N_2,\ K_1^\gamma\right\},\quad K_1 := \left(\frac{1}{c_0}\sqrt{\frac{2}{\eta\mathbb{E}(|\omega_0|)}}\right)^{4/(\gamma-16)},\quad \varepsilon\in J_N$$

справедлива оценка

$$\mathbb{P}\bigl(\xi\in\Omega:\ \Lambda^\varepsilon_{\alpha,N}(\xi)-\Lambda_\varepsilon\leqslant N^{-1/2}\bigr)\leqslant N^{n(1-1/\gamma)}e^{-c_1N^{n/\gamma}},$$

где константа c_1 зависит лишь от меры μ.

Наш второй вероятностный результат — оценка начальных масштабов.

Теорема 2.5. *Пусть $\alpha\in\Gamma$, $\gamma\geqslant 17$, $\beta_1,\beta_2\in\Gamma_{\alpha,N}$, $m_1,m_2>0$ таковы, что*

$$B_1 := \Pi_{\beta_1,m_1}\in\Pi_{\alpha,N},\quad B_2 := \Pi_{\beta_2,m_2}\in\Pi_{\alpha,N}.$$

Существует такая константа $c_2>0$, не зависящая от ε, α, N, β_1, β_2, m_1, m_2, что для $N\geqslant\max\{N_1^\gamma,N_2,K_1^\gamma\}$, $\varepsilon\in J_N$ выполнено:

$$\mathbb{P}\left(\forall\lambda\leqslant\Lambda_\varepsilon+\frac{1}{2\sqrt{N}}:\ \left\|\chi_{B_1}\left(\mathcal{H}^\varepsilon_{\alpha,N}(\xi)-\lambda\right)^{-1}\chi_{B_2}\right\|\leqslant 2\sqrt{N}e^{-c_2\operatorname{dist}(B_1,B_2)/\sqrt{N}}\right)\geqslant$$
$$\geqslant 1-N^{n(1-1/\gamma)}e^{-c_1N^{n/\gamma}},$$

где использованы те же обозначения, что и в теореме 2.4.

Следствие 2.1. *Пусть c_0 то же, что и в теореме* 2.2, *α, β_1, β_2, m_1, m_2, B_1, B_2, c_2 — те же, что и в теореме* 2.5. *Тогда*

$$\mathbb{P}\left(\forall\lambda\leqslant\Lambda_\varepsilon+\frac12\left(\frac{\varepsilon}{c_0}\right)^{\gamma/8}:\ \left\|\chi_{B_1}\left(\mathcal{H}^\varepsilon_{\alpha,N}(\omega)-\lambda\right)^{-1}\chi_{B_2}\right\|\leqslant 2\left(\frac{\varepsilon}{c_0}\right)^{-\gamma/8}e^{-c_2\operatorname{dist}(B_1,B_2)\left(\frac{\varepsilon}{c_0}\right)^{\gamma/8}}\right)\geqslant$$
$$\geqslant 1-\left(\frac{\varepsilon}{c_0}\right)^{-n(\gamma-1)/2}e^{-c_1(\varepsilon/c_0)^{-n/2}}.$$

Доказательство теоремы 2.5 и следствия 2.1 дословно повторяет доказательство теоремы 2.6 и следствия 2.7 в [9], и потому здесь мы на этих доказательствах не останавливаемся.

Обсудим кратко результаты работы. Лемма 2.1 носит вспомогательный характер и описывает наименьшее собственное значение возмущенного оператора на ячейке с периодическими краевыми условиями. Теорема 2.1 утверждает, что данное наименьшее собственное значение есть минимальная возможная точка спектра оператора $\mathcal{H}^\varepsilon(\omega)$. Она достигается при $\omega=\mathbf{1}$. Теорема 2.2 — наш основной детерминистический результат. Он дает оценку снизу для лакуны между собственным значением $\Lambda^\varepsilon_{\alpha,N}(\omega)$ и его минимумом Λ_ε; это минимум достигается при $\omega=\mathbf{1}$:

$\Lambda^{\varepsilon}_{\alpha,N}(\mathbf{1}) = \Lambda_\varepsilon$. Фактически оценка (2.10) показывает, насколько сдвигается $\Lambda^{\varepsilon}_{\alpha,N}(\omega)$ относительно Λ_ε при заданном ω. Оценка Комба—Томаса в теореме 2.3 говорит об экспоненциальном убывании функции Грина оператора $\mathcal{H}^{\varepsilon}_{\alpha,N}(\omega)$. Данные детерминистические результаты являются главными составляющими в доказательстве последующих вероятностных результатов. Первый из них, теорема 2.4, утверждает, что вероятность близкого расположения собственного значения $\Lambda^{\varepsilon}_{\alpha,N}(\xi)$ к своему минимуму Λ_ε экспоненциально мала при росте N. Из этого результата фактически немедленно следует наш основной вероятностный результат — оценка начальных масштабов в теореме 2.5. Как уже было отмечено во введении, такая оценка является базой индукции в доказательстве спектральной локализации для нашей модели с помощью многомасштабного анализа. Следствие 2.1 является аналогом остатков Лифшица и также полезна для реализации упомянутого многомасштабного анализа.

Обсудим еще предположения (A1)–(A4). Предположение (A1) означает обращение в нуль первой поправки в асимптотике для собственного значения Λ_ε, а предположение (A2) — отрицательность второй поправки. Если предположение (A1) не выполнено и $(\mathcal{L}_1\Psi_0, \Psi_0)_{L_2(\square)} \neq 0$, то задача о получении аналогов теорем 2.2, 2.4, 2.5 оказывается проще. Причина в том, что здесь направление сдвига спектра всех рассматриваемых операторов будет определяться знаком величины $(\mathcal{L}_1\Psi_0, \Psi_0)_{L_2(\square)}$, и этот сдвиг оказывается линейным по ε. В этом случае наша техника применима и даже серьезно упрощается. В частности, здесь отпадает необходимость в предположениях (A2), (A3). Поэтому такой случай мы не обсуждаем.

Предположения (A3), (A4) являются дополнительными ограничениями, при которых применим наш подход. К сожалению, избавиться от этих предположений нам не удалось. Отметим еще, что

$$\Big(\operatorname{Re}(\Phi_1 - \Psi_1),\ \operatorname{Re}\mathcal{L}_1\psi_0\Big)_{L_2(\square)} \leqslant 0.$$

Но так как $-\Lambda_2 > 0$, то всегда существует такое a, возможно, достаточно близкое к 1, что предположение (A3) выполнено. Если, например,

$$\Big(\operatorname{Re}(\Phi_1 - \Psi_1),\ \operatorname{Re}\mathcal{L}_1\psi_0\Big)_{L_2(\square)} = 0,$$

в частности, это возможно при $\operatorname{Re}\mathcal{L}_1\psi_0 = 0$, то предположение (A3) выполнено для произвольного a. Для выполнения предположения (A4) достаточно вещественности функции Ψ_ε и справедливости асимптотики (2.6) в норме $C^2(\overline{\square})$. Действительно, в силу гладкости потенциала V_0 имеем $\Psi_0 \in C^2[0,d]$. Так как Ψ_0 соответствует наименьшему собственному значению и обращается в нуль на концах отрезка, то $\Psi_0'(0) \neq 0$, $\Psi_0'(d) \neq 0$, $\Psi_0(x_{n+1}) \neq 0$ при $x_{n+1} \in (0,d)$. Как легко убедиться, этих свойств и асимптотики Ψ_ε в норме $C^2(\overline{\square})$ достаточно для выполнения предположения (A4). Таким образом, это предположение не слишком ограничительное.

Заметим, что если оператор $\mathcal{L}_1$ заменить на $q\mathcal{L}_1$, где q — вещественная константа, то скалярные произведения $(\Psi_1, \mathcal{L}_1\Psi_0)_{L_2(\square)}$ и $\Big(\operatorname{Re}(\Phi_1 - \Psi_1),\ \operatorname{Re}\mathcal{L}_1\psi_0\Big)_{L_2(\square)}$ будут пропорциональны q^2. Поэтому при заданном операторе $\mathcal{L}_2$ за счет выбора достаточно малого q можно добиться выполнения предположения (A2) и предположения (A3) для наперед заданного a.

3. Примеры

В настоящем разделе мы приводим примеры операторов $\mathcal{L}(t)$, к которым применимы результаты нашей работы. А именно, для каждого примера мы обсуждаем выполнение предположений (A1)–(A4).

3.1. Потенциал. Первый пример — это умножение на потенциал $V(x,t) = tV_1(x) + t^2V_2(x)$. Считаем, что V_1, V_2 — вещественные ограниченные измеримые функции, заданные на $\square$. Операторы $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}_2$ вводятся как умножение на V_1, V_2. Предположение (A1) принимает вид:

$$\int\limits_{\square} V_1(x)\Psi_0^2(x_{n+1})\,dx = 0.$$

Для выполнения предположения (A2) необходимо потребовать

$$\int\limits_{\square} V_2(x)\Psi_0^2(x_{n+1})\,dx < 0.$$

Ясно, что существует широкий класс потенциалов V_1, V_2, для которых выполнены предположения (A2), (A3).

Функция Ψ_ε здесь вещественна в силу вещественности V_1, V_2. Для выполнения оставшихся условий предположения (A4) достаточно потребовать дополнительную гладкость для потенциалов в пространствах Гельдера: $V_1, V_2 \in C^{2+\vartheta}(\overline{\square})$, $\vartheta > 0$. Эти предположения обеспечивают выполнение асимптотики (2.6) в норме $C^2(\overline{\square})$.

3.2. Метрика. Следующий пример — это возмущение метрики. Речь идет об операторе $\mathcal{L}(t) = t\mathcal{L}_1 + t^2\mathcal{L}_2$, где $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}_2$ — дифференциальные операторы

$$\mathcal{L}_1 := -\sum_{i,j=1}^{n+1} \frac{\partial}{\partial x_i} B_{ij}^{(1)} \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad \mathcal{L}_2 := -\sum_{i,j=1}^{n+1} \frac{\partial}{\partial x_i} B_{ij}^{(2)} \frac{\partial}{\partial x_j},$$

$B_{ij}^{(q)}$ — вещественные функции, заданные на $\square$. Предполагается, что $B_{ij}^{(q)} \in C^1(\overline{\square})$, $B_{ij}^{(q)} = B_{ji}^{(q)}$, $B_{ij}^{(q)} = 0$ на γ. С помощью однократного интегрирования по частям предположение (A1) превращается в равенство:

$$(\mathcal{L}_1\Psi_0, \Psi_0)_{L_2(\square)} = \sum_{i,j=1}^{n+1} \left(B_{ij}^{(1)} \frac{\partial\Psi_0}{\partial x_j},\ \frac{\partial\Psi_0}{\partial x_i} \right)_{L_2(\square)} = \left(B_{n+1,n+1}^{(1)} \frac{d\Psi_0}{dx_{n+1}},\ \frac{d\Psi_0}{dx_{n+1}} \right)_{L_2(\square)}. \tag{3.1}$$

Для выполнения этого равенства достаточно, например, потребовать

$$B_{n+1,n+1}^{(1)} = 0.$$

Если дополнительно еще положить

$$B_{i,n+1}^{(1)} = B_{n+1,i}^{(1)} = 0,$$

то $\mathcal{L}_1\Psi_0 = 0$ и

$$\big(\Psi_1,\ \mathcal{L}_1\Psi_0\big)_{L_2(\square)} = \Big(\operatorname{Re}(\Phi_1 - \Psi_1),\ \operatorname{Re}\mathcal{L}_1\psi_0 \Big)_{L_2(\square)} = 0.$$

Так как, аналогично (3.1),

$$(\mathcal{L}_2\Psi_0, \Psi_0)_{L_2(\square)} = \left(B_{n+1,n+1}^{(2)} \frac{d\Psi_0}{dx_{n+1}},\ \frac{d\Psi_0}{dx_{n+1}} \right)_{L_2(\square)},$$

то для выполнения предположений (A2), (A3) теперь достаточно потребовать

$$\left(B_{n+1,n+1}^{(2)} \frac{d\Psi_0}{dx_{n+1}},\ \frac{d\Psi_0}{dx_{n+1}} \right)_{L_2(\square)} < 0. \tag{3.2}$$

Предположение (A3) при этом выполнено с любым $a \in (-1, 1)$. Для выполнения неравенства (3.2) достаточно предположить, что $B_{n+1,n+1}^{(2)} < 0$ в $\square$.

Вещественность функции Ψ_ε в рассматриваемом случае очевидна, и для выполнения предположения (A4) достаточно лишь потребовать гладкости коэффициентов $B_{ij}^{(q)}$: $B_{ij}^{(q)} \in C^{1+\vartheta}(\overline{\square})$.

3.3. Интегральный оператор. Помимо дифференциальных операторов, как в двух предыдущих примерах, возмущающий оператор $\mathcal{L}(t)$ может быть произвольной природы. В качестве примера рассмотрим интегральный оператор

$$\mathcal{L}(t) = t\mathcal{L}_1 + t^2\mathcal{L}_2, \quad (\mathcal{L}_1 u)(x) = \int\limits_{\square} K_1(x,y)u(y)\,dy, \quad (\mathcal{L}_2 u)(x) = \int\limits_{\square} K_2(x,y)u(y)\,dy,$$

где ядра K_1, K_2 предполагаются симметричными ($K_j(y,x) = \overline{K_j(x,y)}$) и ограниченными ($\|K_j\|_{L_2(\square^2)} < \infty$). Предположение (A1) здесь принимает вид

$$\int\limits_{\square^2} K_1(x,y)\Psi_0(x_{n+1})\Psi_0(y_{n+1})\,dx\,dy = 0.$$

В частности, если $K_1(x,y) = K_3(x)\overline{K_3(y)}$, то это условие превращается в следующее:

$$\int\limits_{\square} K_3(x)\Psi_0(x_{n+1})\,dx = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L}_1\Psi_0 = 0.$$

Тогда для выполнения предположений (A2), (A3) (последнее с произвольным a) достаточно предположить, что

$$\int\limits_{\square^2} K_2(x,y)\Psi_0(x_{n+1})\Psi_0(y_{n+1})\,dx\,dy < 0.$$

Это неравенство выполнено, например, если $K_2(x,y) \geqslant 0$, $K_2(x,y) \not\equiv 0$.

Для проверки предположения (A4) мы вновь устанавливаем асимптотику (2.6) в норме $C^2(\overline{\square})$. Потребуем дополнительную гладкость ядер K_j: $K_j \in C^{2+\vartheta}(\overline{\square}^2)$, $\vartheta > 0$. Тогда операторы $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}_2$ ограничены как операторы в банаховых пространствах $C^{2+\vartheta}(\overline{\square})$. В силу оценок Шаудера для эллиптических уравнений эти операторы являются относительно ограниченными для $\mathcal{H}^0_\square$. Теперь достаточно рассмотреть уравнение на собственные значения для оператора $\mathcal{H}^0_\square + \mathcal{L}(\varepsilon)$ в пространстве $C^{2+\vartheta}(\overline{\square})$ и воспользоваться регулярной теорией возмущений операторов в банаховых пространствах (см. [4, гл. VII, § 1.3]). Отсюда уже получаем требуемую асимптотику для Ψ_ε.

3.4. Искривление границы. Следующий пример описывает геометрическое возмущение — малое искривление границы. Пусть $y' = (y_1, \ldots, y_n)$, $y = (y', y_{n+1})$ — декартовы координаты в $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^{n+1}$, соответственно, $g = g(y') \in C_0^5(\overline{\square})$ — вещественная функция, не равная тождественно нулю. Введем еще одну функцию:

$$g_\omega(y') := \sum_{k\in\Gamma} \omega_k g(y'-k).$$

В каждой из ячеек $\square' + k$ она равна $\omega_k g(y')$.

Рассмотрим поверхность $y_{n+1} = \varepsilon g_\omega(y')$, $y' \in \mathbb{R}^n$. Ее вектор единичной нормали есть

$$n(y') := \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2|\nabla_{y'}g_\omega|^2}}\big(-\varepsilon(\nabla_{y'}g_\omega(y'))^t, 1\big),$$

где t означает транспонирование. В терминах функции g_ω и вектора n мы вводим малое случайное искривление слоя Π:

$$\Pi^\varepsilon := \Big\{ y : \ y = (x', \varepsilon g_\omega(x')) + x_{n+1}n(x'), \ x' \in \mathbb{R}^n, \ 0 < x_{n+1} < d \Big\}. \qquad (3.3)$$

В области Π^ε рассматривается лапласиан с условием Дирихле; этот оператор обозначим через $\widetilde{\mathcal{H}}^\varepsilon(\omega)$. Такой оператор не является частным случаем нашего оператора $\mathcal{H}^\varepsilon(\omega)$, так как последний для всех ε рассматривается в фиксированной области Π. Вместе с тем, далее мы покажем, что существует унитарное преобразование, приводящее оператор $\widetilde{\mathcal{H}}^\varepsilon(\omega)$ к частному случае нашего оператора $\mathcal{H}^\varepsilon(\omega)$. Использование унитарного преобразования не меняет спектра оператора, а потому подобные преобразования позволяют расширить класс операторов, к которым применимы результаты настоящей работы.

Требуемое унитарное преобразование строится следующим образом. Вначале от переменных y мы переходим к переменным x, использованным в определении (3.3) множества Π^ε:

$$y' = x' - \varepsilon \frac{x_{n+1}(\nabla_{x'} g_\omega(x'))^t}{\sqrt{1+\varepsilon^2|\nabla_{x'} g_\omega(x')|^2}}, \quad y_{n+1} = \varepsilon g_\omega(x') + \frac{x_{n+1}}{\sqrt{1+\varepsilon^2|\nabla_{x'} g_\omega(x')|^2}},$$

где верхний индекс ^{t} обозначает транспонирование. При такой замене искривленный слой Π^ε переходит в фиксированный слой Π, а лапласиан преобразуется так:

$$-\Delta_y = -\frac{1}{\det P} \operatorname{div}_x (P^{-1})^t P^{-1} \det P \nabla_x,$$

где $P = P(x)$ — матрица перехода, составленная из производных $\partial y_i / \partial x_j$. Требуемое унитарное преобразование теперь вводится по правилу

$$(\mathcal{U}u)(y) = \frac{1}{\sqrt{\det P(x(y))}} u(x(y)),$$

а оператор $\mathcal{H}^\varepsilon(\omega)$ определяется формулой

$$\mathcal{H}^\varepsilon(\omega) = \mathcal{U}^{-1} \tilde{\mathcal{H}}^\varepsilon(\omega) \mathcal{U}$$

с дифференциальным выражением

$$-\frac{1}{\sqrt{\det P}} \operatorname{div}_x (P^{-1})^t P^{-1} \det P \nabla_x \frac{1}{\sqrt{\det P}}.$$

Соответствующий оператор $\mathcal{L}(\varepsilon)$ можно определить равенством

$$\mathcal{L}(\varepsilon) = -\frac{1}{\sqrt{\det P}} \operatorname{div}_x (P^{-1})^t P^{-1} \det P \nabla_x \frac{1}{\sqrt{\det P}} + \Delta_x, \tag{3.4}$$

где следует взять $\omega_0 = 1$. Отметим, что в данном случае

$$V_0 = 0, \quad \Psi_0(x_{n+1}) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{d|\square'|}} \sin \frac{\pi x_{n+1}}{d}, \quad \Lambda_0 = \frac{\pi^2}{d^2}. \tag{3.5}$$

Чтобы вычислить операторы $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}_2$, разложим все коэффициенты в приведенном выше выражении для $\mathcal{L}(\varepsilon)$ в ряд Тейлора при $\varepsilon \to +0$. Вначале отметим, что при $\omega_0 = 1$, $x \in \square$

$$\begin{aligned} y' &= x' - \varepsilon x_{n+1} \big(\nabla_{x'} g(x')\big)^t + O(\varepsilon^3), \\ y_{n+1} &= x_{n+1} + \varepsilon g(x') - \frac{\varepsilon^2}{2} x_{n+1} |\nabla_{x'} g(x')|^2 + O(\varepsilon^3), \\ P(x) &= E + \varepsilon P_1 + \varepsilon^2 P_2 + O(\varepsilon^3), \end{aligned}$$

где E — единичная матрица размера $(n+1)\times(n+1)$,

$$\begin{gathered} P_1 := \begin{pmatrix} -x_{n+1} \nabla_{x'} \dfrac{\partial g}{\partial x_1} & \dots & -x_{n+1} \nabla_{x'} \dfrac{\partial g}{\partial x_n} & \nabla_{x'} g \\ -\dfrac{\partial g}{\partial x_1} & \dots & -\dfrac{\partial g}{\partial x_n} & 0 \end{pmatrix}, \\ P_2 := \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 \\ -x_{n+1} \displaystyle\sum_{j=1}^n \frac{\partial g}{\partial x_j} \frac{\partial^2 g}{\partial x_1 \partial x_j} & \dots & -x_{n+1} \displaystyle\sum_{j=1}^n \frac{\partial g}{\partial x_j} \frac{\partial^2 g}{\partial x_n \partial x_j} & -\dfrac{1}{2} |\nabla_{x'} g|^2 \end{pmatrix}; \end{gathered} \tag{3.6}$$

первая строка в определении матриц P_1, P_2 имеет размер $n \times (n+1)$. Следовательно,

$$\begin{aligned} &P^{-1} = E - \varepsilon P_1 + \varepsilon^2 (P_1^2 - P_2) + O(\varepsilon^3), \\ &\det P = 1 + \varepsilon p_1 + \varepsilon^2 p_2 + O(\varepsilon^3), \\ &p_1 := \operatorname{Tr} P_1 = -x_{n+1} \Delta_{x'} g, \end{aligned} \tag{3.7}$$

$$
\begin{aligned}
&p_2 := \operatorname{Tr} P_2 + \sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{n+1} \big(P_{ii}^{(1)} P_{jj}^{(1)} - P_{ij}^{(1)} P_{ji}^{(1)}\big) = \\
&\qquad\qquad = -\frac{1}{2}|\nabla_{x'} g|^2 + x_{n+1}^2 \sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{n} \left(\frac{\partial^2 g}{\partial x_i^2}\frac{\partial^2 g}{\partial x_j^2} - \left(\frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j}\right)^2 \right),\\
&\frac{1}{\sqrt{\det P}} = 1 - \varepsilon \frac{p_1}{2} + \varepsilon^2 \frac{3p_1^2 - 4p_2}{8} + O(\varepsilon^3), && (3.8)\\
&(P^{-1})^t P^{-1} \det P = E + \varepsilon Q_1 + \varepsilon^2 Q_2 + O(\varepsilon^3),\\
&Q_1 := -P_1 - P_1^t + p_1 E, && (3.9)\\
&Q_2 := P_1^t P_1 + P_1^2 + (P_1^2)^t - P_2 - P_2^t + p_2 E - p_1(P_1 + P_1^t),
\end{aligned}
$$

где $P_{ij}^{(1)}$ — элементы матрицы P_1. Отсюда и из (3.4) выводим формулы для операторов $\mathcal{L}_j$:

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{L}_1 u = \frac{1}{2}\big(p_1 \Delta u + \Delta(p_1 u)\big) - \operatorname{div} Q_1 \nabla u, && (3.10)\\
&\mathcal{L}_2 u = -\frac{1}{8}\big((3p_1^2 - 4p_2)\Delta u + \Delta((3p_1^2 - 4p_2)u)\big) - \frac{1}{4} p_1 \Delta(p_1 u) + \\
&\qquad + \frac{1}{2}\big(p_1 \operatorname{div} Q_1 \nabla u + \operatorname{div} Q_1 \nabla(p_1 u)\big) - \operatorname{div} Q_2 \nabla u.
\end{aligned}
$$

Нетрудно также проверить, что условие (2.1) для оператора $\mathcal{L}_3$ выполнено.

Вычислим $(\mathcal{L}_1 \Psi_0, \Psi_0)_{L_2(\square)}$. Используя формулу (3.10) для $\mathcal{L}_1$, финитность функции g и определения (3.7), (3.9), (3.6) величин p_1, P_1, Q_1, непосредственно проверяем, что

$$
\begin{gathered}
(P_1 + P_1^t)\nabla \Psi_0 = 0, \qquad \int\limits_{\square'} \Delta_{x'} g \, dx' = 0, \\
\mathcal{L}_1 \Psi_0 = \frac{1}{2}(\Delta + \Lambda_0)(p_1 \Psi_0) + \Psi_0' \Delta_{x'} g = -\frac{x_{n+1}}{2} \Psi_0 \Delta_{x'}^2 g.
\end{gathered} \tag{3.11}
$$

С учетом этих равенств и финитности функции g, интегрируем по частям следующим образом:

$$
(\mathcal{L}_1 \Psi_0, \Psi_0)_{L_2(\square)} = \frac{1}{2}\int\limits_{\square} \Psi_0 \Delta(p_1 \Psi_0)\, dx = \frac{1}{2}\int\limits_{\square} x_{n+1} \Psi_0 \Psi_0'' \Delta_{x'} g \, dx = 0.
$$

Применяя равенства

$$
\begin{aligned}
&-\int\limits_{\square} \Psi_0 \operatorname{div} Q_2 \nabla \Psi_0 \, dx = \int\limits_{\square} Q_2 \nabla \Psi_0 \cdot \nabla \Psi_0 \, dx = \\
&\qquad = -\frac{5}{2}\int\limits_{\square} |\nabla_{x'} g|^2 (\Psi_0')^2 \, dx + \int\limits_{\square} x_{n+1}^2 (\Psi_0')^2 \sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{n} \left(\frac{\partial^2 g}{\partial x_i^2}\frac{\partial^2 g}{\partial x_j^2} - \left(\frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j}\right)^2 \right),
\end{aligned}
$$

$$
\int\limits_0^d x_{n+1} \Psi_0 \Psi_0'' \, dx_{n+1} = -\frac{1}{2}\int\limits_0^d \Psi_0^2 \, dx_{n+1}, \qquad \nabla p_1 \Psi_0 = \begin{pmatrix} \Psi_0' \nabla_{x'} p_1 \\ p_1 \Psi_0' - \Psi_0 \Delta_{x'} g \end{pmatrix},
$$

аналогично вычисляем $(\mathcal{L}_2 \Psi_0, \Psi_0)_{L_2(\square)}$:

$$
(\mathcal{L}_2 \Psi_0, \Psi_0)_{L_2(\square)} = \int\limits_{\square} x_{n+1}^2 \big(\Psi_0 \Psi_0'' - (\Psi_0')^2\big) \sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{n} \left(\frac{\partial^2 g}{\partial x_i^2}\frac{\partial^2 g}{\partial x_j^2} - \left(\frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j}\right)^2 \right) dx +
$$

$$
+\int\limits_{\square}\frac{x_{n+1}^2}{4}\Psi_0^2|\nabla_{x'}\Delta_{x'}g|^2\,dx-\int\limits_{\square}\left(\frac{1}{2}\Psi_0\Psi_0''+\frac{5}{2}(\Psi_0')^2\right)|\nabla_{x'}g|^2\,dx+
$$

$$
+\int\limits_{\square}(\Delta_{x'}g)^2\left(-\frac{3x_{n+1}^2}{4}(\Psi_0')^2+\frac{1}{2}\Psi_0^2-\frac{3x_{n+1}^2}{4}\Psi_0\Psi_0''\right)dx. \quad (3.12)
$$

С учетом финитности g, двукратным интегрированием по частям проверяем, что

$$
\int\limits_{\square'}\frac{\partial^2 g}{\partial x_i^2}\frac{\partial^2 g}{\partial x_j^2}\,dx'=-\int\limits_{\square'}\frac{\partial g}{\partial x_i}\frac{\partial^3 g}{\partial x_i\partial x_j^2}\,dx'=\int\limits_{\square'}\left(\frac{\partial^2 g}{\partial x_i\partial x_j}\right)^2dx',
$$

а потому

$$
\int\limits_{\square}x_{n+1}\Psi_0\Psi_0''\sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{n}\left(\frac{\partial^2 g}{\partial x_i^2}\frac{\partial^2 g}{\partial x_j^2}-\left(\frac{\partial^2 g}{\partial x_i\partial x_j}\right)^2\right)dx=0.
$$

Учитывая это соотношение и используя явный вид функции Ψ_0 (см. (3.5)), переписываем (3.12) следующим образом:

$$
(\mathcal{L}_2\Psi_0,\Psi_0)_{L_2(\square)}=\int\limits_{\square'}\frac{x_{n+1}^2}{4}\Psi_0^2|\nabla_{x'}\Delta_{x'}g|^2\,dx'-\frac{1}{4|\square'|}\int\limits_{\square'}(\Delta_{x'}g)^2\,dx'-\frac{2\pi^2}{d^2|\square|'}\int\limits_{\square'}|\nabla_{x'}g|^2\,dx'. \quad (3.13)
$$

Вычислим теперь скалярное произведение $(\Psi_1,\mathcal{L}_1\Psi_0)_{L_2(\square)}$. Как следует из формулы (3.11) для $\mathcal{L}_1\Psi_0$ и финитности функции g, функцию Ψ_1 можно представить в виде:

$$
\Psi_1=-\frac{x_{n+1}}{2}\Psi_0\Delta_{x'}g+\hat{\Psi}_1, \quad (3.14)
$$

где $\hat{\Psi}_1$ — решение уравнения

$$
(\mathcal{H}_{\square}^0-\Lambda_0)\hat{\Psi}_1=-\Psi_0'\Delta_{x'}g, \quad (3.15)
$$

ортогональное Ψ_0 в $L_2(\square)$. Ясно, что такое решение существует и единственно, так как правая часть уравнения ортогональна Ψ_0 в $L_2(\square)$. Выпишем интегральное тождество, соответствующее (3.15), взяв $\hat{\Psi}_1$ в качестве пробной функции:

$$
\|\nabla\hat{\Psi}_1\|_{L_2(\square)}^2-\Lambda_0\|\hat{\Psi}_1\|_{L_2(\square)}^2=-(\Psi_0'\Delta_{x'}g,\hat{\Psi}_1)_{L_2(\square)},
$$

откуда следует

$$
\|\nabla_{x'}\hat{\Psi}_1\|_{L_2(\square)}^2+\left\|\frac{\partial\hat{\Psi}_1}{\partial x_{n+1}}\right\|_{L_2(\square)}^2-\Lambda_0\|\hat{\Psi}_1\|_{L_2(\square)}^2=(\Psi_0'\nabla_{x'}g,\nabla_{x'}\hat{\Psi}_1)_{L_2(\square)}. \quad (3.16)
$$

Так как $\hat{\Psi}_1=0$ при $x_{n+1}=0$ и $x_{n+1}=d$ для всех $x'\in\square'$, то в силу принципа минимакса для оператора $-d^2/dx_{n+1}^2$ на $(0,d)$ с краевыми условиями Дирихле верно неравенство

$$
\left\|\frac{\partial\hat{\Psi}_1}{\partial x_{n+1}}\right\|_{L_2(\square)}^2-\Lambda_0\|\hat{\Psi}_1\|_{L_2(\square)}^2\geqslant 0. \quad (3.17)
$$

Из этой оценки и (3.16) выводим:

$$
\|\nabla_{x'}\hat{\Psi}_1\|_{L_2(\square)}\leqslant\|\Psi_0'\nabla_{x'}g\|_{L_2(\square)}=\frac{\pi}{d|\square'|^{1/2}}\|\nabla_{x'}g\|_{L_2(\square')}. \quad (3.18)
$$

С учетом (3.14) и (3.11) представим скалярное произведение $(\Psi_1,\mathcal{L}_1\Psi_0)_{L_2(\square)}$ в виде

$$
(\Psi_1,\mathcal{L}_1\Psi_0)_{L_2(\square)}=\frac{1}{4}\Big(x_{n+1}\Psi_0\Delta_{x'}g,\ x_{n+1}\Psi_0\Delta_{x'}^2g\Big)_{L_2(\square)}-\frac{1}{2}\Big(\hat{\Psi}_1,\ x_{n+1}\Psi_0\Delta_{x'}^2g\Big)_{L_2(\square)}=
$$

$$
=-\frac{1}{4}\int\limits_{\square'}x_{n+1}^2\Psi_0^2|\nabla_{x'}\Delta_{x'}g|^2\,dx-\frac{1}{2}\int\limits_{\square}x_{n+1}\Psi_0(\Delta_{x'}g)(\Delta_{x'}\hat{\Psi}_1)\,dx.
$$

Используя уравнение (3.15) для $\hat{\Psi}_1$ и интегрируя по частям, получаем:

$$-\frac{1}{2}\int\limits_{\square} x_{n+1}\Psi_0(\Delta_{x'}g)(\Delta_{x'}\hat{\Psi}_1)\,dx = -\frac{1}{2}\int\limits_{\square'} x_{n+1}\Psi_0\Delta_{x'}g\left(\Psi_0'\Delta_{x'}g - \frac{\partial^2\hat{\Psi}_1}{\partial x_{n+1}^2} - \Lambda_0\hat{\Psi}_1\right)dx =$$
$$= \frac{1}{4}\int\limits_{\square'}\Psi_0^2(\Delta_{x'}g)^2\,dx + \int\limits_{\square}\hat{\Psi}_1\Psi_0'\Delta_{x'}g\,dx =$$
$$= \frac{1}{4}\int\limits_{\square'}\Psi_0^2(\Delta_{x'}g)^2\,dx - \int\limits_{\square}\Psi_0'\nabla_{x'}g\cdot\nabla_{x'}\hat{\Psi}_1\,dx.$$

Подставляя полученное равенство в (3.18) и суммируя с (3.13), приходим к окончательной формуле для Λ_2:

$$\Lambda_2 = -\frac{2\pi^2}{d^2|\square'|}\|\nabla_{x'}g\|^2_{L_2(\square')} - \int\limits_{\square}\Psi_0'\nabla_{x'}g\cdot\nabla_{x'}\hat{\Psi}_1\,dx.$$

Из (3.16), (3.17) следует, что

$$\int\limits_{\square}\Psi_0'\nabla_{x'}g\cdot\nabla_{x'}\hat{\Psi}_1\,dx \geqslant 0$$

и потому

$$\Lambda_2 \leqslant -\frac{2\pi^2}{d^2|\square'|}\|\nabla_{x'}g\|^2_{L_2(\square')} < 0, \tag{3.19}$$

что доказывает выполнения предположения (A2).

Проверим теперь предположение (A3). Для функции Φ_1 верно представление, аналогичное (3.14):

$$\Phi_1 = -\frac{x_{n+1}}{2}\Psi_0\Delta_{x'}g + \hat{\Phi}_1, \tag{3.20}$$

где $\hat{\Phi}_1$ — решение краевой задачи

$$(-\Delta - \Lambda_0)\hat{\Phi}_1 = -\Psi_0'\Delta_{x'}g \quad \text{в } \square, \qquad \hat{\Phi}_1 = 0 \quad \text{на } \partial\square\cap\partial\Pi, \qquad \frac{\partial\hat{\Phi}_1}{\partial\nu} = 0 \quad \text{на } \gamma, \tag{3.21}$$

ортогональное Ψ_0 в $L_2(\square)$. Аналогично (3.18) доказывается оценка

$$\|\nabla_{x'}\hat{\Phi}_1\|_{L_2(\square)} \leqslant \frac{\pi}{d|\square'|^{\frac{1}{2}}}\|\nabla_{x'}g\|_{L_2(\square')}. \tag{3.22}$$

Отметим еще, что в доказательстве теоремы 2.1 показано равенство (см. (4.18))

$$\Big(\operatorname{Re}\Phi_1 - \operatorname{Re}\Psi_1,\ \operatorname{Re}\mathcal{L}_1\Psi_0\Big)_{L_2(\square)} = \Big(\Phi_1 - \Psi_1,\ \mathcal{L}_1\Psi_0\Big)_{L_2(\square)}.$$

Поэтому в нашем случае в силу (3.11), (3.14), (3.20), (3.21) интегрированием по частям получаем:

$$\Big(\operatorname{Re}\Phi_1 - \operatorname{Re}\Psi_1,\ \operatorname{Re}\mathcal{L}_1\Psi_0\Big)_{L_2(\square)} = \Big(\hat{\Phi}_1 - \hat{\Psi}_1,\ \mathcal{L}_1\Psi_0\Big)_{L_2(\square)} = -\frac{1}{2}\Big(\hat{\Phi}_1 - \hat{\Psi}_1,\ x_{n+1}\Psi_0\Delta^2_{x'}g\Big)_{L_2(\square)} =$$
$$= -\frac{1}{2}\Big(\Delta_{x'}(\hat{\Phi}_1 - \hat{\Psi}_1),\ x_{n+1}\Psi_0\Delta_{x'}g\Big)_{L_2(\square)} = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\partial^2}{\partial x_{n+1}^2} + \Lambda_0\right)(\hat{\Phi}_1 - \hat{\Psi}_1),\ x_{n+1}\Psi_0\Delta_{x'}g\right)_{L_2(\square)} =$$
$$= \Big(\hat{\Phi}_1 - \hat{\Psi}_1,\ \Psi_0'\Delta_{x'}g\Big)_{L_2(\square)} = \Big(\nabla_{x'}(\hat{\Psi}_1 - \hat{\Phi}_1),\ \Psi_0'\nabla_{x'}g\Big)_{L_2(\square)},$$

и в силу оценок (3.18), (3.22) имеем:

$$\left|\Big(\operatorname{Re}\Phi_1 - \operatorname{Re}\Psi_1,\ \operatorname{Re}\mathcal{L}_1\Psi_0\Big)_{L_2(\square)}\right| \leqslant \frac{\pi^2}{d^2|\square'|}\|\nabla_{x'}g\|^2_{L_2(\square')}.$$

Из этой оценки и (3.19) следует

$$-(a+1)\Lambda_2+(1-a)\Big(\operatorname{Re}\Phi_1-\operatorname{Re}\Psi_1,\ \operatorname{Re}\mathcal{L}_1\Psi_0\Big)_{L_2(\square)}\geqslant\frac{3a+1}{4}\frac{\pi^2}{d^2|\square'|}\|\nabla_{x'}g\|^2_{L_2(\square')},$$

и предположение (A3) гарантированно выполнено при $a>-1/3$.

Как и в предыдущих примерах, для проверки предположения (A4) достаточно потребовать определенной гладкости для коэффициентов оператора $\mathcal{L}(\varepsilon)$, фактически, для функции g. И как несложно убедиться, что имеющейся гладкости $g\in C_0^5(\overline{\square})$ здесь достаточно.

4. Нижние оценки для спектров операторов $\mathcal{H}_\square^\delta$ и $\mathcal{H}^\varepsilon(\omega)$

В настоящем разделе мы доказываем лемму 2.1 и теорему 2.1.

Доказательство леммы 2.1 Как было отмечено в разделе 2, наименьшее собственное значение оператора $\mathcal{H}_\square^0$ есть Λ_0. Так как

$$\mathcal{H}_\square^\delta=\mathcal{H}_\square^0+\Lambda(\delta),$$

и $\Lambda(\delta)$ описывает относительно ограниченное возмущение порядка $O(\delta)$, собственные значения оператора $\mathcal{H}_\square^\delta$ отстоят от собственных значений оператора $\mathcal{H}_\square^0$ на величину порядка $O(\delta)$. Так как при малых τ собственное значение Λ_0 простое, то же верно и для $\Lambda_\delta(\tau)$. Более того, собственное значение Λ_δ голоморфно по δ. Аналогичное справедливо и для соответствующей собственной функции $\Psi_\delta(x)$ в смысле нормы в $W_2^2(\square)$. Выписывая ряды Тейлора для Λ_δ и $\Psi_\delta(x)$ по δ и подставляя их в уравнение

$$\mathcal{H}_\square^\delta(\tau)\Psi_\delta=\Lambda_\delta\Psi_\delta,$$

с учетом предположений (A1) несложно убедиться, что

$$\Lambda_\delta=\Lambda_0+\delta^2\Lambda_2+O(\delta^3),\quad \Psi_\delta(x)=\Psi_0(x_{n+1})+\delta\Psi_1(x)+\delta^2\Psi_2(x)+O(\delta^3).$$

С учетом предположения (A2) и голоморфности Λ_δ по δ видим, что инфимум по δ достигается при $\delta=\varepsilon$, откуда уже вытекают асимптотики (2.5), (2.6). Лемма 2.1 полностью доказана. $\square$

Оставшаяся часть данного раздела посвящена доказательству теоремы 2.1.

В силу принципа минимакса

$$\begin{aligned}\inf\sigma\left(\mathcal{H}^\varepsilon(\omega)\right)=&\inf_{\substack{u\in\mathring{W}_2^2(\Pi,\partial\Pi)\\ u\neq0}}\frac{\|\nabla u\|^2_{L_2(\Pi)}+(V_0u,u)_{L_2(\Pi)}+(\mathcal{L}^\varepsilon(\omega)u,u)_{L_2(\Pi)}}{\|u\|^2_{L_2(\Pi)}}=\\ &=\inf_{\substack{u\in\mathring{W}_2^2(\Pi,\partial\Pi)\\ u\neq0}}\frac{\sum\limits_{k\in\Gamma}\Big(\|\nabla u\|^2_{L_2(\square_k)}+(V_0u,u)_{L_2(\square_k)}+(\mathcal{L}(\varepsilon\omega_k)u,u)_{L_2(\square_k)}\Big)}{\sum\limits_{k\in\Gamma}\|u\|^2_{L_2(\square_k)}}.\end{aligned}\tag{4.1}$$

Из периодичности функции Ψ^ε и определения функции ρ_ε следует, что на противоположных боковых гранях ячейки $\square$ функция ρ_ε отличается лишь знаком. Поэтому для любой функции $u\in W_2^2(\Pi)$ выполнено

$$\sum_{k\in\Gamma}(\rho_\varepsilon u,u)_{L_2(\gamma_k)}=0,\quad \gamma_k:=\partial\square_k\setminus\partial\Pi.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}&\inf\sigma\left(\mathcal{H}^\varepsilon(\omega)\right)=\\ &=\inf_{\substack{u\in\mathring{W}_2^2(\Pi,\partial\Pi)\\ u\neq0}}\frac{1}{\sum\limits_{k\in\Gamma}\|u\|^2_{L_2(\square_k)}}\sum_{k\in\Gamma}\bigg(\|\nabla u\|^2_{L_2(\square_k)}+(V_0u,u)_{L_2(\square_k)}+\big(\mathcal{L}(\varepsilon\omega_k)u,u\big)_{L_2(\square_k)}-\big(\rho_\varepsilon u,u\big)_{L_2(\gamma_k)}\bigg)\geqslant\\ &\geqslant\inf_{k\in\Gamma}\inf_{\substack{u\in\mathring{W}_2^2(\square,\partial\square\cap\partial\Pi)\\ u\neq0}}\frac{1}{\|u\|^2_{L_2(\square)}}\bigg(\|\nabla u\|^2_{L_2(\square)}+(V_0u,u)_{L_2(\square)}+\big(\mathcal{L}(\varepsilon\omega_k)u,u\big)_{L_2(\square)}-\big(\rho_\varepsilon u,u\big)_{L_2(\gamma)}\bigg)\geqslant\end{aligned}$$

$$\geqslant \inf_{s\in[a,1]} \inf_{\substack{u\in\mathring{W}_2^2(\square,\partial\square\cap\partial\Pi)\\ u\neq 0}} \frac{1}{\|u\|^2_{L_2(\square)}}\Big(\|\nabla u\|^2_{L_2(\square)} + (V_0u,u)_{L_2(\square)} + \big(\mathcal{L}(\varepsilon s)u,u\big)_{L_2(\square)} - \big(\rho_\varepsilon u,u\big)_{L_2(\gamma)}\Big) =$$

$$= \inf_{s\in[a,1]} \Lambda^\varepsilon_{0,1}(s). \tag{4.2}$$

Отметим, что в силу наших обозначений $\Lambda^\varepsilon_{0,1}(s)$ — наименьшее собственное значение оператора

$$\mathcal{H}^\varepsilon_{0,1}(s) = -\Delta + V_0 + \mathcal{L}(\varepsilon s)$$

в $L_2(\square)$ с краевым условием Дирихле на $\partial\square\cap\partial\Pi$ и краевым условием

$$\frac{\partial u}{\partial\nu} = \rho_\varepsilon u \quad \text{на } \gamma.$$

Вычислим асимптотику по ε для собственного значения $\Lambda^\varepsilon_{0,1}(s)$. Ясно, что при малых ε оно сходится к Λ_0. В силу регулярной теории возмущений собственное значение $\Lambda^\varepsilon_{0,1}(s)$ является простым для достаточно малых ε и всех s, и верно асимптотическое разложение

$$\Lambda^\varepsilon_{0,1}(s) = \Lambda_0 + \varepsilon\Lambda^{(1)}_{0,1}(s) + \varepsilon^2\Lambda^{(2)}_{0,2}(s) + O(\varepsilon^3), \tag{4.3}$$

где $\Lambda^{(1)}_{0,1}(s)$, $\Lambda^{(2)}_{0,1}(s)$ — некоторые коэффициенты. Асимптотика соответствующей собственной функции $\Psi^\varepsilon_{0,1}(x,s)$ в норме $W_2^2(\square)$ имеет вид

$$\Psi^\varepsilon_{0,1}(x,s) = \Psi_0(x_{n+1}) + \varepsilon\Psi^{(1)}_{0,1}(x,s) + \varepsilon^2\Psi^{(2)}_{0,1}(x,s) + O(\varepsilon^3), \tag{4.4}$$

где $\Psi^{(1)}_{0,1}$, $\Psi^{(2)}_{0,1}$ — некоторые функции из $\mathring{W}_2^2(\square,\partial\square\cap\partial\Pi)$.

Для определения коэффициентов $\Lambda^{(1)}_{0,1}$, $\Lambda^{(2)}_{0,1}$ подставим асимптотики (4.3), (4.4), (2.4) в уравнение на собственные значения

$$\mathcal{H}^\varepsilon_{0,1}(s)\Psi^\varepsilon_{0,1} = \Lambda^\varepsilon_{0,1}(s)\Psi^\varepsilon_{0,1},$$

разложим полученное равенство в асимптотический ряд по ε с точностью до $O(\varepsilon^3)$ и выпишем коэффициенты при ε и ε^2. В результате получаем краевые задачи:

$$\begin{gathered}(-\Delta + V_0 - \Lambda_0)\Psi^{(1)}_{0,1} = -s\mathcal{L}_1\Psi_0 + \Lambda^{(1)}_{0,1}\Psi_0 \quad \text{в } \square,\\ \Psi^{(1)}_{0,1} = 0 \quad \text{на } \partial\square\cap\partial\Pi, \qquad \frac{\partial\Psi^{(1)}_{0,1}}{\partial\nu} = \rho_1\Psi_0 = \frac{\partial\Psi_1}{\partial\nu} \quad \text{на } \gamma,\end{gathered} \tag{4.5}$$

и

$$\begin{gathered}(-\Delta + V_0 - \Lambda_0)\Psi^{(2)}_{0,1} = -s\mathcal{L}_1\Psi^{(1)}_{0,1} - s^2\mathcal{L}_2\Psi_0 + \Lambda^{(1)}_{0,1}\Psi^{(1)}_{0,1} + \Lambda^{(2)}_{0,2}\Psi_0 \quad \text{в } \square,\\ \Psi^{(2)}_{0,1} = 0 \quad \text{на } \partial\square\cap\partial\Pi, \qquad \frac{\partial\Psi^{(2)}_{0,1}}{\partial\nu} = \rho_1\Psi^{(1)}_{0,1} + \rho_2\Psi_0 \quad \text{на } \gamma.\end{gathered} \tag{4.6}$$

Функция Ψ_0 является собственной для соответствующей однородной краевой задачи. Эта собственная функция соответствует простому собственному значению Λ_0. Поэтому условие разрешимости задач (4.5), (4.6) получается стандартным образом: необходимо умножить уравнение на Ψ_0 и дважды проинтегрировать по частям по ячейке $\square$, учитывая краевые условия. В частности, таким образом легко доказать однозначную разрешимость задачи (2.3) в классе функций, ортогональных Ψ_0 в $L_2(\square)$.

Обсудим разрешимость задачи (4.5). Так как по определению функция Ψ_1 является $\square$-периодической (см. теорему 2.1), функция $\partial\Psi_1/\partial\nu$ на противоположных боковых гранях, входящих в γ, отличается лишь знаком. Выписывая теперь условие разрешимости для задачи (4.5), видим, что

$$\Lambda^{(1)}_{0,1} = 0. \tag{4.7}$$

Легко убедиться, что решение задачи (4.5) можно взять в виде

$$\Psi^{(1)}_{0,1}(x,s) = \Psi_1(x) + (s-1)\Phi_1(x), \tag{4.8}$$

где, напомним, $\Phi_1 \in W_2^2(\square,\partial\square\cap\partial\Pi)$ — решение задачи (2.3).

Переходим к задаче (4.6). Ее решение будем искать в виде

$$\Psi_{0,1}^{(2)}(x,s)=\Psi_2(x)+\Phi_{0,1}^{(2)}(x,s).$$

С учетом уравнения (2.7) для Ψ_2, формул для ρ_1, ρ_2 из (2.8) и представления (4.8) для $\Psi_{0,1}^{(1)}$ получаем краевую задачу для $\Phi_{0,1}^{(2)}$:

$$\begin{gathered}(-\Delta+V_0-\Lambda_0)\Phi_{0,1}^{(2)}=(1-s)\mathcal{L}_1\Psi_1+(1-s^2)\mathcal{L}_2\Psi_0+s(1-s)\mathcal{L}_1\Phi_1+(\Lambda_{0,2}^{(2)}-\Lambda_2)\Psi_0 \quad \text{в } \Box,\\ \Phi_{0,1}^{(2)}=0 \quad \text{на } \partial\Box\cap\partial\Pi, \qquad \frac{\partial\Phi_{0,1}^{(2)}}{\partial\nu}=(s-1)\frac{\Phi_1}{\Psi_0}\frac{\partial\Psi_1}{\partial\nu} \quad \text{на } \gamma.\end{gathered} \tag{4.9}$$

Условие разрешимости этой задачи имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}\Lambda_{0,2}^{(2)}-\Lambda_2=-\int\limits_\gamma \Psi_0\frac{\partial\Phi_{0,1}^{(2)}}{\partial\nu}\,d\gamma+(s-1)(\mathcal{L}_1\Psi_1,\Psi_0)_{L_2(\Box)}+&\\ +(s^2-1)(\mathcal{L}_2\Psi_0,\Psi_0)_{L_2(\Box)}+s(s-1)(\mathcal{L}_1\Psi_1,\Psi_0)_{L_2(\Box)}.&\end{aligned} \tag{4.10}$$

Вычислим интеграл в правой части этого равенства. Из граничного условия в (4.9) немедленно следует:

$$-\int\limits_\gamma \Psi_0\frac{\partial\Phi_{0,1}^{(2)}}{\partial\nu}\,d\gamma=(1-s)\int\limits_\gamma \Phi_1\frac{\partial\Psi_1}{\partial\nu}\,d\gamma. \tag{4.11}$$

Уравнение (2.2) умножим на Φ_1 и проинтегрируем затем дважды по частям, используя краевые условия для Ψ_1 и задачу (2.3) для Φ_1:

$$-\int\limits_\Box \Phi_1\mathcal{L}_1\Psi_0\,dx=-\int\limits_\gamma \Phi_1\frac{\partial\Psi_1}{\partial\nu}\,d\gamma+\int\limits_\Box \Psi_1(-\Delta+V_0-\Lambda_0)\Phi_1\,dx=-\int\limits_\Box \Psi_1\mathcal{L}_1\Psi_0\,dx,$$

откуда вытекает

$$\int\limits_\gamma \Phi_1\frac{\partial\Psi_1}{\partial\nu}\,d\gamma=\int\limits_\Box(\Phi_1-\Psi_1)\mathcal{L}_1\Psi_0\,dx.$$

Теперь в силу (4.11), симметричности оператора $\mathcal{L}_1$ и определения величины $\mathcal{L}_2$ в предположении (A2) формула (4.10) переписывается в виде

$$\begin{aligned}\Lambda_{0,1}^{(2)}-\Lambda_2&=(1-s)\Big(\Phi_1-\Psi_1,\ \overline{\mathcal{L}_1\Psi_0}\Big)_{L_2(\Box)}+(s-1)\big(\mathcal{L}_1\Psi_1,\ \Psi_0\big)+\\ &\qquad+(s^2-1)\big(\mathcal{L}_2\Psi_0,\ \Psi_0\big)_{L_2(\Box)}+s(s-1)\big(\mathcal{L}_1\Phi_1,\ \Psi_0\big)_{L_2(\Box)}=\\ &=(1-s)\Big(\Phi_1-\Psi_1,\ \overline{\mathcal{L}_1\Psi_0}-\mathcal{L}_1\Psi_0\Big)_{L_2(\Box)}+(s^2-1)\Lambda_2+\\ &\qquad+(s-1)^2\big(\mathcal{L}_1\Phi_1,\ \Psi_0\big)_{L_2(\Box)}-(s-1)^2\big(\mathcal{L}_1\Psi_1,\ \Psi_0\big)_{L_2(\Box)}=\\ &=2i(1-s)\big(\Phi_1-\Psi_1,\ \operatorname{Im}\mathcal{L}_1\Psi_0\big)_{L_2(\Box)}+(s^2-1)\Lambda_2+(s-1)^2\big(\Phi_1-\Psi_1,\ \mathcal{L}_1\Psi_0\big)_{L_2(\Box)}.\end{aligned} \tag{4.12}$$

Отметим, что из интегральных тождеств, соответствующих уравнению (2.2) и задаче (2.3), вытекают равенства

$$\|\nabla u\|_{L_2(\Box)}^2+(V_0u,u)_{L_2(\Box)}-\Lambda_0\|u\|_{L_2(\Box)}^2=-(\mathcal{L}_1\Psi_0,u)_{L_2(\Box)}, \quad u=\Psi_1, \quad u=\Phi_1.$$

Отсюда немедленно следует вещественность скалярного произведения $\big(\Phi_1-\Psi_1,\ \mathcal{L}_1\Psi_0\big)_{L_2(\Box)}$.

В силу предположения (A2) функция ρ_1 вещественна и потому аналогичное верно для $\partial\Psi_1/\partial\nu$:

$$0=\operatorname{Im}\frac{\partial\Psi_1}{\partial\nu}=\frac{\partial\operatorname{Im}\Psi_1}{\partial\nu}. \tag{4.13}$$

Из уравнения (2.2) и задачи (2.3) для вещественных и мнимых частей Ψ_1 и Φ_1 получаем следующие уравнения и задачи:

$$(\mathcal{H}^0_\square - \Lambda_0)\operatorname{Re}\Psi_1 = -\operatorname{Re}\mathcal{L}_1\Psi_0, \tag{4.14}$$

$$(\mathcal{H}^0_\square - \Lambda_0)\operatorname{Im}\Psi_1 = -\operatorname{Im}\mathcal{L}_1\Psi_0, \tag{4.15}$$

$$\begin{cases}(-\Delta + V_0 - \Lambda_0)\operatorname{Re}\Phi_1 = -\operatorname{Re}\mathcal{L}_1\Psi_0 \quad \text{в } \square,\\ \operatorname{Re}\Phi_1 = 0 \quad \text{на } \partial\square\cap\partial\Pi, \qquad \dfrac{\partial\operatorname{Re}\Phi_1}{\partial\nu} = 0 \quad \text{на } \gamma,\end{cases} \tag{4.16}$$

$$\begin{cases}(-\Delta + V_0 - \Lambda_0)\operatorname{Im}\Phi_1 = -\operatorname{Im}\mathcal{L}_1\Psi_0 \quad \text{в } \square,\\ \operatorname{Im}\Phi_1 = 0 \quad \text{на } \partial\square\cap\partial\Pi, \qquad \dfrac{\partial\operatorname{Im}\Phi_1}{\partial\nu} = 0 \quad \text{на } \gamma.\end{cases}$$

Задача для $\operatorname{Im}\Phi_1$ и уравнение с краевым условием (4.13) для $\operatorname{Im}\Psi_1$ фактически совпадают, откуда в силу единственности решения следует

$$\operatorname{Im}\Phi_1 = \operatorname{Im}\Psi_1. \tag{4.17}$$

Уравнение в (4.15) умножим на $\operatorname{Re}\Phi_1 - \operatorname{Re}\Psi_1$ и проинтегрируем дважды по частям по $\square$, учитывая задачу (4.16) и уравнение (4.14). Получим:

$$-\int\limits_\square (\operatorname{Re}\Phi_1 - \operatorname{Re}\Psi_1)\operatorname{Im}\mathcal{L}_1\Psi_0\,dx = 0.$$

Это равенство, (4.17) и вещественность скалярного произведения $(\Phi_1 - \Psi_1, \mathcal{L}_1\Psi_0)_{L_2(\square)}$ доказывают, что

$$\big(\Phi_1 - \Psi_1,\ \operatorname{Im}\mathcal{L}_1\Psi_0\big)_{L_2(\square)} = 0, \quad \big(\Phi_1 - \Psi_1,\ \mathcal{L}_1\Psi_0\big)_{L_2(\square)} = \big(\operatorname{Re}\Phi_1 - \operatorname{Re}\Psi_1,\ \operatorname{Re}\mathcal{L}_1\Psi_0\big)_{L_2(\square)}. \tag{4.18}$$

Формулу (4.12) теперь можно переписать следующим образом:

$$\Lambda^{(2)}_{0,1}(s) - \Lambda_2 = (s^2-1)\Lambda_2 + (s-1)^2\big(\operatorname{Re}(\Phi_1 - \Psi_1),\ \operatorname{Re}\mathcal{L}_1\Psi_0\big)_{L_2(\square)}.$$

Далее нам понадобится вспомогательная лемма.

Лемма 4.1. *Пусть $f \in L_2(\square)$ — некоторая вещественная функция, ортогональная Ψ_0 в $L_2(\square)$, u_{per} — решение уравнения*

$$(\mathcal{H}^0_\square - \Lambda_0)u_{\mathrm{per}} = -f, \tag{4.19}$$

ортогональное Ψ_0 в $L_2(\square)$, u_{Neu} — решение краевой задачи

$$\begin{cases}(-\Delta + V_0 - \Lambda_0)u_{\mathrm{Neu}} = -f & \text{в } \square,\\ u_{\mathrm{Neu}} = 0 & \text{на } \partial\square\cap\partial\Pi,\\ \dfrac{\partial u_{\mathrm{Neu}}}{\partial\nu} = 0 & \text{на } \gamma,\end{cases} \tag{4.20}$$

ортогональное Ψ_0 в $L_2(\square)$. Тогда

$$(f, u_{\mathrm{Neu}})_{L_2(\square)} \leqslant (f, u_{\mathrm{per}})_{L_2(\square)} \leqslant 0. \tag{4.21}$$

Доказательство. Так как $(f,\Psi_0)_{L_2(\square)} = 0$, уравнение (4.19) и задача (4.20) разрешимы и имеют единственные решения, ортогональные Ψ_0 в $L_2(\square)$. Кроме того, из соответствующих интегральных тождеств вытекает, что

$$\|\nabla u\|^2_{L_2(\square)} + (V_0 u, u)_{L_2(\square)} - \Lambda_0\|u\|_{L_2(\square)} = -(f,u)_{L_2(\square)}, \quad u = u_{\mathrm{per}}, \quad u = u_{\mathrm{Neu}}, \tag{4.22}$$

что доказывает вещественность скалярных произведений $(f, u_{\mathrm{per}})_{L_2(\square)}$, $(f, u_{\mathrm{Neu}})_{L_2(\square)}$.

Используя вариационные формулировки уравнения (4.19) и задачи (4.20), нетрудно убедиться, что функция u_{per} доставляет минимум функционала

$$\ell(u) := \|\nabla u\|^2_{L_2(\square)} + (V_0 u, u)_{L_2(\square)} - \Lambda_0\|u\|^2_{L_2(\square)} + 2(f,u)_{L_2(\square)}$$

на множестве функций $u \in \mathring{W}^2_{2,\mathrm{per}}(\square, \partial\square \cap \partial\Pi)$, ортогональных Ψ_0 в $L_2(\square)$. Здесь $\mathring{W}^1_{2,\mathrm{per}}(\square, \partial\square \cap \partial\Pi)$ — пространство Соболева функций из $\mathring{W}^1_2(\square, \partial\square\cap\partial\Pi)$, удовлетворяющих периодическим краевым условиям на γ. Выполнено равенство

$$\inf_{\substack{u\in\mathring{W}^1_{2,\mathrm{per}}(\square,\partial\square\cap\partial\Pi)\\ (u,\Psi_0)_{L_2(\square)}=0}} \ell(u) = (f, u_{\mathrm{per}})_{L_2(\square)}.$$

Аналогично для задачи (4.20) имеем: функция u_{Neu} доставляет минимум функционала $\ell(u)$ по подпространству в $\mathring{W}^1_2(\square, \partial\square \cap \partial\Pi)$, ортогональному Ψ_0 в скалярном произведении $L_2(\square)$, и

$$\inf_{\substack{u\in\mathring{W}^1_{2}(\square,\partial\square\cap\partial\Pi)\\ (u,\Psi_0)_{L_2(\square)}=0}} \ell(u) = (f, u_{\mathrm{Neu}})_{L_2(\square)}.$$

Так как $\mathring{W}^1_{2,\mathrm{per}}(\square, \partial\square \cap \partial\Pi) \subset \mathring{W}^1_2(\square, \partial\square \cap \partial\Pi)$, для двух приведенных выше инфимумов функционала $\ell(u)$ справедливо левое неравенство в (4.21). Правое неравенство следует из (4.22) и принципа минимакса. $\square$

Применяя доказанную лемму к уравнению (4.14) и задаче (4.16), немедленно получаем неравенство

$$\big(\operatorname{Re}(\Phi_1 - \Psi_1),\ \operatorname{Re}\mathcal{L}_1\Psi_0\big)_{L_2(\square)} \leqslant 0.$$

Теперь в силу предположений (A2) и (A3) выводим оценку

$$\begin{aligned}\Lambda^{(2)}_{0,1}(s) - \Lambda_2 &= (s^2-1)\Lambda_2 + (1-s)^2\big(\operatorname{Re}(\Phi_1 - \Psi_1),\ \operatorname{Re}\mathcal{L}_1\Psi_0\big)_{L_2(\square)} = \\ &= (1-s)\Big(-(1+s)\Lambda_2 + (1-s)\big(\operatorname{Re}(\Phi_1 - \Psi_1),\ \operatorname{Re}\mathcal{L}_1\Psi_0\big)_{L_2(\square)}\Big) \geqslant \\ &\geqslant (1-s)\eta \geqslant (1-a)\eta > 0. \end{aligned} \tag{4.23}$$

Из полученного неравенства, соотношений (4.2) и асимптотик (2.5), (4.3), (4.7) вытекает оценка

$$\inf\sigma\left(\mathcal{H}^\varepsilon(\omega)\right) - \Lambda_\varepsilon \geqslant \inf_{s\in[a,1]} \Lambda^\varepsilon_{0,1}(s) - \Lambda_\varepsilon = \varepsilon^2 \inf_{s\in[a,1]} \left(\Lambda^{(2)}_{0,1}(s) - \Lambda_2\right) + O(\varepsilon^3) \geqslant 0$$

при достаточно малых ε, что завершает доказательство теоремы 2.1.

5. Нижняя оценка для спектра оператора $\mathcal{H}^\varepsilon_{\alpha,N}(\omega)$

В настоящем разделе мы доказываем теорему 2.2. Сразу отметим, что практически дословно воспроизводя доказательство теоремы 2.1, несложно проверить, что

$$\inf\sigma(\mathcal{H}^\varepsilon_{\alpha,N}) \geqslant \Lambda_\varepsilon. \tag{5.1}$$

При этом минимальные изменения следует внести лишь в соотношения (4.1), (4.2):

$$\begin{aligned}\inf\sigma(\mathcal{H}^\varepsilon_{\alpha,N}) &= \inf_{\substack{u\in\mathring{W}^2_2(\Pi_{\alpha,N},\partial\Pi_{\alpha,N}\cap\partial\Pi)\\ u\neq0}} \frac{1}{\|u\|^2_{L_2(\Pi_{\alpha,N})}}\Big(\|\nabla u\|^2_{L_2(\Pi_{\alpha,N})} + (V_0u,u)_{L_2(\Pi_{\alpha,N})} + \\ &\qquad + (\mathcal{L}^\varepsilon(\omega)u,u)_{L_2(\Pi_{\alpha,N})} - (\rho_\varepsilon u,u)_{L_2(\gamma_{\alpha,N})}\Big) = \\ &= \inf_{\substack{u\in\mathring{W}^2_2(\Pi_{\alpha,N},\partial\Pi_{\alpha,N}\cap\partial\Pi)\\ u\neq0}} \frac{1}{\sum\limits_{k\in\Gamma_{\alpha,N}}\|u\|^2_{L_2(\square_k)}} \sum_{k\in\Gamma_{\alpha,N}}\Big(\|\nabla u\|^2_{L_2(\square_k)} + (V_0u,u)_{L_2(\square_k)} + \\ &\qquad + (\mathcal{L}(\varepsilon\omega_k)u,u)_{L_2(\square_k)} - (\rho_\varepsilon u,u)_{L_2(\gamma_k)}\Big) \geqslant \inf_{s\in[a,1]}\Lambda^\varepsilon_{0,1}(s).\end{aligned}$$

Через $\mathbf{1}$ обозначим последовательность $\{1\}_{k\in\Gamma}$ и рассмотрим оператор $\mathcal{H}^\varepsilon_{\alpha,N}(\mathbf{1})$. У этого оператора все возмущения $\mathcal{S}(k)\mathcal{L}(\varepsilon)\mathcal{S}(-k)$ одинаковы для всех ячеек. С учетом неравенства (5.1) его наименьшее собственное значение — это число Λ_ε. Соответствующая собственная функция — функция Ψ_ε, периодически продолженная на все ячейки $\square_k$, $k \in \Gamma_{\alpha,N}$.

Пусть $\hat{\Lambda}_\varepsilon$ — второе собственное значение оператора $\mathcal{H}^\varepsilon_{\alpha,N}(\mathbf{1})$. Далее нам понадобятся следующие вспомогательные утверждения.

Лемма 5.1. *При достаточно больших N существуют такие константы C_1, C_2, C_3, не зависящие от ε и N, что*

$$\left|\hat{\Lambda}_\varepsilon - \Lambda_0 - C_1 N^{-2}\right| \leqslant C_2\varepsilon, \quad \Lambda^\varepsilon_{\alpha,N}(\omega) \leqslant \Lambda_0 + C_3\varepsilon^2. \tag{5.2}$$

Доказательство. Пусть $\varepsilon = 0$. Оператор $\mathcal{H}^0_{\alpha,N}(\mathbf{1})$ — это лапласиан в $\Pi_{\alpha,N}$ с краевым условием Дирихле на $\partial\Pi_{\alpha,N} \cap \partial\Pi$ и краевым условием Неймана на $\gamma_{\alpha,N}$. Его собственные значения легко находятся разделением переменных. Несложно проверить, что его второе собственное значение $\hat{\Lambda}_0$ имеет вид

$$\hat{\Lambda}_0 = \Lambda_0 + C_1 N^{-2},$$

где C_1 — второе собственное значение Лапласиана в $\square'$ с краевым условием Неймана на $\partial\square'$. Собственную функцию, соответствующую C_1, обозначим через $\hat{\Phi}_0 = \hat{\Phi}_0(x')$. Нормируем ее в $L_2(\square')$. Отметим еще, что функция $\hat{\Phi}_0$ ортогональна единице в $L_2(\square')$:

$$\int\limits_{\square'} \hat{\Phi}_0\, dx' = 0, \tag{5.3}$$

так как единица есть собственная функция оператора $\mathcal{H}^0_{\alpha,N}(\mathbf{1})$, соответствующая наименьшему нулевому собственному значению.

Прямыми вычислениями с учетом нормировки функций Ψ_0 и $\hat{\Phi}_0$ несложно проверить, что для функции

$$v(x) := \Psi_0(x_{n+1})\hat{\Phi}_0\left(\frac{x'}{N} + \alpha\right)$$

верны соотношения

$$\|v\|^2_{L_2(\Pi_{\alpha,N})} = \frac{N^n}{|\square'|}, \quad \|v\|^2_{W_2^2(\Pi_{\alpha,N})} \leqslant CN^n, \quad \|v\|_{L_2(\gamma_{\alpha,N})} \leqslant CN^{n-1}, \tag{5.4}$$

где C — некоторая константа, не зависящая от N и α.

Положим

$$v^\varepsilon(x) := v(x) - \frac{(v, \Psi_\varepsilon)_{L_2(\Pi_{\alpha,N})}}{\|\Psi_\varepsilon\|^2_{L_2(\Pi_{\alpha,N})}}\Psi_\varepsilon, \quad (v^\varepsilon, \Psi_\varepsilon)_{L_2(\Pi_{\alpha,N})} = 0.$$

Из асимптотики (2.6) и нормировки Ψ_ε следует, что

$$\begin{gathered}\|\Psi_\varepsilon\|^2_{L_2(\square)} = N^n\|\Psi_\varepsilon\|^2_{L_2(\square)} = N^n(1 + O(\varepsilon^2)),\\ \|\Psi_\varepsilon\|^2_{W_2^2(\Pi_{\alpha,N})} \leqslant CN^n, \quad \|\Psi_\varepsilon\|^2_{L_2(\gamma_{\alpha,N})} \leqslant CN^n, \quad (v, \Psi_\varepsilon)_{L_2(\Pi_{\alpha,N})} = N^n\, O(\varepsilon)\end{gathered}$$

где константа C не зависит от N и α, а $O(\varepsilon)$ и $O(\varepsilon^2)$ равномерны по N и α. Отсюда, из (5.4), (5.3) и определения функции v^ε вытекает, что

$$\begin{gathered}\|v^\varepsilon\|^2_{L_2(\Pi_{\alpha,N}} = \|v\|^2_{L_2(\Pi_{\alpha,N})} - \frac{(v, \Psi_\varepsilon)^2_{L_2(\Pi_{\alpha,N})}}{\|\Psi_\varepsilon\|^2_{L_2(\Pi_{\alpha,N})}} = \frac{N^n}{|\square'|}(1 + O(\varepsilon^2)),\\ \|v^\varepsilon\|^2_{W_2^2(\Pi_{\alpha,N})} \leqslant CN^n, \quad \|v^\varepsilon\|^2_{L_2(\gamma_{\alpha,N})} \leqslant CN^n,\end{gathered} \tag{5.5}$$

где константы C не зависят от ε, N и α, а $O(\varepsilon)$ равномерно по N и α.

Согласно принципу минимакса второе собственное значение $\hat{\Lambda}_\varepsilon$ дается формулой

$$\begin{aligned}\hat{\Lambda}_\varepsilon = \inf_{\substack{u \in \mathring{W}_2^2(\Pi_{\alpha,N}, \partial\Pi_{\alpha,N} \cap \partial\Pi)\\ (u,\Psi_\varepsilon)_{L_2(\Pi_{\alpha,N})} = 0\\ u \neq 0}} \frac{1}{\|u\|^2_{L_2(\Pi_{\alpha,N})}} \Big(&\|\nabla u\|^2_{L_2(\Pi_{\alpha,N})} + (V_0 u, u)_{L_2(\Pi_{\alpha,N})} +\\ &+ (\mathcal{L}^\varepsilon(\mathbf{1})u, u)_{L_2(\Pi_{\alpha,N})} - (\rho_\varepsilon u, u)_{L_2(\gamma_{\alpha,N})}\Big).\end{aligned}$$

Возьмем теперь $u(x) = v^\varepsilon(x)$ и учтем свойства оператора $\mathcal{L}^\varepsilon(\omega)$ и функции ρ_ε, а также соотношения (5.5). Тогда для $\hat{\Lambda}_\varepsilon$ получаем оценку

$$\hat{\Lambda}_\varepsilon \leqslant \Lambda_0 + C_1 N^{-2} + C\varepsilon, \tag{5.6}$$

где C — некоторая константа, не зависящая от ε, α, N. Совершенно аналогично доказывается вторая оценка в (5.2). Здесь принцип минимакса выглядит следующим образом:

$$\Lambda^\varepsilon_{\alpha,N}(\omega) = \inf_{\substack{u\in \mathring{W}_2^2(\Pi_{\alpha,N},\partial\Pi_{\alpha,N}\cap\partial\Pi)\\ u\neq 0}} \frac{1}{\|u\|^2_{L_2(\Pi_{\alpha,N})}} \Big(\|\nabla u\|^2_{L_2(\Pi_{\alpha,N})} + (V_0 u, u)_{L_2(\Pi_{\alpha,N})} + \\ + (\mathcal{L}^\varepsilon(\omega)u, u)_{L_2(\Pi_{\alpha,N})} - (\rho_\varepsilon u, u)_{L_2(\gamma_{\alpha,N})} \Big),$$

а в качестве пробной функции следует взять $u(x) := \Psi_0(x_{n+1})$. Также необходимо учесть, что в силу предположения (A1) и определения функции ρ_ε

$$\Big(\mathcal{L}^\varepsilon(\omega)\Psi_0,\ \Psi_0\Big)_{L_2(\Pi_{\alpha,N})} = \varepsilon^2 \sum_{k\in\Gamma_{\alpha,N}} \Big(\omega_k^2 \big(\mathcal{L}_2\Psi_0,\ \Psi_0\big)_{L_2(\square)} + \varepsilon\omega_k^3 \big(\mathcal{L}_3(\varepsilon\omega_k)\Psi_0,\ \Psi_0\big)_{L_2(\Pi_{\alpha,N})} \Big),$$

$$\Big(\rho_\varepsilon \Psi_0,\ \Psi_0\Big)_{L_2(\gamma_{\alpha,N})} = 0.$$

Перепишем теперь задачу на собственные значения

$$\mathcal{H}^\varepsilon_{\alpha,N}(\mathbf{1})\Psi = \Lambda\Psi$$

в виде

$$\mathcal{R}^\varepsilon_{\alpha,N}(\mathbf{1},b)\Psi = (\Lambda - b)^{-1}\Psi, \quad \mathcal{R}^\varepsilon_{\alpha,N}(\mathbf{1},b) := \big(\mathcal{H}^\varepsilon_{\alpha,N}(\mathbf{1}) - b\big)^{-1},$$

где оператор $\mathcal{R}^\varepsilon_{\alpha,N}(\mathbf{1},b)$ рассматривается как ограниченный и самосопряженный в $L_2(\Pi_{\alpha,N})$, а b — такая фиксированная константа, что $b \geqslant 1 - \Lambda_\varepsilon$ для всех ε. В силу асимптотики (2.5) такой выбор константы b возможен, а в силу неравенства (5.1) он обеспечивает оценки

$$\begin{gathered} \|\mathcal{R}^\varepsilon_{\alpha,N}(\mathbf{1},b)\| \leqslant 1, \\ \|\nabla u\|^2_{L_2(\Pi_{\alpha,N})} + (V_0 u, u)_{L_2(\Pi_{\alpha,N})} + (\mathcal{L}^\varepsilon(\mathbf{1})u, u)_{L_2(\Pi_{\alpha,N})} - (\rho_\varepsilon u, u)_{L_2(\Pi_{\alpha,N})} - b\|u\|^2_{L_2(\Pi_{\alpha,N})} \geqslant \\ \geqslant \|u\|^2_{L_2(\Pi_{\alpha,N})}, \qquad u \in \mathring{W}_2^2(\Pi_{\alpha,N},\ \partial\Pi_{\alpha,N}\cap\partial\Pi), \\ \|\nabla u\|^2_{L_2(\Pi_{\alpha,N})} + (V_0 u, u)_{L_2(\Pi_{\alpha,N})} + (\mathcal{L}^\varepsilon(\mathbf{1})u, u)_{L_2(\Pi_{\alpha,N})} - (\rho_\varepsilon u, u)_{L_2(\Pi_{\alpha,N})} - b\|u\|^2_{L_2(\Pi_{\alpha,N})} \geqslant \\ \geqslant C\|u\|^2_{W_2^1(\Pi_{\alpha,N})}, \qquad u \in \mathring{W}_2^2(\Pi_{\alpha,N},\ \partial\Pi_{\alpha,N}\cap\partial\Pi), \end{gathered} \tag{5.7}$$

где константа C не зависит от v_ε, ε, α и N.

Оценим разность резольвент $\mathcal{R}^\varepsilon_{\alpha,N}(\mathbf{1},b) - \mathcal{R}^0_{\alpha,N}(\mathbf{1},b)$. Для произвольной $f \in L_2(\Pi_{\alpha,N})$ введем обозначения

$$u_\varepsilon := \mathcal{R}^\varepsilon_{\alpha,N}(\mathbf{1},b), \quad u_0 := \mathcal{R}^0_{\alpha,N}(\mathbf{1},b).$$

Ясно, что

$$\begin{gathered} \|u_0\|_{L_2(\Pi_{\alpha,N})} \leqslant C\|f\|_{L_2(\Pi_{\alpha,N})}, \\ \sum_{j=1}^{n+1} \left\| \frac{\partial u_0}{\partial x_j} \right\|_{L_2(\Pi_{\alpha,N})} \leqslant C\|f\|_{L_2(\Pi_{\alpha,N})}, \quad \sum_{i,j=1}^{n+1} \left\| \frac{\partial^2 u_0}{\partial x_i \partial x_j} \right\|_{L_2(\Pi_{\alpha,N})} \leqslant C\|f\|_{L_2(\Pi_{\alpha,N})}, \end{gathered} \tag{5.8}$$

где константа C не зависит от f, ε, α и N. Последняя оценка здесь получена аналогично [5, гл. III, § 8]. Из первых двух оценок в (5.8) также легко видеть, что

$$\|u_0\|_{L_2(\gamma_{\alpha,N})} \leqslant C\|f\|_{L_2(\Pi_{\alpha,N})}, \tag{5.9}$$

где константа C не зависит от f, ε, α и N.

Для функции $v_\varepsilon := u_\varepsilon - u_0$ имеем краевую задачу

$$\begin{cases}(-\Delta + V_0 + \mathcal{L}^\varepsilon(\mathbf{1}) - b)v_\varepsilon = -\mathcal{L}^\varepsilon(\mathbf{1})u_0 & \text{в } \Pi_{\alpha,N},\\ v_\varepsilon = 0 & \text{на } \partial\Pi_{\alpha,N}\cap\partial\Pi,\\ \dfrac{\partial v_\varepsilon}{\partial\nu} - \rho_\varepsilon v_\varepsilon = \rho_\varepsilon u_0 & \text{на } \gamma_{\alpha,N}.\end{cases}$$

Выпишем теперь интегральное тождество для данной задачи с пробной функцией v_ε:

$$\begin{aligned}\|\nabla v_\varepsilon\|^2_{L_2(\Pi_{\alpha,N})} + \big(V_0 v_\varepsilon,\ v_\varepsilon\big)_{L_2(\Pi_{\alpha,N})} + \Big(\mathcal{L}^\varepsilon(\mathbf{1})v_\varepsilon,\ v_\varepsilon\Big)_{L_2(\Pi_{\alpha,N})} -\\ - \big(\rho_\varepsilon v_\varepsilon,\ v_\varepsilon\big)_{L_2(\Pi_{\alpha,N})} - b\|v_\varepsilon\|^2_{L_2(\Pi_{\alpha,N})} = -\big(\mathcal{L}^\varepsilon(\mathbf{1})u_0,\ v_\varepsilon\big)_{L_2(\Pi_{\alpha,N})} + \big(\rho^\varepsilon u_0,\ v_\varepsilon\big)_{L_2(\gamma_{\alpha,N})}.\end{aligned} \tag{5.10}$$

Левая часть этого равенства в силу (5.7) снизу оценивается через $C\|v_\varepsilon\|_{W_2^1(\Pi_{\alpha,N})}$, а правую часть в силу (5.8), (5.9) и свойств оператора $\mathcal{L}^\varepsilon$ и функции ρ_ε сверху оцениваем через $C\varepsilon\|v_\varepsilon\|_{W_2^1(\Pi_{\alpha,N})}\|f\|_{L_2(\Pi_{\alpha,N})}$, где константы C не зависят от v_ε, ε, α и N. Следовательно,

$$\|v_\varepsilon\|_{W_2^1(\Pi_{\alpha,N})} \leqslant C\varepsilon\|f\|_{L_2(\Pi_{\alpha,N})}, \tag{5.11}$$

откуда выводим

$$\|\mathcal{R}^\varepsilon_{\alpha,N}(\mathbf{1},b) - \mathcal{R}^0_{\alpha,N}(\mathbf{1},b)\| \leqslant C\varepsilon, \tag{5.12}$$

с константой C, не зависящей от ε, α и N. Здесь норма понимается для ограниченных операторов в $L_2(\Pi_{\alpha,N})$.

Операторы $\mathcal{R}^\varepsilon_{\alpha,N}(\mathbf{1})$ самосопряжены и компактны в $L_2(\Pi_{\alpha,N})$. Отсюда и из (5.12) немедленно следует оценка

$$\Big|\big(\hat\Lambda_\varepsilon - b\big)^{-1} - \big(\hat\Lambda_0 - b\big)^{-1}\Big| \leqslant C\varepsilon,$$

где константа C не зависит от ε, α и N. Используя теперь оценку (5.6), окончательно получаем

$$\Big|\hat\Lambda_\varepsilon - \hat\Lambda_0\Big| \leqslant C\varepsilon\big|\hat\Lambda_\varepsilon - b\big|\,|\hat\Lambda_0 - b| \leqslant C\varepsilon,$$

где константа C не зависит от ε. Лемма доказана. □

Символом Q_N обозначим круг в комплексной области радиуса $C_1/2N^2$ с центром в нуле, где константа C_1 — из леммы 5.1. Согласно предположению теоремы 2.2 для ε, асимптотике (2.5) и лемме 5.1, этот круг не содержит никаких точек спектра оператора $\mathcal{H}^\varepsilon_{\alpha,N}(\mathbf{1})$, кроме Λ_ε, и для всех $\lambda\in Q_N$ выполнено

$$\operatorname{dist}\Big(\lambda,\ \sigma\big(\mathcal{H}^\varepsilon_{\alpha,N}(\mathbf{1})\big)\setminus\{\Lambda_\varepsilon\}\Big) \geqslant \frac{C_1}{3N^2}. \tag{5.13}$$

Напомним, что параметр N предполагается достаточно большим.

Лемма 5.2. *При $\lambda\in Q_N$ для резольвенты оператора $\mathcal{H}^\varepsilon_{\alpha,N}(\mathbf{1})$ справедливо представление*

$$\Big(\mathcal{H}^\varepsilon_{\alpha,N}(\mathbf{1}) - \lambda\Big)^{-1} f = \frac{1}{N^n\|\Psi_\varepsilon\|^2_{L_2(\square)}}\frac{(f,\Psi_\varepsilon)_{L_2(\Pi_{\alpha,N})}}{\Lambda_\varepsilon - \lambda}\Psi_\varepsilon + \hat{\mathcal{R}}^\varepsilon_{\alpha,N}(\lambda)f, \quad f\in L_2(\Pi_{\alpha,N}), \tag{5.14}$$

где оператор $\hat{\mathcal{R}}^\varepsilon_{\alpha,N}(\lambda)$ ограничен как оператор из $L_2(\Pi_{\alpha,N})$ в $W_2^2(\Pi_{\alpha,N})$, голоморфен по $\lambda\in Q_N$, его образ ортогонален Ψ_0 в $L_2(\Pi_{\alpha,N})$ и выполнены оценки

$$\begin{aligned}\|\hat{\mathcal{R}}^\varepsilon_{\alpha,N}(\lambda)f\|_{L_2(\Pi_{\alpha,N})} &\leqslant CN^2\|f\|_{L_2(\Pi_{\alpha,N})},\\ \sum_{j=1}^{n+1}\left\|\frac{\partial}{\partial x_j}\hat{\mathcal{R}}^\varepsilon_{\alpha,N}(\lambda)f\right\|_{L_2(\Pi_{\alpha,N})} &\leqslant CN^2\|f\|_{L_2(\Pi_{\alpha,N})},\\ \sum_{i,j=1}^{n+1}\left\|\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}\hat{\mathcal{R}}^\varepsilon_{\alpha,N}(\lambda)f\right\|_{L_2(\Pi_{\alpha,N})} &\leqslant CN^2\|f\|_{L_2(\Pi_{\alpha,N})},\end{aligned} \tag{5.15}$$

где константа C не зависит от f, ε, α и N.

Доказательство. Представление (5.14) является стандартным для резольвент самосопряженных операторов в гильбертовых пространствах и отдельного доказательства требуют лишь оценки (5.15).

Введем обозначение $u := \hat{\mathcal{R}}^{\varepsilon}_{\alpha,N}(\lambda)f$. Первая оценка в (5.15) немедленно получается из стандартной оценки нормы резольвенты в терминах расстояния до спектра с учетом (5.13):

$$\|\hat{\mathcal{R}}^{\varepsilon}_{\alpha,N}(\lambda)f\|_{L_2(\Pi_{\alpha,N})} \leqslant \frac{\|f\|_{L_2(\Pi_{\alpha,N})}}{\operatorname{dist}\big(\lambda, \sigma(\mathcal{H}^{\varepsilon}_{\alpha,N}(\mathbf{1})) \setminus \{\Lambda_\varepsilon\}\big)} \leqslant \frac{3N^2}{C_1}\|f\|_{L_2(\Pi_{\alpha,N})}.$$

Функция u является решением уравнения

$$\big(\mathcal{H}^{\varepsilon}_{\alpha,N}(\mathbf{1}) - \lambda\big)u = f - \frac{(f,\Psi_\varepsilon)_{L_2(\Pi_{\alpha,N})}}{N^n\|\Psi_\varepsilon\|^2_{L_2(\square)}}\Psi_\varepsilon, \quad (u,\Psi_0)_{L_2(\Pi_{\alpha,N})} = 0.$$

Выбрав фиксированное число b, как в доказательстве леммы 5.1, перепишем это уравнение в виде

$$\big(\mathcal{H}^{\varepsilon}_{\alpha,N}(\mathbf{1}) - b\big)u = \hat{f}, \quad \hat{f} := (\lambda - b)u + f - \frac{(f,\Psi_\varepsilon)_{L_2(\Pi_{\alpha,N})}}{N^n\|\Psi_\varepsilon\|^2_{L_2(\square)}}\Psi_\varepsilon. \tag{5.16}$$

С учетом первой оценки в (5.15) ясно, что

$$\|\hat{f}\|_{L_2(\Pi_{\alpha,N})} \leqslant CN^2\|f\|_{L_2(\Pi_{\alpha,N})}, \tag{5.17}$$

где константа C не зависит от f, ε, α и N.

Выписав интегральное тождество, соответствующее уравнению (5.16), аналогично (5.10), (5.11) с использованием оценки (5.17) несложно доказать второе неравенство в (5.15).

Для доказательства третьего неравенства в (5.15) перепишем уравнение (5.16) в виде краевой задачи:

$$\begin{cases} -\Delta u = -\mathcal{L}^{\varepsilon}(\mathbf{1})u - V_0 u + bu + \hat{f} & \text{в } \Pi_{\alpha,N}, \\ u = 0 & \text{на } \partial\Pi_{\alpha,N} \cap \partial\Pi, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} - \rho_\varepsilon u = 0 & \text{на } \gamma_{\alpha,N}. \end{cases}$$

Используя теперь предположение (A4) и первые два неравенства в (5.15) и повторяя рассуждения из [5, гл. III, § 8], получаем оценку:

$$\sum_{i,j=1}^{n+1} \left\|\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}\right\|^2_{L_2(\Pi_{\alpha,N})} \leqslant C\left(\|\mathcal{L}^{\varepsilon}(\mathbf{1})u\|^2_{L_2(\Pi_{\alpha,N})} + \|f\|^2_{L_2(\Pi_{\alpha,N})}\right),$$

где константа C не зависит от f, ε, α и N. Так как

$$\|\mathcal{L}^{\varepsilon}(\mathbf{1})u\|^2_{L_2(\Pi_{\alpha,N})} \leqslant C\varepsilon^2\|u\|^2_{W_2^2(\Pi_{\alpha,N})} \leqslant C\varepsilon^2 \sum_{i,j=1}^{n+1} \left\|\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}\right\|^2_{L_2(\Pi_{\alpha,N})} + C\varepsilon^2\|f\|^2_{L_2(\Pi_{\alpha,N})},$$

из последних двух оценок получаем третье неравенство в (5.15). □

Переходим непосредственно к доказательству теоремы 2.2. Для этого мы воспользуемся подходом из работ [7–9], основанным на использовании техники из [1, 2].

Представим оператор $\mathcal{H}^{\varepsilon}_{\alpha,N}(\omega)$ в виде

$$\begin{aligned} &\mathcal{H}^{\varepsilon}_{\alpha,N}(\omega) = \mathcal{H}^{\varepsilon}_{\alpha,N}(\mathbf{1}) + \hat{\mathcal{L}}^{\varepsilon}(\omega), \\ &\qquad \hat{\mathcal{L}}^{\varepsilon}(\omega) := \mathcal{L}^{\varepsilon}(\omega) - \mathcal{L}^{\varepsilon}(\mathbf{1}) = \sum_{k \in \Gamma_{\alpha,N}} \mathcal{S}(k)\hat{\mathcal{L}}(\varepsilon\omega_k)\mathcal{S}(-k), \\ &\qquad \hat{\mathcal{L}}(\varepsilon s) := \mathcal{L}(\varepsilon s) - \mathcal{L}(\varepsilon) = \varepsilon(s-1)(\mathcal{L}_1 + \varepsilon(s+1)\mathcal{L}_2) + \varepsilon^3\big(s^3\mathcal{L}_3(\varepsilon s) - \mathcal{L}_3(\varepsilon)\big). \end{aligned}$$

Отметим, что в силу условия (2.1) для произвольной $u \in \mathring{W}_2^2(\square, \partial\square \cap \partial\Pi)$ имеем

$$\begin{aligned}\Big\|\varepsilon^3(s^3\mathcal{L}_3(\varepsilon s) - \mathcal{L}_3(\varepsilon))u\Big\|_{L_2(\Pi_{\alpha,N})} \leqslant \\ \leqslant \varepsilon^3\|(s^3-1)\mathcal{L}_3(\varepsilon s)u\| + \varepsilon^3\|(\mathcal{L}_3(\varepsilon s) - \mathcal{L}_3(\varepsilon))u\|_{L_2(\Pi_{\alpha,N})} \leqslant C\varepsilon^3|s-1|\|u\|_{\mathring{W}_2^2(\square)}\end{aligned} \tag{5.18}$$

с константой C, не зависящей от u, ε и s.

Выпишем уравнение на собственные значения для $\Lambda^\varepsilon_{\alpha,N}(\omega)$ в следующем виде:

$$\Big(\mathcal{H}^\varepsilon_{\alpha,N}(\omega) - \Lambda_{\varepsilon,N}(\omega)\Big)\Psi^\varepsilon_{\alpha,N} + \hat{\Lambda}^\varepsilon(\omega)\Psi^\varepsilon_{\alpha,N} = 0. \tag{5.19}$$

Введем обозначение

$$f^\varepsilon_{\alpha,N} = -\hat{\mathcal{L}}^\varepsilon(\omega)\Psi^\varepsilon_{\alpha,N}.$$

Тогда из уравнения (5.19) следует

$$\big(\mathcal{H}^\varepsilon_{\alpha,N}(\mathbf{1}) - \Lambda^\varepsilon_{\alpha,N}(\omega)\big)\Psi^\varepsilon_{\alpha,N} = f^\varepsilon_{\alpha,N}. \tag{5.20}$$

В силу второй оценки в (5.2) и оценки для ε в условии теоремы 2.2 видим, что при достаточно больших N выполнено $\Lambda^\varepsilon_{\alpha,N}(\omega) \in Q_N$. Поэтому согласно лемме 5.2 мы можем обратить оператор $\big(\mathcal{H}^\varepsilon_{\alpha,N}(\mathbf{1}) - \Lambda^\varepsilon_{\alpha,N}(\omega)\big)$ в (5.20) и воспользоваться затем представлением (5.14):

$$\Psi^\varepsilon_{\alpha,N} = \frac{1}{N^n\|\Psi_\varepsilon\|^2_{L_2(\square)}}\frac{\big(f^\varepsilon_{\alpha,N},\ \Psi_\varepsilon\big)_{L_2(\Pi_{\alpha,N})}}{\Lambda_\varepsilon - \Lambda^\varepsilon_{\alpha,N}(\omega)}\Psi_\varepsilon + \hat{\mathcal{R}}^\varepsilon_{\alpha,N}(\Lambda^\varepsilon_{\alpha,N}(\omega))f^\varepsilon_{\alpha,N}. \tag{5.21}$$

Подставим его в (5.19):

$$f^\varepsilon_{\alpha,N} + \frac{1}{N^n\|\Psi_\varepsilon\|^2_{L_2(\square)}}\frac{\big(f^\varepsilon_{\alpha,N},\ \Psi_\varepsilon\big)_{L_2(\Pi_{\alpha,N})}}{\Lambda_\varepsilon - \Lambda^\varepsilon_{\alpha,N}(\omega)}\hat{\mathcal{L}}^\varepsilon(\omega)\Psi_\varepsilon + \hat{\mathcal{L}}^\varepsilon(\omega)\hat{\mathcal{R}}^\varepsilon_{\alpha,N}(\Lambda^\varepsilon_{\alpha,N}(\omega))f^\varepsilon_{\alpha,N} = 0. \tag{5.22}$$

В силу оценок (5.15) при достаточно больших N для ограниченного оператора $\hat{\mathcal{R}}^\varepsilon_{\alpha,N}(\Lambda^\varepsilon_{\alpha,N}(\omega))$ в $L_2(\Pi_{\alpha,N})$ верна оценка нормы:

$$\Big\|\hat{\mathcal{R}}^\varepsilon_{\alpha,N}(\Lambda^\varepsilon_{\alpha,N}(\omega))\Big\| \leqslant C < 1, \tag{5.23}$$

где константа C не зависит от ε, α и N. Поэтому оператор

$$\mathcal{A}^\varepsilon_{\alpha,N}(\omega) := \big(I + \hat{\mathcal{R}}^\varepsilon_{\alpha,N}(\Lambda^\varepsilon_{\alpha,N}(\omega))\big)^{-1}$$

определен корректно как ограниченный оператор в $L_2(\Pi_{\alpha,N})$. Сразу же отметим, что разлагая его в ряд Неймана, нетрудно проверить представление:

$$\mathcal{A}^\varepsilon_{\alpha,N}(\omega) = I - \hat{\mathcal{R}}^\varepsilon_{\alpha,N}(\Lambda^\varepsilon_{\alpha,N}(\omega) + \mathcal{A}^\varepsilon_{\alpha,N}(\omega)\big(\hat{\mathcal{R}}^\varepsilon_{\alpha,N}(\Lambda^\varepsilon_{\alpha,N}(\omega)\big)^2. \tag{5.24}$$

Подействуем оператором $\mathcal{A}^\varepsilon_{\alpha,N}(\omega)$ на уравнение (5.22):

$$f^\varepsilon_{\alpha,N} + \frac{1}{N^n\|\Psi_\varepsilon\|^2_{L_2(\square)}}\frac{\big(f^\varepsilon_{\alpha,N},\ \Psi_\varepsilon\big)_{L_2(\Pi_{\alpha,N})}}{\Lambda_\varepsilon - \Lambda^\varepsilon_{\alpha,N}(\omega)}\mathcal{A}^\varepsilon_{\alpha,N}(\omega)\hat{\mathcal{L}}^\varepsilon(\omega)\Psi_\varepsilon = 0. \tag{5.25}$$

Скалярное произведение $\big(f^\varepsilon_{\alpha,N},\ \Psi_\varepsilon\big)_{L_2(\Pi_{\alpha,N})}$ не обращается в нуль, так как иначе в силу последнего уравнения имеем $f^\varepsilon_{\alpha,N} = 0$. Ввиду (5.21) это означает, что $\Psi^\varepsilon_{\alpha,N} = 0$ для собственной функции, соответствующей $\Lambda^\varepsilon_{\alpha,N}(\omega)$, что противоречит определению собственной функции.

Вычислим скалярное произведение левой части (5.25) с функцией Ψ_ε в $L_2(\Pi_{\alpha,N})$ и результат сократим на $\big(f^\varepsilon_{\alpha,N},\ \Psi_\varepsilon\big)_{L_2(\Pi_{\alpha,N})}$. В результате получим

$$\Lambda^\varepsilon_{\alpha,N}(\omega) - \Lambda_\varepsilon = \frac{\Big(\mathcal{A}^\varepsilon_{\alpha,N}(\omega)\hat{\mathcal{L}}^\varepsilon(\omega)\Psi_\varepsilon,\ \Psi_\varepsilon\Big)_{L_2(\Pi_{\alpha,N})}}{N^n\|\Psi_\varepsilon\|^2_{L_2(\square)}}.$$

Подставим сюда представление (5.24):

$$\Lambda^\varepsilon_{\alpha,N}(\omega) - \Lambda_\varepsilon = S_1 + S_2 + S_3, \tag{5.26}$$

где

$$S_1 := \frac{\Big(\hat{\mathcal{L}}^\varepsilon(\omega)\Psi_\varepsilon,\ \Psi_\varepsilon\Big)_{L_2(\Pi_{\alpha,N})}}{N^n\|\Psi_\varepsilon\|^2_{L_2(\square)}}, \quad S_2 := -\frac{\Big(\hat{\mathcal{L}}^\varepsilon(\omega)\hat{\mathcal{R}}^\varepsilon_{\alpha,N}(\Lambda^\varepsilon_{\alpha,N}(\omega))\hat{\mathcal{L}}^\varepsilon(\omega)\Psi_\varepsilon,\ \Psi_\varepsilon\Big)_{L_2(\Pi_{\alpha,N})}}{N^n\|\Psi_\varepsilon\|^2_{L_2(\square)}},$$

$$S_3 := \frac{\Big(\hat{\mathcal{L}}^\varepsilon(\omega)\mathcal{A}^\varepsilon_{\alpha,N}(\omega)\big(\hat{\mathcal{R}}^\varepsilon_{\alpha,N}(\Lambda^\varepsilon_{\alpha,N}(\omega))\hat{\mathcal{L}}^\varepsilon(\omega)\big)^2\Psi_\varepsilon,\ \Psi_\varepsilon\Big)_{L_2(\Pi_{\alpha,N})}}{N^n\|\Psi_\varepsilon\|^2_{L_2(\square)}},$$

Наша дальнейшая цель — получить первые члены асимптотик величин S_1, S_2, S_3 при $N\to+\infty$, $\varepsilon\to+0$ с эффективной оценкой остатка.

Наиболее простые вычисления здесь для величины S_3, состоящие лишь в грубых оценках. В силу определения операторов $\hat{\mathcal{L}}$ и $\mathcal{A}^\varepsilon_{\alpha,N}(\omega)$, оценок (5.18), (5.15), (5.23) и асимптотики (2.6) имеем

$$|S_3| \leqslant CN^{4-n}\varepsilon^3 \sum_{k\in\Gamma_{\alpha,N}} (1-\omega_k), \tag{5.27}$$

где константа C не зависит от ε, α, N и ω.

Для S_1 необходимая асимптотика получается следующим образом. Введем обозначение

$$\Psi_2^\varepsilon := \varepsilon^{-2}(\Psi_\varepsilon - \Psi_0 - \varepsilon\Psi_1).$$

В силу асимптотики (2.6) выполнены равномерные по ε оценки

$$\left|\frac{1}{\|\Psi_\varepsilon\|^2_{L_2(\square)}} - 1\right| \leqslant C\varepsilon^2, \quad \|\Psi_2^\varepsilon\|_{W_2^2(\square)} \leqslant C. \tag{5.28}$$

Из определения оператора $\hat{\mathcal{L}}^\varepsilon$ и предположения (A1) выводим

$$S_1 = \frac{1}{N^n\|\Psi_\varepsilon\|^2_{L_2(\square)}} \sum_{k\in\Gamma_{\alpha,N}} \big(\hat{\mathcal{L}}(\varepsilon\omega_k)\Psi_\varepsilon,\ \Psi_\varepsilon\big)_{L_2(\square)},$$

$$\begin{aligned}
\big(\hat{\mathcal{L}}(\varepsilon\omega_k)\Psi_\varepsilon,\ \Psi_\varepsilon\big)_{L_2(\square)} &= \varepsilon(\omega_k-1)\big((\mathcal{L}_1+\varepsilon(\omega_k+1)\mathcal{L}_2)(\Psi_0+\varepsilon\Psi_1),\ (\Psi_0+\varepsilon\Psi_1)\big)_{L_2(\square)} + \\
&+ \varepsilon^3\big((\omega_k^3\mathcal{L}_3(\omega_k) - \mathcal{L}_3(\varepsilon))\Psi_\varepsilon,\ \Psi_\varepsilon\big)_{L_2(\square)} = (\omega_k-1)\big((\mathcal{L}_1+\varepsilon(\omega_k+1)\mathcal{L}_2)(\Psi_0+\varepsilon\Psi_1),\ (\Psi_0+\varepsilon\Psi_1)\big)_{L_2(\square)} + \\
&+ \varepsilon^3\big((\mathcal{L}_1+\varepsilon(\omega_k+1)\mathcal{L}_2)\Psi_2^\varepsilon,\ \Psi_\varepsilon)\big)_{L_2(\square)} + \varepsilon^3\big((\mathcal{L}_1+\varepsilon(\omega_k+1)\mathcal{L}_2)(\Psi_0+\varepsilon\Psi_1),\ \Psi_2^\varepsilon\big)_{L_2(\square)} + \\
&+ \varepsilon^3\big((\omega_k^3\mathcal{L}_3(\omega_k) - \mathcal{L}_3(\varepsilon))\Psi_\varepsilon,\ \Psi_\varepsilon\big)_{L_2(\square)},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\big((\mathcal{L}_1+\varepsilon(\omega_k+1)\mathcal{L}_2)(\Psi_0+\varepsilon\Psi_1),\ (\Psi_0+\varepsilon\Psi_1)\big)_{L_2(\square)} &= \varepsilon(\omega_k+1)(\mathcal{L}_2\Psi_0,\Psi_0)_{L_2(\square)} + \\
&+ 2\varepsilon(\mathcal{L}_1\Psi_0,\Psi_1)_{L_2(\square)} + \varepsilon^2(\mathcal{L}_1\Psi_1,\Psi_1)_{L_2(\square)} + \varepsilon^3(\omega_k+1)(\mathcal{L}_2\Psi_1,\Psi_1)_{L_2(\square)}.
\end{aligned}$$

Следовательно,

$$S_1 = \frac{\varepsilon^2}{N^n}\sum_{k\in\Gamma_{\alpha,N}} (\omega_k-1)\big((\omega_k+1)(\mathcal{L}_2\Psi_0,\Psi_0)_{L_2(\square)} + 2(\Psi_1,\mathcal{L}_1\Psi_0)_{L_2(\square)}\big) + S_4, \tag{5.29}$$

где

$$\begin{aligned}
S_4 :=& \frac{\varepsilon^3}{N^n\|\Psi_\varepsilon\|^2_{L_2(\square)}}\sum_{k\in\Gamma_{\alpha,N}} (\omega_k-1)\big((\mathcal{L}_1\Psi_1,\Psi_1)_{L_2(\square)} + \varepsilon(\omega_k+1)(\mathcal{L}_2\Psi_1,\Psi_1)_{L_2(\square)}\big) + \\
&+ \frac{\varepsilon^3}{N^n\|\Psi_\varepsilon\|^2_{L_2(\square)}}\sum_{k\in\Gamma_{\alpha,N}} (\omega_k-1)\big((\mathcal{L}_1+\varepsilon(\omega_k+1)\mathcal{L}_2)\Psi_2^\varepsilon,\ \Psi_\varepsilon)\big)_{L_2(\square)} + \\
&+ \frac{\varepsilon^3}{N^n\|\Psi_\varepsilon\|^2_{L_2(\square)}}\sum_{k\in\Gamma_{\alpha,N}} (\omega_k-1)\big((\mathcal{L}_1+\varepsilon(\omega_k+1)\mathcal{L}_2)(\Psi_0+\varepsilon\Psi_1),\ \Psi_2^\varepsilon\big)_{L_2(\square)} +
\end{aligned}$$

$$+\frac{\varepsilon^3}{N^n\|\Psi_\varepsilon\|^2_{L_2(\square)}}\sum_{k\in\Gamma_{\alpha,N}}\big((\omega_k^3\mathcal{L}_3(\omega_k)-\mathcal{L}_3(\varepsilon))\Psi_\varepsilon,\ \Psi_\varepsilon\big)_{L_2(\square)}+$$
$$+\frac{\varepsilon^2}{N^n}\left(\frac{1}{\|\Psi_\varepsilon\|^2_{L_2(\square)}}-1\right)\sum_{k\in\Gamma_{\alpha,N}}(\omega_k-1)\big((\omega_k+1)(\mathcal{L}_2\Psi_0,\Psi_0)_{L_2(\square)}+2(\Psi_1,\mathcal{L}_1\Psi_0)_{L_2(\square)}\big).$$

С учетом неравенств (5.18), (5.28) и асимптотики (2.6), для S_4 имеем равномерную по ε и N оценку:

$$|S_4|\leqslant C\varepsilon^3N^{-n}\sum_{k\in\Gamma_{\alpha,N}}(1-\omega_k). \tag{5.30}$$

Переходим к исследованию величины S_2. Здесь из функции Ψ_ε и оператора $\hat{\mathcal{L}}_\varepsilon$ мы выделяем лишь первый члены их разложений по ε, остальные слагаемые относим к остатку. В результате совершенно аналогично приведенным выше вычислениями имеем:

$$\begin{gathered}S_2=S_5+S_6,\quad S_5:=-N^{-n}\varepsilon^2\sum_{k\in\Gamma}(\omega_k-1)\Big(\mathcal{L}_1\mathcal{S}(-k)\hat{\mathcal{R}}^\varepsilon_{\alpha,N}\big(\Lambda^\varepsilon_{\alpha,N}(\omega)\big)F_{\alpha,N},\Psi_0\Big)_{L_2(\square)},\\ F_{\alpha,N}:=\sum_{p\in\Gamma_{\alpha,N}}(\omega_p-1)\mathcal{S}(p)\mathcal{L}_1\mathcal{S}(-p)\Psi_0,\quad |S_6|\leqslant CN^{1-n}\varepsilon^3\sum_{k\in\Gamma_{\alpha,N}}(1-\omega_k).\end{gathered}\tag{5.31}$$

Так как оператор $\mathcal{L}_1$ симметричен, то

$$(\mathcal{L}_1\mathcal{S}(-k)\hat{\mathcal{R}}^\varepsilon_{\alpha,N}(\Lambda^\varepsilon_{\alpha,N}(\omega))F_{\alpha,N},\Psi_0)_{L_2(\square)}=(\mathcal{S}(-k)\hat{\mathcal{R}}^\varepsilon_{\alpha,N}(\Lambda^\varepsilon_{\alpha,N}(\omega))F_{\alpha,N},\mathcal{L}_1\Psi_0)_{L_2(\square)}.$$

Применяя резольвентное тождество

$$\hat{\mathcal{R}}^\varepsilon_{\alpha,N}(\Lambda^\varepsilon_{\alpha,N}(\omega))-\hat{\mathcal{R}}^\varepsilon_{\alpha,N}(\Lambda_0)=\big(\Lambda^\varepsilon_{\alpha,N}(\omega)-\Lambda_0\big)\hat{\mathcal{R}}^\varepsilon_{\alpha,N}(\Lambda^\varepsilon_{\alpha,N}(\omega))\hat{\mathcal{R}}^\varepsilon_{\alpha,N}(\Lambda_0),$$

получаем:

$$\begin{aligned}\Big(\mathcal{L}_1\mathcal{S}(-k)\hat{\mathcal{R}}^\varepsilon_{\alpha,N}\big(\Lambda^\varepsilon_{\alpha,N}(\omega)\big)F_{\alpha,N},\Psi_0\Big)_{L_2(\square)}&=(\mathcal{S}(-k)\hat{\mathcal{R}}^\varepsilon_{\alpha,N}(\Lambda_0)F_{\alpha,N},\mathcal{L}_1\Psi_0)_{L_2(\square)}+\\&+\Big(\mathcal{S}(-k)\hat{\mathcal{R}}^\varepsilon_{\alpha,N}\big(\Lambda^\varepsilon_{\alpha,N}(\omega)\big)\hat{\mathcal{R}}^\varepsilon_{\alpha,N}(\Lambda_0)F_{\alpha,N},\mathcal{L}_1\Psi_0\Big)_{L_2(\square)}.\end{aligned}\tag{5.32}$$

Аналогично (5.12) можно проверить, что

$$\|\hat{\mathcal{R}}^\varepsilon_{\alpha,N}(\Lambda_0)-\hat{\mathcal{R}}^0_{\alpha,N}(\Lambda_0)\|\leqslant C\varepsilon,$$

где резольвенты рассматриваются как операторы в $L_2(\Pi_{\alpha,N})$, а константа C не зависит от ε, α и N. Отсюда и из (5.32) вытекает, что

$$\begin{gathered}S_5=-N^{-n}\varepsilon^2\sum_{k\in\Gamma_{\alpha,N}}(\omega_k-1)\Big(\mathcal{S}(-k)\hat{\mathcal{R}}^0_{\alpha,N}(\Lambda_0)F_{\alpha,N},\ \mathcal{L}_1\Psi_0\Big)_{L_2(\square)}+\big(\Lambda^\varepsilon_{\alpha,N}(\omega)-\Lambda_0\big)S_7+S_8,\\ |S_7|\leqslant CN^{4-n}\varepsilon^2\sum_{k\in\Gamma_{\alpha,N}}(1-\omega_k)\leqslant CN^4\varepsilon^2,\quad |S_8|\leqslant CN^{-n}\varepsilon^3\sum_{k\in\Gamma_{\alpha,N}}(1-\omega_k).\end{gathered}$$

Отметим, что за счет выбора достаточно больших N в условии теоремы 2.2 можно добиться выполнения неравенства

$$|S_7|\leqslant\frac{1}{2}. \tag{5.33}$$

Из последних соотношений, (5.26), (5.27), (5.29), (5.30), (5.31), (5.32) следует, что

$$\Lambda^\varepsilon_{\alpha,N}(\omega)-\Lambda_0=\frac{N^{-n}\varepsilon^2S_9+S_{10}}{1-S_7},\quad |S_{10}|\leqslant CN^{4-n}\varepsilon^3\sum_{k\in\Gamma_{\alpha,N}}(1-\omega_k), \tag{5.34}$$

$$S_9 := \sum_{k\in\Gamma_{\alpha,N}} (\omega_k-1)\Big((\omega_k+1)(\mathcal{L}_2\Psi_0,\Psi_0)_{L_2(\square)} + 2(\Psi_1,\mathcal{L}_1\Psi_0)_{L_2(\square)}\Big)-$$

$$-\sum_{k\in\Gamma_{\alpha,N}} (\omega_k-1)\Big(\mathcal{S}(-k)\hat{\mathcal{R}}^0_{\alpha,N}(\Lambda_0)F_{\alpha,N},\ \mathcal{L}_1\Psi_0\Big)_{L_2(\square)},$$

где константа C не зависит от ω, ε, α и N.

Наш следующий шаг — нижняя оценка величины S_9. Для этого нам понадобится следующая вспомогательная лемма.

Лемма 5.3. *Имеет место оценка*

$$-\sum_{k\in\Gamma_{\alpha,N}} (\omega_k-1)\Big(\mathcal{S}(-k)\hat{\mathcal{R}}^0_{\alpha,N}(\Lambda_0)F_{\alpha,N},\ \mathcal{L}_1\Psi_0\Big)_{L_2(\square)} \geqslant \sum_{k\in\Gamma_{\alpha,N}} (1-\omega_k)^2(\Phi_1,\mathcal{L}_1\Psi_0)_{L_2(\square)}.$$

Доказательство. Из предположения (A1) и определения функции $F_{\alpha,N}$ следует, что

$$(F_{\alpha,N},\Psi_0)_{L_2(\square_k)}=0,\quad k\in\Gamma_{\alpha,N},\qquad (F_{\alpha,N},\Psi_0)_{L_2(\Pi_{\alpha,N})}=0. \tag{5.35}$$

Для вещественных λ из малой проколотой окрестности точки Λ_0 введем обозначение

$$U_\lambda := -\big(\mathcal{H}^0_{\alpha,N}(\omega)-\lambda\big)^{-1}F_{\alpha,N},\quad \big(\mathcal{H}^0_{\alpha,N}(\omega)-\lambda\big)U_\lambda = F_{\alpha,N}, \tag{5.36}$$

а через W_λ обозначим решение краевой задачи

$$\begin{cases} (-\Delta-\Lambda_0)W_\lambda = -F_{\alpha,N} & \text{в } \Pi_{\alpha,N}\setminus \bigcup\limits_{k\in\Gamma_{\alpha,N}}\gamma_k,\\ W_\lambda = 0 & \text{на } \partial\Pi_{\alpha,N}\cap\partial\Pi,\\ \dfrac{\partial W_\lambda}{\partial\nu}=0 & \text{на } \bigcup\limits_{k\in\Gamma_{\alpha,N}}\gamma_k. \end{cases} \tag{5.37}$$

В силу условий (5.35) и $\lambda\neq\Lambda_0$ имеем

$$(U_\lambda,\Psi_0)_{L_2(\Pi_{\alpha,N})}=0,\quad (W_\lambda,\Psi_0)_{L_2(\square_k)}=0,\quad k\in\Gamma_{\alpha,N},\quad (W_\lambda,\Psi_0)_{L_2(\Pi_{\alpha,N})}=0. \tag{5.38}$$

Из интегральных тождеств для U_λ и W_λ, вытекающих из (5.32), (5.37), следует, что

$$\|\nabla u\|^2_{L_2(\Pi_{\alpha,N})} - \lambda\|u\|^2_{L_2(\Pi_{\alpha,N})} = -(F_{\alpha,N},u)_{L_2(\Pi_{\alpha,N})},\quad u=U_\lambda,\quad u=W_\lambda,$$

что доказывает вещественность скалярных произведений $(F_{\alpha,N},U_\lambda)_{L_2(\Pi_{\alpha,N})}$ и $(F_{\alpha,N},W_\lambda)_{L_2(\Pi_{\alpha,N})}$.

Как и в доказательстве леммы 4.1, из вариационных формулировок уравнения (5.36) и задачи (5.37) следует, что

$$(U_\lambda,F_{\alpha,N})_{L_2(\Pi_{\alpha,N})} = \inf_{u\in \mathring{W}_2^2(\Pi_{\alpha,N},\partial\Pi_{\alpha,N}\cap\partial\Pi)} \ell^\lambda_{\alpha,N}(u),$$

$$(U_\lambda,F_{\alpha,N})_{L_2(\Pi_{\alpha,N})} = \inf_{u\in \bigoplus\limits_{k\in\Gamma_{\alpha,N}} \mathring{W}_2^2(\square_k,\partial\square_k\cap\partial\Pi)} \ell^\lambda_{\alpha,N}(u),$$

$$\ell^\lambda_{\alpha,N}(u) := \|\nabla u\|^2_{L_2(\Pi_{\alpha,N})} + (V_0u,u)_{L_2(\Pi_{\alpha,N})} - \lambda\|u\|^2_{L_2(\Pi_{\alpha,N})} + 2(F_{\alpha,N},u)_{L_2(\Pi_{\alpha,N})}.$$

Так как

$$\mathring{W}_2^2(\Pi_{\alpha,N},\partial\Pi_{\alpha,N}\cap\partial\Pi) \subset \bigoplus_{k\in\Gamma_{\alpha,N}} \mathring{W}_2^2(\square_k,\partial\square_k\cap\partial\Pi),$$

то с учетом вещественности скалярных произведений $(F_{\alpha,N},U_\lambda)_{L_2(\Pi_{\alpha,N})}$ и $(F_{\alpha,N},W_\lambda)_{L_2(\Pi_{\alpha,N})}$ немедленно получаем

$$(U_\lambda,F_{\alpha,N})_{L_2(\Pi_{\alpha,N})} \geqslant (W_\lambda,F_{\alpha,N})_{L_2(\Pi_{\alpha,N})}.$$

Функции U_λ и W_λ непрерывны при $\lambda\to\Lambda_0$ в норме $L_2(\Pi_{\alpha,N})$ и в силу равенств (5.38) выполнено следующее:

$$U_{\Lambda_0} = -\hat{\mathcal{R}}^0_{\alpha,N}(\Lambda_0)F_{\alpha,N},\quad W_{\Lambda_0}=(\omega_k-1)\Phi_1\quad \text{на } \square_k,\quad k\in\Gamma_{\alpha,N}.$$

Тогда

$$-\Big(\hat{\mathcal{R}}^0_{\alpha,N}(\Lambda_0)F_{\alpha,N},\ F_{\alpha,N}\Big)_{L_2(\Pi_{\alpha,N})} \geqslant \sum_{k\in\Gamma_{\alpha,N}} (\omega_k-1)(\Phi_1, F_{\alpha,N})_{L_2(\square_k)}.$$

Теперь остается лишь заметить, что

$$-\Big(\hat{\mathcal{R}}^0_{\alpha,N}(\Lambda_0)F_{\alpha,N},\ F_{\alpha,N}\Big)_{L_2(\Pi_{\alpha,N})} = -\sum_{k\in\Gamma_{\alpha,N}} (\omega_k-1)\Big(\mathcal{S}(-k)\hat{\mathcal{R}}^0_{\alpha,N}(\Lambda_0)F_{\alpha,N},\ \mathcal{L}_1\Psi_0\Big)_{L_2(\square)},$$

$$\sum_{k\in\Gamma_{\alpha,N}} (\omega_k-1)\big(\Phi_1, F_{\alpha,N}\big)_{L_2(\square_k)} = \sum_{k\in\Gamma_{\alpha,N}} (1-\omega_k)^2\big(\Phi_1, \mathcal{L}_1\Psi_0\big)_{L_2(\square)}.$$

Лемма доказана. □

Из доказанной леммы и (4.18) вытекают соотношения:

$$\begin{aligned} S_9 \geqslant &\sum_{k\in\Gamma_{\alpha,N}} (\omega_k-1)\Big((\omega_k+1)\big(\mathcal{L}_2\Psi_0,\Psi_0\big)_{L_2(\square)} + 2\big(\Psi_1,\mathcal{L}_1\Psi_0\big)_{L_2(\square)}\Big)+ \\ &+\sum_{k\in\Gamma_{\alpha,N}} (1-\omega_k)^2(\Phi_1,\mathcal{L}_1\Psi_0)_{L_2(\square)} = \sum_{k\in\Gamma_{\alpha,N}} \Big((\omega_k^2-1)\Lambda_2 + (\omega_k-1)^2(\Phi_1-\Psi_1,\mathcal{L}_1\Psi_0)_{L_2(\square)}\Big) = \\ &= \sum_{k\in\Gamma_{\alpha,N}} \Big((\omega_k^2-1)\Lambda_2 + (\omega_k-1)^2\big(\operatorname{Re}(\Phi_1-\Psi_1),\ \operatorname{Re}\mathcal{L}_1\Psi_0\big)_{L_2(\square)}\Big). \end{aligned} \tag{5.39}$$

Используя условие (A3) и неравенство $|a|<1$, по аналогии с (4.23) продолжаем оценку (5.39):

$$\begin{aligned} S_9 \geqslant &\sum_{k\in\Gamma_{\alpha,N}} (1-\omega_k)\Big(-(1+\omega_k)\Lambda_2 + (1-\omega_k)\big(\operatorname{Re}(\Phi_1-\Psi_1),\ \operatorname{Re}\mathcal{L}_1\Psi_0\big)_{L_2(\square)}\Big) \geqslant \\ \geqslant &\sum_{k\in\Gamma_{\alpha,N}} (1-\omega_k)\Big(-(1+a)\Lambda_2 + (1-a)\big(\operatorname{Re}(\Phi_1-\Psi_1),\ \operatorname{Re}\mathcal{L}_1\Psi_0\big)_{L_2(\square)}\Big) = \eta \sum_{k\in\Gamma_{\alpha,N}} (1-\omega_k). \end{aligned}$$

Следовательно, ввиду (5.33), (5.34) получаем

$$\Lambda^\varepsilon_{\alpha,N}(\omega) - \Lambda_\varepsilon \geqslant \frac{2\varepsilon^2(\eta - CN^4\varepsilon)}{N^n} \sum_{k\in\Gamma_{\alpha,N}} (1-\omega_k) \geqslant \frac{\eta\varepsilon^2}{N^n} \sum_{k\in\Gamma_{\alpha,N}} (1-\omega_k)$$

при достаточно больших N и достаточно малом c_0 в условии теоремы 2.2.

6. Оценка вероятности

Данный раздел посвящен доказательству теоремы 2.4. Оно фактически воспроизводит доказательства теоремы 2.5 в [9] и теоремы 3.1 в [7], необходимы лишь незначительные изменения. А именно, выберем $K,\gamma\in\mathbb{N}$ и возьмем $N:=K^\gamma$. Тогда

$$\Pi_{\alpha,N} = \bigcup_{\beta\in M_{K,\gamma}} \Pi_{\beta,K}, \quad \Pi_{\beta,K}\cap\Pi_{\varrho,K}=\emptyset, \quad \beta\neq\varrho, \quad M_{K,\gamma} := K\Gamma\cap\Gamma_{\alpha,N}.$$

Отметим, что число элементов во множестве $M_{K,\gamma}$ равно

$$\left(\frac{N}{K}\right)^n = (K^{\gamma-1})^n = N^{n(1-1/\gamma)}.$$

На боковых границах $\gamma_{\beta,K}$ множеств $\Pi_{\beta,K}$ ставится краевое условие (2.9). Аналогично (4.2) имеем:

$$\Lambda^\varepsilon_{\alpha,N}(\xi) \geqslant \min_{\beta\in M_{k,\Gamma}} \Lambda^\varepsilon_{\beta,K}(\xi).$$

Отсюда следует, что

$$\big\{\xi\in\Omega:\ \Lambda^\varepsilon_{\alpha,N}(\xi)-\Lambda_\varepsilon \leqslant N^{-1/2}\big\} \subseteq \bigcup_{k\in M_{k,\gamma}} \big\{\xi\in\Omega:\ \Lambda^\varepsilon_{\beta,K}(\xi)-\Lambda_\varepsilon \leqslant K^{-\gamma/2}\big\}, \tag{6.1}$$

и так как случайные величины ξ_k независимы и одинаково распределены, то имеем

$$\sum_{\beta\in M_{K,\gamma}} \mathbb{P}\big(\xi\in\Omega:\ \Lambda^\varepsilon_{\beta,K}(\xi)-\Lambda_\varepsilon\leqslant K^{-\gamma/2}\big)\leqslant N^{n(1-1/\gamma)}\mathbb{P}\big(\xi\in\Omega:\ \Lambda^\varepsilon_{\alpha,K}(\xi)-\Lambda_\varepsilon\leqslant K^{-\gamma/2}\big). \tag{6.2}$$

В силу теоремы 2.2 при $K\geqslant N_1$ и $\varepsilon<c_0K^{-4}$ выполнено следующее:

$$\big\{\xi\in\Omega:\ \Lambda^\varepsilon_{\alpha,K}(\xi)-\Lambda_\varepsilon\leqslant K^{-\gamma.2}\big\}\subseteq\left\{\xi\in\Omega:\ \frac{1}{K^n}\sum_{k\in\Gamma_{\alpha,K}}(1-\xi_k)\leqslant\frac{K^{-\gamma.2}}{\eta\varepsilon^2}\right\}. \tag{6.3}$$

Выберем теперь ε так, что

$$\frac{K^{-\gamma.2}}{\eta\varepsilon^2}\leqslant\frac{\mathbb{E}(|\omega_0|)}{2},\quad \text{т.е.}\quad \varepsilon\geqslant\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\eta\mathbb{E}(|\omega_0|)}}K^{-\gamma/4}. \tag{6.4}$$

Такое неравенство не противоречит условию $\varepsilon\leqslant c_0K^{-4}$, лишь только $K\geqslant K_1$. Воспользуемся теперь принципом больших уклонений в том виде, как это было сделано в [7, лемма 4.3]. Тогда получаем, что существует такая константа c_1, зависящая лишь от μ, что для всех $k\in\mathbb{N}$

$$\mathbb{P}\left(\xi\in\Omega:\ \frac{1}{K^n}\sum_{k\in\Gamma_{\alpha,K}}(1-\xi_k)\leqslant\frac{\mathbb{E}(|\xi_0|)}{2}\right)\leqslant e^{-c_1K^n}.$$

Отсюда и из (6.3), (6.4) вытекает, что

$$\mathbb{P}\left(\xi\in\Omega:\ \frac{1}{K^n}\sum_{k\in\Gamma_{\alpha,K}}(1-\xi_k)\leqslant\frac{K^{-\gamma/2}}{\eta\varepsilon^2}\right)\leqslant\mathbb{P}\left(\xi\in\Omega:\ \frac{1}{K^n}\sum_{k\in\Gamma_{\alpha,K}}(1-\xi_k)\leqslant\frac{\mathbb{E}(|\xi_0|)}{2}\right)\leqslant e^{-c_1K^n}$$

при $K\geqslant\max\{K_1,N_1\}$. Теперь из соотношений (6.1), (6.2) выводим:

$$\mathbb{P}\Big(\xi\in\Omega:\ \Lambda^\varepsilon_{\alpha,N}(\xi)-\Lambda_\varepsilon\leqslant N^{-1/2}\Big)\leqslant N^{n(1-\frac{1}{7}\gamma)}e^{-c_1K^n}\leqslant N^{n(1-1/\gamma)}e^{-c_1N^{n/\gamma}}.$$

Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Борисов Д. И.* Дискретный спектр пары несимметричных волноводов, соединенных окном// Мат. сб. — 2006. — *197*, т 4. — С. 3–32.
2. *Гадыльшин Р. Р.* О локальных возмущениях оператора Шредингера на оси// Теор. мат. физ. — 2002. — *132*, т 4. — С. 97–104.
3. *Борисов Д. И., Каримов Р. Х., Шарапов Т. Ф.* Оценка начальных масштабов для волноводов с некоторыми случайными сингулярными потенциалами// Уфим. мат. ж. — 2015. — *7*, т 2. — С. 35–59.
4. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. — М.: Мир, 1972.
5. *Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнеия эллиптического типа. — М.: Наука, 1973.
6. *Baker J., Loss M., Stolz G.* Minimizing the ground state energy of an electron in a randomly deformed lattice// Commun. Math. Phys. — 2008. — *283*, т 2. — С. 397–415.
7. *Borisov D., Veselić I.* Low lying spectrum of weak-disorder quantum waveguides// J. Stat. Phys. — 2011. — *142*, т 1. — С. 58–77.
8. *Borisov D., Veselić I.* Low lying eigenvalues of randomly curved quantum waveguides// J. Funct. Anal. — 2013. — *265*, т 11. — С. 2877–2909.
9. *Borisov D., Golovina A., Veselić I.* Quantum Hamiltonians with weak random abstract perturbation. I. Initial length scale estimate// Ann. H. Poincaré. — 2016. — *17*, т 9. — С. 2341–2377.
10. *Bourgain J.* An approach to Wegner's estimate using subharmonicity// J. Stat. Phys. — 2009. — *134*, тт 5-6. — С. 969–978.
11. *Erdös L., Hasler D.* Anderson localization at band edges for random magnetic fields// J. Stat. Phys. — 2012. — *146*, т 5. — С. 900–923.
12. *Erdös L., Hasler D.* Wegner estimate and Anderson localization for random magnetic fields// Commun. Math. Phys. — 2012. — *309*, т 2. — С. 507–542.

13. *Fröhlich J., Spencer T.* Absence of diffusion in the Anderson tight binding model for large disorder or low energy// Commun. Math. Phys. — 1983. — *88*, т 2. — С. 151–184.
14. *Ghribi F. and Klopp F.* Localization for the random displacement model at weak disorder// Ann. H. Poincaré. — 2010. — *11*, тт 1–2. — С. 127–149.
15. *Klopp F.* Localization for some continuous random Schrödinger operators// Commun. Math. Phys. — 1995. — *167*, т 3. — С. 553–569.
16. *Klopp F.* Weak disorder localization and Lifshitz tails: continuous Hamiltonians// Ann. H. Poincaré. — 2002. — *3*, т 4. — С. 711–737.
17. *Klopp F., Loss M., Nakamura S., Stolz G.* Localization for the random displacement model// Duke Math. J. — 2012. — *161*, т 4. — С. 587–621.
18. *Klopp F., Nakamura S., Nakano F., Nomura Y.* Anderson localization for 2D discrete Schrödinger operators with random magnetic fields// Ann. H. Poincaré. — 2003. — *4*, т 4. — С. 795–811.
19. *Leonhardt K., Peyerimhoff N., Tautenhahn M., Veselić I.* Wegner estimate and localization for alloy-type models with sign-changing exponentially decaying single-site potentials// Rev. Math. Phys. — 2015. — *27*, т 4. — С. 1550007.
20. *Martinelli F., Holden H.* On absence of diffusion near the bottom of the spectrum for a random Schrödinger operator on $L^2(R^\nu)$// Commun. Math. Phys. — 1984. — *93*, т 2. — С. 197–217.
21. *Stolz G.* Non-monotonic random Schrödinger operators: the Anderson model// J. Math. Anal. Appl. — 2000. — *248*, т 1. — С. 173–183.
22. *Ueki N.* On spectra of random Schrödinger operators with magnetic fields// Osaka J. Math. — 1994. — *31*, т 1. — С. 177–187.
23. *Ueki N.* Wegner estimate and localization for random magnetic fields// Osaka J. Math. — 2008. — *45*, т 3. — С. 565–608.
24. *Veselić I.* Wegner estimate and the density of states of some indefinite alloy type Schrödinger operators// Lett. Math. Phys. — 2002. — *59*, т 3. — С. 199–214.

Д. И. Борисов
Институт математики с Вычислительным центром Уфимского научного центра РАН;
Башкирский государственный педагогический университет им. М. Акмуллы, Уфа;
Университет Градца Кралове, Чешская Республика
E-mail: borisovdi@yandex.ru

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 141 (2017). С. 42–47

УДК 517.929.7, 517.929.8, 517.984

СХОДИМОСТЬ СОБСТВЕННЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ЗАДАЧИ ТИПА СТЕКЛОВА В ПОЛУПОЛОСЕ С МАЛЫМ ОТВЕРСТИЕМ

© 2017 г. **Д. Б. ДАВЛЕТОВ, О. Б. ДАВЛЕТОВ**

Аннотация. В работе рассматривается задача типа Стеклова для оператора Лапласа в полуполосе, содержащей малое отверстие. На боковых границах и на границе малого отверстия выставлены условия Дирихле, а на основании полуполосы — спектральное условие Стеклова. Доказана теорема о сходимости собственных значений такой задачи при стремлении малого параметра («диаметра» отверстия) к нулю.

Ключевые слова: полуполоса, задача Стеклова, собственное значение, сингулярное возмущение, малое отверстие, сходимость.

AMS Subject Classification: 47A10, 58J37

1. Введение. Изучение спектральных свойств эллиптических операторов в ограниченных и неограниченных областях связано с многочисленными приложениями в акустике и квантовой механике. Кроме того, эти задачи обладают разнообразными свойствами, интересными с математической точки зрения.

Исследование краевых задач для эллиптических оператор в области с малым отверстием имеет достаточно большую историю. Еще в 1948 г. в [14] была получена оценка сдвига собственного значения краевой задачи Дирихле для оператора Лапласа при удалении из области малого множества. Позже аналогичный результат был получен в [5]. В [6] построена полная асимптотика решения скалярной краевой задачи для эллиптического оператора второго порядка в n-мерной области, содержащей малую полость. Асимптотика решения возмущенной эллиптической краевой задачи на спектре предельной краевой задачи получена в [7]. В [10] построены полные асимптотические разложения первых собственных чисел и соответствующих собственных функций классических краевых задач для оператора Лапласа в двумерных и трехмерных областях с малыми отверстиями. Краевые задачи для эллиптических операторов теории упругости в ограниченных областях с малыми отверстиями исследованы в [2–4, 8]. В случае краевых условий Неймана на границе области с малой полостью для эллиптического оператора линейной теории упругости построены полные асимптотические разложения решений возмущенных краевых задач (см. [8]). Полные асимптотики собственных значений задачи Стеклова для оператора Лапласа в области с малым отверстием были построены в [12]. Возникновение собственных значений из края существенного спектра для цилиндров с малыми отверстиями и граничными условиями Дирихле на границах этих малых отверстий исследовалось в [1, 13].

В настоящей работе рассматривается задача типа Стеклова для оператора Лапласа в полуполосе, содержащей малое отверстие. На боковых границах и на границе малого отверстия выставлены условия Дирихле, а на основании полуполосы — спектральное условие Стеклова.

2. Постановка задачи и формулировка основного результата. Пусть $\Omega := (-b, b)$, $\Pi := \Omega \times (a, +\infty)$, $a < 0$, $b > 0$, $\Omega_a := \Omega \times \{a\}$, $\{0\} \in \Pi$, $\omega \subset \mathbb{R}^2$ — связная ограниченная область с гладкой границей, $\omega_\varepsilon = \{x : \varepsilon^{-1}x \in \omega\}$, $0 < \varepsilon \ll 1$, $\Pi_\varepsilon = \Pi \setminus \overline{\omega}_\varepsilon$. Рассматривается следующая

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект т 16-31-00066-мол) и гранта Республики Башкортостан молодым ученым и молодежным научным коллективам (2016 г.).

сингулярно возмущенная краевая задача Стеклова:

$$\begin{aligned} -\Delta\psi_\varepsilon &= 0, \qquad x \in \Pi_\varepsilon, \qquad && \psi_\varepsilon = 0, \qquad x \in \partial\Pi \setminus \overline{\Omega}_a, \\ \frac{\partial \psi_\varepsilon}{\partial \nu} &= \lambda_\varepsilon \psi_\varepsilon, \qquad x \in \Omega_a, \qquad && \psi_\varepsilon = 0, \qquad x \in \partial\omega_\varepsilon, \end{aligned} \tag{1}$$

где ν — внешняя нормаль. Для (1) назовем предельной следующую краевую задачу:

$$\begin{aligned} -\Delta\psi_0 &= 0, && x \in \Pi, \\ \psi_0 &= 0, && x \in \partial\Pi \setminus \overline{\Omega}_a, \\ \frac{\partial \psi_0}{\partial \nu} &= \lambda_0 \psi_0, && x \in \Omega_a. \end{aligned} \tag{2}$$

Определим пространство $H^1(\Pi)$ как пополнение по норме

$$\|w\|_{H^1(\Pi)} = \left(\int\limits_{\Pi} |\nabla w|^2 \, dx + \int\limits_{\Omega_a} w^2 dx_1 \right)^{1/2} \tag{3}$$

функций из $C^\infty(\overline{\Pi})$, обладающих конечным интегралом Дирихле:

$$\int\limits_{\Pi} |\nabla w|^2 dx < \infty.$$

Обозначим через $H^1(\Pi; \partial\Pi \setminus \overline{\Omega}_a)$ подмножество функций из $H^1(\Pi)$, обращающихся в нуль на $\partial\Pi \setminus \overline{\Omega}_a$. Пространство $H^1(\Pi_\varepsilon)$ определим как пополнение по норме

$$\|w\|_{H^1(\Pi_\varepsilon)} = \left(\int\limits_{\Pi_\varepsilon} |\nabla w|^2 \, dx + \int\limits_{\Omega_a} w^2 dx_1 \right)^{1/2} \tag{4}$$

функций из $C^\infty(\overline{\Pi}_\varepsilon)$, обладающих конечным интегралом Дирихле:

$$\int\limits_{\Pi_\varepsilon} |\nabla w|^2 dx < \infty.$$

Подмножество функций из $H^1(\Pi_\varepsilon)$, обращающихся в нуль на $\partial\omega_\varepsilon \cup \partial\Pi \setminus \overline{\Omega}_a$, обозначим через $H^1(\Pi_\varepsilon; \partial\omega_\varepsilon \cup \partial\Pi \setminus \overline{\Omega}_a)$.

Очевидно, что если функцию, принадлежащую $H^1(\Pi_\varepsilon; \partial\omega_\varepsilon \cup \partial\Pi \setminus \overline{\Omega}_a)$, продолжить нулем в $\overline{\omega}_\varepsilon$, то она будет принадлежать $H^1(\Pi; \partial\Pi \setminus \overline{\Omega}_a)$. Поэтому всюду далее для этих продолжений будем сохранять их первоначальные обозначения.

Собственные функции ψ_ε и ψ_0 краевых задач (1), (2) рассматриваются в классах $H^1(\Pi_\varepsilon; \partial\omega_\varepsilon \cup \partial\Pi \setminus \overline{\Omega}_a)$ и $H^1(\Pi; \partial\Pi \setminus \overline{\Omega}_a)$ соответственно.

Методом Фурье легко показать, что собственные значения

$$0 < \lambda_{0,1} < \lambda_{0,2} \leqslant \cdots \leqslant \lambda_{0,k} \leqslant \cdots$$

и соответствующие ортонормированные в $L_2(\Omega_a)$ собственные функции $\psi_{0,k}$ краевой задачи (2) определяются равенствами

$$\lambda_{0,k} = \sqrt{\mu_k}, \quad \psi_{0,k}(x) = \varphi_k(x_1) \mathrm{e}^{-\sqrt{\mu_k}(x_2 - a)}, \tag{5}$$

где $\mu_k = \left(\frac{\pi k}{2b}\right)^2 > 0, k \in \mathbb{N}$, и φ_k — собственные значения и соответствующие нормированные в $L_2(\Omega)$ собственные функции краевой задачи

$$-\frac{d^2 \varphi_k}{dx_1^2} = \mu_k \varphi_k \quad \text{в } \Omega, \qquad \varphi_k = 0 \quad \text{на } \partial\Omega. \tag{6}$$

Основной результат сформулируем в виде следующей теоремы.

Теорема 1. *Пусть отрезок* $[\lambda_-, \lambda_+]$ *не содержит собственных значений предельной краевой задачи* (2). *Тогда при достаточно малых* ε *этот отрезок не содержит и собственных значений сингулярно возмущенной краевой задачи* (1).

Пусть кратность собственного значения λ_0 *предельной краевой задачи* (2) *равна* d. *Тогда существует ровно* d *собственных значений* $\lambda_\varepsilon^{(l)}$, $l = \overline{1, d}$ (*с учетом кратности*) *краевой задачи* (1), *сходящихся к* λ_0 *при* $\varepsilon \to 0$.

Пусть $R_\varepsilon : L_2(\Omega_a) \to L_2(\Omega_a)$ — *линейный оператор, ставящий в соответствие функции* $f_\varepsilon \in L_2(\Omega_a)$ *сужение решения* u_ε *краевой задачи*

$$\begin{aligned} -\Delta u_\varepsilon &= 0, \qquad x \in \Pi_\varepsilon, \qquad\qquad u_\varepsilon = 0, \qquad x \in \partial\Pi \setminus \overline{\Omega}_a, \\ \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial \nu} + u_\varepsilon &= f_\varepsilon, \qquad x \in \Omega_a, \qquad\qquad u_\varepsilon = 0, \qquad x \in \partial\omega_\varepsilon \end{aligned} \tag{7}$$

на Ω_a, *а* $R_0 : L_2(\Omega_a) \to L_2(\Omega_a)$ — *линейный оператор, ставящий в соответствие функции* $f \in L_2(\Omega_a)$ *сужение решения* u_0 *краевой задачи*

$$\begin{aligned} -\Delta u_0 &= 0, \qquad x \in \Pi, \\ u_0 &= 0, \qquad x \in \partial\Pi \setminus \overline{\Omega}_a, \\ \frac{\partial u_0}{\partial \nu} + u_0 &= f, \qquad x \in \Omega_a \end{aligned} \tag{8}$$

на Ω_a:

$$R_0 f := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(f, \varphi_k)_{L_2(\Omega)}}{\mu_k + 1} \varphi_k(x_1). \tag{9}$$

Тогда для соответствующих собственных проекторов $\mathcal{R}_\varepsilon := R_\varepsilon^{-1}$ *и* $\mathcal{R}_0 := R_0^{-1}$ *в* $L_2(\Omega_a)$ *имеет место сходимость* $\mathcal{R}_\varepsilon \to \mathcal{R}_0$ *при* $\varepsilon \to 0$.

3. Доказательство теоремы 1. Краевые задачи (7) и (8) будем понимать в обобщенном смысле. Пусть $f_\varepsilon, f \in L_2(\Omega_a)$. Тогда $u_\varepsilon \in H^1(\Pi_\varepsilon; \partial\omega_\varepsilon \cup \partial\Pi \setminus \overline{\Omega}_a)$ называется *обобщенным решением* краевой задачи (7), если для любого $v \in H^1(\Pi_\varepsilon; \partial\omega_\varepsilon \cup \partial\Pi \setminus \overline{\Omega}_a)$ выполняется равенство

$$\int\limits_{\Pi_\varepsilon} \nabla u_\varepsilon \nabla v \, dx + \int\limits_{\Omega_a} u_\varepsilon v \, dx_1 = \int\limits_{\Omega_a} f_\varepsilon v \, dx_1. \tag{10}$$

Аналогично, элемент $u_0 \in H^1(\Pi; \partial\Pi \setminus \overline{\Omega}_a)$ называется *обобщенным решением* краевой задачи (8), если для любого $v \in H^1(\Pi; \partial\Pi \setminus \overline{\Omega}_a)$ выполняется равенство

$$\int\limits_{\Pi} \nabla u_0 \nabla v \, dx + \int\limits_{\Omega_a} u_0 v \, dx_1 = \int\limits_{\Omega_a} f v \, dx_1. \tag{11}$$

Подставляя $v = u_\varepsilon$ в (10) и $v = u_0$ в (11), получаем следующие априорные оценки:

$$\|u_\varepsilon\|_{H^1(\Pi)} \leqslant \|f_\varepsilon\|_{L_2(\Omega)}, \quad \|u_0\|_{H^1(\Pi)} \leqslant \|f\|_{L_2(\Omega)}, \tag{12}$$

из которых вытекает единственность решений краевых задач (7) и (8).

Пусть $(u, v)_0$ — скалярное произведение в $L_2(\Omega)$. Следуя методу разделения переменных, решение краевой задачи (8) можно представить в виде

$$u_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(f, \varphi_k)_0}{\mu_k + 1} \varphi_k(x_1) e^{-\sqrt{\mu_k}(x_2 - a)}. \tag{13}$$

Правая часть равенства (13) представляет собой ряд Фурье, сходящийся к $u_0(x)$ в $H^1(\Pi; \partial\Pi \setminus \overline{\Omega}_a)$. Осталось показать разрешимость краевой задачи (7). Пусть $(u, v)_1$ — скалярное произведение в $H^1(\Pi_\varepsilon)$, индуцирующее норму (4). Тогда равенство (10) перепишется в виде

$$(u_\varepsilon, v)_1 = \int\limits_{\Omega_a} f_\varepsilon v \, dx_1. \tag{14}$$

При любом фиксированном $f_\varepsilon \in L_2(\Omega)$ правая часть в (14) является линейным ограниченным функционалом в $H^1(\Pi_\varepsilon; \partial\omega_\varepsilon \cup \partial\Pi \setminus \overline{\Omega}_a)$. Тогда в силу теоремы Рисса существует такой единственный элемент $F_\varepsilon \in H^1(\Pi_\varepsilon; \partial\omega_\varepsilon \cup \partial\Pi \setminus \overline{\Omega}_a)$, что

$$\int\limits_{\Omega_a} f_\varepsilon v\, dx_1 = (F_\varepsilon, v)_1$$

для любого $v \in H^1(\Pi_\varepsilon; \partial\omega_\varepsilon \cup \partial\Pi \setminus \overline{\Omega}_a)$. Отсюда и из (14) следует, что $u_\varepsilon = F_\varepsilon$. Таким образом, краевая задача (7) однозначно разрешима.

Напомним, что $R_\varepsilon : L_2(\Omega_a) \to L_2(\Omega_a)$ — линейный оператор, ставящий в соответствие функции f_ε сужение решения u_ε краевой задачи (7) на Ω_a, а $R_0 : L_2(\Omega_a) \to L_2(\Omega_a)$ — линейный оператор, ставящий в соответствие функции f сужение решения u_0 краевой задачи (8) на Ω_a, т.е. (см. (13))

$$R_0 f := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(f, \varphi_k)_0}{\mu_k + 1} \varphi_k(x_1). \tag{15}$$

Так как $f_k \rightharpoonup f$ в $L_2(\Omega_a)$ при $k \to \infty$ и оператор R_0 компактен в силу компактности вложения $H^1(\Pi)$ в $L_2(\Omega_a)$, то имеет место сходимость

$$R_0 f_k \to R_0 f \quad \text{в } L_2(\Omega_a) \text{ при } k \to \infty. \tag{16}$$

Лемма 1. *Пусть v — произвольная функция из $C^\infty(\overline{\Pi})$, обращающаяся в нуль на $\partial\Pi \setminus \overline{\Omega}_a$, обладающая конечным интегралом Дирихле. Тогда существуют такие функции $v_\varepsilon \in H^1(\Pi_\varepsilon; \partial\omega_\varepsilon \cup \partial\Pi \setminus \overline{\Omega}_a)$, что*

$$\|v - v_\varepsilon\|_{H^1(\Pi)} \to 0 \quad \text{при } \varepsilon \to 0.$$

Доказательство. Не ограничивая общности будем считать, что область ω_ε лежит в круге радиуса ε с центром в начале координат. Пусть $\chi(t)$ — бесконечно дифференцируемая срезающая функция, тождественно равная нулю при $t \leqslant 1$ и единице при $t \geqslant 2$. Очевидно, что

$$\|1 - \chi_\varepsilon\|_{L_2(\Omega_a)} \to 0, \quad \|1 - \chi_\varepsilon\|_{L_2(\Pi)} \to 0, \quad \|\nabla(1 - \chi_\varepsilon)\|_{L_2(\Pi)} \to 0 \quad \text{при } \varepsilon \to 0. \tag{17}$$

Функции $v_\varepsilon(x) := \chi_\varepsilon(x) v(x)$, где $\chi_\varepsilon(x) = \chi(|x|/\varepsilon)$, принадлежат пространству $H^1(\Pi_\varepsilon; \partial\omega_\varepsilon \cup \partial\Pi \setminus \overline{\Omega}_a)$ и обращаются в нуль в круге радиуса ε с центром в начале координат.

В силу определения функции v_ε, неравенства Коши—Буняковского и сходимостей (17) получаем, что

$$\begin{aligned} \|v - v_\varepsilon\|^2_{H^1(\Pi)} &= \|(1 - \chi_\varepsilon) v\|^2_{H^1(\Pi)} = \|\nabla((1 - \chi_\varepsilon) v)\|^2_{L_2(\Pi)} + \\ &+ \|(1 - \chi_\varepsilon) v\|^2_{L_2(\Omega_a)} \leqslant C_1 \|1 - \chi_\varepsilon\|^2_{L_2(\Pi)} + C_2 \|\nabla(1 - \chi_\varepsilon)\|^2_{L_2(\Pi)} + \\ &+ C_3 \|1 - \chi_\varepsilon\|_{L_2(\Pi)} \|\nabla(1 - \chi_\varepsilon)\|_{L_2(\Pi)} + C_4 \|1 - \chi_\varepsilon\|^2_{L_2(\Omega_a)} \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 0. \end{aligned}$$

Таким образом, $\|v - v_\varepsilon\|_{H^1(\Pi)} \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. □

Пусть

$$\|w\|_{H^1(\Pi(R))} = \left(\int\limits_{\Pi(R)} |\nabla w|^2\, dx + \int\limits_{\Omega_a} w^2\, dx_1 \right)^{1/2},$$

где $\Pi(R) = \Omega \times (a, R)$, $R > 0$. Так как (см., например, [11, гл. III, § 5, теорема 5]),

$$\|w\|_{W_2^1(\Pi(R))} \leqslant C(R) \|w\|_{H^1(\Pi(R))}, \quad \|w\|_{H^1(\Pi(R))} \leqslant \|w\|_{H^1(\Pi)},$$

то

$$\|w\|_{W_2^1(\Pi(R))} \leqslant C(R) \|w\|_{H^1(\Pi)}, \tag{18}$$

где $C(R)$ — константа, зависящая от выбора R.

Лемма 2. *Если*

$$f_\varepsilon \rightharpoonup f \quad \text{в } L_2(\Omega_a) \text{ при } \varepsilon \to 0,$$

то для решений краевых задач (7) *и* (8) *имеет место сходимость*

$$R_\varepsilon f_\varepsilon \to R_0 f \quad \text{в } L_2(\Omega_a) \text{ при } \varepsilon \to 0. \tag{19}$$

Доказательство. В силу слабой компактности ограниченного множества в гильбертовом пространстве (см., например, [11, гл. 2, § 3]), оценок (12) и (18) и компактности вложения $W_2^1(\Pi(R))$ в $L_2(\Omega_a)$ из любой последовательности $\varepsilon_k \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$ можно выделить такую подпоследовательность (которую, не ограничивая общности, будем считать совпадающей с последовательностью $\{\varepsilon_k\}$), что на ней

$$\begin{aligned} u_\varepsilon &\rightharpoonup u_* \qquad \text{в } H^1(\Pi) \text{ при } \varepsilon = \varepsilon_k \to 0,\\ u_\varepsilon &\to u_* \qquad \text{в } L_2(\Omega_a) \text{ при } \varepsilon \to 0, \end{aligned} \tag{20}$$

причем $u_* \in H^1(\Pi; \partial\Pi \setminus \overline{\Omega}_a)$, если $u_\varepsilon \in H^1(\Pi_\varepsilon; \partial\omega_\varepsilon \cup \partial\Pi \setminus \overline{\Omega}_a)$. Если $u_* = u_0$, то из произвола в выборе исходной последовательности $\varepsilon_k \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$ будет следовать сходимость (19).

Покажем, что $u_* = u_0$. Пусть v — произвольная функция из $C^\infty(\overline{\Pi})$, обращающаяся в нуль на $\partial\Pi \setminus \overline{\Omega}_a$, имеющая конечный интеграл Дирихле, а функции v_ε удовлетворяют утверждению леммы 1. Положим $v = v_\varepsilon$ в (10). Тогда, переходя в полученном равенстве к пределу при $\varepsilon \to 0$, в силу (20), леммы 1 и определения пространства $H^1(\Pi; \partial\Pi \setminus \overline{\Omega}_a)$ заключаем, что функция u_* является обобщенным решение краевой задачи (8). Из единственности решения краевой задачи (8) (см. (12)) следует, что $u_* = u_0$. □

Лемма 3. *При* $\varepsilon \to 0$ *имеет место сходимость*

$$R_\varepsilon \to R_0$$

по операторной норме

$$\|A\| = \sup_{\|g\|_{L_2(\Omega_a)}=1} \|Ag\|_{L_2(\Omega_a)},$$

где $A : L_2(\Omega_a) \to L_2(\Omega_a)$.

Доказательство. Для доказательства леммы достаточно показать справедливость равномерной сходимости

$$\|R_\varepsilon f - R_0 f\|_{L_2(\Omega_a)} \underset{\varepsilon\to 0}{\rightrightarrows} 0 \tag{21}$$

для нормированных в $L_2(\Omega_a)$ функций f.

Допустим противное, т.е. предположим, что существуют такие число $\delta > 0$, последовательность $\varepsilon_k \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$ и последовательность нормированных в $L_2(\Omega_a)$ функций f_k, что

$$\|R_{\varepsilon_k} f_k - R_0 f_k\|_{L_2(\Omega_a)} > \delta. \tag{22}$$

Так как ограниченное множество слабо компактно, то, не ограничивая общности, можно считать, что

$$f_k \rightharpoonup f \quad \text{при } k \to \infty \text{ в } L_2(\Omega_a).$$

Из (22) и неравенства треугольника следует, что

$$\left\|R_{\varepsilon_k} f_k - R_0 f\right\|_{L_2(\Omega_a)} + \left\|R_0 f - R_0 f_k\right\|_{L_2(\Omega_a)} > \delta. \tag{23}$$

Неравенство (23) противоречит (16) и утверждению леммы 2. Таким образом, имеет место равномерная сходимость (21). □

Напомним, что краевые задачи (8) и (7) однозначно разрешимы. Поэтому существуют обратные операторы $\mathcal{R}_0 = R_0^{-1}$ и $\mathcal{R}_\varepsilon = R_\varepsilon^{-1}$, определенные в $L_2(\Omega)$.

Справедливость следующего утверждения вытекает из [9, гл. 4, § 2] и леммы 3.

Лемма 4. *При* $\varepsilon \to 0$ *оператор* $\mathcal{R}_\varepsilon$ *сходится к оператору* $\mathcal{R}_0$ *в обобщенном смысле.*

Докажем теперь теорему 1. Из определения операторов $\mathcal{R}_\varepsilon$ и $\mathcal{R}_0$ следует, что собственные значения Λ_ε и Λ_0 этих операторов и собственные значения λ_ε и λ_0 краевых задач (1) и (2) связаны равенствами $\lambda_\varepsilon = \Lambda_\varepsilon - 1$ и $\lambda_0 = \Lambda_0 - 1$, а соответствующие нормированные в $L_2(\Omega_a)$ собственные функции совпадают. Отсюда, в силу [9, гл. 4, теорема 3.16] и леммы 4 вытекает справедливость доказываемой теоремы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Борисов Д. И.* О PT-симметричном волноводе с парой малых отверстий// Тр. Ин-та мат. мех. УрО РАН. — 2012. — *18*, т 2. — С. 22–37.
2. *Давлетов Д. Б.* Сингулярно возмущенная краевая задача Дирихле для стационарной системы линейной теории упругости// Изв. вузов. Сер. мат. — 2008. — *12*. — С. 7–16.
3. *Давлетов Д. Б.* Асимптотика собственных значений краевой задачи Дирихле оператора Ламэ в трехмерной области с малой полостью// Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 2008. — *48*, т 10. — С. 1847–1858.
4. *Давлетов Д. Б.* Асимптотика собственного значения двумерной краевой задачи Дирихле для оператора Ламе в области с малым отверстием// Мат. заметки. — 2013. — *93*, т 4. — С. 537–548.
5. *Днестровский Ю. Н.* Об изменении собственных значений при изменении границы областей// Вестн. Моск. ун-та. Сер. мат. мех. — 1964. — *9*. — С. 61–74.
6. *Ильин А. М.* Краевая задача для эллиптического уравнения второго порядка в области с тонокой щелью. 2. Область с малым отверстием// Мат. сб. — 1977. — *103*, т 2. — С. 265–284.
7. *Ильин А. М.* Исследование асимптотики решения эллиптической краевой задачи с малым отверстием// Тр. семин. им. И. Г. Петровского. — М.: МГУ, 1982. — *6*. — С. 77–82.
8. *Камотский И. В., Назаров С. А.* Спектральные задачи в сингулярно возмущенных областях и самосопряженные расширения дифференциальных операторов// Тр. С.-Пб. мат. о-ва. — 1998. — *6*. — С. 151–212.
9. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов — М.: Мир, 1972.
10. *Мазья В. Г., Назаров С. А., Пламеневский Б. А.* Асимптотические разложения собственных чисел краевых задач для оператора Лапласа в областях с малыми отверстиями// Изв. АН СССР. — 1984. — *48*, т 2. — С. 347–371.
11. *Михайлов В. П.* Дифференциальные уравнения в частных производных. — М.: Наука, 1976.
12. *Назаров С. А.* Асимптотические разложения собственных чисел задачи Стеклова в сингулярно возмущенных областях// Алгебра и анализ. — 2014. — *26*, т 2. — С. 119–184.
13. *Назаров С. А.* Вариационный и асимптотический методы поиска собственных чисел под порогом непрерывного спектра// Сиб. мат. ж. — 2010. — *51*, т 5. — С. 1086–1101.
14. *Самарский А. А.* О влиянии закрепления на собственные частоты замкнутых объемов// Докл. АН СССР. — 1948. — *63*, т 6. — С. 631–634.

Д. Б. Давлетов
Башкирский государственный педагогический университет им. М. Акмуллы, Уфа
E-mail: davletovdb@mail.ru

О. Б. Давлетов
Уфимский государственный нефтяной технический университет
E-mail: davolegus@mail.ru

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 141 (2017). С. 48–60

УДК 517.927.25

ОБ УСЛОВИЯХ ЛОКАЛИЗАЦИИ СПЕКТРА НЕСАМОСОПРЯЖЕННОГО ОПЕРАТОРА ШТУРМА—ЛИУВИЛЛЯ С МЕДЛЕННО РАСТУЩИМ ПОТЕНЦИАЛОМ

© 2017 г. **Л. Г. ВАЛИУЛЛИНА, Х. К. ИШКИН**

Аннотация. Для оператора Штурма—Лиувилля T_0 на полуоси $(0, +\infty)$ с потенциалом $e^{i\theta}q$, где $0 < \theta < \pi$, q — вещественная функция, которая может иметь сколь угодно медленный рост на бесконечности, потому не удовлетворяющего ни одному из условий теоремы Келдыша (T_0 несамосопряжен, его резольвента не принадлежит классу Неймана—Шаттена $\mathfrak{S}_p$ ни при каком $p < \infty$), найдены условия на q и возмущения V, при которых сохраняется локализация или асимптотика спектра.

Ключевые слова: несамосопряженные дифференциальные операторы, теорема Келдыша, спектральная устойчивость, локализация спектра.

AMS Subject Classification: 34B24, 47E05

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение 48
2. Формулировка основных результатов 49
3. Некоторые свойства оператора T_0 51
4. Доказательство теорем 2.1 и 2.2 53
5. Доказательство теоремы 2.3 54
Список литературы 60

1. Введение

Пусть T_0 — замкнутый оператор, действующий в сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. Будем говорить, что *спектр оператора* T_0 *локализован около луча* $\arg\lambda = \theta$, если для любого $\varepsilon > 0$ оператор T_0 вне угла $\{|\arg\lambda - \theta| < \varepsilon\}$ имеет конечное число собственных значений, каждое из которых конечной кратности. Из теоремы Келдыша (см. [10]) следует, что если

(а) оператор T_0 положителен и $T_0^{-1} \in \mathfrak{S}_p$ при некотором $p < \infty$,

то любое возмущение V, компактное относительно T_0 (т.е. $VT_0^{-1} \in \mathfrak{S}_\infty$), сохраняет локализацию спектра: при любом $\varepsilon > 0$ все собственные значения оператора $T = T_0 + V$, за исключением конечного числа, лежат в угле $\{|\arg\lambda| < \varepsilon\}$. При выполнении дополнительного условия

(б) $N(T_0, r) \sim f(r)$, $r \to +\infty$,

где $N(T_0, r)$ — число собственных значений оператора T_0 в круге $|\lambda| < r$, функция f определена и монотонна на $[R, +\infty)$, $R > 0$, и при некотором $\gamma > 0$

$$\frac{f(s)}{f(r)} < \left(\frac{s}{r}\right)^\gamma \quad \forall s > r \geqslant R,$$

справедлива формула

$$N(T, r) \sim N(T_0, r), \quad r \to +\infty. \tag{1}$$

Таким образом, каждый самосопряженный оператор T_0, удовлетворяющий условиям (а)–(б), образует семейство операторов $\{T\}$, близких к нему (т.е. представимых в виде $T = T_0 + V$, $VT_0^{-1} \in \mathfrak{S}_\infty$), спектр которых имеет такую же асимптотику, что и спектр T_0.

Предположим теперь, что T не является близким к самосопряженному. Как показывают многочисленные примеры (см. [7, 16, 18, 19, 22, 26] и др.), такие операторы, как правило, спектрально неустойчивы: спектр может сильно меняться под действием малых возмущений. Ясно, что для таких операторов теорема Келдыша не работает, для исследования их спектральных свойств приходится придумывать специальные методы (см., например, [2, 5, 6, 11, 20]).

Рассмотрим оператор

$$D(T_0) = \Big\{y \in L^2(0,+\infty): \ y' \in AC[0,+\infty), \ -y'' + e^{i\theta}q(x)y \in L^2(0,+\infty), \ y(0) = 0\Big\}, \tag{2}$$

$$T_0 y = -y'' + e^{i\theta}q(x)y, \tag{3}$$

где $0 \leqslant \theta < \pi$, функция q локально суммируема на $[0,+\infty)$ и

$$\lim_{x\to+\infty} q(x) = +\infty. \tag{4}$$

Тогда оператор T_0 имеет дискретный спектр (см. [12]). Не ограничивая общности, можно считать, что точка $\lambda = 0$ принадлежит резольвентному множеству оператора T_0. Если функция q на бесконечности растет медленнее любой степени, то (см. лемму 3.1) T_0^{-1} не принадлежит $\mathfrak{S}_p$ ни при каком $p > 0$, т.е. для T_0 не выполняются ни одно из условий (а) и (б). Как известно (см. [11]), при $q(x) = x^\alpha$, $\alpha > 0$, собственные числа T_0 простые, лежат на луче $\arg\lambda = 2\theta/(2+\alpha)$ и имеют асимптотику

$$\lambda_n \sim C_0 \cdot e^{\frac{2\theta i}{2+\alpha}} n^{\frac{2\alpha}{2+\alpha}}, \quad n \to \infty, \tag{5}$$

где C_0 — положительная постоянная[1]. Аналогичная (см. [1,25]) картина имеет место и при $q(x) = \ln x$: λ_n простые, лежат на луче $\{\lambda = (t - i\theta/2)e^{i\theta}, \ t > 0\}$ и при $n \to +\infty$

$$\lambda_n \sim e^{i\theta}\ln n, \quad n \to \infty.$$

В связи со сказанным возникают следующие вопросы:

(i) при каких условиях на функцию q спектр оператора T_0 локализован около некоторого луча $\arg\lambda = \alpha_0$ в следующем смысле: для любого $\varepsilon > 0$ спектр оператора T_0 вне угла $\{|\arg\lambda - \alpha_0| < \varepsilon\}$ конечен;

(ii) при каких возмущениях V спектр оператора $T = T_0 + V$ также локализуется около луча $\arg\lambda = \alpha_0$ и справедлива формула (1)?

Вопросы (i) и (ii) достаточно подробно были изучены в [7]. Методика этой работы в существенном опиралась на полученный там же результат абстрактного характера, представляющий собой некий аналог теоремы Келдыша для произвольных замкнутых, не обязательно самосопряженных (даже не близких к самосопряженным в указанном выше смысле), операторов, действующих в сепарабельном гильбертовом пространстве и имеющих резольвенту класса Неймана—Шаттэна $\mathfrak{S}_p$ при некотором $p > 0$. В настоящей работе мы не предполагаем выполнение последнего условия, поэтому метод работы [7] неприменим в рассматриваемой ситуации. Основные результаты содержатся в теоремах2.1–2.3.

2. Формулировка основных результатов

Теорема 2.1. *Пусть существует функция $\widetilde{q}$, аналитичная в угле $U = \{z: \ -\theta/2 < \arg z < 0\}$ и обладающая следующими свойствами*:

(1) *в каждой конечной точке границы U существует такой конечный предел, что $\widetilde{q}(x) = q(x)$ при $x \geqslant 0$;*

(2) *существуют такие положительные постоянные a_1, a_2, σ, что при каждом $\alpha \in [-\theta/2; 0]$ и $r > 0$*

  (a) $a_1 q(r) \leqslant |\widetilde{q}(re^{i\alpha})| \leqslant a_2 q(r)$,

[1]Здесь и всюду далее, если не оговорено другое, C_0 означает положительную постоянную, точное значение которой можно вычислить, но в рассматриваемом контексте оно не важно.

(b) $\left|\arg\left(\widetilde{q}(re^{i\alpha})\right)+\theta/2+2\alpha\right|\leqslant\pi/2-\sigma$;

(3) *для функции* $\widetilde{q}(re^{-i\theta/2})$, $r>0$, *справедливо представление*

$$\widetilde{q}(re^{-i\theta/2})=p(r)+R(r),\quad r\to+\infty,$$

где функция p *вещественна и*

$$p(r)\to+\infty,\quad R(r)=o(p(r)),\quad r\to+\infty. \tag{6}$$

Тогда спектр оператора T_0 *локализуется около луча* $\arg\lambda=\theta$.

Следствие. *Пусть* L_0 — *оператор, порожденный в* $L^2(0,+\infty)$ *дифференциальным выражением* $-y''+py$ *и краевым условием* $y(0)=0$, $L=L_0+R$, *где* R — *оператор умножения на функцию* $R(\cdot)$. *Обозначим через* $\{s_k\}_1^\infty$ *и* $\{\nu_k\}_1^\infty$ *пронумерованные в порядке возрастания модулей собственные числа операторов* L_0 *и* L *соответственно. Тогда если дополнительно к условиям* (1)–(3)

$$\nu_k\sim s_k,\quad k\to+\infty, \tag{7}$$

то собственные значения оператора T_0 *имеют асимптотику*

$$\lambda_k\sim e^{i\theta}s_k,\quad k\to\infty. \tag{8}$$

Легко проверить, что функция $q(x)=\underbrace{\ln\ldots\ln}_{n}(x+c)$, где $c>\underbrace{\exp\ldots\exp}_{n-2}1$, удовлетворяет всем условиям теоремы.

Теорема 2.2. *Пусть выполнены условия* (1)–(3) *теоремы* 2.1 *и пусть* V — *оператор умножения на функцию* $V(z)$, *которая*

(1_V) *аналитична в угле* $U=\{z:\ -\theta/2<\arg z<0\}$ *и имеет непрерывное продолжение в любой конечной точке границы* U,

(2_V) $V(re^{i\alpha})=o(\widetilde{q}(re^{i\alpha}))$, $r\to+\infty$, *равномерно по* $\alpha\in[-\theta/2,0]$.

Тогда оператор $T=T_0+V$ *имеет дискретный спектр, локализованный около луча* $\arg\lambda=\theta$. *При выполнении дополнительного требования*

$$N(L+W,r)\sim N(L,r),\quad r\to+\infty, \tag{9}$$

где W — *оператор умножения на функцию* $W(r)=e^{-i\theta}V\left(re^{-i\theta/2}\right)$, *имеет место формула* (1).

Теоремы 2.1 и 2.2 доставляют только достаточные условия локализации спектра операторов T_0 и T соответственно, потому лишь частично решают вопросы (i) и (ii). Вопрос о необходимости этих условий[1] намного сложнее. В связи с этим отметим работу [8], в которой получено необходимое и достаточное условие локализации спектра оператора Штурма—Лиувилля на кривой. Основную часть текста этой работы занимает доказательство необходимости по существу уже известных достаточных условий.

Теорема 2.1 вопрос об асимптотике несамосопряженного оператора T_0 сводит к вопросу об асимптотике спектра самосопряженного оператора L_0 с вещественным потенциалом p. Если для каких-то целей (например, для вычисления регуляризованного следа или для получения разложений по собственным векторам L_0) требуются *точные* асимптотические разложения для собственных чисел оператора L_0, то интерес представляют условия на потенциал (медленно растущий — для степенных этот вопрос изучен достаточно полно, см. [4]), при которых эти разложения возможны.

На вещественный потенциал p наложим следующие условия:

(1_p) при некотором $x_0>0$ функция p суммируема на $(0,x_0)$;

[1]Требование аналитичности функции V выглядит излишне жестким по сравнению с самосопряженным случаем $\theta=0$, когда для выполнения (9) достаточно лишь условие (2_V) при $\alpha=0$.

(2_p) на $[x_0,+\infty)$ функция p дважды дифференцируема, p'' абсолютно непрерывна и

$$\text{(a)}\quad \left|\frac{p^{(k)}(x)}{p^{(k-1)}(x)}\right| \leqslant c_k x^{-1},\quad c_k=\mathrm{const}>0,\quad k=\overline{1,3},$$

$$\text{(b)}\quad \frac{p'(x)}{p(x)} > \alpha\left(\prod_{k=0}^{m} L_k(x)\right)^{-1},\quad L_0(x)=x,\quad L_k(x)=\underbrace{\ln\ldots\ln}_{k} x,\quad \alpha=\mathrm{const}>0.$$

Замечание 1. Из условия (2b) следует, что на $[x_0,\infty)$ функция p возрастает и, поскольку

$$p(x)=p(x_0)\exp\left(\int\limits_{x_0}^{x}\frac{p'}{p}dt\right),\quad \int\limits_{x_0}^{x}\left(\prod_{k=0}^{m}L_k(t)\right)^{-1}dt=\ln\left(\frac{L_m(x)}{L_m(x_0)}\right),$$

то

$$p(x)>C(L_m(x))^{\alpha},$$

где $C=\mathrm{const}>0$. Поэтому спектр оператора L дискретен (см. [13, с. 386]).

Поскольку на $[x_0,\infty)$ функция p возрастает, то при каждом достаточно большом $s>0$ уравнение $p(x)=s$ имеет единственное решение $a(s)$, которое называют точкой поворота.

Теорема 2.3. *Пусть $\{s_k\}_1^{\infty}$ — собственные значения оператора L_0, пронумерованные в порядке возрастания. Далее пусть выполнены условия*

(3_p) *$p''\geqslant 0$ или $p''\leqslant 0$ при $x>x_0$ и для любых $0<\delta<1$ и $\varepsilon>0$*

$$\lim_{s\to+\infty}\frac{a(\delta\, s)}{s(\ln a(s))^{1/2+\varepsilon}}=+\infty. \tag{10}$$

Тогда s_k при больших k удовлетворяют уравнению

$$\int\limits_{0}^{a_{s_k}}\sqrt{s_k-p}\,dt=\pi\left(k+k_0-\frac{1}{4}\right)+O\left({s_k}^{-3/2}\right), \tag{11}$$

где k_0 — некоторое натуральное число.

Следствие. *Если $p=\ln(x+m)$, $m>0$, то*

$$s_k=\ln(2\sqrt{\pi}k)+k^{-1}\left(\frac{m}{\pi}(\ln k)^{1/2}+k_0-\frac{1}{4}+c_0(\ln k)^{-1/2}\right)+r_k, \tag{12}$$

где

$$c_0=\frac{m}{2\pi}\left(1+\ln(2\sqrt{\pi}/m)\right),\quad r_k=O\left(k^{-1}(\ln k)^{-3/2}\right),\quad k\to\infty.$$

3. Некоторые свойства оператора T_0

Лемма 3.1 (о грубой локализации). *Пусть T_0 — оператор, определенный по формулам (2)–(3), где $q\in L^1_{\mathrm{loc}}[0,+\infty)$ и удовлетворяет (4). Тогда для любого $\varepsilon>0$ найдется такое $M_\varepsilon>0$, что весь спектр оператора T_0 лежит в угле $U_\varepsilon=\Big\{-\varepsilon<\arg(\lambda+M_\varepsilon)<\theta\Big\}$.*

Доказательство. В силу (4) найдется такое $a>0$, что $q(x)>0$ при всех $x>a$. Поэтому $q=q_1+q_2$, где $q_1\geqslant 0$ и локально суммируема, а функция q_2 суммируема на $(0,a)$ и равна 0 на $(a,+\infty)$.

Введем квадратичные формы

$$h_0[y] = \int_0^\infty |y'|^2 dx,$$
$$D(h_0) = \Big\{ y \in L^2(0,\infty):\ y \in AC[0,+\infty),\ y' \in L^2(0,+\infty),\ y(0)=0 \Big\},$$
$$h_j[y] = \int_0^\infty q_j |y|^2 dx,$$
$$D(h_j) = \Big\{ y \in L^2(0,\infty):\ |q_j|^{1/2} y \in L^2(0,\infty) \Big\}, \quad j = 1, 2.$$

Каждая из форм h_0, h_1 замкнута и неотрицательна, форма h_2 ограничена относительно формы h_0 с h_0-гранью, равной 0 (см. [9, гл. VI, § 4, п. 1]). Следовательно, форма

$$h[y] = \int_0^\infty \left(|y'|^2 + q|y|^2\right) dx,$$
$$D(h) = \Big\{ y \in L^2(0,+\infty):\ y \in AC[0,+\infty),\ |q|^{1/2} y, y' \in L^2(0,+\infty),\ y(0)=0 \Big\},$$

замкнута и для любого $\delta > 0$ найдется такая постоянная $K_\delta > 0$, что

$$|h_2[y]| \leqslant \delta h_0[y] + K_\delta \|y\|^2 \quad \forall y \in D(h_0). \tag{13}$$

Покажем, что $y' \in L^2(0,\infty)$ для любого $y \in D(S)$.

Обозначим через H оператор, ассоциированный с формой h. Имеем (см. [9, гл. VI, теорема 4.2])

$$D(H) = \Big\{ y \in L^2(0,\infty):\ y' \in AC[0,+\infty),\ -y'' + qy \in L^2(0,+\infty),\ y(0)=0 \Big\}, \tag{14}$$
$$Hy = -y'' + qy. \tag{15}$$

С другой стороны, для всех $y \in D(h)$ имеем $\cos(\theta/2) h[y] = \mathrm{Re}(Sy, y)$, где $S = e^{-i\theta/2} T_0$. Отсюда, поскольку $|\operatorname{Im}(Sy,y)| \leqslant \operatorname{tg}(\theta/2)|h[y]|$ при всех $y \in D(h)$, то область определения квадратичной формы оператора S совпадает с областью определения формы h. Следовательно (см. [9, гл. VI, теорема 2.1]), $y' \in L^2(0,\infty)$ для любого $y \in D(S)$. Тогда для любого $y \in D(T_0) = D(S)$ с учетом неравенства (13) будем иметь

$$(T_0 y, y) = -\frac{K_\delta}{\delta}\|y\|^2 + e^{i\theta} h_1[y] + \left(h_0[y] + \frac{K_\delta}{\delta}\|y\|^2 \right)\left(1 + e^{i\theta} z(y)\right), \tag{16}$$

где $-\delta < z(y) < \delta$. Отсюда, выбирая $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ так, чтобы аргумент $1 - e^{i\theta}\delta$ был больше $-\varepsilon$, получим, что $(T_0 y, y)$ лежит в угле U_ε, где $M_\varepsilon = K_\delta(\varepsilon)/\delta(\varepsilon)$. Лемма доказана. □

Следствие. *Пусть функции q и V локально суммируемы на $[0,+\infty)$, q удовлетворяет условиям (4) и $V(x) = o(q(x))$, $x \to +\infty$. Тогда спектр оператора $T_0 + V$ конечен вне любого угла $\{-\varepsilon < \arg\lambda < \theta + \varepsilon\}$, $\varepsilon > 0$.*

Доказательство. Зафиксируем любое $\varepsilon > 0$ и выберем $a = a(\varepsilon)$ так, чтобы $q(x) > 0$ и $|V(x)| < \varepsilon q(x)$ при всех $x \geqslant a$. Тогда

$$(Vy, y) = \int_0^a V|y|^2 dx + \int_a^\infty V|y|^2 dx =: v_1[y] + v_2[y], \quad y \in D(S).$$

Очевидно, форма v_1 удовлетворяет оценке вида (13) и $|v_2[y]| < \varepsilon h_1[y]$, $y \in D(S)$. Следовательно, для $((T_0 + V)y, y)$ справедливо представление (ср. с (16))

$$((T_0 + V)y, y) = -K(\varepsilon)\|y\|^2 + e^{i\theta} h_1[y](1 + z_1(y)) + \left(h_0[y] + K(\varepsilon)\|y\|^2\right)\left(1 + e^{i\theta} z_2(y)\right),$$

где $|z_j(y)| < \varepsilon$, $K(\varepsilon) > 0$. Отсюда вытекает утверждение следствия. □

Лемма 3.2. *Если для всех* $\varepsilon > 0$

$$q(x) = o\left(x^{\varepsilon}\right), \quad x \to +\infty, \tag{17}$$

то T_0^{-1} *не принадлежит* $\mathfrak{S}_p$ *ни при каком* $p > 0$.

Доказательство. Пусть $0 < \varepsilon < \theta/2$. Переходя при необходимости к оператору $T_0 + M_\varepsilon$, можно считать, что спектр оператора T_0 лежит внутри угла $\{-\varepsilon < \arg\lambda < \theta/2\}$. Пусть по-прежнему $S = e^{-i\theta/2}T_0$ и $\cos(\theta/2)H$ — его вещественная часть. Согласно (14), (15) и соотношениям (17) и (5) собственные числа оператора H растут медленнее любой степени, т.е. $H^{-1} \notin \mathfrak{S}_p$ для любого $p > 0$. Далее (см. [9, гл. VI, теорема 3.2]) $S = G(1 + iB)G$, где $G = H^{1/2}$, B — ограниченный самосопряженный оператор. Следовательно,

$$G^{-1} = e^{i\theta/2}(1 + iB)GS^{-1/2-\delta}S^{-1/2-\delta}, \tag{18}$$

где $0 < \delta < 1/2$ и (см. [9, гл. V, замечание 3.50])

$$S^{-\alpha} = \frac{\sin\pi\alpha}{\pi}\int\limits_0^\infty \lambda^{-\alpha}(S + \lambda)^{-1}d\lambda.$$

Так как оператор $GS^{-1/2-\delta}$ ограничен (см. [23, 24]), то, воспользовавшись известными неравенствами для s-чисел (см. [3, гл. II, § 2], из (18) будем иметь

$$s_j(G^{-1}) \leqslant (1 + \|B\|)\|GS^{-1/2-\delta}\|s_j(S^{-1/2-\delta}).$$

Если теперь допустить, что T_0^{-1}, а следовательно, и S^{-1} при некотором p принадлежит $\mathfrak{S}_p$, то из последнего неравенства будет следовать, что $G^{-1} \in \mathfrak{S}_q$, где $q = p/(1/2 + \delta)$, в противоречии с тем, что $G^{-1} \notin \mathfrak{S}_p$ для всех p. Лемма доказана. □

4. Доказательство теорем 2.1 и 2.2

Доказательство теоремы 2.1 основано на методе комплексного скэйлинга [15, 17]. Рассмотрим однопараметрическое семейство унитарных растяжений в $L^2(0, +\infty)$:

$$U_\omega\varphi(x) := e^{\frac{\omega}{2}}\varphi(e^\omega x), \quad \varphi \in L^2(0, \infty),$$

где $\omega \in \mathbb{R}$, $x > 0$. Легко проверить, что

$$L_\omega := U_\omega T_0 U_\omega^{-1} = e^{-2\omega}M_0(\omega), \tag{19}$$

где $M_0(\omega)$ — оператор, порожденный в $L^2(0, +\infty)$ дифференциальным выражением

$$(m_\omega y)(x) = -y''(x) + e^{2\omega + i\theta}q(xe^\omega)y(x)$$

и краевым условием $y(0) = 0$. В силу условия (2a) область определения $D(Q_0(\omega))$ квадратичной формы

$$Q_0(\omega)[y] = (M_0(\omega)y, y) = \int\limits_0^\infty |y'(x)|^2dx + e^{2\omega+i\theta}\int\limits_0^\infty q(xe^\omega)|y(x)|^2dx$$

при любом $-\theta/2 \leqslant \mathrm{Im}\omega \leqslant 0$ одна и та же и для любого фиксированного $y \in D(Q_0(\omega))$ функция $Q_0(\omega)[y]$ аналитична в полосе

$$\Pi_\theta = \left\{\omega \in \mathbb{C} : -\frac{\theta}{2} < \mathrm{Im}\,\omega < 0\right\}$$

и непрерывна вплоть до границы. Далее, учитывая условие (2b), точно так же, как при доказательстве леммы 3.1, устанавливаем, что при любом $\omega \in \Pi_\theta$ форма $e^{-i\theta/2}Q_0(\omega)$ замкнута и m-секториальна. Поэтому $Q_0(\omega)$ — аналитическое семейство типа (A) в полосе Π_θ (см. [9, гл. VII, § 4, п. 2], а ассоциированная с ним оператор-функция $M_0(\omega)$ — аналитическое семейство типа (B). Кроме того, в силу условия (2) при каждом $\omega \in \Pi_\theta$ имеем

$$\mathrm{Re}\left(e^{i\theta/2+2\omega}\widetilde{q}(re^\omega)\right) \to +\infty, \quad r \to +\infty,$$

поэтому для любого $\omega \in \Pi_\theta$ найдется такое $R = R(\omega) > 0$, что при всех $r > R$ резольвента $(M_0(\omega) + r)^{-1}$ существует и компактна (см. [12, теорема 4]). Следовательно (см. [9, гл. VII, теорема 1.8]), существует последовательность функций $\{\lambda_n(\omega)\}_1^\infty$, удовлетворяющих условию $\lambda_n(0) = \lambda_n$, и для каждого $n = 1, 2, \ldots$ существует такое $\rho_n > 0$, что $\lambda_n(\omega)$ аналитична в области $U_n = \{\omega : \ |\omega| < \rho_n, \ \operatorname{Im}\omega < 0\}$, непрерывна на $\overline{U_n}$ и является собственным значением оператора $M_0(\omega)$.

Но при вещественных ω оператор $M_0(\omega)$ согласно (19) унитарно эквивалентен оператору $e^{2\omega}T_0$, так что $\lambda_n(\omega) = e^{2\omega}\lambda_n$. Отсюда имеем

$$\lambda_n = e^{-2\omega}\lambda_n(\omega), \quad \omega \in U_n, \quad n = 1, 2, \ldots. \tag{20}$$

Таким образом, $\lambda_n(\omega) = e^{2\omega}\lambda_n$, $n = 1, 2, \ldots$, так что функции $\lambda_n(\omega)$ аналитически продолжаются на всю комплексную плоскость $\mathbb{C}$. Отсюда, применяя к оператору $A(\omega) = (\lambda_n(\omega) + r)^{-1}(M_0(\omega) + r)^{-1}$, где $r \gg 1$, аналитическую теорему Фредгольма (см. [14, теорема 6.14]), заключаем, что равенство (20) верно на всем $\overline{\Pi_\theta}$, в частности, в точке $\omega_0 = -\theta i/2$. Тогда $M_0(\omega_0) = L_0 + R$, где R — оператор умножения на функцию $R(\cdot)$, так что для доказательства теоремы достаточно установить, что спектр оператора $L = L_0 + R$ локализован около луча $\arg\lambda = 0$.

Пусть $\varepsilon > 0$. Оператор L является оператором Штурма—Лиувилля на полуоси $r > 0$ с потенциалом $P = p + R$. Согласно (6)

$$p(r) > 0, \quad |R(r)| < \varepsilon p(r), \quad r \geqslant a(\varepsilon).$$

Так как функция P суммируема на $[0, a(\varepsilon)]$, то согласно (13) найдется такая постоянная $K_\varepsilon > 0$, что

$$\left| \int\limits_0^{a(\varepsilon)} P|y|^2 dx \right| < \varepsilon\|y'\|^2 + K_\varepsilon\|y\|^2, \ y \in D(L).$$

Тогда для любого y из области определения оператора L

$$(Ly, y) = -\frac{K_\varepsilon}{\varepsilon}\|y\|^2 + \left(\|y'\|^2 + \frac{K_\varepsilon}{\varepsilon}\|y\|^2\right)\big(1 + z_1(y)\big) + \left(\int\limits_{a(\varepsilon)}^\infty p|y|^2 dx\right)\big(1 + z_2(y)\big),$$

где $|z_j(y)| < \varepsilon$, $j = 1, 2$. Отсюда видно, что спектр оператора L вне угла $|\arg\lambda| < \operatorname{tg}\varepsilon$ конечен. Тем самым теорема 2.1 доказана. □

Доказательство следствия из теоремы 2.1. Асимптотика (8) следует из (7), (20) при $\omega = -i\theta/2$ и равенств $\lambda_k(-i\theta/2) = \nu_k$, $k = 1, 2, \ldots$. □

Доказательство теоремы 2.2. При сформулированных условиях на V функция $\widetilde{q}(z) + e^{-i\theta}V(z)$ удовлетворяет всем условиям теоремы 2.1 и следствия из нее. Поэтому для оператора T справедливы все утверждения теоремы 2.1 и следствия из нее. □

5. Доказательство теоремы 2.3

5.1. Асимптотическое уравнение для спектра оператора L_0. Пусть χ — бесконечно дифференцируемая функция, равная 1 на отрезке $[0, x_0]$ и 0 на $[x_0 + 1, \infty)$. Согласно условию (2) функция $q_1(x) = p(x)(1 - \chi(x))$ возрастает на $[x_0 + 1, +\infty)$, так что при каждом $\lambda > p(x_0 + 1)$

уравнение $p(x)=\lambda$ имеет на $[x_0+1,+\infty)$ единственное решение $a(\lambda)$. Введем обозначения

$$\zeta(x,\lambda)=\int_{a_\lambda}^{x}|p_1(t)-\lambda|^{1/2}dt,\quad \lambda>p(x_0+1),\quad x\geqslant 0,$$

$$\xi(x,\lambda)=\left|\frac{3}{2}\zeta(x,\lambda)\right|^{2/3}\operatorname{sgn}(x-a_\lambda),$$

$$I(\lambda)=\int_0^\infty\left(\left(\frac{\xi''}{\xi'}\right)^2+\left|\frac{\xi'''}{\xi'}\right|\right)|p_1-\lambda|^{-1/2}dt.$$

Теорема 5.1 (см. [4])**.** *Пусть функция p удовлетворяет помимо (1_p) следующим условиям:*
$(2'_p)$ *при $x\geqslant x_0$ p имеет абсолютно непрерывную положительную производную и*

$$\lim_{x\to+\infty}p(x)=+\infty;$$

$(3'_p)$ *при всех $\lambda\geqslant\lambda_0$, где $\lambda_0\geqslant 0$,*

$$I(\lambda)<\infty,\quad I(\lambda)\xrightarrow[\lambda\to+\infty]{}0.$$

Тогда при достаточно больших $\lambda>0$ спектр оператора L определяется из уравнения

$$\sin\Phi(\lambda)+K(\lambda)\cos\Phi(\lambda)+o(I(\lambda))=0,$$

где

$$\Phi(\lambda)=\int_0^{a_\lambda}|\lambda-p_1(x)|^{1/2}dx+\frac{\pi}{4},\tag{21}$$

$$K(\lambda)=\int_0^{a_\lambda}F(x,\lambda)dx+\frac{5}{72}\zeta^{-1}(0,\lambda),\tag{22}$$

$$F(x,\lambda)=\frac{3}{8}\left(\left(\frac{\xi''}{\xi'}\right)^2-\frac{2}{3}\frac{\xi'''}{\xi'}\right)|\lambda-p_1|^{-1/2}-\frac{1}{2}\lambda^{-1/2}p\chi.\tag{23}$$

Ясно, что из (2_p) следует $(2'_p)$. Справедлива следующая теорема.

Теорема 5.2. *Пусть выполнены условия (1_p) и (2_p), а также $p''\geqslant 0$ или $p''\leqslant 0$ при всех $x>x_0$. Тогда при всех $\lambda>0$ имеем $I(\lambda)<\infty$ и при любом $\varepsilon>0$*

$$I(\lambda)=O\left(\lambda^{-3/2}\right)+O\left(\lambda^{-1/2}e(\lambda)^{-1}(\ln a(\lambda))^{1/2+\varepsilon}\right),\quad \lambda\to\infty,\tag{24}$$

где $e(\lambda)$ — корень уравнения

$$p(e(\lambda))=(1-\delta)\lambda,\quad 0<\delta<1,$$

не зависит от λ.

Доказательство разобьем на несколько лемм. Зафиксируем $0<\delta<1$ и всюду далее в этом пункте будем считать, что $a(\lambda)(1-\delta)>x_0+1$.

Представим $I(\lambda)$ в виде

$$I(\lambda)=\left[\int_0^{x_0+1}+\int_{x_0+1}^{a(\lambda)(1-\delta)}+\int_{a(\lambda)(1-\delta)}^{a(\lambda)(1+\delta)}+\int_{a(\lambda)(1+\delta)}^{\infty}\right]K(t,\lambda)dt=\sum_{k=1}^{4}I_k(\lambda),$$

где

$$K(t,\lambda)=|p_1-\lambda|^{-1/2}\left(\left(\frac{\xi''}{\xi'}\right)^2+\left|\frac{\xi'''}{\xi'}\right|\right).\tag{25}$$

Лемма 5.1. *При выполнении условия* (2_p) *справедлива оценка*

$$I_3(\lambda) = O\left(a(\lambda)^{-1}\big(\ln a(\lambda)\big)^{1/2+\varepsilon}\lambda^{-1/2}\right), \quad \lambda \to +\infty. \tag{26}$$

Доказательство. Представим $I_3(\lambda)$ в виде

$$I_3(\lambda) = \left[\int\limits_{a(\lambda)(1-\delta)}^{a(\lambda)} + \int\limits_{a(\lambda)}^{a(\lambda)(1+\delta)}\right] K(t,\lambda)dt = I_{31}(\lambda) + I_{32}(\lambda)$$

и оценим $I_{32}(\lambda)$ (для $I_{31}(\lambda)$ верны те же самые рассуждения). Имеем

$$\frac{\xi''}{\xi'} = \frac{1}{2}p'(p-\lambda)^{-1} - \frac{1}{3}\zeta^{-1}(x,\lambda)|p-\lambda|^{1/2}, \tag{27}$$

$$\left(\frac{\xi''}{\xi'}\right)' = \frac{1}{2}\left[\frac{p''}{p-\lambda} - \frac{p'^2}{(p-\lambda)^2}\right] + \frac{1}{3}\zeta^{-2}|p-\lambda| - \frac{1}{6}|\zeta|^{-1}p'|p-\lambda|^{-1/2}. \tag{28}$$

Интегрируя по частям, получим

$$\zeta(t,\lambda) = \frac{2}{3}\frac{(p-\lambda)^{3/2}}{p'}\left(1 + \frac{2}{5}(\psi_1 - \psi_2)\right), \tag{29}$$

где

$$\psi_1 = \frac{(p-\lambda)p''}{p'^2}, \quad \psi_2 = \frac{p'}{(p-\lambda)^{3/2}}\int\limits_{a(\lambda)}^{t}(p-\lambda)^{5/2}(p''p'^{-3})'d\tau.$$

По формуле Лагранжа

$$p(t) - \lambda = p'(\theta)(t - a(\lambda)), \quad \theta \in (a(\lambda), t). \tag{30}$$

Далее, из условия (2_pa) при $k=2$ и равенства

$$\frac{p'(\theta)}{p'(t)} = \exp\left(\int\limits_{x}^{\theta}\frac{p''}{p'}dt\right)$$

будем иметь

$$(1+\delta)^{-c_2} \leqslant \frac{p'(\theta)}{p'(x)} \leqslant (1+\delta)^{c_2}, \quad \theta, x \in [a(\lambda), a(\lambda)(1+\delta)]. \tag{31}$$

Отсюда, снова воспользовавшись условием (2_pa) при $k=2$, получим

$$\psi_1(t,\lambda) = O\left(\frac{t-a(\lambda)}{a(\lambda)}\right), \quad \lambda \to +\infty, \tag{32}$$

равномерно по $t \in [a(\lambda), a(\lambda)(1+\delta)]$.

Аналогично доказывается, что

$$\psi_2(t,\lambda) = O\left(\left(\frac{t-a(\lambda)}{a(\lambda)}\right)^2\right), \quad \lambda \to +\infty, \tag{33}$$

равномерно по $t \in [a(\lambda), a(\lambda)(1+\delta)]$. Теперь, подставляя (29) в (27) и (28) с учетом (32) и (33), будем иметь

$$\left(\frac{\xi''}{\xi'}\right)^{(k)}(t,\lambda) = O\left(a(\lambda)^{-k-1}\right), \quad \lambda \to +\infty, \quad k = 0, 1,$$

равномерно по $t \in [a(\lambda), a(\lambda)(1+\delta)]$. Тогда, поскольку

$$\frac{\xi'''}{\xi'} = \left(\frac{\xi''}{\xi'}\right)' + \left(\frac{\xi''}{\xi'}\right)^2,$$

то

$$I_{32}(\lambda) = O\Big(a(\lambda)^{-2}\Big) \int\limits_{a(\lambda)}^{a(\lambda)(1+\delta)} (p-\lambda)^{-1/2}\,dt.$$

С учетом (31) последняя оценка принимает вид

$$I_{32}(\lambda) = O\Big(a(\lambda)^{-3/2}\big[p'(a(\lambda))\big]^{-1/2}\Big), \quad \lambda \to \infty.$$

Согласно (2_pb) при достаточно больших $\lambda > 0$

$$p'(a(\lambda)) \geqslant \alpha\lambda \prod_{k=0}^{m} L_k(a(\lambda)) > \alpha\lambda a(\lambda)(\ln a(\lambda))^{-1-\varepsilon},$$

где $\varepsilon > 0$ произвольно. Отсюда и из (5.1) следует оценка (26) для I_{32}. Лемма доказана. $\square$

Лемма 5.2. *При выполнении условия* (2_p) *величина* $I_4(\lambda)$ *удовлетворяет оценке* (26).

Доказательство. Из соотношений (25), (27), (28) имеем

$$|K(t,\lambda)| \leqslant \sum_{i=1}^{3} m_i K_i(t,\lambda), \tag{34}$$

где m_i — постоянные,

$$K_1 = |p-\lambda|^{1/2}\zeta^{-2}, \quad K_2 = \frac{|p|''}{|p-\lambda|^{3/2}}, \quad K_3 = \frac{p'^2}{(p-\lambda)^{5/2}}. \tag{35}$$

Введем следующие обозначения:

$$b_\lambda = a(\lambda)(1+\delta), \quad c_\lambda = a(\lambda)(1+\delta/2), \quad I_{4j} = \int\limits_{b_\lambda}^{\infty} K_j(t,\lambda)dt, \quad j = \overline{1,3}. \tag{36}$$

Имеем

$$I_{41}(\lambda) = \zeta^{-1}(b_\lambda, \lambda).$$

Отсюда, поскольку

$$\zeta(b_\lambda, \lambda) > \int\limits_{c_\lambda}^{b_\lambda} \sqrt{p-\lambda}dt > \frac{\delta}{2}\left(p(c_\lambda)-\lambda\right)^{1/2} a(\lambda),$$

получаем

$$I_{41}(\lambda) \leqslant Cp'^{-1/2}(\theta_\lambda)a(\lambda)^{-3/2}, \quad a(\lambda) < \theta_\lambda < c_\lambda.$$

Согласно условию (2_pb) с учетом оценки

$$\prod_{k=1}^{m} L_k(x) = O\big((\ln x)^{1+\varepsilon}\big), \quad x \to \infty,$$

где $\varepsilon > 0$ — любое, для всех $x \in [a(\lambda), a(\lambda)(1+\sigma)]$, $\sigma = \mathrm{const} > 0$, будем иметь

$$\frac{1}{p'(x)} = O\left(\lambda^{-1}a(\lambda)(\ln a(\lambda))^{1+\varepsilon}\right), \quad \lambda \to \infty. \tag{37}$$

Из (5.1) и (37) получим

$$I_{41}(\lambda) = O\Big(\lambda^{-1/2}a(\lambda)^{-1}(\ln a(\lambda))^{1/2+\varepsilon}\Big), \quad \lambda \to \infty. \tag{38}$$

Согласно (2_pa) при $k = 2$

$$I_{42}(\lambda) \leqslant C_2 \int\limits_{b_\lambda}^{\infty} t^{-1}\frac{p'}{(p-\lambda)^{3/2}}dt < Cb_\lambda{}^{-1}\left(p(b_\lambda)-\lambda\right)^{-1/2}.$$

Следовательно, $I_{42}(\lambda)$ удовлетворяет оценке (5.1), которая вместе с (37) влечет оценку (38) для $I_{42}(\lambda)$. Далее, интегрируя по частям, будем иметь

$$I_{43}(\lambda) \leqslant \frac{2}{3}p'(b_\lambda)\left(p(b_\lambda)-\lambda\right)^{-3/2}+\frac{2}{3}I_{42}(\lambda).$$

Отсюда, учитывая полученную оценку для $I_{42}(\lambda)$, равенство

$$p(b_\lambda)-\lambda = p'(\theta_\lambda)\delta a(\lambda), \quad a(\lambda)<\theta_\lambda<b_\lambda,$$

и соотношения (31), (37), получим оценку (38) для $I_{43}\,(\lambda)$. □

Лемма 5.3. *Если p удовлетворяет условиям* (2_p) *и* (3_p), *то для* $I_2(\lambda)$ *справедлива оценка* (24).

Доказательство. Всюду далее до конца доказательства леммы ε будет означать положительное число, которое может быть выбрано сколь угодно малым.

Согласно (34) и (35) задача сводится к оценке интегралов

$$I_{2j}=\int\limits_{x_0+1}^{d_\lambda} K_j(t,\lambda)dt, \quad j=\overline{1,3},$$

где $d_\lambda = a(\lambda)(1-\delta)$. Имеем

$$I_{21}(\lambda)=\zeta^{-1}(d_\lambda,\lambda)-\zeta^{-1}(x_0+1,\lambda)<\zeta^{-1}(d_\lambda,\lambda).$$

Рассуждая так же, как при доказательстве оценки (38), получим

$$I_{21}(\lambda)=O\left(\lambda^{-1/2}a(\lambda)^{-1}(\ln a(\lambda))^{1/2+\varepsilon}\right), \quad \lambda\to\infty. \tag{39}$$

Пусть $p''\geqslant 0$. Тогда

$$I_{22}\leqslant(\lambda-p(d_\lambda))^{-3/2}\,p'(d_\lambda)\leqslant Cq'^{-1/2}(\theta)a(\lambda)^{-3/2},$$

где $d_\lambda<\theta<a(\lambda)$. Отсюда, используя условие $(2_p\mathrm{b})$, убеждаемся, что $I_{22}(\lambda)$ также удовлетворяет (39). Точно так же эта оценка устанавливается для $I_{23}(\lambda)$.

Пусть теперь $p''\leqslant 0$. Имеем

$$I_{22}(\lambda)=\int\limits_{x_0+1}^{e(\lambda)}K_2(t,\lambda)dt+\int\limits_{e(\lambda)}^{d_\lambda}K_2(t,\lambda)dt=:J_1(\lambda)+J_2(\lambda).$$

Согласно определению точки $e(\lambda)$, $\lambda-p(x)\geqslant\delta\lambda$ на $[x_0+1,e(\lambda)]$. Поэтому

$$J_1(\lambda)\leqslant\delta^{-3/2}\lambda^{-3/2}\int\limits_{x_0+1}^{e(\lambda)}-p''dx<\delta^{-3/2}\lambda^{-3/2}p'(x_0+1)=C\lambda^{-3/2}.$$

Далее, применяя условие $(2_p\mathrm{a})$ при $k=2$ и $(2_p\mathrm{b})$, после несложных вычислений приходим к следующей оценке:

$$J_2(\lambda)=O\left(e(\lambda)^{-1}\lambda^{-1/2}(\ln a(\lambda))^{1/2+\varepsilon}\right), \quad \lambda\to+\infty.$$

Теперь оценка (24) для $I_{23}(\lambda)$ легко следует из представления

$$I_{23}(\lambda)=\frac{2}{3}\frac{p'}{(\lambda-p)^{3/2}}\bigg|_{x_0+1}^{d_\lambda}+\frac{2}{3}I_{22}(\lambda)$$

и оценки

$$\frac{p'(d_\lambda)}{(\lambda-p(d_\lambda))^{3/2}}=O\left(\lambda^{-1/2}a(\lambda)^{-1}(\ln a(\lambda))^{1/2+\varepsilon}\right), \quad \lambda\to\infty,$$

вытекающей из неравенств (31) и $2_p(b)$. Лемма доказана. □

Согласно (25)

$$I_1(\lambda)=O(\lambda^{-3/2})+O\left(\zeta^{-1}(x_0+1,\lambda)\right).$$

Далее,

$$\zeta(x_0+1,\lambda) > \zeta(e(\lambda),\lambda) > C\lambda^{1/2}e(\lambda),$$

так что

$$I_1(\lambda) = O(\lambda^{-3/2}) + O\big(\lambda^{-1/2}e(\lambda)^{-1}\big).$$

Отсюда и из лемм 5.1–5.3 следует утверждение теоремы 5.2. □

5.2. Доказательство теоремы 2.3 и следствия из нее. При выполнении условий (1_p)–(3_p) справедлива теорема 2.2, так что $I(\lambda)$ удовлетворяет оценке (24), которая с учетом условия (10) принимает вид

$$I(\lambda) = O\left(\lambda^{-3/2}\right), \quad \lambda\to\infty.$$

Тогда из соотношений (22) и (23) следует, что

$$K(\lambda) = -\frac{1}{2}\lambda^{-1/2}\int\limits_0^{x_0+1}\chi q dt + O\left(\lambda^{-3/2}\right). \tag{40}$$

Так как функция $\Phi(\nu)$ возрастает на $[p(x_0+1),+\infty)$, то существует такое $K_0\in\mathbb{N}$, что при всех $k\geqslant K_0$ уравнение

$$\Phi(\nu) = \pi k, \quad k\in\mathbb{N},$$

однозначно разрешимо. Обозначим через ν_k корень этого уравнения.

Выберем $A>0$ и обозначим через $\nu_k^+\in(\nu_k,\nu_{k+1})$, $\nu_k^-\in(\nu_{k-1},\nu_k)$, $k\geqslant K_0+1$, ближайшие к ν_k корни уравнения $|\sin\Phi(\nu)| = A\nu^{-1/2}$. Тогда из уравнения (11) и оценки (40) следует, что при достаточно большом $A>0$ найдутся такие натуральные числа K_1 и k_0, что $\lambda_{k-k_0}\in(\nu_k^-,\nu_k^+)$ для всех $k\geqslant K_1$. Положим $\Delta_k = \Phi(\lambda_k)-\pi(k+k_0)$. Тогда

$$|\Delta_k| = A\nu_k^{-1/2} + O\left(\nu_k^{-3/2}\right).$$

Следовательно,

$$\sin\Phi(\lambda_k) = (-1)^{k+k_0}\Delta_k + O\left(\nu_k^{-3/2}\right), \quad \cos\Phi(\lambda_k) = (-1)^{k+k_0} + O\left(\nu_k^{-3/2}\right).$$

Подставляя эти выражения в уравнение (11) и учитывая при этом (40), получим

$$\Phi(\lambda_k) = \pi(k+k_0) + \frac{1}{2}\lambda_k^{-1/2}\int\limits_0^{x_0+1}\chi q\,dt + O\left(\lambda_k^{-3/2}\right), \quad k\to\infty.$$

Далее, из (21) имеем

$$\Phi(\lambda) = \int\limits_0^{a(\lambda)}\sqrt{\lambda-p}dt + \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\lambda^{-1/2}\int\limits_0^{x_0+1}\chi q\,dt + O\left(\lambda^{-3/2}\right), \quad \lambda\to\infty.$$

Из этих двух соотношений следует (11). Теорема доказана.

Формула (12) непосредственно следует из (11) и разложения

$$\int\limits_0^{e^\lambda-m}\sqrt{\lambda-\ln(t+m)}\,dt = \Gamma\left(\frac{3}{2}\right)e^\lambda - m\left(\lambda^{1/2}+\frac{1}{2}\lambda^{-1/2}(1-\ln m)\right) + O\left(\lambda^{-3/2}\right), \quad \lambda\to\infty.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бойматов К. Х.* Оператор Штурма—Лиувилля с матричным потенциалом// Мат. заметки. — 1974. — *16*, т 6. — С. 921–932.
2. *Бойматов К. Х.* Некоторые спектральные свойства матричных дифференциальных операторов, далеких от самосопряженных// Функц. анал. прилож. — 1995. — *29*, т 3. — С. 55–58.
3. *Гохберг И. Ц., Крейн М. Г.* Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов. — М.: Наука. 1965.
4. *Ишкин Х. К.* Асимптотика спектра и регуляризованный след сингулярных дифференциальных операторов высшего порядка// Диффер. уравн. — 1995. — *31*, т 10. — С. 480–490.
5. *Ишкин Х. К.* О необходимых условиях локализации спектра задачи Штурма—Лиувилля на кривой// Мат. заметки. — 2005. — *78*, т 1. — С. 72–84.
6. *Ишкин Х. К.* О локализации спектра задачи с комплексным весом// Фундам. прикл. мат. — 2006. — *12*, т 5. — С. 49–64.
7. *Ишкин Х. К.* О спектральной неустойчивости оператора Штурма—Лиувилля с комплексным потенциалом// Диффер. уравн. — 2009. — *45*, т 4. — С. 480–495.
8. *Ишкин Х. К.* Критерий локализации спектра оператора Штурма—Лиувилля на кривой// Алгебра и анализ. — 2016. — *28*, т 1. — С. 52–88.
9. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. — М.: Мир, 1972.
10. *Келдыш М. В.* О собственных значениях и собственных функциях некоторых классов несамосопряженных уравнений// Докл. АН СССР. — 1951. — *77*, т 1. — С. 11–14.
11. *Лидский В. Б.* Условия полноты системы корневых подпространств у несамосопряженных операторов с дискретным спектром// Тр. Моск. мат. о-ва. — 1959. — *8*. — С. 83–120.
12. *Лидский В. Б.* Несамосопряженный оператор типа Штурма—Лиувилля с дискретным спектром// Тр. Моск. мат. о-ва. — 1960. — *9*. — С. 45–79.
13. *Наймарк М. А.* Линейные дифференциальные операторы. — М.: Наука. 1969.
14. *Рид М., Саймон Б.* Методы современной математической физики. Т. 1. — М.: Мир. 1977.
15. *Aguilar J., Combes J. M.* A class of analytic pertubations for one-body Schrödinger Hamiltonians// Commun. Math. Phys. — 1971. — *22*. — С. 268–279.
16. *Aslanyan A., Davies E. B.* Spectral instability for some Schrödinger operators// Numer. Math. — 2000. — *85*. — С. 525–552.
17. *Balslev E., Combes J. M.* Spectral properties of many body Schrödinger operators with dilation — analytic interactions// Commun. Math. Phys. — 1971. — *22*. — С. 280–294.
18. *Brown B. M.,Eastham M. S. P.* Spectral instability for some Schrödinger operators// J. Comput. Appl. Math. — 2002. — *148*. — С. 49–63.
19. *Davies E. B.* Non-self-adjoint differential operators// Bull. London Math. Soc. — 2002. — *34*, т 5. — С. 513–532.
20. *Davies E. B.* Eigenvalues of an elliptic system// Math. Z. — 2003. — *243*. — С. 719–743.
21. *Giertz M.* On the solution in L^2 of $y'' + (\lambda - q(x))y = 0$ when q is rapidly increasing// Proc. London Math. Soc. — 1964. — *14*. — С. 53–73.
22. *Hager M.* Instabilité spectrale semiclassique d'operateurs// Ann. H. Poincaré. — 2002. — *7*, т 6. — С. 1035–1064.
23. *Kato T.* Fractional powers of dissipative operators// J. Math. Soc. Jpn. — 1961. — *13*. — С. 246–273.
24. *Kato T.* Fractional powers of dissipative operators. II// J. Math. Soc. Jpn. — 1962. — *14*. — С. 242–248.
25. *Ray D.* On spectra of second-order differential operator// Trans. Am. Math. Soc. — 1954. — *77*. — С. 299–321.
26. *Sjöstrand J.* Spectral instability for non-selfadjoint operators/ Preprint. — Ecole Polytechnique, France. — Palaiseau Cedex, 2002.

Л. Г. Валиуллина
Башкирский государственный университет, Уфа
E-mail: `l.matem2012@yandex.ru`

Х. К. Ишкин
Башкирский государственный университет, Уфа
E-mail: `Ishkin62@mail.ru`

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 141 (2017). С. 61–78

УДК 517.984.22, 519.614

ВЫЧИСЛЕНИЕ СПЕКТРАЛЬНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ВОЗМУЩЕННЫХ САМОСОПРЯЖЕННЫХ ОПЕРАТОРОВ МЕТОДАМИ РЕГУЛЯРИЗОВАННЫХ СЛЕДОВ

© 2017 г. **С. И. КАДЧЕНКО, С. Н. КАКУШКИН**

Аннотация. В работе изложены основные теоретические положения, лежащие в основе новых численных методов вычисления собственных чисел и собственных функций дискретных полуограниченных снизу операторов. Приведены алгоритмы нахождения спектральных характеристик методами регуляризованных следов и примеры вычисления их в некоторых спектральных задачах Штурма—Лиувилля.

Ключевые слова: самосопряженный оператор, метод регуляризованных следов, численные методы, спектр.

AMS Subject Classification: 34L05, 47J10, 65L15

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение 61
2. Регуляризованные следы дискретных операторов 62
3. Нахождение собственных значений возмущенных самосопряженных операторов методом регуляризованных следов 66
4. Нахождение значений собственных функций возмущенных самосопряженных операторов методом регуляризованных следов 68
5. Заключение 74
Список литературы 74

1. Введение

Разработка новых численных методов нахождения собственных значений и собственных функций дискретных полуограниченных снизу операторов представляет большой научный интерес и значительно расширяет возможности решения как прямых, так и обратных спектральных задач. Эта статья представляет собой обзор результатов, полученных при разработке новых численных методов вычисления спектральных характеристик дискретных полуограниченных операторов на основе теории регуляризованных следов. Авторы разработанных методов назвали их методами регуляризованных следов (РС).

Современные методы вычисления собственных значений и собственных функций линейных дифференциальных и интегральных операторов построены на сведéнии задач к дискретным моделям на основе метода сеток или проекционных методы. В результате задачи сводятся к нахождению спектральных характеристик систем линейных алгебраических уравнений. Применение традиционных методов их решения требует весьма значительного объема вычислений ввиду плохой разделенности собственных значений матриц полученных систем уравнений. Надо отметить, что задача нахождения всех точек спектра матрицы для матриц высокого порядка еще не имеет удовлетворительного численного решения.

Применение полученных линейных формул в методах РС для вычисления собственных значений возмущенных самосопряженных операторов имеет ряд преимуществ перед известными методами. К ним прежде всего надо отнести простоту вычислительного процесса и возможность вычисления собственных значений с необходимым номером независимо от того, известны ли собственные значения с меньшими номерами или нет. При этом проблемы нахождения собственных значений матриц высокого порядка не возникает. Это решает задачу нахождения всех необходимых точек спектра возмущенного самосопряженного оператора. В отличие от известных методов нахождения значений собственных функций линейных дифференциальных в методах РС находятся по линейным формулам.

2. Регуляризованные следы дискретных операторов

С момента получения формул регуляризованных следов порядка $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\lambda_n^{\alpha} - A_{\alpha}(n)\right] = B_{\alpha}, \tag{1}$$

где λ_n — собственные значения оператора A, $A_\alpha(n)$ — известные числа, обеспечивающие сходимость числовых рядов, B_α — числа, явно вычисляемые через характеристики дифференциального оператора, неоднократно предпринимались попытки применить их для приближенного вычисления первых собственных значений оператора A. В самом деле, формулы (1) могут быть использованы для написания алгебраической системы уравнений

$$\sum_{n=1}^{n_0} \widetilde{\lambda}_n^{p} = B_p^{(n_0)}(t_p), \quad p = \overline{1, n_0}, \quad t_p \in N, \tag{2}$$

позволяющей находить приближенные значения $\{\widetilde{\lambda}_n\}_{n=1}^{n_0}$ первых n_0 собственных значений $\{\lambda_n\}_{n=1}^{n_0}$ оператора A (см. [49]). Правые части уравнений (2) содержат частичные суммы t_p сходящихся числовых рядов и определены в случае общих дифференциальных выражений и общих граничных условий с точностью до $O(n_0^{-r+t_p} \ln^{r+1} n_0)$, где r — целое число, большее n_0, получаемое из асимптотики λ_n, $n_0 = qr + \kappa$, κ — дефект регуляризации (см. [57]). Величины $O(n_0^{-r+t_p} \ln^{r+1} n_0)$ плохо поддаются оценкам и могут сильно расти при $n_0 \to \infty$.

В некоторых случаях из нелинейной системы уравнений (1) были найдены приближенные первые собственные значения $\{\widetilde{\lambda}_n\}_{n=1}^{n_0}$ дифференциальных операторов, причем точность оказалась удовлетворительной, но этот факт нельзя принимать за обоснование метода вычислений приближенных первых собственных значений, поскольку оценки величин $O(n_0^{-r+t_p} \ln^{r+1} n_0)$ не проводились, а остатки сходящихся числовых рядов отбрасывались. Кроме того, универсального алгоритма вычисления правых частей (2) для широкого класса операторов не существовало. Известные методы нахождения $B_p^{(n_0)}(t_p)$ применяются либо только к спектральным задачам Штурма—Лиувилля и требуют знания асимптотики собственных значений (см. [65]), либо знания повторных функций Грина спектральных задач для операторов с ядерными резольвентами, нахождение которых представляет во многих случаях сложные математические задачи (см. [12]).

Толчком к развитию теории следов линейных операторов послужил фундаментальный результат линейной алгебры: инвариантность базиса матричного следа линейного оператора и совпадение его со спектральным следом. Большое количество задач современной теории операторов в гильбертовом пространстве появились в результате поиска аналогов инвариантного следа для операторов, заведомо не имеющих следа в обычном смысле. Сначала конечномерный результат был перенесен на случай ядерных операторов. Было доказано (см. [8]), что если оператор A ядерный, то для любой пары $(\{\varphi\}_{n=1}^{+\infty}, \{\psi\}_{n=1}^{+\infty})$ ортонормированных базисов верно равенство

$$\sum_{n=1}^{\infty}(A\varphi_n, \varphi_n) = \sum_{n=1}^{\infty}(A\psi_n, \psi_n), \tag{3}$$

а также верно следующее равенство, известное как *теорема В. Б. Лидского* (см. [33]):

$$\sum_{n=1}^{\infty}(A\varphi_n,\varphi_n)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu_n, \tag{4}$$

где $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$ — все собственные значения оператора A. Если A не имеет собственных значений, то правая часть (4) равна нулю.

Классическая спектральная теория операторов завершается этими результатами, так как здесь максимально охвачен весь класс операторов со следом. Дальнейшее ее развитие основывается на теории регуляризованных следов (РС) линейных операторов.

Первые результаты были получены в 1947–1952 годах И. М. Лифшицем. В [36] он рассмотрел задачу о вычислении следа оператора $F(L+\Lambda)-F(L)$, где L — самосопряженный оператор, Λ — конечномерный оператор возмущения, $F(x)$ — некоторая (принадлежащая достаточно широкому классу) функция. При рассмотрении примера вычисления свободной энергии F твердого раствора было показано, что ее изменение ΔF на один атом примеси определяется по формуле

$$\Delta F=\operatorname{Sp}\bigl\{\varphi(L+\Lambda)-\varphi(\Lambda)\bigr\},$$

где

$$\varphi(x)=\left[\theta\ln\left(1-\exp\left(-\frac{\hbar\sqrt{x}}{\theta}\right)\right)+\hbar\frac{\sqrt{x}}{2}\right],$$

$\theta=kT$ — температура, $\hbar$ — постоянная Планка.

Началом теории РС дискретных операторов стала работа [7] И. М. Гельфанда и Б. М. Левитана, в которой для оператора Штурма—Лиувилля

$$-y''+q(x)y=\lambda y,\quad y'(0)=0,\quad y'(\pi)=0, \tag{5}$$

где $q(x)\in C^1[0,\pi]$, при условии

$$\int\limits_0^{\pi}q(x)dx=0,$$

была получена формула

$$\sum_{n=0}^{\infty}(\mu_n-\lambda_n)=\frac{1}{4}\bigl(q(0)+q(\pi)\bigr), \tag{6}$$

где μ_n — собственные значения задачи (5), $\lambda_n=n^2$ — собственные значения того же оператора с $q(x)\equiv 0$.

Формула (6) послужила основой теории, которая началась с исследования конкретных операторов, а затем в общем виде охватила изучение регуляризованных следов дискретных операторов. В [2, 6, 16, 17, 53] активно развивается абстрактное направление спектрального анализа. Сильный результат для конечномерных возмущений получен в [52], где рассмотрены некоторые классы неограниченных возмущений. Наиболее интенсивно в этом направлении работают В. А. Садовничий и его ученики [1, 3–5, 13–15, 37, 38, 42–48, 50, 53–56, 58, 59, 66–68], Х. Х. Муртазин [39–41], А. В. Хасанов [69].

Задача обобщения понятия следа для дискретных операторов ставится следующим образом: доказать соотношение

$$\sum_{n=1}^{\infty}\Bigl(\bigl(A\varphi_n,\varphi_n\bigr)-\bigl(A\psi_n,\psi_n\bigr)\Bigr)=0, \tag{7}$$

аналогичное формуле (3), при расходимости ряда из матричных элементов оператора. Это потребовало указать класс операторов A и соответствующий класс пар базисов $(\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty},\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty})$, для которых верна инвариантность следа в смысле (7).

Естественной идеей выбора базисов дискретных операторов является спектральная формулировка следа (4): в качестве первого базиса берется базис из собственных векторов оператора A, а для определения второго базиса оператор «расщепляется»в сумму двух: $A = A_0 + B$, причем предполагается подчиненность оператора B оператору A_0, и формула (7) будет иметь вид

$$\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\big(A\varphi_n,\varphi_n\big)-\big(A\psi_n,\psi_n\big)\Big)=\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\lambda_n-\mu_n+\big(B\varphi_n,\varphi_n\big)\Big)=0, \tag{8}$$

где $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ — базис из собственных функций оператора A с собственными значениями $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ — базис из собственных функций оператора A_0 с собственными значениями $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$.

На протяжении долгого времени обычным результатом, получаемым разными авторами для следов дискретных операторов, было то, что формула (6) для возмущенного оператора не имела вида (8). В [9] Л. А. Дикий дал другое доказательство для первой формулы Гельфанда—Левитана, показав, что формула (6) фактически и есть формула (8).

Различные результаты теории следов были получены методами теории возмущений дискретных операторов в работах М. Г. Крейна, В. А. Садовничего, В. А. Любишкина, В. В. Дубровского [32, 60–64].

Впервые в 1957 г. Л. А. Дикий в [10] предложил способ приближенного вычисления собственных значений задачи Штурма–Лиувилля. Его идея состояла в следующем: пусть $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ — собственные значения оператора Штурма— Лиувилля (5). Как известно, собственные значения с большими номерами допускают асимптотическое разложение

$$\lambda_n \sim n^2 + c_0 + \frac{c_2}{n^2} + \frac{c_4}{n^4} + \frac{c_6}{n^6} + \dots . \tag{9}$$

Допустим, что известны регуляризованные следы оператора Штурма—Лиувилля всех целых порядков, т.е. известны правые части уравнений (1), где под $A_p(n)$ понимается начальный отрезок асимптотического разложения (9), обеспечивающий сходимость ряда (1). Коэффициенты асимптотического разложения (9) выражаются в конечном виде через граничные условия и потенциал $q(x)$. Числа B_p, входящие в формулы (1), так же вычисляются в конечном виде (см. [11]). И. М. Гельфанд и Л. А. Дикий предположили, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое число $n_0 \in N$, что

$$\left|\sum_{n=1}^{n_0}\Big[\lambda_n^p - A_p(n)\Big] - B_p\right| < \varepsilon, \quad p=\overline{1,n_0}, \tag{10}$$

и при этом решения системы n_0 алгебраических уравнений

$$\sum_{n=1}^{n_0}\Big[\widetilde{\lambda}_n^p - A_p(n)\Big] - B_p^{(n_0)}(t_p) = 0, \quad p=\overline{1,n_0}, \tag{11}$$

есть приближенные n_0 первые собственные значения $\{\lambda_n\}_{n=1}^{n_0}$ спектральной задачи (5) (см. [10]).

Преимущества этого способа, в сравнении с методом Дородницына, в том, что числа $A_p(n)$ и $B_p^{(n_0)}(t_p)$ в системе (11) выражаются в конечном виде через характеристики оператора. Но в [10, 11] не дано теоретического обоснования этого способа, а лишь приведен пример вычисления первых трех собственных чисел уравнения Матье с хорошей точностью. Впоследствии С. А. Шкарин в [70] показал, что данный способ в таком виде применяться не может, так как система (11) имеет бесконечно много решений, причем существуют решения с любым наперед заданным конечным набором $\{\widetilde{\lambda}_n\}_{n=1}^{n_0}$. При разном выборе n_0 и отрезка асимптотики λ_n могут получаться случайные числа, не связанные с собственными значениями исходного оператора.

В работе [65] В. А. Садовничего и В. Е. Подольского впервые было сделано теоретическое обоснование вычисления первых собственных значений оператора Штурма—Лиувилля, основанное на системе (11), составленной из регуляризованных следов оператора. Они ввели следующий класс операторов Штурма—Лиувилля: оператор

$$-y'' + q(x)y = \lambda y, \quad y'(0) - h_1 y(0) = 0, \quad y'(\pi) - h_2 y(\pi) = 0 \tag{12}$$

принадлежит классу S, если решение задачи Коши

$$\varphi(0,\lambda) = 1, \quad \varphi'(0,\lambda) = h_1 \tag{13}$$

имеет при $|\lambda| \to \infty$ такое асимптотическое разложение

$$\varphi(x,\lambda) \sim \cos(\sqrt{\lambda}x) + k_1(x)\frac{\sin(\sqrt{\lambda}x)}{\sqrt{\lambda}} + k_2(x)\frac{\cos(\sqrt{\lambda}x)}{\lambda} + \dots + \\ + k_{2n-1}(x)\frac{\sin(\sqrt{\lambda}x)}{(\sqrt{\lambda})^{2n-1}} + k_{2n}(x)\frac{\cos(\sqrt{\lambda}x)}{\lambda^n} + \dots,$$

что лишь конечное число коэффициентов $k_j(x)$ отлично от нуля на отрезке $[0,\pi]$. Было показано, что класс операторов S плотен в множестве операторов Штурма—Лиувилля с потенциалом из $L_2[0,\pi]$. Если $\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$ — спектр некоторого оператора из класса S и

$$\sum_{n=0}^{\infty}\Big[\lambda_n^p - A_p(n)\Big] = B_p \tag{14}$$

является полной системой регуляризованных следов оператора, то эта система однозначно определяет спектр $\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$. В этом случае для любого положительного ε существуют такие натуральные числа N и K, что если использовать в $A_p(n)$, $p=\overline{1,K}$, первые N членов асимптотического разложения λ_n^p по степеням p, то будут верны неравенства

$$\left|\sum_{n=0}^{K}\Big[\lambda_n^p - A_p(n)\Big] - B_p\right| \leqslant \varepsilon, \quad p=\overline{1,K}. \tag{15}$$

Эти утверждения позволяют говорить о том, что произвольный оператор Штурма—Лиувилля приближается (в операторной норме) с заданной точностью оператором $A_p(n)$ из класса S. Из принципа максимума следует: если норма разности операторов меньше ε, то и модуль разности собственных значений этих операторов с одинаковыми номерами не превосходит ε. Поэтому для оператора класса S собственные значения находятся из системы регуляризованных следов с любой наперед заданной точностью. Параметры N и K можно выразить через ε, норму $q(x)$, h_1, h_2 и для любого оператора Штурма—Лиувилля можно построить приближающий его оператор класса S.

Отметим работы [34, 35] В. Б. Лидского и В. А. Садовничего, в которых для нахождения приближенных первых собственных значений спектральной задачи Орра—Зоммерфельда

$$(D^2-\alpha^2)^2u = i\alpha R\big\{(p(x)-c)(D^2-\alpha^2)u - p''(x)u\big\}, \tag{16}$$

$$u(0)=u'(0)=u(1)=u'(1)=0 \tag{17}$$

рассматривались регуляризованные следы вида:

$$\sum_{l=1}[c_l^k - a_l(k)] = s_k, \quad k=\overline{1,\infty}. \tag{18}$$

Здесь c - спектральный параметр, α и R - вещественные константы, $p(x)$ - вещественная функция, c_l - собственные значения спектральной задачи (16) - (17), $a_l(k)$ - некоторые вполне определенные числа, обеспечивающие сходимость рядов (18), s_k - значение k - й регуляризованной суммы.

Задача (16) - (17) возникает в гидродинамической теории устойчивости. Дело в том, что если при всех вещественных α и R числа $c_l(\alpha,R)$ лежат в нижней полуплоскости, то соответствующее течение оказывается устойчивым. Если хотя бы одно число $c_l(\alpha,R)$ лежит в верхней полуплоскости, то течение неустойчивое. При этом в верхней полуплоскости могут оказаться лишь числа c_l с малыми модулями.

Предлагаемые в статье [34] процедуры определения чисел $a_l(k)$ и s_k по характеристикам уравнения (16) включают интегрирование известных функций, сложение и умножение в конечном числе. Это позволило авторам надеяться на то, что используя формулы (18) можно приближено находить первые собственные значения спектральной задачи Орра-Зоммерфельда и исследовать соответствующее течение на устойчивость.

3. Нахождение собственных значений возмущенных самосопряженных операторов методом регуляризованных следов

Идеи, позволившие в дальнейшем разработать новый численный метод РС приближенного вычисления первых собственных значений возмущенных самосопряженных операторов, были сформулированы в работе В.А. Садовничего и В.В. Дуброского [57]. Следуя этой статье рассмотрим спектральную задачу вида

$$\Big(T+P\Big)u=\mu u, \tag{19}$$

где T — дискретный полуограниченный снизу оператор, а P — ограниченный оператор, заданные в сепарабельном гильбертовом пространстве H. Предположим, что известны собственные значения $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ оператора T, занумерованные в порядке неубывания их действительных величин, и ортонормированные собственные функции $\{v_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, отвечающие этим собственным значениям. Пусть собственные функции $\{v_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ образуют базис в H. Обозначим через ν_n алгебраическую кратность собственного значения λ_n, а количество всех не равных друг другу λ_n, лежащих внутри окружности T_{n_0} радиуса $\rho_{n_0}=\dfrac{|\lambda_{n_0+1}+\lambda_{n_0}|}{2}$ с центром в начале координат комплексной плоскости, через n_0. Пусть $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$ — собственные значения оператора $T+P$, занумерованные в порядке неубывания их действительных частей, а $\{u_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ — соответствующие им собственные функции. Если для всех $n\in N$ выполняются неравенства

$$q_n=\frac{2||P||}{|\lambda_{n+\nu_n}-\lambda_n|}<1,$$

то линейный оператор $T+P$ является дискретным, и внутри окружности T_{n_0} находится одинаковое количество собственных значений операторов T и $T+P$ (см. [51]). В [57] показано, что $m_0=\sum\limits_{n=1}^{n_0}\nu_n$ собственных значений оператора $T+P$ являются решениями системы нелинейных уравнений

$$\sum_{k=1}^{m_0}\mu_k^p=\sum_{k=1}^{m_0}\lambda_k^p+\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k^{(p)}(m_0),\quad p=\overline{1,m_0}. \tag{20}$$

Здесь

$$\alpha_k^{(p)}(m_0)=\frac{(-1)^kp}{2\pi ki}\,\mathrm{Sp}\int\limits_{T_{n_0}}\lambda^{p-1}\Big[PR_\lambda(T)\Big]^kd\lambda$$

— k-е поправки теории возмущений оператора $T+P$ целого порядка p, $R_\lambda(T)$ — резольвента оператора T. Выражая симметрические многочлены $\sum\limits_{k=1}^{m_0}\mu_k^p$, $p=\overline{1,m_0}$, от m_0 переменных через правые части системы уравнений (20) при помощи теоремы Виета, получим многочлен степени m_0 со старшим коэффициентом, равным единице. Остальные коэффициенты могут быть найдены со сколь угодно большой точностью, к примеру, по формулам Ньютона. Корнями полученного многочлена будут собственные значения $\{\mu_n\}_{n=1}^{m_0}$ оператора $T+P$. Так как комплексные корни многочлена со старшим коэффициентом, равным единице, непрерывно зависят от его коэффициентов, то решая приближенно подходящим способом это уравнение, можно найти его корни $\{\mu_n\}_{n=1}^{m_0}$ с достаточной точностью.

Предельные абсолютные погрешности первых собственных значений оператора $T+P$ будут зависеть от того, насколько точно вычислены суммы числовых рядов $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\alpha_k^{(p)}(m_0)$ поправок теории возмущения оператора $T+P$. В настоящей работе получены оценки поправок теории возмущений $\alpha_k^{(p)}(m_0)$ дискретного полуограниченного снизу оператора T:

$$\big|\alpha_k^{(p)}(m_0)\big|\leqslant\frac{p}{k}\rho_{n_0}^p\max\Big\|\big(R_\lambda(T)\big)^{s_0}\Big\|_1\|P\|^k\left(\frac{2}{d_{n_0}}\right)^{k-s_0},\quad k\geqslant s_0, \tag{21}$$

в случае, когда существует такое натуральное число s_0, что оператор $\Big(R_\lambda(T)\Big)^{s_0}$ является ядерным; здесь $d_{n_0} = \lambda_{n_0+1} - \lambda_{n_0}$. Это позволило при $2\|P\|/d_{n_0} < 1$ и условии ограниченности оператора P записать нелинейные уравнения

$$\sum_{k=1}^{m_0} \mu_k^p = \sum_{k=1}^{m_0} \lambda_k^p + \sum_{k=1}^{t_p} \alpha_k^{(p)}(m_0) + O\left(\left(\frac{2\|P\|}{d_{n_0}}\right)^{t_p+1-s_o}\right), \quad t_p \geqslant s_0, \quad p = \overline{1, m_0}, \tag{22}$$

для нахождения первых m_0 собственных значений $\{\mu_n\}_{n=1}^{m_0}$ возмущенного оператора $T+P$. При этом было показано, что ряды поправок теории возмущений $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k^{(p)}(m_0)$ сходятся, а $\alpha_k^{(p)}(m_0)$ явно вычисляются через характеристики операторов T и P с помощью теории вычетов.

Так как поправки теории возмущений $\alpha_k^{(p)}(m_0)$ вычисляются для большого класса операторов, область применения этого метода гораздо шире, чем других известных методов. Замечательным обстоятельством является применение метода для нахождения собственных значений дифференциальных операторов в частных производных.

Для разработки метода РС, и применения его для численных расчетов, необходимо:

(1) разработать эффективные алгоритмы вычисления поправок теории возмущений $\alpha_k^{(p)}(n_0)$ и числовых рядов Релея—Шредингера $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k^{(p)}(n_0)$;
(2) создать методики оценок сходимости метода и нахождения предельных абсолютных погрешностей вычисления первых собственных значений оператора $T+P$;
(3) рассмотреть методики применения метода к различным спектральным задачам.

Это было сделано в [18–22, 29, 30].

Дальнейшее развитие метод РС получил в серии работ С. И. Кадченко (см., например, [22–24, 28–31, 71]). Им были получены вычислительно эффективные формулы нахождения приближенных собственных значений $\widetilde{\mu}_n$ дискретного полуограниченного снизу оператора $T+P$:

$$\widetilde{\mu}_n = \lambda_n + (Pv_n, v_n) + \widetilde{\delta}_1(n) \tag{23}$$

(см. [25]), где $\widetilde{\delta}_1(n) = \delta_1(n) - \delta_1(n-1)$, $\delta_1(n) = \sum\limits_{k=1}^{n} [\mu_k - \widehat{\mu}_k(n)]$, $\widehat{\mu}_k(n)$ — приближенные значения по Галеркину соответствующих собственных значений μ_k оператора $T+P$. Для $\widetilde{\delta}_1(n)$ справедливы оценки

$$\left|\widetilde{\delta}_1(n)\right| \leqslant (2n-1)\rho_n \frac{q^2}{1-q}, \quad q = \max_{\forall n \in N} q_n.$$

Применение формул (23) для вычисления собственных значений возмущенных самосопряженных операторов имеет ряд преимуществ в сравнении с классическими методами, которые отмечены во введении.

В [26] был разработан алгоритм вычисления собственных значений спектральной задачи (19) по формулам (23) методом РС. Для нахождения приближенных собственных значений $\widetilde{\mu}$ оператора $T+P$ необходимо:

(1) найти собственные значения λ_n оператора T и занумеровать их в порядке неубывания величин с учетом кратности $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$;
(2) найти ортонормированные собственные функции $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ оператора T, соответствующие собственным значения $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$;
(3) проверить выполнение неравенств
$$\frac{2\|P\|}{\left|\lambda_{n+\lambda} - \lambda_n\right|} < 1$$
для $n \leqslant m_0$;
(4) вычислить приближенные собственные значения $\widetilde{\mu}_n$ оператора $T+P$ по формулам (23).

Для апробации формул (23) приближенного вычисления собственных значений возмущенного самосопряженного оператора, рассмотрена спектральная задача Штурма—Лиувилля (см. [26])

$$\begin{cases} -v'' + p(x)v = \mu v, \quad a < x < b; \\ \cos\alpha v'(a) + \sin\alpha v(a) = 0, \\ \cos\gamma v'(b) + \sin\gamma v(b) = 0, \quad \alpha, \gamma \in [0, 2\pi]. \end{cases} \tag{24}$$

Пусть $Tu \equiv -u''$, причем функция u удовлетворяет граничным условиям (24). Нетрудно показать, что оператор T — самосопряженный, а его собственные числа $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ являются корнями трансцендентного уравнения

$$\Big[\sin\alpha\sin(\sqrt{\lambda}a) + \sqrt{\lambda}\cos\alpha\cos(\sqrt{\lambda}a)\Big]\Big[\sin\gamma\cos(\sqrt{\lambda}b) - \sqrt{\lambda}\cos\gamma\sin(\sqrt{\lambda}b)\Big] + \\ + \Big[\sqrt{\lambda}\cos\alpha\sin(\sqrt{\lambda}a) - \sin\alpha\cos(\sqrt{\lambda}a)\Big]\Big[\sin\gamma\sin(\sqrt{\lambda}b) + \sqrt{\lambda}\cos\gamma\cos(\sqrt{\lambda}b)\Big] = 0.$$

Собственные функции оператора T имеют вид:

$$u_k(x) = C_k\bigg\{\Big[\sin\alpha\sin(\sqrt{\lambda_k}a) + \sqrt{\lambda_k}\cos\alpha\cos(\sqrt{\lambda_k}a)\Big]\cos(\sqrt{\lambda_k}x) + \\ + \Big[\sqrt{\lambda_k}\cos\alpha\sin(\sqrt{\lambda_k}a) - \sin\alpha\cos(\sqrt{\lambda_k}a)\Big]\sin(\sqrt{\lambda_k}x)\bigg\}, \quad k = \overline{1,\infty}.$$

Постоянные C_k находятся из условия нормировки.

Сравнение приближенных собственных значений $\widetilde{\mu}_k(n)$ спектральной задачи Штурма—Лиувилля (24), найденных по формулам (23), и собственных значений $\widehat{\mu}_k(n)$, найденных методом Галеркина, задачи (24) приведено в таблице 1 при $a = 1$, $b = 2$, $\alpha = \pi/3$, $\gamma = \pi/5$, $p(x) = x^2 + 15x + (x^2 - 10x)i$.

Из таблицы 1 видно, что при увеличении номера собственного значения k, соответствующие величины $|\widetilde{\mu}_k(n) - \widehat{\mu}_k(n)|$ уменьшаются. Исключение составляет последняя строка ($k = 41$). Для сравнения точности вычисления собственных значений спектральной задачи (24) по формулам (23) и классическим методом Галеркина, приведем таблицу 2, которая получена при тех же значениях параметров, что и таблица 1.

Собственные значения $\widetilde{\mu}_k(41)$ и $\widetilde{\mu}_k(81)$ задачи (24) при $k = \overline{1,41}$ не меняются, а величины $\widehat{\mu}_k(41)$ и $\widehat{\mu}_k(81)$, как это видно из таблицы 2, различны при $k = \overline{35,41}$. Это указывает на то, что формулы (23) дают более точный результат, чем классический метод Галеркина.

Проведенные многочисленные расчеты при различных значениях параметров a, b, c, d, α, γ, $p(x)$ спектральной задачи (24) показали высокую точность и вычислительную эффективность линейных формул (23).

В. В. Дубровский и В. В. Распопов в [47], опираясь на результаты исследований С. И. Кадченко [18–20], обобщили методики применения метода РС к некоторым задачам гидродинамической теории устойчивости на случай полуцелых регуляризованных следов.

4. Нахождение значений собственных функций возмущенных самосопряженных операторов методом регуляризованных следов

Естественным продолжением работ, посвященных численному методу нахождения собственных значений возмущенных самосопряженных операторов, является использование регуляризованных следов для вычисления значений собственных функций дискретных полуограниченных снизу операторов в узлах дискретизации. Если для операторов T и P выполняются все требования сформулированные выше, то значения собственных функций оператора $T + P$ являются

Таблица 1. Значения $\widetilde{\mu}_k(41)$ и $\widehat{\mu}_k(41)$ при $a = 1$, $b = 2$, $\alpha = \pi/3$, $\gamma = \pi/5$, $p(x) = x^2 + 15x + (x^2 - 10x)i$

k	$\widetilde{\mu}_k(41)$	$\widehat{\mu}_k(41)$	$\lvert\widetilde{\mu}_k(41) - \widehat{\mu}_k(41)\rvert$
1	$35{,}544313 - 13{,}634443i$	$35{,}095744 - 13{,}222069i$	0,609316
2	$62{,}950802 - 12{,}885344i$	$63{,}153968 - 13{,}074541i$	0,277618
3	$111{,}931462 - 12{,}761626i$	$112{,}005121 - 12{,}828291i$	0,099348
4	$180{,}893757 - 12{,}719634i$	$180{,}933740 - 12{,}755878i$	0,053965
5	$269{,}663026 - 12{,}700433i$	$269{,}687656 - 12{,}722813i$	0,033279
6	$378{,}197795 - 12{,}690065i$	$378{,}214659 - 12{,}705422i$	0,022809
7	$506{,}484092 - 12{,}683835i$	$506{,}496324 - 12{,}694988i$	0,016553
8	$654{,}516136 - 12{,}679800i$	$654{,}525442 - 12{,}688294i$	0,012599
9	$822{,}291180 - 12{,}677037i$	$822{,}298490 - 12{,}683714i$	0,009900
10	$1009{,}807782 - 12{,}675064i$	$1009{,}813683 - 12{,}680457i$	0,007995
...	...	...	...
20	$3970{,}670326 - 12{,}668763i$	$3970{,}671783 - 12{,}670097i$	0,001976
21	$4375{,}323525 - 12{,}668568i$	$4375{,}324846 - 12{,}669778i$	0,001791
22	$4799{,}716010 - 12{,}668399i$	$4799{,}717214 - 12{,}669501i$	0,001632
23	$5243{,}847769 - 12{,}668252i$	$5243{,}848870 - 12{,}669259i$	0,001492
24	$5707{,}718790 - 12{,}668122i$	$5707{,}719801 - 12{,}669048i$	0,001370
25	$6191{,}329066 - 12{,}668008i$	$6191{,}329997 - 12{,}668861i$	0,001263
26	$6694{,}678589 - 12{,}667907i$	$6694{,}679449 - 12{,}668695i$	0,001167
27	$7217{,}767353 - 12{,}667817i$	$7217{,}768151 - 12{,}668548i$	0,001082
28	$7760{,}595355 - 12{,}667736i$	$7760{,}596097 - 12{,}668415i$	0,001006
29	$8323{,}162589 - 12{,}667664i$	$8323{,}163281 - 12{,}668297i$	0,000938
30	$8905{,}469054 - 12{,}667598i$	$8905{,}469700 - 12{,}668190i$	0,000876
...	...	...	...
38	$14274{,}532802 - 12{,}667247i$	$14274{,}533210 - 12{,}667621i$	0,000553
39	$15034{,}492254 - 12{,}667218i$	$15034{,}492699 - 12{,}667626i$	0,000605
40	$15814{,}190920 - 12{,}667191i$	$15814{,}191344 - 12{,}667577i$	0,000574
41	$16613{,}628801 - 12{,}667165i$	$16613{,}642998 - 12{,}680169i$	0,019252

решениями следующей системы нелинейных уравнений (см. [57]):

$$\sum_{j=1}^{m_0} \mu_j^p u_j(x)\overline{u}_j(y) = \sum_{j=1}^{m_0} \lambda_j^p v_j(x)\overline{v}_j(y) + \sum_{k=1}^{t} \alpha_k^{(p)}(m_0, x, y) + \varepsilon_t^{(p)}(m_0, x, y). \tag{25}$$

Здесь

$$\alpha_k^{(p)}(m_0, x, y) = \frac{(-1)^k}{2\pi i} \int\limits_{T_{n_0}} \lambda^p [K_T(x, z_k, \lambda) \circ P_{z_k}]^k \circ K_T(z_k, y, \lambda) d\lambda \tag{26}$$

— k-е поправки теории возмущений к «взвешенной» спектральной функции оператора $T + P$ целого порядка p; $K_T(x, y, \lambda)$ — ядро резольвенты $R_\lambda(T)$ оператора T; операция «$\circ$» вводится по правилу

$$(K \circ P \circ Q)(x, y, \lambda) = \int\limits_D K(x, z, \lambda) P_z Q(z, y, \lambda) dz \tag{27}$$

Таблица 2. Значения $\widetilde{\mu}_k(81)$ и $\widehat{\mu}_k(81)$ при $a = 1$, $b = 2$, $\alpha = \pi/3$, $\gamma = \pi/5$, $p(x) = x^2 + 15x + (x^2 - 10x)i$

k	$\widetilde{\mu}_k(81)$	$\widehat{\mu}_k(81)$	$\lvert\widetilde{\mu}_k(81) - \widehat{\mu}_k(81)\rvert$	$\lvert\widetilde{\mu}_k(41) - \widehat{\mu}_k(41)\rvert$
1	$35{,}544313 - 13{,}634443i$	$35{,}095744 - 13{,}222069i$	0,609316	0,609316
2	$62{,}950802 - 12{,}885344i$	$63{,}153968 - 13{,}074541i$	0,277618	0,277618
3	$111{,}931462 - 12{,}761626i$	$112{,}005121 - 12{,}828291i$	0,099347	0,099348
4	$180{,}893757 - 12{,}719634i$	$180{,}933740 - 12{,}755878i$	0,053965	0,053965
5	$269{,}663026 - 12{,}700433i$	$269{,}687656 - 12{,}722813i$	0,033279	0,033279
...	...	...	...	...
35	$12113{,}089748 - 12{,}667351i$	$12113{,}090222 - 12{,}667786i$	0,000643	0,000645
36	$12813{,}831549 - 12{,}667314i$	$12813{,}831997 - 12{,}667724i$	0,000608	0,000610
37	$13534{,}312567 - 12{,}667279i$	$13534{,}312992 - 12{,}667668i$	0,000576	0,000584
38	$14274{,}532802 - 12{,}667247i$	$14274{,}533205 - 12{,}667616i$	0,000546	0,000553
39	$15034{,}492254 - 12{,}667218i$	$15034{,}492636 - 12{,}667568i$	0,000518	0,000605
40	$15814{,}190920 - 12{,}667191i$	$15814{,}191283 - 12{,}667523i$	0,000492	0,000574
41	$16613{,}628801 - 12{,}667165i$	$16613{,}629147 - 12{,}667482i$	0.000469	0,019252

и, наконец,

$$\varepsilon_t^{(p)}(m_0, x, y) = \sum_{m=t+1}^{\infty} \alpha_m^{(p)}(m_0, x, y) \quad \forall t \in N$$

— остатки сумм функциональных рядов Релея—Шредингера.

Правые части уравнений (25) явно выражаются через характеристики невозмущенного оператора T и возмущающего оператора P, а «взвешенные» поправки теории возмущений $\alpha_k^{(p)}(m_0, x, y)$ вычисляются с помощью теории вычетов.

Теорема 4.1. *Если T — дискретный полуограниченный снизу оператор, P — ограниченный оператор, действующие в сепарабельном гильбертовом пространстве H, и для всех $n \in \mathbb{N}$ выполняются неравенства $q_n < 1$, то «взвешенные», поправки теории возмущений $\alpha_k^{(p)}(m_0, x, y)$ для любых натуральных k, p и m_0 можно найти по формулам*

$$\alpha_k^{(p)}(m_0, x, y) = -\sum_{n=1}^{m_0} \sum_{j_1, \ldots, j_{k+1}=1}^{\infty} v_{j_1}(x) \overline{v}_{j_{k+1}}(y) r_k^{(p)}(n, j_1, \ldots, j_{k+1}) \prod_{m=1}^{k} V_{j_m j_{m+1}}, \tag{28}$$

где

$$r_k^{(p)}(n, j_1, \ldots, j_{k+1}) = \begin{cases} 0, & \forall j_m \neq n,\ m = \overline{1, k+1}; \\ \dfrac{1}{k!} \lim\limits_{\lambda \to \lambda_n} \dfrac{d^k}{d\lambda^k} \lambda^p, & l = k+1; \\ \dfrac{1}{(l-1)!} \lim\limits_{\lambda \to \lambda_n} \dfrac{d^{l-1}}{d\lambda^{l-1}} \left(\dfrac{\lambda^p}{\prod\limits_{m=1}^{k-l+1} (\lambda - \lambda_{j_m})} \right), & 0 < l \leqslant k; \end{cases}$$

$V_{i,j} = (Pv_i, v_j)$ — скалярное произведение; l — число совпадений $j_m = n$, $m = \overline{1, k+1}$.

В ряде случаев суммы функциональных рядов Релея—Шредингера $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k^{(p)}(m_0, x, y)$ удается приблизить с необходимой степенью точности первыми «взвешенными» поправками теории возмущений при помощи формулы (28). Однако при нахождении k-й «взвешенной» поправки

$\alpha_k^{(p)}(m_0,x,y)$ по этим формулам необходимо вычислять $(k+1)$-кратные числовые ряды. Поэтому возникла необходимость построить алгоритм вычисления сумм функциональных рядов Релея—Шредингера.

Теорема 4.2. *Пусть T — дискретный полуограниченный снизу оператор, P — ограниченный оператор, действующие в сепарабельном гильбертовом пространстве H с областью определения в D. Если функции $\{v_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ $(x \in D)$ образуют ортонормированный базис в H, то суммы функциональных рядов Релея—Шредингера находятся по формулам*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n^{(p)}(m_0,x,y)=\sum_{k=1}^{m_0}\Bigg\{(\mu_k^p-\lambda_k^p)v_k(x)\overline{v}_k(y)-$$
$$-\mu_k^p\sum_{j,i=1}^{k-1}\left[\frac{\overline{V}_{ik}\overline{\breve{A}_{ij}^{(k)}}}{\overline{\det\breve{\boldsymbol{A}}^{(k)}}}v_k(x)\overline{v}_j(y)+\frac{V_{ik}\breve{A}_{ij}^{(k)}}{\det\breve{\boldsymbol{A}}^{(k)}}v_j(x)\overline{v}_k(y)\right]+$$
$$+\mu_k^p\sum_{j_1,j_2,i_1,i_2=1}^{k-1}\frac{V_{i_1k}\overline{V}_{i_2k}\breve{A}_{i_1j_1}^{(k)}\overline{\breve{A}_{i_2j_2}^{(k)}}}{\det\breve{\boldsymbol{A}}^{(k)}\overline{\det\breve{\boldsymbol{A}}^{(k)}}}v_{j_1}(x)v_{j_2}(y)\Bigg\}+\delta_k^{(p)}(m_0,x,y). \quad (29)$$

Здесь

$$\delta_k^{(p)}(m_0,x,y)=\sum_{k=1}^{m_0}\mu_k^{(p)}\Bigg\{\varepsilon_k(x)\left[v_k(x)-\frac{1}{\det\breve{\boldsymbol{A}}^{(k)}}\sum_{j,i=1}^{k-1}V_{ik}\breve{A}_{ij}^{(k)}v_j(x)\right]+$$
$$+\overline{\varepsilon}_k(y)\left[\overline{v}_k(y)-\frac{1}{\overline{\det\breve{\boldsymbol{A}}^{(k)}}}\sum_{j,i=1}^{k-1}\overline{V}_{ik}\overline{\breve{A}_{ij}^{(k)}}\overline{v}_j(y)\right]\Bigg\},$$

$$|\delta_k^{(p)}(m_0,x,y)|\xrightarrow{n\to\infty}0,\quad \varepsilon_k(x)=u_k(x)-\widetilde{u}_k(x),$$

$\widetilde{u}_k(x)$ — приближение собственной функции $u_k(x)$, $\breve{\boldsymbol{A}}^{(k)}=(a_{ij})_{i,j=1}^k$, $a_{ij}=V_{ij}+(\lambda_i-\mu_k)\delta_{ij}$, $V_{ij}=(Pv_i,v_j)$, δ_{ij} — символ Кронекера, $\breve{A}_{ij}^{(k)}$ — алгебраические дополнения элементов матрицы $\breve{\boldsymbol{A}}^{(k)}$. Черта означает комплексное сопряжение.

Система уравнений (25) позволила разработать численный метод нахождения значений собственных функций возмущенных самосопряженных операторов. Отправным моментом послужила работа [57] В. А. Садовничего и В. В. Дубровского, следуя которой, составим систему нелинейных уравнений (25) относительно m_0 произведений $u_j(x)\overline{u}_j(y)$, $j=\overline{1,m_0}$, собственных функций возмущенного оператора $T+P$. Собственные значения μ_n возмущенного оператора $T+P$, стоящие в левой части системы уравнений (25), могут быть найдены, например, по линейным формулам, полученным в [30]. Определитель системы (25) является определителем Вандермонда, который отличен от нуля. Следовательно, система имеет единственное решение.

Предельные абсолютные погрешности найденных произведений $u_n(x)\overline{u}_n(y)$ первых собственных функций оператора $T+P$ в узлах дискретизации будут зависеть от того, с какой точностью вычислены собственные значения $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$ оператора $T+P$ и с какой точностью найдены суммы функциональных рядов $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\alpha_k^{(p)}(m_0,x,y)$ «взвешенных» поправок теории возмущений.

В [26,27] был разработан неитерационный численный метод нахождения значений собственных функций возмущенных самосопряженных операторов. Он был назван методом регуляризованных следов (РС). Его основные идеи состоят в следующем. Если T — дискретный полуограниченный снизу оператор, а P — ограниченный оператор, действующие в сепарабельном гильбертовом пространстве H и для всех $n\in\mathbb{N}$ выполняются неравенства $q_n<1$, то произведение собственной функции $u_n(x)$ и ее сопряженной $\overline{u}_n(y)$ при любых значениях аргументов $x,y\in D$ можно найти по формулам

$$u_n(x)\overline{u}_n(y) = \frac{1}{\mu_n}\left(\lambda_n v_n(x)\overline{v}_n(y) + \sum_{k=1}^{t}\Big[\alpha_k^{(1)}(n,x,y) - \alpha_k^{(1)}(n-1,x,y)\Big]\right) + \widetilde{\varepsilon}_t^{(1)}(n,x,y), \tag{30}$$

где для $\widetilde{\varepsilon}_t^{(1)}(n,x,y)$ справедливы оценки

$$\big|\widetilde{\varepsilon}_t^{(1)}(n,x,y)\big| \leqslant \frac{C_0^2}{2\pi\mu_n}\|P\|S_\lambda\rho_n^2\frac{q^t}{1-q} \quad \forall t\in\mathbb{N}, \quad n=\overline{1,m_0}. \tag{31}$$

Здесь

$$S_\lambda = \sup_{\lambda\in T_{n_0}}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{|\lambda-\lambda_k|}\right)^2, \quad |v_i(x)|\leqslant C_0 \quad \forall i=\overline{1,\infty}, \quad q=\max_{n\geqslant 1}q_n.$$

Следует отметить, что нахождение значений собственных функций $u_j(x)$, $j=\overline{1,m_0}$, из найденных значений произведений $u_j(x)\overline{u}_j(y)$, вызывает большие трудности.

Как известно, значения собственных функций и собственные значения возмущенного оператора $T+P$ при некотором комплексном возмущении P так же будут комплексными. Предположим, что найдено некоторое комплексное значение функции $u_j(x)=\alpha+\beta i$. Через α и β обозначены действительная и мнимая части $u_j(x)$ соответственно. Очевидно, что произведение собственной функции $u_j(x)$ и ее сопряженной $\overline{u}_j(x)$ в одной и той же точке $x\in D$, дает квадрат модуля значения собственной функции:

$$u_j(x)\overline{u}_j(x) = \alpha^2+\beta^2. \tag{32}$$

Чтобы найти значения $u_n(x)$, воспользуемся следующей схемой. Проиллюстрируем ее для случая, когда собственные функции $\{u_n(x)\}_{n=1}^{m_0}$ оператора $T+P$ являются функциями k переменных: $x=(x_1,x_2,\ldots,x_k)$. Введем разностную сетку для аргументов $x_1,\ldots,x_k$ с шагами $h_1,\ldots,h_k$ соответственно. Через $m_1,\ldots,m_k$ обозначим количество узлов аргументов $x_1,\ldots,x_k$. Получим значения x в узлах дискретизации:

$$x_{j_1j_2\ldots j_k} = \big(x_1^{(j_1)},\ x_2^{(j_2)},\ \ldots,\ x_k^{(j_k)}\big), \quad j_1=\overline{1,m_1}, \quad j_2=\overline{1,m_2}, \quad \ldots, \quad j_k=\overline{1,m_k}. \tag{33}$$

Обозначим правую часть (30) через $\varphi_n(x,y)$:

$$u_n\big(x_{i_1i_2\ldots i_k}\big)\overline{u}_n\big(y_{j_1j_2\ldots j_k}\big) = \varphi_n\big(x_{i_1i_2\ldots i_k},\ y_{j_1j_2\ldots j_k}\big), \tag{34}$$

где $i_1,j_1=\overline{1,m_1}$, $i_2,j_2=\overline{1,m_2}$, $\ldots$, $i_k,j_k=\overline{1,m_k}$.

При $k-1$ любых фиксированных координатах узловых точек, рассматриваем значения функции u_n в соседних точках (для определенности возьмем точку с последней измененной координатой), т.е. из (30) в точках $x_{i_1i_2\ldots i_k}$ и $x_{i_1i_2\ldots i_k+1}$ имеем:

$$u_n\big(x_{i_1i_2\ldots i_k}\big)\overline{u}_n\big(x_{i_1i_2\ldots i_k+1}\big) = \varphi_n\big(x_{i_1i_2\ldots i_k},\ x_{i_1i_2\ldots i_k+1}\big). \tag{35}$$

Отсюда

$$\overline{u}_n\big(x_{i_1i_2\ldots i_k+1}\big) = \pm\frac{\varphi_n\big(x_{i_1i_2\ldots i_k}x_{i_1i_2\ldots i_k+1}\big)}{\sqrt{\varphi_n\big(x_{i_1i_2\ldots i_k},x_{i_1i_2\ldots i_k}\big)}}, \tag{36}$$

для $i_k=\overline{2,m_k}$. Далее аналогичным образом определяем значения собственной функции u_n в остальных узлах, увеличивая значения фиксированных индексов $i_1,i_2,\ldots,i_{k-1}$ на единицу.

Необходимо определить знак внутри сетки дискретизации для каждого, найденного по формулам (36), значения $u_n\big(x_{i_1i_2\ldots i_k}\big)$. Для этого фиксируем $k-2$ индекса узловых точек (при описании алгоритма для определенности зафиксируем первые $k-2$ индекса) и будем следить за произведениями вида $u_n\big(x_{i_1i_2\ldots i_{k-1},i_k}\big)\overline{u}_n\big(x_{i_1i_2\ldots i_{k-1},i_k+1}\big)$ и $u_n\big(x_{i_1i_2\ldots,i_{k-1},i_k}\big)\overline{u}_n\big(x_{i_1i_2\ldots,i_{k-1}+1,i_k}\big)$. Очевидно, что если действительная часть произведения $u_n\big(x_{i_1i_2\ldots i_{k-1},i_k}\big)\overline{u}_n\big(x_{i_1i_2\ldots i_{k-1},i_k+1}\big)$ будет отрицательной, то в точках $x_{i_1i_2\ldots,i_{k-1},i_k}$ и $x_{i_1i_2\ldots,i_{k-1},i_k+1}$ значения функции u_n будут принимать разные знаки. Таким образом, просматривая значения действительных частей произведений в каждом узле можно отследить изменение знака значений собственных функций.

Введем вспомогательный коэффициент ξ равный 1 или -1. При каждом $i_k=1$ значение ξ считаем равным -1. Просматривая знак произведения $u_n\big(x_{i_1i_2\ldots i_{k-1},i_k}\big)\overline{u}_n\big(x_{i_1i_2\ldots i_{k-1}+1,i_k}\big)$ в каждом узле дискретизации, модуль значений $u_n\big(x_{i_1 i_2 \dots i_{k-1}+1, i_k}\big)$ умножаем на ξ. Если значение действительной части произведения $u_n\big(x_{i_1 i_2 \dots i_{k-1}, i_k}\big)\overline{u}_n\big(x_{i_1 i_2 \dots i_{k-1}+1, i_k}\big)$ отрицательное, то знак коэффициента ξ меняется на противоположный. Далее проводим аналогичные операции, рассматривая произведения $u_n\big(x_{i_1 i_2 \dots i_{k-1}, i_k}\big)\overline{u}_n\big(x_{i_1 i_2 \dots i_{k-1}, i_k+1}\big)$. Чтобы не менять уже измененные на предыдущем этапе знаки значений $u_n\big(x_{i_1 i_2 \dots i_{k-1}, i_k}\big)$ при $i_{k-1} = 1$, считаем $\xi = 1$.

Аналогичные операции выполняем в остальных узловых точках, увеличивая значения фиксированных индексов $i_1, i_2, \dots, i_{k-2}$ по очереди на единицу.

На основе описанной схемы, в [26] был разработан алгоритм вычисления значений собственных функций спектральной задачи (19) методом РС. Для нахождения приближенных значений первых m_0 собственных функций $u_n(x)_{n=1}^{m_0}$, $x = (x_1, x_2) \in D$ оператора $T + P$ необходимо:

(1) найти собственные числа λ_n оператора T и занумеровать их в порядке неубывания величин $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$;
(2) найти ортонормированные собственные функции $\{v_n(x)\}_{n=1}^{m_0}$, $x = (x_1, x_2) \in D$, оператора T, соответствующие собственным числам $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$;
(3) определить число n_0, для которого выполняется неравенство
$$\frac{2\|P\|}{|\lambda_{n_0+\nu_{n_0}} - \lambda_{n_0}|} < 1;$$
(4) ввести в области D разностную сетку. В двумерной области обозначим узлы дискретизации следующим образом:
$$x_{ij} = (x_{1_i}, x_{2_j}), \quad i = \overline{1, m_1}, \quad j = \overline{1, m_2},$$
где m_1 и m_2 — количество узлов по x_1 и x_2 соответственно;
(5) используя теорему 4.1, вычислить значения t частичных сумм
$$\sum_{k=1}^{t} \alpha_k^{(1)}(n, x, y), \quad \sum_{k=1}^{t} \alpha_k^{(1)}(n-1, x, y)$$
функциональных рядов «взвешенных» поправок теории возмущений оператора $T+P$ в узлах дискретизации ($n = \overline{1, m_0}$);
(6) оценить остатки
$$\widetilde{\varepsilon}_t^{(1)}(n, x, y) = \sum_{k=t+1}^{\infty} \alpha_k^{(1)}(n, x, y) - \sum_{k=t+1}^{\infty} \alpha_k^{(1)}(n-1, x, y)$$
разности функциональных рядов Релея—Шредингера по формулам (31);
(7) используя (29), найти значение n-й собственной функции $u_n(x_{ij})$;
(8) определить знак найденного значения n-й собственной функции $u_n(x_{ij})$ в узлах дискретизации.

Используя данный алгоритм, удобно составлять программы на любом языке программирования высокого уровня. Причем для различных спектральных задач изменяются только программы, связанные с первыми четырьмя пунктами алгоритма метода РС.

Сравнение результатов расчетов значений собственных функций спектральной задачи Штурма—Лиувилля, полученные методом РС и методом А. Н. Крылова приведено в [26]. В ней рассмотрена спектральная задача
$$\begin{aligned} &(T + P)u = \mu u, \quad u \in D_T, \\ &D_T = \Big\{u \;\Big|\; u \in C^2(\Pi) \cap C[\Pi],\ \Delta u \in L_2[\Pi] :\ u\Big|_{\Gamma} = 0\Big\}, \end{aligned} \tag{37}$$
где оператор $T = -\Delta$ задан на прямоугольнике $\Pi = [0, a] \times [0, b]$ с границей Γ, $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$ — оператор Лапласа, P — оператор умножения на функцию $p(x, y)$, определенную на прямоугольнике Π.

Собственные значения и соответствующие им собственные функции невозмущенной спектральной задачи

$$Tu = \lambda u, \quad u \in D_T,$$

$$D_T = \left\{ u \;\middle|\; u \in C^2(\Pi) \cap C[\Pi],\ \Delta u \in L_2[\Pi]:\ u\Big|_\Gamma = 0 \right\}$$

имеют вид:

$$\lambda_{nk} = \pi^2 \left(\frac{n^2}{a^2} + \frac{k^2}{b^2} \right),$$

$$v_{nk}(x,y) = \frac{2}{\sqrt{ab}} \sin\frac{n\pi x}{a} \sin\frac{k\pi y}{b}, \quad n,k \in \mathbb{N}.$$

При этом система собственных функций $\{v_{nk}\}_{n,k=1}^{\infty}$ образует базис пространства $L_2[\Pi]$. В случае, если a^2/b^2 — иррациональное число, то оператор T имеет простой спектр.

Собственные значения $\{\lambda_{nk}\}_{n,k=1}^{\infty}$ и соответствующие им собственные функции $\{v_{nk}\}_{n,k=1}^{\infty}$ оператора T были пронумерованы одним индексом в порядке неубывания чисел λ_{nk}.

В таблице 3 представлены приближенные значения собственных функций спектральной задачи (37) из [26], найденных методом РС и методом А. Н. Крылова. Расчеты выполнены при $a = \sqrt{\pi/6}$, $b = 1$ и $p(x,y) = x^4y^2$. Были вычислены значения первой и второй ($n = 1,2$) собственных функций.

Разработанный неитерационный метод РС нахождения значений собственных функций и основанный на нем алгоритм нахождения значений собственных функций возмущенных самосопряженных операторов имеет ряд преимуществ по сравнению с широко известными методами. К ним прежде всего надо отнести простоту вычислительного процесса и возможность вычисления значений собственных функций начиная с любого номера собственной функции.

В отличие от известных методов нахождения значений собственных функций, в методе РС значения собственных функций находятся по линейным формулам, что резко увеличивает его вычислительную эффективность при сохранении точности по сравнению с известными методами.

5. Заключение

На основе исследований в области теории регуляризованных следов спектрального анализа разработаны новые методы РС, позволяющие с высокой вычислительной эффективностью вычислять собственные значения и значения собственных функций возмущенных самосопряженных операторов. В отличие от классических методов методы РС резко уменьшают количество вычислений для нахождения спектральных характеристик. Методы решают проблему нахождения собственных значений матриц высокого порядка, позволяют находить собственные значения возмущенных самосопряженных операторов независимо от того, известны собственные значения с меньшими номерами или нет. Это решает проблему нахождения всех необходимых точек спектра возмущенных самосопряженных операторов. В отличие от известных методов нахождения собственных значений и значений собственных функций в методах РС собственные значения и значения собственных функций находятся по линейным формулам.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Александрова Е. В.* Формулы следов в задачах колебаний стержней и труб, а также некоторых классов сингулярных операторов/ Дисс. на соиск. уч. степ. канд. физ.-мат. наук. — М.: МГУ, 1997.
2. *Баскаков А. Г.* Метод подобных операторов и формулы регуляризованных следов// Изв. вузов. Сер. мат. — 1984. — *3*. — С. 3–12.
3. *Белаббаси Ю.* О следах обыкновенных дифференциальных операторов, порожденных многоточечными задачами/ Дисс. на соиск. уч. степ. канд. физ.-мат. наук. — М.: МГУ, — 1980.
4. *Бобров А. Н.* Формулы следов псевдодифференциальных операторов с периодическим гамильтоновым потоком/ Дисс. на соиск. уч. степ. канд. физ.-мат. наук. — М.: МГУ, — 2000.
5. *Винокуров В. А., Садовничий В. А.* Асимптотика собственных значений и собственных функций и формула следа для потенциала, содержащего δ-функции// Докл. РАН. — 2001. — *376*. — С. 445–448.

Таблица 3. Значения собственных функций, найденные методом РС ($\widehat{u}_n$) и методом А. Н. Крылова ($\widetilde{u}_n$) для возмущенного оператора Лапласа, вычисленные при $a = \sqrt{\pi/6}$, $b = 1$ и $p(x, y) = x^4 y^2$

n	y	x	$\widehat{u}_n$	$\widetilde{u}_n$	$\lvert\widehat{u}_n - \widetilde{u}_n\rvert$	$\left\lvert\frac{\widehat{u}_n - \widetilde{u}_n}{\widetilde{u}_n}\right\rvert \times 100\%$
1	0,2	0,2	1,055176	1,054458	0,000718	0,06808
	0,4	0,2	1,707129	1,706150	0,000979	0,05739
	0,6	0,2	1,706897	1,70615	0,000747	0,04380
	0,8	0,2	1,054794	1,054458	0,000336	0,03187
	0,2	0,4	1,363366	1,362589	0,000776	0,05699
	0,4	0,4	2,2056	2,204716	0,000883	0,04009
	0,6	0,4	2,205081	2,204716	0,000365	0,01655
	0,8	0,4	1,362481	1,362589	0,000107	0,00790
	0,2	0,6	0,706656	0,706302	0,000353	0,05010
	0,4	0,6	1,14306	1,142822	0,000238	0,02083
	0,6	0,6	1,142594	1,142822	0,000227	0,01993
	0,8	0,6	0,705863	0,706303	0,000439	0,06220
	0,2	0,8	−0,450115	−0,449893	0,000222	0,04942
	0,4	0,8	−0,728074	−0,727942	0,000132	0,01816
2	0,2	0,2	1,706643	1,706484	0,000159	0,00933
	0,4	0,2	1,054195	1,054766	0,000571	0,05417
	0,6	0,2	−1,055815	−1,054437	0,001378	0,13075
	0,8	0,2	−1,70742	−1,70628	0,00114	0,06681
	0,2	0,4	2,205432	2,205147	0,000284	0,01291
	0,4	0,4	1,362487	1,362987	0,0005	0,03670
	0,6	0,4	−1,363518	−1,362561	0,000956	0,07018
	0,8	0,4	−2,205196	−2,204884	0,000312	0,01415
	0,2	0,6	1,143141	1,143045	0,000096	0,00841
	0,4	0,6	0,706387	0,706509	0,000122	0,01728
	0,6	0,6	−0,706174	−0,7062885	0,000113	0,01611
	0,8	0,6	−1,142299	−1,142909	0,000609	0,05337
	0,2	0,8	−0,728138	−0,728084	0,000053	0,00736
	0,4	0,8	−0,449958	−0,450024	0,000065	0,01459

6. *Гасымов М. Г.* О сумме разностей собственных значений двух самосопряженных операторов// Докл. АН СССР. — 1963. — *150*, т 6. — С. 1202–1205.
7. *Гельфанд И. М., Левитан Б. М.* Об одном простом тождестве для собственных значений дифференциального оператора второго порядка// Докл. АН СССР. — 1953. — *88*, т 4. — С. 593–596.
8. *Гохберг И. Ц., Крейн М. Г.* Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. — М.: Наука, 1965.
9. *Дикий Л. А.* Об одной формуле Гельфанда—Левитана// Усп. мат. наук. — 1953. — *8*, т 2. — С. 119–123.
10. *Дикий Л. А.* Новый способ приближенного вычисления собственных чисел задачи Штурма—Лиувилля// Докл. АН СССР. — 1957. — *116*, т 1. — С. 12–14.
11. *Дикий Л. А.* Формулы для дифференциальных операторов Штурма—Лиувилля// Усп. мат. наук. — 1958. — *13*, т 3. — С. 111–143.

12. *Дородницын А. А.* Асимптотические законы распределения собственных значений для некоторых видов дифференциальных уравнений второго порядка// Усп. мат. наук. — 1952. — *7*, т 6. — С. 3–96.
13. *Дубровский В. В.* Регуляризованный след билапласиана с периодическими краевыми условиями на квадрате// Докл. АН БССР. — 1980. — *24*, т 3. — С. 210–213.
14. *Дубровский В. В.* О регуляризованных следах дифференциальных операторов в частных производных// Тр. семин. им. И. Г. Петровского. — М.: МГУ, 1983. — *9*. — С. 40–44.
15. *Дубровский В. В.* О формулах регуляризованных следов самосопряженных эллиптических дифференциальных операторов второго порядка// Диффер. уравн. — 1984. — *20*, т 11. — С. 1995–1998.
16. *Дубровский В. В.* Абстрактные формулы регуляризованных следов эллиптических гладких дифференциальных операторов, заданных на компактных многообразиях// Диффер. уравн. — 1991. — *27*, т 12. — С. 2164–2166.
17. *Дубровский В. В.* К абстрактной формуле Гельфанда—Левитана// Усп. мат. наук. — 1991. — *46*, т 4. — С. 187–188.
18. *Кадченко С. И.* Новый метод вычисления собственных чисел спектральной задачи Орра—Зоммерфельда// Электромагн. волны электрон. сист. — 2000. — *5*, т 6. — С. 4–10.
19. *Кадченко С. И.* Новый метод вычисления первых собственных чисел дискретных несамосопряженных операторов// Уравнения соболевского типа/ Сб. науч. работ. — Челябинск: Челяб. гос. ун-т, 2002. — С. 42–59.
20. *Кадченко С. И.* Новый метод нахождения собственных чисел возмущенных самосопряженных операторов// Вестн. Магнитогорск. ун-та. Сер. мат. — 2003. — *4*. — С. 48–79.
21. *Кадченко С. И.* Новый метод вычисления собственных чисел возмущенных самосопряженных операторов/ Дисс. на соиск. уч. степ. докт. физ.-мат. наук. — Магнитогорск: МаГУ, 2003.
22. *Кадченко С. И.* Вычисление сумм рядов Рэлея—Шредингера возмущенных самосопряженных операторов// Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 2007. — *47*, т 9. — С. 1494–1505.
23. *Кадченко С. И.* Метод регуляризованных следов// Вестн. Южноурал. ун-та. Сер. Мат. модел. прогр. — 2009. — *37 (170)*, т 4. — С. 4–23.
24. *Кадченко С. И.* Численный метод нахождения поправок теории возмущений дискретных операторов// Вест. Магнитогорск. ун-та. — 2010. — *12*. — С. 30–34.
25. *Кадченко С. И.* Численный метод решения обратных спектральных задач, порожденных возмущенными самосопряженными операторами// Вестн. Самар. ун-та. Естественнонауч. сер. — 2013. — *9-1 (100)*. — С. 5–11.
26. *Кадченко С. И., Какушкин С. Н.* Численные методы регуляризованных следов спектрального анализа. — Челябинск, 2015.
27. *Кадченко С. И., Какушкин С. Н.* Нахождение значений сумм функциональных рядов Релея—Шредингера возмущенных самосопряженных операторов// Вестн. Южноурал. ун-та. Сер. Мат. модел. прогр. — 2016. — *9*, т 3. — С. 137–143.
28. *Кадченко С. И., Кинзина И. И.* Линейные уравнения для приближенного вычисления собственных чисел возмущенных самосопряженных операторов// Электромагн. волны электрон. сист. — 2005. — *10*, т 6. — С. 4–12.
29. *Кадченко С. И., Кинзина И. И.* Вычисление собственных значений воэмущенных дискретных полуограниченных операторов// Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 2006. — *46*, т 7. — С. 1265–1273.
30. *Кадченко С. И., Рязанова Л. С.* Численный метод нахождения собственных значений дискретных полуограниченных снизу операторов// Вестн. Южноурал. ун-та. Сер. Мат. модел. прогр. — 2011. — *17 (234)*, т 8. — С. 46–51.
31. *Кадченко С. И., Рязанова Л. С.* Вычисление собственных чисел спектральной задачи Орра—Зоммерфельда методом регуляризованных следов// Математическое и программное обеспечение систем в промышленной и социальной сферах. — Магнитогорск, 2014. — *2*. — С. 3–19.
32. *Крейн М. Г.* О формуле следов в теории возмущений// Мат. сб. — 1953. — *33*, т 3. — С. 597–626.
33. *Лидский В. Б.* Несамосопряженные операторы, имеющие след// Докл. АН СССР. — 1959. — *125*, т 3. — С. 485–487.
34. *Лидский В. Б., Садовничий В. А.* Регулированные суммы корней одного класса целых функций// Функц. анал. прилож. — 1967. — *1*, т 2. — С. 52–59.
35. *Лидский В. Б., Садовничий В. А.* Формулы следов в случае уравнения Орра—Зоммерфельда// Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1968. *32*, т 3. — С. 633–648.
36. *Лифшиц И. М.* Об одной задаче теории возмущений, связанной с квантовой статистикой// Усп. мат. наук. — 1952. — *7*, т 1. — С. 171–180.

37. *Любишкин В. А.* О некоторых вопросах теории регуляризованных следов дифференциальных операторов/ Дисс. на соиск. уч. степ. канд. физ.-мат. наук. — М.: МГУ, 1981.
38. *Любишкин В. А.* Регуляризованные следы оператора Штурма—Лиувилля на полуоси в случае неограниченно убывающего потенциала// Диффер. уравн. — 1982. — *18*, т 2. — С. 345–346.
39. *Муртазин Х. Х., Садовничий В. А.* Спектральный анализ многочастичного оператора Шредингера. — М.: МГУ, 1988.
40. *Муртазин Х. Х., Фазуллин З. Ю.* О формулах следов для неядерных возмущений// Докл. РАН. — 1999. — *368*, т 4. — С. 442–444.
41. *Муртазин Х. Х., Фазуллин З. Ю.* Регуляризованный след двумерного гармонического осциллятора// Мат. сб. — 2001. — *192*, т 5. — С. 87–124.
42. *Печенцов А. С.* Регуляризованные суммы собственных значений для некоторых краевых задач// В кн.: Функциональные методы в задачах математической физики. — М.: Энергоатомиздат, 1985. — С. 34–42.
43. *Печенцов А. С.* О следах сингулярных дифференциальных операторов высших порядков// Докл. АН СССР. — 1990. — *312*, т 6. — С. 1321–1324.
44. *Печенцов А. С.* Регуляризованные следы обыкновенных дифференциальных операторов// Усп. мат. наук. — 1996. — *51*, т 5. — С. 177–178.
45. *Печенцов А. С.* Регуляризованные следы краевых задач в случае кратных корней характеристического полинома// Докл. РАН. — 1999. — *367*, т 5. — С. 600–602.
46. *Порецков О. А.* Алгоритмы и методы вычисления первого регуляризованного следа оператора Лапласа—Бельтрами с негладким потенциалом на единичной двумерной сфере/ Дисс. на соиск. уч. степ. канд. физ.-мат. наук. — Магнитогорск: МаГУ, 2003.
47. *Распопов В. В.* Алгоритмы вычисления полуцелых регуляризованных следов дискретных полуограниченных операторов/ Дисс. на соиск. уч. степ. канд. физ.-мат. наук. — Магнитогорск: МаГУ, 2002.
48. *Расторгуев В. А.* Формулы регуляризованных следов некоторого класса дифференциальных операторов с особенностью/ Дисс. на соиск. уч. степ. канд. физ.-мат. наук. — М.: МГУ, 1991.
49. *Розенблюм Г. В., Соломяк М. З., Шубин М. А.* Спектральная теория дифференциальных операторов// Итоги науки и техн. Совр. пробл. мат. Фундам. направл. — М.: ВИНИТИ, 1989. — *64*. — С. 1–248.
50. *Садовничий В. А.* Аналитические методы в спектральной теории дифференциальных операторов. — М.: МГУ, 1973.
51. *Садовничий В. А.* Теория операторов. — М.: Дрофа, 2004.
52. *Садовничий В. А.* Дзета-функция и собственные числа дифференциальных операторов// Диффер. уравн. — 1974. — *10*, т 7. — С. 1276–1285.
53. *Садовничий В. А., Дубровский В. В.* Об одной абстрактной теореме теории функций, о формулах регуляризованных следов и о дзета-функции операторов// Диффер. уравн. — 1977. — *13*, т 7. — С. 1264–1271.
54. *Садовничий В. А., Дубровский В. В.* О некоторых соотношениях для собственных чисел дискретных операторов. Формулы следов дифференциальных операторов в частных производных// Диффер. уравн. — 1977. — *13*, т 11. — С. 2033–2041.
55. *Садовничий В. А., Дубровский В. В.* Свойства спектра дискретных операторов// Вестн. Моск. ун-та. Сер. мат. мех. — 1977. — *5*. — С. 37–44.
56. *Садовничий В. А., Дубровский В. В.* О некоторых свойствах оператора с дискретным спектром// Диффер. уравн. — 1979. — *15*, т 7. — С. 1206–1211.
57. *Садовничий В. А., Дубровский В. В.* Замечание об одном новом методе вычислений собственных значений и собственных функций дискретных операторов// Тр. семин. им. И. Г. Петровского. — 1994. — *17*. — С. 244–248.
58. *Садовничий В. А., Дубровский В. В., Любишкин В. А.* Следы дискретных операторов// Докл. АН СССР. — 1982. — *263*, т 4. — С. 830–832.
59. *Садовничий В. А., Конягин С. В., Подольский В. Е.* Регуляризованный след оператора с ядерной резольвентой, возмущенного ограниченным // Докл. РАН. — 2000. — *373*, т 1. — С. 26–28.
60. *Садовничий В. А., Любишкин В. А.* О некоторых вопросах возмущений линейных операторов// Диффер. уравн. — 1981. — *17*, т 10. — С. 1911–1914.
61. *Садовничий В. А., Любишкин В. А.* Регуляризованные суммы корней одного класса целых функций экспоненциального типа// Докл. АН СССР. — 1981. — *256*, т 4. — С. 794–798.

62. *Садовничий В. А., Любишкин В. А.* Регуляризованные следы дискретных операторов// Докл. АН СССР. — 1981. — *261*, т 2. — С. 290–293.
63. *Садовничий В. А., Любишкин В. А.* О некоторых новых результатах теории регуляризованных следов дифференциальных операторов// Диффер. уравн. — 1982. — *18*, т 1. — С. 109–116.
64. *Садовничий В. А., Любишкин В. А.* Конечномерные возмущения дискретных операторов и формулы следов// Функц. анал. прилож. — 1986. — *20*, т 3. — С. 55–65.
65. *Садовничий В. А., Подольский В. Е.* О вычислении первых собственных значений оператора Штурма—Лиувилля// Докл. РАН. — 1996. — *346*, т 2. — С. 162–164.
66. *Садовничий В. А., Подольский В. Е.* Следы операторов с относительно ядерным возмущением// Докл. РАН. — 2001. — *378*, т 3. — С. 1–2.
67. *Садовничий В. А., Подольский В. Е.* Следы операторов с относительно компактным возмущением// Мат. сб. — 2002. — *193*, т 2. — С. 129–151.
68. *Сидоренко С. В.* Регуляризованные следы возмущенных самосопряженных операторов/ Дисс. на соиск. уч. степ. канд. физ.-мат. наук. — М.: МГУ, 2000.
69. *Хасанов А. Б., Яхшимуратов А. Б.* Вычисление регуляризованного следа оператора Штурма—Лиувилля с особенностью в потенциале// Докл. РАН. — 2002. — *382*, т 2. — С. 170–172.
70. *Шкарин С. А.* О способе Гельфанда—Дикого вычисления первых собственных чисел оператора Штурма—Лиувилля// Вестн. Моск. ун-та. Сер. мат. мех. — 1996. — *1*. — С. 39–44.
71. *Kadchenko S. I., Kakushkin S. N.* First “weighted” correction of the perturbation theory for perturbed self-adjoin operators// Proc. Int. Conf. «Spectral Theory and Differential Equations». — Kharkiv, 2012. — С. 49–50.

С. И. Кадченко
Магнитогорский государственный технический университет им. Г. И. Носова;
Институт естественных и точных наук Южно-Уральского государственного университета
E-mail: kadchenko@masu.ru

С. Н. Какушкин
Магнитогорский государственный технический университет им. Г. И. Носова
E-mail: snakeskin-sergei@mail.ru

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 141 (2017). С. 79–85

УДК 517.948

О РАЗДЕЛИМОСТИ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ ВТОРОГО ПОРЯДКА С МАТРИЧНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ В ВЕСОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

© 2017 г. **О. Х. КАРИМОВ**

Аннотация. Доказана разделимость одного класса нелинейных дифференциальных операторов второго порядка с переменными матричными коэффициентами в весовом пространстве, которые в общем случае не являются слабыми возмущениями линейных операторов.

Ключевые слова: весовое пространство, нелинейный дифференциальный оператор, разделимость, коэрцитивное неравенство, матричный коэффициент.

AMS Subject Classification: 35Q40, 35J10

1. Введение. Термин «разделимость» в теорию дифференциальных операторов ввели В. Н. Эверитт и М. Гирц (см. [8–11]). Они в основном исследовали разделимость оператора Штурма—Лиувилля и его степеней. Существенный вклад в дальнейшее развитие теории разделимости дифференциальных выражений внесли К. Х. Бойматов, М. Отелбаев и их ученики (см., например, [1–6]). В настоящее время опубликовано большое число работ по разделимости; полученные результаты нашли приложения в теории функций, спектральной теории дифференциальных операторов и теории краевых задач для дифференциальных уравнений. Настоящая работа посвящена исследованию разделимости нелинейных дифференциальных операторов с переменными матричными коэффициентами в весовом пространстве; ее основной результат обобщает соответствующие результаты работ (см. [4, 5]).

Пусть $k(x)$ — положительная функция, определенная в $\mathbb{R}^n$, и l — некоторое натуральное число. Символом $L_{2,k}(\mathbb{R}^n)^l$ обозначим пространство вектор-функций $u(x)$ с конечной нормой

$$\left\|u; L_{2,k}(\mathbb{R}^n)^l\right\| = \left\{\sum_{j=1}^{l}\int_{\mathbb{R}^n} k(x)|u_j(x)|^2 dx\right\}^{1/2}.$$

Пространство $L_{2,k}(\mathbb{R}^n)^l$ является гильбертовым пространством, и в нем скалярное произведение определяется с помощью равенства

$$\left(u, v; L_{2,k}(\mathbb{R}^n)^l\right) = \sum_{j=1}^{n}\int_{\mathbb{R}^n} k(x)u_j(x)\overline{v_j(x)}\,dx.$$

Рассмотрим дифференциальный оператор второго порядка с переменными коэффициентами:

$$L_0[u] = -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\right).$$

ISSN 0233–6723

Предполагается, что коэффициенты $a_{ij}(x)$ оператора L_0 являются квадратными матрицами порядка l с элементами из класса $C^1(\mathbb{R}^n)$ и удовлетворяют следующим условиям:

$$\text{(I)}\quad a_{ij}(x) \equiv a_{ji}(x), \quad \operatorname{Im} a_{ij}(x) \equiv 0;$$

$$\text{(II)}\quad |a_{ij}(x)| \leqslant \sigma_1, \quad |\nabla a_{ij}(x)| \leqslant \sigma_2 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n,\ i,j = 1,2,\ldots,n;$$

$$\text{(III)}\quad \sum_{i=1}^{n} \left|s_i; C^l\right|^2 \leqslant \chi_1 \cdot \sum_{i,j=1}^{n} \left\langle a_{ij}(x) s_i, s_j; C^l \right\rangle \quad \forall x \in \mathbb{R}^n,\ \forall s = \{s_i\}_{i=1}^n,\ s_i \in C^l,$$

константы σ_1, σ_2, χ_1 в этих условиях не зависят от x и s.

2. Формулировка основного результата. Рассмотрим следующий нелинейный дифференциальный оператор второго порядка с переменными старшими коэффициентами:

$$L[u] = L_0[u] + V(x,u)u \tag{1}$$

Пусть $V(x,\omega)$ — квадратная матрица-функция порядка l, определенная на всех $x \in \mathbb{R}^n$, $\omega \in C^l$, элементы которой непрерывно дифференцируемы по всем аргументам. Предполагается, что значения $V(x,\omega)$ являются положительно определенными эрмитовыми матрицами.

Определение 1. Следуя [8–11], будем называть дифференциальный оператор (1) *разделимым* в весовом пространстве $L_{2,k}(\mathbb{R}^n)^l$, если для всех вектор-функций $u(x) \in L_{2,\rho}(\mathbb{R}^n)^l \cap W^2_{2,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)^l$, удовлетворяющих условию $L[u] \in L_{2,k}(\mathbb{R}^n)^l$, выполняются включения

$$L_0[u] \in L_{2,k}(\mathbb{R}^n)^l, \quad V(x,u)u \in L_{2,k}(\mathbb{R}^n)^l.$$

Введем следующие обозначения:

$$F\big(x_1, x_2, \ldots, x_n, \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_l, \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_l\big) = V^{1/2}(x,\omega), \quad x_i \in \mathbb{R},\ \xi_j, \eta_j \in \mathbb{R},$$
$$Q\big(x_1, x_2, \ldots, x_n, \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_l, \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_l\big) = F^2(x,\omega), \quad x_i \in \mathbb{R},\ \xi_j, \eta_j \in \mathbb{R},$$

где ω определяется равенством $\omega = \big(\xi_1 + i\eta_1,\ \ldots,\ \xi_l + i\eta_l\big)$. Здесь $V^{1/2}(x,\omega)$ определяется как квадратный корень от положительно определенной эрмитовой матрицы.

Определение 2. Будем говорить, что матрица-функция $V(x,\omega)$ принадлежит классу $T^{n,l}_{\chi,\delta,\sigma,\gamma}$, если для всех $x \in \mathbb{R}^n$, $\omega = \big(\xi_1 + i\eta_1,\ \ldots,\ \xi_l + i\eta_l\big) \in C^l$, $\Omega = \big(\mu_1 + i\nu_1,\ \ldots,\ \mu_l + i\nu_l\big)$ выполняются следующие условия:

$$\sum_{i=1}^{n} \left\| F^{-\frac{1}{2}}(x,\omega) \frac{\partial F(x,\omega)}{\partial x_i} F^{-3/2}(x,\omega) \right\|^2 \leqslant \chi, \tag{2}$$

$$\left\| \sum_{j=1}^{l} \mu_j F^{-\frac{1}{2}}(x,\omega) \frac{\partial F(x,\omega)}{\partial \xi_j} \omega + \nu_j F^{-\frac{1}{2}}(x,\omega) \frac{\partial F(x,\omega)}{\partial \eta_j} \omega; C^l \right\| \leqslant \sigma \left\| F^{\frac{1}{2}} \Omega; C^l \right\|, \tag{3}$$

$$\left\| \sum_{j=1}^{l} \mu_j F^{-1}(x,\omega) \frac{\partial Q(x,u)}{\partial \xi_j} \omega + \nu_j F^{-1}(x,\omega) \frac{\partial Q(x,\omega)}{\partial \eta_j} \omega; C^l \right\| \leqslant \delta \left\| F \Omega; C^l \right\|, \tag{4}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \left\| Q^{-\frac{1}{2}}(x,\omega) \frac{\partial Q(x,\omega)}{\partial x_i} Q^{-1}(x,\omega) \right\|^2 \leqslant \gamma. \tag{5}$$

Теперь сформулируем основной результат работы.

Теорема 1. *Пусть матрица-функция $V(x,\omega)$ принадлежит классу $T^{n,l}_{\chi,\delta,\sigma,\gamma}$, а матрица-функций $a_{ij}(x)$ коммутирует с $V(x,\omega)$ и удовлетворяет условиям* (I)–(III). *Далее, пусть весовая функция $k(x)$ принадлежит классу $C^1(\mathbb{R}^n)$ и для всех $x \in \mathbb{R}^n$, $\omega = \big(\xi_1 + i\eta_1,\ \ldots,\ \xi_l + i\eta_l\big) \in C^l$ удовлетворяет неравенству*

$$\sum_{i=1}^{n} \left\| \frac{\partial k(x)}{\partial x_i} k^{-1/2}(x) Q^{-1/2}(x,\omega) \right\|^2 \leqslant \sigma_3. \tag{6}$$

Тогда при выполнении неравенств

$$\begin{gathered}\chi_1\sigma_1 < 2, \quad 0 < \sigma_3 < 2, \quad \chi + \sigma_3 < \frac{1}{\sigma_1\chi_1 n^2}, \quad 0 < \sigma < \frac{1}{\sigma_1\chi_1 n} - \frac{n(\chi+\sigma_3)}{2}, \\ \gamma + \sigma_3 < \frac{2}{\sigma_1\chi_1 n^2}, \quad 0 < \sigma < \frac{1}{\sigma_1\chi_1 n} - \frac{(\gamma+\sigma_3)n}{2},\end{gathered} \tag{7}$$

где χ, σ, δ, γ, σ_1, σ_3, χ_1 — постоянные из условий (2)–(5) *и* (I)–(III), *нелинейный оператор* (1) *разделяется в весовом пространстве $L_{2,k}(\mathbb{R}^n)^l$. При этом для всех решений $u(x) \in W_{2,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)^l \cap L_{2,k}(\mathbb{R}^n)^l$ уравнения*

$$-\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u(x)}{\partial x_i}\right) + V(x,u(x))u(x) = f(x) \tag{8}$$

с правой частью $f(x) \in L_{2,k}(\mathbb{R}^n)^l$ выполняется следующее коэрцитивное неравенство:

$$\begin{aligned}\left\|V(x,u)u; L_{2,k}(\mathbb{R}^n)^l\right\| + \sum_{j=1}^{n}\left\|V^{1/2}(x,u)\frac{\partial u}{\partial x_j}; L_{2,k}(\mathbb{R}^n)^l\right\| &+ \\ + \left\|L_0[u]; L_{2,k}(\mathbb{R}^n)^l\right\| &\leqslant M\left\|f; L_{2,k}(\mathbb{R}^n)^l\right\|,\end{aligned} \tag{9}$$

где $M > 0$ — число, не зависящее от вектор-функций $f(x)$, $u(x)$.

Результат, сформулированный в этой теореме, ранее был получен только в случае оператора Шредингера (см. [3]).

3. Вспомогательные леммы. Далее мы остановимся на основных моментах доказательства основной теоремы. Сформулируем без доказательства две вспомогательные леммы.

Лемма 1. *Пусть выполнены условия* (I)–(III). *Пусть в уравнении* (8) *вектор-функция $f(x)$ принадлежит пространству $L_{2,k}(\mathbb{R}^n)^l$, а вектор-функция $u(x)$ принадлежит классу $L_{2,k}(\mathbb{R}^n)^l \cap W^2_{2,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)^l$. Тогда при условии* (6), *где σ_3 удовлетворяет условию* (7), *вектор-функции $V^{1/2}(x,u(x))u(x)$, $\partial u/\partial x_i$, $i = 1,2,\dots,n$, принадлежат пространству $L_{2,k}(\mathbb{R}^n)^l$.*

Лемма 2. *Пусть выполнены условия* (I)–(III) *и пусть вектор-функция $u(x)$ из класса $L_{2,k}(\mathbb{R}^n)^l \cap W^2_{2,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)^l$ является решением уравнения* (8) *с правой частью $f(x) \in L_{2,k}(\mathbb{R}^n)^l$. Тогда при условии* (6), *где σ_3 удовлетворяет условию* (7), *вектор-функции $F^{3/2}(x,u(x))u(x)$, $F^{1/2}(x,u(x))\partial u(x)/\partial x_i$, $i = \overline{1,n}$, принадлежат пространству $L_{2,k}(\mathbb{R}^n)^l$.*

4. Доказательство теоремы 1. Пусть $\varphi(x)$ — фиксированная неотрицательная функция из класса $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, обращающаяся в единицу при $|x| < 1$. Для любого положительного числа ε положим $\varphi_\varepsilon(x) = \varphi(\varepsilon x)$. Используя равенство

$$\begin{aligned}\big(f,\ \varphi_\varepsilon k V(x,u)u\big) = \left(-\sum_{i,j=1}^{n}\left(\frac{\partial}{\partial x_j}a_{ij}(x)\frac{\partial u(x)}{\partial x_i}\right),\ \varphi_\varepsilon k V(x,u)u\right) &+ \\ + \big(V(x,u)u,\ \varphi_\varepsilon k V(x,u)u\big)&,\end{aligned} \tag{10}$$

где $(\cdot,\cdot)$ — скалярное произведение в пространстве $L_{2,k}(\mathbb{R}^n)^l$, после несложных преобразований получим равенство

$$\begin{aligned}\big(f,\ \varphi_\varepsilon k V(x,u)u\big) = \sum_{i,j=1}^{n}\left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i},\ \varphi_\varepsilon k V(x,u)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) &+ \\ + P_1^{(\varepsilon)}(u) + P_2^{(\varepsilon)}(u) + P_3^{(\varepsilon)}(u) + P_4^{(\varepsilon)}(u) + \big(V(x,u)u,\ \varphi_\varepsilon k V(x,u)u\big)&,\end{aligned}$$

где

$$P_1^{(\varepsilon)}(u) = \sum_{i,j=1}^{n} \left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i},\ \frac{\partial \varphi_\varepsilon}{\partial x_j} kQ(x,u)u \right),$$

$$P_2^{(\varepsilon)}(u) = \sum_{i,j=1}^{n} \left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i},\ \varphi_\varepsilon \sum_{m=1}^{l} \left(\operatorname{Re}\frac{\partial u_m}{\partial x_j} \right) k\frac{\partial Q}{\partial \xi_m} u \right) + \sum_{i,j=1}^{n} \left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i},\ \varphi_\varepsilon \sum_{m=1}^{l} \left(\operatorname{Im}\frac{\partial u_m}{\partial x_j} \right) k\frac{\partial Q}{\partial \eta_m} u \right),$$

$$P_3^{(\varepsilon)}(u) = \sum_{i,j=1}^{n} \left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i},\ \varphi_\varepsilon k\frac{\partial Q}{\partial x_j} u \right), \quad P_4^{(\varepsilon)}(u) = \sum_{i,j=1}^{n} \left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i},\ \varphi_\varepsilon \frac{\partial k}{\partial x_j} Q(x,u)u \right).$$

Здесь и далее значения матрица-функций Q, $\partial Q/\partial x_j$, $\partial Q/\partial \xi_k$, $\partial Q/\partial \eta_k$ взяты в точке $\big(x_1,\dots,x_n,\ \operatorname{Re}u_1(x),\dots,\operatorname{Re}u_l(x),\ \operatorname{Im}u_1(x),\dots,\operatorname{Im}u_l(x)\big)$.

Так как

$$\left| \frac{\partial \varphi_\varepsilon(x)}{\partial x_j} \right| \leqslant M_0\varepsilon,$$

применяя неравенство Коши—Буняковского, можно получить оценку

$$\left| P_1^{(\varepsilon)}(u) \right| \leqslant \varepsilon M \left\| F^{3/2}(x,u(x))u(x); L_{2,k}(\mathbb{R}^n)^l \right\| \cdot \sum_{i=1}^{n} \left\| F^{1/2}(x,u)\frac{\partial u}{\partial x_i}; L_{2,k}(\mathbb{R}^n)^l \right\|.$$

В силу леммы 2 отсюда следует, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0} P_1^{(\varepsilon)}(u) = 0.$$

Теперь переходим к оценке функционала $P_2^{(\varepsilon)}(u)$. Из условия (4) при

$$\omega = u(x), \quad \Omega = \sqrt{\varphi_\varepsilon(x)} \cdot \frac{\partial u(x)}{\partial x_j},$$

применяя неравенство Коши—Буняковского, получим

$$\begin{aligned} \left| P_2^{(\varepsilon)}(u) \right| \leqslant \sum_{i,j=1}^{n} \left\| a_{ij}\sqrt{\varphi_\varepsilon}\sqrt{k}F(x,u)\frac{\partial u}{\partial x_i}; L_{2,k}(\mathbb{R}^n)^l \right\| \times \\ \times \left\| \sum_{m=1}^{l} \sqrt{k} \left\{ \left(\sqrt{\varphi_\varepsilon}\operatorname{Re}\frac{\partial u_m}{\partial x_j} \right) F^{-1}(x,u)\frac{\partial Q}{\partial \xi_m} u \ + \right.\right. \\ \left.\left. + \ \left(\sqrt{\varphi_\varepsilon}\operatorname{Re}\frac{\partial u_m}{\partial x_j} \right) F^{-1}(x,u)\frac{\partial Q}{\partial \eta_m} u \right\}; L_{2,k}(\mathbb{R}^n)^l \right\|. \end{aligned}$$

Далее, применяя условие (II), имеем

$$\begin{aligned} \left| P_2^{(\varepsilon)}(u) \right| \leqslant \sigma_1\delta \sum_{i,j=1}^{n} \left\| \sqrt{\varphi_\varepsilon}\sqrt{k}F(x,u)\frac{\partial u}{\partial x_i}; L_{2,k}(\mathbb{R}^n)^l \right\| \cdot \left\| \sqrt{\varphi_\varepsilon}\sqrt{k}F(x,u)\frac{\partial u}{\partial x_j}; L_{2,k}(\mathbb{R}^n)^l \right\| \leqslant \\ \leqslant \sigma_1\delta n \sum_{i=1}^{n} \left\| \sqrt{\varphi_\varepsilon}\sqrt{k}V(x,u)\frac{\partial u}{\partial x_i}; L_{2,k}(\mathbb{R}^n)^l \right\|^2. \end{aligned}$$

Из последнего неравенства следует, что

$$\left| P_2^{(\varepsilon)}(u) \right| \leqslant n\delta\sigma_1 \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i},\ \varphi_\varepsilon kV(x,u)\frac{\partial u}{\partial x_i} \right),$$

где σ_1, δ — константы из условия (II), (4).

Переходим к оценке функционала $P_3^{(\varepsilon)}(u)$. Учитывая эрмитово сопряженные значения матричных функций $Q(x,\omega)$, получаем следующее представление для $P_3^{(\varepsilon)}(u)$:

$$P_3^{(\varepsilon)}(u) = \sum_{i,j=1}^{n} \left(\sqrt{\varphi_\varepsilon}\sqrt{k} a_{ij} Q^{1/2}(x,u)\frac{\partial u}{\partial x_i},\ \sqrt{\varphi_\varepsilon}\sqrt{k} Q^{-1/2}(x,u)\frac{\partial Q}{\partial x_j} u \right).$$

Так как $Q^{1/2}(x,u) = F(x,u)$ и, согласно лемме 2, вектор-функции $F(x,u)\partial u/\partial x_i$, $i = \overline{1,n}$, принадлежат пространству $L_{2,k}(\mathbb{R}^n)^l$, применяя неравенство Коши—Буняковского и условие (II), имеем

$$\begin{aligned}\left|P_3^{(\varepsilon)}(u)\right| \leqslant \sum_{i,j=1}^{n} \left\| a_{ij}\sqrt{\varphi_\varepsilon}\sqrt{k} F(x,u)\frac{\partial u}{\partial x_i}; L_{2,k}(\mathbb{R}^n)^l \right\| \times \\ \times \left\| \sqrt{\varphi_\varepsilon}\sqrt{k} Q^{-1/2}(x,u)\frac{\partial Q}{\partial x_j} u; L_{2,k}(\mathbb{R}^n)^l \right\| \leqslant \\ \leqslant \frac{\sigma_1 n\alpha}{2}\sum_{i=1}^{n} \left\| \sqrt{\varphi_\varepsilon}\sqrt{k} F(x,u)\frac{\partial u}{\partial x_i}; L_{2,k}(\mathbb{R}^n)^l \right\|^2 + \\ + \frac{n}{2\alpha}\sum_{j=1}^{n} \left\| \sqrt{\varphi_\varepsilon}\sqrt{k} Q^{-1/2}(x,u)\frac{\partial Q}{\partial x_j} u; L_{2,k}(\mathbb{R}^n)^l \right\|^2.\end{aligned}$$

Здесь α — произвольное положительное число. В силу условия (5) получим

$$|P_3^{(\varepsilon)}(u)| \leqslant \frac{\sigma_1 n\alpha}{2}\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i},\ \varphi_\varepsilon k V(x,u)\frac{\partial u}{\partial x_i} \right) + \frac{n\gamma}{2\alpha}\big(V(x,u)u,\ \varphi_\varepsilon k V(x,u)u\big),$$

где σ_1, γ — константы из условия (II), (4).

Теперь переходим к оценке функционала $P_4^{(\varepsilon)}(u)$. С этой целью представим его в виде

$$P_4^{(\varepsilon)}(u) = \sum_{i,j=1}^{n} \left(\sqrt{\varphi_\varepsilon}\sqrt{k} a_{ij} V^{1/2}(x,u)\frac{\partial u}{\partial x_i},\ \sqrt{k}\sqrt{\varphi_\varepsilon}\frac{\partial k}{\partial x_j} k^{-1} Q^{-1/2}(x,u) V(x,u) u \right).$$

Применяя неравенство Коши—Буняковского и условие (II), имеем

$$\begin{aligned}\left|P_4^{(\varepsilon)}(u)\right| = \sum_{i,j=1}^{n} \left\| \sqrt{\varphi_\varepsilon}\sqrt{k} V^{1/2}(x,u) a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}; L_{2,k}(\mathbb{R}^n)^l \right\| \times \\ \times \left\| \sqrt{\varphi_\varepsilon}\sqrt{k} k^{-1}\frac{\partial k}{\partial x_j} Q^{-1/2}(x,u) V(x,u) u; L_{2,k}(\mathbb{R}^n)^l \right\|.\end{aligned}$$

Используя условие (6), приходим к следующей оценке

$$\left|P_4^{(\varepsilon)}(u)\right| \leqslant \frac{\alpha n\sigma_1}{2}\sum_{i=1}^{n} \left\| \sqrt{\varphi_\varepsilon}\sqrt{k} V^{1/2}(x,u)\frac{\partial u}{\partial x_i}; L_{2,k}(\mathbb{R}^n)^l \right\|^2 + \frac{\sigma_3 n}{2\alpha}\left\| \sqrt{\varphi_\varepsilon}\sqrt{k} V(x,u) u; L_{2,k}(\mathbb{R}^n)^l \right\|^2,$$

где $\alpha > 0$, σ_1, σ_3 — константы из условия (II), (6).

Так как матричные функции a_{ij} коммутируют с $V(x,u)$, то, применяя условие эллиптичности (III), получаем

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\varphi_\varepsilon kV(x,u)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)^2=\sum_{i=1}^{n}\left\|\sqrt{\varphi_\varepsilon}\sqrt{k}F(x,u)\frac{\partial u}{\partial x_i};L_{2,k}(\mathbb{R}^n)^l\right\|^2\leqslant$$
$$\leqslant\chi_1\sum_{i,j=1}^{n}\left(a_{ij}\sqrt{\varphi_\varepsilon}\sqrt{k}F(x,u)\frac{\partial u}{\partial x_i},\ \sqrt{\varphi_\varepsilon}\sqrt{k}F(x,u)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)\leqslant$$
$$\leqslant\chi_1\sum_{i,j=1}^{n}\left(a_{ij}\sqrt{\varphi_\varepsilon}\sqrt{k}F(x,u)\frac{\partial u}{\partial x_j},\ \sqrt{\varphi_\varepsilon}\sqrt{k}V^{1/2}(x,u)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right).$$

На основе полученных оценок из равенства (10) следует, что

$$\Big|\big(f,\ \varphi_\varepsilon kV(x,u)u\big)\Big|\geqslant\sum_{i=1}^{n}\left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i},\ \varphi_\varepsilon V(x,u)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)+$$
$$+\big((Vx,u)u,\ \varphi_\varepsilon V(x,u)u\big)-P_1^{(\varepsilon)}(u)-P_2^{(\varepsilon)}(u)-P_3^{(\varepsilon)}(u)-P_4^{(\varepsilon)}(u).$$

Далее, применяя неравенство Коши—Буняковского, имеем

$$\theta_1\sum_{i=1}^{n}\left\|\sqrt{\varphi_\varepsilon}F(x,u)\frac{\partial u}{\partial x_i};L_{2,k}(\mathbb{R}^n)^l\right\|^2+\theta_2\left\|\sqrt{\varphi_\varepsilon}V(x,u)u;L_{2,k}(\mathbb{R}^n)^l\right\|^2-$$
$$-\left|P_1^{(\varepsilon)}(u)\right|\leqslant\left\|\sqrt{\varphi_\varepsilon}f;L_{2,k}(\mathbb{R}^n)^l\right\|\cdot\left\|\sqrt{\varphi_\varepsilon}V(x,u)u;L_{2,k}(\mathbb{R}^n)^l\right\|,\quad(11)$$

где

$$\theta_1=\sigma_1 n\left(\frac{1}{\chi_1\sigma_1 n}-\delta-\alpha\right),\quad\theta_2=\left(1-\frac{n\gamma}{2\alpha}-\frac{\sigma_3}{2\alpha}\right).$$

Пусть β — положительное число, удовлетворяющее неравенству

$$\beta<\sigma_1 n\left(\frac{1}{\chi_1\sigma_1 n}-\delta-\frac{1}{4\alpha}(n\gamma+\sigma_3)\right).$$

Положим $\alpha=(n\gamma+\sigma_3)/2+\beta$. Тогда

$$\theta_1=\sigma_1 n\left(\frac{1}{\chi_1\sigma_1 n}-\delta-\left(\frac{1}{2}(n\gamma+\sigma_3)\right)\right)>0,\quad\theta_2=\left(1-\frac{n\gamma+\sigma_3}{n\gamma+\sigma_3+2\beta}\right)>0.$$

Теперь, переходя в неравенстве (11) к пределу при $\varepsilon\to0$, после несложных преобразований получим коэрцитивное неравенство (9). Разделимость нелинейного оператора (8) следует из коэрцитивного неравенства (9).

Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бойматов К. Х.* Теоремы разделимости, весовые пространства и их приложения// Тр. Мат. ин-та им. В. А.Стеклова АН СССР. — 1984. — *170*. — С. 37–76.
2. *Бойматов К. Х.* Коэрцитивные оценки и разделимость для нелинейных дифференциальных операторов второго порядка// Мат. заметки. — 1989. — *46*, т 6. — С. 110–112.
3. *Каримов О. Х.* О разделимости нелинейного оператора Шредингера с матричным потенциалом в весовом пространстве// Докл. АН Респ. Таджикистан. — 2005. — *48* тт 3-4. — С. 38–43.
4. *Каримов О. Х.* О разделимости нелинейных дифференциальных операторов с матричными коэффициентами// Изв. АН Респ. Таджикистан. Отд. физ.-мат., хим., геол. техн. наук. — 2014. — т 4 (157). — С. 42–50.
5. *Каримов О. Х., Усмонов Н. У.* Коэрцитивные неравенства и разделимость для нелинейных систем дифференциальных уравнений второго порядка// Докл. АН Респ. Таджикистан. — 1997. — *44*, тт 9-10. — С. 32–40.

6. *Мохамед А. С.* О разделимости нелинейного оператора Шредингера с матричным потенциалом// Тез. респ. конф. «Теория приближений и вложения функциональных пространств». — Караганда, 1991. — С. 88.
7. *Отелбаев М.*. Коэрцитивные оценки и теоремы разделимости для эллиптических уравнений в $\mathbb{R}^n$// Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР. — 1983. — *161*. — С. 195–217.
8. *Everitt W. N., Gierz M.* An example concerning the separation property for differential operators// Proc. Roy. Soc. Edinburg A. — 1973. — *71*. — С. 159–165.
9. *Everitt W. N., Gierz M.* A Dirichlet type result for ordinary differential operators// Math. Ann. — 1973. — *203*, т 2. — С. 119–128.
10. *Everitt W. N., Gierz M.* Inequalities and separation for certain ordinary differential operators// Proc. London Math. Soc. (3). — 1974. — *28*. — С. 352–372.
11. *Everitt W. N., Gierz M.* Inequalities and separation for Schrödinger type operators// Proc. Roy. Soc. Edinburg A. — 1977. — *79*. — С. 257–265.

О. Х. Каримов
Институт математики АН Республики Таджикистан, Душанбе
E-mail: karimov_olim@mail.ru

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 141 (2017). С. 86–94

УДК 517.948

О РАЗДЕЛИМОСТИ ОПЕРАТОРА ШТУРМА—ЛИУВИЛЛЯ В ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ МУЛЬТИПЛИКАТОРОВ

© 2017 г. А. С. КАСЫМ, Л. К. КУСАИНОВА

Аннотация. Цель работы — доказательство теоремы разделимости для оператора Штурма—Лиувилля в терминах точечных мультипликаторов в весовых пространствах Соболева. Методика исследования основана на методе локальных оценок на интервалах характеристической длины.

Ключевые слова: разделимость, дифференциальный оператор, мультипликатор, весовые пространства.

AMS Subject Classification: 35Q40, 35J10

Рассмотрим в пространстве $L_2(I)$, где $I = (a, +\infty)$, $a > -\infty$, самосопряженный оператор Штурма—Лиувилля

$$\mathrm{L}\, y \equiv l[y] = -y'' + qy \tag{1}$$

с потенциалом $q \in L_2^{\mathrm{loc}}(I)$, $q \geqslant 1$. Оператор L является одним из самосопряженных расширений минимального оператора $\mathrm{L}_0\, y \equiv l[y]$, $D(\mathrm{L}_0) = C_0^\infty(I)$.

В работе используются следующие обозначения. Пусть Ω — промежуток в $\mathbb{R} = (-\infty; +\infty)$. Через $L_p(\Omega)$ обозначается пространство всех измеримых на Ω функций f с конечной нормой

$$\|f\|_{L_p(\Omega)} = \left(\int\limits_\Omega |f|^p dx\right)^{1/p}, \quad 1 \leqslant p < \infty.$$

Будем полагать $f_1 = f_2$ в $L_p(\Omega)$, если $f_1(x) = f_2(x)$ для почти всех x. Введем также следующие обозначения:

$L_p(\Omega, \mathrm{loc})$ — пространство таких измеримых на Ω функций f, что f принадлежит $L_p[a, b]$ для всех отрезков $[a, b]$, содержащихся в Ω;

$L_p^+(\Omega, \mathrm{loc})$ — пространство всех почти всюду положительных функций из $L_p(\Omega, \mathrm{loc})$ (функции из $L_p^+(\Omega, \mathrm{loc})$ будем называть *весами*);

$C_0^\infty(\Omega)$ — пространство всех бесконечно дифференцируемых и финитных функций на Ω.

Пусть $m \geqslant 1$ — целое. Для веса v обозначим через $\mathring{W}_{p,v}^m$ пополнение $C_0^\infty(\Omega)$ по норме

$$\left\|f;\ \mathring{W}_{p,v}^m\right\| = \|f^{(m)}\|_p + \|vf\|_p, \quad \text{где} \quad \|\cdot\|_p = \|\cdot\|_{L_p(I)}.$$

Определение 1 (см. [2]). Оператор L называют *разделимым*, если имеет место оценка

$$\|y''\|_2 + \|qy\|_2 \leqslant C\big(\|\mathrm{L}\, y\|_2 + \|y\|_2\big), \quad y \in D(\mathrm{L}). \tag{2}$$

Из (2) следует, что $D(\mathrm{L}) \subset \mathring{W}_{2,q}^2$. Более того, условие (2) эквивалентно равенству $D(\mathrm{L}) = \mathring{W}_{2,q}^2$ (см. [2]).

Одна из теорем о разделимости оператора L на всей оси $\mathbb{R}$ была получена в [2] в терминах сравнения «бегущей средней» Отелбаева $Q^*(x)$ от функции q с нормой $\|q\|_{L_2(\widetilde{\Delta}(x))}$ на симметричных характеристических отрезках $\widetilde{\Delta}(x) = \left[\dfrac{x - cQ^*(x)}{2}, \dfrac{x + cQ^*(x)}{2}\right]$. Нами получена теорема о разделимости оператора L на I в других терминах.

ISSN 0233–6723

Ниже всякую положительную и непрерывную справа функцию $h(\cdot)$ на $\bar{I} = [a, +\infty)$ будем называть *функцией длины*. Будем говорить, что $h(\cdot)$ есть *регулярная* функция длины на $\bar{I}$, если существует такое $b > 1$, что

$$b^{-1}h(x) \leqslant h(t) \leqslant bh(x), \quad \text{если} \quad t \in \Delta(x) = [x,\ x + h(x)], \quad x \geqslant a.$$

Приведем важный пример функции длины на $\bar{I}$. Возьмем одну из «бегущих средних» Отелбаева для веса q вида

$$q^*(x) = \sup\left\{h > 0;\ h\int\limits_x^{x+h} q\,dt \leqslant 1\right\}.$$

Легко показать, что q^* — конечная, положительная и непрерывная справа на $\bar{I}$ функция, причем

$$q^*(x)\int\limits_{\Delta^*(x)} q(t)dt = 1$$

на каждом отрезке $\Delta^*(x) = [x,\ x + q^*(x)]$ (см. [3]).

Теорема 1. *Пусть функция* $q \in L_2(\bar{I}, \mathrm{loc})$, $q \geqslant 1$, *удовлетворяет следующим условиям*:

(1) *существует такая регулярная функция длины* $h(\cdot)$ *на* $\bar{I}$, *что*

$$q^*(x) < A_0^{-1}h(x), \quad A_0 = 4\pi b^3\left(\sqrt{2C_0(1+b^2)} + 2C_0\pi b^2\sqrt{(1+b^4)}\right), \tag{3}$$

для всех $x \geqslant a$;

(2) *имеет место неравенство*

$$\sup_{\Delta(x)} q^*\left(\sup_{t\in\Delta(x)} q^*(t)\int\limits_{\Delta^*(t)} q^2(\xi)d\xi\right)^{1/2} \leqslant C_q < \infty. \tag{4}$$

Тогда оператор L *в* (1) *разделим.*

В теореме 1 постоянная C_0 берется из оценки (6) (см. ниже).

Доказательство теоремы 1 проводится методом локализации, предложенным М. Отелбаевым в [2], и опирается на следующее утверждение.

Лемма 1 (см. [2]). *Оператор* L *разделим тогда и только тогда, когда*

$$\left\|q\,\mathrm{L}^{-1} : L_2(I) \to L_2(I)\right\| < \infty.$$

Ниже через $W_p^m(\Omega)$ будем обозначать класс Соболева всех функций y, имеющих на Ω абсолютно непрерывную производную порядка $m-1$ и конечную норму

$$\left\|y; W_p^m(\Omega)\right\| = \left\|y^{(m)};\ L_p(\Omega)\right\| + \left\|y;\ L_p(\Omega)\right\|.$$

Будем также писать $\mathring{W}_p^m(\Omega)$ вместо $\mathring{W}_{p,1}^m(\Omega)$.

Лемма 2 (см. [3]). *Пусть для веса* v *на* $\Delta = [x, x+h]$ *выполнено условие*

$$h\int\limits_{\Delta} v(t)dt \geqslant 1.$$

Тогда для всех $y \in W_2^1(\Delta)$ *имеет место оценка*

$$h^{-2}\int\limits_{\Delta} |y|^2dt \leqslant 4\int\limits_{\Delta}(|y'|^2 + v(t)|y|^2)dt. \tag{5}$$

Следующие два неравенства вытекают из вложения $W_2^m(0,1) \hookrightarrow C^k[0,1]$, $0 \leqslant k < m$:

$$\max_{[x,\,x+h]} |y^{(k)}|^2 \leqslant C_k h^{2(m-k)-1} \int\limits_x^{x+h} \Big(|y^{(m)}|^2 + h^{-2m}|y|^2\Big)dt, \tag{6}$$

$$\int\limits_x^{x+h} |y^{(k)}|^2 dx \leqslant C_k h^{2(m-k)} \int\limits_x^{x+h} \Big(|y^{(m)}|^2 + h^{-2m}|y|^2\Big)dt, \tag{7}$$

где C_k — наилучшие постоянные вложений $W_2^m(0,1) \hookrightarrow C^k[0,1]$.

Пусть $\dot{\mathrm{L}}_\Delta$ — оператор Штурма—Лиувилля с

$$D\big(\dot{\mathrm{L}}_\Delta\big) = \Big\{y \in C^\infty(\bar{\Delta}),\ y(\Delta^\pm) = 0\Big\},$$

где $\Delta = [\Delta^-, \Delta^+]$. Известно, что замыкание $\dot{\mathrm{L}}_\Delta$ совпадает с оператором $\mathrm{L}_\Delta\, y = l[y]$,

$$D(\mathrm{L}_\Delta) = \Big\{y \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Delta),\ l[y] \in L_2(\Delta)\Big\} = \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Delta) \cap W_2^2(\Delta^-, \Delta^+).$$

Оператор L_Δ самосопряжен и имеет обратный L_Δ^{-1}, причем $D(\mathrm{L}_\Delta^{-1}) = L_2(\Delta)$ (см. [2]).

Лемма 3. *Пусть Δ — конечный промежуток в $\bar{I}$. Справедливы следующие утверждения.*
(a) *Оператор L_Δ^{-1} ограничен в $L_2(\Delta)$; при этом*

$$\|\,\mathrm{L}_\Delta^{-1}\,\| \leqslant 4C_0 \Big(\sup_\Delta q^*\Big)^2, \quad C_0 = 3^{-1}(1+\sqrt{3})^2. \tag{8}$$

(b) *Оператор $\dfrac{d}{dx}\,\mathrm{L}_\Delta^{-1}$ ограничен в $L_2(\Delta)$; при этом*

$$\left\|\frac{d}{dx}\,\mathrm{L}_\Delta^{-1}\right\| \leqslant 2\sqrt{C_0}\,\sup_\Delta q^*. \tag{9}$$

(c) *Пусть $r(\cdot) \in L_2(\Delta)$. Оператор $r\,\mathrm{L}_\Delta^{-1}$ ограничен в $L_2\,(\Delta)$; при этом*

$$\Big\|r\,\mathrm{L}_\Delta^{-1}\,\Big\| \leqslant 4C_0 \sup_\Delta q^* \left(\sup_{x\in\Delta} q^*(x) \int\limits_{\Delta^*(x)\cap\Delta} |r|^2\right)^{1/2} = 4C_0 S(\Delta). \tag{10}$$

Доказательство. Поскольку $y(\Delta^+) = 0$, будем считать, что $y(x) = 0$ для $x \geqslant \Delta^+$. Положим

$$K(\Delta) = \sup_\Delta q^*.$$

(a) Пусть $\big\{\Delta_j^*,\ 1 \leqslant j\big\}$ — дизъюнктное покрытие отрезка Δ промежутками

$$\Delta_j^* = \big[t_j,\ t_j + q^*(t_j)\big), \quad t_1 = a, \quad t_{j+1} = t_j + q^*(t_j).$$

Возьмем $y = \mathrm{L}_\Delta^{-1} f$, $f \in L_2(\Delta)$. Из оценок (6), (7) следует

$$\int\limits_\Delta \big|\,\mathrm{L}_\Delta^{-1} f\big|^2 dx = 4C_0 \sum_{j\geqslant 1} q^{*2}(x_j) \int\limits_{\Delta_j^*\cap\Delta} \big(|y'|^2 + q(x)|y|^2\big)dx \leqslant$$

$$\leqslant 4C_0\big(K(\Delta)\big)^2\big(\mathrm{L}_\Delta f,\ f\big) \leqslant 4C_0\big(K(\Delta)\big)^2\|\,\mathrm{L}_\Delta^{-1} f\|\,\|f\|_{L_2(\Delta)},$$

откуда получаем оценку (8).

(b) Оценка (9) следует из неравенства

$$\left\|\frac{d}{dx}\,\mathrm{L}_\Delta^{-1} f\right\|_{L_2(\Delta)} = \int\limits_\Delta |y'|^2dx \leqslant \int\limits_\Delta \big(|y'|^2+q(x)|y|^2\big)dx \leqslant$$

$$\leqslant \|f\|_{L_2(\Delta)}\big\|\,\mathrm{L}_\Delta^{-1} f\big\|_{L_2(\Delta)} \leqslant 4C_0\big(K(\Delta)\big)^2\|f\|^2_{L_2(\Delta)}.$$

(c) Здесь мы применяем оценки из доказательств утверждений (a), (b):

$$\big\|r\,\mathrm{L}_\Delta^{-1} f\big\|^2_{L_2(\Delta)} = \int\limits_\Delta |ry|^2dx \leqslant \sum_{j\geqslant 1}\left(\max_{\Delta_j^*\cap\Delta}|y|\right)^2 \int\limits_{\Delta_j^*\cap\Delta} |y|^2dx \leqslant$$

$$\leqslant 4C_0\sum_{j\geqslant 1}\left(q^*(t_j)\int\limits_{\Delta_j^*\cap\Delta}|r|^2dx\right)\int\limits_{\Delta_j^*\cap\Delta}\big(|y'|^2+q(x)|y|^2\big)dx \leqslant$$

$$\leqslant \left(4C_0\sup_\Delta q^*\right)^2\left(\sup_{x\in\Delta} q^*(x)\int\limits_{\Delta_j^*(x)}|r|^2dt\right)\|f\|^2_{L_2(\Delta)},$$

откуда следует (10). □

Возьмем $\tau\in(1-\eta,\ 1)$, $0<\eta<1$. На $\bar I$ построим последовательности точек $\{x_j\}_{j=1}^\infty$ и $\{\widetilde x_j\}_{j=1}^\infty$, полагая

$$x_0=a,\quad x_1=x_0+h(x_0),\qquad \widetilde x_1=x_0+\tau h(x_0),\quad \ldots,$$
$$x_{j+1}=\widetilde x_j+h(\widetilde x_j),\qquad \widetilde x_{j+1}=\widetilde x_j+\tau h(\widetilde x_j).$$

Пусть

$$\Delta_j=\big[\widetilde x_{j-1},\ x_j\big],\quad \widetilde\Delta_j=\big[x_{j-1},\ \widetilde x_j\big].$$

Возьмем далее

$$\theta(t)=\frac12\pi\int\limits_0^t\sin(\pi\xi)d\xi$$

и положим

$$\varphi_j(x)=\begin{cases}\theta\left(\dfrac{t-\widetilde x_{j-1}}{x_{j-1}-\widetilde x_{j-1}}\right), & \widetilde x_{j-1}\leqslant t\leqslant x_{j-1},\\ 1, & x_{j-1}\leqslant t\leqslant \widetilde x_j,\\ \theta\left(\dfrac{x_j-t}{x_j-\widetilde x_j}\right), & \widetilde x_j\leqslant t\leqslant x_j\\ 0, & t\leqslant\widetilde x_{j-1}\quad\text{либо}\quad t\geqslant x_j.\end{cases}$$

Функции φ_j имеют в Δ_j непрерывную производную φ_j' и

$$\sum_{j=1}^\infty\varphi_j(x)\chi_j(x)=1,\quad x\in\bar I, \tag{11}$$

где χ_j — характеристическая функция отрезка Δ_j. Равенство‘(11) следует из тождества

$$\theta(t)+\theta(1-t)\equiv 1,\quad 0\leqslant t\leqslant 1.$$

Положим $\mathrm{L}_j=\mathrm{L}_{\Delta_j}$.

На пространстве $C_0^\infty(I)$ зададим операторы

$$\mathring{M}f=\sum_{j=1}^\infty\varphi_j\,\mathrm{L}_j^{-1}(\chi_jf),\quad \mathring{B}_1f=2\sum_{j=1}^\infty\varphi_j'\frac{d}{dx}\,\mathrm{L}_j^{-1}(\chi_jf),\quad \mathring{B}_2f=\sum_{j=1}^\infty\varphi_j''dx\,\mathrm{L}_j^{-1}(\chi_jf).$$

Лемма 4. *Пусть $h(\cdot)$ — регулярная функция длины на $\bar{I}$. Пусть*

$$\mathcal{K}(x) = \sup_{t\in\Delta(x)} \frac{q^*(t)}{h(x)},$$

где $\Delta(x) = \big[x,\ x + h(x)\big]$. Допустим, что

$$K = \sup_{x\geqslant a} \mathcal{K}(x) < \infty.$$

Тогда справедливы следующие утверждения.

(a) *Операторы $\mathring{B}_i$, $i = 1, 2$, продолжаются до ограниченного оператора B_i в $L_2\,(I)$; при этом*

$$\|B_1\| \leqslant \pi b^2 \sqrt{2^5 C_0 (1 + b^2)} K, \tag{12}$$

$$\|B_2\| \leqslant (\pi b^2)^2 \sqrt{2^7 C_0^2 (1 + b^4)} K^2. \tag{13}$$

(b) *Пусть $r(\cdot) \in L_2(\Delta)$. Если*

$$S(x) = \sup_{\Delta(x)} q^* \left(\sup_{t\in\Delta(x)} q^*(t) \int\limits_{\Delta^*(t)} |r|^2 \right)^{1/2} \leqslant C < \infty, \quad x \geqslant a,$$

то оператор $r\mathring{M}$ продолжается до ограниченного оператора rM в $L_2\,(I)$ с нормой

$$\|rM\| \leqslant C_0\sqrt{32} \sup_{x\geqslant a} S(x) = C_0\sqrt{32} S. \tag{14}$$

Доказательство. (a) Возьмем $\widetilde{x}_{j+1} = \widetilde{x}_j + \tau h(\widetilde{x}_j)$, $\tau = 1 - (2b)^{-1}$. Нетрудно видеть, что тогда

$$\big|\varphi_j'(x)\big| \leqslant \pi b h(\widetilde{x}_{j-1})^{-1}, \quad \big|\varphi_j''(x)\big| \leqslant 2(\pi b)^2 h(\widetilde{x}_{j-1})^{-2}, \quad x \in \Delta_j.$$

Далее мы будем привлекать оценки норм локальных операторов из леммы 3. Пусть $\widetilde{\chi}_j$ — характеристическая функция отрезка $\big[\widetilde{x}_{j-1},\ \widetilde{x}_j\big]$, $f_j = f \cdot \chi_j$, $f \in C_0^\infty(I)$. Имеем:

$$\int\limits_a^\infty \big|\mathring{B}_1 f\big|^2 dx = 4 \sum_{j=1}^\infty \int\limits_{\Delta_j} \left| \sum_{k=1}^\infty \varphi_k' \frac{d}{dx} \mathrm{L}_k^{-1}(f_k) \right|^2 dx \leqslant$$

$$\leqslant 8(\pi b)^2 \sum_{j=1}^\infty \left[h(x_{j-2})^{-2} \sum_{k=j-1}^{j} \int\limits_{\Delta_{j-1}\cap\Delta_j} \left| \frac{d}{dx} \mathrm{L}_k^{-1}(f_k) \right|^2 dx + h(\widetilde{x}_{j-1})^{-2} \sum_{k=j}^{j+1} \int\limits_{\Delta_j\cap\Delta_{j+1}} \left| \frac{d}{dx} \mathrm{L}_k^{-1}(f_k) \right|^2 dx \right] \leqslant$$

$$\leqslant 32 C_0 \pi^2 b^4 (1 + b^2) \sum_{j=1}^\infty \left(\sup_{x\in\Delta_j} \frac{q^*(x)}{h(x)} \right)^2 \int\limits_{\Delta_j} |f|^2 dx \leqslant \Big(\sqrt{32 C_0 (1 + b^2)} \pi b^2 K \Big)^2 \|f\|_{L_2(I)}^2,$$

откуда следует оценка (12) для B_1.

Для оператора B_2 имеем:

$$\int\limits_a^\infty |B_2 f|^2 dx \leqslant$$

$$\leqslant 8(\pi b)^4 \left[h(\widetilde{x}_{j-2})^{-4} \sum_{k=j-1}^{j} \int\limits_{\Delta_{j-1}\cap\Delta_j} \big|\,\mathrm{L}_k^{-1}(f_k)\big|^2 dx + h(\widetilde{x}_{j-1})^{-4} \sum_{k=j}^{j+1} \int\limits_{\Delta_j\cap\Delta_{j+1}} \big|\,\mathrm{L}_k^{-1}(f_k)\big|^2 dx \right] \leqslant$$

$$\leqslant 8(\pi b)^4 (4C_0)^2 b^4 (1 + b^4) \sum_{j=1}^\infty \left(\sup_{x\in\Delta_j} \frac{q^*(x)}{h(x)} \right)^4 \int\limits_{\Delta_j} |f|^2 dx \leqslant \left(\pi b^2 \sqrt[4]{2^7 C_0^2 (1 + b^4)} K \right)^4 \int\limits_a^\infty |f|^2 dx,$$

откуда имеем оценку (13).

(b) Имеем:

$$\int\limits_a^\infty |r(x)\mathring{M}f|^2dx \leqslant 2\sum_{j=1}^\infty \left[\sum_{k=j-1}^{j+1}\int\limits_{\Delta_k} \left|r(x)\,\mathrm{L}_k^{-1}(f_k)\right|^2dx\right] \leqslant 2\sum_{j=1}^\infty \left\|r\,\mathrm{L}_k^{-1}\right\|^2\int\limits_{\Delta_k}|f|^2dx \leqslant$$

$$\leqslant 32C_0^2\sum_{j=1}^\infty S^2\big(\widetilde{x}_{j-1}\big)\int\limits_{\Delta_k}|f|^2dx \leqslant 32C_0^2\sup_{x\geqslant a}S^2(x)\int\limits_a^\infty|f|^2dt,$$

откуда вытекает оценка (14). □

Лемма 5. *Пусть* $\|B_1\|+\|B_2\|<1$. *Тогда*

(a) *оператор* $I-B_1-B_2$ *обратим*;

(b) *имеет место равенство*

$$\mathrm{L}^{-1}=M(I-B_1-B_2)^{-1}. \tag{15}$$

Доказательство. Для $f\in C_0^\infty(I)$ сумма

$$\sum_{j=1}^\infty\varphi_j\,\mathrm{L}_j^{-1}(f_j)=\sum_{j=1}^\infty\varphi_j\psi_j\cdot\psi_j=\mathrm{L}_j^{-1}(f_j),\quad j\geqslant1,$$

берется по конечному множеству слагаемых. Поэтому

$$\mathrm{L}\left(\sum_{j=1}^\infty\varphi_j\,\mathrm{L}_j^{-1}(f_j)\right)=\sum_{j=1}^\infty\mathrm{L}(\varphi_j\psi_j)=-\sum_{j=1}^\infty\varphi_j''\psi_j-2\sum_{j=1}^\infty\varphi_j'\psi_j'+\sum_{j=1}^\infty\varphi_j(-\psi_j''+q(x)\psi_j)=$$

$$=-B_1f-B_2f+\sum_{j=1}^\infty\varphi_j(\chi_jf)=-(B_1+B_2)f+f. \tag{16}$$

Применяя (16), получаем

$$\mathrm{L}^{-1}f=\mathrm{L}^{-1}\left(f-\mathrm{L}\left(\sum_{j=1}^\infty\varphi_j\psi_j\right)+\mathrm{L}\left(\sum_{j=1}^\infty\varphi_j\psi_j\right)\right)=$$

$$=\mathrm{L}^{-1}\left(f-f+\sum_{i=1}^2B_if+\mathrm{L}\,Mf\right)=\mathrm{L}^{-1}\left(\sum_{i=1}^2B_i\right)f+Mf,$$

откуда следует, что

$$\mathrm{L}^{-1}(I-B_1-B_2)=M. \tag{17}$$

Поскольку $\|B_1\|+\|B_2\|<1$, то существует обратный оператор $\big(I-B_1-B_2\big)^{-1}=Q$. Применяя Q к равенству (17), получим

$$\mathrm{L}^{-1}=M(I-B_1-B_2)^{-1}.$$ □

Доказательство теоремы 1. Из условия (3) следует, что

$$\|B_1\|+\|B_2\|\leqslant A_0K<1.$$

В силу леммы 5 существует обратный оператор $\mathrm{L}^{-1}=M(I-B_1-B_2)^{-1}$. В силу леммы 1 достаточно доказать, что оператор $q\,\mathrm{L}^{-1}$ является ограниченным оператором в $L_2(I)$. Из утверждения (b) леммы 5 следует оценка

$$\|q\,\mathrm{L}^{-1}\|=\|qM\|\,\|(I-B_1-B_2)^{-1}\|\leqslant C_q(1-A_0K)^{-1}<\infty.$$ □

Определение 2. Пусть X, Y — нормированные пространства функций $y:\Omega\to\mathbb{R}$, $\Omega\subset\mathbb{R}$. Функцию $z:\Omega\to\mathbb{R}$ называют (*точечным*) *мультипликатором* из X в Y, если $zy\in Y$ для всех $y\in X$.

Через $M(X\to Y)$ будем обозначать класс всех мультипликаторов из X в Y, для которых оператор умножения $T_zy=zy$ ограничен как оператор из X в Y. Норму

$$\|T_z;\ X\to Y\|=\sup_{0\neq y\in X}\frac{\|T_zy\|_Y}{\|y\|_X}=\sup_{0\neq y\in X}\frac{\|zy\|_Y}{\|y\|_X}$$

оператора T_z называют также *нормой мультипликатора* z и обозначают $\|z;\ M(X\to Y)\|$ (см. [1]).

Введем следующую «бегущую среднюю» от функции q^2:

$$h^*(x)=h^*_\delta(x)=\sup\left\{h>0:\ h^3\inf_e\int\limits_{\Delta_h(x)\setminus e}q^2dt\leqslant 1\right\},$$

где $\Delta_h(x)=[x,\ x+h]$, inf берется по всем измеримым $e\subset\Delta_h(x)$ с мерой $|e|\leqslant\delta h$, $0<\delta<1$. Нетрудно показать, что для $q\geqslant 1$

$$0<h^*(x)\leqslant(1-\delta)^{-1/4},\quad x\geqslant a.$$

Положим $\Omega^*(x)=[x,\ x+h^*(x)]$.

Лемма 6 (см. [3])**.** *Существует такое $C^*=C^*(\delta)>0$, что*

$$h^*(x)^{-4}\int\limits_{\Omega^*(x)}|y|^2dt\leqslant C^*\int\limits_{\Omega^*(x)}\Big(|y''|^2+|qy|^2\Big)dt,\quad x\geqslant a,$$

для всех y, имеющих в $\bar I$ производную y'' из $L_2(\bar I,\mathrm{loc})$.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы* 1. *Если*

$$z\in W^2_{2,q}\cap M(W_2^{m-2}\to L_2),\quad \mathrm{L}(z)\in M(W_2^m\to L_2),$$

то справедливы следующие утверждения:
(a) $z\in M(W_2^m\to W^2_{2,q})$;
(b) *справедлива оценка*

$$\|z;\ M(W_2^m\to W^2_{2,q}\|\leqslant\widetilde C\left[\|\,\mathrm{L}(z);\ M(W_2^m\to L_2)\|+\|z;\ M(W_2^{m-2}\to L_2)\|+\|z;\ W^2_{2,q}\|\right].$$

Постоянная $\widetilde C$ зависит только от числовых параметров.

В теореме 2 и ниже используются обозначения $W_2^m=W_2^m(I)$, $L_2=L_2(I)$.

Доказательство теоремы 2. (a) Покажем, что

$$\|zy;\ W^2_{2,q}\|=\|(zy)''\|_2+\|q(zy)\|_2<\infty \tag{18}$$

для всех $y\in W_2^m(I)$. Представим $\overline{I}$ как дизъюнктное объединение:

$$\bar I=\bigcup_{j=1}^{\infty}\Omega_j,\quad \Omega_j=\big[x_j,\ x_j+d_j\big),\quad d_j=h^*(x_j),\quad j\geqslant 0,\quad x_0=a.$$

Если $y\in C_0^\infty(I)$, $F=\mathrm{supp}(y)$, то

$$\begin{aligned}\|(yz)''\|_2&=\big\|-y\,\mathrm{L}\,z+2y'z'+zy''+qyz\big\|_2\leqslant\\ &\leqslant\|\,\mathrm{L}\,z;\ M(W_2^m\to L_2)\|\,\|y;\ W_2^m\|+\|y''z\|_2+\max_F|y|\,\|qz\|_2+2\|y'z'\|_2\leqslant\\ &\leqslant\Big(\|\,\mathrm{L}\,z;\ M(W_2^m\to L_2)\|+c_1\|z;\ M(W_2^{m-2}\to L_2)\|+c_2\|z;\ W^2_{2,q}\|\Big)\,\|y;\ W_2^m\|+2\|y'z'\|_2.\end{aligned}\tag{19}$$

На каждом Ω_j в силу (6) и леммы 6

$$\int\limits_{\Omega_j} |y'z'|^2 dx \leqslant c_3 C^* d_j \int\limits_{\Omega_j} (|z''|^2 + |qz|^2) dx \cdot \int\limits_{\Omega_j} |y'|^2 dx,$$

откуда

$$\int\limits_a^\infty |y'z'|^2 dx \leqslant c_4 C^* R^* \left\| z;\ W^2_{2,q} \right\|^2 \left\| y;\ W^m_2(I) \right\|^2, \tag{20}$$

где

$$R^* = \sup_{x \in \bar I} h^*(x) \leqslant (1-\delta)^{-1/4}.$$

Из (19), (20) выводим, что $yz \in D(\mathrm{L})$ и в силу разделимости оператора L (теорема 1)

$$\begin{aligned} \left\| yz;\ W^2_{2,q} \right\| &\leqslant C\big(\| \mathrm{L}(yz) \|_2 + \|yz\|_2 \big) \leqslant \\ &\leqslant c_5 C \Big(\left\| \mathrm{L}\, y;\ M(W^m_2 \to L_2) \right\| + \left\| z;\ M(W^{m-2}_2 \to L_2) \right\| + \left\| z;\ W^2_{2,q} \right\| \Big) \left\| y;\ W^m_2 \right\|. \end{aligned} \tag{21}$$

Теорема доказана. □

Замечание. Из теоремы 2 следует, что каждое решение z уравнения

$$-z'' + q(x) z = f, \quad f \in M(W^m_2 \to L_2),$$

из класса $W^2_{2,q} \cap M(W^{m-2}_2 \to L_2)$ является мультипликатором из W^m_2 в $W^2_{2,q}$.

Пример. Пусть

$$q(x) = \sqrt{1 + (1+x)^{2k} \sin^4 x^2}, \tag{22}$$

$k \geqslant 1$ — целое, $I = (a, +\infty)$, $a \geqslant 8$. Легко показать, что

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{k/2} (1+x)^{-k/2} \leqslant q^*(x) \leqslant 2^k (1+x)^{-k/2}. \tag{23}$$

Возьмем $h(x) = A(1+x)^{-k/2}$, $A = 2^{k+1} A_0$. Тогда

$$(1+A)^{-k/2} h(x) \leqslant h(t) \leqslant 2^{k/2} h(x), \quad t \in \Delta(x).$$

Условие (3) теоремы 1 очевидно, а из (23) следует

$$\begin{aligned} &\left(\sup_{t \in \Delta(x)} q^*(t) \right)^2 \left(\sup_{t \in \Delta(x)} q^*(t) \int\limits_{\Delta^*(t)} q^2(\xi) d\xi \right) \leqslant \\ &\qquad \leqslant \Big(2^k (1+x)^{-k/2} \Big)^2 \sup_{t \in \Delta(x)} \Big[2^{2k} (1+t)^{-k} (1 + t + A(1+t)^{-k/2})^{2k} \Big] \leqslant [2(1+A)]^{2k}. \end{aligned}$$

Таким образом, можно утверждать, что оператор L с потенциалом (22) на $I = (a, +\infty)$ $(a \geqslant 8)$ разделим, а также, что для него справедливы выводы теоремы 2.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Мазья В. Г., Шапошникова Т. О.* Мультипликаторы в пространствах дифференцируемых функций. — Л.: Изд-во ЛГУ, 1986.
2. *Мынбаев К. Т., Отелбаев М. О.* Весовые функциональные пространства и спектр дифференциальных операторов. — М., Наука, 1988.
3. *Отелбаев М. О., Кусаинова Л. К.* Оценки спектра одного класса дифференциальных операторов// Сб. праць Інст. мат. НАН Украйни. — 2009. — *6*, т 1. — С. 165–190.

А. С. Касым
Евразийский национальный университет им. Л. Н. Гумилева, Астана, Казахстан
E-mail: `nttaika77@mail.ru`

Л. К. Кусаинова
Евразийский национальный университет им. Л. Н. Гумилева, Астана, Казахстан
E-mail: `leili2006@mail.ru`

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 141 (2017). С. 95–102

УДК 517.925

ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ДАННЫХ РАССЕЯНИЯ РАЗРЫВНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА

© 2017 г. **Х. Р. МАМЕДОВ**

Аннотация. Рассматривается обратная задача рассеяния о восстановлении потенциала по данным рассеяния для одного класса уравнений Шредингера с нелинейным спектральным параметром в граничном условии. Оказывается, что для вещественнозначной потенциальной функции $q(x)$ данные рассеяния определяются как в несамосопряженном случае и состоят из функции рассеяния, невещественных сингулярных значений и нормализационных полиномов. Исследуются характеристические свойства спектральных данных. Решение задачи строится при помощи процедуры Гельфанда—Левитана—Марченко. Доказана единственность алгоритма для потенциала с заданными данными рассеяния.

Ключевые слова: данные рассеяния, нормализационный полином, задача рассеяния на полупрямой, нелинейный спектральный параметр.

AMS Subject Classification: 34L25; 34B07; 34L05

1. Введение. Задачи Штурма—Лиувилля с граничными условиями, содержащими спектральный параметр линейным или нелинейным образом, появляются во многих прикладных вопросах. Примеры физических приложений краевых задач на полупрямой см. в [8, 16, 17].

Рассмотрим уравнение
$$-y'' + q(x)y = \lambda^2 y, \quad 0 < x < \infty, \tag{1}$$
с граничными условиями
$$-(\alpha_1 y(0) - \alpha_2 y'(0)) = \lambda(\beta_1 y(0) - \beta_2 y'(0), \tag{2}$$
где $q(x)$ — вещественнозначная функция, удовлетворяющая условию
$$\int_0^\infty (1+x)\big|q(x)\big|dx < \infty, \tag{3}$$
α_i и β_i, $i = 1, 2,$ — вещественные числа, $\alpha_1\alpha_2 > 0$.

Единственность решения обратной задачи рассеяния (1)–(3) можно доказать методами, описанными в [2, 15]. Однако, поскольку нули функций Йоста расположены на комплексной плоскости симметрично относительно вещественной оси и не являются простыми, этот случай отличается от самосопряженного случая, и поэтому данные рассеяния для задачи (1)–(3) необходимо определять иначе.

Отметим, что для классического оператора Штурма—Лиувилля (т.е. в случае $\beta_1 = \beta_2 = 0$) обратная задача рассеяния была полностью решена в [6, 11, 15], а несамосопряженный случай изучался в [2]. Обратная задача рассеяния для уравнения (1) со спектральным параметром, содержащимся в граничных условиях, рассматривалась в [3, 12, 14]. Отметим, что обратные задачи спектрального анализа для дифференциальных уравнений первого и второго порядка на полупрямой с зависимостью от спектрального параметра изучались в [7, 9, 10, 13, 16].

Содержание работы таково. В п. 2 вводятся данные рассеяния для задачи (1)–(3). В п. 3 получено основное уравнение для обратной задачи и установлены некоторые свойства спектральных данных. Наконец, в п. 4 доказывается теорема единственности решения обратной задачи.

Работа выполнена при поддержке Совета Турции по научно-техническим исследованиям.

Введем необходимые понятия. Обозначим через $e(x,\lambda)$ решение задачи (1)–(3), обладающее следующей асимптотикой:

$$\big(\operatorname{Im}\lambda \geqslant 0\big) e(x,\lambda) \to e^{i\lambda x} \quad \text{as } x \to \infty.$$

Хорошо известно (см. [15]), что решение Йоста $e(x,\lambda)$ существует, единственно и регулярно (по λ) в полуплоскости $\operatorname{Im}\lambda > 0$, непрерывно на вещественной оси и может быть представлено в виде

$$e(x,\lambda) = e^{i\lambda x} + \int_x^{\infty} K(x,t) e^{i\lambda t}\,dt, \tag{4}$$

причем функция $K(x,t)$ (ядро интегрального представления) удовлетворяет неравенству

$$\big|K(x,t)\big| \leqslant \frac{1}{2}\sigma\left(\frac{x+t}{2}\right)\exp\left\{\sigma_1(x) - \sigma_1\left(\frac{x+t}{2}\right)\right\}, \tag{5}$$

а также

$$K(x,x) = \frac{1}{2}\int_x^{\infty} q(t)\,dt, \tag{6}$$

где

$$\sigma(x) \equiv \int_x^{\infty} \big|q(t)\big|\,dt, \quad \sigma_1(x) \equiv \int_x^{\infty} \sigma(t)\,dt.$$

Кроме того, функция $e(x,\lambda)$ обладает следующими свойствами в полуплоскости $\operatorname{Im}\lambda \geqslant 0$:

$$\big|e(x,\lambda)\big| \leqslant \exp\big\{-\operatorname{Im}\lambda x + \sigma_1(x)\big\}, \tag{7}$$

$$\Big|e(x,\lambda) - e^{i\lambda x}\Big| \leqslant \left\{\sigma_1(x) - \sigma_1\left(x + \frac{1}{|\lambda|}\right)\right\}\exp\big\{-\operatorname{Im}\lambda x + \sigma_1(x)\big\}, \tag{8}$$

$$\Big|e'(x,\lambda) - i\lambda e^{i\lambda x}\Big| \leqslant \sigma(x)\exp\big\{-\operatorname{Im}\lambda x + \sigma_1(x)\big\}. \tag{9}$$

Используя эти свойства, нетрудно доказать, что для вещественных $\lambda \neq 0$ функции $e(x,\lambda)$ и $e(x,-\lambda)$ образуют фундаментальную систему решений уравнения (1), а их вронскиан равен $2i\lambda$ (см. [15, с. 180]):

$$W\big\{e(x,\lambda), e(x,-\lambda)\big\} := e'(x,\lambda)e(x,-\lambda) - e(x,\lambda)e'(x,-\lambda) = 2i\lambda. \tag{10}$$

Функция

$$S(\lambda) = \frac{E_1(\lambda)}{E(\lambda)}$$

называется *функцией рассеяния* для краевой задачи (1)–(3), где

$$E(\lambda) = \big(\alpha_2 + \beta_2\lambda\big)e'(0,\lambda) - \big(\alpha_1 + \beta_1\lambda\big)e(0,\lambda),$$
$$E_1(\lambda) = \big(\alpha_2 + \beta_2\lambda\big)e'(0,-\lambda) - \big(\alpha_1 + \beta_1\lambda\big)e(0,-\lambda).$$

Обозначим через λ_j корни уравнения $E(\lambda) = 0$ в полуплоскости $\operatorname{Im}\lambda > 0$. Эти корни, образующие конечное множество комплексных чисел, могут быть кратными. Числа λ_j, $j = 1, 2, \dots, n$, $\operatorname{Im}\lambda_j > 0$, называются сингулярными значениями краевой задачи (1)–(3) (см. [4, с. 306] и [2]).

Известно (см. [4, p. 306]), что уравнение (1) имеет решение $\hat{e}(x,\lambda)$, удовлетворяющее условию

$$\hat{e}(x,\lambda) = e^{-i\lambda x}\big[1 + o(1)\big], \quad x \to \infty,$$

равномерно в области $\operatorname{Im}\lambda \geqslant \alpha$, $|\lambda| \geqslant \delta$ для всех $\alpha > 0$ и $\delta > 0$.

Введем обозначение

$$f_j(x) = i\operatorname{Res}_{\lambda=\lambda_j}\frac{\widehat{E}(\lambda)}{E(\lambda)}e^{i\lambda x}, \tag{11}$$

где

$$\widehat{E}(\lambda) = \big(\alpha_2 + \beta_2\lambda\big)\hat{e}'(0,\lambda) - \big(\alpha_1 + \beta_1\lambda\big)\hat{e}(0,\lambda), \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Согласно [2] (см. также [4, с. 327]), будем искать *нормализационные полиномы* $P_j(x) = e^{-i\lambda_j x} f_j(x)$, $j = 1, 2, \ldots, n$, для краевой задачи (1)–(3); степень $P_j(x)$ равна $m_j - 1$, где m_j — кратность λ_j, $j = 1, 2, \ldots, n$.

Множество величин $\Big\{S(\lambda),\ -\infty < \lambda < +\infty;\ \lambda_j;\ P_j(x),\ j = 1, 2, \ldots, n\Big\}$ называется *данными рассеяния* краевой задачи (1)–(3). Обратная задача рассеяния для краевой задачи (1)–(3) состоит в восстановлении коэффициента $q(x)$ по данным рассеяния. Предположим, что краевая задача вида (1)–(3) с другой потенциальной функцией $\tilde{q}(x)$, удовлетворяющей условию (3), имеет данные рассеяния $\Big\{\tilde{S}(\lambda);\ \tilde{\lambda}_j;\ \tilde{P}_j,\ j = 1, 2, \ldots, n\Big\}$. Тогда единственность решения обратной задачи рассеяния (1)–(3) формулируется следующим образом: если данные рассеяния двух задач с потенциалами $q(x)$ и $\tilde{q}(x)$, удовлетворяющими условию (3), совпадают, то $q(x) = \tilde{q}(x)$ почти всюду на полупрямой.

2. Прямая задача рассеяния. Пусть $w(x, \lambda)$ — решение уравнения (1), удовлетворяющее начальному условию

$$w(0, \lambda) = \alpha_2 + \beta_2\lambda, \quad w'(0, \lambda) = \alpha_1 + \beta_1\lambda. \tag{12}$$

Имеет место следующее утверждение.

Лемма 1. *Для вещественных* $\lambda \in \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ *справедливо тождество*

$$\frac{2i\lambda\omega(x, \lambda)}{(\alpha_2 + \beta_2\lambda)e'(0, \lambda) - (\alpha_1 + \beta_1\lambda)e(0, \lambda)} = e(x, -\lambda) - S(\lambda)e(x, \lambda), \tag{13}$$

где

$$S(\lambda) = \frac{(\alpha_2 + \beta_2\lambda)e'(0, -\lambda) - (\alpha_1 + \beta_1\lambda)e(0, -\lambda)}{(\alpha_2 + \beta_2\lambda)e'(0, \lambda) - (\alpha_1 + \beta_1\lambda)e(0, \lambda)} \tag{14}$$

и

$$\overline{S(\lambda)} = [S(\lambda)]^{-1}. \tag{15}$$

Доказательство. Поскольку функции $e(x, \lambda)$ и $e(x, -\lambda)$ образуют фундаментальную систему решений уравнения (1) для всех вещественных $\lambda \neq 0$, можем записать

$$w(x, \lambda) = A^- e(x, \lambda) + A^+ e(x, -\lambda). \tag{16}$$

Используя (10) и (12), из (16) получим

$$A^- = -\frac{1}{2i\lambda}\left[\big(\alpha_2 + \lambda\beta_2\big)e'(0, -\lambda) - \big(\alpha_1 + \lambda\beta_1\big)e(0, -\lambda)\right],$$
$$A^+ = \frac{1}{2i\lambda}\left[\big(\alpha_2 + \lambda\beta_2\big)e'(0, \lambda) - \big(\alpha_1 + \lambda\beta_1\big)e(0, -\lambda)\right].$$

Теперь докажем, что $E(\lambda) \neq 0$ для $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Предположим противное, т.е. $E(\lambda) = 0$, где $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Тогда

$$e'(0, \lambda_0) = \frac{\alpha_1 + \beta_1\lambda_0}{\alpha_2 + \beta_2\lambda_0} e(0, \lambda_0), \quad \overline{e'(0, \lambda_0)} = \frac{\alpha_1 + \beta_1\lambda_0}{\alpha_2 + \beta_2\lambda_0} \overline{e(0, \lambda_0)}.$$

Подставляя эти выражения в (10), получим

$$\frac{\alpha_1 + \beta_1\lambda_0}{\alpha_2 + \beta_2\lambda_0}\left[e(0, \lambda_0)\overline{e(0, \lambda_0)} - \overline{e(0, \lambda_0)}e(0, \lambda_0)\right] = 2i\lambda_0$$

или $0 = 2i\lambda_0$, что противоречит предположению $\lambda_0 \neq 0$. Используя последнее соотношение в (16) и принимая во внимание тот факт, что $E(\lambda) \neq 0$, $\lambda \in \mathbb{R}^*$, получим (13), где $S(\lambda)$ выражается по формуле (14). Из (14) легко получить (15). Лемма доказана. □

Аналогично, для решений $e(\lambda, x)$ и $\hat{e}(\lambda, x)$ находим

$$\frac{2i\lambda w(x, \lambda)}{E(\lambda)} = \hat{e}(\lambda, x) - \frac{E(\lambda)}{\hat{E}(\lambda)} e(x, \lambda). \tag{17}$$

Лемма 2. *Функция* $E(\lambda)$ *может иметь лишь конечное число нулей в полуплоскости* $\operatorname{Im}\lambda > 0$. *Функция* $\lambda\big[E(\lambda)\big]^{-1}$ *ограничена в окрестности точки* $\lambda = 0$.

Доказательство. Поскольку $E(\lambda) \neq 0$ при $\lambda \in \mathbb{R}^*$, точка $\lambda = 0$ является возможным вещественным нулем функции $E(\lambda)$. Из аналитичности функции $E(\lambda)$ в верхней полуплоскости следует, что ее нули образуют не более чем счетное множество. Покажем, что это множество ограничено. Предположим, что $E(\mu_k) = 0$ и $|\mu_k| \to \infty$ при $k \to \infty$. Тогда

$$e'(0,\mu_k) = -\frac{\alpha_1 + \beta_1\mu_k}{\alpha_2 + \beta_2\mu_k} e(0,\mu_k).$$

Для $x = 0$ и $\lambda = \mu_k$ из (8) следует неравенство

$$\left| \frac{\alpha_1 + \beta_1\mu_k}{\alpha_2 + \beta_2\mu_k} e(0,\mu_k) - i\mu_k \right| \leqslant \left\{ \sigma_1(0) - \sigma_1\left(\frac{1}{|\mu_k|}\right) \right\} \exp\left\{\sigma_1(0)\right\}.$$

Следовательно,

$$|\mu_k| \leqslant \left| \frac{\alpha_1 + \beta_1\mu_k}{\alpha_2 + \beta_2\mu_k} e(0,\lambda_k) \right| + \sigma_1(0)\exp\left\{\sigma_1(0)\right\}.$$

Поскольку $|\mu_k| \to \infty$ при $k \to \infty$, заключаем из (7) и (8), что $e(0,\lambda_k) =\to 1$ при $k \to \infty$. Итак, правая часть последнего уравнения имеет конечный предел.

Полученное противоречие показывает, что функция $E(\lambda)$ может иметь конечное число нулей в полуплоскости $\operatorname{Im}\lambda > 0$. Обратно, предположим, что $E(\lambda)$ имеет бесконечно много нулей $\lambda = \mu_n$, $n = 1, 2, \ldots$. Тогда функция $y_n = y(x, \mu_n)$ удовлетворяет уравнению

$$-y_n'' + q(x)y_n = \mu_n^2 y_n \tag{18}$$

и граничным условиям

$$\bigl(\alpha_2 + \beta_2\mu_n\bigr)y_n'(0) + \bigl(\alpha_1 + \beta_1\mu_n\bigr)y_n(0) = 0. \tag{19}$$

Умножим обе части (19) на $\overline{y_n}$ и проинтегрируем по x от 0 до ∞. Принимая во внимание (17) и интегрируя по частям, получим

$$\mu_n^2 - \frac{\alpha_1 + \beta_1\mu_n}{\alpha_2 + \beta_2\mu_n}\bigl|y_n(0)\bigr|^2 - (Ly_n, y_n) = 0, \tag{20}$$

где

$$\Phi(y_n) \equiv (Ly_n, y_n) = \int\limits_0^\infty \bigl(|y_n'|^2 + q(x)|y_n|^2\bigr)dx, \quad (y_n, y_n) = 1.$$

Уравнение (20) имеет по крайней мере один вещественный корень, а единственный вещественный корень функции $E(\lambda)$ может быть лишь нулем. Поэтому из (20) получаем

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_2}|y_n(0)|^2 = -\Phi(y_n).$$

Так как $\alpha_1\alpha_2 > 0$, имеем

$$\Phi(y_n) < 0, \quad n = 1, 2, \ldots. \tag{21}$$

Числа μ_k, $k = 1, 2, \ldots$, попарно различны. Из асимптотической формулы

$$y_n(x) = e^{i\mu_n x}\bigl[1 + o(1)\bigr], \quad x \to \infty,$$

получаем, что система функций $\{y_n(x)\}$ линейно независима (см. [4, с. 445]). Таким образом, используя определение области задания функционала Φ, заключаем, что существует бесконечномерное линейное многообразие, на котором выполнено неравенство (21).

Теперь построим последовательность функций $z_j(x) = a_j y_j(x) + b_j y_{j+1}(x)$, $j = 1, 2, \ldots$, где a_j и b_j можно выбрать так, чтобы выполнялось условие $z_j(0) = 0$. Покажем, что функции $z_j(x)$ линейно независимы. Таким образом, выполняются соотношения

$$-z_n'' + q(x)z_n = \lambda_n z_n, \tag{22}$$

$$z_n(0) = 0. \tag{23}$$

Рассмотрим оператор L_0 в пространстве $L_2(0, \infty)$, действующий по формуле

$$L_0 y = -y'' + q(x)y;$$

его область определения —

$$D(L_0) \equiv \Big\{ y(x) \;\Big|\; y'(x) \in AC[0,\infty),\ -y'' + q(x)y \in L_2(0,\infty),\ y(0) = 0 \Big\}.$$

Из (22) и (23) следует, что $z_n(x) \in D(L_0)$ и $(L_0 z_n, z_n) < 0$. Таким образом, оператор L_0 имеет лишь отрицательные собственные значения, а их число бесконечно. Однако в силу условия (3) это невозможно (см. [15]). Таким образом, получили противоречие, так что функция $E(\lambda)$ может иметь лишь конечное число нулей в верхней полуплоскости $\operatorname{Im}\lambda > 0$. Аналогично [15, Lemma 3.1.3] получаем, что функция $\lambda\big[E(\lambda)\big]^{-1}$ ограничена на полусфере $\big\{\lambda : |\lambda| \leqslant \rho,\ \operatorname{Im}\lambda \geqslant 0\big\}$. □

Следствие 1. *Функции $E(\lambda)$ и $E_1(\lambda)$ имеют одинаковое число комплексно сопряженных нулей.*

Доказательство. Согласно лемме 2 функция $E(\lambda)$ в верхней полуплоскости $\operatorname{Im}\lambda > 0$ имеет конечное число нулей λ_j, $j = 1, 2, \ldots, n$. Из свойств

$$\overline{e(0,\lambda_j)} = e(0, -\overline{\lambda}_j), \quad \overline{e'(0,\lambda_j)} = e'(0, -\overline{\lambda}_j)$$

функции $e(x,\lambda)$ получаем

$$\overline{E(\lambda_j)} \equiv \big(\alpha_2 + \beta_2\overline{\lambda_j}\big)e'(0,-\overline{\lambda}_j) - \big(\alpha_1 + \beta_1\overline{\lambda}_j\big)e(0,-\overline{\lambda}_j) = E_1\big(\overline{\lambda}_j\big)$$

или

$$E_1\big(\overline{\lambda}_j\big) = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Следовательно, функции $E(\lambda)$ and $E_1(\lambda)$ имеют одинаковое число нулей и эти нули комплексно сопряжены. □

3. Обратная задача. Функция $E(\lambda)$ аналитична в верхней полуплоскости $\operatorname{Im}\lambda > 0$. Имеют место следующие асимптотические формулы:

$$E(\lambda) = \lambda^2 \left\{ i\beta_2 + O\left(\frac{1}{\lambda}\right) \right\}, \quad E_1(\lambda) = \lambda^2 \left\{ -i\beta_2 + O\left(\frac{1}{\lambda}\right) \right\}, \quad |\lambda| \to \infty. \tag{24}$$

Из соотношений (24) и (14) при $\operatorname{Im}\lambda \geqslant 0$ и $|\lambda| \to \infty$ получаем

$$S(\lambda) = -1 + O\left(\frac{1}{\lambda}\right), \quad S(\lambda) + 1 \in L_2(-\infty, +\infty),$$

так что функция

$$F_s(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \big(-1 - S(\lambda)\big) e^{i\lambda y} d\lambda \tag{25}$$

также принадлежит классу $L_2(-\infty, +\infty)$.

Используя результаты п. 2, получим основное уравнение обратной задачи рассеяния для краевой задачи (1)–(3).

Теорема 1. *Для каждого фиксированного $x \geqslant 0$ ядро $K(x,t)$ интегрального представления* (4) *удовлетворяет уравнению*

$$F(x+\xi) + K(x,\xi) + \int\limits_x^{\infty} K(x,t)F(t+\xi)dt = 0, \quad x < \xi < \infty, \tag{26}$$

где

$$F(x) = \sum_{j=1}^{n} f_j(x) + F_s(x), \quad F_s(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \big[-1 - S(\lambda)\big] e^{i\lambda x} d\lambda, \tag{27}$$

$$f_j(x) = i \operatorname{Res}_{\lambda=\lambda_j} \frac{\widehat{E}(\lambda)}{E(\lambda)} e^{i\lambda x}. \tag{28}$$

Доказательство. Чтобы получить основное уравнение для краевой задачи (1)–(3), воспользуемся уравнением (12) из леммы 1. Подставляя (4) в (12), получим

$$\frac{2i\lambda\omega(x,\lambda)}{E\,(\lambda)}-e^{i\lambda x}-e^{-i\lambda x}=\big[-1-S(\lambda)\big]\left\{e^{i\lambda x}+\int\limits_x^\infty K(x,t)e^{i\lambda t}dt\right\}+\int\limits_x^\infty K(x,t)e^{-i\lambda t}dt+\int\limits_x^\infty K(x,t)e^{i\lambda t}dt.$$

Умножим обе части последнего соотношения на $e^{i\lambda\xi}/2\pi$, $\xi>x$, и проинтегрируем по λ от $-\infty$ до $+\infty$:

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}2w(x,\lambda)\left[\frac{i\lambda}{E(\lambda)}-\frac{1}{\lambda\beta_2}\right]e^{i\lambda\xi}d\lambda+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}2\left[\frac{w(x,\lambda)}{\lambda\beta_2}-\cos\lambda x\right]e^{i\lambda\xi}d\lambda=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\big[-1-S(\lambda)\big]e^{i\lambda(x+\xi)}d\lambda+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left\{\big[-1-S(\lambda)\big]\int\limits_x^\infty K(x,t)e^{i\lambda(x+\xi)}dt\right\}d\lambda+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\int\limits_x^\infty K(x,t)e^{-i\lambda t}dt\right)d\lambda. \quad (29)$$

Поскольку $K(x,t)=0$ для $x>t$, в правой части (29) получим

$$F_s(x+\xi)+K(x,\xi)+\int\limits_x^\infty K(x,t)F_s(t+\xi)dt,$$

где

$$F_s(x)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\big[-1-S(\lambda)\big]e^{i\lambda x}d\lambda. \quad (30)$$

Подставляя (17) в левую часть (29), получим

$$i\sum_{\operatorname{Im}\lambda>0}\operatorname{Res}_{\lambda=\lambda_j}\left[\hat e(x,\lambda)-\frac{\hat E(\lambda)}{E(\lambda)}e(x,\lambda)-\frac{2i}{\lambda\beta_2}w(x,\lambda)\right]e^{i\lambda\xi}.$$

Ясно, что при $\operatorname{Im}\lambda>0$ функция $\hat e(x,\lambda)$ голоморфна, $w(x,\lambda)$ — целая функция переменной λ. Согласно лемме 2 и (24) получим

$$-\sum_{j=1}^{n}f_j(x+\xi)-\int\limits_x^\infty K(x,t)\sum_{j=1}^{n}f_j(t+\xi)dt, \quad (31)$$

где функция $f_j(x)$ определена формулой (11). Второй интеграл в (29) равен нулю в силу свойства решения $w(x,\lambda)$.

Следовательно, учитывая (30) и (31), при $\xi>x$ из (29) получаем соотношение

$$-\sum_{j=1}^{n}f_j(x+\xi)-\int\limits_x^\infty K(x,t)\sum_{j=1}^{n}f_j(t+\xi)dt=F_s(x+\xi)+K(x,\xi)+\int\limits_x^\infty K(x,t)F_s(t+\xi)dt.$$

Окончательно получим фундаментальное уравнение (26), где $F(x)$, $F_s(x)$ и $f_j(x)$ определены формулами (28). Теорема доказана. $\square$

Интегральное уравнение (26) называется *уравнением Гельфанда—Левитана—Марченко* для краевой задачи (1)–(3).

4. Теорема единственности. Выше было показано, что функция $F(x)$ дифференцируема и

$$\int_0^\infty (1+x)\left|F'(x)\right|dx < \infty. \tag{32}$$

Пусть

$$\tau(x) = \int_x^\infty \left|F'(t)\right|dt, \quad \tau_1(x) = \int_x^\infty \tau(t)dt.$$

Очевидно,

$$\left|F(x)\right| \leqslant \tau(x) \tag{33}$$

и $\tau_1(0) < \infty$. Поскольку ядро $K(x,t)$ удовлетворяет условию

$$\left|K(x,t)\right| \leqslant C\sigma\left(\frac{x+t}{2}\right), \quad C > 0,$$

из (33) получаем

$$\int_x^\infty \left|F(t+u)K(x,u)\right|du \leqslant C\tau_1(x), \quad C > 0. \tag{34}$$

Теорема 2. *Уравнение* (26) *имеет единственное решение* $K(x,\cdot) \in L_1(0,\infty)$ *для любого* $x \geqslant 0$.

Доказательство. Для доказательства теоремы достаточно показать, что однородное уравнение

$$\varphi(s) + \int_0^\infty \varphi(u)F(u+s)du = 0 \tag{35}$$

имеет только тривиальное решение. Пусть $z(s)$ — решение интегрального уравнения

$$z(s) + \int_0^s z(t)K(t,s)dt = \varphi(s). \tag{36}$$

Записывая $\varphi(s)$ в (35) и учитывая (26), получаем

$$\begin{aligned} 0 = z(s) + \int_0^s z(t)K(t,s)dt + \int_0^\infty \left[z(u) + \int_0^u z(t)K(t,u)dt\right] F(u+s)du = \\ = z(s) + \int_0^s z(t)\left[K(t,s) + F(t+s) + \int_t^{+\infty} K(t,u)F(u+s)du\right]dt + \\ + \int_s^\infty z(t)\left[F(t+s) + \int_t^\infty K(t,u)F(u+s)du\right]dt = \\ = z(s) + \int_s^\infty z(t)\left[F(t+s) + \int_t^\infty K(t,u)F(u+s)du\right]dt. \end{aligned}$$

Следовательно, $z(t)$ является решением однородного интегрального уравнения типа Вольтерра. В силу (33) и (34) ядро этого интегрального уравнения является быстро убывающей функцией. Таким образом, $z(s) \equiv 0$ и, учитывая (35), получаем $\varphi(s) \equiv 0$. Теорема доказана. □

Предположим, что набор $\left\{\tilde{S}(\lambda),\ -\infty < \lambda < \infty;\ \tilde{\lambda}_k;\ \tilde{P}_k(x)\ k = 1,2,\ldots,n\right\}$ представляет собой данные рассеяния краевой задачи (1), (2), потенциал $\tilde{q}(x)$ которой удовлетворяет условию (3). Тогда справедливо следующее утверждение.

Следствие 2. *Потенциал задачи* (1), (2), *принадлежащий классу* (3), *однозначно определяется данными рассеяния, т.е. если* $S(\lambda) = \tilde{S}(\lambda)$, $-\infty < \lambda < \infty$, $\lambda_k = \tilde{\lambda}_k$ *и* $P_k(x) = \tilde{P}_k(x)$, $k = 1, 2, \ldots, n$, *то* $q(x) = \tilde{q}(x)$ *почти всюду на полупрямой* $[0, \infty)$.

Доказательство. При заданных данных рассеяния для построения функции $F(x)$ мы можем воспользоваться формулами (27) и записать уравнение (26) для неизвестной функции $K(x,t)$. Из теоремы 2 следует, что уравнение (26) имеет единственное решение. Решая это уравнение, найдем функцию $K(x,t)$ и далее при помощи (6) определим потенциал $q(x)$. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Левитан Б. М.* К решению обратной задачи квантовой теории рассеяния// Мат. заметки. — 1975. — *17*, т 4. — С. 611–624.
2. *Лянце В. Э.* Аналог обратной задачи теории рассеяния для несамосопряженного оператора// Мат. сб. — 1967. — *72 (114)*, т 4. — С. 537–557.
3. *Мамедов Х. Р.* Единственность решения обратной задачи теории рассеяния для оператора Штурма—Лиувилля со спектральным параметром в граничном условии// Мат. заметки. — 2003. — *74*, т 1. — С. 142–146.
4. *Наймарк М. А.* Линейные дифференциальные операторы. — М.: Наука, 1969.
5. *Юрко В. А.* Обратная задача для пучков дифференциальных операторов// Мат. сб. — 2000. — *191*, т 10. — С. 137–160.
6. *Chadan K., Sabatier P.* Inverse problems in quantum scattering theory. — Springer-Verlag, 1982.
7. *Chuan F. Y.* Inverse problems for Dirac equations polynomially depending on the spectral parameter// Appl. Anal. — 2015. — *95*, т 6. — С. 1280–1306.
8. *Cohen D. S.* An integral transform associated with boundary conditions containing an eigenvalue parameter// SIAM J. Appl. Math. — 1966. — *14*. — С. 1164–1175.
9. *Çöl A., Mamedov Kh. R.* On an inverse scattering problem for a class of Dirac operators with spectral parameter in the boundary condition// J. Math. Anal. Appl. — 2012. — *393*. — С. 470–478.
10. *Çöl A.* Inverse spectral problem for Dirac operator with discontinuous coefficient and polynomials in boundary condition// Inv. Probl. Sci. Eng. — 2015. — *24*, т 2. — С. 234–246.
11. *Levitan B. M.* Inverse Sturm–Liouville problems. — Utrecht: VNU Science Press BV, 1987.
12. *Mamedov Kh. R.* On the inverse problem for Sturm—Liouville operator with a nonlinear spectral parameter in the boundary condition// J. Korean Math. Soc. — 2009. — *46*. — С. 1243–1254.
13. *Mamedov Kh. R., Çöl A.* On an inverse scattering problem for a class Dirac operator with discontinuous coefficient and nonlinear dependence on the spectral parameter in the boundary condition// Math. Meth. Appl. Sci. — 2012. — *35*, т 14. — С. 1712–1720.
14. *Mamedov Kh. R., Kosar N. P.* Inverse scattering problem for Sturm—Liouville operator with nonlinear dependence on the spectral parameter in the boundary condition// Math. Meth. Appl. Sci. — 2011. — *34*. — С. 231–241.
15. *Marchenko V. A.* Sturm—Liouville operators and their applications. — Basel: Birkhäuser, 1986.
16. *McLaughlin J. R., Polyakov P. L.* On the uniqueness of a spherically symmetric speed of sound from transmission eigenvalues// J. Differ. Equ. — 1994. — *107*. — С. 351–382.
17. *Megrabov A. G.* Forward and inverse problems for hyperbolic, elliptic and mixed type equations. — Boston–Utrecht: VSP, 2003.

Х. Р. Мамедов
Мерсинский университет, Мерсин, Турция
E-mail: hanlar@mersin.edu.tr

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 141 (2017). С. 103–110

УДК 517.928, 517.984.4

ОБ АСИМПТОТИКЕ РЕШЕНИЙ НЕКОТОРЫХ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

© 2017 г. К. А. МИРЗОЕВ, Н. Н. КОНЕЧНАЯ, Т. А. САФОНОВА, Р. Н. ТАГИРОВА

Аннотация. В работе найден главный член асимптотики на бесконечности некоторой фундаментальной системы решений уравнения $2n$-го порядка $l_{2n}[y] = \lambda y$, где выражение l_{2n} является произведением линейных дифференциальных выражений второго порядка, а λ — фиксированное комплексное число. При этом коэффициенты этих дифференциальных выражений второго порядка не обязательно гладкие, а имеют лишь определенный степенной рост на бесконечности. Полученные асимптотические формулы применяются к изучению вопроса об индексе дефекта дифференциальных операторов в случае, когда выражение l_{2n} является симметрическим (формально самосопряженным) дифференциальным выражением.

***Ключевые слова*:** главный член асимптотики, квазипроизводная, произведение квазидифференциальных выражений, дифференциальный оператор, индекс дефекта.

***AMS Subject Classification*:** 34E05, 47E05

1. Введение. Произведение квазидифференциальных выражений. Пусть $I := [1, +\infty)$ и пусть $p(x), q(x), r(x)$ — такие вещественнозначные функции на I, что $p(x) \neq 0$ почти всюду на I, и $p^{-1}(:= 1/p)$, q, r локально интегрируемы по Лебегу на I (т.е. p^{-1}, q, $r \in L^1_{\mathrm{loc}}(I)$). Как известно (см. [6, 7]), эти условия позволяют определить посредством матрицы

$$F = \begin{pmatrix} r & p^{-1} \\ q & -r \end{pmatrix}$$

квазипроизводную $y^{[1]}_F$ локально заданной абсолютно непрерывной на I функции y (т.е. $y \in AC_{\mathrm{loc}}(I)$), полагая

$$y^{[1]}_F := p(y' - ry),$$

и при условии, что $y^{[1]}_F \in AC_{\mathrm{loc}}(I)$, квазидифференциальное выражение, полагая

$$l_F[y](x) := -\Big(\big(y^{[1]}_F\big)' + ry^{[1]}_F - qy\Big)(x), \quad x \in I.$$

Таким образом, выражение l_F имеет вид

$$l_F[y](x) = \Big(-\big(p(y' - ry)\big)' - rp(y' - ry) + qy\Big)(x), \quad x \in I, \tag{1}$$

а его область определения $\mathcal{D}(l_F)$ есть множество всех таких функций y, что $y \in AC_{\mathrm{loc}}(I)$ и $y^{[1]}_F \in AC_{\mathrm{loc}}(I)$. При $y \in \mathcal{D}(l_F)$ функция $l_F[y] \in L^1_{\mathrm{loc}}(I)$ определяется почти всюду по формуле (1).

Пусть $p_0(x)$ и $q_0(x)$ — такие вещественнозначные функции на I, что p_0, p_0^{-1}, $q_0^2 p_0^{-1} \in L^1_{\mathrm{loc}}(I)$. Положив $p = p_0$, $q = -q_0^2 p_0^{-1}$ и $r = q_0 p_0^{-1}$ в матрице F, легко установить, что квазипроизводная $y^{[1]}_F$ и квазидифференциальное выражение $l_F[y]$ принимают вид

$$y^{[1]}_F = p_0 y' - q_0 y, \quad l_F[y] = -(p_0 y')' + q_0' y, \tag{2}$$

Работа К. А. Мирзоева выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект т 14-11-00754). Работа Т. А. Сафоновой выполнена при поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации (грант Президента РФ МК-3941.2015.1) и Российского фонда фундаментальных исследований (проект т 14-01-00349).

где всюду производные понимаются в смысле теории распределений (см. [3]). Таким образом, определение дифференциального выражения второго порядка формулой (1) посредством матрицы F, с одной стороны, позволяет рассматривать дифференциальные выражения с негладкими коэффициентами и даже некоторые дифференциальные выражения с коэффициентами-распределениями. С другой стороны, как будет видно из дальнейшего, такой подход при изучении асимптотического поведения решений соответствующих дифференциальных уравнений второго порядка позволяет требовать лишь «правильное» поведение функции q_0, при этом функция q_0' может и сильно осциллировать.

Пусть теперь функции $p_1, p_2, \dots, p_n, q_1, q_2, \dots, q_n, r_1, r_2, \dots, r_n$ удовлетворяют тем же условиям, что и функции $p(x), q(x)$ и $r(x)$, и пусть

$$F_i = \begin{pmatrix} r_i & p_i^{-1} \\ q_i & -r_i \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Символом $l_{F_i}[y]$ обозначим квазидифференциальное выражение второго порядка, построенное по матрице F_i так же, как квазидифференциальное выражение l_F построено по матрице F. Отметим, что выражения $l_{F_i}[y]$ вычисляются по формуле (1) с заменой функций p, q и r на функции p_i, q_i и r_i соответственно.

Рассмотрим далее матрицу

$$\mathcal{F} = \begin{pmatrix} F_1 & M & O & O & \dots & O \\ O & F_2 & M & O & \dots & O \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & O & O & \dots & M \\ O & O & O & O & \dots & F_n \end{pmatrix},$$

где O — нулевая квадратная матрица второго порядка, а M — квадратная матрица того же порядка, все элементы которой равны нулю, кроме элемента в левом нижнем углу, равного 1. Следуя общепринятой процедуре (см. [7]) при фиксированном $k \in \{0, 1, \dots, 2n-1\}$, определим квазипроизводные $y_{\mathcal{F}}^{[k]}$ заданной функции y, полагая, что $y_{\mathcal{F}}^{[0]} := y$, а функции $y_{\mathcal{F}}^{[j]}$ уже определены и являются локально абсолютно непрерывными на I при $j = 0, 1, \dots, k-1$. Из способа построения этих квазипроизводных и квазидифференциального выражения по матрице $\mathcal{F}$ следует, что

$$\begin{aligned}
y_{\mathcal{F}}^{[1]} &:= p_1\Big(\big(y_{\mathcal{F}}^{[0]}\big)' - r_1 y_{\mathcal{F}}^{[0]}\Big) = y_{F_1}^{[1]},\\
y_{\mathcal{F}}^{[2]} &:= \Big(y_{\mathcal{F}}^{[1]}\Big)' + r_1 y_{\mathcal{F}}^{[1]} - q_1 y_{\mathcal{F}}^{[0]} = -l_{F_1}[y],\\
y_{\mathcal{F}}^{[3]} &:= p_2\Big(\big(y_{\mathcal{F}}^{[2]}\big)' - r_2 y_{\mathcal{F}}^{[2]}\Big) = -\big(l_{F_1}[y]\big)_{F_2}^{[1]},\\
y_{\mathcal{F}}^{[4]} &:= \Big(y_{\mathcal{F}}^{[3]}\Big)' + r_2 y_{\mathcal{F}}^{[3]} - q_2 y_{\mathcal{F}}^{[2]} = -l_{F_2}\big[-l_{F_1}[y]\big] = l_{F_2}\big[l_{F_1}[y]\big],\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
y_{\mathcal{F}}^{[2n-1]} &:= p_n\Big(\big(y_{\mathcal{F}}^{[2n-2]}\big)' - r_n y_{\mathcal{F}}^{[2n-2]}\Big) = (-1)^{n-1}\Big(l_{F_{n-1}}\big[\dots\big[l_{F_2}[l_{F_1}[y]]\big]\dots\big]\Big)_{F_n}^{[1]},\\
l_{\mathcal{F}}[y] &:= (-1)^n\Big(\big(y_{\mathcal{F}}^{[2n-1]}\big)' + r_n y_{\mathcal{F}}^{[2n-1]} - q_n y_{\mathcal{F}}^{[2n-2]}\Big) = l_{F_n}\big[\dots\big[l_{F_2}[l_{F_1}[y]]\big]\dots\big].
\end{aligned}$$

Таким образом, для квазидифференциального выражения $l_{\mathcal{F}}[y]$, порожденного матрицей $\mathcal{F}$, справедливо равенство

$$l_{\mathcal{F}}[y] = l_{F_n}\Big[\dots\big[l_{F_2}[l_{F_1}[y]]\big]\dots\Big], \tag{3}$$

а область определения $\mathcal{D}(l_{\mathcal{F}})$ этого выражения

$$\mathcal{D}(l_{\mathcal{F}}) = \Big\{y \;\Big|\; y \in \mathcal{D}(l_{F_1}),\ l_{F_1}[y] \in \mathcal{D}(l_{F_2}),\ l_{F_2}[l_{F_1}[y]] \in \mathcal{D}(l_{F_3}),\ \dots,\\ l_{F_{n-1}}\Big[\dots\big[l_{F_2}[l_{F_1}[y]]\big]\dots\Big] \in \mathcal{D}(l_{F_n})\Big\}.$$

При определении произведения квазидифференциальных выражений мы следовали работе [6].

В настоящей работе найден главный член асимптотики на бесконечности некоторой фундаментальной системы решений уравнения

$$l_{\mathcal{F}}[y] = \lambda y, \quad \lambda \in C, \tag{4}$$

в случае, когда функции p_i^{-1}, q_i, r_i имеют вид

$$p_i^{-1} = x^{-2-\nu_i}\left(\frac{1}{a_{i1}} + r_{i1}(x)\right), \quad q_i = x^{\nu_i}\big(a_{i2} + r_{i2}(x)\big), \quad r_i = x^{-1}\big(a_{i3} + r_{i3}(x)\big), \quad i = 1, 2, \dots, n, \tag{5}$$

где ν_i, a_{i1}, a_{i2} и a_{i3} — вещественные числа, причем $\nu_i > 0$ и $a_{i1} \neq 0$, а $r_{i1}(x)$, $r_{i2}(x)$ и $r_{i3}(x)$ — такие вещественные функции на I, что при некотором целом неотрицательном r, которое будет определено позже,

$$\int\limits_1^\infty \frac{(\ln x)^r}{x}\big|r_{ij}(x)\big|dx < \infty, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad j = 1, 2, 3. \tag{6}$$

Особо отметим, что условия p_i^{-1}, q_i, $r_i \in L^1_{\mathrm{loc}}(I)$, (5) и (6), обеспечивающие справедливость полученных в п. 2 настоящей работы асимптотических формул, не связаны с гладкостью коэффициентов выражения $l_{\mathcal{F}}[y]$.

Мы также изучаем вопрос о возможности дифференцирования полученных асимптотических формул и их применении к вопросу об индексе дефекта дифференциальных операторов в случае, когда квазидифференциальное выражение $l_{\mathcal{F}}[y]$ является симметрическим (формально самосопряженным).

Отметим, что в [1] были получены асимптотические формулы для фундаментальной системы решений уравнения вида (4) в случае, когда левая часть этого уравнения имеет дивергентную форму и является симметрическим квазидифференциальным выражением. Там же обсуждаются вопросы, связанные с историей рассматриваемой здесь задачи. Отметим также работу [4], в которой вкратце обсуждается метод, позволяющий получить асимптотические формулы для решений уравнений вида (4) в случае, когда выражение $l_{\mathcal{F}}[y]$ представляется как произведение двух квазидифференциальных выражений произвольного порядка.

2. Главный член асимптотики решений на бесконечности. Нам понадобится следующая лемма, доказанная в [8] (см. также [2, гл. III, задача 35, с. 120]).

Лемма 1. *Рассмотрим систему дифференциальных уравнений*

$$U' = (A + R(t))U, \tag{7}$$

где матрица A постоянна, жорданова форма матрицы A имеет жордановы клетки J_k, $k \geqslant 1$, и максимальное число строк для всех клеток J_k, $k \geqslant 1$, равно $r+1$. Предположим, что

$$\int\limits_1^\infty t^r \|R(t)\| dt < \infty. \tag{8}$$

Пусть z_j — характеристический корень A и пусть уравнение $y' = Ay$ имеет решения вида

$$e^{z_j t} t^k c + O(e^{z_j t} t^{k-1}),$$

где c — постоянный вектор. Тогда уравнение (7) имеет такое решение ϕ, что

$$\phi(t) = e^{z_j t} t^k (c + o(1)) \quad \text{при} \to +\infty.$$

Уравнение (4) равносильно системе дифференциальных уравнений первого порядка

$$\boldsymbol{y}' = (\mathcal{F} - \Lambda)\boldsymbol{y}, \tag{9}$$

где $\boldsymbol{y} = \left(y_{\mathcal{F}}^{[0]},\ y_{\mathcal{F}}^{[1]},\ y_{\mathcal{F}}^{[2]},\ \dots,\ y_{\mathcal{F}}^{[2n-1]}\right)^t$ (здесь и далее t — символ транспонирования), а Λ — квадратная матрица порядка $2n$, все элементы которой равны нулю, кроме элемента в левом нижнем углу, равного λ. При этом равносильность уравнений понимается в том смысле, что если функция y

является решением (4), то вектор-функция $\boldsymbol{y} = \left(y_{\mathcal{F}}^{[0]},\ y_{\mathcal{F}}^{[1]},\ y_{\mathcal{F}}^{[2]},\ \ldots,\ y_{\mathcal{F}}^{[2n-1]}\right)^t$ является решением системы (9), и наоборот, если вектор-функция $\boldsymbol{y}$ — решение системы, то первая компонента $y = y_{\mathcal{F}}^{[0]}$ вектор-функции $\boldsymbol{y}$ является решением уравнения (4).

Далее, положив $\nu_0 := 0$, определим элементы d_i, $i = 1, 2, \ldots, 2n$, диагональной матрицы $D = \operatorname{diag}(d_1, d_2, \ldots, d_{2n})$ формулами

$$d_{2k-1} = \exp\left\{\left(\sum_{s=0}^{k-1}\nu_s - \frac{1}{2}\right)\ln x\right\}, \quad d_{2k} = \exp\left\{\left(\sum_{s=1}^{k}\nu_s + \frac{1}{2}\right)\ln x\right\}, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Сделаем замену $\boldsymbol{y} = DY$ в системе (9), где Y — новая неизвестная $2n$-компонентная вектор-функция. В результате система (9) преобразуется к виду

$$xY' = (A + B(x))Y, \tag{10}$$

где числовая матрица A и матрица-функция $B(x)$ определяются равенствами

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & M & O & O & \ldots & O \\ O & A_2 & M & O & \ldots & O \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & O & O & \ldots & M \\ O & O & O & O & \ldots & A_n \end{pmatrix}, \quad B(x) = \begin{pmatrix} B_1 & O & O & \ldots & O & O \\ O & B_2 & O & \ldots & O & O \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ O & O & O & \ldots & B_{n-1} & O \\ \widetilde{\Lambda} & O & O & \ldots & O & B_n \end{pmatrix}.$$

Здесь матрицы A_i и B_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, имеют вид

$$A_i = \begin{pmatrix} a_{i3} - \sum\limits_{s=0}^{i-1}\nu_s + \dfrac{1}{2} & a_{i1}^{-1} \\ a_{i2} & -a_{i3} - \sum\limits_{s=1}^{i}\nu_s - \dfrac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad B_i = \begin{pmatrix} r_{i3}(x) & r_{i1}(x) \\ r_{i2}(x) & -r_{i3}(x) \end{pmatrix},$$

$\widetilde{\Lambda}$ -— матрица второго порядка, все элементы которой равны нулю, кроме элемента в левом нижнем углу, равного $\dfrac{-\lambda}{x^{\nu_1+\ldots+\nu_n}}$, а матрица M была определена выше. Из структуры матрицы A видно, что ее собственное значение определенной кратности является корнем многочлена

$$\mathfrak{F}_{2n}(z) = (-1)^n\prod_{i=1}^{n}\left(\left(a_{i3} + \frac{1}{2} - \sum_{s=0}^{i-1}\nu_s - z\right)\left(a_{i3} + \frac{1}{2} + \sum_{s=1}^{i}\nu_s + z\right) + \frac{a_{i2}}{a_{i1}}\right)$$

той же кратности. Заметив это, нетрудно доказать следующую теорему.

Теорема 1. *Пусть числа a_{ij}, ν_i и функции $r_{ij}(x)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $j = 1, 2, 3$, таковы, что выполняются условия (5) и (6). Предположим, что $z_1, \ldots, z_q, z_{q+1}, \ldots, z_{q+j}$ — попарно различные корни многочлена $\mathfrak{F}_{2n}(z)$, причем $z_1, \ldots, z_q$ — однократные корни, а при $1 \leqslant p \leqslant j$ кратность корня z_{q+p} равна r_p. Тогда уравнение (4) имеет такую фундаментальную систему решений $y_k(x)$, что при $x \to +\infty$*

$$y_k(x) = c_k x^{z_k - 1/2}(1 + o(1)), \quad k = 1, \ldots, q, \tag{11}$$

и при $k = q, q + r_1, \ldots, q + r_1 + \ldots + r_{j-1}$

$$y_{k+i}(x) = c_{k+i}x^{z_{q+p}-1/2}(\ln x)^i(1 + o(1)), \quad i = 0, 1, \ldots, r_p - 1, \quad \text{если } k = q + r_1 + \ldots + r_{p-1}, \tag{12}$$

где c_k, c_{k+i} — некоторые ненулевые постоянные.

Доказательство. Структура матрицы A такова, что собственный вектор, соответствующий какому-либо собственному значению (т.е. корню многочлена $\mathfrak{F}_{2n}(z)$), однозначно определяется заданием своей первой координаты. Таким образом, геометрическая кратность любого собственного значения матрицы A равна единице, т.е. каждому собственному значению матрицы A соответствует только одна жорданова клетка в ее канонической форме. Поэтому размерность жордановой клетки в канонической форме матрицы A наибольшей размерности совпадает с кратностью собственного значения матрицы A наибольшей кратности. Пусть максимальная размерность жордановой клетки, встречающейся в канонической форме матрицы A, как и в лемме 1, равна $r+1$. Таким образом, $r+1$ — это кратность характеристического корня матрицы A наибольшей кратности, т.е. кратность корня многочлена $\mathfrak{F}_{2n}(z)$ наибольшей кратности.

Заменой $x = e^t$ система дифференциальных уравнений (10) приводится к виду (7), где $U(t) = Y(e^t)$ и $R(t) = B(e^t)$. Кроме того, если матрицы A и $B(x)$ удовлетворяют условию (6), то матрица $R(t)$ удовлетворяет условию (8) леммы 1.

Если теперь $z_1, z_2, \ldots, z_q$ — попарно различные простые характеристические корни матрицы A, то система уравнений с постоянными коэффициентами

$$U' = AU(t) \tag{13}$$

имеет решения $e^{z_k t} C_k$, где C_k — собственный вектор, соответствующий собственному значению z_k, $1 \leqslant k \leqslant q$. Применив далее лемму 1, видим, что система (7) имеет решения вида

$$e^{z_k t}(C_k + o(1)), \quad t \to +\infty.$$

Таким образом, сделав обратную замену $t = \ln x$, и учитывая преобразование $\boldsymbol{y} = DY$, получаем, что система (9) имеет решения, представимые в виде

$$x^{z_k} D(C_k + o(1)), \quad x \to +\infty.$$

Следовательно, первая координата этого решения — решение y_k уравнения (4) — представляется в виде (11), причем c_k — первая координата собственного вектора C_k — не равна нулю.

Пусть теперь z_{q+p} — характеристический корень матрицы A кратности r_p. Этому характеристическому корню также соответствует только одна жорданова клетка в каноническом разложении матрицы A, и поэтому размерность этой клетки равна r_p и не превосходит числа $r+1$. Отсюда следует, что система уравнений (13) имеет решения, представимые в виде

$$e^{z_{q+p} t} C_{q+p}, \quad e^{z_{q+p} t} t^k C_{q+p} + O(e^{z_{q+p} t} t^{k-1}), \quad k = 1, 2, \ldots, r_p - 1,$$

где C_{q+p} — собственный вектор, соответствующий собственному значению z_{q+p}. Далее, применяя еще раз лемму 1 и рассуждая так же, как и в случае простого собственного значения, без труда можно установить, что уравнение (4) имеет ровно r_p решений, представимых в виде (12), соответствующих собственному значению z_{q+p}. Остается рассмотреть совокупность решений уравнения (4), представимых в виде (11) и (12), соответствующих всем собственным значениям матрицы A. Эта совокупность, очевидно, образует фундаментальную систему решений этого уравнения. Теорема доказана. □

Замечание 1. Пусть $y(x)$ — произвольное решение уравнения (4), асимптотическое поведение которого определяется теоремой 1. Изложенное выше доказательство этой теоремы позволяет получить главный член асимптотики на бесконечности и некоторых квазипроизводных $y^{[j]}(x)$ функции $y(x)$. Для этого компонента с номером $j+1$ соответствующего собственного вектора должна быть отлична от нуля.

Обозначим символом $\mathcal{L}^2(I)$ пространство классов эквивалентности всех комплекснозначных измеримых функций y, интегрируемых с квадратом модуля по Лебегу на I. Несложные вычисления показывают, что справедливо следующее следствие теоремы 1.

Следствие 1. *Пусть λ — произвольное (вещественное или нет) число, а выражение $l_{\mathcal{F}}$ определено формулой (3), и пусть выполняются условия теоремы 1. Тогда количество линейно независимых решений уравнения (4), принадлежащих пространству $\mathcal{L}^2(I)$, не зависит от числа λ и равно количеству корней многочлена $\mathfrak{F}_{2n}(z)$ (с учетом их кратности), лежащих в области* $\operatorname{Re} z < 0$.

Доказательство. Действительно, функции, для которых справедливы асимптотические формулы (11) или (12), принадлежат пространству $\mathcal{L}^2(I)$ тогда и только тогда, когда

$$\int_1^{+\infty} \left|x^{2z-1}\right| (\ln x)^{2k}\, dx < \infty. \tag{14}$$

Так как
$$\left|x^{2z-1}\right| = x^{2\operatorname{Re} z-1},$$
то условие (14) выполняется тогда и только тогда, когда $\operatorname{Re} z < 0$ и не зависит от k. $\square$

3. Симметрические дифференциальные выражения и операторы.

3.1. Минимальный оператор. Дефектные числа. В этом разделе мы предполагаем, что выражение $l_{\mathcal{F}}[y]$ является симметрическим (формально самосопряженным) квазидифференциальным выражением. В таком случае, следуя хорошо известной процедуре (см., например, [5, гл. V, § 17] или [7, Appendix A]), определим минимальный замкнутый симметрический оператор L_0, порожденный выражением $l_{\mathcal{F}}[y]$ в гильбертовом пространстве $\mathcal{L}^2(I)$. Обозначим через D_0' множество всех таких комплекснозначных финитных на I функций из $\mathcal{D}(l_{\mathcal{F}})$, что $l_{\mathcal{F}}[y] \in \mathcal{L}^2(I)$. В [7, с. 133] установлено, что множество D_0' является всюду плотным в $\mathcal{L}^2(I)$, а формула $L_0'y = l_{\mathcal{F}}[y]$ определяет на множестве D_0' симметрический (незамкнутый) оператор в $\mathcal{L}^2(I)$ с областью определения D_0'. Символами L_0 и D_0 обозначим замыкание этого оператора и его область определения соответственно.

Пусть, как и раньше, λ — комплексное число и $\operatorname{Im}\lambda \neq 0$. Через R_λ и $R_{\overline{\lambda}}$ обозначим области значений операторов $L_0 - \lambda\mathcal{I}$ и $L_0 - \overline{\lambda}\mathcal{I}$ соответственно, а через $\mathcal{N}_\lambda$ и $\mathcal{N}_{\overline{\lambda}}$ — их ортогональные дополнения в пространстве $\mathcal{L}^2(I)$. Пространства $\mathcal{N}_\lambda$ и $\mathcal{N}_{\overline{\lambda}}$ называются *дефектными подпространствами*, соответствующими числам λ и $\overline{\lambda}$. Их размерности $\dim\mathcal{N}_\lambda$ и $\dim\mathcal{N}_{\overline{\lambda}}$ одинаковы в верхней и нижней полуплоскостях. Введем обозначения
$$n_+ = \dim\mathcal{N}_\lambda, \quad n_- = \dim\mathcal{N}_{\overline{\lambda}}$$
при $\operatorname{Im}\lambda > 0$. Пару (n_+, n_-) называют индексом дефекта оператора L_0. Известно (см., например, [5, гл. IV, § 14]), что числа n_+ и n_- совпадают с максимальным числом линейно независимых решений уравнения (4), принадлежащих пространству $\mathcal{L}^2(I)$, когда параметр λ берется из верхней ($\operatorname{Im}\lambda > 0$) или нижней ($\operatorname{Im}\lambda < 0$) полуплоскости соответственно, и удовлетворяют двойному неравенству $n \leqslant n_+, n_- \leqslant 2n$. При этом $n_+ = 2n$ тогда и только тогда, когда $n_- = 2n$. В случае $n_+ = n_- = 2n$ иногда говорят, что для выражения $l_{\mathcal{F}}[y]$ (оператора L_0) имеет место случай предельного круга, и он реализуется тогда и только тогда, когда все решения уравнения (4) при всех $\lambda \in C$ принадлежат пространству $\mathcal{L}^2_n(I)$. Если же $n_+ = n_- = n$, то говорят, что для выражения $l_{\mathcal{F}}[y]$ (оператора L_0) имеет место случай предельной точки.

3.2. Следствия теоремы 1. Примеры. Асимптотические формулы, полученные в теореме 1, можно применить к вопросам об индексе дефекта минимального симметрического оператора L_0 и о характере спектра его самосопряженных расширений.

Сначала рассмотрим случай, когда матрица $\mathcal{F}$ такова, что порожденное ею квазидифференциальное выражение имеет вид
$$l_{\mathcal{F}} = l_{F_1} \ldots l_{F_{k-1}} l_{F_k} l_{F_{k-1}} \ldots l_{F_1}. \tag{15}$$
В этом случае выражение $l_{\mathcal{F}}$ является симметрическим и, следовательно, порождает минимальный замкнутый симметрический оператор L_0 в гильбертовом пространстве $\mathcal{L}^2(I)$, а соответствующий многочлен $\mathfrak{F}_{2n}(z)$ определяется равенством
$$\begin{aligned}\mathfrak{F}_{2n}(z) = (-1)\prod_{i=1}^{k}\left[\left(a_{i3} + \frac{1}{2} - \sum_{s=0}^{i-1}\nu_s - z\right)\left(a_{i3} + \frac{1}{2} + \sum_{s=1}^{i}\nu_s + z\right) + \frac{a_{i2}}{a_{i1}}\right] \times \\ \times \prod_{i=1}^{k-1}\left[\left(a_{i3} + \frac{1}{2} - \nu_1 - \nu_k - 2\sum_{s=2}^{k-1}\nu_s + \sum_{s=2}^{i+1}\nu_s - \nu_{i+1} - z\right) \times \right. \\ \left. \times \left(a_{i3} + \frac{1}{2} + \nu_k + 2\sum_{s=1}^{k-1}\nu_s - \sum_{s=0}^{i-1}\nu_s + z\right) + \frac{a_{i2}}{a_{i1}}\right].\end{aligned} \tag{16}$$

Далее, применяя следствие 1, получаем, что справедливо следующее утверждение.

Следствие 2. *Пусть выполняются условия теоремы* 1. *Тогда дефектные числа* n_+ *и* n_- *оператора* L_0 *равны между собой и определяются как число корней многочлена* (16) (*с учетом их кратности*), *лежащих в области* $\operatorname{Re} z < 0$.

Теперь рассмотрим случай

$$l_{\mathcal{F}} = l_F^n, \tag{17}$$

где квазидифференциальное выражение l_F определено формулой (1). При этом мы предполагаем, что функции $p(x)$, $q(x)$ и $r(x)$ имеют вид

$$p^{-1}(x) = x^{-2-\nu}\left(\frac{1}{a} + r_1(x)\right), \quad q(x) = x^{\nu}\big(b + r_2(x)\big), \quad r(x) = x^{-1}\big(c + r_3(x)\big), \tag{18}$$

где $\nu > 0$, $a \neq 0$, b и c — вещественные числа, а $r_1(x)$, $r_2(x)$ и $r_3(x)$ — такие вещественные функции на I, что при некотором целом неотрицательном r, определенном выше,

$$\int\limits_1^{\infty} \frac{(\ln x)^r}{x}\big|r_j(x)\big|dx < \infty, \quad j = 1, 2, 3. \tag{19}$$

Для минимального замкнутого симметрического оператора L_0, порожденного этим выражением в гильбертовом пространстве $\mathcal{L}^2(I)$, справедливо следующее утверждение.

Следствие 3. *Пусть выполняются условия* (18) *и* (19). *Тогда дефектные числа* n_+ *и* n_- *оператора* L_0, *порожденного выражением* (17), *равны между собой и определяются как число корней многочлена*

$$\mathfrak{F}_{2n}(z) = (-1)^n \prod_{i=0}^{n-1}\left(\left(c + \frac{1}{2} - i\nu - z\right)\left(c + \frac{1}{2} + (i+1)\nu + z\right) + \frac{b}{a}\right) \tag{20}$$

(*с учетом их кратности*), *лежащих в области* $\operatorname{Re} z < 0$.

Замечание 2. Пусть выражение l_F определено формулой (2) и пусть

$$p_0^{-1}(x) = x^{-2-\nu}\left(\frac{1}{\alpha} + s_1(x)\right), \quad q_0(x) = x^{\nu+1}\big(\beta + s_2(x)\big),$$

где $\alpha \neq 0$ и β — вещественные числа, а $s_1(x)$ и $s_2(x)$ — вещественные функции. Предположим далее, что числа α, β и функции $s_1(x)$, $s_2(x)$ таковы, что функции p, q, r, определенные по формулам $p = p_0$, $q = -q_0^2p_0^{-1}$ и $r = q_0p_0^{-1}$, удовлетворяют условиям (18) и (19). Тогда для выражения $l_{\mathcal{F}} = l_F^n$, в частности, при $n = 2$, справедливо следствие 3. С другой стороны, элементарные вычисления показывают, что

$$l_{\mathcal{F}}[y] = l_F^2[y] = \big(p_0^2y''\big)'' - \Big(\big(2p_0q_0' - p_0p_0''\big)y'\Big)' + \Big(\big(q_0'\big)^2 - \big(p_0q_0''\big)'\Big)y.$$

Таким образом, следствие 3 позволяет определить индекс дефекта оператора, порожденного этим дифференциальным выражением, накладывая условия только на асимптотическое поведение на бесконечности функций p_0 и q_0. При этом коэффициенты $p_0\big(2q_0' - p_0''\big)$ и $\big(q_0'\big)^2 - \big(p_0q_0''\big)'$ этого выражения, очевидно, могут сильно осциллировать.

Замечание 3. Несложно установить, что спектры любых самосопряженных расширений операторов, порожденных выражениями (15) и (17) в гильбертовом пространстве $\mathcal{L}^2(I)$, являются дискретными.

Замечание 4. Число корней многочлена (20), лежащих в левой полуплоскости ($\operatorname{Re} z < 0$), за счет выбора постоянных a, b, c и ν может быть сделано любым из чисел от n до $2n$ включительно. Этим путем легко построить примеры произвольного (допустимого) индекса дефекта для оператора L_0. В частности, полагая $a = 1, b = 0$ и $c = -1$, находим, что

$$z_k = -\frac{1}{2} - (k-1), \quad z_{n+k} = k\nu - \frac{1}{2}, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Из этих формул следует, что индекс дефекта оператора L_0 равен (n,n), если $\nu > 1/2$, $(2n,2n)$, если $0 < \nu < 1/2n$, и при $k = 1, 2, \dots, n-1$ равен $(2n-k, 2n-k)$, если $\dfrac{1}{2(n-k+1)} < \nu < \dfrac{1}{2(n-k)}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Долгих И. Н., Мирзоев К. А.* Индексы дефекта и спектр самосопряженных расширений некоторых классов дифференциальных операторов// Мат. сб. — 2006. — *197*, т 4. — С. 53–74.
2. *Коддингтон Э. А., Левинсон Н.* Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: ИЛ, 1958.
3. *Мирзоев К. А.* Операторы Штурма—Лиувилля// Тр. Моск. мат. о-ва. — 2014. — *75*, т 2. — С. 335–359.
4. *Мирзоев К. А., Конечная Н. Н.* Об асимптотике решений одного класса линейных дифференциальных уравнений с негладкими коэффициентами// Мат. заметки. — 2016. — *100*, т 2. — С. 312–317.
5. *Наймарк М. А.* Линейные дифференциальные операторы. — М.: Наука, 1969.
6. *Everitt W. N.* Linear ordinary quasi-differential expressions// Fourth Int. Symp. on Differential Equations and Differential Geometry, Beijing, 1986. — С. 1–28.
7. *Everitt W. N., Marcus L.* Boundary Value Problems and Sympletic Algebra for Ordinary Differential and Quasi-Differentrial Operators/ Math. Surv. Monogr. — Am. Math. Soc., 1999. — *61*.
8. *Faedo S.* Proprieta asintotiche delle soluzioni dei sistemi differenziali lineari// Ann. Mat. Pura Appl. — 1947. — *26*, т 4. — С. 207–215.

К. А. Мирзоев
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
E-mail: mirzoev.karahan@mail.ru

Н. Н. Конечная
Северный (Арктический) федеральный университет им. М. В. Ломоносова, Архангельск
E-mail: n.konechnaya@narfu.ru

Т. А. Сафонова
Северный (Арктический) федеральный университет им. М. В. Ломоносова, Архангельск
E-mail: tanya.strelkova@rambler.ru

Р. Н. Тагирова
Северный (Арктический) федеральный университет имени М.В. Ломоносова
E-mail: tagirova_rena@mail.ru

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 141 (2017). С. 111–133

УДК 517.95

ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ПО ОПРЕДЕЛЕНИЮ НАЧАЛЬНЫХ УСЛОВИЙ В СМЕШАННОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ТЕЛЕГРАФНОГО УРАВНЕНИЯ

© 2017 г. **К. Б. САБИТОВ, А. Р. ЗАЙНУЛЛОВ**

Аннотация. В работе изучаются известные обратные задачи по определению начальных условий для струны и телеграфного уравнения. Установлены критерии единственности. Решения задач построены в виде суммы ряда. При обосновании равномерной сходимости рядов возникает проблема малых знаменателей. Установлены оценки об отделенности от нуля малых знаменателей с соответствующей асимптотикой, которые позволили обосновать сходимость в классе регулярного решения уравнений.

Ключевые слова: телеграфное уравнение, обратные задачи, задача Дирихле, задача со смешанными граничными условиями, критерии единственности, существование, ряд, малые знаменатели.

AMS Subject Classification: 35M10, 35Q60

СОДЕРЖАНИЕ

1. Постановка задач . . . 111
2. Построение решения смешанной задачи для телеграфного уравнения . . . 112
3. Обратная задача по отысканию начальной скорости . . . 113
4. Обратная задача по отысканию начального возмущения . . . 121
5. Построение решения интегральных уравнений Фредгольма первого рода . . . 130
Список литературы . . . 133

1. Постановка задач

Рассмотрим телеграфное уравнение
$$Lu \equiv u_{tt} - u_{xx} + b^2 u = 0 \tag{1.1}$$
в области $Q = \{0 < x < l,\ 0 < t < T\}$, где $b \geqslant 0$, $l > 0$ и $T > 0$ — заданные действительные постоянные, и следующую первую начально-граничную задачу.

Задача 1. Найти функцию $u(x,t)$, удовлетворяющую условиям:
$$u(x,t) \in C^2(Q) \cap C^1(\overline{Q} \backslash \{t = T\}) \cap C(\overline{Q}) \tag{1.2}$$
$$Lu(x,t) \equiv 0, \qquad (x,t) \in Q; \tag{1.3}$$
$$u(0,t) = u(l,t) = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{1.4}$$
$$u(x,0) = \varphi(x), \qquad 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{1.5}$$
$$u_t(x,0) = \psi(x), \qquad 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{1.6}$$
где $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ — заданные достаточно гладкие функции, $\varphi(0) = \varphi(l) = 0$, $\psi(0) = \psi(l) = 0$.

На основе прямой задачи (1.2)–(1.6) рассмотрим следующие обратные задачи по отысканию начальных условий $\varphi(x)$ или $\psi(x)$.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект т 14-01-97003-Поволжье.

ISSN 0233–6723

Задача 2. Найти функции $u(x,t)$ и $\psi(x)$, удовлетворяющие условиям (1.2)–(1.6) и, кроме того, дополнительному условию

$$u(x,d) = h(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \quad d \in (0,T], \tag{1.7}$$

где $h(x)$, $\varphi(x)$ — заданные достаточно гладкие функции.

Задача 3. Найти функции $u(x,t)$ и $\varphi(x)$, удовлетворяющие условиям (1.2)–(1.7), где $h(x)$, $\psi(x)$ — заданные достаточно гладкие функции.

Отметим, что обратные задачи 2 и 3 для уравнения (1.1) при $b = 0$ изучены в [4, с. 140–143] методом интегральных уравнений. Относительно неизвестных функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ в каждой из этих задач получены интегральные уравнения Фредгольма первого рода, однозначная разрешимость которых рассматривается в пространстве $L_2[0,l]$. В случае задачи 2 утверждается, что решение интегрального уравнения относительно искомой функций $\psi(x)$ в $L_2[0,l]$ не будет единственным при любом $d > 0$, а в случае задачи 3 при значениях $d = 2pl/(2k-1)$, где p и k — натуральные числа, доказывается, что соответствующее интегральное уравнение относительно функции $\varphi(x)$ имеет единственное решение в пространстве $L_2[0,l]$.

В данной работе показано, что однозначная разрешимость задач 2 и 3 существенным образом зависит от отношения $d/l = \widetilde{d}$ сторон прямоугольника

$$Q_d = \{(x,t) \mid 0 < x < l,\ 0 < t < d\}$$

и предлагается другой подход исследования этих задач, основанный на построении решения задачи Дирихле и задачи со смешанными граничными условиями для уравнения (1.1) в области Q_d. Установлены критерии единственности решений обратных задач 2 и 3 и доказаны теоремы существования решения обратной задачи 2, когда $\widetilde{d}$ является алгебраическим числом степени $n > 2$ или иррациональным числом с ограниченным множеством элементов при $b = 0$ и когда $\widetilde{d}$ является рациональным числом или алгебраическим числом степени 2 при $b > 0$. В случае обратной задачи 3 доказаны теоремы существования, когда $\widetilde{d}$ является рациональным числом или алгебраическим числом степени $n \geqslant 2$ при $b = 0$ и когда $\widetilde{d}$ является рациональным числом или алгебраическим числом степени 2 при $b > 0$. Когда $\widetilde{d}$ является иррациональным числом с неограниченным множеством элементов и $b = 0$, показано, что решения задач 2 и 3 в виде суммы ряда не существуют.

На основании теорем существования и единственности решений обратных задач 2 и 3 построены в явном виде решения интегральных уравнений Фредгольма первого рода, полученных аналогично работе [4, с. 140].

2. Построение решения смешанной задачи для телеграфного уравнения

Разделяя переменные в уравнении (1.1), т.е. полагая $u(x,t) = X(x)T(t)$, для $X(x)$ получим известную задачу Штурма—Лиувилля:

$$X''(x) + \mu^2 X(x) = 0, \quad 0 < x < l, \quad \mu = \text{const}, \tag{2.1}$$

$$X(0) = X(l) = 0. \tag{2.2}$$

Решение спектральной задачи (2.1)–(2.2) имеет вид

$$X_k(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \mu_k x, \quad \mu_k = \frac{\pi k}{l}, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{2.3}$$

Отметим, что система функций (2.3) ортонормирована, полна и образует ортонормированный базис в пространстве $L_2[0,l]$. Тогда методом разделения переменных (см. [10, 82–88], [6, с. 74–85]) решение задачи (1.2)–(1.7) можно построить в виде суммы ряда Фурье

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) X_k(x), \quad k \in \mathbb{N}, \tag{2.4}$$

где

$$u_k(t) = \varphi_k \cos \lambda_k t + \frac{\psi_k}{\lambda_k} \sin \lambda_k t, \tag{2.5}$$

$$\varphi_k = \int_0^l \varphi(x) X_k(x) dx, \quad \psi_k = \int_0^l \psi(x) X_k(x) dx, \quad \lambda_k = \sqrt{b^2 + \mu_k^2}, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{2.6}$$

Теорема 2.1. *Если $\varphi(x) \in C^3[0,l]$, $\psi(x) \in C^2[0,l]$ и $\varphi(0) = \varphi(l) = 0$, $\varphi''(0) = \varphi''(l) = 0$, $\psi(0) = \psi(l) = 0$, то существует единственное решение $u(x,t)$ задачи* (1.2)–(1.6) *и оно определяется в виде суммы ряда* (2.4); *при этом $u(x,t) \in C^2(\overline{Q})$.*

3. Обратная задача по отысканию начальной скорости

3.1. Критерий единственности. Рассмотрим задачу Дирихле (1.2)–(1.5), (1.7) в области $Q_d = \{0 < x < l,\ 0 < t < d\}$. Отметим, что данная задача исследована в [6, с. 112–118], [7] при $b = 0$. Следуя этим работам, введем функции

$$u_k(t) = \int_0^l u(x,t) X_k(x) dx, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{3.1}$$

На основании (3.1) введем функции

$$v_\varepsilon(t) = u_k^\varepsilon(t) = \int_\varepsilon^{l-\varepsilon} u(x,t) X_k(x) dx, \tag{3.2}$$

где $\varepsilon > 0$ — достаточно малое число. Дифференцируя равенство (3.2) по t два раза при $0 < t < d$ и учитывая уравнение (1.1), получим

$$v_\varepsilon''(t) = \int_\varepsilon^{l-\varepsilon} u_{tt} X_k(x) dx = \int_\varepsilon^{l-\varepsilon} u_{xx} X_k(x) dx. \tag{3.3}$$

Интегрируя по частям два раза в правой части равенства (3.3) и переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$ с учетом условий (1.4), получим уравнение

$$u_k''(t) + \lambda_k^2 u_k(t) = 0, \quad \lambda_k^2 = b^2 + \mu_k^2. \tag{3.4}$$

Общее решение уравнения (3.4) определяется по формуле

$$u_k(t) = a_k \cos \lambda_k t + b_k \sin \lambda_k t, \tag{3.5}$$

где a_k, b_k — произвольные постоянные. Для их определения воспользуемся граничными условиями (1.5) и (1.7):

$$u_k(0) = \int_0^l u(x,0) X_k(x) dx = \int_0^l \varphi(x) X_k(x) dx = \varphi_k, \tag{3.6}$$

$$u_k(d) = \int_0^l u(x,d) X_k(x) dx = \int_0^l h(x) X_k(x) dx = h_k. \tag{3.7}$$

Из общего решения (3.5), учитывая граничные условия (3.7) и (3.6), найдем неизвестные коэффициенты

$$a_k = \varphi_k, \quad b_k = \frac{h_k - \varphi_k \cos \lambda_k d}{\sin \lambda_k d},$$

при условии, что для всех $k \in \mathbb{N}$

$$\delta(k) = \sin \lambda_k d = \sin \pi k \widetilde{d} \widetilde{\lambda}_k \neq 0, \tag{3.8}$$

где $\widetilde{d} = d/l$, $\widetilde{\lambda}_k = \sqrt{1 + (bl/\pi k)^2}$. Таким образом, с учетом найденных значений a_k и b_k формула (3.5) примет вид

$$u_k(t) = \varphi_k \left(\cos\lambda_k t - \frac{\cos\lambda_k d}{\sin\lambda_k d} \sin\lambda_k t \right) + \frac{h_k}{\sin\lambda_k d} \sin\lambda_k t. \tag{3.9}$$

Теперь мы в состоянии доказать теорему единственности решения задачи (1.2)–(1.4), (1.5), (1.7). Пусть $\varphi(x) = h(x) \equiv 0$ и при всех $k \in \mathbb{N}$ выполнены условия (3.8). Тогда все $\varphi_k = h_k \equiv 0$ и из равенств (3.1) и (2.5) при любом $k \in \mathbb{N}$ и $t \in [0, d]$ имеем

$$\int\limits_0^l u(x,t) X_k(x) dx = 0.$$

Отсюда в силу полноты системы $X_k(x)$ в $L_2[0,l]$ следует, что $u(x,t) = 0$ почти всюду на $[0,l]$ при любом $t \in [0,d]$. Поскольку в силу (1.2) функция $u(x,t)$ непрерывна на $\overline{Q}_d$, то $u(x,t) \equiv 0$ в $\overline{Q}_d$.

Пусть теперь при некоторых $\widetilde{d}$ и $k = p \in \mathbb{N}$ нарушено условие (3.8), т.е. $\delta(p) = \sin\pi\widetilde{d}p\widetilde{\lambda}_p = 0$; тогда однородная задача (1.2)–(1.4), (1.5), (1.7) (где $h(x) = \varphi(x) \equiv 0$) имеет нетривиальное решение

$$u_p(x,t) = \sin\lambda_p t X_p(x).$$

Выражение $\delta(k)$ обращается в 0 относительно $\widetilde{d}$ только в том случае, когда

$$\widetilde{d} = \frac{n}{k\widetilde{\lambda}_k}, \quad k, n \in \mathbb{N}. \tag{3.10}$$

Отсюда следует, что если $\widetilde{d}$ принимает значения (3.10), то единственность решения задачи (1.2)–(1.5), (1.7) нарушается. Следовательно, установлен критерий единственности решения задачи Дирихле для уравнения (1.1) при всех $b \in \mathbb{R}$.

Теорема 3.1. *Если существует решение задачи* (1.2)–(1.5), (1.7)*, то оно единственно только в том случае, когда при всех* $k \in \mathbb{N}$ *выполнены условия* (3.8).

Из теоремы 3.1 вытектает следующий критерий единственности решения задачи 2.

Следствие 3.1. *Если существует решение задачи* 2*, то оно единственно только в том случае, когда при всех* $k \in \mathbb{N}$ *выполнены условия* (3.8).

Если при некоторых $\widetilde{d}$ и $k = p \in \mathbb{N}$ выражение $\delta(p) = \sin\pi p\widetilde{d}\,\widetilde{\lambda}_p$ обращается в 0, то однородная задача (1.2)–(1.7) (где $\varphi(x) = h(x) \equiv 0$) имеет ненулевое решение

$$u_p(x,t) = \sin a\mu_p t X_p(x), \quad \psi_p(x) = u_{tp}(x,0) = X_p(x).$$

3.2. Существование решения. Обозначим через $M = \{m_{kn} = n/\widetilde{\lambda}_k k,\ k,n \in \mathbb{N}\}$ счетное множество нулей уравнения $\delta(k) = 0$ относительно $\widetilde{d}$, т.е. если $\widetilde{d} = m_{kn}$ при некоторых k и n, то $\delta(k) = 0$. Поскольку $\widetilde{d}$ — произвольное положительное число, то оно, не будучи элементом счетного множества M, может принимать значения, сколь угодно близкие к нулям $\delta(k)$. Поэтому выражение $\delta(k)$ при таких $\widetilde{d}$ может стать достаточно малым, т.е. возникнет проблема «малых знаменателей» (см. [1,2], [5, с. 347], [6, с. 114]). Чтобы такой ситуации не возникало, нужно показать существование чисел $\widetilde{d}$, при которых выражение $\delta(k)$ отделено от нуля с соответствующей асимптотикой.

Пусть при всех $k \in \mathbb{N}$ выполнены условия (3.8); тогда решение задачи (1.2)–(1.5), (1.7) формально определяется в виде суммы ряда Фурье

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) X_k(x), \tag{3.11}$$

где $u_k(t)$ определяются по формуле (3.9).

Далее рассмотрим отдельно случаи, когда $b = 0$ и $b > 0$.

3.2.1. Существование решения задачи для уравнения струны. Пусть $b = 0$; тогда уравнение (1.1) переходит в уравнение струны. Отметим, что задача (1.2)–(1.5), (1.7) при $b = 0$ исследована в [7] и [6, с. 112–118]. Для удобства читателей и дальнейшего изложения приведем некоторые результаты этих работ.

Из теории цепных дробей известно (см. [11, § 8]), что иррациональное число α можно единственным образом разложить в бесконечную цепную дробь

$$\alpha = [a_0;\ a_1, a_2,\ \ldots];$$

при этом целое число a_0 и натуральные числа $a_1, a_2,\ \ldots$ называются *элементами* числа α. Если множество элементов $a_0, a_2, a_3,\ \ldots$ иррационального числа α неограничено, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется бесконечное множество таких чисел $p, q \in \mathbb{N}$, что

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{\varepsilon}{q^2}. \tag{3.12}$$

Если же множество элементов ограничено, то существует такое положительное число ε_0, что при любых целых n и k, $k > 0$, выполняется неравенство

$$\left|\alpha - \frac{n}{k}\right| \geqslant \frac{\varepsilon_0}{k^2}. \tag{3.13}$$

Известно, что квадратичные иррациональности имеют ограниченные элементы.

Пусть $\widetilde{d}$ — иррациональное число с неограниченным множеством элементов; тогда для него выполняется оценка (3.12), т.е. для любого $\varepsilon > 0$ существует такая последовательность p_m/q_m, где p_m, q_m — взаимно простые числа, что

$$\left|\widetilde{d} - \frac{p_m}{q_m}\right| < \frac{\varepsilon}{q_m^2}. \tag{3.14}$$

Тогда на основании (3.14) имеем

$$\bigl|\sin \widetilde{d}\pi q_m\bigr| = \bigl|\sin(\widetilde{d}\pi q_m - p_m\pi)\bigr| = \left|\sin \pi q_m \left(\widetilde{d} - \frac{p_m}{q_m}\right)\right| \leqslant \pi q_m \left|\widetilde{d} - \frac{p_m}{q_m}\right| < \frac{\pi\varepsilon}{q_m}.$$

Отсюда следует, что для таких $\widetilde{d} > 0$ выражение $\sin \widetilde{d}\pi m$, являющееся знаменателем дроби в правой части равенства (3.9), может быть сделано сколь угодно малым. Поэтому для таких иррациональных чисел $\widetilde{d}$ решение задачи Дирихле в виде суммы ряда (3.11) не существует.

Лемма 3.1. *Пусть $\widetilde{d}$ — такое иррациональное число, что множество его элементов ограничено. Тогда существует такое число $C_0 > 0$, что при всех $k \in \mathbb{N}$ справедлива оценка*

$$|\delta(k)| > \frac{C_0}{k}. \tag{3.15}$$

Лемма 3.2. *Пусть $\widetilde{d}$ — алгебраическое число степени $n \geqslant 2$. Тогда существует такая постоянная $C_0 > 0$, что при всех $k \in \mathbb{N}$ справедливы следующие оценки:*

$$|\delta(k)| \geqslant \frac{C_0}{k}, \qquad \text{когда } n = 2; \tag{3.16}$$

$$|\delta(k)| \geqslant \frac{C_0}{k^{1+\varepsilon}}, \quad \text{когда } n > 2,\ 0 < \varepsilon < 1. \tag{3.17}$$

При помощи лемм 3.1 и 3.2 доказывается следующая теорема.

Теорема 3.2. *Предположим, что выполнено одно из следующих условий:*

(1) *число $\widetilde{d}$ имеет ограниченное множество элементов и $\varphi(x)$, $h(x) \in C^4[0, l]$, $\varphi^{(j)}(0) = \varphi^{(j)}(l) = h^{(j)}(0) = h^{(j)}(l) = 0$, $j = 0, 2$;*

(2) *число $\widetilde{d}$ является алгебраическим числом степени $n > 2$, а функции $\varphi(x)$, $h(x) \in C^5[0, l]$, $\varphi^{(j)}(0) = \varphi^{(j)}(l) = h^{(j)}(0) = h^{(j)}(l) = 0$, $j = 0, 2, 4$.*

Тогда существует единственное решение задачи (1.2)–(1.5), (1.7), *определяемое рядом* (3.11), *и $u(x, y) \in C^2(\overline{Q}_d)$.*

Далее из формулы (3.11) найдем

$$u'_t(x,0) = \psi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} u'_k(0) X_k(x). \tag{3.18}$$

Покажем, что функция $\psi(x)$ удовлетворяет условиям теоремы 2.1. Для этого исследуем на равномерную сходимость ряд

$$\psi''(x) = -\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k^2 u'_k(0) X_k(x). \tag{3.19}$$

Если число $\widetilde{d}$ удовлетворяет условию (1) теоремы 3.2, ряд (3.19) мажорируется рядом

$$C_1 \sum_{k=1}^{\infty} k^4 \left(|h_k| + |\varphi_k|\right); \tag{3.20}$$

здесь и далее C_i — положительные постоянные, зависящие, вообще говоря, от d, l, b. Ряд (3.58) сходится, если $h(x)$, $\varphi(x) \in C^5[0,l]$, $h^{(i)}(0) = h^{(i)}(l) = \varphi^{(i)}(0) = \varphi^{(i)}(l) = 0$, $i = 0,2,4$; следовательно, функция $\psi(x)$ принадлежит классу $C^2[0,l]$ и $\psi(0) = \psi(l) = 0$.

Если число $\widetilde{d}$ удовлетворяет условию (2) теоремы 3.2, то ряд (3.19) мажорируется рядом

$$C_2 \sum_{k=1}^{\infty} k^{4+\varepsilon} \left(|h_k| + |\varphi_k|\right). \tag{3.21}$$

Если $h(x)$, $\varphi(x) \in C^6[0,l]$, $h^{(i)}(0) = h^{(i)}(l) = \varphi^{(i)}(0) = \varphi^{(i)}(l) = 0$, $i = 0,2,4$, то ряд (3.21) сходится. Следовательно, функция $\psi(x)$ удовлетворяет условиям теоремы 2.1.

Следовательно, нами установлено следующее утверждение.

Теорема 3.3. *Предположим, что выполнено одно из следующих условий*:

(1) *число* $\widetilde{d}$ *имеет ограниченное множество элементов и* $h(x)$, $\varphi(x) \in C^5[0,l]$, $h^{(i)}(0) = h^{(i)}(l) = \varphi^{(i)}(0) = \varphi^{(i)}(l) = 0$, $i = 0,2,4$;

(2) *число* $\widetilde{d}$ *является алгебраическим числом степени* $n > 2$ *и* $h(x)$, $\varphi(x) \in C^6[0,l]$, $h^{(i)}(0) = h^{(i)}(l) = \varphi^{(i)}(0) = \varphi^{(i)}(l) = 0$, $i = 0,2,4$,

то существует единственное решение задачи 2, *определяемое рядами* (3.11) *и* (3.18).

3.2.2. Существование решения задачи для телеграфного уравнения. Пусть $b > 0$. В этом случае установим следующие оценки об отделенности от нуля малых знаменателей с соответствующей асимптотикой.

Лемма 3.3. *Если* $\widetilde{d} = p/q$ *является произвольным рациональным числом, где* $p/q \notin \mathbb{N}$, $(p,q) = 1$, *то существуют такие положительные постоянные* C_0 *и* k_0, $(k_0 \in \mathbb{N})$, *что при всех* $k > k_0$ *справедлива оценка*

$$|\delta(k)| \geqslant \frac{C_0}{k} > 0. \tag{3.22}$$

Доказательство проведем, следуя [8, с. 55]. В случае $b > 0$ выражение $\widetilde{\lambda}_k$, которое зависит от b и l, при условии

$$k > k_1 = \begin{cases} \left[\dfrac{bl}{\pi}\right], & \text{если } \dfrac{bl}{\pi} \geqslant 1, \\ 1, & \text{если } \dfrac{bl}{\pi} < 1, \end{cases} \tag{3.23}$$

можно представить в виде:

$$\widetilde{\lambda}_k = \left[1 + \left(\frac{bl}{\pi k}\right)^2\right]^{1/2} = 1 + \theta_k; \tag{3.24}$$

при этом для θ_k справедлива оценка

$$\frac{3}{8}\left(\frac{bl}{\pi k}\right)^2 < \theta_k < \frac{1}{2}\left(\frac{bl}{\pi k}\right)^2. \tag{3.25}$$

Тогда соотношение (3.8) с учетом (3.24) принимает вид

$$\delta(k) = \sin\left(\pi k\widetilde{d} + \widetilde{d}\,\widetilde{\theta}_k\right), \quad \widetilde{\theta}_k = \pi k\theta_k. \tag{3.26}$$

Пусть $\widetilde{\alpha} = p/q$, $(p,q) = 1$. Разделив kp на q с остатком, т.е. представив его в виде $kp = sq + r$, где $s, r \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, $0 \leqslant r < q$, придадим выражению (3.26) вид

$$\delta(k) = (-1)^s \sin\left(\frac{\pi r}{q} + \widetilde{d}\,\widetilde{\theta}_k\right). \tag{3.27}$$

Если $r = 0$, то из (3.27) имеем

$$|\delta(k)| = \left|\sin\left(\widetilde{d}\,\widetilde{\theta}_k\right)\right|. \tag{3.28}$$

Поскольку последовательность $\widetilde{\theta}_k$ в силу оценки (3.25) является бесконечно малой при $k \to \infty$, то существует такое число $k_2 \in \mathbb{N}$, что при всех $k > k_2$

$$0 < \widetilde{d}\,\widetilde{\theta}_k < \frac{\pi}{2}.$$

Тогда в силу известного неравенства

$$\sin x > \frac{2}{\pi}x, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}, \tag{3.29}$$

на основании (3.28), (3.25) получим

$$|\delta(k)| > \frac{2}{\pi}\left(\widetilde{d}\,\widetilde{\theta}_k\right) \geqslant \frac{2\widetilde{d}}{\pi}\frac{3}{8}\frac{(bl)^2}{\pi k} = \frac{C_3}{k} > 0 \tag{3.30}$$

при $k \geqslant \max\{k_1, k_2\}$.

Пусть теперь $r > 0$. Тогда ясно, что $1 \leqslant r \leqslant q-1$, $q \geqslant 2$. Поскольку выражение $\widetilde{\delta}(k) = \sin(\pi r/q + \widetilde{d}\,\widetilde{\theta}_k)$ имеет конечный предел при $k \to \infty$, то существует такое число $k_3 \in \mathbb{N}$, что при всех $k > k_3$ из представления (3.27) будем иметь

$$|\delta(k)| \geqslant \frac{1}{2}\left|\sin\frac{\pi r}{q}\right| = C_4 \geqslant \frac{C_4}{k} > 0. \tag{3.31}$$

Тогда из неравенств (3.30) и (3.31) следует справедливость оценки (3.22), где $C_0 = \min\{C_3, C_4\}$ при всех $k > k_0 = \max\{k_1, k_2, k_3\}$. □

Замечание 1. Отметим, что в [6, 7] показано, что в случае $b = 0$ условие (3.8) нарушается при рациональных значениях $\widetilde{d}$. Следовательно, возмущение уравнения струны со слагаемым b^2u качественно меняет картину.

Теперь рассмотрим случай, когда $\widetilde{d}$ является иррациональным числом. Следуя [8, с. 57–60], представим соотношение (3.26) в виде

$$\delta(k) = (-1)^n \sin\left[\pi k\left(\widetilde{d} - \frac{n}{k}\right) + \widetilde{d}\,\widetilde{\theta}_k\right], \quad n \in \mathbb{N}. \tag{3.32}$$

Как известно (см. [3]), для всякого $k \in \mathbb{N}$ существует такое $n \in \mathbb{N}$, что

$$\left|\widetilde{d} - \frac{n}{k}\right| < \frac{1}{2k}. \tag{3.33}$$

Число n возьмем таким, чтобы в силу неравенства (3.33) выполнялось неравенство

$$\left|\pi k\left(\widetilde{d} - \frac{n}{k}\right)\right| < \frac{\pi}{2}. \tag{3.34}$$

Если $\widetilde{\alpha}$ является иррациональным алгебраическим числом степени 2, т.е. является квадратическим иррациональным числом, то в силу теоремы Лиувилля (см. [11, с. 60]) существует такое положительное число δ, зависящее от $\widetilde{d}$, что при любых целых n и k, $k>0$, выполняется неравенство

$$\left|\widetilde{\alpha}-\frac{n}{k}\right|>\frac{\delta}{k^2}. \tag{3.35}$$

В силу оценки (3.25) имеем

$$0<\widetilde{d}\widetilde{\theta}_k<\frac{\widetilde{d}}{2}\frac{(bl)^2}{\pi k}=\frac{C_5}{k}, \tag{3.36}$$

где от постоянной потребуем, чтобы

$$C_5=\frac{\widetilde{d}}{2\pi}(bl)^2<\frac{1}{2}. \tag{3.37}$$

Тогда из (3.34) и (3.36) следует, что возможны два случая:

$$\begin{aligned}&(1)\qquad \frac{\pi}{2}\leqslant \pi k\left(\widetilde{d}-\frac{n}{k}\right)+\widetilde{d}\widetilde{\theta}_k<\frac{\pi}{2}+C_6<\pi,\\&(2)\quad -\frac{\pi}{2}\leqslant \pi k\left(\widetilde{d}-\frac{n}{k}\right)+\widetilde{d}\widetilde{\theta}_k<\frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

В первом случае

$$\left|\sin\left[\pi k\left(\widetilde{d}-\frac{n}{k}\right)+\widetilde{d}\widetilde{\theta}_k\right]\right|\geqslant \sin\left(\frac{\pi}{2}+C_5\right)=\cos C_5\geqslant\frac{C_6}{k}. \tag{3.38}$$

Во втором случае с учетом неравенства (3.35) имеем

$$\begin{aligned}\left|\sin\left[\pi k\left(\widetilde{d}-\frac{n}{k}\right)+\widetilde{d}\widetilde{\theta}_k\right]\right|&>\frac{2}{\pi}\left|\pi k\left(\widetilde{d}-\frac{n}{k}\right)+\widetilde{d}\widetilde{\theta}_k\right|\geqslant\\&\geqslant 2k\left|\widetilde{d}-\frac{n}{k}\right|-\frac{2}{\pi}\widetilde{d}\widetilde{\theta}_k\geqslant\frac{2\delta}{k}-\frac{2C_5}{k\pi}=\frac{2}{k}\left(\delta-\frac{C_5}{\pi}\right).\end{aligned} \tag{3.39}$$

Теперь потребуем, чтобы постоянные d, l, b и δ удовлетворяли неравенству

$$\delta-\frac{\widetilde{d}}{2}\left(\frac{bl}{\pi}\right)^2-\frac{l}{2\pi}>0. \tag{3.40}$$

Далее уточним число δ из оценки (3.40). По условию $\widetilde{d}$ — алгебраическое число степени 2, т.е. оно является корнем многочлена второй степени $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2$, $a_2>0$, с целыми коэффициентами. Тогда

$$f(x)=(x-\widetilde{d})f_1(x), \tag{3.41}$$

где

$$f_1(x)=a_2(x-\widetilde{d}_1)=a_2\left(x+\widetilde{d}+\frac{a_1}{a_2}\right)=a_2x+a_2\widetilde{d}+a_1,$$

при этом $f_1(\widetilde{d})>0$, т.е. $a_1+2a_2\widetilde{\alpha}>0$. Поскольку $f_1(\widetilde{d})\neq 0$, то существует такая окрестность $(\widetilde{d}-\varepsilon,\ \widetilde{d}+\varepsilon)$, $\varepsilon>0$, что $f_1(x)>0$. Пусть n и k — произвольная пара натуральных чисел; если $|\widetilde{d}-n/k|<\varepsilon$, то $f_1(n/k)>0$. Тогда из равенства (3.41) при $x=n/k$ имеем

$$\frac{n}{k}-\widetilde{d}=\frac{f(n/k)}{f_1(n/k)}=\frac{k^2a_0+a_1kn+a_2n^2}{n^2f_1(n/k)}. \tag{3.42}$$

Числитель дроби (3.42) — целое число, отличное от нуля. Следовательно, этот числитель по абсолютной величине не меньше единицы. Обозначим через M верхнюю грань функции $f_1(x)$ на интервале $(\widetilde{d}-\varepsilon,\ \widetilde{d}+\varepsilon)$. Тогда из равенства (3.42) получим

$$\left|\widetilde{d}-\frac{n}{k}\right|\geqslant\frac{1}{k^2M}. \tag{3.43}$$

В случае же $|\widetilde{d}-n/k|\geqslant\varepsilon$ тем более, так как при $k\geqslant 1$ имеем

$$\left|\widetilde{d}-\frac{n}{k}\right|\geqslant\frac{\varepsilon}{k^2}. \tag{3.44}$$

Тогда из оценок (3.43) и (3.44) находим оценку (3.35):

$$\left|\widetilde{d}-\frac{n}{k}\right| \geqslant \frac{\delta}{k^2}, \quad \delta=\min\left\{\varepsilon, \frac{1}{M}\right\}.$$

Теперь вычислим δ через коэффициенты многочлена $f(x)$. Выберем ε так, чтобы

$$f_1(\widetilde{d}-\varepsilon)=2a_2\widetilde{d}-a_2\varepsilon+a_1 \geqslant 0.$$

Отсюда найдем условие:

$$\varepsilon \leqslant 2\widetilde{d}+\frac{a_1}{a_2}=\frac{2\widetilde{d}a_2+a_1}{a_2}.$$

Положим

$$\varepsilon=\frac{2\widetilde{d}a_2+a_1}{a_2\widetilde{l}}, \quad \widetilde{l} \geqslant 1.$$

Далее найдем

$$M=f_1(\widetilde{d}+\varepsilon)=2a_2\widetilde{d}+a_2\varepsilon+a_1=2a_2\widetilde{d}+\frac{2\widetilde{d}a_2+a_1}{\widetilde{l}}+a_1=\frac{\widetilde{l}+1}{\widetilde{l}}(2a_2\widetilde{d}+a_1)$$

и δ из условия $\varepsilon=1/M$. Отсюда получим уравнение относительно $\widetilde{l}$:

$$a_2\widetilde{l}^2-(2\widetilde{d}a_2+a_1)^2\widetilde{l}-(2\widetilde{d}a_2+a_1)^2=0,$$

решение которого имеет вид

$$\widetilde{l}=\frac{(2\widetilde{d}a_2+a_1)^2+(2\widetilde{d}a_2+a_1)\sqrt{(2\widetilde{d}a_2+a_1)^2+4a_2}}{2a_2}. \tag{3.45}$$

Тогда число δ находится по формуле

$$\delta=\frac{2}{2\widetilde{d}a_2+a_1+\sqrt{(2\widetilde{d}a_2+a_1)^2+4a_2}} \tag{3.46}$$

при условии, что правая часть равенства (3.45) не меньше единицы. Это условие выполнено, когда

$$2\widetilde{d}a_2+a_1 \geqslant \sqrt{a_2/2}. \tag{3.47}$$

Таким образом, на основании (3.38) и (3.39) приходим к следующему утверждению.

Лемма 3.4. *Пусть $\widetilde{d}$ — иррациональное алгебраическое число степени* 2, $bl<\pi$ *и выполнены условия* (3.37) *и* (3.40), *где δ определяется по формуле* (3.46) *при условии* (3.47). *Тогда существует такая положительная постоянная C_0, зависящая от d, l и b, что при всех $k \in \mathbb{N}$ имеет место оценка*

$$|\delta(k)|>\frac{C_0}{k}. \tag{3.48}$$

На основании лемм 3.3 и 3.4 дадим обоснование сходимости ряда (3.11) в классе функций (1.2) и (1.3).

Лемма 3.5. *Пусть $\widetilde{d}$ удовлетворяет условиям леммы* 3.3 *или леммы* 3.4. *Тогда при любом $t \in [0,T]$ и всех $k>k_0$ справедливы оценки*

$$|u_k(t)| \leqslant C_7k\big(|h_k|+|\varphi_k|\big), \quad |u_k'(t)| \leqslant C_8k^2\big(|h_k|+|\varphi_k|\big), \quad |u_k''(t)| \leqslant C_9k^3\big(|h_k|+|\varphi_k|\big).$$

Доказательство следует из формулы (3.9) на основании оценки (3.22) или оценки (3.48).

Формально из (3.11) почленным дифференцированием составим ряды

$$u_t(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k'(t) X_k(x), \quad u_x(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) X_k'(x), \tag{3.49}$$

$$u_{tt}(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k''(t) X_k(x), \quad u_{xx}(x,t) = -\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 u_k(t) X_k''(x). \tag{3.50}$$

Ряды (3.11), (3.49) и (3.50) при любых $(x,t) \in \overline{Q}_d$ на основании леммы 3.5 мажорируются рядом

$$C_{10} \sum_{k=k_0+1}^{\infty} k^3 \big(|h_k| + |\varphi_k|\big). \tag{3.51}$$

Лемма 3.6. *Если* $\varphi(x) \in C^4[0,l]$, $h(x) \in C^4[0,l]$, $\varphi^{(j)}(0) = \varphi^{(j)}(l) = 0$, $h^{(j)}(0) = h^{(j)}(l) = 0$, $j = 0, 2$, *то справедливы представления*

$$\varphi_k = \left(\frac{l}{\pi}\right)^4 \frac{\varphi_k^{(4)}}{k^4}, \quad h_k = \left(\frac{l}{\pi}\right)^4 \frac{h_k^{(4)}}{k^4}, \tag{3.52}$$

где

$$\varphi_k^{(4)} = \sqrt{\frac{2}{l}} \int_0^l \varphi^{(4)}(x) \sin \mu_k x \, dx, \quad h_k^{(4)} = \sqrt{\frac{2}{l}} \int_0^l h^{(4)}(x) \sin \mu_k x \, dx, \tag{3.53}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\varphi_k^{(4)}|^2 \leqslant \int_0^l |\varphi^{(4)}(x)|^2 dx, \quad \sum_{k=1}^{\infty} |h_k^{(4)}|^2 \leqslant \int_0^l |h^{(4)}(x)|^2 \, dx. \tag{3.54}$$

Доказательство. Интегрируя в (3.6) и (3.7) по частям четыре раза и учитывая граничные условия относительно функций $\varphi(x)$ и $h(x)$, получим (3.52). Справедливость оценок (3.54) следует из неравенства Бесселя. □

В силу леммы 3.6 ряд (3.51) мажорируется сходящимся числовым рядом

$$C_{11} \sum_{k=k_0+1}^{\infty} \frac{1}{k} \left(|h_k^{(4)}| + |\varphi_k^{(4)}| \right).$$

Тогда на основании признака Вейерштрасса ряды (3.11), (3.49) и (3.50) сходятся равномерно на замкнутой области $\overline{Q}_d$.

Если для чисел $\widetilde{d}$ из леммы 3.3 при некоторых $k = p = k_1, k_2, \ldots, k_m$, где $1 \leqslant k_1 < k_2 < \ldots < k_m \leqslant k_0$, k_i, $i = \overline{1,m}$, m — заданные натуральные числа, $\delta(p) = 0$, то для разрешимости задачи (1.2)–(1.5), (1.7) необходимо и достаточно, чтобы

$$h_p - \varphi_p \cos \lambda_p d = 0, \quad p = k_1, k_2, \ldots, k_m. \tag{3.55}$$

В этом случае решение задачи (1.2)–(1.5), (1.7) определяется в виде суммы ряда

$$u(x,t) = \left(\sum_{k=1}^{k_1-1} + \ldots + \sum_{k=k_{m-1}+1}^{k_m-1} + \sum_{k=k_m+1}^{+\infty} \right) u_k(t) X_k(x) + \sum_p A_p u_p(t) X_p(x), \tag{3.56}$$

где в последней сумме p принимает значения $k_1, k_2, \ldots, k_m$, A_p — произвольные постоянные, $u_p(t) = \cos \lambda_p t$; если в конечных суммах в правой части (3.56) верхний предел меньше нижнего, то их следует считать нулями.

Теорема 3.4. *Если число* $\widetilde{d}$ *удовлетворяет условиям леммы* 3.4, $\varphi(x)$ *и* $h(x)$ *удовлетворяют условиям леммы* 3.6, *то существует единственное решение задачи* (1.2)–(1.5), (1.7), *определяемое рядом* (3.11), *причем сумма ряда* $u(x,y) \in C^2(\overline{Q}_d)$.

Пусть $\widetilde{d}$ — *рациональное число, функции* $\varphi(x)$ *и* $h(x)$ *удовлетворяют условиям леммы* 3.6. *Если* $\delta(k) \neq 0$ *при* $k = \overline{1,k_0}$, *то существует единственное решение задачи* (1.2)–(1.5), (1.7), *определяемое рядом* (3.11); *если* $\delta(k) = 0$ *при некоторых* $k = k_1, k_2, \ldots, k_m \leqslant k_0$, *то задача* (1.2)–(1.5), (1.7) *разрешима только тогда, когда выполнены условия* (3.55), *и в этом случае решение определяется рядом* (3.56) *и принадлежит классу* $C^2(\overline{Q}_d)$.

Аналогично п. 3.1 функция $\psi(x)$ определяется рядом (3.18), где $u_k(t)$ находятся по формуле (3.9). Покажем, что функция $\psi(x)$ удовлетворяет условиям теоремы 2.1. Для этого исследуем на равномерную сходимость ряд

$$\psi''(x) = -\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 u_k'(0) X_k(x). \tag{3.57}$$

Если число $\widetilde{d}$ удовлетворяет условиям условиям леммы 3.3 или леммы 3.4, ряд (3.57) мажорируется рядом

$$C_{12} \sum_{k=k_0+1}^{\infty} k^4 \left(|h_k| + |\varphi_k|\right). \tag{3.58}$$

Ряд (3.58) сходится, если $h(x)$, $\varphi(x) \in C^5[0,l]$, $h^{(i)}(0) = h^{(i)}(l) = \varphi^{(i)}(0) = \varphi^{(i)}(l) = 0$, $i = 0, 2, 4$. Следовательно, функция $\psi(x)$ принадлежит классу $C^2[0,l]$ и $\psi(0) = \psi(l) = 0$.

Если $\delta(k) = 0$ при некоторых $k = k_1, k_2, \ldots, k_m \leqslant k_0$ и выполнены условия (3.55), то

$$\psi(x) = \left(\sum_{k=1}^{k_1-1} + \ldots + \sum_{k=k_{m-1}+1}^{k_m-1} + \sum_{k=k_m+1}^{+\infty}\right) u_k'(0) X_k(x) + \sum_p A_p X_p(x). \tag{3.59}$$

.

Следовательно, доказано следующее утверждение.

Теорема 3.5. *Если* $\widetilde{d}$ *удовлетворяет условиям леммы* 3.4 *и* $h(x)$, $\varphi(x) \in C^5[0,l]$, $h^{(i)}(0) = h^{(i)}(l) = \varphi^{(i)}(0) = \varphi^{(i)}(l) = 0$, $i = 0, 2, 4$, *то существует единственное решение задачи* 2, *определяемое рядами* (3.11) *и* (3.18).

Пусть $\widetilde{d}$ — *рациональное число и* $h(x)$, $\varphi(x) \in C^5[0,l]$, $h^{(i)}(0) = h^{(i)}(l) = \varphi^{(i)}(0) = \varphi^{(i)}(l) = 0$, $i = 0, 2, 4$. *Если* $\delta(k) \neq 0$ *при* $k = \overline{1, k_0}$, *то существует единственное решение задачи* 2, *определяемое рядами* (3.11) *и* (3.18). *Если* $\delta(k) = 0$ *при некоторых* $k = k_1, k_2, \ldots, k_m \leqslant k_0$, *то задача* 2 *разрешима только тогда, когда выполнены условия* (3.55); *в этом случае решение определяется рядами* (3.56) *и* (3.59).

4. Обратная задача по отысканию начального возмущения

4.1. Критерий единственности. Теперь рассмотрим задачу (1.2)–(1.4), (1.6), (1.7) в области Q_d. Аналогично п. 3.2 решение построим в виде суммы ряда

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) X_k(x), \tag{4.1}$$

где $u_k(t)$ сначала вводится по формуле (3.1), а затем определяется в явном виде:

$$u_k(t) = \frac{\psi_k}{\lambda_k} \frac{\sin \lambda_k (t-d)}{\cos \lambda_k d} + \frac{h_k \cos \lambda_k t}{\cos \lambda_k d}, \tag{4.2}$$

где

$$\psi_k = \int_0^l \psi(x) X_k(x)_k dx, \quad h_k = \int_0^l h(x) X_k(x) dx,$$

при условии, что при всех $k \in \mathbb{N}$

$$\Delta(k) = \cos \lambda_k d = \cos \pi k \widetilde{d} \widetilde{\lambda}_k \neq 0. \tag{4.3}$$

Докажем теорему единственности решения задачи (1.2)–(1.4), (1.6), (1.7). Пусть $\psi(x) = h(x) \equiv 0$ и при всех $k \in \mathbb{N}$ выполнены условия (4.3). Тогда все $\psi_k = h_k \equiv 0$ и из равенств (2.5) и (3.1) при любом $k \in \mathbb{N}$ и $t \in [0, d]$ имеем

$$\int\limits_0^l u(x,t) X_k(x) dx = 0.$$

Отсюда в силу полноты системы $X_k(x)$ в $L_2[0, l]$ следует, что $u(x,t) = 0$ почти всюду на $[0, l]$ при любом $t \in [0, d]$. Поскольку в силу (1.2) функция $u(x,t)$ непрерывна на $\overline{Q}_d$, то $u(x,t) \equiv 0$ в $\overline{Q}_d$.

Пусть теперь при некоторых $\widetilde{d}$ и $k = p \in \mathbb{N}$ нарушено условие (4.3), т.е. $\Delta(p) = \cos \pi p \widetilde{d} \widetilde{\lambda}_k = 0$. Тогда однородная задача (1.2)–(1.4), (1.6), (1.7), где $h(x) = \psi(x) \equiv 0$, имеет нетривиальное решение

$$u_p(x,t) = \cos \lambda_p t X_p(x).$$

Выражение $\Delta(k)$ обращается в нуль относительно $\widetilde{d}$ тогда и только тогда, когда

$$\widetilde{d} = \frac{2m+1}{k\widetilde{\lambda}_k}, \quad k \in \mathbb{N}, \quad m \in \mathbb{N}_0. \tag{4.4}$$

Из приведенных рассуждений вытекает следующая теорема.

Теорема 4.1. *Если существует решение задачи* (1.2)–(1.4), (1.6), (1.7), *то оно единственно только тогда, когда при всех* $k \in \mathbb{N}$ *выполнены условия* (4.3).

Из этой теоремы следует критерий единственности решения обратной задачи 3.

Следствие 4.1. *Если существует решение задачи* 3, *то оно единственно только тогда, когда при всех* $k \in \mathbb{N}$ *выполнены условия* (4.3).

Если при некоторых $\widetilde{d}$ и $k = p \in \mathbb{N}$ нарушено условие (4.3), т.е. $\Delta(p) = \cos \pi p \widetilde{d} \widetilde{\lambda}_p = 0$, то однородная задача (1.2)–(1.7), где $h(x) = \psi(x) \equiv 0$, имеет нетривиальное решение

$$u_p(x,t) = \cos a\lambda_p t X_p(x), \quad \varphi_p(x) = u_p(x,0) = X_p(x).$$

Теперь перейдем к обоснованию сходимости ряда (4.1). Аналогично разделу 3 в силу (4.4) возникает проблема малых знаменателей относительно $\Delta(k) = \cos \pi k \widetilde{d} \widetilde{\lambda}_k$.

Далее рассмотрим в отдельности случаи, когда $b = 0$ и $b > 0$.

4.2. Существование решения задачи.

4.2.1. Существование решения задачи для уравнения струны. Пусть $b = 0$. В этом случае установим следующие оценки об отделенности от нуля малых знаменателей с соответствующей асимптотикой.

Лемма 4.1. *Если* $\widetilde{d}$ *является произвольным рациональным числом,* $\widetilde{d} = p/q$, $p, q \in \mathbb{N}$, $(p,q) = 1$, *и* $t/q \neq 1/2$ *при* $t \in [1, q-1] \cap \mathbb{N}$ *и* $q \geqslant 2$, *то существует такая положительная постоянная* C_0, *что для всех* $k \in \mathbb{N}$ *справедлива оценка*

$$|\Delta(k)| \geqslant C_0 > 0. \tag{4.5}$$

Доказательство. Если $\widetilde{d} \in \mathbb{N}$, то из (4.3) имеем

$$\Delta(k) = \cos pk\pi = (-1)^{pk}.$$

Отсюда следует, что

$$|\Delta(k)| = C_0 = 1 > 0. \tag{4.6}$$

Пусть теперь $\widetilde{d} = p/q$, $(p,q) = 1$. Разделив kp на q с остатком, т.е. представив его в виде $kp = sq + t$, $s, t \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, $0 \leqslant t < q$, имеем

$$\Delta(k) = \cos \frac{\pi p k}{q} = \cos\left(\pi s + \frac{t\pi}{q}\right) = (-1)^s \cos \frac{t\pi}{q}. \tag{4.7}$$

Если $t = 0$, то получим оценку (4.23). Пусть $t > 0$; тогда $1 \leqslant t \leqslant q-1$, $q \geqslant 2$, и справедливо неравенство

$$\frac{\pi}{q} \leqslant \frac{t\pi}{q} \leqslant \frac{(q-1)\pi}{q} = \pi - \frac{\pi}{q}.$$

Если $t/q \neq 1/2$ при $t \in [1, q-1] \cap \mathbb{N}$ и $q \geqslant 2$, то

$$\cos\frac{t\pi}{q} \neq 0. \tag{4.8}$$

В самом деле, если при некотором $t = t_0 \in [1, q-1] \cap \mathbb{N}$ неравенство (4.8) нарушается, т.е.

$$\cos\frac{t_0\pi}{q} = 0 \iff \frac{t_0\pi}{q} = \frac{\pi}{2} + \pi m \iff \frac{t_0}{q} = \frac{1}{2} + m, \quad m \in \mathbb{N}_0.$$

Поскольку $t_0 < q$, то последнее равенство возможно лишь при $m = 0$; следовательно, получаем $t_0/q = 1/2$, что противоречит условию, значит неравенство (4.7) является верным. Тогда из (4.7) и (4.8) следует справедливость оценки (4.5). $\square$

Лемма 4.2. *Пусть $\widetilde{d}$ удовлетворяет условиям леммы* 4.1. *Тогда при любом $t \in [0, T]$ и при всех $k \in \mathbb{N}$ справедливы оценки*

$$|u_k(t)| \leqslant C_{13}\left(|h_k| + \frac{|\psi_k|}{k}\right), \quad |u_k'(t)| \leqslant C_{14}k\left(|h_k| + \frac{|\psi_k|}{k}\right), \quad |u_k''(t)| \leqslant C_{15}k^2\left(|h_k| + \frac{|\psi_k|}{k}\right).$$

Доказательство следует из формулы (4.2) на основании оценки (4.5).

Ряды (4.1), (3.49) и (3.50) при любых $(x,t) \in \overline{Q}_d$ на основании леммы 4.2 мажорируются рядом

$$C_{16}\sum_{k=1}^{\infty} k^2\left(|h_k| + \frac{|\psi_k|}{k}\right). \tag{4.9}$$

Лемма 4.3. *Если $\psi(x) \in C^2[0,l]$, $h(x) \in C^3[0,l]$, $\psi(0) = \psi(l) = 0$, $h^{(j)}(0) = h^{(j)}(l) = 0$, $j = 0, 2$, то справедливы представления*

$$\psi_k = -\left(\frac{l}{\pi}\right)^2 \frac{\psi_k^{(2)}}{k^2}, \quad h_k = -\left(\frac{l}{\pi}\right)^3 \frac{h_k^{(3)}}{k^3}, \tag{4.10}$$

где

$$\psi_k^{(2)} = \sqrt{\frac{2}{l}}\int_0^l \psi^{(2)}(x)\sin\mu_k x\,dx, \quad h_k^{(3)} = \sqrt{\frac{2}{l}}\int_0^l h^{(3)}(x)\cos\mu_k x\,dx,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}|\psi_k^{(2)}|^2 \leqslant \int_0^l |\psi^{(2)}(x)|^2 dx, \quad \sum_{k=1}^{\infty}|h_k^{(3)}|^2 \leqslant \int_0^l |h^{(3)}(x)|^2 dx.$$

Доказательство аналогично доказательству леммы 3.6.

В силу леммы 4.3 ряд (4.9) мажорируется сходящимся числовым рядом

$$C_{17}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\left(|h_k^{(3)}| + |\psi_k^{(2)}|\right).$$

На основании признака Вейерштрасса ряды (4.1), (3.49) и (3.50) сходятся равномерно на замкнутой области $\overline{Q}_d$.

Теперь рассмотрим случай, когда $\widetilde{d}$ — иррациональное число. Следуя [9] выражение для $\Delta(k)$ преобразуем к виду:

$$|\Delta(k)| = \left|\cos a\mu_k d\right| = \left|\sin\left(\pi k\widetilde{d} + \frac{\pi}{2}\right)\right| = \left|\sin\left(\pi k\widetilde{d} + \frac{\pi}{2} - \pi m\right)\right| =$$

$$= \left|\sin\left(\pi k\widetilde{d} - \frac{(2m-1)\pi}{2}\right)\right| = \left|\sin \pi k\left(\widetilde{d} - \frac{2m-1}{2k}\right)\right| = \left|\sin\frac{\pi k}{2}\left(2\widetilde{d} - \frac{n}{k}\right)\right|,$$

$$n = 2m-1, \quad m, n \in \mathbb{Z}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Лемма 4.4. *Пусть $\widetilde{d} > 0$ — иррациональное число, множество элементов которого ограничено. Тогда существует такое число C_0, что при всех $k \in \mathbb{N}$ справедлива оценка*

$$|\Delta(k)| > \frac{C_0}{k}. \tag{4.11}$$

Доказательство. Для всякого $k \in \mathbb{N}$ можно подобрать $n \in \mathbb{N}$ так, чтобы имело место неравенство

$$\left|2\widetilde{d} - \frac{n}{k}\right| < \frac{1}{k}. \tag{4.12}$$

Для этого достаточно положить

$$n = \begin{cases} \left[2\widetilde{d}k\right], & \text{если } \left[2\widetilde{d}k\right] \text{ нечетно,} \\ \left[2\widetilde{d}k\right] + 1, & \text{если } \left[2\widetilde{d}k\right] \text{ четно,} \end{cases}$$

где $\left[2\widetilde{d}k\right]$ — целая часть иррационального числа $2\widetilde{d}k$. Пусть n таково, что выполняется неравенство (4.12).

Тогда в силу (3.13) и известного неравенства

$$\sin x > \frac{2x}{\pi}, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}, \tag{4.13}$$

будем иметь

$$|\Delta(k)| = \left|\cos \pi k\widetilde{d}\right| = \left|\sin\frac{\pi k}{2}\left(2\widetilde{d} - \frac{n}{k}\right)\right| > k\left|2\widetilde{d} - \frac{n}{k}\right| \geqslant \frac{C_0}{k}.$$

Тем самым справедливость оценки (4.11) доказана. □

Лемма 4.5. *Пусть $\widetilde{d} > 0$ — алгебраическое число степени $n \geqslant 2$. Тогда существует такое число $C_0 > 0$, что при всех $k \in \mathbb{N}$ справедливы следующие оценки:*

$$|\Delta(k)| \geqslant \frac{C_0}{k}, \qquad \text{когда } n = 2; \tag{4.14}$$

$$|\Delta(k)| \geqslant \frac{C_0}{k^{1+\varepsilon}}, \quad \text{когда } n > 2,\ \varepsilon > 0. \tag{4.15}$$

Доказательство. В случае $n = 2$ множество элементов числа $\widetilde{d}$ ограничено, поэтому из леммы 4.4 на основании (4.11) следует справедливость оценки (4.14).

Теперь рассмотрим случай $n > 2$. В силу теоремы Рота (см. [12, с. 98]) для любого алгебраического числа $2\widetilde{d}$ степени $n \geqslant 2$ и произвольного положительного числа $\varepsilon > 0$ найдется такое положительное число $\delta > 0$, что при любых целых n, k $(k > 0)$ будет иметь место неравенство

$$\left|2\widetilde{d} - \frac{n}{k}\right| \geqslant \frac{\delta}{k^{2+\varepsilon}}. \tag{4.16}$$

Рассуждая аналогично доказательству леммы 4.4, на основании неравенств (4.12), (4.13) и (4.16), получим

$$|\Delta(k)| = \left|\cos \pi k\widetilde{d}\right| = \left|\sin\frac{\pi k}{2}\left(2\widetilde{d} - \frac{n}{k}\right)\right| > k\left|2\widetilde{d} - \frac{n}{k}\right| \geqslant \frac{C_0}{k^{1+\varepsilon}}.$$

Отсюда следует справедливость оценки (4.15). □

Лемма 4.6. *Пусть $\widetilde{d}$ — алгебраическое число степени $n \geqslant 2$. Тогда при любом $t \in [0,T]$ и при всех $k \in \mathbb{N}$ справедливы оценки*

$$|u_k(t)| \leqslant \begin{cases} C_{18}k\left(|h_k| + \dfrac{|\psi_k|}{k}\right), & n = 2, \\ C_{18}k^{1+\varepsilon}\left(|h_k| + \dfrac{|\psi_k|}{k}\right), & n > 2; \end{cases}$$

$$|u_k'(t)| \leqslant \begin{cases} C_{19}k^2\left(|h_k| + \dfrac{|\psi_k|}{k}\right), & n = 2, \\ C_{19}k^{2+\varepsilon}\left(|h_k| + \dfrac{|\psi_k|}{k}\right), & n > 2; \end{cases}$$

$$|u_k''(t)| \leqslant \begin{cases} C_{20}k^3\left(|h_k| + \dfrac{|\psi_k|}{k}\right), & n = 2, \\ C_{20}k^{3+\varepsilon}\left(|h_k| + \dfrac{|\psi_k|}{k}\right), & n > 2. \end{cases}$$

Доказательство следует из формулы (4.2) на основании оценок (4.14) и (4.15).

Ряды (4.1), (3.49) и (3.50) при любых $(x,t) \in \overline{Q}_d$ на основании леммы 4.6 мажорируются рядом

$$C_{21}\sum_{k=1}^{\infty} k^{3+\varepsilon}\left(|h_k| + \frac{|\psi_k|}{k}\right). \tag{4.17}$$

Лемма 4.7. *Если $\psi(x) \in C^4[0,l]$, $h(x) \in C^5[0,l]$, $\psi^{(v)}(0) = \psi^{(v)}(l) = 0$, $v = 0,2$, $h^{(j)}(0) = h^{(j)}(l) = 0$, $j = 0,2,4$, то справедливы представления*

$$\psi_k = -\left(\frac{l}{\pi}\right)\frac{\psi_k^{(4)}}{k^4}, \quad h_k = \left(\frac{l}{\pi}\right)\frac{h_k^{(5)}}{k^5},$$

где

$$\psi_k = -\sqrt{\frac{2}{l}}\int_0^l \psi^{(4)}(x)\sin\mu_k x\,dx, \quad h_k = \sqrt{\frac{2}{l}}\int_0^l h^{(5)}(x)\cos\mu_k x\,dx,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}|\psi_k^{(4)}|^2 \leqslant \int_0^l |\psi^{(4)}(x)|^2\,dx, \quad \sum_{k=1}^{\infty}|h_k^{(5)}|^2 \leqslant \int_0^l |h^{(5)}(x)|^2 dx.$$

Доказательство аналогично доказательству леммы 3.6.

В силу леммы 4.7 ряд (4.17) мажорируется сходящимся числовым рядом

$$C_{22}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{2-\varepsilon}}.$$

На основании признака Вейерштрасса ряды (4.1), (3.49) и (3.50) сходятся равномерно на замкнутой области $\overline{Q}_d$.

Таким образом, нами доказана следующая теорема.

Теорема 4.2. *Предположим, что выполнено одно из следующих условий*:

(1) *$\widetilde{d}$ — рациональное число, $\widetilde{d} = p/q$, $p,q \in \mathbb{N}$, $(p,q) = 1$, и $t/q \neq 1/2$ при $t \in [1, q-1] \cap \mathbb{N}$ и $q \geqslant 2$; $\psi(x) \in C^2[0,l]$, $h(x) \in C^3[0,l]$, $\psi(0) = \psi(l) = 0$, $h^{(j)}(0) = h^{(j)}(l) = 0$, $j = 0,2$;*

(2) *число $\widetilde{d}$ имеет ограниченное множество элементов и $\psi(x) \in C^3[0,l]$, $h(x) \in C^4[0,l]$, $\psi^{(j)}(0) = \psi^{(j)}(l) = h^{(j)}(0) = h^{(j)}(l) = 0$, $j = 0,2$;*

(3) *$\widetilde{d}$ является алгебраическим числом степени $n > 2$ и $\psi(x) \in C^4[0,l]$, $h(x) \in C^5[0,l]$, $\psi^{(v)}(0) = \psi^{(v)}(l) = 0$, $v = 0,2$, $h^{(j)}(0) = h^{(j)}(l) = 0$, $j = 0,2,4$.*

Тогда существует единственное решение задачи (1.2)–(1.4), (1.6), (1.7), *определяемое рядом* (4.1) *с коэффициентами* (4.2).

Теперь на основании теоремы 4.2 исследуем обратную задачу 3. Из формулы (4.1) найдем неизвестную функцию

$$u(x,0)=\varphi(x)=\sum_{k=1}^{\infty}u_k(0)X_k(x). \tag{4.18}$$

Покажем, что функция $\varphi(x)$ удовлетворяет условиям теоремы 2.1. Для этого исследуем на равномерную сходимость ряд

$$\varphi^{(3)}(x)=-\sqrt{\frac{2}{l}}\sum_{k=1}^{\infty}\mu_k^3u_k(0)\cos\mu_kx. \tag{4.19}$$

Если число $\widetilde{d}$ удовлетворяет условиям леммы 4.1, то ряд (4.19) мажорируется рядом

$$C_{23}\sum_{k=1}^{\infty}k^3\left(|h_k|+\frac{|\psi_k|}{k}\right). \tag{4.20}$$

Для сходимости ряда (4.20) достаточно, чтобы $h(x)\in C^4[0,l]$, $\psi(x)\in C^3[0,l]$ и $h^{(i)}(0)=h^{(i)}(l)=\psi^{(i)}(0)=\psi^{(i)}(l)=0$, $i=0,2$.

Если число $\widetilde{d}$ удовлетворяет условиям леммы 4.5 при $n=2$, то ряд (4.19) мажорируется рядом

$$C_{24}\sum_{k=1}^{\infty}k^4\left(|h_k|+\frac{|\psi_k|}{k}\right). \tag{4.21}$$

Если $h(x)\in C^5[0,l]$, $\psi(x)\in C^4[0,l]$, $h^{(i)}(0)=h^{(i)}(l)=0$, $i=0,2,4$, $\psi^{(p)}(0)=\psi^{(p)}(l)=0$, $p=0,2$, то ряд (4.44) сходится.

Если число $\widetilde{d}$ удовлетворяет условиям леммы 4.5 при $n>2$, то ряд (4.19) мажорируется рядом

$$C_{25}\sum_{k=1}^{\infty}k^{4+\varepsilon}\left(|h_k|+\frac{|\psi_k|}{k}\right). \tag{4.22}$$

Ряд (4.22) будет сходится, если $h(x)\in C^6[0,l]$, $\psi(x)\in C^5[0,l]$, $h^{(i)}(0)=h^{(i)}(l)=\psi^{(i)}(0)=\psi^{(i)}(l)=0$, $p=0,2,4$.

Следовательно, во всех рассмотренных выше случаях функция $\varphi(x)$, заданная рядом (4.18), принадлежит классу $C^3[0,l]$; при этом $\varphi(0)=\varphi(l)=\varphi''(0)=\varphi''(l)=0$, и нами установлено следующее утверждение.

Теорема 4.3. *Предположим, что выполнено одно из следующих условий*:

(2) $\widetilde{d}$ *— рациональное число*, $\widetilde{d}=p/q$, $p,q\in\mathbb{N}$, $(p,q)=1$, *и* $t/q\neq1/2$ *при* $t\in[1,q-1]\cap\mathbb{N}$ *и* $q\geqslant2$; $h(x)\in C^4[0,l]$, $\psi(x)\in C^3[0,l]$, $h^{(i)}(0)=h^{(i)}(l)=\psi^{(i)}(0)=\psi^{(i)}(l)=0$, $i=0,2$;

(2) $\widetilde{d}$ *— алгебраическое число степени* $n=2$, $h(x)\in C^5[0,l]$, $\psi(x)\in C^4[0,l]$, $h^{(i)}(0)=h^{(i)}(l)=0$, $i=0,2,4$, $\psi^{(p)}(0)=\psi^{(p)}(l)=0$, $p=0,2$;

(2) $\widetilde{d}$ *— алгебраическое число степени* $n>2$, $h(x)\in C^6[0,l]$, $\psi(x)\in C^5[0,l]$, $h^{(i)}(0)=h^{(i)}(l)=\psi^{(i)}(0)=\psi^{(i)}(l)=0$, $p=0,2,4$.

Тогда существует единственное решение задачи 3, *определяемое рядами* (4.1), (4.18).

4.2.2. Существование решения задачи для телеграфного уравнения. Пусть $b>0$. Установим следующую оценку об отделенности от нуля малых знаменателей с соответствующей асимптотикой.

Лемма 4.8. *Если* $\widetilde{d}=p/q$ *— произвольное рациональное число, где* $p/q\notin\mathbb{N}$, $(p,q)=1$, *и* $(r+1)/q\neq1/2$ *или* $r/q\neq1/2$, $1\leqslant r\leqslant q-1$, *то существуют такие положительные постоянные* C_0 *и* k_0, $k_0\in\mathbb{N}$, *что при всех* $k>k_0$ *справедлива оценка*

$$|\Delta(k)|\geqslant C_0>0. \tag{4.23}$$

Доказательство. Пусть $\widetilde{d} = p/q$, $(p, q) = 1$. Разделив kp на t с остатком, т.е. представив его в виде $kp = sq + r$, где $s, r \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, $0 \leqslant r < q$, придадим выражению (4.3) вид

$$\Delta(k) = \cos\left(\frac{\pi r}{q} + \widetilde{d}\widetilde{\theta}_k\right). \tag{4.24}$$

Пусть $r = 0$. Тогда соотношение (4.24) принимает вид

$$\Delta(k) = \cos\widetilde{d}\widetilde{\theta}_k. \tag{4.25}$$

Поскольку последовательность $\widetilde{\theta}_k$ в силу оценки (3.25) является бесконечно малой при $k \to \infty$, то существует такое число $k_2 \in \mathbb{N}$, что при всех $k > k_2$

$$0 < \widetilde{d}\widetilde{\theta}_k < \frac{\pi}{4}. \tag{4.26}$$

Тогда на основании (4.25) и (4.26) получим

$$|\Delta(k)| > \cos\frac{\pi}{4} > 0 \tag{4.27}$$

при $k \geqslant \max\{k_1, k_2\}$.

Пусть теперь $r > 0$. Тогда ясно, что $1 \leqslant r \leqslant q - 1$, $q \geqslant 2$. Существует такое число $k_3 \in \mathbb{N}$, что при всех $k > k_2$

$$0 < \widetilde{d}\widetilde{\theta}_k \leqslant \frac{C_{26}}{k} < \frac{\pi}{q}, \quad t \geqslant 2. \tag{4.28}$$

Справедливо неравенство

$$0 < \frac{\pi r}{q} + \widetilde{d}\widetilde{\theta}_k < \frac{\pi(q-1)}{q} + \frac{\pi}{q} = \pi.$$

Рассмотрим случай, когда $q = 2q_1 - 1$, $t_1 \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant r \leqslant 2q_1 - 2$. Равенство (4.24) перепишем в виде

$$\Delta(k) = \cos\left(\frac{\pi r}{2q_1 - 1} + \widetilde{d}\widetilde{\theta}_k\right). \tag{4.29}$$

Тогда на основании неравенства (4.28) возможны два случая:

$$(1) \quad 0 < \frac{\pi r}{2q_1 - 1} + \widetilde{d}\widetilde{\theta}_k < \frac{\pi}{2},$$

$$(2) \quad \frac{\pi}{2} \leqslant \frac{\pi r}{2q_1 - 1} + \widetilde{d}\widetilde{\theta}_k < \pi.$$

В первом случае

$$|\Delta(k)| > \cos\left(\frac{\pi r}{2q_1 - 1} + \frac{\pi}{2q_1 - 1}\right) = \cos\left(\frac{\pi(r+1)}{2q_1 - 1}\right) = C_{27} \geqslant 0. \tag{4.30}$$

Потребуем, чтобы постоянная C_{27} была больше нуля. Это возможно только тогда, когда

$$\frac{\pi(r+1)}{2q_1 - 1} \neq \frac{\pi}{2}(2s - 1), \quad s \in \mathbb{N}.$$

Отсюда получим

$$2r + 2 = (2q_1 - 1)(2s - 1), \quad s \in \mathbb{N}. \tag{4.31}$$

В левой части равенства (4.31) стоит четное число, а в правой — нечетное. Следовательно, $C_{27} \neq 0$.

Во втором случае

$$|\Delta(k)| = \left|\cos\left(\frac{\pi r}{2q_1 - 1} + \widetilde{\alpha}\widetilde{\theta}_k\right)\right| > \left|\cos\left(\frac{\pi r}{2q_1 - 1}\right)\right| = C_{28} \geqslant 0. \tag{4.32}$$

Аналогично потребуем, чтобы постоянная C_{28} была больше нуля. Это возможно только тогда, когда

$$\frac{\pi r}{2q_1 - 1} \neq \frac{\pi}{2}(2s - 1), \quad s \in \mathbb{N}.$$

Отсюда получим

$$2r = (2q_1 - 1)(2s - 1), \quad s \in \mathbb{N}. \tag{4.33}$$

В левой части равенства (4.33) стоит четное число, а в правой — нечетное. Следовательно, $C_{28} \neq 0$.

Теперь рассмотрим случай, когда $q = 2q_1$. Равенство (4.24) перепишем в виде

$$\Delta(k) = \cos\left(\frac{\pi r}{2q_1} + \widetilde{d}\widetilde{\theta}_k\right). \tag{4.34}$$

Здесь также возможны два случая:

$$(1) \quad 0 < \frac{\pi r}{2q_1} + \widetilde{d}\widetilde{\theta}_k < \frac{\pi}{2},$$
$$(2) \quad \frac{\pi}{2} \leqslant \frac{\pi r}{2q_1} + \widetilde{d}\widetilde{\theta}_k < \pi.$$

В первом случае справедливо неравенство

$$|\Delta(k)| > \cos\left(\frac{\pi r}{2q_1} + \frac{\pi}{2q_1}\right) = \cos\left(\frac{\pi(r+1)}{2q_1}\right) > 0$$

при условии, когда

$$\frac{r+1}{2q_1} \neq \frac{1}{2}(2s-1) \quad \text{или} \quad \frac{r+1}{q} \neq s - \frac{1}{2}, \quad s \in \mathbb{N}. \tag{4.35}$$

Так как $2 \leqslant r+1 \leqslant t$, то неравенство (4.35) имеет место при $s = 1$, т.е. когда

$$\frac{r+1}{q} \neq \frac{1}{2}.$$

Во втором случае справедливо неравенство

$$|\Delta(k)| = \left|\cos\left(\frac{\pi r}{2q_1} + \widetilde{d}\widetilde{\theta}_k\right)\right| > \left|\cos\left(\frac{\pi r}{2q_1}\right)\right| > 0$$

при условии, когда

$$\frac{r}{2q_1} \neq \frac{1}{2}(2s-1) \quad \text{или} \quad \frac{r}{q} \neq s - \frac{1}{2}, \quad s \in \mathbb{N}. \tag{4.36}$$

Так как $1 \leqslant r \leqslant q-1$, то неравенство (4.36) имеет место при $s = 1$, т.е. когда

$$\frac{r}{q} \neq \frac{1}{2}.$$

□

Справедливо следующее утверждение (см. п. 3.1).

Лемма 4.9. *Пусть $\widetilde{d}$ — иррациональное алгебраическое число степени 2, $bl < \pi$ и выполнены условия (3.37) и (3.40), где δ определяется по формуле (3.46) при условии (3.47). Тогда существует такая положительная постоянная C_0, зависящая от d, l и b, что при всех $k \in \mathbb{N}$ имеет место оценка*

$$|\Delta(k)| > \frac{C_0}{k}. \tag{4.37}$$

Доказательство аналогично доказательству леммы 3.4.

Лемма 4.10. *Пусть $\widetilde{d}$ удовлетворяет условиям леммы 4.8. Тогда при любых $t \in [0, T]$ и $k > k_0$ справедливы оценки*

$$|u_k(t)| \leqslant C_{29}\left(|h_k| + \frac{|\psi_k|}{k}\right),$$
$$|u_k'(t)| \leqslant C_{30}k\left(|h_k| + \frac{|\psi_k|}{k}\right),$$
$$|u_k''(t)| \leqslant C_{31}k^2\left(|h_k| + \frac{|\psi_k|}{k}\right).$$

Доказательство следует из формулы (4.2) на основании оценки (4.23).

Ряды (4.1), (3.49) и (3.50) при любых $(x,t) \in \overline{Q}_d$ на основании леммы 4.10 мажорируются рядом

$$C_{32} \sum_{k=k_0+1}^{\infty} k^2 \left(|h_k| + \frac{|\psi_k|}{k} \right). \tag{4.38}$$

Лемма 4.11. *Если* $\psi(x) \in C^2[0,l]$, $h(x) \in C^3[0,l]$, $\psi(0) = \psi(l) = 0$, $h^{(j)}(0) = h^{(j)}(l) = 0$, $j = 0, 2$, *то справедливы представления*

$$\psi_k = -\left(\frac{l}{\pi}\right)^2 \frac{\psi_k^{(2)}}{k^2}, \quad h_k = -\left(\frac{l}{\pi}\right)^3 \frac{h_k^{(3)}}{k^3},$$

где

$$\psi_k^{(2)} = \sqrt{\frac{2}{l}} \int_0^l \psi^{(2)}(x) \sin \mu_k x \, dx, \quad h_k^{(3)} = \sqrt{\frac{2}{l}} \int_0^l h^{(3)}(x) \cos \mu_k x \, dx,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\psi_k^{(2)}|^2 \leqslant \int_0^l |\psi^{(2)}(x)|^2 \, dx, \quad \sum_{k=1}^{\infty} |h_k^{(3)}|^2 \leqslant \int_0^l |h^{(3)}(x)|^2 dx.$$

Доказательство аналогично доказательству леммы 3.6.

В силу леммы 4.11 ряд (4.38) мажорируется сходящимся числовым рядом

$$C_{33} \sum_{k=k_0+1}^{\infty} \frac{1}{k} \left(|h_k^{(3)}| + |\psi_k^{(2)}| \right).$$

На основании признака Вейерштрасса ряды (4.1), (3.49) и (3.50) сходятся равномерно на замкнутой области $\overline{Q}_d$.

Если для чисел $\widetilde{d}$ из леммы 4.8 при некоторых $k = p = k_1, k_2, \ldots, k_m$, где $1 \leqslant k_1 < k_2 < \ldots < k_m \leqslant k_0$, k_i, $i = \overline{1,m}$, m — заданные натуральные числа, $\Delta(p)$ обращается в нуль, то для разрешимости задачи (1.2)–(1.4), (1.6), (1.7) необходимо и достаточно, чтобы

$$\lambda_p h_p - \psi_p \sin \lambda_p d = 0, \quad p = k_1, k_2, \ldots, k_m. \tag{4.39}$$

В этом случае решение задачи (1.2)–(1.4), (1.6), (1.7) определяется в виде суммы ряда

$$u(x,t) = \left(\sum_{k=1}^{k_1-1} + \ldots + \sum_{k=k_{m-1}+1}^{k_m-1} + \sum_{k=k_m+1}^{+\infty} \right) u_k(t) X_k(x) + \sum_p B_p u_p(t) X_p(x), \tag{4.40}$$

где в последней сумме p принимает значения $k_1, k_2, \ldots, k_m$, B_p — произвольные постоянные, $u_p(t) = \sin \lambda_p t$; если в конечных суммах в правой части (4.40) верхний предел меньше нижнего, то их следует считать нулями.

Аналогично на основании леммы 4.9 доказывается существование решения задачи (1.2)–(1.4), (1.6), (1.7). Таким образом, приходим к следующему утверждению.

Теорема 4.4. *Предположим, что* $\widetilde{d}$ *является рациональным числом, а функции* $\psi(x)$ *и* $h(x)$ *удовлетворяют условиям леммы* 4.11. *Если* $\Delta(k) \neq 0$ *при* $k = \overline{1, k_0}$, *то существует единственное решение задачи* (1.2)–(1.4), (1.6), (1.7), *определяемое рядом* (4.1). *Если* $\Delta(k) = 0$ *при некоторых* $k = k_1, k_2, \ldots, k_m \leqslant k_0$, *то задача* (1.2)–(1.4), (1.6), (1.7) *разрешима только тогда, когда выполнены условия* (4.39), *и в этом случае решение определяется рядом* (4.40).

Если $\widetilde{d}$ *удовлетворяет условиям леммы* 4.9 *и* $h(x) \in C^5[0,l]$, $\psi(x) \in C^4[0,l]$, $h^{(i)}(0) = h^{(i)}(l) = 0$, $i = 0, 2, 4$, $\psi^{(p)}(0) = \psi^{(p)}(l) = 0$, $p = 0, 2$, *то существует единственное решение задачи* (1.2)–(1.4), (1.6), (1.7), *определяемое рядом* (4.1).

Теперь на основании этих результатов исследуем обратную задачу 3.

Аналогично п. 4.1 функция $\varphi(x)$ будет определяться рядом (4.18), где $u_k(t)$ находятся по формуле (4.2); если $\Delta(k)=0$ при некоторых $k=k_1,k_2,\dots,k_m\leqslant k_0$ и выполнены условия (4.39), то

$$\varphi(x)=\left(\sum_{k=1}^{k_1-1}+\ldots+\sum_{k=k_{m-1}+1}^{k_m-1}+\sum_{k=k_m+1}^{+\infty}\right)u_k(0)X_k(x)+\sum_p B_pX_p(x). \tag{4.41}$$

.

Покажем, что функция $\varphi(x)$ удовлетворяет условиям теоремы 2.1. Для этого исследуем на равномерную сходимость ряд

$$\varphi^{(3)}(x)=-\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^3u_k(0)X_k(x). \tag{4.42}$$

Если число $\widetilde{d}$ удовлетворяет условиям леммы 4.8, то ряд (4.42) мажорируется рядом

$$C_{34}\sum_{k=k_0+1}^{\infty}k^3\left(|h_k|+\frac{|\psi_k|}{k}\right). \tag{4.43}$$

Ряд (4.43) сходится, если $h(x)\in C^4[0,l]$, $\psi(x)\in C^3[0,l]$, $h^{(i)}(0)=h^{(i)}(l)=\psi^{(i)}(0)=\psi^{(i)}(l)=0$, $i=0,2$. Следовательно, функция $\varphi(x)$ принадлежит классу $C^3[0,l]$ и $\varphi(0)=\varphi(l)=\varphi''(0)=\varphi''(l)=0$.

Если число $\widetilde{d}$ удовлетворяет условиям леммы 4.9, то ряд (4.42) мажорируется рядом

$$C_{35}\sum_{k=1}^{\infty}k^4\left(|h_k|+\frac{|\psi_k|}{k}\right). \tag{4.44}$$

Если $h(x)\in C^5[0,l]$, $\psi(x)\in C^4[0,l]$, $h^{(i)}(0)=h^{(i)}(l)=0$, $i=0,2,4$, $\psi^{(p)}(0)=\psi^{(p)}(l)=0$, $p=0,2$, то ряд (4.44) сходится.

Из приведенных выше рассуждений получаем следующее утверждение.

Теорема 4.5. *Предположим, что $\widetilde{d}$ является рациональным числом и $h(x)\in C^4[0,l]$, $\psi(x)\in C^3[0,l]$, $h^{(i)}(0)=h^{(i)}(l)=\psi^{(i)}(0)=\psi^{(i)}(l)=0$, $i=0,2$. Если $\Delta(k)\neq 0$ при $k=\overline{1,k_0}$, то существует единственное решение задачи* 3, *определяемое рядами* (4.1), (4.18). *Если $\Delta(k)=0$ при некоторых $k=k_1,k_2,\dots,k_m\leqslant k_0$, то задача* 3 *разрешима только тогда, когда выполнены условия* (4.39), *и в этом случае решение определяется рядами* (4.40) *и* (4.41).

Если $\widetilde{d}$ удовлетворяет условиям леммы 4.9 *и $h(x)\in C^5[0,l]$, $\psi(x)\in C^4[0,l]$, $h^{(i)}(0)=h^{(i)}(l)=0$, $i=0,2,4$, $\psi^{(p)}(0)=\psi^{(p)}(l)=0$, $p=0,2$, то существует единственное решение задачи* 3, *определяемое рядами* (4.1) *и* (4.18).

5. Построение решения интегральных уравнений Фредгольма первого рода

Следуя работе А. М. Денисова (см. [4, с. 140]), относительно неизвестных функций $\psi(x)$ и $\varphi(x)$ получим интегральные уравнения

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{a\lambda_k}\int_0^l\psi(\xi)X_k(\xi)d\xi\sin a\lambda_kdX_k(x)=h(x)-\sum_{k=1}^{\infty}\varphi_kX_k(x)\cos a\lambda_kd, \tag{5.1}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^l\varphi(\xi)X_k(\xi)d\xi\cos a\lambda_kdX_k(x)=h(x)-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{a\lambda_k}\psi_kX_k(x)\sin a\lambda_kd. \tag{5.2}$$

Покажем, что при $b=0$ найденные нами функции $\psi(x)$ и $\varphi(x)$ соответственно по формулам (3.18) и (4.18) являются решениями интегральных уравнений (5.1) и (5.2).

Используя формулы (2.6), разложим функции $\psi(x)$ и $\varphi(x)$ в ряд по системе функций $X_k(x)$:

$$\psi(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\psi_kX_k(x),\quad \varphi(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\varphi_kX_k(x). \tag{5.3}$$

На основании формул (3.18), (4.18) в силу единственности разложения получим

$$\psi_k = u_k'(0) = -\frac{a\mu_k \cos a\mu_k d}{\sin a\mu_k d}\varphi_k + \frac{a\mu_k}{\sin a\mu_k d}h_k, \tag{5.4}$$

$$\varphi_k = u_k(0) = \frac{h_k}{\cos a\mu_k d} - \frac{\psi_k}{a\mu_k}\frac{\sin a\mu_k d}{\cos a\mu_k d}. \tag{5.5}$$

С учетом равенства (5.4) преобразуем левую часть интегрального уравнения (5.1):

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{a\mu_k}\int_0^l \psi(\xi)X_k(\xi)d\xi \sin a\mu_k d X_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{a\mu_k}\psi_k \sin a\mu_k d X_k(x) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}\left[-\frac{a\mu_k \cos a\mu_k d}{a\mu_k \sin a\mu_k d}\varphi_k \sin a\mu_k d + \frac{a\mu_k}{a\mu_k \sin a\mu_k d}h_k \sin a\mu_k d\right] X_k(x) =$$

$$= h(x) - \sum_{k=1}^{\infty}\varphi_k X_k(x)\cos a\mu_k d,$$

т.е. получили правую часть уравнения (5.1).

Аналогично подставляя (5.5) в уравнение (5.2), получим верное равенство

$$\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^l \varphi(\xi)X_k(\xi)d\xi \cos a\mu_k d X_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\varphi_k \cos a\mu_k d X_k(x) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{h_k}{\cos a\mu_k d}\cos a\mu_k d - \frac{\psi_k}{a\mu_k}\frac{\sin a\mu_k d}{\cos a\mu_k d}\cos a\mu_k d\right] X_k(x) =$$

$$= h(x) - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{a\mu_k}\psi_k X_k(x)\sin a\mu_k d.$$

Следовательно, доказаны следующие утверждения.

Теорема 5.1. *Предположим, что выполнено одно из следующих условий*:

(1) $\widetilde{d}$ — *иррациональное число с ограниченным множеством элементов,* $h(x), \varphi(x) \in C^5[0,l]$, $h^{(i)}(0) = h^{(i)}(l) = \varphi^{(i)}(0) = \varphi^{(i)}(l) = 0$, $i = 0,2,4$;

(2) $\widetilde{d}$ — *алгебраическое число степени* $n > 2$, $h(x), \varphi(x) \in C^6[0,l]$, $h^{(i)}(0) = h^{(i)}(l) = \varphi^{(i)}(0) = \varphi^{(i)}(l) = 0$, $i = 0,2,4$.

Тогда существует единственное решение интегрального уравнения (5.1), *определяемое по формуле* (3.18).

Теорема 5.2. *Предположим, что выполнено одно из следующих условий*:

(1) $\widetilde{d}$ — *рациональное число,* $\widetilde{d} = p/q$, $p,q \in \mathbb{N}$, $(p,q) = 1$, $t/q \neq 1/2$, *при* $t \in [1, q-1] \cap \mathbb{N}$, $q \geqslant 2$ *и* $h(x) \in C^4[0,l]$, $\psi(x) \in C^3[0,l]$, $h^{(i)}(0) = h^{(i)}(l) = \psi^{(i)}(0) = \psi^{(i)}(l) = 0$, $i = 0,2$;

(2) $\widetilde{d}$ — *алгебраическое число степени* $n = 2$, $h(x) \in C^4[0,l]$, $\psi(x) \in C^3[0,l]$, $h^{(i)}(0) = h^{(i)}(l) = \psi^{(i)}(0) = \psi^{(i)}(l) = 0$, $i = 0,2$;

(3) $\widetilde{d}$ — *алгебраическое число степени* $n > 2$, $h(x) \in C^6[0,l]$, $\psi(x) \in C^5[0,l]$, $h^{(i)}(0) = h^{(i)}(l) = \psi^{(i)}(0) = \psi^{(i)}(l) = 0$, $p = 0,2,4$.

Тогда существует единственное решение интегрального уравнения (5.2), *определяемое по формуле* (4.18).

Теперь покажем, что при $b > 0$ функции $\psi(x)$ и $\varphi(x)$, определяемые формулами (3.59) и (4.41) соответственно, являются решениями интегральных уравнений (5.1) и (5.2).

На основании формул (5.3), (3.59), (4.41) и условий (3.55), (4.39) в силу единственности разложения получим

$$\psi_k = u_k'(0) = \begin{cases} -\dfrac{a\lambda_k \cos a\lambda_k d}{\sin a\lambda_k d}\varphi_k + \dfrac{a\lambda_k}{\sin a\lambda_k d} h_k, & \text{если } \delta(k) \neq 0, \\ A_k, & \text{если } \delta(k) = 0. \end{cases} \tag{5.6}$$

$$\varphi_k = u_k(0) = \begin{cases} \dfrac{h_k}{\cos a\lambda_k d} - \dfrac{\psi_k}{a\lambda_k}\dfrac{\sin a\lambda_k d}{\cos a\lambda_k d}, & \text{если } \Delta(k) \neq 0, \\ B_k, & \text{если } \Delta(k) = 0. \end{cases} \tag{5.7}$$

С учетом выражения (5.6) преобразуем левую часть интегрального уравнения (5.1):

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{a\lambda_k} \int_0^l \psi(\xi) X_k(\xi) d\xi \sin a\lambda_k d X_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{a\lambda_k} \psi_k \sin a\lambda_k d X_k(x) =$$
$$= \left(\sum_{k=1}^{k_1 - 1} + \ldots + \sum_{k=k_{m-1}+1}^{k_m - 1} + \sum_{k=k_m+1}^{+\infty} \right) \left[-\frac{a\lambda_k \cos a\lambda_k d}{a\lambda_k \sin a\lambda_k d} \varphi_k \sin a\mu_k d + \frac{a\lambda_k}{a\lambda_k \sin a\lambda_k d} h_k \sin a\lambda_k d \right] X_k(x) +$$
$$+ \sum_p \frac{A_p \sin a\lambda_p d}{a\lambda_p} X_p(x) = h(x) - \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k X_k(x) \cos a\lambda_k d,$$

т. е. получили правую часть уравнения (5.1).

Аналогично подставляя (5.7) в уравнение (5.2), получим верное равенство

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_0^l \varphi(\xi) X_k(\xi) d\xi \cos a\lambda_k d X_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k \cos a\lambda_k d X_k(x) =$$
$$= \left(\sum_{k=1}^{k_1 - 1} + \ldots + \sum_{k=k_{m-1}+1}^{k_m - 1} + \sum_{k=k_m+1}^{+\infty} \right) \left[\frac{h_k}{\cos a\lambda_k d} \cos a\lambda_k d - \frac{\psi_k}{a\lambda_k} \frac{\sin a\lambda_k d}{\cos a\lambda_k d} \cos a\lambda_k d \right] X_k(x) +$$
$$+ \sum_p B_p \cos a\lambda_p d X_p(x) = h(x) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{a\lambda_k} \psi_k X_k(x) \sin a\lambda_k d.$$

Таким образом, доказаны следующие утверждения.

Теорема 5.3. *Если* $\widetilde{d}$ *удовлетворяет условиям леммы* 3.4 *и* $h(x), \varphi(x) \in C^5[0,l]$, $h^{(i)}(0) = h^{(i)}(l) = \varphi^{(i)}(0) = \varphi^{(i)}(l) = 0$, $i = 0,2,4$, *то существует единственное решение интегрального уравнения* (5.1), *определяемое рядом* (3.18).

Пусть $\widetilde{d}$ *является рациональным числом,* $h(x), \varphi(x) \in C^5[0,l]$, $h^{(i)}(0) = h^{(i)}(l) = \varphi^{(i)}(0) = \varphi^{(i)}(l) = 0$, $i = 0,2,4$. *Если* $\delta(k) \neq 0$ *при* $k = \overline{1,k_0}$, *то существует единственное решение интегрального уравнения* (5.1), *определяемое рядом* (3.18). *Если* $\delta(k) = 0$ *при некоторых* $k = k_1, k_2, \ldots, k_m \leqslant k_0$, *то интегральное уравнение разрешимо только тогда, когда выполнены условия* (3.55); *в этом случае решение определяется рядом* (3.59).

Теорема 5.4. *Пусть* $\widetilde{d}$ *является рациональным числомб* $h(x) \in C^4\underline{[0,l]}$, $\psi(x) \in C^3[0,l]$, $h^{(i)}(0) = h^{(i)}(l) = \psi^{(i)}(0) = \psi^{(i)}(l) = 0$, $i = 0,2$. *Если* $\Delta(k) \neq 0$ *при* $k = \overline{1,k_0}$, *то существует единственное решение интегрального уравнения* (5.2), *определяемое рядом* (4.18). *Если* $\Delta(k) = 0$ *при некоторых* $k = k_1, k_2, \ldots, k_m \leqslant k_0$, *то интегральное уравнение разрешимо только тогда, когда выполнены условия* (4.39), *и в этом случае решение определяется рядом* (4.41).

Если $\widetilde{d}$ *удовлетворяет условиям леммы* 4.9, $h(x) \in C^5[0,l]$, $\psi(x) \in C^4[0,l]$, $h^{(i)}(0) = h^{(i)}(l) = 0$, $i = 0,2,4$, $\psi^{(p)}(0) = \psi^{(p)}(l) = 0$, $p = 0,2$, *то существует единственное решение интегрального уравнения* (5.2), *определяемое рядом* (4.18).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Арнольд В. И.* Малые знаменатели// Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1961. — *25*. — С. 21–86.
2. *Арнольд В. И.* Малые знаменатели и проблемы устойчивости движения в классической и небесной механике// Усп. мат. наук. — 1963. — *18*, т 6 (114). — С. 91–192.
3. *Галочкин А. И., Нестеренко Ю. В., Шидловский А. Б.* Введение в теорию чисел. — М.: Изд-во МГУ, 1995.
4. *Денисов А. М.* Введение в теорию обратных задач. — М.: Изд-во МГУ, 1994.
5. *Ломов С. А., Ломов И. С.* Основы математической теории пограничного слоя. — М.: Изд-во МГУ, 2011.
6. *Сабитов К. Б.* Уравнения математической физики. — М.: Физматлит, 2013.
7. *Сабитов К. Б.* Задача Дирихле для уравнений с частными производными высоких порядков// Мат. заметки. — 2015. — *97*, т 2. — С. 262–276.
8. *Сабитов К. Б.* Прямые и обратные задачи для уравнений смешанного параболо-гиперболического типа. — Уфа: Гилем, 2015.
9. *Сабитов К. Б., Сафин Э. М.* Обратная задача для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа// Мат. заметки. — 2010. — *87*, т 6. – С. 907–918.
10. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1966.
11. *Хинчин А. Я.* Цепные дроби. — М.: Наука, 1978.
12. *Шидловский А. Б.* Диофантовы приближения и трансцендентные числа. — М.: Изд-во МГУ, 1982.

К. Б. Сабитов
Институт прикладных исследований Республики Башкортостан, г. Стерлитамак
E-mail: sabitov_fmf@mail.ru

А. Р. Зайнуллов
Стерлитамакский филиал Башкирского государственного университета, г. Стерлитамак
E-mail: arturzayn@mail.ru