ISSN 0233-6723

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ

СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Тематические обзоры

Том 140

Москва 2017

ISSN 0233–6723

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

ВСЕРОССИЙСКИЙ ИНСТИТУТ
НАУЧНОЙ И ТЕХНИЧЕСКОЙ ИНФОРМАЦИИ
(ВИНИТИ РАН)

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ

СЕРИЯ
СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА
И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

ТЕМАТИЧЕСКИЕ ОБЗОРЫ

Том 140

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ.
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Москва 2017

СОДЕРЖАНИЕ

Уравнения Бесселя высоких порядков, интегрируемые в элементарных функциях
(*Ю. Ю. Багдерина*) 3

Интегрируемые двумерные решетки. Характеристические кольца Ли и их классификация
(*И. Т. Хабибуллин, М. Н. Попцова*) 18

Об одной интегрируемой дискретной системе
(*Е. В. Павлова, И. Т. Хабибуллин, А. Р. Хакимова*) 30

Об одной задаче для квазилинейного уравнения четного порядка
(*А. В. Юлдашева*) 43

Спектральная задача для ротора в неортогональной системе координат
(*Г. Г. Исламов*) 50

Неравенства, включающие дробные интегралы функции и ее производную
(*Р. Г. Насибуллин*) 68

О τ-компактности произведения τ-измеримых операторов, присоединенных к полуконечной алгебре фон Неймана
(*А. М. Бикчентаев*) 78

Случайные блуждания и меры на гильбертовом пространстве, инвариантные относительно сдвигов и поворотов
(*В. Ж. Сакбаев*) 88

Порядок Шоке и йордановы морфизмы операторных алгебр
(*Е. А. Турилова, Я. Хамхалтер*) 119

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 140 (2017). С. 3–17

УДК 517.927, 517.923

УРАВНЕНИЯ БЕССЕЛЯ ВЫСОКИХ ПОРЯДКОВ, ИНТЕГРИРУЕМЫЕ В ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФУНКЦИЯХ

© 2017 г. **Ю. Ю. БАГДЕРИНА**

Аннотация. Задача о собственной функции скалярного оператора Эйлера приводит к обыкновенному дифференциальному уравнению, являющемуся аналогом уравнения Бесселя высокого порядка. Его решение выражается в терминах элементарных функций, когда соответствующий оператор Эйлера факторизуется определенным образом. Получена формула, описывающая такие решения. Рассматривается задача о совместной собственной функции двух операторов Эйлера. Приводятся коммутирующие операторы Эйлера порядков 4, 6, 10 и формула, задающая их собственную функцию, а также коммутирующие операторы порядков 6 и 9.

Ключевые слова: оператор Эйлера, собственная функция, коммутирующие операторы.

AMS Subject Classification: 47E05, 34L10, 34B30

СОДЕРЖАНИЕ

1. Коммутирующие дифференциальные операторы 3
2. Уравнение Бесселя n-го порядка 4
3. Формула общего решения уравнения Бесселя с оператором (16) 6
4. Операторы Эйлера с совместной собственной функцией 8
Список литературы 17

1. Коммутирующие дифференциальные операторы

Два линейных скалярных дифференциальных оператора

$$A = D^n + \sum_{k=1}^{n} A_k(x) D^{n-k}, \quad B = D^m + \sum_{j=1}^{m} B_j(x) D^{m-j}, \quad D = \frac{d}{dx} \tag{1}$$

коммутируют, если выполнено соотношение

$$[A, B] \equiv AB - BA = 0.$$

Алгебраические свойства коммутативных колец дифференциальных операторов описаны в [6, 9]. Они нашли свое применение в теории интегрирования нелинейных уравнений типа Кортевега—де Фриза методами алгебраической геометрии (см. [2]). Эта проблема связана с задачей об описании операторов (1), имеющих совместную собственную функцию, и построении такой функции. В случае взаимно простых порядков m и n этих операторов она решена в [2]. Согласно [6], если операторы (1) удовлетворяют соотношению $AB = BA$, то существует такой ненулевой полином $Q(\lambda, \mu)$, что $Q(A, B) = 0$. В случае общего положения для точки T кривой Γ, заданной уравнением $Q(\lambda, \mu) = 0$, существует такая совместная собственная функция $\psi(T, x)$ операторов A и B, что $A\psi = \lambda\psi$, $B\psi = \mu\psi$. Число l линейно независимых совместных собственных функций, отвечающих общей точке $T \in \Gamma$, называется рангом пары A, B. Ранг совпадает с наибольшим общим множителем чисел m и n. При взаимно простых m, n ранг пары операторов A, B равен единице.

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект №14-11-00078).

В частном случае, когда $A_k = \alpha_k x^{-k}$, $B_j = \beta_j x^{-j}$ с некоторыми постоянными α_k, β_j, операторы (1) принято называть операторами Эйлера. Справедливо следующее утверждение (см. [4]).

Теорема 1. *Если порядки n и m операторов Эйлера* (1)*, удовлетворяющих соотношению*

$$A^m = B^n, \tag{2}$$

взаимно просты, то существуют такие полином P с ненулевым свободным членом и постоянная $\gamma \in \mathbb{C}$, что функция

$$\psi(\lambda, x) = (\lambda x)^\gamma P(\lambda x) \mathrm{e}^{\lambda x} \tag{3}$$

является общим решением уравнений $A\psi = \lambda^n \psi$ и $B\psi = \lambda^m \psi$.

Множество линейных операторов, коммутирующих с A, является коммутативным кольцом, образованным всеми полиномами от A с постоянными коэффициентами (см. [9]). В рассматриваемом здесь частном случае операторов Эйлера отсюда вытекает следующее утверждение.

Теорема 2. *Оператор Эйлера A коммутирует со всеми операторами $B = A^k$, $k \in \mathbb{N}$.*

Более интересным и нетривиальным представляется изучение операторов B, коммутирующих с оператором Эйлера A и не совпадающих с A^k. В случае произвольного ранга $l > 1$ коммутирующие операторы (1) с полиномиальными коэффициентами описаны в [8]. Если $n = 2l$, $m = (2g+1)l$, $g \in \mathbb{N}$, то соотношение $Q(A, B) = 0$ задается в форме

$$B^2 = A^{2g+1} + c_{2g} A^{2g} + \dots + c_1 A + c_0, \quad c_0, \dots, c_{2g} = \mathrm{const}\,.$$

Нетрудно видеть, что в частном случае операторов Эйлера должно выполняться условие $c_0 = \ldots = c_{2g} = 0$ и имеет место следующее утверждение.

Теорема 3. *Коммутирующие операторы Эйлера* (1) *порядков $n = ln'$ и $m = lm'$, где l, m', $n' \in \mathbb{N}$, удовлетворяют соотношению*

$$A^{m'} = B^{n'}. \tag{4}$$

В разделе 4 данной работы разрабатывается практический подход к проверке условий (2), (4) теорем 1, 3. В разделе 3 предлагается процедура построения общего решения задачи о собственных функциях оператора Эйлера, разрешимой в элементарных функциях. Необходимые обозначения вводятся в разделе 2.

2. Уравнение Бесселя n-го порядка

Собственной функцией оператора Эйлера n-го порядка

$$L_n = D^n + \sum_{k=1}^{n} C_n^k \frac{a_k}{x^k} D^{n-k} = D^n + n\frac{a_1}{x} D^{n-1} + \dots + n\frac{a_{n-1}}{x^{n-1}} D + \frac{a_n}{x^n}, \quad a_k \in \mathbb{C}, \tag{5}$$

называется функция $y(x)$, являющаяся решением обыкновенного дифференциального уравнения

$$L_n y = \lambda y, \quad \lambda = \mathrm{const} \neq 0. \tag{6}$$

Уравнение (6) будем называть уравнением Бесселя n-го порядка, поскольку при $n = 2$ оно совпадает с обычным уравнением Бесселя

$$L_2 y \equiv \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{2a_1}{x}\frac{dy}{dx} + \frac{a_2}{x^2} y = \lambda y. \tag{7}$$

Уравнение (7) имеет решение, выражающееся в элементарных функциях, тогда и только тогда, когда коэффициент a_2 равен

$$a_2 = (a_1 + M)(a_1 - M - 1), \quad M \in \mathbb{Z}_+.$$

В этом случае уравнение (7) представимо в виде

$$(xD + a_1 + M)(xD + a_1 - M - 1)y = \lambda x^2 y, \tag{8}$$

а соответствующий оператор Эйлера в левой части (7) факторизуется:

$$L_2=\left(D+\frac{a_1-M}{x}\right)\left(D+\frac{a_1+M}{x}\right)=\left(D+\frac{a_1+M+1}{x}\right)\left(D+\frac{a_1-M-1}{x}\right). \tag{9}$$

Отметим, что множители в левой части уравнения (8) перестановочны, а в обеих факторизациях (9) они имеют фиксированный порядок. Решением уравнения (7) с оператором (9) является функция

$$y=x^{M+1-a_1}\left(\frac{1}{x}D\right)^M\frac{w(x)}{x}, \tag{10}$$

где $w(x)$ удовлетворяет линейному уравнению с постоянными коэффициентами

$$\frac{d^2w}{dx^2}-\lambda w=0.$$

Нетрудно видеть, что функция (10) является комбинацией квазиполиномов вида (3),

$$y=x^{-M-a_1}\sum_{j=1}^{2}c_jP_M(\lambda_jx)\mathrm{e}^{\lambda_jx},\quad c_1,c_2=\mathrm{const},$$

где λ_1, λ_2 — корни квадратного уравнения $k^2=\lambda$, $P_M(z)$ — некоторый многочлен степени M.

Изучая аналогичным образом уравнение Бесселя n-го порядка, можно заметить, что для каждого $M\in\mathbb{Z}_+$ имеется $C^M_{M+n-2}=\dfrac{(M+n-2)!}{M!(n-2)!}$ наборов коэффициентов a_k оператора (5), когда решением уравнения (6) является функция вида

$$y=x^{m_0-a_1}D\Big(x^{m_M}D\Big(x^{m_{M-1}}D\Big(\dots\big(x^{m_2}D\big(x^{m_1}w(x)\big)\big)\dots\Big)\Big)\Big) \tag{11}$$

с некоторыми параметрами $m_i\in\mathbb{Z}$, $m_0+\dots+m_M=0$, где $w(x)$ удовлетворяет линейному уравнению

$$\frac{d^nw}{dx^n}-\lambda w=0. \tag{12}$$

Функция (11) также представима в виде

$$y=x^{-M-a_1}\sum_{j=1}^{n}c_jP_M(\lambda_jx)\mathrm{e}^{\lambda_jx},\quad c_1,\dots,c_n=\mathrm{const}, \tag{13}$$

где $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ — корни уравнения $k^n=\lambda$, $P_M(z)$ — некоторый многочлен степени M. Во всех этих случаях уравнение (6) представимо в виде

$$\big(xD+a_1+q_1\big)\big(xD+a_1+q_2\big)\cdots\big(xD+a_1+q_n\big)y=\lambda x^ny, \tag{14}$$

с некоторыми различными по модулю n числами $q_j\in\mathbb{Z}$, удовлетворяющими соотношениям

$$q_1+\dots+q_n=\frac{n(1-n)}{2},\quad \max\{q_1,\dots,q_n\}=M$$

(ср. [5, теорема 1]), которые связаны с параметрами соответствующей факторизации оператора (5)

$$L_n=\left(D+\frac{a_1+r_n}{x}\right)\left(D+\frac{a_1+r_{n-1}}{x}\right)\cdots\left(D+\frac{a_1+r_1}{x}\right),\quad r_j\in\mathbb{Z},\quad r_1+\dots+r_n=0 \tag{15}$$

соотношениями

$$q_j=r_j-j+1,\quad j=1,\dots,n.$$

Сомножители в левой части уравнения (14) допускают $n!$ перестановок и, соответственно, оператор (5) имеет $n!$ различных представлений вида (15) (ср. с (9) при $n=2$). В этом множестве представлений присутствует одна факторизация вида

$$L_n=\left(D+\frac{a_1+ns_n}{x}\right)\left(D+\frac{a_1+ns_{n-1}}{x}\right)\cdots\left(D+\frac{a_1+ns_1}{x}\right),\quad s_j\in\mathbb{Z},\quad s_1+\dots+s_n=0. \tag{16}$$

Примем ее за базисную для того, чтобы зафиксировать соответствующий ей порядок следования сомножителей в левой части уравнения (14):

$$q_1 = ns_1, \quad q_2 = ns_2 - 1, \quad q_3 = ns_3 - 2, \quad \ldots, \quad q_{n-1} = ns_{n-1} - n + 2, \quad q_n = ns_n - n + 1. \tag{17}$$

3. Формула общего решения уравнения Бесселя с оператором (16)

Необходимо конкретизировать, чему равны числа $m_0, \ldots, m_M$ в формуле (11) для общего решения уравнения (6) с оператором (16). Параметр $M = \max\{q_1, \ldots, q_n\}$ задает число дифференцирований в формуле (11) и, соответственно, степень полинома $P_M(z)$ в (13). При $n = 2$ все значения степеней в формуле (10) для общего решения уравнения Бесселя определяются одним параметром M.

Если $n \geqslant 3$, то пусть σ — циклическая последовательность, образованная числами $q_1, \ldots, q_n$, следующими в порядке, указанном в (17). Помимо M при определении степеней $m_0, \ldots, m_M$ в формуле (11) важную роль играют $n-2$ члена последовательности σ, следующие за M. А именно, M_1 — член σ, следующий за M, и если $n > 3$, то M_{j+1} — член σ, следующий за M_j, $j = 1, \ldots, n-3$.

Заметим, что каждая функция (11) допускает $M!$ равносильных представлений с различными наборами значений $m_0, \ldots, m_M$. Это справедливо и для обычного уравнения Бесселя. Так, например, еще одним представлением функции (10) является

$$y = x^{-M-1-a_1}(x^3 D)^M \frac{w(x)}{x^{2M-1}}.$$

Здесь выбирается тот набор $m_1, \ldots, m_M$, в котором содержится наибольшее количество значений m_i, равных $1 - n$ (ср. с (10), где все $m_1, \ldots, m_M$ равны -1).

0) Если $M = M_j + j$ для всех $j = 1, \ldots, n-2$, то решением уравнения (6) является функция

$$y = x^{(n-1)(M+1)-a_1}(x^{1-n}D)^M (x^{1-n}w(x)), \tag{18}$$

где $w(x)$ удовлетворяет уравнению (12). По этой формуле получается решение (10) уравнения Бесселя (8).

1) Если $M = M_j + j$ для всех $j = 1, \ldots, n-2$, кроме j_1, то решением уравнения (6) является функция (11), где $m_0 = 1 - n - M_{j_1}$, $m_i = 1 - n$ для всех $i = 1, \ldots, M$, кроме

$$i_1 = n^{-1}((n-1)M + M_{j_1} + j_1 + n),$$

для которого

$$m_{i_1} = (n-1)M + M_{j_1}.$$

2) Если $M = M_j + j$ для всех $j = 1, \ldots, n-2$, кроме j_1, j_2, то решением уравнения (6) является функция (11), где $m_0 = 1 - n - M_{j_1}$, $m_i = 1 - n$ для всех $i = 1, \ldots, M$, кроме

$$i_1 = n^{-1}((n-2)M + M_{j_1} + M_{j_2} + j_1 + j_2 + n), \quad i_2 = n^{-1}((n-1)M + M_{j_1} + j_1 + n),$$

для которых

$$m_{i_1} = (n-2)M + M_{j_1} + M_{j_2} + j_1, \quad m_{i_2} = M - M_{j_2} - j_1 - n + 1.$$

3) Если $M = M_j + j$ для всех $j = 1, \ldots, n-2$, кроме j_1, j_2, j_3, то решением уравнения (6) является функция (11), где $m_0 = 1 - n - M_{j_1}$, $m_i = 1 - n$ для всех $i = 1, \ldots, M$, кроме

$$\begin{aligned} i_1 &= n^{-1}((n-3)M + M_{j_1} + M_{j_2} + M_{j_3} + j_1 + j_2 + j_3 + n), \\ i_2 &= n^{-1}((n-2)M + M_{j_1} + M_{j_2} + j_1 + j_2 + n), \\ i_3 &= n^{-1}((n-1)M + M_{j_1} + j_1 + n), \end{aligned}$$

для которых

$$\begin{aligned} m_{i_1} &= (n-3)M + M_{j_1} + M_{j_2} + M_{j_3} + j_1 + j_2, \\ m_{i_2} &= M - M_{j_3} - j_2 - n + 1, \\ m_{i_3} &= M - M_{j_2} - j_1 - n + 1. \end{aligned}$$

Пункты 2), 3) обобщаются на случай произвольного $2 \leqslant k \leqslant n-2$ следующим образом:

k) Если $M = M_j + j$ для всех $j = 1, \dots, n-2$, кроме $j_1, \dots, j_k$, то решением уравнения (6) является функция (11), где $m_0 = 1 - n - M_{j_1}$, $m_i = 1 - n$ для всех $i = 1, \dots, M$, кроме

$$i_h = n^{-1}\Big((n-k+h-1)M + M_{j_1} + \dots + M_{j_{k-h+1}} + j_1 + \dots + j_{k-h+1} + n\Big), \quad h = 1, \dots, k,$$

для которых

$$m_{i_1} = (n-k)M + M_{j_1} + \dots + M_{j_k} + j_1 + \dots + j_{k-1},$$
$$m_{i_h} = M - M_{j_{k-h+2}} - j_{k-h+1} - n + 1, \quad h = 2, \dots, k.$$

В получаемом таким образом решении (13) уравнения (6) полином $P_M(z)$ имеет вид

$$P_M(z) = \sum_{j=0}^{M} (-1)^{j+M} \pi_j z^j, \quad \pi_j \in N, \quad 1 = \pi_M \leqslant \pi_{M-1} \leqslant \pi_{M-2} \leqslant \ldots \leqslant \pi_0, \tag{19}$$

причем

$$\begin{gathered} \pi_{M-1} \leqslant \frac{1}{2}(n-1)M(M+1), \\ \pi_{M-2} \leqslant \frac{1}{24}(n-1)(M-1)M(M+1)\big(3M(n-1) + 2(n+1)\big) \end{gathered} \tag{20}$$

(точные равенства для π_{M-1}, π_{M-2} достигаются в решениях, получаемых по формуле (18)). Поэтому, если для некоторого полинома (19) выполняется, например, условие

$$\pi_{M-1} > \frac{1}{2}(k-1)M(M+1), \quad k \in \mathbb{N},$$

то такой полином может быть частью собственной функции только операторов L_n порядка $n > k$.

Пример 1. Для оператора Эйлера четвертого порядка, допускающего факторизацию

$$L_4 = \left(D + \frac{a_1 - 4}{x}\right)\left(D + \frac{a_1 + 4}{x}\right)\left(D + \frac{a_1}{x}\right)^2, \tag{21}$$

числа

$$s_1 = s_2 = 0, \quad s_3 = 1, \quad s_4 = -1$$

задают последовательность (17) в виде

$$q_1 = 0, \quad q_2 = -1, \quad q_3 = 2, \quad q_4 = -7.$$

Здесь

$$M = 2, \quad M_1 = -7, \quad M_2 = 0$$

и, значит, условие $M = M_j + j$ нарушается для $j_1 = 1$. Следуя пункту 1), вычислим

$$i_1 = 1, \quad m_0 = 4, \quad m_1 = -1, \quad m_2 = -3.$$

Подставив эти значения в (11), для уравнения $L_4 y = \lambda y$ получим общее решение

$$y = x^{4-a_1} D\left(\frac{1}{x^3} D \frac{w(x)}{x}\right) = \frac{1}{x^{2+a_1}} \sum_{j=1}^{4} c_j \mathrm{e}^{\lambda_j x}\Big((\lambda_j x)^2 - 5\lambda_j x + 5\Big), \quad \frac{d^4 w}{dx^4} = \lambda w, \quad \lambda_j^4 = \lambda.$$

Для оператора Эйлера седьмого порядка

$$L_4 = \left(D + \frac{a_1}{x}\right)\left(D + \frac{a_1 + 7}{x}\right)\left(D + \frac{a_1}{x}\right)\left(D + \frac{a_1 - 7}{x}\right)\left(D + \frac{a_1}{x}\right)^3 \tag{22}$$

с

$$s_1 = s_2 = s_3 = s_5 = s_7 = 0, \quad s_4 = -1, \quad s_6 = 1$$

последовательность (17) имеет вид

$$q_1 = 0, \quad q_2 = -1, \quad q_3 = -2, \quad q_4 = -10, \quad q_5 = -4, \quad q_6 = 2, \quad q_7 = -6.$$

В данном случае

$$M = 2, \quad M_1 = -6, \quad M_2 = 0, \quad M_3 = -1, \quad M_4 = -2, \quad M_5 = -10$$

и $M \neq M_j + j$ для $j_1 = 1$, $j_2 = 5$. Выполненные в соответствии с пунктом 2) вычисления приводят к

$$i_1 = 1, \quad i_2 = 2, \quad m_0 = 0, \quad m_1 = -5, \quad m_2 = 5.$$

Подстановка этих значений в (11) для уравнения $L_7 y = \mu y$ дает общее решение

$$y = x^{-a_1} D\left(x^5 D \frac{v(x)}{x^5}\right) = \frac{1}{x^{2+a_1}} \sum_{j=1}^{7} c_j e^{\mu_j x}\Big((\mu_j x)^2 - 5\mu_j x + 5\Big), \quad \frac{d^7 v}{dx^7} = \mu v, \quad \mu_j^7 = \mu.$$

Таким образом, операторы (21), (22) имеют совместную собственную функцию (когда $\mu^4 = \lambda^7$).

4. Операторы Эйлера с совместной собственной функцией

Оператор L_n, допускающий факторизацию (15), будем обозначать

$$L_n = \Lambda_n\big[r_1, \dots, r_n\big] = \Lambda_n\big\{q_1, \dots, q_n\big\}, \quad q_j = r_j - j + 1, \quad j = 1, \dots, n. \tag{23}$$

Здесь квадратные скобки указывают на фиксированный порядок в последовательности чисел $\big[r_1, \dots, r_n\big]$, а фигурные скобки — на перестановочность чисел в множестве $\big\{q_1, \dots, q_n\big\}$. Пусть имеется также оператор

$$L_m = \Lambda_m\big[R_1, \dots, R_m\big] = \Lambda_m\big\{Q_1, \dots, Q_m\big\}, \quad Q_i = R_i - i + 1, \quad i = 1, \dots, m. \tag{24}$$

Если l — наибольший общий множитель чисел m и n, т.е. $m = lm'$, $n = ln'$, где m', n' — взаимно простые числа, то по теореме 3 операторы L_m и L_n имеют совместную собственную функцию при условии (4). Это условие легко проверяется рассмотрением последовательностей $q_1, \dots, q_n$ и $Q_1, \dots, Q_m$ в (23), (24).

Прежде всего, необходимым условием существования совместной собственной функции у операторов (23), (24) является

$$\max\big\{q_1, \dots, q_n\big\} = \max\big\{Q_1, \dots, Q_m\big\}. \tag{25}$$

Также, как видно из (13), если L_n имеет вид (5), а оператор L_m равен

$$L_m = D^m + \sum_{j=1}^{m} C_m^j \frac{b_j}{x^j} D^{m-j} = D^m + m\frac{b_1}{x} D^{m-1} + \dots + m\frac{b_{m-1}}{x^{m-1}} D + \frac{b_m}{x^m}, \quad b_i \in \mathbb{C},$$

то должно выполняться равенство

$$b_1 = a_1. \tag{26}$$

В равенство (4) входят два оператора порядка $m'n = n'm$, а именно,

$$\begin{aligned} L_n^{m'} &= \Lambda_{m'n}\Big[\underbrace{r_1, \dots, r_n, r_1, \dots, r_n, \dots, r_1, \dots, r_n}_{m' \text{ раз}}\Big] = \\ &= \Lambda_{m'n}\Big\{q_1, \dots, q_n, q_1 - n, \dots, q_n - n, \dots, q_1 - (m'-1)n, \dots, q_n - (m'-1)n\Big\}, \\ L_m^{n'} &= \Lambda_{n'm} = \Big[\underbrace{R_1, \dots, R_m, R_1, \dots, R_m, \dots, R_1, \dots, R_m}_{n' \text{ раз}}\Big] = \\ &= \Lambda_{n'm}\Big\{Q_1, \dots, Q_m, Q_1 - m, \dots, Q_m - m, \dots, Q_1 - (n'-1)m, \dots, Q_m - (n'-1)m\Big\}. \end{aligned} \tag{27}$$

Если выполнены условия (25), (26) и множества

$$\begin{aligned} \Omega_n^{m'} &= \Big\{q_1, \dots, q_n, q_1 - n, \dots, q_n - n, \dots, q_1 - (m'-1)n, \dots, q_n - (m'-1)n\Big\}, \\ \Omega_m^{n'} &= \Big\{Q_1, \dots, Q_m, Q_1 - m, \dots, Q_m - m, \dots, Q_1 - (n'-1)m, \dots, Q_m - (n'-1)m\Big\} \end{aligned} \tag{28}$$

совпадают, то операторы $L_n^{m'}$, $L_m^{n'}$ равны друг другу и, следовательно, операторы (23), (24) имеют совместную собственную функцию.

Пример 2. Рассмотренные в примере 1 операторы

$$L_4 = \Lambda_4\bigl[0,\ 0,\ 4,\ -4\bigr], \quad L_7 = \Lambda_7\bigl[0,\ 0,\ 0,\ -7,\ 0,\ 7,\ 0\bigr]$$

имеют совместную собственную функцию, поскольку $L_4^7 = L_7^4$. В этом нетрудно убедиться, сравнив соответствующие множества Ω_4^7 и Ω_7^4 в операторах

$$L_4^7 = \Lambda_{28}\Bigl\{0,\ -1,\ 2,\ -7,\ -4,\ -5,\ -2,\ -11,\ -8,\ -9,\ -6,\ -15,\ -12,\ -13,\ -10,\ -19,\ -16,\ -17,\ -14,\ -23,\ -20,\ -21,\ -18,\ -27,\ -24,\ -25,\ -22,\ -31\Bigr\},$$

$$L_7^4 = \Lambda_{28}\Bigl\{0,\ -1,\ -2,\ -10,\ -4,\ 2,\ -6,\ -7,\ -8,\ -9,\ -17,\ -11,\ -5,\ -13,\ -14,\ -15,\ -16,\ -24,\ -18,\ -12,\ -20,\ -21,\ -22,\ -23,\ -31,\ -25,\ -19,\ -27\Bigr\}.$$

Изложенный выше подход можно также использовать, если для данного оператора L_n требуется перечислить операторы L_m, имеющие с ним совместную собственную функцию. В частности, такими операторами будут все операторы L_n^k, $k \in \mathbb{N}$. Также, если найден некоторый оператор L_m, имеющий с L_n совместную собственную функцию, то этим свойством будут обладать и все операторы L_m^k, $k \in \mathbb{N}$.

Пусть порядки оператора L_n и искомого оператора L_m удовлетворяют условию $m = lm'$, $n = ln'$, где m', n' — взаимно простые числа. Возведя оператор L_n в степень m', получим оператор (27). Наибольшее число в множестве (28) равно $\kappa_1 = \max\{q_1, \dots, q_n\}$. Составим последовательность длины n'

$$\tau_1 = \Bigl[\kappa_1,\ \kappa_1 - m,\ \kappa_1 - 2m,\ \dots,\ \kappa_1 - (n'-1)m\Bigr]. \tag{29_1}$$

На каждом следующем шаге $h = 2, \dots, m$ в множестве (28), из которого исключены числа, входящие в последовательности (29_1), …, (29_{h-1}), выбирается наибольшее число κ_h и составляется последовательность

$$\tau_h = \Bigl[\kappa_h,\ \kappa_h - m,\ \kappa_h - 2m,\ \dots,\ \kappa_h - (n'-1)m\Bigr]. \tag{29_h}$$

Если в какую-либо из последовательностей $\tau_1, \dots, \tau_m$ входит число, не принадлежащее множеству (28), то оператор Эйлера порядка m, имеющий с L_n совместную собственную функцию, не существует. Если множество чисел из всех последовательностей $\tau_1, \dots, \tau_m$ совпадает с множеством (28), то это означает, что оператор

$$L_m = \Lambda_m\bigl\{\kappa_1,\ \kappa_2,\ \dots,\ \kappa_m\bigr\}$$

имеет с L_n совместную собственную функцию.

Пример 3. Найдем операторы L_m, имеющие совместную собственную функцию с оператором (21). При $M = 2$ условия (20) принимают вид

$$\pi_1 \leqslant 3(n-1), \quad \pi_0 \leqslant (n-1)(2n-1).$$

Для полинома $P_2(z) = z^2 - 5z + 5$ коэффициенты $\pi_0 = \pi_1 = 5$ удовлетворяют этим неравенствам при $n \geqslant 3$. Чтобы найти такой оператор L_3, что $L_3^4 = L_4^3$, вычислим

$$L_4^3 = \Lambda_{12}\Bigl[0,\ 0,\ 4,\ -4,\ 0,\ 0,\ 4,\ -4,\ 0,\ 0,\ 4,\ -4\Bigr] = \Lambda_{12}\Bigl\{0,\ -1,\ 2,\ -7,\ -4,\ -5,\ -2,\ -11,\ -8,\ -9,\ -6,\ -15\Bigr\}$$

и составим последовательности

$$\tau_1 = \Bigl[2,\ -1,\ -4,\ -7\Bigr], \quad \tau_2 = \Bigl[0,\ -3,\ -6,\ -9\Bigr], \quad \tau_3 = \Bigl[-2,\ -5,\ -8,\ -11\bigr].$$

Нетрудно видеть, что в τ_2 входит число -3, не принадлежащее множеству Ω_4^3. Следовательно, оператор Эйлера третьего порядка, имеющий с L_4 совместную собственную функцию, не существует. Но такую функцию имеет оператор

$$L_6 = \Lambda_6\Bigl[0,\ 0,\ 0,\ -6,\ 6,\ 0\Bigr] = \Lambda_6\Bigl\{0,\ -1,\ -2,\ -9,\ 2,\ -5\Bigr\},$$

поскольку из чисел, входящих в Ω_4^3, можно составить последовательности

$$\tau_1 = [2,\ -4],\quad \tau_2 = [0,\ -6],\quad \tau_3 = [-1,\ -7],$$
$$\tau_4 = [-2,\ -8],\quad \tau_5 = [-5,\ -11],\quad \tau_6 = [-9,\ -15].$$

Это означает, что выполняется условие $L_4^3 = L_6^2$. Аналогичным образом можно найти оператор

$$L_{10} = \Lambda_{10}\Big[0,\ 0,\ 0,\ -10,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 10,\ 0\Big]$$
$$= \Lambda_{10}\Big\{0,\ -1,\ -2,\ -13,\ -4,\ -5,\ -6,\ -7,\ 2,\ -9\Big\},$$

имеющий совместную собственную функцию с L_4, составив из множества

$$\Omega_4^5 = \Big\{0,\ -1,\ 2,\ -7,\ -4,\ -5,\ -2,\ -11,\ -8,\ -9,\ -6,\ -15,$$
$$-12,\ -13,\ -10,\ -19,\ -16,\ -17,\ -14,\ -23\Big\}$$

последовательности

$$\tau_1 = [2,\ -8],\quad \tau_2 = [0,\ -10],\quad \tau_3 = [-1,\ -11],\quad \tau_4 = [-2,\ -12],\quad \tau_5 = [-4,\ -14],$$
$$\tau_6 = [-5,\ -15],\quad \tau_7 = [-6,\ -16],\quad \tau_8 = [-7,\ -17],\quad \tau_9 = [-9,\ -19],\quad \tau_{10} = [-13,\ -23],$$

и убедиться, что не существует оператора L_5, обладающего этим свойством, поскольку в первую из последовательностей

$$\tau_1 = \Big[2,\ -3,\ -8,\ -13\Big],\quad \tau_2 = \Big[0,\ -5,\ -10,\ -15\Big],\quad \tau_3 = \Big[-1,\ -6,\ -11,\ -16\Big],$$
$$\tau_4 = \Big[-2,\ -7,\ -12,\ -17\Big],\quad \tau_5 = \Big[-4,\ -9,\ -14,\ -19\Big]$$

входит число -3, не принадлежащее Ω_4^5.

Вопрос о существовании операторов Эйлера L_m и L_n, обладающих совместной собственной функцией, имеет разный ответ, в зависимости от того, являются ли m и n взаимно простыми числами.

1. Если m и n — взаимно простые числа, то операторы L_m и L_n, имеющие совместную собственную функцию (11), могут существовать, только если в (11) параметр M не превосходит некоторого значения. Например, такие операторы L_2 и L_{2k+1} не существуют, если $M > k$, $k \in \mathbb{N}$. Такие операторы L_3 и L_m, $m \neq 3k$ не существуют, если $M \geqslant m$, m, $k \in \mathbb{N}$. Не существуют такие операторы L_4 и L_3, если $M > 3$; L_4 и L_5, если $M > 5$; L_4 и L_7, если $M > 9$; L_4 и L_9, если $M > 12$ и т. д.

2. Для любого оператора L_n, факторизующегося в форме (16), найдется оператор L_{kn}, $k \in \mathbb{N}$, имеющий с L_n совместную собственную функцию, вне зависимости от значения M. Согласно теореме 2, это оператор L_n^k.

3. Если $m = lm'$, $n = ln'$, $l > 1$, где m', n' — взаимно простые числа, то при любом M найдутся операторы L_m и L_n с совместной собственной функцией (11), что согласуется с [7]. Если $l = 2$, то начиная с некоторого значения M, таких операторов L_m и L_n имеется фиксированное количество. Например, при $M \geqslant 2g$ найдется $(g+1)^2$ пар операторов L_4 и $L_{2(2g+1)}$, имеющих совместную собственную функцию (11) с данным значением M. При $M \geqslant 6g$ имеется $(g+1)^2(3g+2)^2/4$ пар коммутирующих операторов L_6 и $L_{2(3g+1)}$; при $M \geqslant 6g-4$ имеется $g^2(3g+1)^2/4$ пар коммутирующих операторов L_6 и $L_{2(3g-1)}$, $g \in \mathbb{N}$ с данным значением M.

В частности, при $M \geqslant 2$ имеется четыре пары коммутирующих операторов Эйлера L_4 и L_6, при $M \geqslant 4$ — девять пар операторов L_4 и L_{10}, а при $M \geqslant 8$ — 49 пар операторов L_6 и L_{10}. Они перечислены во втором столбце таблицы 1 вместе со своей собственной функцией. Функция y является решением уравнений Бесселя (6) с соответствующими операторами L_4, L_6 и L_{10}, где $\lambda = \mu^n$, а функция w удовлетворяет уравнениям (12) с соответствующими значениями λ. Коммутирующие операторы существуют, и формула для y справедлива при $M \geqslant M_0$. Число M_0 указано как первая цифра в двойной нумерации, используемой в первом столбце таблицы 1.

Заметим, что здесь рассматривались только такие операторы L_n, для которых факторизация оператора $x^n L_n$ в левой части уравнения (14) не имеет корней, равных по модулю n. Операторы, перечисленные в таблице 1, коммутируют и при произвольных значениях M, а не только $M \in \mathbb{Z}_+$. Но их совместная собственная функция уже не будет представима в виде конечной суммы квазиполиномов. В [1] получены некоторые пары коммутирующих операторов L_4 и L_6, в том числе имеющие кратные корни в своей факторизации. Задача построения совместной собственной функции этих операторов в [1] не ставилась. Обзор результатов о коммутирующих операторах ранга 2 (не только с полиномиальными коэффициентами) можно найти в [3].

Если $l \geqslant 3$, то число операторов Эйлера L_m и L_n, обладающих совместной собственной функцией (11), зависит от M. Например, для каждого значения $M \geqslant 3g-1$ найдется $(M+1-3g/2)(g+1)^3$ пар таких операторов L_6 и $L_{3(2g+1)}$, $g \in \mathbb{N}$. При $g = 1$ список коммутирующих операторов, не имеющих кратных корней в факторизации операторов $x^6 L_6$ и $x^9 L_9$, составляют:

$$\begin{aligned}
(1)\quad & L_6 = \Lambda_6\Big\{M,\ M-3,\ A,\ A-3,\ -3-M-A,\ -6-M-A\Big\} = L_3^2,\\
& L_3 = \Lambda_3\Big\{M,\ A,\ -3-M-A\Big\},\\
& L_9 = \Lambda_9\Big\{M,\ M-3,\ M-6,\ A,\ A-3,\ A-6,\ -3-M-A,\ -6-M-A,\ -9-M-A\Big\}\\
& \quad = L_3^3,\\
& A = -m-1, \ldots, M-1\ /\{M-3k\}, \quad M \geqslant 0;\\
(2)\quad & L_6 = \Lambda_6\Big\{M,\ M-3,\ B,\ B-9,\ -M-B,\ -3-M-B\Big\},\\
& B = 1-2M,\ \ldots,\ M-1\ /\{M-3k\},\\
& L_9 = \Lambda_9\Big\{M,\ M-3,\ M-6,\ B,\ B-6,\ B-12,\ -M-B,\ -3-M-B,\ -6-M-B\Big\},\\
& M \geqslant 1;\\
(3)\quad & L_6 = \Lambda_6\Big\{M,\ M-9,\ C,\ C-3,\ -M-C,\ -3-M-C\Big\},\\
& C = 1-2M, \ldots, -m-1\ /\{M-3k,\ k \geqslant m+1\},\\
& L_9 = \Lambda_9\Big\{M,\ M-6,\ M-12,\ C,\ C-3,\ C-6,\ -M-C,\ -3-M-C,\ -6-M-C\Big\},\\
& M \geqslant 1;\\
(4)\quad & L_6 = \Lambda_6\Big\{M,\ M-3,\ E,\ E-9,\ 3-M-E,\ -6-M-E\},\\
& E = 2-m, \ldots, M-1\ /\{M-3k\},\\
& L_9 = \Lambda_9\Big\{M,\ M-3,\ M-6,\ E,\ E-6,\ E-12,\ 3-M-E,\ -3-M-E,\ -9-M-E\Big\},\\
& M \geqslant 2;\\
(5)\quad & L_6 = \Lambda_6\Big\{M,\ M-9,\ G,\ G-3,\ 3-M-G,\ -6-M-G\Big\},\\
& G = 4-2M, \ldots, M-1\ /\{M-3k\},\\
& L_9 = \Lambda_9\Big\{M,\ M-6,\ M-12,\ G,\ G-3,\ G-6,\ 3-M-G,\ -3-M-G,\ -9-M-G\Big\},\\
& M \geqslant 2;\\
(6)\quad & L_6 = \Lambda_6\Big\{M,\ M-9,\ H,\ H-9,\ 6-M-H,\ -3-M-H\Big\},\\
& H = 7-2M, \ldots, 2-m\ /\{M-3k,\ k \geqslant m\},\\
& L_9 = \Lambda_9\Big\{M,\ M-6,\ M-12,\ H,\ H-6,\ H-12,\ 6-M-H,\ -M-H,\ -6-M-H\Big\},\\
& M \geqslant 3.
\end{aligned}$$

Здесь $k \in \mathbb{N}$, m — неотрицательное целое число из представления четного $M = 2m$ или нечетного $M = 2m + 1$.

Таблица 1. Коммутирующие операторы порядков 4, 6, 8, 10 и их собственная функция

№	Коммутирующие операторы и собственная функция
0.1	$L_4 = L_2^2$, $L_6 = L_2^3$, $L_8 = L_2^4$, $L_{10} = L_2^5$, $L_2 = \Lambda_2\{M, -M-1\}$, $y = x^{M+1-a_1}(x^{-1}D)^M w/x$
1.1	$\Lambda_4\{M, M-2, 1-M, -M-5\}$, $\Lambda_6\{M, M-2, M-4, 1-M, -M-3, -M-7\}$ $\Lambda_{10}\{M, M-2, M-4, M-6, M-8, 1-M, -M-3, -M-5, -M-7, -M-11\}$ $y = x^{M+2-a_1}D(x^{-2}(x^{-1}D)^{M-1}w/x)$
1.2	$\Lambda_4\{M, M-6, 1-M, -M-1\}$, $\Lambda_6\{M, M-4, M-8, 1-M, -M-1, -M-3\}$ $\Lambda_{10}\{M, M-4, M-6, M-8, M-12, 1-M, -M-1, -M-3, -M-5, -M-7\}$ $y = x^{3-M-a_1}D(x^{2M-3}(x^{-1}D)^{M-1}w/x)$
1.3	$\Lambda_6\{M, M-2, M-4, 1-M, -M-1, -M-9\}$, $y = x^{M+4-a_1}D(x^{-4}(x^{-1}D)^{M-1}w/x)$ $\Lambda_8\{M, M-2, M-4, M-6, 1-M, -M-1, -M-5, -M-11\}$ $\Lambda_{10}\{M, M-2, M-4, M-6, M-8, 1-M, -M-1, -M-5, -M-7, -M-13\}$
1.4	$\Lambda_6\{M, M-2, M-10, 1-M, -M-1, -M-3\}$, $y = x^{5-M-a_1}D(x^{2M-5}(x^{-1}D)^{M-1}w/x)$ $\Lambda_8\{M, M-2, M-6, M-12, 1-M, -M-1, -M-3, -M-5\}$ $\Lambda_{10}\{M, M-2, M-6, M-8, M-14, 1-M, -M-1, -M-3, -M-5, -M-7\}$
2.1	$\Lambda_4\{M, M-6, 3-M, -M-3\}$, $\Lambda_6\{M, M-4, M-8, 3-M, -M-1, -M-5\}$ $\Lambda_{10}\{M, M-4, M-6, M-8, M-12, 3-M, -M-1, -M-3, -M-5, -M-9\}$ $y = x^{3-M-a_1}D(x^{2M-2}D(x^{-2}(x^{-1}D)^{M-2}w/x))$
2.2	$\Lambda_{10}\{M, M-2, M-4, M-6, M-8, 3-M, -M-1, -M-5, -M-9, -M-13\}$ $\Lambda_4\{M, M-2, 3-M, -M-7\}$, $y = x^{M+4-a_1}D(x^{-3}D(x^{-2}(x^{-1}D)^{M-2}w/x))$
2.3	$\Lambda_{10}\{M, M-4, M-8, M-12, M-16, 3-M, 1-M, -M-1, -M-3, -M-5\}$ $\Lambda_4\{M, M-10, 3-M, 1-M\}$, $y = x^{7-M-a_1}D(x^{-3}D(x^{2M-5}(x^{-1}D)^{M-2}w/x))$
2.4	$\Lambda_6\{M, M-2, M-4, 3-M, -M-5, -M-7\}$, $y = x^{M+2-a_1}D(x^{-1}D(x^{-2}(x^{-1}D)^{M-2}w/x))$ $\Lambda_8\{M, M-2, M-4, M-6, 3-M, -M-3, -M-7, -M-9\}$ $\Lambda_{10}\{M, M-2, M-4, M-6, M-8, 3-M, -M-3, -M-5, -M-9, -M-11\}$
2.5	$\Lambda_6\{M, M-8, M-10, 3-M, 1-M, -M-1\}$ $\Lambda_8\{M, M-6, M-10, M-12, 3-M, 1-M, -M-1, -M-3\}$ $\Lambda_{10}\{M, M-6, M-8, M-12, M-14, 3-M, 1-M, -M-1, -M-3, -M-5\}$ $y = x^{5-M-a_1}D(x^{-1}D(x^{2M-5}(x^{-1}D)^{M-2}w/x))$
2.6	$\Lambda_6\{M, M-2, M-10, 3-M, -M-1, -M-5\}$ $\Lambda_8\{M, M-2, M-6, M-12, 3-M, -M-1, -M-3, -M-7\}$ $\Lambda_{10}\{M, M-2, M-6, M-8, M-14, 3-M, -M-1, -M-3, -M-5, -M-9\}$ $y = x^{5-M-a_1}D(x^{2M-4}D(x^{-2}(x^{-1}D)^{M-2}w/x))$
2.7	$\Lambda_6\{M, M-4, M-8, 3-M, 1-M, -M-7\}$, $y = x^{3-M-a_1}D(x^{2M}D(x^{-4}(x^{-1}D)^{M-2}w/x))$ $\Lambda_8\{M, M-4, M-6, M-10, 3-M, 1-M, -M-3, -M-9\}$ $\Lambda_{10}\{M, M-4, M-6, M-8, M-12, 3-M, 1-M, -M-3, -M-5, -M-11\}$
2.8	$\Lambda_6\{M, M-2, M-10, 3-M, 1-M, -M-7\}$ $\Lambda_8\{M, M-2, M-6, M-12, 3-M, 1-M, -M-3, -M-9\}$

Таблица 1. Продолжение

№	Коммутирующие операторы и собственная функция
	$\Lambda_{10}\{M, M-2, M-6, M-8, M-14, 3-M, 1-M, -M-3, -M-5, -M-11\}$
	$y = x^{5-M-a_1} D(x^{2M-2} D(x^{-4}(x^{-1}D)^{M-2} w/x))$
2.9	$\Lambda_6\{M, M-2, M-4, 3-M, -M-1, -M-11\}$
	$\Lambda_{10}\{M, M-2, M-4, M-6, M-8, 3-M, -M-1, -M-3, -M-9, -M-15\}$
	$y = x^{M+6-a_1} D(x^{-5} D(x^{-2}(x^{-1}D)^{M-2} w/x))$
2.10	$\Lambda_6\{M, M-4, M-14, 3-M, 1-M, -M-1\}$
	$\Lambda_{10}\{M, M-4, M-6, M-12, M-18, 3-M, 1-M, -M-1, -M-3, -M-5\}$
	$y = x^{9-M-a_1} D(x^{-5} D(x^{2M-5}(x^{-1}D)^{M-2} w/x))$
3.1	$\Lambda_4\{M, M-6, 5-M, -M-5\}$, $y = x^{3-M-a_1} D(x^{2M} D(x^{-3} D(x^{-2}(x^{-1}D)^{M-3} w/x)))$
	$\Lambda_{10}\{M, M-4, M-6, M-8, M-12, 5-M, 1-M, -M-3, -M-7, -M-11\}$
3.2	$\Lambda_4\{M, M-10, 5-M, -M-1\}$, $y = x^{7-M-a_1} D(x^{-3} D(x^{2M-4} D(x^{-2}(x^{-1}D)^{M-3} w/x)))$
	$\Lambda_{10}\{M, M-4, M-8, M-12, M-16, 5-M, 1-M, -M-1, -M-3, -M-7\}$
3.3	$\Lambda_6\{M, M-2, M-10, 5-M, -M-3, -M-5\}$
	$\Lambda_8\{M, M-2, M-6, M-12, 5-M, -M-1, -M-5, -M-7\}$
	$\Lambda_{10}\{M, M-2, M-6, M-8, M-14, 5-M, -M-1, -M-3, -M-7, -M-9\}$
	$y = x^{5-M-a_1} D(x^{2M-4} D(x^{-1} D(x^{-2}(x^{-1}D)^{M-3} w/x)))$
3.4	$\Lambda_6\{M, M-8, M-10, 5-M, 3-M, -M-5\}$
	$\Lambda_8\{M, M-6, M-10, M-12, 5-M, 3-M, -M-1, -M-7\}$
	$\Lambda_{10}\{M, M-6, M-8, M-12, M-14, 5-M, 3-M, -M-1, -M-3, -M-9\}$
	$y = x^{5-M-a_1} D(x^{-1} D(x^{2M-2} D(x^{-4}(x^{-1}D)^{M-3} w/x)))$
3.5	$\Lambda_6\{M, M-4, M-8, 5-M, -M-3, -M-5\}$
	$\Lambda_8\{M, M-4, M-6, M-10, 5-M, -M-1, -M-5, -M-7\}$
	$\Lambda_{10}\{M, M-4, M-6, M-8, M-12, 5-M, -M-1, -M-3, -M-7, -M-9\}$
	$y = x^{3-M-a_1} D(x^{2M-2} D(x^{-1} D(x^{-2}(x^{-1}D)^{M-3} w/x)))$
3.6	$\Lambda_6\{M, M-8, M-10, 5-M, 1-M, -M-3\}$
	$\Lambda_8\{M, M-6, M-10, M-12, 5-M, 1-M, -M-1, -M-5\}$
	$\Lambda_{10}\{M, M-6, M-8, M-12, M-14, 5-M, 1-M, -M-1, -M-3, -M-7\}$
	$y = x^{5-M-a_1} D(x^{-1} D(x^{2M-4} D(x^{-2}(x^{-1}D)^{M-3} w/x)))$
3.7	$\Lambda_6\{M, M-2, M-4, 5-M, -M-3, -M-11\}$
	$\Lambda_8\{M, M-2, M-4, M-6, 5-M, -M-1, -M-7, -M-13\}$
	$y = x^{M+6-a_1} D(x^{-5} D(x^{-1} D(x^{-2}(x^{-1}D)^{M-3} w/x)))$
3.8	$\Lambda_6\{M, M-8, M-16, 5-M, 3-M, 1-M\}$
	$\Lambda_8\{M, M-6, M-12, M-18, 5-M, 3-M, 1-M, -M-1\}$
	$y = x^{11-M-a_1} D(x^{-5} D(x^{-1} D(x^{2M-7}(x^{-1}D)^{M-3} w/x)))$
3.9	$\Lambda_6\{M, M-2, M-4, 5-M, -M-5, -M-9\}$
	$\Lambda_{10}\{M, M-2, M-4, M-6, M-8, 5-M, -M-1, -M-7, -M-9, -M-13\}$
	$y = x^{M+4-a_1} D(x^{-3} D(x^{-1} D(x^{-2}(x^{-1}D)^{M-3} w/x)))$
3.10	$\Lambda_6\{M, M-10, M-14, 5-M, 3-M, 1-M\}$

Таблица 1. Продолжение

№	Коммутирующие операторы и собственная функция
	$\Lambda_{10}\{M, M-6, M-12, M-14, M-18, 5-M, 3-M, 1-M, -M-1, -M-3\}$
	$y = x^{9-M-a_1} D(x^{-3} D(x^{-1} D(x^{2M-7} (x^{-1}D)^{M-3} w/x)))$
3.11	$\Lambda_6\{M, M-2, M-10, 5-M, 1-M, -M-9\}$
	$\Lambda_{10}\{M, M-2, M-6, M-8, M-14, 5-M, 1-M, -M-1, -M-7, -M-13\}$
	$y = x^{5-M-a_1} D(x^{2M} D(x^{-5} D(x^{-2} (x^{-1}D)^{M-3} w/x)))$
3.12	$\Lambda_6\{M, M-4, M-14, 5-M, 3-M, -M-5\}$
	$\Lambda_{10}\{M, M-4, M-6, M-12, M-18, 5-M, 3-M, -M-1, -M-3, -M-9\}$
	$y = x^{9-M-a_1} D(x^{-5} D(x^{2M-2} D(x^{-4} (x^{-1}D)^{M-3} w/x)))$
3.13	$\Lambda_6\{M, M-4, M-8, 5-M, 1-M, -M-9\}$
	$\Lambda_{10}\{M, M-4, M-6, M-8, M-12, 5-M, 1-M, -M-1, -M-7, -M-13\}$
	$y = x^{3-M-a_1} D(x^{2M+2} D(x^{-5} D(x^{-2} (x^{-1}D)^{M-3} w/x)))$
3.14	$\Lambda_6\{M, M-4, M-14, 5-M, 1-M, -M-3\}$
	$\Lambda_{10}\{M, M-4, M-6, M-12, M-18, 5-M, 1-M, -M-1, -M-3, -M-7\}$
	$y = x^{9-M-a_1} D(x^{-5} D(x^{2M-6} D(x^{-2} (x^{-1}D)^{M-3} w/x)))$
4.1	$\Lambda_4\{M, M-10, 7-M, -M-3\}$
	$\Lambda_{10}\{M, M-4, M-8, M-12, M-16, 7-M, 3-M, -M-1, -M-5, -M-9\}$
	$y = x^{7-M-a_1} D(x^{-3} D(x^{2M-2} D(x^{-3} D(x^{-2} (x^{-1}D)^{M-4} w/x))))$
4.2	$\Lambda_6\{M, M-8, M-10, 7-M, -M-1, -M-3\}$
	$\Lambda_8\{M, M-6, M-10, M-12, 7-M, 1-M, -M-3, -M-5\}$
	$\Lambda_{10}\{M, M-6, M-8, M-12, M-14, 7-M, 1-M, -M-1, -M-5, -M-7\}$
	$y = x^{5-M-a_1} D(x^{-1} D(x^{2M-4} D(x^{-1} D(x^{-2} (x^{-1}D)^{M-4} w/x))))$
4.3	$\Lambda_6\{M, M-2, M-10, 7-M, -M-1, -M-9\}$
	$\Lambda_8\{M, M-2, M-6, M-12, 7-M, 1-M, -M-5, -M-11\}$
	$y = x^{M+4-a_1} D(x^{-5} D(x^{-1} D(x^{10-2M} D(x^{2M-11} (x^{-1}D)^{M-4} w/x))))$
4.4	$\Lambda_6\{M, M-8, M-16, 7-M, 5-M, -M-3\}$
	$\Lambda_8\{M, M-6, M-12, M-18, 7-M, 5-M, 1-M, -M-5\}$
	$y = x^{11-M-a_1} D(x^{-5} D(x^{-1} D(x^{2M-4} D(x^{-4} (x^{-1}D)^{M-4} w/x))))$
4.5	$\Lambda_6\{M, M-4, M-8, 7-M, -M-1, -M-9\}$
	$\Lambda_8\{M, M-4, M-6, M-10, 7-M, 1-M, -M-5, -M-11\}$
	$y = x^{M+4-a_1} D(x^{-5} D(x^{-1} D(x^{8-2M} D(x^{2M-9} (x^{-1}D)^{M-4} w/x))))$
4.6	$\Lambda_6\{M, M-8, M-16, 7-M, 3-M, -M-1\}$
	$\Lambda_8\{M, M-6, M-12, M-18, 7-M, 3-M, 1-M, -M-3\}$
	$y = x^{11-M-a_1} D(x^{-5} D(x^{-1} D(x^{2M-6} D(x^{-2} (x^{-1}D)^{M-4} w/x))))$
4.7	$\Lambda_6\{M, M-2, M-10, 7-M, -M-3, -M-7\}$
	$\Lambda_{10}\{M, M-2, M-6, M-8, M-14, 7-M, 1-M, -M-5, -M-7, -M-11\}$
	$y = x^{5-M-a_1} D(x^{2M-2} D(x^{-3} D(x^{-1} D(x^{-2} (x^{-1}D)^{M-4} w/x))))$
4.8	$\Lambda_6\{M, M-10, M-14, 7-M, 5-M, -M-3\}$
	$\Lambda_{10}\{M, M-6, M-12, M-14, M-18, 7-M, 5-M, 1-M, -M-1, -M-7\}$

Таблица 1. Продолжение

№	Коммутирующие операторы и собственная функция
	$y = x^{9-M-a_1} D(x^{-3} D(x^{-1} D(x^{2M-4} D(x^{-4}(x^{-1}D)^{M-4} w/x))))$
4.9	$\Lambda_6\{M, M-4, M-8, 7-M, -M-3, -M-7\}$
	$\Lambda_{10}\{M, M-4, M-6, M-8, M-12, 7-M, 1-M, -M-5, -M-7, -M-11\}$
	$y = x^{3-M-a_1} D(x^{2M} D(x^{-3} D(x^{-1} D(x^{-2}(x^{-1}D)^{M-4} w/x))))$
4.10	$\Lambda_6\{M, M-10, M-14, 7-M, 3-M, -M-1\}$
	$\Lambda_{10}\{M, M-6, M-12, M-14, M-18, 7-M, 3-M, 1-M, -M-1, -M-5\}$
	$y = x^{9-M-a_1} D(x^{-3} D(x^{-1} D(x^{2M-6} D(x^{-2}(x^{-1}D)^{M-4} w/x))))$
4.11	$\Lambda_6\{M, M-4, M-14, 7-M, 3-M, -M-7\}$
	$\Lambda_{10}\{M, M-4, M-6, M-12, M-18, 7-M, 3-M, 1-M, -M-5, -M-11\}$
	$y = x^{9-M-a_1} D(x^{-5} D(x^{2M} D(x^{-5} D(x^{-2}(x^{-1}D)^{M-4} w/x))))$
4.12	$\Lambda_6\{M, M-4, M-14, 7-M, -M-1, -M-3\}$
	$\Lambda_{10}\{M, M-4, M-6, M-12, M-18, 7-M, 1-M, -M-1, -M-5, -M-7\}$
	$y = x^{9-M-a_1} D(x^{-5} D(x^{2M-4} D(x^{-1} D(x^{-2}(x^{-1}D)^{M-4} w/x))))$
4.13	$\Lambda_6\{M, M-8, M-10, 7-M, 3-M, -M-7\}$
	$\Lambda_{10}\{M, M-6, M-8, M-12, M-14, 7-M, 3-M, 1-M, -M-5, -M-11\}$
	$y = x^{5-M-a_1} D(x^{-1} D(x^{2M} D(x^{-5} D(x^{-2}(x^{-1}D)^{M-4} w/x))))$
4.14	$\Lambda_6\{M, M-2, M-4, 7-M, -M-3, -M-13\}$
	$\Lambda_{10}\{M, M-2, M-4, M-6, M-8, 7-M, 1-M, -M-5, -M-11, -M-17\}$
	$y = x^{M+8-a_1} D(x^{-5} D(x^{-3} D(x^{-1} D(x^{-2}(x^{-1}D)^{M-4} w/x))))$
4.15	$\Lambda_6\{M, M-10, M-20, 7-M, 5-M, 3-M\}$
	$\Lambda_{10}\{M, M-6, M-12, M-18, M-24, 7-M, 5-M, 3-M, 1-M, -M-1\}$
	$y = x^{15-M-a_1} D(x^{-5} D(x^{-3} D(x^{-1} D(x^{2M-9}(x^{-1}D)^{M-4} w/x))))$
5.1	$\Lambda_6\{M, M-8, M-10, 9-M, 1-M, -M-7\}$
	$\Lambda_8\{M, M-6, M-10, M-12, 9-M, 3-M, -M-3, -M-9\}$
	$y = x^{M+2-a_1} D(x^{-5} D(x^{-1} D(x^{12-2M} D(x^{-1} D(x^{2M-11}(x^{-1}D)^{M-5} w/x)))))$
5.2	$\Lambda_6\{M, M-8, M-16, 9-M, 1-M, -M-1\}$
	$\Lambda_8\{M, M-6, M-12, M-18, 9-M, 3-M, -M-1, -M-3\}$
	$y = x^{11-M-a_1} D(x^{-5} D(x^{-1} D(x^{2M-6} D(x^{-1} D(x^{-2}(x^{-1}D)^{M-5} w/x)))))$
5.3	$\Lambda_6\{M, M-4, M-14, 9-M, -M-1, -M-5\}$
	$\Lambda_{10}\{M, M-4, M-6, M-12, M-18, 9-M, 3-M, -M-3, -M-5, -M-9\}$
	$y = x^{9-M-a_1} D(x^{-5} D(x^{2M-2} D(x^{-3} D(x^{-1} D(x^{-2}(x^{-1}D)^{M-5} w/x)))))$
5.4	$\Lambda_6\{M, M-10, M-14, 9-M, 5-M, -M-5\}$
	$\Lambda_{10}\{M, M-6, M-12, M-14, M-18, 9-M, 5-M, 3-M, -M-3, -M-9\}$
	$y = x^{9-M-a_1} D(x^{-3} D(x^{-1} D(x^{2M-2} D(x^{-5} D(x^{-2}(x^{-1}D)^{M-5} w/x)))))$
5.5	$\Lambda_6\{M, M-8, M-10, 9-M, -M-1, -M-5\}$
	$\Lambda_{10}\{M, M-6, M-8, M-12, M-14, 9-M, 3-M, -M-3, -M-5, -M-9\}$
	$y = x^{5-M-a_1} D(x^{-1} D(x^{2M-2} D(x^{-3} D(x^{-1} D(x^{-2}(x^{-1}D)^{M-5} w/x)))))$
5.6	$\Lambda_6\{M, M-10, M-14, 9-M, 1-M, -M-1\}$

Таблица 1. Продолжение

№	Коммутирующие операторы и собственная функция
	$\Lambda_{10}\{M, M-6, M-12, M-14, M-18, 9-M, 3-M, 1-M, -M-3, -M-5\}$ $y = x^{9-M-a_1}D(x^{-3}D(x^{-1}D(x^{2M-6}D(x^{-1}D(x^{-2}(x^{-1}D)^{M-5}w/x)))))$
5.7	$\Lambda_6\{M, M-2, M-10, 9-M, -M-1, -M-11\}$ $\Lambda_{10}\{M, M-2, M-6, M-8, M-14, 9-M, 3-M, -M-3, -M-9, -M-15\}$ $y = x^{5-M-a_1}D(x^{2M+2}D(x^{-5}D(x^{-3}D(x^{-1}D(x^{-2}(x^{-1}D)^{M-5}w/x)))))$
5.8	$\Lambda_6\{M, M-10, M-20, 9-M, 7-M, -M-1\}$ $\Lambda_{10}\{M, M-6, M-12, M-18, M-24, 9-M, 7-M, 3-M, 1-M, -M-5\}$ $y = x^{15-M-a_1}D(x^{-5}D(x^{-3}D(x^{-1}D(x^{2M-6}D(x^{-4}(x^{-1}D)^{M-5}w/x)))))$
5.9	$\Lambda_6\{M, M-4, M-8, 9-M, -M-1, -M-11\}$ $\Lambda_{10}\{M, M-4, M-6, M-8, M-12, 9-M, 3-M, -M-3, -M-9, -M-15\}$ $y = x^{3-M-a_1}D(x^{2M+4}D(x^{-5}D(x^{-3}D(x^{-1}D(x^{-2}(x^{-1}D)^{M-5}w/x)))))$
5.10	$\Lambda_6\{M, M-10, M-20, 9-M, 5-M, 1-M\}$ $\Lambda_{10}\{M, M-6, M-12, M-18, M-24, 9-M, 5-M, 3-M, 1-M, -M-3\}$ $y = x^{15-M-a_1}D(x^{-5}D(x^{-3}D(x^{-1}D(x^{2M-8}D(x^{-2}(x^{-1}D)^{M-5}w/x)))))$
6.1	$\Lambda_6\{M, M-8, M-16, 11-M, 3-M, -M-5\}$ $\Lambda_8\{M, M-6, M-12, M-18, 11-M, 5-M, -M-1, -M-7\}$ $y = x^{11-M-a_1}D(x^{-5}D(x^{-1}D(x^{2M-2}D(x^{-5}D(x^{-1}D(x^{-2}(x^{-1}D)^{M-6}w/x))))))$
6.2	$\Lambda_6\{M, M-10, M-14, 11-M, 1-M, -M-3\}$ $\Lambda_{10}\{M, M-6, M-12, M-14, M-18, 11-M, 5-M, -M-1, -M-3, -M-7\}$ $y = x^{9-M-a_1}D(x^{-3}D(x^{-1}D(x^{2M-4}D(x^{-3}D(x^{-1}D(x^{-2}(x^{-1}D)^{M-6}w/x))))))$
6.3	$\Lambda_6\{M, M-4, M-14, 11-M, 1-M, -M-9\}$ $\Lambda_{10}\{M, M-4, M-6, M-12, M-18, 11-M, 5-M, -M-1, -M-7, -M-13\}$ $y = x^{9-M-a_1}D(x^{-5}D(x^{2M+2}D(x^{-5}D(x^{-3}D(x^{-1}D(x^{-2}(x^{-1}D)^{M-6}w/x))))))$
6.4	$\Lambda_6\{M, M-10, M-20, 11-M, 7-M, -M-3\}$ $\Lambda_{10}\{M, M-6, M-12, M-18, M-24, 11-M, 7-M, 5-M, -M-1, -M-7\}$ $y = x^{15-M-a_1}D(x^{-5}D(x^{-3}D(x^{-1}D(x^{2M-4}D(x^{-5}D(x^{-2}(x^{-1}D)^{M-6}w/x))))))$
6.5	$\Lambda_6\{M, M-8, M-10, 11-M, 1-M, -M-9\}$ $\Lambda_{10}\{M, M-6, M-8, M-12, M-14, 11-M, 5-M, -M-1, -M-7, -M-13\}$ $y = x^{5-M-a_1}D(x^{-1}D(x^{2M+2}D(x^{-5}D(x^{-3}D(x^{-1}D(x^{-2}(x^{-1}D)^{M-6}w/x))))))$
6.6	$\Lambda_6\{M, M-10, M-20, 11-M, 3-M, 1-M\}$ $\Lambda_{10}\{M, M-6, M-12, M-18, M-24, 11-M, 5-M, 3-M, -M-1, -M-3\}$ $y = x^{15-M-a_1}D(x^{-5}D(x^{-3}D(x^{-1}D(x^{2M-8}D(x^{-1}D(x^{-2}(x^{-1}D)^{M-6}w/x))))))$
7.1	$\Lambda_6\{M, M-10, M-14, 13-M, 3-M, -M-7\}$ $\Lambda_{10}\{M, M-6, M-12, M-14, M-18, 13-M, 7-M, 1-M, -M-5, -M-11\}$ $y = x^{9-M-a_1}D(x^{-3}D(x^{-1}D(x^{2M}D(x^{-5}D(x^{-3}D(x^{-1}D(x^{-2}(x^{-1}D)^{M-7}w/x)))))))$
7.2	$\Lambda_6\{M, M-10, M-20, 13-M, 3-M, -M-1\}$ $\Lambda_{10}\{M, M-6, M-12, M-18, M-24, 13-M, 7-M, 1-M, -M-1, -M-5\}$

Таблица 1. Продолжение

№	Коммутирующие операторы и собственная функция
	$y = x^{15-M-a_1} D(x^{-5} D(x^{-3} D(x^{-1} D(x^{2M-6} D(x^{-3} D(x^{-1} D(x^{-2}(x^{-1}D)^{M-7} w/x)))))))$
8.1	$\Lambda_6\{M, M-10, M-20, 15-M, 5-M, -M-5\}$ $\Lambda_{10}\{M, M-6, M-12, M-18, M-24, 15-M, 9-M, 3-M, -M-3, -M-9\}$ $y = x^{15-M-a_1} D(x^{-5} D(x^{-3} D(x^{-1} D(x^{2M-2} D(x^{-5} D(x^{-3} D(x^{-1} D(x^{-2}(x^{-1}D)^{M-8} w/x))))))))$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Байчорова Ф. Х., Эльканова З. С.* Коммутирующие дифференциальные операторы порядков 4 и 6// Уфимск. мат. ж. — 2013. — *5*, № 3. — С. 12–19.
2. *Кричевер И. М.* Интегрирование нелинейных уравнений методами алгебраической геометрии// Функц. анал. прилож. — 1977. — *11*, № 1. — С. 15–31.
3. *Миронов А. Е.* Самосопряженные коммутирующие дифференциальные операторы ранга два// Усп. мат. наук. — 2016. — *71*, № 4. — С. 155–184.
4. *Соколов В. В.* Примеры коммутативных колец дифференциальных операторов// Функц. анал. прилож. — 1978. — *12*, № 1. — С. 82–83.
5. *Шабат А. Б., Эльканова З. С., Урусова А. Б.* Двусторонние преобразования Дарбу// Теор. мат. физ. — 2012. — *173*, № 2. — С. 207–218.
6. *Burchnall J. L., Chaundy T. W.* Commutative ordinary differential operators// Proc. London Math. Soc. Ser. 2. — 1923. — *21*, № 1. — С. 420–440.
7. *Mironov A. E., Zheglov A. B.* Commuting ordinary differential operators with polynomial coefficients and automorphisms of the first Weyl algebra// Int. Math. Res. Not. — 2016. — № 10. — С. 2974–2999.
8. *Mokhov O. I.* Commuting ordinary differential operators of arbitrary genus and arbitrary rank with polynomial coefficients// Amer. Math. Soc. Trans. Ser. 2. — 2014. — *234*. — С. 323–336.
9. *Schur I.* Über vertauschbare lineare Differentialausdrücke// Sitzungsber. Berliner Math. Ges. — 1905. — *4*. — С. 2–8.

Ю. Ю. Багдерина
Институт математики с вычислительным центром
Уфимского научного центра РАН
E-mail: bagderinayu@yandex.ru

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 140 (2017). С. 18–29

УДК 517.962.9

ИНТЕГРИРУЕМЫЕ ДВУМЕРНЫЕ РЕШЕТКИ. ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ КОЛЬЦА ЛИ И ИХ КЛАССИФИКАЦИЯ

© 2017 г. **И. Т. ХАБИБУЛЛИН, М. Н. ПОПЦОВА**

Аннотация. Работа посвящена проблеме классификации интегрируемых нелинейных моделей с тремя независимыми переменными. Алгоритм классификации, основанный на понятии характеристического кольца, применен к одному классу двумерных решеток гидродинамического типа. Накладывая подходящие срезающие краевые условия, можно свести решетку к системе гиперболических уравнений, интегрируемой в смысле Дарбу. В результате получена новая интегрируемая решетка.

Ключевые слова: интегрируемая двумерная решетка; характеристическое кольцо Ли; система, интегрируемая по Дарбу.

AMS Subject Classification: 35L10, 39A14

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение 18
2. Характеристические операторы 19
3. Предположения и постановка задачи 21
4. Следствия предположений (ii) 21
5. Обсуждение 28
Список литературы 29

1. Введение

Рассмотрим класс двумерных решеток вида

$$u_{n,xy} = \alpha(u_{n+1}, u_n, u_{n-1}) u_{n,x} u_{n,y}, \tag{1.1}$$

где $u_n = u_n(x, y)$ — неизвестная функция, зависящая от целого n и вещественных x и y. Будем использовать обозначения

$$u_{n,x} = \frac{\partial u_n}{\partial x}, \quad u_{n,y} = \frac{\partial u_n}{\partial y}, \quad u_{n,xy} = \frac{\partial^2 u_n}{\partial x \partial y}.$$

Функция $\alpha(u_{n+1}, u_n, u_{n-1})$ предполагается аналитической в открытой области $D \subset \mathbb{C}^3$. Предположим также, что производные $\dfrac{\partial \alpha}{\partial u_{n+1}}$ и $\dfrac{\partial \alpha}{\partial u_{n-1}}$ не обращаются в нуль тождественно.

Определение 1. Решетка (1.1) называется *интегрируемой*, если при любом выборе целых чисел N_1 и N_2, где $N_1 < N_2$, следующая система уравнений гиперболического типа, «аппроксимирующая» (1.1), интегрируема в смысле Дарбу:

$$\begin{aligned} &u_{N_1-1} = c_0, \\ &u_{n,xy} = \alpha_n u_{n,x} u_{n,y}, \quad N_1 \leqslant n \leqslant N_2, \\ &u_{N_2+1} = c_1; \end{aligned} \tag{1.2}$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 14-01-97008-Поволжье-а).

здесь $\alpha_n = \alpha(u_{n+1}, u_n, u_{n-1})$ и постоянные параметры c_0 и c_1 выбираются таким образом, чтобы точки $(u_{N_1+1}, u_{N_1}, c_0)$ и $(c_1, u_{N_2}, u_{N_2-1})$ принадлежали множеству D.

Поскольку решетка инвариантна относительно сдвигов дискретной переменной n, можно положить $N_1 = 0$. По мнению авторов, задача описания решеток вида (1.1), интегрируемых в смысле определения 1, актуальна, поскольку система (1.2), интегрируемая в смысле Дарбу, допускает широкий класс явных решений, и эти решения могут быть легко превращены в решения исходной решетки (1.1). Мы предположим также, что такие решетки принадлежат классу солитонных систем.

Говорят, что система гиперболических уравнений интегрируема в смысле Дарбу, если она допускает полный набор функционально независимых интегралов вдоль обоих характеристических направлений x и y. Напомним, что функция I, зависящая от конечного числа динамических переменных x, y, $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{u}_x$, $\boldsymbol{u}_y$, $\ldots$ называется *y-интегралом*, если она является решением уравнения $D_y I = 0$, где D_y — оператор полного дифференцирования по y и $\boldsymbol{u} = (u_0, u_1, \ldots, u_n)$. Нетрудно доказать, что y-интеграл не зависит от $\boldsymbol{u}_y$, $\boldsymbol{u}_{yy}$, $\ldots$; y-интеграл вида $I = I(x)$ называется тривиальным. Ниже мы рассматриваем только нетривиальные интегралы. Интеграл в направлении x определяется аналогично.

В данной работе при исследовании задачи об интегрируемой классификации многомерных моделей используется понятие характеристического кольца Ли (см. [1, 2]). Первые шаги в этом направлении были сделаны в [10], где обсуждались полное описание и приложения характеристического кольца Ли в задаче о двумерной решетке Тоды. Некоторые свойства характеристических колец Ли для (2+1)-мерных решеток были получены [8].

В последние 20 лет задачи классификации интегрируемых многомерных моделей изучаются весьма интенсивно. Подход, основанных на редукциях гидродинамического типа, был предложен и разработан в [5–7]. Альтернативный метод интегрируемой классификации, пригодный для многомерных уравнений на квад-графах, был предложен в [4, 9].

2. Характеристические операторы

Предположим, что «аппроксимирующая» система

$$\begin{aligned} &u_{-1} = c_0, \\ &u_{n,xy} = \alpha_n u_{n,x} u_{n,y}, \quad 0 \leqslant n \leqslant N, \\ &u_{N+1} = c_1 \end{aligned} \tag{2.1}$$

допускает нетривиальный y-интеграл вида $I(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}_x, \boldsymbol{u}_{xx}, \ldots)$, $\boldsymbol{u} = (u_0, u_1, \ldots, u_N)$, не зависящий явно от x и y. Применяя цепное правило к уравнению $D_y I = 0$, получим $YI = 0$, где

$$Y = \sum_{i=0}^{N} \left(u_{i,y} \frac{\partial}{\partial u_i} + f_i \frac{\partial}{\partial u_{i,x}} + f_{i,x} \frac{\partial}{\partial u_{i,xx}} + \ldots \right) \tag{2.2}$$

и $f_i = \alpha_i u_{i,x} u_{i,y}$. Заметим, что y-интеграл I не зависит от переменных $u_{i,y}$, тогда как коэффициенты уравнения $YI = 0$ зависят. Следовательно, функция I должна удовлетворять следующим более строгим уравнениям:

$$YI = 0, \quad X_i I = 0, \quad i = 0, 1, \ldots, N, \tag{2.3}$$

где $X_i = \partial / \partial u_{i,y}$. Из системы (2.3) следует, что для любого i оператор $Y_i = [X_i, Y]$ также аннулирует I. Для Y_i получаем явное выражение

$$Y_i = \frac{\partial}{\partial u_i} + X_i(f_i) \frac{\partial}{\partial u_{i,x}} + X_i(D_x f_i) \frac{\partial}{\partial u_{i,xx}} + \ldots. \tag{2.4}$$

Благодаря специальному виду функций f_i получаем $D_x^k f_i = u_{i,y} X_i(D_x^k f_i)$. Следовательно,

$$Y = \sum_{i=0}^{N} u_{i,y} \left(\frac{\partial}{\partial u_i} + X_i(f_i) \frac{\partial}{\partial u_{i,x}} + X_i(D_x f_i) \frac{\partial}{\partial u_{i,xx}} + \ldots \right). \tag{2.5}$$

Сравнивая (2.5) с (2.4), получаем разложение

$$Y = \sum_{i=0}^{N} u_{i,y} Y_i. \tag{2.6}$$

Поскольку коэффициенты ряда Y_i не зависят от переменных $u_{i,y}$, уравнение $[X_k, Y_s] = 0$ выполняется для всех k и s. Кроме того, мы видим, что автоматически выполняется соотношение $X_i I = 0$. Следовательно, система (2.3) эквивалентна следующей:

$$Y_i I = 0, \quad i = 0, 1, \dots N. \tag{2.7}$$

Обсудим некоторые важные свойства характеристических векторных полей Y_i. Ниже мы будем применять эти операторы к гладким функциям от динамических переменных $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}_x, \dots$. Очевидно, операторы D_y и Y совпадают в этом классе функций. Следовательно, из соотношения $[D_x, D_y] = 0$ вытекает $[D_x, Y] = 0$. Подставляя разложение (2.6) вместо оператора Y, получим

$$\sum_{i=0}^{N} u_{i,y} \left(\alpha_i u_{i,y} Y_i + [D_x, Y_i]\right) = 0. \tag{2.8}$$

Поскольку переменные $u_{j,y}$ не зависят друг от друга, из уравнения (2.8) получаем полезное соотношение

$$[D_x, Y_i] = -\alpha_i u_{i,y} Y_i. \tag{2.9}$$

Следующее утверждение касается отображения $Z \to [D_x, Z]$, определенного на пространстве векторных полей.

Лемма 1 (А. Б. Шабат [10]). *Если векторное поле*

$$Z = \sum_i z_{1,i} \frac{\partial}{\partial u_{i,x}} + z_{2,i} \frac{\partial}{\partial u_{i,xx}} + \dots \tag{2.10}$$

является решением уравнения $[D_x, Z] = \lambda Z$, *то* $Z = 0$.

Доказательство. Вычисляя коммутатор $[D_x, Z]$ в левой части уравнения, получим

$$\sum_{i=0}^{N} -z_{1,i} \frac{\partial}{\partial u_i} + (D_x(z_{1,i}) - z_{2,i}) \frac{\partial}{\partial u_{i,x}} + (D_x(z_{2,i}) - z_{3,i}) \frac{\partial}{\partial u_{i,xx}} + \dots = \lambda Z. \tag{2.11}$$

Собирая коэффициенты независимых операторов $\dfrac{\partial}{\partial u_i}$, $\dfrac{\partial}{\partial u_{i,x}}$, … в последнем соотношении, получаем последовательность уравнений

$$z_{1,i} = 0, \quad D_x(z_{1,i}) - z_{2,i} = \lambda z_{1,i}, \quad D_x(z_{2,i}) - z_{3,i} = \lambda z_{2,i}, \quad \dots,$$

откуда вытекает $z_{k,i} = 0$. Лемма доказана. □

Рассмотрим множество $R_0(y, N)$ всех кратных коммутаторов характеристических векторных полей в y-направлении: $Y_0, Y_1, \dots Y_N$. Пусть $R(y, N)$ — минимальное кольцо, содержащее $R_0(y, N)$; оно называется характеристичесим кольцом Ли системы (2.1) в направлении y. Характеристическое кольцо Ли в x-направлении определяется аналогично.

Говорят, что кольцо $R(y, N)$ *конечномерно*, если существует конечное подмножество $\{Z_1, \dots Z_L\} \subset R(y, N)$ (базис в $R(y, N)$), обладающее следующими свойствами:

1) любой элемент $Z \in R(y, N)$ можно представить в виде линейной комбинации

$$Z = \lambda_1 Z_1 + \dots + \lambda_L Z_L, \tag{2.12}$$

коэффициенты которой могу зависеть от динамических переменных;

2) из соотношения $\lambda_1 Z_1 + \dots + \lambda_L Z_L = 0$ вытекает, что $\lambda_1 = \dots = \lambda_L = 0$.

Согласно общей теории (см. [1, 2]), система (2.1) интегрируема в смысле Дарбу тогда и только тогда, оба характеристических кольца Ли $R(x,N)$ и $R(y,N)$ конечномерны.

Введем специальное обозначение $Y_{i_k,\dots,i_0}$ для кратных коммутаторов, которые определяются рекуррентно:

$$Y_{i_k,\dots,i_0} = \bigl[Y_{i_k},\ Y_{i_{k-1},\dots,i_0}\bigr]. \tag{2.13}$$

Число k называется порядком оператора (2.13).

3. Предположения и постановка задачи

Наша цель — описание решеток вида (1.1), которые при всех натуральных N удовлетворяют следующим двум предположениям относительно $R(y,N)$ и аналогичным предположениям относительно $R(x,N)$:

(i) характеристическое кольцо Ли $R(y,N)$ допускает конечных базис, состоящий из операторов

$$Y_i, \quad Y_{i+1,i}, \quad Y_{i+2,i+1,i}, \quad \dots; \tag{3.1}$$

(ii) любой оператор $Y_{i_k,\dots,i_0}$ порядка k, где набор чисел $(i_k, i_{k-1}\dots, i_0)$ содержит но меньшей мере пару совпадающих элементов $j_s = j_m$, $s \neq m$, является линейной комбинацией операторов порядка $<k$ из набора (3.1). В частности, справедливы следующие два разложения:

$$Y_{0,1,0} = \sum_{j=0}^{N-1} \lambda_j Y_{j+1,j} + \sum_{j=0}^{N} \mu_j Y_j, \tag{3.2}$$

$$Y_{1,2,1,0} = \sum_{j=0}^{N-2} \nu_j Y_{j+2,j+1,j} + \sum_{j=0}^{N-1} \lambda_j Y_{j+1,j} + \sum_{j=0}^{N} \mu_j Y_j. \tag{3.3}$$

Отметим, что эти два условия позволяют полностью указать неизвестные функции α.

Предположения инспирированы результатами [10].

4. Следствия предположений (ii)

Нетрудно проверить, что векторные поля в наборе (3.1) линейно независимы при произвольном выборе функции α. Проанализируем предположение (ii). Начнем с рассмотрения разложения (3.2).

Теорема 1. *Разложение* (3.2) *справедливо тогда и только тогда, когда функция* α *в* (1.1) *имеет вид*

$$\alpha(u_{n+1}, u_n, u_{n-1}) = \frac{P'(u_n)}{P(u_n) + Q(u_{n-1})} + \frac{Q'(u_n)}{P(u_{n+1}) + Q((u_n))} - \frac{1}{2}\bigl(\log Q'(u_n)P'(u_n)\bigr)', \tag{4.1}$$

где функции $P(u_n)$ *и* $Q(u_n)$ *подчинены дифференциальной связи*

$$-3Q''^2P'^2 - 2P'''P'Q'^2 + 3P''^2Q'^2 + 2P'^2Q'''Q' = 0. \tag{4.2}$$

Теорема 1 показывает, что условие (3.2) является достаточно строгим. Мы видим, что искомая решетка (1.1) зависит от двух функций одной переменной.

Доказательство теоремы 1. Положим $a_i = \alpha_i u_{i,x}$ и перепишем уравнение (2.9) в виде

$$[D_x, Y_i] = -a_i Y_i. \tag{4.3}$$

В дальнейшем нам потребуется продолжение формулы (4.3) на кратные коммутаторы. Применяя тождество Якоби, можно вывести из (4.3) подобные формулы для $Y_{i+1,i}$ и $Y_{0,1,0}$. Действительно,

$$\begin{aligned}\bigl[D_x, Y_{i+1,i}\bigr] &= \Bigl[D_x, \bigl[Y_{i+1}, Y_i\bigr]\Bigr] = \Bigl[Y_{i+1}, \bigl[D_x, Y_i\bigr]BBB\Bigr] - \Bigl[Y_i, \bigl[D_x, Y_{i+1}\bigr]\Bigr] = \\ &= \bigl[Y_{i+1}, -a_iY_i\bigr] - \bigl[Y_i, -a_{i+1}Y_{i+1}\bigr] = -(a_i + a_{i+1})Y_{i+1,i} - Y_{i+1}(a_i)Y_i + Y_i(a_{i+1})Y_{i+1}.\end{aligned}$$

Таким образом, получаем

$$\bigl[D_x, Y_{i+1,i}\bigr] = -(a_i + a_{i+1})Y_{i+1,i} - Y_{i+1}(a_i)Y_i + Y_i(a_{i+1})Y_{i+1} \tag{4.4}$$

и

$$\begin{aligned}\big[D_x, Y_{010}\big] &= \Big[D_x, \big[Y_0, Y_{10}\big]\Big] = \Big[Y_0, \big[D_x, Y_{10}\big]\Big] - \Big[Y_{10}, \big[D_x, Y_0\big]\Big] = \\ &= -(2a_0 + a_1)\big[Y_0, Y_{10}\big] - Y_0(a_0 + 2a_1)Y_{10} + \big(Y_{10}(a_0) - Y_0Y_1(a_0)\big)Y_0 + Y_0Y_0(a_1)Y_1. \quad (4.5)\end{aligned}$$

Здесь и далее мы опускаем запятую между нижними индексами 0 и 1, если это не приводит к недоразумению.

Лемма 2. *Из предположения* (ii) *следует, что*

$$Y_{010} = \lambda Y_{10}. \tag{4.6}$$

Доказательство. Согласно предположению (ii) имеем

$$Y_{010} = \sum_{i=0}^{N-1} \lambda_i Y_{i+1,i} + \sum_{i=0}^{N} \mu_i Y_i. \tag{4.7}$$

Очевидно, только одно слагаемое в (4.7) содержит $\partial/\partial u_i$, а именно, $\mu_i Y_i$. Следовательно, $\mu_i = 0$. Поэтому

$$Y_{010} = \sum_{i=0}^{N-1} \lambda_i Y_{i+1,i}. \tag{4.8}$$

Подействуем оператором $[D_x, \cdot]$ на обе части равества (4.8). В силу соотношений (4.4), (4.5) и (4.8) получаем

$$-(2a_0+a_1)\sum_{i=0}^{N-1} \lambda_i Y_{i+1,i} - Y_0(a_0+2a_1)Y_{10} + \dots = \sum_{i=0}^{N-1} D_x(\lambda_i)Y_{i+1,i} - \sum_{i=0}^{N-1} \lambda_i(a_{i+1}+a_i)Y_{i+1,i} + \dots, \tag{4.9}$$

где многоточием обозначены линейные комбинации операторов Y_j. Собирая коэффициенты операторов $Y_{i+1,i}$, находим

$$D_x\lambda_i = -a_0\lambda_i \qquad \text{при } i \neq 0, \tag{4.10}$$

$$D_x\lambda_0 = -a_0\lambda_0 - Y_0(a_0 + 2a_1) \quad \text{при } i = 0. \tag{4.11}$$

Легко доказать, что $\lambda_i = 0$ при $i \neq 0$. Предположим противное; тогда

$$D_x \log \lambda_i = a_{i+1} + a_i - a_1 - a_0.$$

Последнее уравнение приводит к противоречию, поскольку правая часть не является полной производной: напомним, что $a_i = \alpha(u_{i+1}, u_i, u_{i-1})u_{i,x}$. Таким образом, $\lambda_i = 0$ при $i \neq 0$. Лемма 2 доказана. □

Применяя оператор $[D_x, \cdot]$ к уравнению (4.6) и принимая во внимание соотношения (4.4), (4.5) и (4.6), получаем уравнение

$$\begin{aligned}&-(2a_0 + a_1)\lambda Y_{10} - Y_0(a_0 + 2a_1)Y_{10} + \big(Y_{10}(a_0) - Y_0Y_1(a_0)\big)Y_0 + Y_0Y_0(a_1)Y_1 = \\ &\qquad = D_x(\lambda)Y_{10} + \lambda\big(-(a_0 + a_1)Y_{10} - Y_1(a_0)Y_0 + Y_0(a_1)Y_1\big).\end{aligned}$$

Поскольку Y_{10}, Y_1 и Y_0 — независимые операторы, это уравнение распадается на три уравнения:

$$D_x(\lambda) = -a_0\lambda - Y_0(a_0 + 2a_1), \tag{4.12}$$

$$Y_0Y_0(a_1) = \lambda Y_0(a_1), \tag{4.13}$$

$$Y_{10}(a_0) - Y_0Y_1(a_0) = -\lambda Y_1(a_0), \tag{4.14}$$

где $a_0 = \alpha_0(u_{-1}, u, u_1)u_x$, $a_1 = \alpha_1(u, u_1, u_2)u_{1,x}$ и

$$Y_0(a_0) = \left(\frac{\partial}{\partial u} + \alpha_0 u_x \frac{\partial}{\partial u_x} + \dots\right)(\alpha_0 u_x) = \big(\alpha_{0,u} + \alpha_0^2\big)u_x,$$

$$Y_0(a_1) = \left(\frac{\partial}{\partial u} + \alpha_0 u_x \frac{\partial}{\partial u_x} + \dots\right)(\alpha_1 u_{1,x}) = \alpha_{1,u} u_{1,x},$$

$$\begin{aligned}
Y_0(a_0+2a_1) &= Y_0(a_0)+2Y_0(a_1) = (\alpha_{0,u}+\alpha_0^2)u_x + 2\alpha_{1,u}u_{1,x},\\
Y_0Y_0(a_1) &= \left(\frac{\partial}{\partial u} + \alpha_0 u_x \frac{\partial}{\partial u_x} + \dots\right)(\alpha_{1,u}u_{1,x}) = \alpha_{1,uu}u_{1,x},\\
Y_1(a_0) &= \left(\frac{\partial}{\partial u_1} + \alpha_1 u_{1,x} \frac{\partial}{\partial u_{1,x}} + \dots\right)(\alpha_0 u_x) = \alpha_{0,u_1}u_x,\\
Y_0Y_1(a_0) &= \left(\frac{\partial}{\partial u} + \alpha_0 u_x \frac{\partial}{\partial u_x} + \dots\right)(\alpha_{0,u_1}u_x) = \big(\alpha_{0,uu_1}+\alpha_0\alpha_{0,u_1}\big)u_x,\\
Y_1Y_0(a_0) &= \left(\frac{\partial}{\partial u_1} + \alpha_1 u_{1,x} \frac{\partial}{\partial u_{1,x}} + \dots\right)\Big((\alpha_{0,u}+\alpha_0^2)u_x\Big) = \big(\alpha_{0,uu_1}+2\alpha_0\alpha_{0,u_1}\big)u_x,\\
Y_{10}(a_0) &= Y_1Y_0(a_0) - Y_0Y_1(a_0) = \alpha_0\alpha_{0,u_1}u_x.
\end{aligned}$$

Тогда уравнение (4.12) принимает вид

$$D_x(\lambda) = -\alpha_0\lambda u_x - (\alpha_{0,u}+\alpha_0^2)u_x - 2\alpha_{1,u}u_{1,x}.$$

Итак, мы заключаем, что λ зависит только от двух переменных $\lambda = \lambda(u,u_1)$. Тогда последнее уравнение принимает вид

$$\lambda_u u_x + \lambda_{u_1}u_{1,x} = -\alpha_0\lambda u_x - (\alpha_{0,u}+\alpha_0^2)u_x - 2\alpha_{1,u}u_{1,x}.$$

Так как переменные u_x и $u_{1,x}$ независимы, это уравнение распадается на два уравнения, и система (4.12)–(4.14) принимает вид

$$\lambda_u = -\lambda\alpha_0 - (\alpha_{0,u}+\alpha_0^2), \tag{4.15}$$

$$\lambda_{u_1} = -2\alpha_{1,u}, \tag{4.16}$$

$$\alpha_{1,uu} = \lambda\alpha_{1,u}, \tag{4.17}$$

$$\alpha_{0,uu_1} = \lambda\alpha_{0,u_1}. \tag{4.18}$$

Найдем решение системы уравнений (4.15)–(4.18)[1]. Применяя оператор $\partial/\partial u_{-1}$ к (4.15), получим

$$\lambda = -\frac{\alpha_{0,uu_{-1}}+2\alpha_0\alpha_{0,u_{-1}}}{\alpha_{0,u_{-1}}}, \tag{4.19}$$

а применяя $\partial/\partial u_{-1}$ к (4.19) —

$$\left(\frac{\alpha_{0,uu_{-1}}}{\alpha_{0,u_{-1}}}\right)_{u_{-1}} + 2\alpha_{0,u_{-1}} = 0. \tag{4.20}$$

Пусть $\alpha_{0,u_{-1}} = -\frac{1}{2}e^z$; тогда $\alpha_{0,uu_{-1}} = -\frac{1}{2}e^z z_u$. Перепишем (4.20) в следующем виде:

$$z_{uu_{-1}} = e^z.$$

Таки образом, z удовлетворяет уравнению Лиувилля, общее решение которого имеет вид

$$z = \ln\frac{2P'(u)Q'(u_{-1})}{\big(P(u)+Q(u_{-1})\big)^2}.$$

Следовательно,

$$\alpha_0 = -\frac{1}{2}\int e^z du_{-1} = -\int\frac{P'(u)Q'(u_{-1})}{\big(P(u)+Q(u_{-1})\big)^2}du_{-1}$$

и

$$\alpha_0 = \frac{P'(u)}{P(u)+Q(u_{-1})} + H(u,u_1). \tag{4.21}$$

Поэтому

$$\alpha_1 = \frac{P'(u_1)}{P(u_1)+Q(u)} + H(u_1,u_2). \tag{4.22}$$

---

[1]Авторы выражают признательность Р. Н. Гарифуллину за помощь в решении этой системы.

Подставляя функцию (4.21) в (4.19), получим

$$\lambda = -\frac{P''(u)}{P'(u)} - 2H(u, u_1). \tag{4.23}$$

Аналогично, подставляя функцию (4.22) в (4.16), находим

$$\lambda = -\frac{2Q'(u)}{P(u_1) + Q(u)} + 2c(u). \tag{4.24}$$

Сравнивая (4.23) и (4.24), имеем

$$H(u, u_1) = \frac{Q'(u)}{P(u_1) + Q(u)} - c(u) - \frac{1}{2}\frac{P''(u)}{P'(u)}.$$

Таким образом, функция α_0 имеет вид

$$\alpha_0(u_{-1}, u, u_1) = \frac{P'(u)}{P(u) + Q(u_{-1})} + \frac{Q'(u)}{P(u_1) + Q(u)} - c(u) - \frac{1}{2}\frac{P''(u)}{P'(u)}.$$

Подставляя α_0 и λ в (4.18), находим

$$c(u) = \frac{Q''(u)}{2Q'(u)}. \tag{4.25}$$

Итак, функции λ и α_0 имеют следующий вид:

$$\lambda_{(R)} = \lambda = -\frac{2Q'(u)}{P(u_1) + Q(u)} + \frac{Q''(u)}{Q'(u)}, \tag{4.26}$$

$$\alpha_0 = \frac{P'(u)}{P(u) + Q(u_{-1})} + \frac{Q'(u)}{P(u_1) + Q(u)} - \frac{1}{2}\left(\log Q'(u)P'(u)\right)'. \tag{4.27}$$

Наконец, подставляя функции (4.26) и (4.27) в (4.15)–(4.17), получаем, что справедливо равенство

$$-3Q''^2P'^2 - 2P'''P'Q'^2 + 3P''^2Q'^2 + 2P'^2Q'''Q' = 0. \tag{4.28}$$

Итак, мы доказали, что если справедливо разложение (3.2), то оно должно иметь вид

$$Y_{010} := [Y_0, Y_{10}] = \lambda_{(R)}Y_{10}. \tag{4.29}$$

Это завершает доказательство теоремы 1. □

Аналогично можно доказать, что условия (4.1) и (4.2) обеспечивают справедливость представления

$$\left[Y_1, Y_{10}\right] = \lambda_{(L)}Y_{10} \tag{4.30}$$

с коэффициентом

$$\lambda_{(L)} = -\frac{2P'(u_1)}{P(u_1) + Q(u)} + \frac{P''(u_1)}{P'(u_1)}. \tag{4.31}$$

Кроме того, можно доказать, что предположение (ii) имеет место для всех кратных коммутаторов Y_{i_3,i_2,i_1} третьего порядка, если решетка удовлетворяет условиям (4.1) и (4.2). Следующее (последнее) условие на решеткн (1.1) выполняется благодаря разложению (3.3).

Теорема 2. *Разложения* (3.2) *и* (3.3) *верны тогда и только тогда, когда функция* α *в* (1.1) *имеет одно из следующих представлений*:

$$\text{(a)}\quad \alpha_0 = \alpha(u_1, u, u_{-1}) = \frac{P'(u)}{P(u) + c_1P(u_{-1}) + c_2} + \frac{c_1P'(u)}{P(u_1) + c_1P(u) + c_2} - \frac{P''(u)}{P'(u)}, \tag{4.32}$$

$$\begin{aligned}\text{(b)}\quad \alpha_0 = \alpha(u_1, u, u_{-1}) &= \frac{c_3r(u_{-1})r'(u)}{c_3r(u)r(u_{-1}) + c_4r(u_{-1}) - c_1 + c_2r(u_{-1})}\\ &+ \frac{c_1r'(u)}{r(u)\big(c_3r(u_1)r(u) + c_4r(u) - c_1 + c_2r(u)\big)} - \frac{r''(u)r(u) - r'^2(u)}{r(u)r'(u)},\end{aligned} \tag{4.33}$$

где $P(u)$ *и* $r(u)$ *— произвольные гладкие функции, а* $c_1 \neq 0$, $c_3 \neq 0$, c_2, c_4 *— произвольные постоянные.*

Доказательство. Как и в доказательстве теоремы 1, сначала покажем, что некоторые коэффициенты в разложении (3.3) равны нулю, так что формула (3.3) значительно упрощается:

$$[Y_1, Y_{210}] = \lambda Y_{210} + \mu Y_{21} + \nu Y_{10} + \sigma Y_2 + \delta Y_1 + \eta Y_0. \tag{4.34}$$

Наша цель — найти все решетки вида (1.1), для которых, помимо (4.29), также справедливо разложение (4.34). В дальнейшем мы будем пользоваться следующими коммутационными соотношениями:

$$\begin{aligned}[][D_x, Y_{210}] = [D_x, [Y_2, Y_{10}]] = -[Y_{10}, [D_x, Y_2]] + [Y_2, [D_x, Y_{10}]] + [Y_2, [D_x, Y_{10}]] = \\ = -(a_0 + a_1 + a_2)Y_{210} + Y_0(a_1)Y_{21} - Y_2(a_1)Y_{10} + Y_2Y_0(a_1)Y_1,\end{aligned} \tag{4.35}$$

$$\begin{aligned}[][D_x, [Y_0, Y_{210}]] = -(2a_0 + a_1 + a_2)[Y_0, Y_{210}] - Y_0(a_0 + 2a_1)Y_{210} - Y_2(a_1)[Y_0, Y_{10}] + \\ + Y_0Y_0(a_1)Y_{21} - \big(Y_0Y_2(a_1) + Y_2Y_0(a_1)\big)Y_{10} + Y_0Y_2Y_0(a_1)Y_1,\end{aligned} \tag{4.36}$$

$$\begin{aligned}[][D_x, [Y_1, Y_{210}]] = -(a_2 + 2a_1 + a_0)[Y_1, Y_{210}] - Y_1(a_2 + a_1 + a_0)Y_{210} + Y_{210}(a_1)Y_1 + \\ + Y_1Y_0(a_1)Y_{21} + Y_0(a_1)[Y_1, Y_{21}] - Y_1Y_2(a_1)Y_{10} - Y_2(a_1)[Y_1, Y_{10}] + Y_1Y_2Y_0(a_1)Y_1,\end{aligned} \tag{4.37}$$

$$\begin{aligned}[][D_x, [Y_2, Y_{210}]] = -(2a_2 + a_1 + a_0)[Y_2, Y_{210}] - Y_2(a_2 + 2a_1)Y_{210} + 2Y_2Y_0(a_1)Y_{21} + \\ + Y_0(a_1)[Y_2, Y_{21}] - Y_2Y_2(a_1)Y_{10} - Y_2Y_2Y_0(a_1)Y_1,\end{aligned} \tag{4.38}$$

где

$$Y_{21} = [Y_2, Y_1] = D_n[Y_1, Y_0].$$

Применим $[D_x, \cdot]$ к (4.34), произведем упрощения, используя (4.35), (4.37) и (4.4) и соберем коэффициенты Y_{210}:

$$-(a_2 + 2a_1 + a_0)\lambda - Y_1(a_2 + a_1 + a_0) = D_x(\lambda) - (a_2 + a_1 + a_0)\lambda$$

или, эквивалентно,

$$D_x(\lambda) = -a_1\lambda - Y_1(a_2 + a_1 + a_0). \tag{4.39}$$

Из уравнения (4.39) вытекает, что λ зависит от трех переменных $\lambda = \lambda(u, u_1, u_2)$ и удовлетворяет следующим трем уравнениям:

$$\lambda_u = -\alpha_{0,u_1}, \tag{4.40}$$

$$\lambda_{u_1} = -\alpha_1\lambda - \alpha_{1,u_1} - \alpha_1^2, \tag{4.41}$$

$$\lambda_{u_2} = -\alpha_{2,u_1}. \tag{4.42}$$

Подставляя значение α_0, определенное формулой (4.27), в (4.40) и интегрируя по u, получим

$$\lambda = -\frac{P'(u_1)}{P(u_1) + Q(u)} + H(u_1, u_2). \tag{4.43}$$

Из уравнения (4.42) находим

$$\lambda = -\frac{Q'(u_1)}{P(u_2) + Q(u_1)} + R(u, u_1). \tag{4.44}$$

Сравнивая (4.43) и (4.44), видим, что

$$-\frac{P'(u_1)}{P(u_1) + Q(u)} + H(u_1, u_2) = -\frac{Q'(u_1)}{P(u_2) + Q(u_1)} + R(u, u_1) = -A(u_1);$$

следовательно,

$$H(u_1, u_2) = -\frac{Q'(u_1)}{P(u_2) + Q(u_1)} + A(u_1)$$

и потому

$$\lambda = -\frac{P'(u_1)}{P(u_1) + Q(u)} - \frac{Q'(u_1)}{P(u_2) + Q(u_1)} + A(u_1). \tag{4.45}$$

Отметим, что функция $\lambda_{(R)}$, определенная формулой (4.26), удовлетворяет уравнению (4.15), т.е.

$$\lambda_{(R),u} = -\alpha_0\lambda_{(R)} - \alpha_{0,u} - \alpha_0^2.$$

Тогда

$$\lambda_{(R)1,u_1} = -\alpha_1\lambda_{(R)1} - \alpha_{1,u_1} - \alpha_1^2; \tag{4.46}$$

здесь $\lambda_{(R)1} = D_n(\lambda_{(R)})$. Вычитая (4.46) из (4.41), получаем

$$(\lambda - \lambda_{(R)1})_{u_1} = -\alpha_1(\lambda - \lambda_{(R)1}).$$

Подставляя функции (4.26) и (4.45) в последнее уравнение, приходим к равенству

$$\begin{aligned} &-\frac{P'(u_1)B(u_1)}{P(u_1)+Q(u)} - \frac{Q'(u_1)B(u_1)}{P(u_2)+Q(u_1)} + \\ &\qquad + \frac{1}{2}\left(\log Q'(u_1)P'(u_1)\right)'\left(\frac{Q'(u_1)}{P(u_2)+Q(u_1)} - \frac{P'(u_1)}{P(u_1)+Q(u)} + B(u_1)\right) = \\ &\qquad\qquad = \frac{Q''(u_1)}{P(u_2)+Q(u_1)} - \frac{P''(u_1)}{P(u_1)+Q(u)} + B'(u_1), \end{aligned} \tag{4.47}$$

где

$$B(u_1) = A(u_1) - \frac{Q''(u_1)}{Q'(u_1)}.$$

Это равенство верно лишь при выполнении следующих условий:

$$Q''(u_1) = -Q'(u_1)B(u_1) + \frac{1}{2}Q'(u_1)\left(\log Q'(u_1)P'(u_1)\right)', \tag{4.48}$$

$$P''(u_1) = P'(u_1)B(u_1) + \frac{1}{2}P'(u_1)\left(\log Q'(u_1)P'(u_1)\right)', \tag{4.49}$$

$$B'(u_1) = \frac{1}{2}B(u_1)\left(\log Q'(u_1)P'(u_1)\right)'. \tag{4.50}$$

Уравнение (4.50) верно, если $B(u_1) = 0$ или

$$(\log B(u_1))' = \frac{1}{2}\left(\log Q'(u_1)P'(u_1)\right)'. \tag{4.51}$$

Если $B(u_1) = 0$, то $Q(u_1) = c_1P(u_1) + c_2$ и

$$\alpha_0 = \frac{P'(u)}{P(u)+c_1P(u_{-1})+c_2} + \frac{c_1P'(u)}{P(u_1)+c_1P(u)+c_2} - \frac{P''(u)}{P'(u)}, \tag{4.52}$$

$$\lambda_{(M)} := \lambda = -\frac{P'(u_1)}{P(u_1)+c_1P(u)+c_2} - \frac{c_1P'(u_1)}{P(u_2)+c_1P(u_1)+c_2} + \frac{Q''(u_1)}{Q'(u_1)}, \tag{4.53}$$

$$\lambda_{(R)} = -\frac{2c_1P'(u)}{P(u_1)+c_1P(u)+c_2} + \frac{P''(u)}{P'(u)}, \tag{4.54}$$

$$\lambda_{(L)} = -\frac{2P'(u_1)}{P(u_1)+c_1P(u)+c_2} + \frac{P''(u_1)}{P'(u_1)}; \tag{4.55}$$

здесь $c_1 \neq 0$.

Если $B(u_1) \neq 0$, то из системы уравнений (4.48), (4.49) и (4.51) получаем:

$$Q(u_1) = -\frac{c_1}{r(u_1)} + c_2, \quad P(u_1) = c_3r(u_1) + c_4,$$

$$\begin{aligned} \alpha_0 = &\frac{c_3r(u_{-1})r'(u)}{c_3r(u)r(u_{-1}) + c_4r(u_{-1}) - c_1 + c_2r(u_{-1})} + \\ &\qquad + \frac{c_1r'(u)}{r(u)\big(c_3r(u_1)r(u) + c_4r(u) - c_1 + c_2r(u)\big)} - \frac{r''(u)r(u) - r'^2(u)}{r(u)r'(u)}, \end{aligned} \tag{4.56}$$

$$\lambda = \lambda_{(M)} = -\frac{c_3 r(u) r'(u_1)}{c_3 r(u_1) r(u) + c_4 r(u) - c_1 + c_2 r(u)} -$$
$$- \frac{c_1 r'(u_1)}{r(u_1)\big(c_3 r(u_2) r(u_1) + c_4 r(u_1) - c_1 + c_2 r(u_1)\big)} + \frac{r'(u_1)}{r(u_1)} - \frac{2r'^2(u_1) - r''(u_1) r(u_1)}{r(u_1) r'(u_1)}, \quad (4.57)$$

$$\lambda_{(R)} = -\frac{2c_1 r'(u)}{r(u)\big(c_3 r(u_1) r(u) + c_4 r(u) - c_1 + c_2 r(u)\big)} + \frac{r''(u) r(u) - 2r'^2(u)}{r(u) r'(u)}, \quad (4.58)$$

$$\lambda_{(L)} = \frac{-2c_3 r(u) r'(u_1)}{\big(c_3 r(u_1) r(u) + c_4 r(u) - c_1 + c_2 r(u)\big)} + \frac{r''(u_1)}{r'(u_1)}. \quad (4.59)$$

Теперь применим $[D_x, \cdot]$ к (4.34), воспользуемся соотношениями (4.35), (4.37), (4.4) и

$$Y_{21} = D_n(Y_{10}), \quad [Y_1, Y_{21}] = D_n[Y_0, Y_{10}] = D_n(\lambda_{(R)}) Y_{21}$$

и соберем коэффициенты Y_{21}:

$$-(a_2 + 2a_1 + a_0)\mu + Y_1 Y_0(a_1) + Y_0(a_1) D_n(\lambda_{(R)}) = \lambda Y_0(a_1) + D_x(\mu) - (a_1 + a_2)\mu.$$

Имеем

$$D_x(\mu) = -(a_1 + a_0)\mu + Y_1 Y_0(a_1) + Y_0(a_1) D_n(\lambda_{(R)}) - \lambda Y_0(a_1). \quad (4.60)$$

Из уравнения (4.60) следует, что $\mu = \mu(u, u_1, u_2)$, и это уравнение распадается на следующие три уравнения:

$$\mu_{u_2} = 0, \quad -\alpha_0 \mu = \mu_u, \quad -\alpha_1 \mu + \alpha_{1,uu_1} + \alpha_1 \alpha_{1,u} + \alpha_{1,u} D_n(\lambda_{(R)}) - \lambda \alpha_{1,u} = \mu_{u_1}.$$

Если α_0, λ и $\lambda_{(R)}$ определены формулами (4.52), (4.53) и (4.54) или формулами (4.56), (4.57) и (4.58) соответственно, то $\mu = 0$ и последние уравнения выполнены.

Применим $[D_x, \cdot]$ к (4.34), воспользуемся формулами (4.35), (4.37), (4.4) и (4.30) и соберем коэффициенты Y_{10}:

$$-(a_2 + 2a_1 + a_0)\nu - Y_1 Y_2(a_1) - Y_2(a_1)\lambda_{(L)} = -\lambda Y_2(a_1) + D_x(\nu) - (a_1 + a_2)\nu.$$

Имеем

$$D_x(\nu) = -(a_2 + a_1)\nu - Y_1 Y_2(a_1) - Y_2(a_1)\lambda_{(L)} + \lambda Y_2(a_1). \quad (4.61)$$

Из уравнения (4.61) следует, что $\nu = \nu(u_1, u_2)$, и это уравнение распадается на два уравнения следующим образом:

$$\nu_{u_2} = -\alpha_2 \nu, \quad \nu_{u_1} = -\alpha_1 \nu - \alpha_{1,u_2u_1} - \alpha_1 \alpha_{1,u_2} - \alpha_{1,u_2}\lambda_{(L)} + \lambda \alpha_{1,u_2}.$$

Если α_0, λ и $\lambda_{(L)}$ определены формулами (4.52), (4.53) и (4.55) или формулами (4.56), (4.57) и (4.59) соответственно, то $\nu = 0$ и последние уравнения выполнены.

Применим $[D_x, \cdot]$ к (4.34) и, принимая во внимание соотношения $\mu = \nu = 0$, соберем коэффициенты операторов Y_2, Y_1 и Y_0:

$$D_x(\sigma) = -(2a_1 + a_0)\sigma,$$
$$D_x(\delta) = -(a_2 + a_1 + a_0)\delta - Y_1 Y_2 Y_0(a_1) + \lambda Y_2 Y_0(a_1),$$
$$D_x(\eta) = -(a_2 + 2a_1).$$

Из этих уравнений получаем $\sigma = \delta = \eta = 0$. Итак, мы доказали, что если справедливы разложения (3.2) и (3.3), то (3.3) имеет вид

$$Y_{1210} = [Y_1, Y_{210}] = \lambda_{(M)} Y_{210}, \quad (4.62)$$

где λ_M определена формулой (4.53) или (4.57), а α_0, $\lambda_{(R)}$ и $\lambda_{(L)}$ определены формулами (4.52), (4.54) и (4.55) или формулами (4.56), (4.58) и (4.59) соответственно. □

Следствие. *В обоих случаях*

$$Q(u_1) = -\frac{c_1}{r(u_1)} + c_2, \quad P(u_1) = c_3 r(u_1) + c_4$$

и

$$Q(u_1) = c_1 P(u_1) + c_2$$

связь (4.2) *выполняется тождественно.*

5. Обсуждение

Можно доказать, что решетка (1.1), где функция α определена одним из соотношений (4.52) или (4.56), удовлетворяет предположениям (i) и (ii) (см. раздел 3) и, следовательно, интегрируема в обоих случаях в смысле определения 1. Итак, мы можем сформулировать полученный классификационный результат следующим образом.

Теорема 3. *Решетка* (1.1)*, удовлетворяющая предположениям* (i) *и* (ii) (*см. раздел* 3)*, может быть приведена при помощи точечного преобразования $v = p(u)$ к одной из следующих форм*:

$$\text{(a)} \quad v_{n,x,y} = v_{n,x} v_{y,y} \left(\frac{1}{v_n - v_{n-1}} - \frac{1}{v_{n+1} - v_n} \right), \tag{5.1}$$

$$\text{(b)} \quad v_{n,x,y} = v_{n,x} v_{n,y} \left(\frac{1}{1 + \beta e^{-v_n} - \alpha e^{-(v_n + v_{n-1})}} + \frac{\alpha}{e^{v_n + v_{n+1}} + \beta e^{v_n} - \alpha} \right), \tag{5.2}$$

где α и β — произвольные постоянные.

Укажем точечные преобразования, применяемые к решеткам. Замена переменных $w = P(u)$ приводит (4.52) к виду

$$w_{n,x,y} = w_{n,x} w_{n,y} \left(\frac{1}{w_n + c_1 w_{n-1} + c_2} + \frac{c_1}{w_{n+1} + c_1 w_n + c_2} \right). \tag{5.3}$$

Последняя решетка приводится к виду (5.1) при помощи замены переменных

$$\begin{aligned} v_n &= (-c_1)^n w_n - \frac{c_2}{1 + c_1}, && \text{если } c_1 \neq -1, \\ v_n &= w_n - c_2 n, && \text{если } c_1 = -1. \end{aligned}$$

Замена переменных $v = \ln r(u)$ приводит (4.56) к виду (5.2).

Отметим, что уравнение (5.1) совпадает с уравнением Ферапонтова—Шабата—Ямилова (см. [3, 11]). Уравнение (5.2), по всей видимости, является новым. Утверждается, что следующая система гиперболических уравнений

$$\begin{aligned} & v_{-1} = c_0, \\ & v_{n,x,y} = v_{n,x} v_{n,y} \left(\frac{1}{1 + \beta e^{-v_n} - \alpha e^{-(v_n + v_{n-1})}} + \frac{\alpha}{e^{v_n + v_{n+1}} + \beta e^{v_n} - \alpha} \right), \\ & v_{N+1} = c_1, \quad 0 \leqslant n \leqslant N, \end{aligned} \tag{5.4}$$

допускает полный набор функционально независимых x- и y-интегралов для любого натурального N и произвольного выбора постоянных параметров c_0 и c_1. Подобное утверждение имеет место также для решетки (5.1).

Заключение. В работе проанализирована проблема интегрируемой классификации двумерных решеток вида (1.1). Говорят, что решетка интегрируема, если любое ее конечномерное ограничение (1.2) допускает полный набор интегралов. Согласно этому определению, задача сводится к классификации гиперболических систем нелинейных уравнений с частными производными. В действительности мы должны описать все функции α, для которых характеристические кольца Ли, соответствующие системам с ограничениями, имеют конечную размерность (см. предположение (i) в разделе 3). В этой работе рассмотрена классификация при выполнении дополнительного условия (предположение (ii) в разделе 3), которое означает, что базис в характеристическом кольце Ли согласован с градуировкой кольца. В качестве одного из результатов классификации получены два уравнения (с точностью до точечных преобразований), одно из которых,по всей вероятности, является новым.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Жибер А. В., Муртазина Р. Д., Хабибуллин И. Т., Шабат А. Б.* Характеристические кольца Ли и нелинейные интегрируемые уравнения. — М.–Ижевск: РХД, 2012.
2. *Жибер А. В., Муртазина Р. Д., Хабибуллин И. Т., Шабат А. Б.* Характеристические кольца Ли и интегрируемые модели математической физики// Уфим. мат. ж. — 2012. — *4*, № 3. — С. 17–85.
3. *Ферапонтов Е. В.* Преобразования Лапласа систем гидродинамического типа в инвариантах Римана// Теор. мат. физ. — 1997. — *110*, № 1. — С. 86–97.
4. *Adler V. E., Bobenko A. I., Suris Yu. B.* Classification of integrable equations on quad-graphs. The consistency approach// Commun. Math. Phys. — 2003. — *233*, № 3. — С. 513–543.
5. *Ferapontov E. V., Khusnutdinova K. R.* Hydrodynamic reductions of multidimensional dispersionless PDEs: the test for integrability// J. Math. Phys. — 2004. — *45*. — С. 2365–2377.
6. *Ferapontov E. V., Khusnutdinova K. R.* On the integrability of (2+1)-dimensional quasilinear systems// Commun. Math. Phys. — 2004. — *248*, № 1. — С. 187–206.
7. *Ferapontov E. V., Khusnutdinova K. R., Tsarev S. P.* On a class of three-dimensional integrable Lagrangians// Commun. Math. Phys. — 2006. — *261*, № 1. — С. 225–243.
8. *Habibullin I. T.* Characteristic Lie rings, finitely-generated modules, and integrability conditions for (2+1)-dimensional lattices// Phys. Script. — 2013. — *87*, № 6. — С. 065005.
9. *Nijhoff F. W., Walker A. J.* The discrete and continuous Painlevé hierarchy and the Garnier system// Glasgow Math. J. — 2001. — *43*. — С. 109–123.
10. *Shabat A. B.* Higher symmetries of two-dimensional lattices// Phys. Lett. A. — 1995. — *200*, № 2. — С. 121–133.
11. *Shabat A. B., Yamilov R. I.* To a transformation theory of two-dimensional integrable systems// Phys. Lett. A. — 1997. — *227*, №№. 1-2. — С. 15–23.

И. Т. Хабибуллин
Институт математики с вычислительным центром
Уфимского научного центра РАН,
Башкирский государственный университет, Уфа
E-mail: `habibullinismagil@gmail.com`

М. Н. Попцова
Институт математики с вычислительным центром
Уфимского научного центра РАН
E-mail: `mnpoptsova@gmail.com`

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 140 (2017). С. 30–42

УДК 517.9

ОБ ОДНОЙ ИНТЕГРИРУЕМОЙ ДИСКРЕТНОЙ СИСТЕМЕ

© 2017 г. Е. В. ПАВЛОВА, И. Т. ХАБИБУЛЛИН, А. Р. ХАКИМОВА

Аннотация. В работе исследуется система нелинейных уравнений на квадратном графе, связанная с аффинной алгеброй $A_1^{(1)}$. Эта система является наиболее простым представителем класса дискретных систем, соответствующих аффинным алгебрам Ли. В работе найдено представление Лакса и построены иерархии высших симметрий. В окрестности особых точек $\lambda = 0$ и $\lambda = \infty$ построены формальные асимптотические разложения собственных функций пары Лакса и на основе этих разложений найдены серии локальных законов сохранения для рассматриваемой системы.

Ключевые слова: пара Лакса, высшая симметрия, законы сохранения, оператор рекурсии, формальная диагонализация.

AMS Subject Classification: 35Q51, 37K60

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение 30
2. Операторы рекурсии и высшие симметрии 32
3. Формальное асимптотическое разложение собственной функции пары Лакса в окрестности особой точки $\lambda = \infty$ 33
4. Формальное асимптотическое разложение собственной функции пары Лакса в окрестности особой точки $\lambda = 0$ 37
5. Заключение 41
Список литературы 41

1. Введение

Системы дифференциальных уравнений экспоненциального типа

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} u_i = \exp\left\{\sum_j a_{ij} u_j\right\}, \quad i, j = 1, 2, \ldots, N, \tag{1}$$

обобщающие уравнения Лиувилля и синус-Гордона имеют приложения в конформной теории поля (см. [3]). Различные дискретные варианты системы (1) в последнее время широко обсуждаются в литературе в связи с квантовой теорией поля (см. обзор [8] и цитированную там литературу). При условии, что матрица $A = (a_{ij})$ коэффициентов системы (1) совпадает с обобщенной матрицей Картана аффинной алгебры Ли, система является интегрируемой. При этом представление Лакса для системы (1) выражается в замкнутой форме в терминах образующих соответствующей алгебры Ли (см. [2]). Проблема описания интегрируемых дискретных версий системы (1) остается мало исследованной. В настоящей работе мы обсуждаем дискретную систему, связанную с

Работа И. Т. Хабибуллина и А. Р. Хакимовой выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 15-11-20007).

аффинной алгеброй Ли $A_1^{(1)}$:

$$\begin{cases} z_{n+1,m+1} = \dfrac{w_{n+1,m}^2}{z_{n,m}} - \dfrac{w_{n+1,m}^2}{z_{n,m+1}} + z_{n+1,m}, \\ w_{n+1,m+1} = \dfrac{z_{n,m+1}^2}{w_{n,m}} - \dfrac{z_{n,m+1}^2}{w_{n,m+1}} + w_{n+1,m}, \end{cases} \tag{2}$$

найденную ранее в [7]. Здесь $z_{n,m} = z(n,m)$, $w_{n,m} = w(n,m)$ — искомые функции. Цель работы состоит в построении пары Лакса для системы (2), описании иерархий ее высших симметрий и локальных законов сохранения. При построении пар Лакса для системы (1) и ее симметрий, а также при построении рекурсионных операторов мы воспользовались алгоритмом, предложенным в [11].

В [7] была найдена высшая симметрия системы (2) по направлению n:

$$\begin{cases} z_{n,m,t} = \dfrac{z_{n,m}^2}{w_{n,m}} + w_{n+1,m}, \\ w_{n,m,t} = \dfrac{w_{n,m}^2}{z_{n-1,m}} + z_{n,m}. \end{cases} \tag{3}$$

Можно проверить, что цепочка (3) является условием совместности следующей системы линейных уравнений:

$$\varphi_{n,m,t} = p\varphi_{n,m}, \tag{4}$$

$$\varphi_{n+1,m} = f\varphi_{n,m}, \tag{5}$$

где

$$p = \begin{pmatrix} \dfrac{w_{n+1,m}}{z_{n,m}} - \dfrac{1}{2}\lambda & \dfrac{w_{n+1,m}}{z_{n,m}} \\ \lambda & \dfrac{z_{n,m}}{w_{n,m}} + \frac{1}{2}\lambda \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} \dfrac{z_{n+1,m}}{w_{n+1,m}} + \lambda & -\dfrac{w_{n+1,m}}{z_{n,m}} \\ -\lambda & \dfrac{w_{n+1,m}}{z_{n,m}}. \end{pmatrix} \tag{6}$$

В настоящей работе для дискретной системы (2) найдена пара Лакса, задаваемая уравнениями:

$$\begin{aligned} \varphi_{n+1,m} &= f\varphi_{n,m}, \\ \varphi_{n,m+1} &= g\varphi_{n,m}, \end{aligned} \tag{7}$$

где f такая же, как в (6), а матрица g имеет вид

$$g = \begin{pmatrix} 1 + \dfrac{z_{n,m+1}(z_{n,m+1} - z_{n,m})(w_{n,m+1} - w_{n,m})}{z_{n,m}w_{n,m}w_{n,m+1}\lambda} & \dfrac{z_{n,m+1}^2(w_{n,m+1} - w_{n,m})}{z_{n,m}w_{n,m}w_{n,m+1}\lambda} \\ \dfrac{z_{n,m+1} - z_{n,m}}{z_{n,m}} & \dfrac{z_{n,m+1}}{z_{n,m}} \end{pmatrix}. \tag{8}$$

В разделе 2 найдена высшая симметрия дискретной системы (1) по направлению m:

$$\begin{cases} z_{n,m,\tau} = \dfrac{w_{n,m}w_{n,m-1}}{w_{n,m} - w_{n,m-1}}, \\ w_{n,m,\tau} = \dfrac{w_{n,m}^2}{z_{n,m+1} - z_{n,m}}, \end{cases} \tag{9}$$

для которой предъявлена пара Лакса:

$$\begin{aligned} \varphi_{n,m+1} &= g\varphi_{n,m}, \\ \varphi_{n,m,\tau} &= q\varphi_{n,m}, \end{aligned} \tag{10}$$

где g имеет вид (8), а q задается равенством

$$q = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{z_{n,m+1}}{(z_{n,m+1}-z_{n,m})\lambda} \\ \dfrac{w_{n,m}w_{n,m-1}}{z_{n,m}(w_{n,m}-w_{n,m-1})} & -\dfrac{1}{\lambda}+\frac{w_{n,m}w_{n,m-1}}{z_{n,m}(w_{n,m}-w_{n,m-1})} \end{pmatrix}. \tag{11}$$

Формальные асимптотические представления собственной функции линейных уравнений (5), (7) в окрестности особых точек $\lambda=\infty$ и $\lambda=0$ построены в разделах 3, 4. На основе этих представлений описаны бесконечные серии законов сохранения для системы (2).

2. Операторы рекурсии и высшие симметрии

Для построения высшей симметрии системы (1) воспользуемся методом одевания по Захарову—Шабату (см. [16, 17]). Будем искать систему дифференциальных уравнений второго порядка

$$\varphi_{n,m,\tau} = q\varphi_{n,m}, \tag{12}$$

совместную с уравнением (7), предполагая что q рационально зависит от спектрального параметра λ:

$$q = A\frac{1}{\lambda}+B. \tag{13}$$

Условие совместности уравнений (7), (12) равносильно уравнению вида

$$g_\tau + g\left(A\frac{1}{\lambda}+B\right) - D_m\left(A\frac{1}{\lambda}+B\right)g = 0, \tag{14}$$

где g определено равенством (8), D_m — оператор сдвига, действующий по правилу $D_m u_{n,m} = u_{n,m+1}$. Приравнивая коэффициенты при степенях λ в (14), получаем систему уравнений для отыскания матриц A и B, а также выводим условия разрешимости этих уравнений в виде дифференциальных уравнений на переменные $z_{n,m}$ и $w_{n,m}$. Опустив простые, но длинные вычисления предъявим только ответ:

$$\begin{gathered} A = \begin{pmatrix} c_1 & c_6\dfrac{z_{n,m+1}}{z_{n,m+1}-z_{n,m}} \\ 0 & c_1-c_6 \end{pmatrix}, \\ B = \begin{pmatrix} c_3+\dfrac{c_2}{z_{n,m}} & \dfrac{c_2}{z_{n,m}} \\ c_6\dfrac{w_{n,m}w_{n,m-1}}{z_{n,m}(w_{n,m}-w_{n,m-1})} & c_3-c_5z_{n,m}+c_6\dfrac{w_{n,m}w_{n,m-1}}{z_{n,m}(w_{n,m}-w_{n,m-1})} \end{pmatrix}, \end{gathered} \tag{15}$$

$$\begin{cases} \dfrac{d}{d\tau}z_{n,m} = c_2 - c_5z_{n,m}^2 - c_4z_{n,m} + c_6\dfrac{w_{n,m}w_{n,m-1}}{w_{n,m}-w_{n,m-1}}, \\ \dfrac{d}{d\tau}w_{n,m+1} = \dfrac{w_{n,m+1}^2}{w_{n,m}^2}\dfrac{d}{d\tau}w_{n,m} + c_4\dfrac{w_{n,m+1}(w_{n,m+1}-w_{n,m})}{w_{n,m}} \\ \qquad + 2c_5\dfrac{z_{n,m+1}w_{n,m+1}(w_{n,m+1}-w_{n,m})}{w_{n,m}} - c_6\dfrac{w_{n,m+1}^2(z_{n,m}-2z_{n,m+1}+z_{n,m+2})}{(z_{n,m+2}-z_{n,m+1})(z_{n,m+1}-z_{n,m})}, \end{cases} \tag{16}$$

где c_i — произвольные постоянные, $i=\overline{1,6}$. Из условия совместности систем (2) и (16) имеем: $c_2=0$, $c_5=0$. Не ограничивая общности, можно положить в формулах (15) и (16) $c_3=c_4=0$, $c_6=1$. В результате получаем:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{d\tau}z_{n,m} = \dfrac{w_{n,m}w_{n,m-1}}{w_{n,m}-w_{n,m-1}}, \\ \dfrac{d}{d\tau}w_{n,m} = \dfrac{w_{n,m}^2}{(z_{n,m+1}-z_{n,m})}, \end{cases} \qquad q = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{z_{n,m+1}}{(z_{n,m+1}-z_{n,m})\lambda} \\ \dfrac{w_{n,m}w_{n,m-1}}{z_{n,m}(w_{n,m}-w_{n,m-1})} & -\dfrac{1}{\lambda}+\dfrac{w_{n,m}w_{n,m-1}}{z_{n,m}(w_{n,m}-w_{n,m-1})} \end{pmatrix}.$$

Можно показать, что рекурсионные операторы для систем (3) и (9) имеют, соответственно, вид

$$R_n = \begin{pmatrix} 2\dfrac{z_{n,m}}{w_{n,m}} & D_n - \dfrac{z_{n,m}^2}{w_{n,m}^2} + 2\dfrac{z_{n,m}}{z_{n-1,m}} \\ \dfrac{1}{w_{n,m}^2} + \dfrac{1}{z_{n-1,m}^2} D_n^{-1} & \dfrac{2}{w_{n,m} z_{n-1,m}} \end{pmatrix} -$$

$$- 2 \begin{pmatrix} z_{n,m} \\ \dfrac{1}{w_{n,m}} \end{pmatrix} (D_n - 1)^{-1} \left(\frac{w_{n+1,m}}{z_{n,m}^2} - \frac{1}{w_{n,m}}, \quad \frac{z_{n,m}}{w_{n,m}^2} - \frac{1}{z_{n-1,m}} \right), \quad (17)$$

где D_n — оператор сдвига, действующий по правилу $D_n u_{n,m} = u_{n+1,m}$, и

$$R_m = \begin{pmatrix} 2 r_{n,m-1} s_{n,m} & s_{n,m}^2 (D_m^{-1} + 1) \\ r_{n,m}^2 (D_m + 1) & 2 r_{n,m} s_{n,m} \end{pmatrix}$$

$$+ 2 \begin{pmatrix} s_{n,m}(D_m - 1)^{-1}(r_{n,m-1} - r_{n,m}) & s_{n,m}(D_m - 1)^{-1}(s_{n,m} - s_{n,m+1}) \\ r_{n,m}(D_m - 1)^{-1} D_m (r_{n,m-1} - r_{n,m}) & r_{n,m}(D_m - 1)^{-1}(s_{n,m} - s_{n,m+1}) \end{pmatrix}, \quad (18)$$

где

$$r_{n,m} = \frac{1}{z_{n,m+1} - z_{n,m}}, \quad s_{n,m} = \frac{1}{v_{n,m} - v_{n,m-1}}, \quad v_{n,m} = \frac{1}{w_{n,m}}.$$

Подействовав операторами рекурсии (17) и (18) на правые части уравнений (3) и (9), соответственно, получим следующие высшие симметрии системы (2):

$$\begin{cases} z_{n,m,t_2} = \dfrac{z_{n,m}^3}{w_{n,m}^2} + \dfrac{z_{n,m}^2}{z_{n-1,m}} + z_{n+1,m} + \dfrac{w_{n+1,m}^2}{z_{n,m}} + 2\dfrac{z_{n,m} w_{n+1,m}}{w_{n,m}}, \\ w_{n,m,t_2} = \dfrac{z_{n,m}^2}{w_{n,m}^3} + \dfrac{w_{n+1,m}}{w_{n,m}^2} + \dfrac{1}{w_{n-1,m}} + \dfrac{w_{n,m}}{z_{n-1,m}^2} + 2\dfrac{z_{n,m}}{w_{n,m} z_{n-1,m}}, \end{cases} \quad (19)$$

$$\begin{cases} z_{n,m,\tau_2} = -\dfrac{1}{(v_{n,m} - v_{n,m-1})^2} \left(\dfrac{1}{z_{n,m+1} - z_{n,m}} + \dfrac{1}{z_{n,m} - z_{n,m-1}} \right), \\ w_{n,m,\tau_2} = -\dfrac{1}{(z_{n,m+1} - z_{n,m})^2} \left(\dfrac{1}{v_{n,m+1} - v_{n,m}} + \dfrac{1}{v_{n,m} - v_{n,m-1}} \right). \end{cases} \quad (20)$$

3. Формальное асимптотическое разложение собственной функции пары Лакса в окрестности особой точки $\lambda = \infty$

Линейной заменой переменных $\varphi_{n,m} = \tilde{T} \tilde{\varphi}_{n,m}$, где

$$\tilde{T} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

преобразуем уравнения (4), (5), (7) соответственно в следующие уравнения:

$$\tilde{\varphi}_{n,m,t} = P \tilde{\varphi}_{n,m}, \quad (21)$$

$$\tilde{\varphi}_{n+1,m} = F \tilde{\varphi}_{n,m}, \quad (22)$$

$$\tilde{\varphi}_{n,m+1} = G \tilde{\varphi}_{n,m}. \quad (23)$$

Смысл линейной замены состоит в том, что теперь главная при $\lambda \to \infty$ часть потенциала $P = P_0\lambda + P_1$ уравнения (21) является диагональной матрицей $P_0 = \mathrm{diag}\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$. При этом имеем:

$$P_1 = \begin{pmatrix} \frac{w_{n+1,m}}{z_{n,m}} + \frac{z_{n,m}}{w_{n,m}} & \frac{z_{n,m}}{w_{n,m}} \\ -\frac{w_{n+1,m}}{z_{n,m}} & 0 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{z_{n+1,m}}{w_{n+1,m}} \\ \frac{w_{n+1,m}}{z_{n,m}} & \lambda + \frac{w_{n+1,m}}{z_{n,m}} + \frac{z_{n+1,m}}{w_{n+1,m}} \end{pmatrix}, \tag{24}$$

$$G = \begin{pmatrix} \frac{z_{n,m+1}}{z_{n,m}} + \frac{z_{n,m+1}^2(w_{n,m+1} - w_{n,m})}{z_{n,m}w_{n,m}w_{n,m+1}\lambda} & \frac{z_{n,m+1}(w_{n,m+1} - w_{n,m})}{w_{n,m}w_{n,m+1}} \\ -\frac{z_{n,m+1}^2(w_{n,m+1} - w_{n,m})}{z_{n,m}w_{n,m}w_{n,m+1}\lambda} & 1 - \frac{z_{n,m+1}(w_{n,m+1} - w_{n,m})}{w_{n,m}w_{n,m+1}\lambda} \end{pmatrix}. \tag{25}$$

Далее мы воспользуемся методом асимптотической диагонализации линейной системы (см. [1,2]). Посредством формальной замены переменных вида

$$\tilde{\Phi}_{n,m} = T\tilde{\varphi}_{n,m}, \tag{26}$$

где T — формальный степенной ряд

$$T = E + \sum_{i=1}^{\infty} T_i\lambda^{-i}, \tag{27}$$

E — единичная (2×2)-матрица, приведем уравнение (21) к диагональному виду:

$$\tilde{\Phi}_{n,m,t} = \left(P_0\lambda - \sum_{k=0}^{\infty} h_k\lambda^{-k}\right)\tilde{\Phi}_{n,m}. \tag{28}$$

Здесь h_k — диагональная матрица при всех $k \geqslant 0$, а все матрицы T_i, $i \geqslant 1$, имеют нулевую диагональ. Из (21), (26), (28) находим:

$$T_t - \left(P_0\lambda - \sum_{k=0}^{\infty} h_k\lambda^{-k}\right)T = -T(P_0\lambda + P_1). \tag{29}$$

Заменяя в (29) T в силу (27) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях λ, получаем рекуррентные соотношения для определения искомых коэффициентов h_k, T_k:

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}E - P_0T_1 + h_0E = -EP_1 - T_1P_0, \\ &\frac{d}{dt}T_1 - P_0T_2 + h_0T_1 + h_1E = -T_1P_1 - T_2P_0, \\ &\frac{d}{dt}T_2 - P_0T_3 + h_0T_2 + h_1T_1 + h_2E = -T_2P_1 - T_3P_0, \quad \ldots . \end{aligned} \tag{30}$$

Решая последовательно уравнения (30), находим:

$$\begin{aligned} T = &\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \frac{z_{n,m}}{w_{n,m}} \\ \frac{w_{n+1,m}}{z_{n,m}} & 0 \end{pmatrix}\lambda^{-1} + \begin{pmatrix} 0 & -\frac{z_{n,m}^2}{w_{n,m}^2} - \frac{z_{n,m}}{z_{n-1,m}} \\ -\frac{w_{n+1,m}^2 + z_{n+1,m}z_{n,m}}{z_{n,m}^2} & 0 \end{pmatrix}\lambda^{-2} + \\ &+ \begin{pmatrix} 0 & \frac{z_{n,m}}{w_{n-1,m}} + \frac{z_{n,m}(z_{n,m}z_{n-1,m} + w_{n,m}^2)^2}{w_{n,m}^3 z_{n-1,m}^2} \\ \frac{w_{n+2,m}}{z_{n,m}} + \frac{(z_{n,m}z_{n+1,m} + w_{n+1,m}^2)^2}{z_{n,m}^3 w_{n+1,m}} & 0 \end{pmatrix}\lambda^{-3} + \ldots, \end{aligned} \tag{31}$$

$$h=\sum_{k=0}^{\infty}h_k\lambda^{-k}=\begin{pmatrix} -\dfrac{w_{n+1,m}w_{n,m}+z^2_{n,m}}{z_{n,m}w_{n,m}} & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} \dfrac{w_{n+1,m}}{w_{n,m}} & 0\\ 0 & -\dfrac{w_{n+1,m}}{w_{n,m}}\end{pmatrix}\lambda^{-1}+$$
$$+\begin{pmatrix} -\dfrac{w_{n+1,m}z_{n,m}}{w^2_{n,m}}-\dfrac{w_{n+1,m}}{z_{n-1,m}} & 0\\ 0 & \dfrac{w^2_{n+1,m}}{z_{n,m}w_{n,m}}+\dfrac{z_{n+1,m}}{w_{n,m}}\end{pmatrix}\lambda^{-2}+$$
$$+\begin{pmatrix} \dfrac{w_{n+1,m}}{w_{n-1,m}}+\dfrac{w_{n+1,m}(z_{n,m}z_{n-1,m}+w^2_{n,m})^2}{w^3_{n,m}z^2_{n-1,m}} & 0\\ 0 & \dfrac{(z_{n,m}z_{n+1,m}+w^2_{n+1,m})^2}{w_{n,m}z^2_{n,m}w_{n+1,m}}-\dfrac{w_{n+1,m}}{w_{n,m}}\end{pmatrix}\lambda^{-3}+\dots. \tag{32}$$

В силу того, что уравнения (21)–(23) совместны, формальная замена переменных (26) приводит так же и уравнение (22) к диагональному виду (см. [9]):

$$\tilde{\Phi}_{n+1,m}=S\tilde{\Phi}_{n,m}, \tag{33}$$

где S — формальный ряд, коэффициенты которого определяются из равенства

$$S=D_n(T)FT^{-1}; \tag{34}$$

здесь T — формальный ряд (31). Из формулы (34) находим

$$S=\begin{pmatrix} 0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\lambda+\begin{pmatrix} 0 & 0\\ 0 & \dfrac{z_{n+1,m}z_{n,m}+w^2_{n+1,m}}{z_{n,m}w_{n+1,m}}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} \dfrac{z_{n+1,m}}{z_{n,m}} & 0\\ 0 & -\dfrac{w_{n+2,m}}{w_{n+1,m}}\end{pmatrix}\lambda^{-1}+$$
$$+\begin{pmatrix} -\dfrac{z^2_{n+1,m}}{z_{n,m}w_{n+1,m}}-\dfrac{w_{n+1,m}z_{n+1,m}}{z^2_{n,m}} & 0\\ 0 & \dfrac{w^2_{n+2,m}}{z_{n+1,m}w_{n+1,m}}+\dfrac{z_{n+2,m}}{w_{n+1,m}}\end{pmatrix}\lambda^{-2}+\dots. \tag{35}$$

Поскольку система (5), (7) совместна, то совместной является и система (22), (23). Формальной заменой переменных (26) приведем уравнение (23) к диагональному виду:

$$\tilde{\Phi}_{n,m+1}=K\tilde{\Phi}_{n,m}, \tag{36}$$

где K — формальный ряд, определяемый из равенства

$$K=D_m(T)GT^{-1}; \tag{37}$$

формальный ряд T вычислен ранее (см. (31)). Из равенства (37) легко находим

$$K = \begin{pmatrix} \dfrac{z_{n,m+1}}{z_{n,m}} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dfrac{z_{n,m+1}^2(w_{n,m+1}-w_{n,m})}{z_{n,m}w_{n,m}w_{n,m+1}} & 0 \\ 0 & -\dfrac{z_{n,m+1}(w_{n,m+1}-w_{n,m})}{w_{n,m}w_{n,m+1}} \end{pmatrix}\lambda^{-1}+$$

$$+\begin{pmatrix} -\dfrac{z_{n,m+1}^3(w_{n,m+1}-w_{n,m})}{z_{n,m}w_{n,m}w_{n,m+1}^2} & 0 \\ 0 & \dfrac{(w_{n,m+1}-w_{n,m})(z_{n,m+1}^2(w_{n,m+1}-w_{n,m})+w_{n,m}w_{n,m+1}w_{n+1,m})}{w_{n,m}w_{n,m+1}^2} \end{pmatrix}\lambda^{-2}+$$

$$+\begin{pmatrix} \dfrac{z_{n,m+1}^3(w_{n,m+1}-w_{n,m})}{z_{n,m}w_{n,m}^3w_{n,m+1}}\left(\dfrac{z_{n,m+1}(w_{n,m}^2-w_{n,m+1}^2)}{w_{n,m+1}^2}+\dfrac{w_{n,m}^2+z_{n,m}z_{n-1,m}}{z_{n-1,m}}\right) & 0 \\ 0 & k_{22} \end{pmatrix}\lambda^{-3}+\ldots, \tag{38}$$

где

$$k=\frac{w_{n,m}-w_{n,m+1}}{w_{n,m}w_{n,m+1}}\left(\frac{z_{n,m+1}^3(w_{n,m+1}-w_{n,m})^2}{w_{n,m}^2w_{n,m+1}^2}+\right.$$
$$\left.+\frac{2z_{n,m+1}w_{n+1,m}(w_{n,m+1}-w_{n,m})}{w_{n,m}w_{n,m+1}}+\frac{w_{n+1,m}^2+z_{n+1,m}z_{n,m}}{z_{n,m}}\right). \tag{39}$$

Условие совместности уравнений (28) и (33) можно представить в виде

$$(D_n-1)h=\frac{d}{dt}\log S. \tag{40}$$

Отсюда видно, что функции h и $\log S$ являются производящими функциями законов сохранения для системы (3). Запишем равенство (40) в развернутом виде, предварительно разложив функцию $\log S$ в ряд по отрицательным степеням λ:

$$\log S=\log\left(S_1\lambda+S_0+S_{-1}\lambda^{-1}+S_{-2}\lambda^{-2}+\ldots\right)=$$
$$=\log S_1\lambda\left(1+\frac{S_0}{S_1}\lambda^{-1}+\frac{S_{-1}}{S_1}\lambda^{-2}+\frac{S_{-2}}{S_1}\lambda^{-3}+\ldots\right)=$$
$$=\log S_1+\log\lambda+\frac{S_0}{S_1}\lambda^{-1}+\left(\frac{S_{-1}}{S_1}-\frac{1}{2}\left(\frac{S_0}{S_1}\right)^2\right)\lambda^{-2}+$$
$$+\left(\frac{S_{-2}}{S_1}-\frac{S_{-1}S_0}{S_1^2}+\frac{1}{3}\left(\frac{S_0}{S_1}\right)^3\right)\lambda^{-3}+\ldots. \tag{41}$$

Учитывая (41), перепишем (40) в виде

$$(D_n-1)\left(h_0+h_1\lambda^{-1}+h_2\lambda^{-2}+h_3\lambda^{-3}+\ldots\right)=$$
$$=\frac{d}{dt}\left(\log S_1+\frac{S_0}{S_1}\lambda^{-1}+\left(\frac{S_{-1}}{S_1}-\frac{1}{2}\left(\frac{S_0}{S_1}\right)^2\right)\lambda^{-2}+\left(\frac{S_{-2}}{S_1}-\frac{S_{-1}S_0}{S_1^2}+\frac{1}{3}\left(\frac{S_0}{S_1}\right)^3\right)\lambda^{-3}+\ldots\right). \tag{42}$$

Сравнивая коэффициенты при степенях λ в равенстве (42), можно получить бесконечную серию законов сохранения для системы (3). Предъявим первые три из них:

$$(D_n-1)\left(-\frac{w_{n+1,m}}{w_{n,m}}\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{z_{n+1,m}}{w_{n+1,m}}+\frac{w_{n+1,m}}{z_{n,m}}\right),$$

$$(D_n-1)\left(\frac{w_{n+1,m}^2}{w_{n,m}z_{n,m}}+\frac{z_{n+1,m}}{w_{n,m}}\right)=\frac{d}{dt}\left(-\frac{w_{n+2,m}}{w_{n+1,m}}-\frac{1}{2}\left(\frac{z_{n+1,m}}{w_{n+1,m}}+\frac{w_{n+1,m}}{z_{n,m}}\right)^2\right),$$

$$(D_n-1)\left(-\frac{\left(w_{n+1,m}^2+z_{n+1,m}z_{n,m}\right)^2}{z_{n,m}^2w_{n,m}w_{n+1,m}}-\frac{w_{n+2,m}}{w_{n,m}}\right)=$$
$$=\frac{d}{dt}\left(\frac{w_{n+2,m}^2+z_{n+1,m}z_{n+2,m}}{z_{n+1,m}w_{n+1,m}}+\frac{w_{n+2,m}(w_{n+1,m}^2+z_{n+1,m}z_{n,m})}{w_{n+1,m}^2z_{n,m}}+\frac{1}{3}\left(\frac{z_{n+1,m}}{w_{n+1,m}}+\frac{w_{n+1,m}}{z_{n,m}}\right)^3\right).$$

Из совместности уравнений (33) и (36) получаем равенство

$$(D_n-1)\ln K=(D_m-1)\ln S, \tag{43}$$

которое определяет бесконечную серию законов сохранения для системы (2). Разложив в ряд обе части равенства (43), получим:

$$(D_n-1)\left(\ln K_0+\frac{K_1}{K_0}\lambda^{-1}+\left(\frac{K_2}{K_0}-\frac{1}{2}\left(\frac{K_1}{K_0}\right)^2\right)\lambda^{-2}+\left(\frac{K_3}{K_0}-\frac{K_2K_1}{K_0^2}+\frac{1}{3}\left(\frac{K_1}{K_0}\right)^3\right)\lambda^{-3}+\ldots\right)=$$
$$=(D_m-1)\left(\ln S_1+\frac{S_0}{S_1}\lambda^{-1}+\left(\frac{S_{-1}}{S_1}-\frac{1}{2}\left(\frac{S_0}{S_1}\right)^2\right)\lambda^{-2}+\left(\frac{S_{-2}}{S_1}-\frac{S_{-1}S_0}{S_1^2}+\frac{1}{3}\left(\frac{S_0}{S_1}\right)^3\right)\lambda^{-3}+\ldots\right).$$

Два первых закона сохранения для (2) имеют вид:

$$(D_n-1)\left(\frac{1}{2}\frac{(w_{n,m+1}-w_{n,m})(z_{n,m+1}^2(w_{n,m+1}-w_{n,m})+2w_{n,m}w_{n+1,m}w_{n,m+1})}{w_{n,m}^2w_{n,m+1}^2}\right)=$$
$$=(D_m-1)\left(-\frac{w_{n+2,m}}{w_{n+1,m}}-\frac{1}{2}\left(\frac{z_{n+1,m}}{w_{n+1,m}}+\frac{w_{n+1,m}}{z_{n,m}}\right)^2\right),$$

$$(D_n-1)\left(-\frac{(w_{n,m+1}-w_{n,m})^2z_{n,m+1}w_{n+1,m}}{w_{n,m}^2w_{n,m+1}^2}-\right.$$
$$\left.-\frac{(w_{n,m+1}-w_{n,m})(w_{n+1,m}^2+z_{n+1,m}z_{n,m})}{w_{n,m+1}w_{n,m}z_{n,m}}-\frac{1}{3}\frac{z_{n,m+1}^3(w_{n,m+1}-w_{n,m})^3}{w_{n,m}^3w_{n,m+1}^3}\right)=$$
$$=(D_m-1)\left(\frac{w_{n+2,m}^2+z_{n+1,m}z_{n+2,m}}{z_{n+1,m}w_{n+1,m}}+\frac{w_{n+2,m}(w_{n+1,m}^2+z_{n+1,m}z_{n,m})}{w_{n+1,m}^2z_{n,m}}+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{3}\left(\frac{z_{n+1,m}}{w_{n+1,m}}+\frac{w_{n+1,m}}{z_{n,m}}\right)^3\right).$$

4. Формальное асимптотическое разложение собственной функции пары Лакса в окрестности особой точки $\lambda=0$

Исследуем поведение решения уравнения (7) в окрестности особой точки $\lambda=0$. При помощи замены спектрального параметра $\xi=1/\lambda$ перенесем особую точку в бесконечность. Воспользуемся методом асимптотической диагонализации дискретных операторов, разработанным в [4, 6, 10]. Разложим потенциал g уравнения (7) в произведение трех сомножителей $g=\alpha Z\gamma$, где α и γ — соответственно нижне- и верхнетреугольные матричные функции, ограниченные и невырожденные при $\xi = \infty$. Вся сингулярность функции g сосредоточена в диагональном сомножителе Z:

$$\alpha = \begin{pmatrix} \dfrac{z_{n,m+1}(z_{n,m+1}-z_{n,m})(w_{n,m+1}-w_{n,m})}{z_{n,m}w_{n,m}w_{n,m+1}} + \xi^{-1} & 0 \\ \dfrac{z_{n,m+1}-z_{n,m}}{z_{n,m}}\xi^{-1} & \dfrac{z_{n,m+1}w_{n,m}w_{n,m+1}\xi}{z_{n,m+1}(z_{n,m+1}-z_{n,m})(w_{n,m+1}-w_{n,m})\xi + z_{n,m}w_{n,m}w_{n,m+1}} \end{pmatrix},$$

$$Z = \begin{pmatrix} \xi & 0 \\ 0 & \xi^{-1} \end{pmatrix}, \quad \gamma = \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{z_{n,m+1}^2(w_{n,m+1}-w_{n,m})\xi}{z_{n,m+1}(z_{n,m+1}-z_{n,m})(w_{n,m+1}-w_{n,m})\xi + z_{n,m}w_{n,m}w_{n,m+1}} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Приведем линейное уравнение (7) к некоторому специальному виду, удобному для построения асимптотического разложения. А именно, с помощью замены $\varphi_{n,m} = \gamma^{-1}\psi_{n,m}$ преобразуем уравнение (7) к виду

$$\psi_{n,m+1} = PZ\psi_{n,m}, \tag{44}$$

где $P = D_m(\gamma)\alpha$. Отметим, что функция $P(z_{n,m}, w_{n,m}, \xi)$ является аналитической и невырожденной в окрестности точки $\xi = \infty$:

$$P = P_0 + P_1\xi^{-1} + P_2\xi^{-2} + P_3\xi^{-3} + \ldots,$$

и выполняется условие регулярности: главный минор матрицы $P(z_{n,m}, w_{n,m}, \infty)$, совпадающий с элементом P_{11} этой матрицы, очевидно, отличен от нуля. Тогда согласно [6, предложение 1] существует такой формальный ряд

$$T = \sum_{i\geqslant 0} T_i\xi^{-1},$$

что оператор $L_0 := T^{-1}LT$ имеет вид $L_0 = D_m^{-1}hZ$, где $L = D_m^{-1}P(z_{n,m}, w_{n,m}, \xi)Z$, h — формальный ряд с диагональными коэффициентами:

$$h = h_0 + h_1\xi^{-1} + h_2\xi^{-2} + h_3\xi^{-3} + \ldots.$$

Согласно [6, предложение 1] получаем, что искомые коэффициенты формальных рядов T и h определяются из равенства

$$D_m(T)h = P\overline{T}, \tag{45}$$

где функция

$$\overline{T} := ZTZ^{-1} = \overline{T}_0 + \overline{T}_1\xi^{-1} + \overline{T}_2\xi^{-2} + \ldots$$

также аналитична на бесконечности. Перепишем (45) в развернутом виде:

$$D_m\Big(T_0 + T_1\xi^{-1} + T_2\xi^{-2} + T_3\xi^{-3} + \ldots\Big)\Big(h_0 + h_1\xi^{-1} + h_2\xi^{-2} + h_3\xi^{-3} + \ldots\Big) = \\ = \Big(P_0 + P_1\xi^{-1} + P_2\xi^{-2} + P_3\xi^{-3} + \ldots\Big)\Big(\overline{T}_0 + \overline{T}_1\xi^{-1} + \overline{T}_2\xi^{-2} + \ldots\Big). \tag{46}$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ξ в равенстве (46), получим бесконечную цепочку уравнений на неизвестные T_k и h_k:

$$\begin{aligned} &D_m(T_0)h_0 = P_0\overline{T}_0, \\ &D_m(T_0)h_1 + D_m(T_1)h_0 = P_0\overline{T}_1 + P_1\overline{T}_0, \\ &D_m(T_0)h_2 + D_m(T_1)h_1 + D_m(T_2)h_0 = P_0\overline{T}_2 + P_1\overline{T}_1 + P_2\overline{T}_0, \quad \ldots. \end{aligned} \tag{47}$$

Положим $\operatorname{diag} T_0 = (1,1)$, а диагональные элементы матрицы T_i для всех $i > 0$ выберем равными нулю. Последовательное решение уравнений набора (47) дает:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \dfrac{w_{n,m}w_{n,m-1}}{z_{n,m}(w_{n,m} - w_{n,m-1})} & 0 \end{pmatrix} \xi^{-1} + \begin{pmatrix} 0 & t_{12} \\ t_{21} & 0 \end{pmatrix} \xi^{-2} + \ldots, \tag{48}$$

где

$$t_{12} = -\frac{z_{n,m}w_{n,m}^2 w_{n,m+1}^2 z_{n,m+2}}{z_{n,m+1}(z_{n,m+1} - z_{n,m})^2 (w_{n,m+1} - w_{n,m})^2 (z_{n,m+2} - z_{n,m+1})},$$
$$t_{21} = -\frac{w_{n,m}^2 w_{n,m-1}^2 (z_{n,m+1} - z_{n,m-1})}{z_{n,m}(z_{n,m} - z_{n,m-1})(z_{n,m+1} - z_{n,m})(w_{n,m} - w_{n,m-1})^2},$$

$$h = \begin{pmatrix} \dfrac{z_{n,m+1}(z_{n,m+1} - z_{n,m})(w_{n,m+1} - w_{n,m})}{z_{n,m}w_{n,m}w_{n,m+1}} & 0 \\ 0 & \dfrac{w_{n,m}w_{n,m+1}}{(z_{n,m+1} - z_{n,m})(w_{n,m+1} - w_{n,m})} \end{pmatrix} +$$
$$+ \begin{pmatrix} 1 + \dfrac{z_{n,m+2}(z_{n,m+1} - z_{n,m})}{z_{n,m}(z_{n,m+2} - z_{n,m+1})} & 0 \\ 0 & -\dfrac{w_{n,m}^2 w_{n,m+1}^2 (z_{n,m+2} - z_{n,m})}{(z_{n,m+1} - z_{n,m})^2 (w_{n,m+1} - w_{n,m})^2 (z_{n,m+2} - z_{n,m+1})} \end{pmatrix} \xi^{-1} +$$
$$+ \begin{pmatrix} -\dfrac{z_{n,m+1}w_{n,m+2}w_{n,m+1}(z_{n,m+1} - z_{n,m})}{z_{n,m}(z_{n,m+2} - z_{n,m+1})^2 (w_{n,m+2} - w_{n,m+1})} & 0 \\ 0 & h_{22} \end{pmatrix} \xi^{-2} + \ldots, \tag{49}$$

где

$$h_{22} = \frac{w_{n,m}^2 w_{n,m+1}^3}{(z_{n,m+1} - z_{n,m})(w_{n,m+1} - w_{n,m})^2 (z_{n,m+2} - z_{n,m+1})^2} \times$$
$$\times \left(\frac{w_{n,m}(z_{n,m+2} - z_{n,m})^2}{(z_{n,m+1} - z_{n,m})^2 (w_{n,m+1} - w_{n,m})} + \frac{w_{n,m+2}}{(w_{n,m+2} - w_{n,m+1})} \right).$$

Преобразуем уравнение (5) при помощи той же замены $\varphi_{n,m} = \gamma^{-1}\psi_{n,m}$:

$$\psi_{n+1,m} = F\psi_{n,m}, \tag{50}$$

где $F = \gamma_{n+1,m} f \gamma^{-1}$. Уравнение (50) можно записать в виде

$$\psi_{n,m} = M\psi_{n,m}, \tag{51}$$

где $M = D_n^{-1}F$. Сопряжением формальным рядом $M_0 = T^{-1}MT$ приведем оператор M к диагональному виду $M_0 = D_n^{-1}S$, где

$$S = \begin{pmatrix} \dfrac{z_{n+1,m}}{w_{n+1,m}} & 0 \\ 0 & \dfrac{w_{n+1,m}}{z_{n,m}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\dfrac{z_{n+1,m}z_{n,m+1}z_{n,m}}{w_{n+1,m}^2 (z_{n,m+1} - z_{n,m})} & 0 \\ 0 & \dfrac{z_{n,m+1}}{(z_{n,m+1} - z_{n,m})} \end{pmatrix} \xi^{-1} +$$
$$+ \begin{pmatrix} \dfrac{z_{n+1,m}z_{n,m}^2 (z_{n,m+1}^2 (w_{n,m+1} - w_{n,m}) + w_{n+1,m}w_{n,m}w_{n,m+1})}{w_{n+1,m}^3 (z_{n,m+1} - z_{n,m})^2 (w_{n,m+1} - w_{n,m})} & 0 \\ 0 & -\dfrac{z_{n,m}w_{n,m}w_{n,m+1}}{(z_{n,m+1} - z_{n,m})^2 (w_{n,m+1} - w_{n,m})} \end{pmatrix} \xi^{-2} + \ldots,$$

Для системы (3) выпишем первые несколько законов сохранения из бесконечной последовательности, полученной путем диагонализации:

$$
\begin{aligned}
&(D_m-1)\ln\left(\frac{z_{n+1,m}}{w_{n+1,m}}\right)=(D_n-1)\ln\left(\frac{z_{n,m+1}(z_{n,m+1}-z_{n,m})(w_{n,m+1}-w_{n,m})}{z_{n,m}w_{n,m}w_{n,m+1}}\right),\\
&(D_m-1)\ln\left(\frac{w_{n+1,m}}{z_{n,m}}\right)=(D_n-1)\ln\left(\frac{w_{n,m}w_{n,m+1}}{(z_{n,m+1}-z_{n,m})(w_{n,m+1}-w_{n,m})}\right),\\
&(D_m-1)\left(\frac{z_{n,m+1}z_{n,m}}{w_{n+1,m}(z_{n,m+1}-z_{n,m})}\right)=\\
&\qquad=(D_n-1)\left(\frac{w_{n,m}w_{n,m+1}(z_{n,m+2}-z_{n,m})}{(z_{n,m+1}-z_{n,m})(w_{n,m+1}-w_{n,m})(z_{n,m+2}-z_{n,m+1})}\right),\\
&(D_m-1)\left(\frac{1}{2}\frac{z^2_{n,m}(z^2_{n,m+1}(w_{n,m+1}-w_{n,m})+2w_{n+1,m}w_{n,m}w_{n,m+1})}{w^2_{n+1,m}(z_{n,m+1}-z_{n,m})^2(w_{n,m+1}-w_{n,m})}\right)=\\
&\qquad=(D_n-1)\left(-\frac{w_{n,m}w^2_{n,m+1}}{(z_{n,m+2}-z_{n,m+1})^2(w_{n,m+1}-w_{n,m})}\right.\\
&\qquad\left.\left(\frac{w_{n,m+2}}{(w_{n,m+2}-w_{n,m+1})}+\frac{1}{2}\frac{(z_{n,m+2}-z_{n,m})^2w_{n,m}}{(z_{n,m+1}-z_{n,m})^2(w_{n,m+1}-w_{n,m})}\right)\right).
\end{aligned}
$$

Преобразуем (10) с помощью замены $\varphi_{n,m}=\gamma^{-1}\psi_{n,m}$:

$$\psi_{n,m,\tau}=Q\psi_{n,m}, \tag{52}$$

где $Q=\gamma(q\gamma^{-1}-(\gamma^{-1})_\tau)$.

Совместность системы (44) и (52) влечет равенство

$$D_\tau(P)Z=D_m(Q)PZ-PZQ,$$

равносильное равенству $[D_\tau-Q,L]=0$, где $L=D_m^{-1}PZ$, а D_τ обозначает оператор полного дифференцирования по τ. С помощью преобразования сопряжения $x\to T^{-1}xT$ перепишем последнее равенство в виде

$$[D_\tau-Q_0,L_0]=0, \tag{53}$$

где $Q_0=-T^{-1}D_\tau(T)+T^{-1}QT$ — формальный ряд с диагональными коэффициентами, оператор $L_0=D_m^{-1}hZ=T^{-1}LT$ определен выше. Ряд Q_0 имеет вид

$$
\begin{aligned}
Q_0=&\begin{pmatrix}0&0\\0&-1\end{pmatrix}\xi+\begin{pmatrix}\dfrac{z_{n,m+1}w_{n,m}w_{n,m-1}}{z_{n,m}(z_{n,m+1}-z_{n,m})(w_{n,m}-w_{n,m-1})}&0\\0&-\dfrac{w_{n,m}w_{n,m-1}}{(z_{n,m+1}-z_{n,m})(w_{n,m}-w_{n,m-1})}\end{pmatrix}+\\
&+\begin{pmatrix}-\dfrac{w^2_{n,m}w_{n,m-1}w_{n,m+1}}{(z_{n,m+1}-z_{n,m})^2(w_{n,m}-w_{n,m-1})(w_{n,m+1}-w_{n,m})}&0\\0&\dfrac{w^2_{n,m}w_{n,m-1}w_{n,m+1}}{(z_{n,m+1}-z_{n,m})^2(w_{n,m}-w_{n,m-1})(w_{n,m+1}-w_{n,m})}\end{pmatrix}\xi^{-1}+\\
&+\begin{pmatrix}\dfrac{w^3_{n,m}w_{n,m-1}w^2_{n,m+1}(z_{n,m+2}-z_{n,m})}{(z_{n,m+1}-z_{n,m})^3(w_{n,m}-w_{n,m-1})(w_{n,m+1}-w_{n,m})^2(z_{n,m+2}-z_{n,m+1})}&0\\0&q_{22}\end{pmatrix}\xi^{-2}+\ldots,
\end{aligned}
$$

где

$$q_{22}=-\frac{w^3_{n,m}w_{n,m-1}w^2_{n,m+1}(z_{n,m+2}-z_{n,m})}{(z_{n,m+1}-z_{n,m})^3(w_{n,m}-w_{n,m-1})(w_{n,m+1}-w_{n,m})^2(z_{n,m+2}-z_{n,m+1})}.$$

Из уравнения (53) следует равенство

$$D_\tau \ln h = (D_m - 1)Q_0. \tag{54}$$

из которого можно найти бесконечную серию законов сохранения цепочки (9). Приведем несколько из них:

$$D_\tau \ln\left(\frac{z_{n,m+1}(z_{n,m+1}-z_{n,m})(w_{n,m+1}-w_{n,m})}{z_{n,m}w_{n,m}w_{n,m+1}}\right) = \\ = (D_m-1)\left(\frac{z_{n,m+1}w_{n,m}w_{n,m-1}}{z_{n,m}(z_{n,m+1}-z_{n,m})(w_{n,m}-w_{n,m-1})}\right),$$

$$D_\tau \ln\left(\frac{w_{n,m}w_{n,m+1}}{(z_{n,m+1}-z_{n,m})(w_{n,m+1}-w_{n,m})}\right) = (D_m-1)\left(-\frac{w_{n,m}w_{n,m-1}}{(z_{n,m+1}-z_{n,m})(w_{n,m}-w_{n,m-1})}\right),$$

$$D_\tau\left(\frac{w_{n,m}w_{n,m+1}(z_{n,m+2}-z_{n,m})}{(z_{n,m+1}-z_{n,m})(w_{n,m+1}-w_{n,m})(z_{n,m+2}-z_{n,m+1})}\right) = \\ = (D_m-1)\left(-\frac{w^2_{n,m}w_{n,m-1}w_{n,m+1}}{(z_{n,m+1}-z_{n,m})^2(w_{n,m}-w_{n,m-1})(w_{n,m+1}-w_{n,m})}\right).$$

5. Заключение

Система уравнений (2), изучению которой посвящена настоящая работа, является наиболее простым частным случаем дискретной системы экспоненциального типа:

$$e^{p^i_{n+1,m+1}} - e^{p^i_{n+1,m}} = e^{-\sum_{j=1}^{j=i-1} a_{ij}p^j_{n,m+1} - \sum_{j=i+1}^{j=N} a_{ij}p^j_{n+1,m} - \frac{1}{2}a_{ii}\left(p^i_{n,m+1}+p^i_{n,m}\right)}\left(e^{p^i_{n,m+1}} - e^{p^i_{n,m}}\right), \tag{55}$$

где $i = 1,\dots,N$.

Наша гипотеза состоит в том, что система (55) будет интегрируемой, если матрица $A = \{a_{ij}\}$ коэффициентов системы (55) совпадает с обобщенной матрицей Картана некоторой аффинной алгебры Ли (см. также [7]). В этой работе гипотеза проверена для случая аффинной алгебры $A_1^{(1)}$. Полагая в (55)

$$N = 2, \quad a_{11} = 2, \quad a_{12} = -2, \quad a_{21} = -2, \quad a_{22} = 2,$$

т.е. выбирая в качестве A соответствующую матрицу Картана

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}, \tag{56}$$

получаем систему уравнений вида

$$\begin{cases} e^{p^1_{n+1,m+1}} - e^{p^1_{n+1,m}} = e^{2p^2_{n+1,m} - p^1_{n,m}} - e^{2p^2_{n+1,m} - p^1_{n,m+1}}, \\ e^{p^2_{n+1,m+1}} - e^{p^2_{n+1,m}} = e^{2p^1_{n,m+1} - p^2_{n,m}} - e^{2p^1_{n,m+1} - p^2_{n,m+1}}, \end{cases} \tag{57}$$

связанную с (2) точечной заменой $e^{p^1_{n,m}} = z_{n,m}$, $e^{p^2_{n,m}} = w_{n,m}$. Мы показали, что в случае (56) система (55) является интегрируемой. Действительно, она имеет две иерархии высших симметрий, бесконечные серии локальных законов сохранения, допускает представление Лакса.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Вазов В.* Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: Мир, 1968.
2. *Дринфельд В. Г., Соколов В. В.* Алгебры Ли и уравнения типа Кортевега—де Фриза// Итоги науки и техники. Серия «Современные проблемы математики. Новейшие достижения». — М.: ВИНИТИ, 1984. — *24.* — С. 81–180.
3. *Замолодчиков А. Б., Замолодчиков Ал. Б.* Конформная теория поля и критические явления в двумерных системах. — М.: МЦНМО, 2009.
4. *Хабибуллин И. Т.* Дискретная система Захарова—Шабата и интегрируемые уравнения// Зап. науч. семин. ЛОМИ. — 1985. — *146.* — С. 137–146.

5. *Хабибуллин И. Т., Хакимова А. Р.* Инвариантные многообразия и пары Лакса для интегрируемых нелинейных цепочек// Теор. мат. физ. — 2016. — В печати.
6. *Хабибуллин И. Т., Янгубаева М. В.* Формальная диагонализация дискретного оператора Лакса и законы сохранения и симметрии динамических систем// Теор. мат. физ. — 2013. — *177*, № 3. — С. 441–467.
7. *Garifullin R. N., Habibullin I. T., Yangubaeva M. V.* Affine and finite Lie algebras and integrable Toda field equations on discrete space-time// SIGMA. — 2012. — *8*. — С. 062.
8. *Kuniba A., Nakanishi T., Suzuki J.* T-systems and Y-systems in integrable systems// J. Phys. A: Math. Theor. — 2011. — *44*. — С. 103001; `arXiv:1010.1344`.
9. *Mikhailov A. V.* Formal diagonalisation of Lax–Darboux schemes// Model. Anal Inform. Syst. — 2015. — *22*, № 6. — С. 795–817.
10. *Habibullin I. T., Poptsova M. N.* Asymptotic diagonalization of the discrete Lax pair around singularities and conservation laws for dynamical systems// J. Phys. A: Math. Theor. — 2015. — *48*. — С. 115203.
11. *Habibullin I. T., Khakimova A. R., Poptsova M. N.* On a method for constructing the Lax pairs for nonlinear integrable equations// J. Phys. A: Math. Theor. — 2016. — *49*. — С. 035202.
12. *Suris Yu. B.* Integrable discretizations for lattice system: local equations of motion and their Hamiltonian properties// Rev. Math. Phys. — 1999. — **11**, No. 6. — С. 727–822.
13. *Ward R. S.* Discrete Toda field equations// Phys. Lett. A. — 1995. — *199*. — С. 45–48.
14. *Willox R., Hattori M.* Discretisations of constrained KP hierarchies/ Preprint `arXiv:1406.5828`. — 2014.
15. *Yamilov R. I.* Symmetries as integrability criteria for differential difference equations// J. Phys. A: Math. Gen. — 2006. — *39*. — R541–R623.
16. *Zakharov V. E., Shabat A. B.* A scheme for integrating the nonlinear equations of mathematical physics by the method of the inverse scattering problem, I// Funct. Anal. Appl. — 1974. — *8*, № 3. — С. 226–235.
17. *Zakharov V. E., Shabat A. B.* Integration of nonlinear equations of mathematical physics by the method of inverse scattering, II// Funct. Anal. Appl. — 1979. — *13*, № 3. — С. 166–174.

Е. В. Павлова
Уфимский государственный нефтяной технический университет
E-mail: `elenagud@yandex.ru`

И. Т. Хабибуллин
Институт математики с вычислительным центром
Уфимского научного центра РАН,
Башкирский государственный университет, Уфа
E-mail: `habibullinismagil@gmail.com`

А. Р. Хакимова
Башкирский государственный университет, Уфа
E-mail: `aigulya.khakimova@mail.ru`

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 140 (2017). С. 43–49

УДК 517.929.7, 517.954

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ КВАЗИЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ЧЕТНОГО ПОРЯДКА

© 2017 г. А. В. ЮЛДАШЕВА

Аннотация. В статье изучается краевая задача для квазилинейного уравнения четного порядка с периодическими краевыми условиями. Доказаны существование и единственность слабого обобщенного решения.

Ключевые слова: краевая задача, квазилинейное уравнение, метод Фурье, банахово пространство, слабое обобщенное решение, тест-функция.

AMS Subject Classification: 35K55, 35K70

1. Постановка задачи.

Рассмотрим следующую краевую задачу:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^{2k} u}{\partial x^{2k}} = f(t,x,u), \qquad (t,x) \in D = \{0 < t < T,\ 0 < x < \pi\}, \quad k \in \mathbb{N}, \tag{1}$$

$$u(0,x) = \varphi(x), \quad u_t(T,x) = \psi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi, \tag{2}$$

$$\frac{\partial^i u}{\partial x^i}\Big|_{x=0} = \frac{\partial^i u}{\partial x^i}\Big|_{x=\pi}, \qquad i = 0, 1, \ldots, 2k-1, \quad 0 \leqslant t \leqslant T; \tag{3}$$

здесь $\varphi(x)$, $\psi(x)$ и $f(t,x,u)$ — заданные функции, определенные в $[0,\pi]$ и в $\overline{D} \times (-\infty,\infty)$ соответственно, а функция $u(t,x)$ — решение нашей задачи.

Определение 1. Функция $v(t,x) \in C(\overline{D})$ называется *тест-функцией*, если она имеет все непрерывные производные, участвующие в уравнении (1), удовлетворяет краевым условиям (2), а также условию

$$v(0,x) = v_t(T,x) = 0.$$

Определение 2 (см. [?])**.** Функция $u(t,x) \in C(\overline{D})$, удовлетворяющая интегральному равенству

$$\int_0^T \int_0^\pi \left\{ u \left[\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^{2k} v}{\partial x^{2k}} \right] - f(t,x,u)v \right\} dx\, dt + \int_0^\pi \psi(x) v(T,x) dx + \int_0^\pi \varphi(x) v_t(0,x) dx = 0, \tag{4}$$

при произвольной тест-функции $v(t,x)$ называется *обобщенным слабым решением* задачи (1)–(3).

Смешанные и краевые задачи для квазилинейных уравнений второго порядка изучены хорошо. Так метод Фурье был использован и обоснован в [1]. Смешанные задачи для квазилинейных уравнений четвертого порядка изучены в [4–6]. Отметим, что краевые задачи для уравнения (1), при линейной правой части были изучены в [2].

Обозначим через B_T множество функций

$$\{\overline{u}(t)\} = \left\{ \frac{1}{2} u_0(t),\ u_{c1}(t),\ u_{s1}(t),\ \ldots,\ u_{cn}(t),\ u_{sn}(t),\ \ldots \right\},$$

непрерывных на $[0,T]$ и удовлетворяющих условию

$$\frac{1}{2} \max_{t \in [0,T]} \left| u_0(t) \right| + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\max_{t \in [0,T]} \left| u_{cn}(t) \right| + \max_{t \in [0,T]} \left| u_{sn}(t) \right| \right] < \infty.$$

ISSN 0233–6723

Норму в B_T введем следующим образом:

$$\|\overline{u}(t)\| = \frac{1}{2}\max_{t\in[0,T]}\left|u_0(t)\right| + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\max_{t\in[0,T]}\left|u_{cn}(t)\right| + \max_{t\in[0,T]}\left|u_{sn}(t)\right|\right].$$

Очевидно, что B_T — банахово пространство.

2. Решение задачи. Будем искать слабое решение задачи (1)–(3) в виде

$$u(t,x) = \frac{1}{2}u_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty}\Big[u_{cn}(t)\cos 2nx + u_{sn}(t)\sin 2nx\Big], \tag{5}$$

где $u_0(t)$, $u_{cn}(t)$, $u_{sn}(t)$, $n=\overline{1,\infty}$, — неизвестные функции. Для нахождения этих неизвестных используем равенство (4), в результате чего получим следующую систему интегральных уравнений для четных k:

$$\begin{aligned}
u_0(t) &= \varphi_0 + \psi_0 t - \frac{2}{\pi}\int_0^t\int_s^T\int_0^\pi f\left(\tau,\ \xi,\ \frac{1}{2}u_0(\tau) + \sum_{n=1}^{\infty}\Big[u_{cn}(\tau)\cos 2n\xi + u_{sn}(\tau)\sin 2n\xi\Big]\right) d\xi\, d\tau ds,\\
u_{cn}(t) &= \varphi_{cn}\frac{\operatorname{ch}\alpha_n(T-t)}{\operatorname{ch}\alpha_n T} + \psi_{cn}\frac{\operatorname{sh}\alpha_n(T-t)}{\alpha_n\operatorname{ch}\alpha_n T} +\\
&\quad + \frac{2}{\alpha_n\pi}\int_0^T\int_0^\pi K_n(t,\tau) f\left(\tau,\ \xi,\ \frac{1}{2}u_0(\tau) + \sum_{n=1}^{\infty}\Big[u_{cn}(\tau)\cos 2n\xi + u_{sn}(\tau)\sin 2n\xi\Big]\right)\cos 2n\xi\, d\xi\, d\tau\\
u_{sn}(t) &= \varphi_{sn}\frac{\operatorname{ch}\alpha_n(T-t)}{\operatorname{ch}\alpha_n T} + \psi_{sn}\frac{\operatorname{sh}\alpha_n(T-t)}{\alpha_n\operatorname{ch}\alpha_n T} +\\
&\quad + \frac{2}{\alpha_n\pi}\int_0^T\int_0^\pi K_n(t,\tau) f\left(\tau,\ \xi,\ \frac{1}{2}u_0(\tau) + \sum_{n=1}^{\infty}\Big[u_{cn}(\tau)\cos 2n\xi + u_{sn}(\tau)\sin 2n\xi\Big]\right)\sin 2n\xi\, d\xi\, d\tau,
\end{aligned} \tag{6}$$

а при нечетных k

$$\begin{aligned}
u_0(t) &= \varphi_0 + \psi_0 t - \frac{2}{\pi}\int_0^t\int_s^T\int_0^\pi f\left(\tau,\ \xi,\ \frac{1}{2}u_0(\tau) + \sum_{n=1}^{\infty}\Big[u_{cn}(\tau)\cos 2n\xi + u_{sn}(\tau)\sin 2n\xi\Big]\right) d\xi\, d\tau ds,\\
u_{cn}(t) &= \varphi_{cn}\cos\alpha_n t + \psi_{cn}\frac{\sin\alpha_n t}{\alpha_n\cos\alpha_n T} + \varphi_{cn}\operatorname{tg}\alpha_n T\sin\alpha_n t - \frac{2\sin\alpha_n t}{\alpha_n\pi\cos\alpha_n T}\times\\
&\quad\times\int_0^T\int_0^\pi f\left(\tau,\ \xi,\ \frac{1}{2}u_0(\tau) + \sum_{n=1}^{\infty}\Big[u_{cn}(\tau)\cos 2n\xi + u_{sn}(\tau)\sin 2n\xi\Big]\right)\cos\alpha_n(T-\tau)\cos 2n\xi\, d\xi\, d\tau +\\
&\quad + \frac{2}{\pi}\int_0^t\int_0^\pi f\left(\tau,\ \xi,\ \frac{1}{2}u_0(\tau) + \sum_{n=1}^{\infty}\Big[u_{cn}(\tau)\cos 2n\xi + u_{sn}(\tau)\sin 2n\xi\Big]\right)\sin\alpha_n(T-\tau)\cos 2n\xi\, d\xi\, d\tau,\\
u_{sn}(t) &= \varphi_{sn}\cos\alpha_n t + \psi_{sn}\frac{\sin\alpha_n t}{\alpha_n\cos\alpha_n T} + \varphi_{sn}\operatorname{tg}\alpha_n T\sin\alpha_n t - \frac{2\sin\alpha_n t}{\alpha_n\pi\cos\alpha_n T}\times\\
&\quad\times\int_0^T\int_0^\pi f\left(\tau,\ \xi,\ \frac{1}{2}u_0(\tau) + \sum_{n=1}^{\infty}\Big[u_{cn}(\tau)\cos 2n\xi + u_{sn}(\tau)\sin 2n\xi\Big]\right)\cos\alpha_n(T-\tau)\sin 2n\xi\, d\xi\, d\tau +\\
&\quad + \frac{2}{\pi}\int_0^t\int_0^\pi f\left(\tau,\ \xi,\ \frac{1}{2}u_0(\tau) + \sum_{n=1}^{\infty}\Big[u_{cn}(\tau)\cos 2n\xi + u_{sn}(\tau)\sin 2n\xi\Big]\right)\sin\alpha_n(T-\tau)\sin 2n\xi\, d\xi\, d\tau.
\end{aligned} \tag{7}$$

Здесь

$$K_n(t,\tau) = \begin{cases} -\dfrac{\operatorname{sh}\alpha_n\tau\operatorname{ch}\alpha_n(T-t)}{\operatorname{ch}\alpha_n T}, & 0 \leqslant \tau \leqslant t, \\ -\dfrac{\operatorname{sh}\alpha_n t\operatorname{ch}\alpha_n(T-\tau)}{\operatorname{ch}\alpha_n T}, & t \leqslant \tau \leqslant T, \end{cases} \qquad \alpha_n = a(2n)^k, \quad n = \overline{1,\infty}.$$

Для системы (6) верна следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть при четных k выполнены следующие условия*:

(1) $f(t,x,u)$ *непрерывна по всем аргументам в* $\overline{D}\times\mathbb{R}$;
(2) $\bigl|f(t,x,u)-f(t,x,v)\bigr| \leqslant b(t,x)|u-v|$, *где* $b(t,x)\in L_2(D)$, $b(t,x)>0$;
(3) $f(t,x,0)\in L_2(D)$;
(4) *функции* $\varphi(x)\in C^{2k+1}[0,\pi]$, $\psi(x)\in C^{k+1}[0,\pi]$ *удовлетворяют условиям*

$$\varphi^{(i)}(0)=\varphi^{(i)}(\pi), \quad i=\overline{0,2k}, \qquad \psi^{(i)}(0)=\psi^{(i)}(\pi), \quad i=\overline{0,k}.$$

Тогда система (6) *имеет единственное решение в* B_T.

Доказательство. При доказательстве используем метод последовательных приближений. Для системы (6) получим следующую последовательность:

$$\begin{aligned}
u_0^{(N+1)}(t) &= u_0^{(0)}(t) - \frac{2}{\pi}\int_0^t\int_s^T\int_0^\pi f\left(\tau,\ \xi,\ \frac{1}{2}u_0^{(N)}(\tau)+\sum_{n=1}^{\infty}\Bigl[u_{cn}^{(N)}(\tau)\cos 2n\xi + u_{sn}^{(N)}(\tau)\sin 2n\xi\Bigr]\right) d\xi\, d\tau ds,\\
u_{cn}^{(N+1)}(t) &= u_{cn}^{(0)}(t) + \frac{2}{\pi}\int_0^T\int_0^\pi K_n(t,\tau)\cdot\\
&\quad\cdot f\left(\tau,\ \xi,\ \frac{1}{2}u_0^{(N)}(\tau)+\sum_{n=1}^{\infty}\Bigl[u_{cn}^{(N)}(\tau)\cos 2n\xi + u_{sn}^{(N)}(\tau)\sin 2n\xi\Bigr]\right) cos 2n\xi\, d\xi\, d\tau,\\
u_{sn}^{(N+1)}(t) &= u_{sn}^{(0)}(t) + \frac{2}{\pi}\int_0^T\int_0^\pi K_n(t,\tau)\cdot\\
&\quad\cdot f\left(\tau,\ \xi,\ \frac{1}{2}u_0^{(N)}(\tau)+\sum_{n=1}^{\infty}\Bigl[u_{cn}^{(N)}(\tau)\cos 2n\xi + u_{sn}^{(N)}(\tau)\sin 2n\xi\Bigr]\right) \sin 2n\xi\, d\xi\, d\tau;
\end{aligned} \tag{8}$$

здесь

$$N=\overline{0,\infty}, \quad u_0^{(0)}(t)=\varphi_0+\psi_0 t,$$
$$u_{cn}^{(0)}(t)=\varphi_{cn}\frac{\operatorname{ch}\alpha_n(T-t)}{\operatorname{ch}\alpha_n T}+\psi_{cn}\frac{\operatorname{sh}\alpha_n(T-t)}{\alpha_n\operatorname{ch}\alpha_n T},$$
$$u_{sn}^{(0)}(t)=\varphi_{sn}\frac{\operatorname{ch}\alpha_n(T-t)}{\operatorname{ch}\alpha_n T}+\psi_{sn}\frac{\operatorname{sh}\alpha_n(T-t)}{\alpha_n\operatorname{ch}\alpha_n T}$$

($n=\overline{1,\infty}$). Для упрощения дальнейших записей введем обозначение

$$Au^{(N)}(t,\xi)=\frac{1}{2}u_0^{(N)}(t)+\sum_{n=1}^{\infty}\Bigl[u_{cn}^{(N)}(t)\cos 2n\xi+u_{sn}^{(N)}(t)\sin 2n\xi\Bigr],$$
$$\{\overline{u}^{(N)}(t)\}=\left\{\frac{1}{2}u_0^{(N)}(t),\ u_{c1}^{(N)}(t),\ u_{s1}^{(N)}(t),\ \ldots,\ u_{cn}^{(N)}(t),\ u_{sn}^{(N)}(t),\ \right\};$$

тогда (8) примет вид

$$
\begin{aligned}
u_0^{(N+1)}(t) &= u_0^{(0)}(t) - \frac{2}{\pi}\int\limits_0^t\int\limits_s^T\int\limits_0^\pi f\Big(\tau,\ \xi,\ Au^{(N)}(\tau,\xi)\Big)d\xi\, d\tau ds,\\
u_{cn}^{(N+1)}(t) &= u_{cn}^{(0)}(t) + \frac{2}{\pi}\int\limits_0^T\int\limits_0^\pi K_n(t,\tau) f\Big(\tau,\xi,Au^{(N)}(\tau,\xi)\Big)\cos 2n\xi\, d\xi\, d\tau,\\
u_{sn}^{(N+1)}(t) &= u_{sn}^{(0)}(t) + \frac{2}{\pi}\int\limits_0^T\int\limits_0^\pi K_n(t,\tau) f\Big(\tau,\ \xi,\ Au^{(N)}(\tau,\xi)\Big)\sin 2n\xi\, d\xi\, d\tau
\end{aligned}
\tag{9}
$$

$(n=\overline{1,\infty})$. Очевидно, что

$$
\max_{t\in[0,T]}\Big|Au^{(N)}(t,\xi)\Big| \leqslant \Big\|\overline{u}^{(N)}\Big\|_{B_T}. \tag{10}
$$

Теперь покажем, что $\overline{u}^{(N)}(t)\in B_T$. Согласно условиям теоремы, очевидно, что

$$
\begin{aligned}
\Big\|\overline{u}^{(0)}(t)\Big\| &= \frac{1}{2}\max_{t\in[0,T]}\Big|u_0^{(0)}(t)\Big| + \sum_{n=1}^\infty\left[\max_{t\in[0,T]}\Big|u_{cn}^{(0)}(t)\Big| + \max_{t\in[0,T]}\Big|u_{sn}^{(0)}(t)\Big|\right] = \\
&= \frac{1}{2}\Big(|\varphi_0| + |\psi_0|T\Big) + \sum_{n=1}^\infty\left[|\varphi_{cn}| + \frac{1}{\alpha_n}|\psi_{cn}| + |\varphi_{sn}| + \frac{1}{\alpha_n}|\psi_{sn}|\right] < \infty.
\end{aligned}
$$

Подставляя в (9) $N=0$, имеем

$$
\overline{u}_0^{(1)}(t) = u_0^{(0)}(t) - \frac{2}{\pi}\int\limits_0^t\int\limits_s^T\int\limits_0^\pi\Big[f\Big(\tau,\xi,Au^{(0)}(\tau,\xi)\Big) - f(\tau,\xi,0)\Big]d\xi\, d\tau\, ds - \frac{2}{\pi}\int\limits_0^t\int\limits_s^T\int\limits_0^\pi f(\tau,\xi,0)d\xi\, d\tau\, ds.
$$

Применяя неравенство Коши к обоим интегралам в правой части последнего равенства, находим

$$
\begin{aligned}
\Big|\overline{u}_0^{(1)}(t)\Big| &\leqslant \big|u_0^{(0)}(t)\big| + \frac{2}{\pi}\left[\int\limits_0^t (T-s)^2 ds\right]^{1/2}\left(\int\limits_0^t\left[\int\limits_0^\pi\Big[f\Big(\tau,\xi,Au^{(0)}(\tau,\xi)\Big) - f(\tau,\xi,0)\Big]d\xi\right]^2 d\tau\right)^{1/2} + \\
&+ \frac{2}{\pi}\left[\int\limits_0^t (T-s)^2 ds\right]^{1/2}\left(\int\limits_0^t\left[\int\limits_0^\pi f(\tau,\xi,0)d\xi\right]^2 d\tau\right)^{1/2}.
\end{aligned}
$$

Воспользовавшись условием Липшица, получим

$$
\Big|\overline{u}_0^{(1)}(t)\Big| \leqslant \big|u_0^{(0)}(t)\big| + \frac{2}{\pi}\sqrt{\frac{\pi T^3}{3}}\left(\left[\int\limits_0^t\int\limits_0^\pi b^2(\tau,\xi)\Big[Au^{(0)}(\tau,\xi)\Big]^2 d\xi\, d\tau\right]^{1/2} + \|f(t,x,0)\|_{L_2(D)}\right),
$$

или же

$$
\Big|\overline{u}_0^{(1)}(t)\Big| \leqslant \big|u_0^{(0)}(t)\big| + \frac{2}{\pi}\sqrt{\frac{\pi T^3}{3}}\Big[\big\|b^2(\tau,\xi)\big\|_{L_2(D)}\big\|u^{(0)}(t)\big\|_{B_T} + \big\|f(t,x,0)\big\|_{L_2(D)}\Big]. \tag{11}
$$

Теперь положим во втором равенстве (9) $N = 0$:

$$u_{cn}^{(1)}(t) = u_{cn}^{(0)}(t) + \frac{2}{\alpha_n \pi} \int_0^T \int_0^\pi K_n(t,\tau)\Big[f\big(\tau,\xi, Au^{(0)}(\tau,\xi)\big) - f(\tau,\xi,0)\Big] \cos 2n\xi \, d\xi \, d\tau -$$
$$- \frac{2}{\alpha_n \pi} \int_0^T \int_0^\pi K_n(t,\tau) f(\tau,\xi,0) \cos 2n\xi \, d\xi \, d\tau.$$

Как и выше, применяя неравенство Коши, находим

$$\big|u_{cn}^{(1)}(t)\big| \leqslant \big|u_{cn}^{(0)}(t)\big| + \frac{\sqrt{2}}{\alpha_n\sqrt{\alpha_n}} \left(\int_0^T \frac{2}{\pi} \left\{ \int_0^\pi \Big[f\big(\tau,\xi, Au^{(0)}(\tau,\xi)\big) - f(\tau,\xi,0)\Big] \cos 2n\xi \, d\xi \right\}^2 d\tau \right)^{1/2} +$$
$$+ \frac{\sqrt{2}}{\alpha_n\sqrt{\alpha_n}} \left(\int_0^T \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \Big[f(\tau,\xi,0) \cos 2n\xi \, d\xi\Big]^2 d\tau \right)^{1/2}.$$

Суммируя по n, $n = \overline{1,\infty}$, получим

$$\sum_{n=1}^\infty \big|u_{cn}^{(1)}(t)\big| \leqslant \sum_{n=1}^\infty \big|u_{cn}^{(0)}(t)\big| +$$
$$+ \sqrt{2} \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{\alpha_n\sqrt{\alpha_n}} \left(\int_0^T \frac{2}{\pi} \left\{ \int_0^\pi \Big[f\big(\tau,\xi, Au^{(0)}(\tau,\xi)\big) - f(\tau,\xi,0)\Big] \cos 2n\xi \, d\xi \right\}^2 d\tau \right)^{1/2} +$$
$$+ \sqrt{2} \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{\alpha_n\sqrt{\alpha_n}} \left(\int_0^T \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \Big[f(\tau,\xi,0) \cos 2n\xi \, d\xi\Big]^2 d\tau \right)^{1/2}.$$

Отсюда после некоторых преобразований получим

$$\sum_{n=1}^\infty \big|u_{cn}^{(1)}(t)\big| \leqslant \sum_{n=1}^\infty \big|u_{cn}^{(0)}(t)\big| + M\Big[\|b(t,x)\|_{L_2(D)} \|\overline{u}^{(0)}(t)\|_{B_T} + \|f(t,x,0)\|_{L_2(D)}\Big]; \tag{12}$$

здесь

$$M = \sqrt{2T} \left(\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{\alpha_n\sqrt{\alpha_n}} \right)^{1/2}.$$

Проводя аналогичные вычисления для $u_{sn}^{(1)}(t)$, имеем

$$\sum_{n=1}^\infty \big|u_{sn}^{(1)}(t)\big| \leqslant \sum_{n=1}^\infty \big|u_{sn}^{(0)}(t)\big| + M\Big[\|b(t,x)\|_{L_2(D)} \|\overline{u}^{(0)}(t)\|_{B_T} + \|f(t,x,0)\|_{L_2(D)}\Big]. \tag{13}$$

Теперь складывая неравенства (11), (12) и (13) получаем

$$\frac{\big|u_0^{(1)}(t)\big|}{2} + \sum_{n=1}^\infty \Big[\big|u_{cn}^{(1)}(t)\big| + \big|u_{sn}^{(1)}(t)\big|\Big] \leqslant \frac{\big|u_0^{(0)}(t)\big|}{2} + \sum_{n=1}^\infty \Big[\big|u_{cn}^{(0)}(t)\big| + \big|u_{sn}^{(0)}(t)\big|\Big] +$$
$$+ \left(2\sqrt{\frac{T^3}{3\pi}} + 2M \right) \Big[\|b(t,x)\|_{L_2(D)} \|\overline{u}^{(0)}(t)\|_{B_T} + \|f(t,x,0)\|_{L_2(D)}\Big].$$

Находя максимум по t, получим

$$\left\|\overline{u}^{(1)}\right\|_{B_T} \leqslant \left\|\overline{u}^{(0)}\right\|_{B_T} + \left(2\sqrt{\frac{T^3}{3\pi}} + 2M\right)\Big[\|b(t,x)\|_{L_2(D)}\|\overline{u}^{(0)}(t)\|_{B_T} + \|f(t,x,0)\|_{L_2(D)}\Big].$$

Отсюда, согласно условиям теоремы, следует, что

$$\left\|\overline{u}^{(1)}\right\|_{B_T} \leqslant \infty.$$

Продолжая аналогичные рассуждения для произвольного N, получим

$$\left\|\overline{u}^{(N)}\right\|_{B_T} \leqslant \left\|\overline{u}^{(0)}\right\|_{B_T} + C\Big[\|b(t,x)\|_{L_2(D)}\|\overline{u}^{(N-1)}(t)\|_{B_T} + \|f(t,x,0)\|_{L_2(D)}\Big];$$

здесь

$$C = \sqrt{\frac{1}{3\pi}}(T + 2\sqrt{6\pi}M).$$

При помощи метода математической индукции, предполагая, что $\left\|\overline{u}^{(N)}\right\|_{B_T} \leqslant \infty$, легко показать, что

$$\left\|\overline{u}^{(N+1)}\right\|_{B_T} \leqslant \infty.$$

Отсюда следует, что $\overline{u}^{(N)} \in B_T$. Теперь покажем, что последовательность $\{\overline{u}^{(N)}\}$ равномерно сходится в B_T. Для этого мы оценим разности

$$\left|\overline{u}_0^{(N+1)} - \overline{u}_0^{(N)}\right|, \quad \left|\overline{u}_{cn}^{(N+1)} - \overline{u}_{cn}^{(N)}\right|, \quad \left|\overline{u}_{sn}^{(N+1)} - \overline{u}_{sn}^{(N)}\right|,$$

где $N = \overline{0,\infty}$, $n = \overline{1,\infty}$.

Проводя аналогичные рассуждения, получим

$$\frac{1}{2}\left|\overline{u}_0^{(1)} - \overline{u}_0^{(0)}\right| + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left|\overline{u}_{cn}^{(N+1)} - \overline{u}_{cn}^{(N)}\right| + \left|\overline{u}_{sn}^{(N+1)} - \overline{u}_{sn}^{(N)}\right|\right\} \leqslant$$
$$\leqslant C\Big[\|b(t,x)\|_{L_2(D)}\|\overline{u}^{(N-1)}(t)\|_{B_T} + \|f(t,x,0)\|_{L_2(D)}\Big] = A; \quad (14)$$

очевидно, что $A > 0$. Из последнего неравенства следует, что

$$\left\|\overline{u}_0^{(1)} - \overline{u}_0^{(0)}\right\|_{B_T} \leqslant A.$$

Методом математической индукции нетрудно доказать, что

$$\left\|\overline{u}_0^{(N+1)} - \overline{u}_0^{(N)}\right\|_{B_T} \leqslant AC^N\frac{\|b(t,x)\|^N_{L_2(D)}}{\sqrt{N!}}. \quad (15)$$

Из (**??**) следует, что ряд

$$\sum_{N=0}^{\infty}\left|\overline{u}_0^{(N+1)} - \overline{u}_0^{(N)}\right|,$$

состоящий из элементов B_T, сходится равномерно; следовательно, последовательность $\{\overline{u}^{(N)}\}$ сходится равномерно в B_T, причем предел этой последовательности удовлетворяет системе (6).

Для доказательства единственности решения, предполагаем, что $\overline{v}(t)$ также является решением. Оценивая разность $\left|\overline{u}(t) - \overline{v}(t)\right|$, получаем

$$\left|\overline{u}(t) - \overline{v}(t)\right|^2 \leqslant C_1\int_0^t\left(\int_0^{\pi} b^2(\tau,\xi)d\xi\right)\left|\overline{u}(\tau) - \overline{v}(\tau)\right|^2 d\tau.$$

Согласно неравенству Гронуолла имеем

$$\left|\overline{u}(t) - \overline{v}(t)\right| \leqslant 0,$$

что означает $\overline{u}(t) = \overline{v}(t)$. Теорема доказана. □

Теорема 2. *Пусть при нечетных k выполнены следующие условия*:

(1) $f(t,x,u)$ *непрерывна по всем аргументам в* $\overline{D}\times\mathbb{R}$;

(2) $\big|f(t,x,u)-f(t,x,v)\big|\leqslant b(t,x)|u-v|$, *где* $b(t,x)\in L_2(D)$, $b(t,x)>0$;

(3) $f(t,x,0)\in L_2(D)$;

(4) *функции* $\varphi(x)\in C^{2k+1}[0,\pi]$, $\psi(x)\in C^{k+1}[0,\pi]$ *удовлетворяют условиям*

$$\varphi^{(i)}(0)=\varphi^{(i)}(\pi),\quad i=\overline{0,2k},\qquad \psi^{(i)}(0)=\psi^{(i)}(\pi),\quad i=\overline{0,k};$$

(5) *числа* a *и* T *таковы, что* $|\cos a(2n)^kT\|\geqslant\delta>0$, $n=\overline{1,\infty}$.

Тогда система (7) *имеет единственное решение в* B_T.

Доказательство теоремы аналогично доказательству теоремы 1.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия теоремы* 1 *при четных* k *и теоремы* 2 *при нечетных* k. *Тогда задача* (1)–(3) *имеет единственное обобщенное решение, которое может быть найдено в виде равномерно сходящегося ряда* (5).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Халилов Г. М.* Решение нелинейной смешанной задачи квазилинейного уравнения второго порядка и квазилинейного уравнения четвертого порядка/ Дисс. на соискание уч. степ. канд. физ.-мат. наук. — Баку, 1968.
2. *Amanov J., Yuldasheva A. V.* Solvability and spectral properties of boundary value problems for equations of even order// Malaysian J. Math. Sci. — 2009. — *3*, № 2. — С. 227–248.
3. *Chandrov H. I.* On mixed problem for a class of quasilinear hyperbolic equation. — Tbilisi, 1970.
4. *Ciftci I., Halilov H.* Fourier method functions for a quasi-linear parabolic equation with periodic boundary condition// Hacettepe J. Math. Stat. — 2008. — *37*, № 2. — С. 69–79.
5. *Elishakoff I., Candan S.* Apparently first closed-form solution for vibrating inhomogeneous beam// Int. J. Solids Struct. — 2001. — *38*. — С. 3411–3441.
6. *Halylov H., Kutlu K., Guler B. O.* Examination of mixed problem with periodic boundary condition for a class of quartic partial differential quasi-linear equation// Int. Elect. J. Pure Appl. Math. — 2010. — *1*, № 1. — С. 47–59.

А. В. Юлдашева
Национальный университет Узбекистана, Ташкент
E-mail: `yuasv86@mail.ru`

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 140 (2017). С. 50–67

УДК 517.958

СПЕКТРАЛЬНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ РОТОРА В НЕОРТОГОНАЛЬНОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ

© 2017 г. **Г. Г. ИСЛАМОВ**

Посвящается академику С. М. Никольскому

Аннотация. Рассматриваются вычислительные аспекты спектральной задачи для ротора, позволяющие найти касательные поля к координатным поверхностям заданной криволинейной системы координат.

Ключевые слова: бессиловое поле, ротор, спектральная задача, локальная неортогональная система координат, матрица перехода, биортогональный базис, касательное поле, координатная поверхность.

AMS Subject Classification: 78A25, 83C50

СОДЕРЖАНИЕ

1. Бескоординатная форма спектральной задачи 50
2. Спектральная задача в декартовой системе координат 53
3. Криволинейная система координат 57
4. Система аналитических вычислений 65
Список литературы 66

1. Бескоординатная форма спектральной задачи

Пусть O — фиксированная точка, а M — произвольная точка трехмерного пространства. Совокупность радиус-векторов $\boldsymbol{r} = \overrightarrow{OM}$ можно превратить в линейное пространство $\mathbb{R}^3$ с обычными операциями сложения и вычитания векторов и умножения их на скаляры. Традиционно дается бескординатное определение длины вектора $|\boldsymbol{r}|$, скалярного произведения $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ и векторного произведения $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$. Здесь $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ — элементы из $\mathbb{R}^3$.

Вещественное скалярное поле $\varphi(\boldsymbol{r})$ определяется как отображение $\mathbb{R}^3$ в поле вещественных чисел, а градиент этого поля $\operatorname{grad}\varphi$ — как вектор, который позволяет выразить дифференциал скалярной функции через скалярное произведение $d\varphi = (\operatorname{grad}\varphi) \cdot d\boldsymbol{r}$.

Этих понятий оказывается вполне достаточно, чтобы дать следующее бескоординатное определение ротора $\operatorname{rot}\boldsymbol{F}$ векторного поля $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$ как линейного отображения пространства векторных полей в себя с двумя простыми свойствами:

(1) ротор от постоянного вектора равен нулю;
(2) $\operatorname{rot}(\varphi(\boldsymbol{r})\boldsymbol{F}) = (\operatorname{grad}\varphi) \times \boldsymbol{F} + \varphi(\boldsymbol{r}) \operatorname{rot}\boldsymbol{F}$.

Аналогично, дивергенцию $\operatorname{div}\boldsymbol{F}$ векторного поля $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$ определяем как линейное отображение пространства векторных полей в поле вещественных чисел с двумя аналогичными свойствами путем замены векторного произведения векторов на скалярное:

(1) дивергенция от постоянного вектора равна нулю;
(2) $\operatorname{div}(\varphi(\boldsymbol{r})\boldsymbol{F}) = (\operatorname{grad}\varphi) \cdot \boldsymbol{F} + \varphi(\boldsymbol{r}) \operatorname{div}\boldsymbol{F}$.

ISSN 0233–6723

В декартовой системе координат базисом выступает ортонормированный базис $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$, дивергенция и ротор которых равны нулю по первому свойству этих операций. С другой стороны,

$$\boldsymbol{r} = x\,\boldsymbol{i} + y\,\boldsymbol{j} + z\,\boldsymbol{k} = \{x, y, z\}, \quad d\boldsymbol{r} = dx\boldsymbol{i} + dy\boldsymbol{j} + dz\boldsymbol{k} = \{dx, dy, dz\}$$

— краткая форма записи разложения по ортонормированному базису декартовой системы координат.

Аналогичный смысл имеет и запись $\boldsymbol{F} = \{F_1, F_2, F_3\}$. Так как, с одной стороны,

$$d\varphi = (\operatorname{grad}\varphi) \cdot d\boldsymbol{r},$$

а с другой стороны

$$d\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}dy + \frac{\partial\varphi}{\partial z}dz,$$

то

$$\operatorname{grad}\varphi = \left\{\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \ \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \ \frac{\partial\varphi}{\partial z}\right\}.$$

По второму свойству линейной операции дивергенции имеем

$$\operatorname{div}\boldsymbol{F} = \operatorname{grad}F_1 \cdot \boldsymbol{i} + \operatorname{grad}F_2 \cdot \boldsymbol{j} + \operatorname{grad}F_3 \cdot \boldsymbol{k} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}.$$

Аналогично, по второму свойству линейной операции ротора получим

$$\begin{aligned}
\operatorname{rot}\boldsymbol{F} &= \operatorname{grad}F_1 \times \boldsymbol{i} + \operatorname{grad}F_2 \times \boldsymbol{j} + \operatorname{grad}F_3 \times \boldsymbol{k} = \\
&= \left\{\left(\frac{\partial F_1}{\partial z}\right)\boldsymbol{j} + \left(-\frac{\partial F_1}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}\right\} + \left\{\left(-\frac{\partial F_2}{\partial z}\right)\boldsymbol{i} + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x}\right)\boldsymbol{k}\right\} + \left\{\left(\frac{\partial F_3}{\partial y}\right)\boldsymbol{i} + \left(-\frac{\partial F_3}{\partial x}\right)\boldsymbol{j}\right\} = \\
&= \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}\right)\boldsymbol{i} + \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}\right)\boldsymbol{j} + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}.
\end{aligned}$$

Последнее выражение можно рассматривать как разложение по элементам первой строки символического определителя, первая строка которого составлена из элементов ортонормированного базиса декартовой системы координат $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$, вторая строка из операторов первой частной производной $\partial/\partial x$, $\partial/\partial y$, $\partial/\partial z$, а третья строка из координат F_1, F_2, F_3 векторного поля $\boldsymbol{F}$.

Заметим, что Г. Вейль в [44] (см. также [3, с. 275]), определяет операторы дивергенции (расходимости) и ротора (вихря) без предположения о дифференцируемости векторного поля.

Отметим легко проверяемое равенство

$$\operatorname{rot}(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}) = 2\boldsymbol{\omega},$$

имеющее место для постоянного вектора $\boldsymbol{\omega} = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$. Для доказательства достаточно увидеть, что $\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r} = \{\omega_2 z - \omega_3 y, \omega_3 x - \omega_1 z, \omega_1 y - \omega_2 x\}$.

Как известно (см., например, [41, с. 150]), дважды дифференцируемое скалярное поле $\varphi(\boldsymbol{r})$ обладает свойством симметрии смешанных производных; отсюда легко получаем, что $\operatorname{rot}\operatorname{grad}\varphi = 0$.

Применяя последние два свойства, легко показать, что ротор векторного поля

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{c} + \operatorname{grad}\varphi(\boldsymbol{r}) + \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}$$

равен вектору $\boldsymbol{\omega}$; здесь $\boldsymbol{c}$ — постоянный вектор. Напомним, что в указанном представлении вектор $\boldsymbol{\omega}$ называется вектором угловой скорости, а само векторное поле $\boldsymbol{F}$ интерпретируется как поле скоростей некоторой материальной среды в окрестности точки O. По известной теореме Коши—Гельмгольца поле такого вида служит аппроксимацией распределения скоростей сплошной среды общего вида в предположении ее гладкости.

Другие свойства отображений grad, div, rot, широко применяемые на практике различные тождества, а также объяснение их геометрического и физического смысла можно найти в известных учебных пособиях (см., например, [18, 40]).

Спектральная задача для ротора записывается просто: требуется найти векторное поле $\boldsymbol{F}$ со специальными свойствами, которое коллинеарно своему ротору $\operatorname{rot}\boldsymbol{F}$. Такие поля называются полями Бельтрами (см. [9]).

Этой задаче посвящено большое число публикаций зарубежных авторов. Из отечественных работ отметим [11, 33]; там же содержится более обширная библиография по спектральной задаче для ротора. Безусловно, при изучении этой задачи естественно применить методы функционального анализа и современной теории уравнений с частными производными (см. [24–26] .

Здесь нас прежде всего интересует вычислительный аспект спектральной задачи и визуализация найденных решений на компьютере. В случае интерпретации решения как поля скоростей, например, плазмы, или поля смещения вакуума, представляют интерес линии тока этого поля, анимация движения выбранной точки.

При аналитических и численных манипуляциях, связанных с решением спектральной задачи для ротора, безусловно, потребуется получить координатную форму этой задачи. Наиболее простой по виду она оказывается в декартовой системе координат. У нас имеется все, чтобы получить координатную форму спектральной задачи для ротора. В самом деле, запишем разложение $\boldsymbol{F} = F_1\boldsymbol{i} + F_2\boldsymbol{j} + F_3\boldsymbol{k}$. Пусть μ — спектральный параметр. Так как

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{F} = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}\right)\boldsymbol{i} + \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}\right)\boldsymbol{j} + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)\boldsymbol{k},$$

то операторное равенство $\mu\boldsymbol{F} = \operatorname{rot}\boldsymbol{F}$ можно заменить системой дифференциальных уравнений относительно компонент $\{F_1, F_2, F_3\}$ поля $\boldsymbol{F}$. Последняя система рассматривается в следующем разделе.

Рассмотрим несколько простых свойств решений спектральной задачи для ротора.

При $\mu \neq 0$ условие ортогональности решения $\boldsymbol{F}$ своему ротору $\operatorname{rot}\boldsymbol{F}$ приводит к нулевому решению. Так как в спектральной задаче интересуются теми значениями скалярного параметра μ, при котором эта задача имеет нетривиальное решение, то $\boldsymbol{F}\cdot\operatorname{rot}\boldsymbol{F} \neq 0$. Условие ортогональности, как известно (см. например, [12, 32, 42]) эквивалентно полной интегрируемости уравнения Пфаффа

$$F_1\,dx + F_2\,dy + F_3\,dz = 0.$$

Значит, для решений $\boldsymbol{F}$ спектральной задачи соответствующее уравнение Пфаффа не является вполне интегрируемым. Геометрически это означает, что векторные линии поля $\boldsymbol{F}$ не будут ортогональны никакому семейству поверхностей вида $\Phi(x, y, z) = C$, где C — произвольная постоянная. В этом случае говорят, что уравнение Пфаффа не имеет интегральных многообразий двух измерений. Исключая постоянное решение (многообразие размерности 0), можно обратиться к интегральным многообразиям размерности 1, которые могут быть найдены известными методами (см. [30, 35]).

Напомним, что для нахождения векторных линий (линий тока) поля $\boldsymbol{F}$ следует проинтегрировать систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{F_1(x, y, z)} = \frac{dy}{F_2(x, y, z)} = \frac{dz}{F_3(x, y, z)}.$$

Для нахождения векторной поверхности (она целиком содержит векторные линии, которые имеют с ней хотя бы одну общую точку) вида $\Psi(x, y, z) = 0$ следует проинтегрировать однородное дифференциальное уравнение с частными производными

$$F_1(x, y, z)\frac{\partial\Psi}{\partial x} + F_2(x, y, z)\frac{\partial\Psi}{\partial y} + F_3(x, y, z)\frac{\partial\Psi}{\partial z} = 0.$$

Далее, при ненулевом значении спектрального параметра μ решение спектральной задачи для ротора принадлежит классу бессиловых полей ($\operatorname{div}\boldsymbol{F} = 0$, другое название — соленоидальные поля). Если $\boldsymbol{G}$ — силовое поле ($\operatorname{div}\boldsymbol{G} \neq 0$), то, умножая его на гладкую скалярную функцию $\varphi(x, y, z)$, получим бессиловое поле $\varphi(x, y, z)\boldsymbol{G}$. В самом деле, имеем

$$\operatorname{div}(\varphi\boldsymbol{G}) = \varphi\,\operatorname{div}\boldsymbol{G} + (\operatorname{grad}\varphi)\cdot\boldsymbol{G} = 0.$$

Последнее можно рассматривать как дифференциальное уравнение для определения скалярной функции

$$\varphi \operatorname{div} \boldsymbol{G} + G_1(x, y, z)\frac{\partial \varphi}{\partial x} + G_2(x, y, z)\frac{\partial \varphi}{\partial y} + G_3(x, y, z)\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0.$$

Взяв одно из решений φ этого уравнения, получим бессиловое поле $\varphi\boldsymbol{G}$. Для него, как известно (см. [18]), существует векторный потенциал $W : \varphi \boldsymbol{G} = \operatorname{rot} \boldsymbol{W}$. Отсюда получаем представление силового поля

$$\boldsymbol{G} = \frac{1}{\varphi} \operatorname{rot} \boldsymbol{W}.$$

При $\mu \neq 0$ решение $\boldsymbol{F}$ спектральной задачи для ротора не является потенциальным полем ($\operatorname{rot} \boldsymbol{F} \neq 0$). Покажем, что никаким умножением на скалярную гладкую функцию $\varphi(x, y, z)$ произведение $\varphi(x, y, z)\boldsymbol{F}$ нельзя сделать потенциальным. Пусть для некоторой гладкой функции φ имеем

$$\operatorname{rot}(\varphi \boldsymbol{F}) = \varphi \operatorname{rot} \boldsymbol{F} + (\operatorname{grad} \varphi) \times \boldsymbol{F} = \mu\varphi\boldsymbol{F} + (\operatorname{grad} \varphi) \times \boldsymbol{F} = 0.$$

Скалярная форма этой задачи имеет вид системы линейных уравнений относительно набора F_1, F_2, F_3:

$$\mu\varphi F_1 - \frac{\partial \varphi}{\partial z}F_2 + \frac{\partial \varphi}{\partial y}F_3 = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z}F_1 + \mu\varphi F_2 - \frac{\partial \varphi}{\partial x}F_3 = 0, \quad -\frac{\partial \varphi}{\partial y}F_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial x}F_2 + \mu\varphi F_3 = 0.$$

При некоторых наборах (x, y, z) декартовых переменных эта система имеет ненулевое решение. Следовательно, на этих наборах определитель этой системы, равный $\mu\varphi((\mu\varphi)^2 + (\operatorname{grad} \varphi)^2)$, должен обратиться в нуль. Отсюда, в указанных наборах независимых аргументов скалярная функция $\varphi(x, y, z)$ равна нулю. Поэтому произведение $\varphi(x, y, z)\boldsymbol{F}$ равно нулю тождественно.

2. Спектральная задача в декартовой системе координат

Согласно предыдущему разделу скалярная форма спектральной задачи для векторного поля $\boldsymbol{F} = \{F_1, F_2, F_3\}$ в декартовой системе координат имеет следующий вид:

$$\mu F_1 = \frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \quad \mu F_2 = \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \quad \mu F_3 = \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}.$$

Векторно-матричной форме этой задачи

$$AF = \mu F,$$

где $F = (F_1, F_2, F3)^T$ — вектор-столбец, A — операторная матрица вида

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -\dfrac{\partial}{\partial z} & \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} & 0 & -\dfrac{\partial}{\partial x} \\ -\dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial x} & 0 \end{pmatrix},$$

отвечает характеристический определитель

$$\Delta = \det \begin{pmatrix} 0 & -\xi_3 & \xi_2 \\ \xi_3 & 0 & -\xi_1 \\ -\xi_2 & \xi_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Имеем $\Delta = (-\xi_3)\xi_1\xi_2 + \xi_2\xi_3\xi_1 = 0$. Тождественное обращение в нуль характеристического определителя свидетельствует, что спектральная задача для ротора лежит вне класса хорошо изученых систем дифференциальных уравнений (см. например, [2, 5, 8, 16, 17, 19, 22, 27, 28, 38]).

Линейное преобразование $F \to HF$ с невырожденной матрицей H, зависящей от радиус-вектора $\boldsymbol{r} = \{x, y, z\}$, приведет к преобразованию подобия HAH^{-1} исходного матричного оператора A, но характеристический определитель подобного оператора будет равен определителю исходного, т.е. также тождественно равен нулю.

Из следующих легко проверяемых разложений:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y} + \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial z},$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial \alpha}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \alpha} + \frac{\partial \beta}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \beta} + \frac{\partial \gamma}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \gamma}, \quad \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial \alpha}{\partial y}\frac{\partial}{\partial \alpha} + \frac{\partial \beta}{\partial y}\frac{\partial}{\partial \beta} + \frac{\partial \gamma}{\partial y}\frac{\partial}{\partial \gamma}, \quad \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial \alpha}{\partial z}\frac{\partial}{\partial \alpha} + \frac{\partial \beta}{\partial z}\frac{\partial}{\partial \beta} + \frac{\partial \gamma}{\partial z}\frac{\partial}{\partial \gamma},$$

где (α, β, γ) — новая группа независимых переменных, гладко зависящих от декартовых переменных (x, y, z), имеем представление

$$A = (A \cdot \alpha)\frac{\partial}{\partial \alpha} + (A \cdot \beta)\frac{\partial}{\partial \beta} + (A \cdot \gamma)\frac{\partial}{\partial \gamma}.$$

Последней операторной форме отвечает характеристический определитель $\det(A \cdot \omega)$, где $\omega = \xi_1\alpha + \xi_2\beta + \xi_3\gamma$. Он также тождественно равен нулю, так как равен определителю матрицы

$$\begin{pmatrix} 0 & -\dfrac{\partial \omega}{\partial z} & \dfrac{\partial \omega}{\partial y} \\ \dfrac{\partial \omega}{\partial z} & 0 & -\dfrac{\partial \omega}{\partial x} \\ -\dfrac{\partial \omega}{\partial y} & \dfrac{\partial \omega}{\partial x} & 0 \end{pmatrix}.$$

Из вида спектральной задачи для ротора следует, что если спектральный параметр μ не равен нулю, то можно исключить одну из координатных функций, например, F_3, и получить систему двух дифференциальных уравнений, но уже второго порядка, относительно F_1 и F_2, которые являются гладкими функциями трех независимых переменных декартовой системы (x, y, z). Запишем эту систему:

$$\frac{\partial^2 F_1}{\partial y^2} + \mu^2 F_1 = -\mu\frac{\partial F_2}{\partial z} + \frac{\partial^2 F_2}{\partial y \partial x}, \quad \frac{\partial^2 F_2}{\partial x^2} + \mu^2 F_2 = \mu\frac{\partial F_1}{\partial z} + \frac{\partial^2 F_1}{\partial x \partial y}, \quad F_3 = \frac{1}{\mu}(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}).$$

Введя обозначения

$$f_1 = -\mu\frac{\partial F_2}{\partial z} + \frac{\partial^2 F_2}{\partial y \partial x}, \quad f_2 = \mu\frac{\partial F_1}{\partial z} + \frac{\partial^2 F_1}{\partial x \partial y},$$

получим двухпараметрическое представление интересующих нас компонент F_1, F_2:

$$\begin{cases} F_1(x, y, z) = \displaystyle\int\limits_{y_0}^{y} \sin[\mu(y - \sigma)] f_1(x, \sigma, z)\, d\sigma + C_1(x, z)\cos[\mu y] + C_2(x, z) sin[\mu y], \\ F_2(x, y, z) = \displaystyle\int\limits_{x_0}^{x} \sin[\mu(x - \tau)] f_2(\tau, y, z)\, d\tau + D_1(y, z)\cos[\mu x] + D_2(y, z) sin[\mu x], \\ F_3 = \dfrac{1}{\mu}\left(\dfrac{\partial F_2}{\partial x} - \dfrac{\partial F_1}{\partial y}\right). \end{cases}$$

В итоге получаем систему из четырех уравнений, в которой будет присутствовать уже восемь неизвестных гладких функций F_1, f_1, C_1, D_1 и F_2, f_2, C_2, D_2. Однако, очевидно, что нахождение общего решения последней системы есть не менее трудоемкая, чем интегрирование системы из двух уравнений относительно F_1, F_2. Впрочем, полученные формулы позволяют построить итерационный процесс построения последовательности f_1^n, f_2^n по F_1^n, F_2^n и следующую пару F_1^{n+1}, F_2^{n+1} по f_1^n, f_2^n.

Оставшийся случай $\operatorname{rot} \boldsymbol{F} = 0$ $(\mu = 0)$ относится к классу обратных задач векторного анализа: найти все векторные поля с наперед заданными вихрем (ротором) и расходимостью (дивергенцией). Решение этой проблемы см. в [31, 34, 40, 41].

Воспользуемся следующим равенством для гладкого векторного поля $\boldsymbol{F} = F_1\boldsymbol{i} + F_2\boldsymbol{j} + F_3\boldsymbol{k}$:

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot}\boldsymbol{F}) - \operatorname{grad}(\operatorname{div}\boldsymbol{F}) = -(\Delta F_1)\boldsymbol{i} - (\Delta F_2)\boldsymbol{j} - (\Delta F_3)\boldsymbol{k},$$

где

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

— оператор Лапласа от трех независимых переменных x, y, z. Так как всякое решение исходной спектральной задачи

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{F} = \mu\boldsymbol{F}, \quad \mu \neq 0,$$

имеет нулевую дивергенцию, то

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot}\boldsymbol{F}) = \mu^2\boldsymbol{F}.$$

Последнее равенство распадается на тройку скалярных задач Гельмгольца

$$\Delta F_k + \mu^2 F_k = 0, \quad k = 1, 2, 3.$$

Можно к последней системе добавить условие согласования скалярных решений

$$\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} = 0,$$

что означает $\operatorname{div}\boldsymbol{F} = 0$. Однако мы не получим задачу, эквивалентную исходной, так как решения новой задачи дают все решения неоднородной задачи

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{F} = \mu\boldsymbol{F} + \boldsymbol{G}$$

с произвольным гладким полем $\boldsymbol{G}$, ротор и дивергенция которого равны нулю. Класс решений новой задачи шире. В принципе, найденное решение новой задачи можно проверить на выполнение равенства $\boldsymbol{G} = 0$.

Заметим, что трехмерная спектральная задача для оператора Лапласа (задача Гельмгольца) изучалась давно и довольно обстоятельно изучается сейчас. В частности, широко используется метод Фурье разделения переменных при отыскании решений в явном виде (см., например, [10, 21]).

Отбросив попытку отыскания общего решения исходной спектральной задачи, перейдем к вычислению частных решений, которые, тем не менее, имеют важное прикладное значение.

Нетрудно понять, что нетривиальное в заданной области Ω решение $\boldsymbol{F} = \{F_1, F_2, F_3\}$ спектральной задачи не может иметь двух компонент, тождественно обращающихся в нуль на этой области.

Однако есть решения, которые имеют ровно по одной компоненте, которая в области Ω тождественно равна нулю. Пусть для определенности $F_3 = 0$. Другие случаи разбираются аналогично.

Выделяемые классы решений, если они интерпретируются как гладкие поля скоростей сплошной среды (плазмы), порождают плоские поля, параллельные координатным плоскостям декартовой системы, в нашем случае — плоскости Oxy. Им отвечают плоские траектории частиц, увлекаемые плоским полем, лежащим в области Ω.

Указанный класс частных решений может быть описан точно. В самом деле, при $F_3 = 0$ наша система принимает простой вид

$$\mu F_1 = -\frac{\partial F_2}{\partial z}, \quad \mu F_2 = \frac{\partial F_1}{\partial z}, \quad \frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}.$$

Исключение F_2 из первого уравнения приводит к хорошо изученному однородному дифференциальному уравнению второго порядка относительно переменной F_1 и независимой переменной z. Интегрируя, получаем общее решение

$$F_1(x, y, z) = C_1(x, y)\cos[\mu z] + C_2(x, y)\sin[\mu z]$$

этого уравнения. Второе уравнение системы дает представление

$$F_2(x, y, z) = C_2(x, y)\cos[\mu z] - C_1(x, y)\sin[\mu z].$$

Учет третьего уравнения системы спектральной задачи приводит к равенствам

$$\frac{\partial C_1}{\partial y} = \frac{\partial C_2}{\partial x}, \quad \frac{\partial C_1}{\partial x} = -\frac{\partial C_2}{\partial y}.$$

Теперь видим, что амплитуды $C_1(x, y)$ и $C_2(x, y)$ колебаний плоского поля

$$\boldsymbol{F} = \Big(C_1(x, y)\boldsymbol{i} + C_2(x, y)\boldsymbol{j}\Big)\cos[\mu z] + \Big(C_2(x, y)\boldsymbol{i} - C_1(x, y)\boldsymbol{j}\Big)\sin[\mu z],$$

оказываются гармоническими функциями: $\Delta C_1 = \Delta C_2 = 0$. Здесь Δ — двумерный оператор Лапласа:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2},$$

который следует рассматривать в областях изменения независимых переменных x, y, являющихся прямоугольной проекцией на Oxy нетривиального пересечения области Ω и горизонтальной плоскости $z = z^*$ при изменяющемся z^*.

По установившейся терминологии (см., например, [1, с. 101]) функцию $C_1(x, y)$ называют гармонически сопряженной с функцией $C_2(x, y)$; при этом $C_2(x, y)$ и $C_1(x, y)$ есть соответственно действительная и мнимая части функции $f(\zeta)$, $\zeta = x + \sqrt{-1}y$, аналитической в прямоугольной проекции нетривиального пересечения области Ω и горизонтальной плоскости $z = z^*$. В учебнике [1] приведено три различных эквивалентных представления этой аналитической функции:

$$f(\zeta) = \begin{cases} C_2(x, y) + \sqrt{-1}C_1(x, y), \\ C_2(x, y) + \sqrt{-1}\left(\displaystyle\int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} -\frac{\partial C_2}{\partial y}\,dx + \frac{\partial C_2}{\partial x}\,dy + \alpha_0\right), \\ 2C_2\left(\dfrac{\zeta + \bar{\zeta}_0}{2}, \dfrac{\zeta - \bar{\zeta}_0}{2}\right) - C_2(x_0, y_0) + \sqrt{-1}\alpha_0, \end{cases}$$

где x_0, y_0, $\zeta_0 = x_0 + \sqrt{-1}y_0$, $\bar{\zeta}_0 = x_0 - \sqrt{-1}y_0$, α_0 — постоянные. Последняя формула называется представлением Гурса.

Укажем все плоские поля $P(x, y, z)\boldsymbol{i} + Q(x, y, z)\boldsymbol{j}$, которые ортогональны вычисленному плоскому полю $\boldsymbol{F}$. Нетрудно убедиться в том, что они являются единственными решениями следующей системы относительно переменных P и Q:

$$\begin{cases} C_1(x, y)P + C_2(x, y)Q = U(x, y, z), \\ C_2(x, y)P - C_1(x, y)Q = V(x, y, z), \end{cases}$$

где правые части этой системы образуют плоское поле $U(x, y, z)\boldsymbol{i} + V(x, y, z)\boldsymbol{j}$, ортогональное полю $\cos[\mu z]\boldsymbol{i} + \sin[\mu z]\boldsymbol{j}$, которое можно интерпретировать как поле вращения единичного вектора с круговой частотой μ при движении вдоль оси z с единичной скоростью: $z = t$. Примером может служить ортогональное поле с

$$U = w(x, y)\sin[\mu z], \quad V = -w(x, y)\cos[\mu z],$$

где $w(x, y)$ — произвольная функция двух переменных. Другие, более общие примеры:

$$U = -V\,\mathrm{tg}[\mu z], \quad V = -U\,\mathrm{ctg}[\mu z].$$

Перейдем теперь к параметрическому описанию линий тока, отвечающих вычисленным полям скоростей спектральной задачи для ротора в декартовой системе координат. По определению, поля $d\vec{\boldsymbol{r}}$ и $\boldsymbol{F}(\vec{\boldsymbol{r}})$ должны быть пропорциональны: $d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})\,dt$, где dt — дифференциал независимой переменной t (времени наблюдения за движением точки среды). Отсюда получаем систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = C_1(x(t), y(t)) \cos[\mu z] + C_2(x(t), y(t)) \sin[\mu z], \\ \dfrac{dy}{dt} = C_2(x(t), y(t)) \cos[\mu z] - C_1(x(t), y(t)) \sin[\mu z], \\ \dfrac{d\,z}{d\,t} = 0. \end{cases}$$

В этой системе $C_2(x, y)$ — произвольная гармоническая функция, а $C_1(x, y)$ находится, например, по формуле Гурса (см. выше). Теория гармонических функций хорошо разработана (см. [1]; из зарубежных источников отметим работу [43]). Для простоты в качестве указанных функций можно взять гармонические многочлены степени n от двух переменных x, y, взяв соответственно вещественную и мнимую части аналитической функции $(x + \sqrt{-1}y)^n$.

При $n = 1$ имеем интегрируемую систему

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y(t) \cos[\mu z] + x(t) \sin[\mu z], \\ \dfrac{dy}{dt} = x(t) \cos[\mu z] - y(t) \sin[\mu z], \\ \dfrac{dz}{dt} = 0. \end{cases}$$

Двумерная матрица этой системы имеет простой спектр: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$. Соответствующие собственные векторы-столбцы также легко вычисляются. Поэтому мы не приводим здесь окончательного решения начальной задачи Коши.

Более интересный случай получаем при $n = 2$:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x(t)y(t) \cos[\mu z] + (x^2(t) - y^2(t)) \sin[\mu z], \\ \dfrac{dy}{dt} = (x^2(t) - y^2(t)) \cos[\mu z] - 2x(t)y(t) \sin[\mu z], \\ \dfrac{dz}{dt} = 0. \end{cases}$$

В отличие от предыдущего случая это нелинейная система относительно неизвестных функций $x(t)$, $y(t)$. Теоретическое и численное исследование этой системы можно провести методами, изложенными, например, в монографиях [7, 15, 20, 37, 39].

3. Криволинейная система координат

Как правило, спектральная задача для ротора $\operatorname{rot} \boldsymbol{F} = \mu \boldsymbol{F}$ рассматривается для объемной ограниченной односвязной области Ω с гладкой границей $\partial\Omega$. Указанное равенство должно быть выполнено для всех точек области Ω. При этом в каждой точке границы $\partial\Omega$ поле $\boldsymbol{F}$ должно быть «приглажено», т.е. ортогонально нормальному вектору касательной плоскости к границе в этой точке.

Здесь следует напомнить известные определения, которые приняты в нашей работе. Под объемной областью Ω трехмерного декартова пространства понимается открытое и связное подмножество этого пространства. Ее граница $\partial\Omega$ есть разность всего множества предельных точек и множества внутренних точек области Ω.

В случае объемной области имеются два понятия односвязности — поверхностная и пространственная (см., например, [36]). Например, тор (см. определение ниже) является пространственно односвязным, но не поверхностно односвязным. Область, находящаяся между двумя концентрическими шаровыми поверхностями будет поверхностно односвязной, но не пространственно односвязной.

Мы придерживаемся понятия односвязности, строго определенного в учебнике С. М. Никольского (см. [23, с. 96]). Для удобства читателя мы приведем это определение односвязности.

Связное множество Ω (не обязательно объемная область) трехмерного пространства называется односвязным, если и только если для любого замкнутого кусочно гладкого контура Γ, целиком лежащего в Ω, найдется параметризованная поверхность, также целиком лежащая в Ω и содержащая Γ, которая задается непрерывной в треугольнике $\{(s,t) : 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant 1\}$ вектор-функцией $\Phi(s,t) = (\Phi_1(s,t), \Phi_2(s,t), \Phi_3(s,t))$ с кусочно гладким сечением $\Phi(s,1)$, $s \in [0,1]$, которое дает описание контура Γ, причем при всех $t \in [0,1]$ имеем $\Phi(0,t) = \Phi(t,t)$. Параметр t отображения $\Phi(\cdot,t)$ называется параметром непрерывной деформации сечения $\Phi(\cdot,1)$. Процесс стремления к нулю этого параметра называется процессом стягивания контура Γ в точку.

В спектральной задаче для ротора при $\mu \neq 0$ поле $\boldsymbol{F}$ бессиловое ($\operatorname{div} \boldsymbol{F} = 0$). Нулевое значение спектрального параметра μ возможно лишь тогда, когда поле $\boldsymbol{F}$ в односвязной области Ω потенциальное, т.е. является градиентом некоторого скалярного потенциала φ. Если ограничиться только бессиловыми полями, то в качестве решения спектральной задачи можно взять градиент любого гармонического потенциала φ.

Рассмотрение спектральной задачи для ротора в общей системе криволинейных координат представляет методический интерес. В [18, с. 316] показано, что в криволинейных координатах векторное поле в конкретной точке трехмерного пространства можно разложить как по векторам локального репера системы криволинейных координат, так и по векторам биортогонального к нему локального базиса, построенного из векторных произведений векторов локального репера.

Приведем соответствующие разложения для поля $\boldsymbol{F}$ и его ротора $\operatorname{rot} \boldsymbol{F}$. Мы уже вводили в трехмерном пространстве декартову систему координат $Oxyz$. Пусть M — произвольная точка трехмерного пространства. Разложим радиус-вектор этой точки $\boldsymbol{r} = \overrightarrow{OM}$ по ортам осей:

$$\boldsymbol{r} = x\,\boldsymbol{i} + y\,\boldsymbol{j} + z\,\boldsymbol{k} = \{x, y, z\}.$$

Криволинейная система координат в односвязной области Ω вводится путем установления взаимно однозначного соответствия между точками (x,y,z) этой области и системами значений трех переменных величин (α,β,γ) из некоторой области их изменения Ω^*. Это достигается за счет задания функциональных зависимостей между указанными тройками скалярных величин, которые обеспечивают взаимно однозначное соответствие.

Вычислим частные производные

$$\begin{cases} \boldsymbol{r}_1 = \dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \alpha} = \boldsymbol{i}\dfrac{\partial x}{\partial \alpha} + \boldsymbol{j}\dfrac{\partial y}{\partial \alpha} + \boldsymbol{k}\dfrac{\partial z}{\partial \alpha} = \left\{\dfrac{\partial x}{\partial \alpha},\ \dfrac{\partial y}{\partial \alpha},\ \dfrac{\partial z}{\partial \alpha}\right\}, \\ \boldsymbol{r}_2 = \dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \beta} = \boldsymbol{i}\dfrac{\partial x}{\partial \beta} + \boldsymbol{j}\dfrac{\partial y}{\partial \beta} + \boldsymbol{k}\dfrac{\partial z}{\partial \beta} = \left\{\dfrac{\partial x}{\partial \beta},\ \dfrac{\partial y}{\partial \beta},\ \dfrac{\partial z}{\partial \beta}\right\}, \\ \boldsymbol{r}_3 = \dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \gamma} = \boldsymbol{i}\dfrac{\partial x}{\partial \gamma} + \boldsymbol{j}\dfrac{\partial y}{\partial \gamma} + \boldsymbol{k}\dfrac{\partial z}{\partial \gamma} = \left\{\dfrac{\partial x}{\partial \gamma},\ \dfrac{\partial y}{\partial \gamma},\ \dfrac{\partial z}{\partial \gamma}\right\}. \end{cases}$$

Частная производная $\boldsymbol{r}_1$ является вектором, касательным к первой координатной линии, вдоль которой меняется лишь первая координата α, по которой производится дифференцирование. Аналогично понимаются остальные производные $\boldsymbol{r}_2$, $\boldsymbol{r}_3$.

Таким образом, в текущей точке $M(x,y,x)$ пространства возникают три вектора $\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}_2$, $\boldsymbol{r}_3$, касательных к координатным линиям α, β, γ. Мы будем рассматривать лишь такие криволинейные координаты, для которых эти частные производные не компланарны ни в одной точке рассматриваемой области Ω, т.е. смешанное произведение $[\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_3] \neq 0$. В этом случае тройка векторов $(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_3)$ трехмерного пространства, исходящих из текущей точки $M(x,y,z)$ называется подвижным репером, связанным с этой текущей точкой и порожденным рассматриваемой системой криволинейных координат.

Из некомпланарности векторов подвижного репера $\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}_2$, $\boldsymbol{r}_3$ вытекает некомпланарность и их векторных произведений $\boldsymbol{r}_2 \times \boldsymbol{r}_3$, $\boldsymbol{r}_3 \times \boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_2$. После нормировки на величину смешанного произведения получим базис, биортогональный подвижному реперу:

$$\boldsymbol{e}_1 = \frac{1}{[\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_3]}\boldsymbol{r}_2 \times \boldsymbol{r}_3, \quad \boldsymbol{e}_2 = \frac{1}{[\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_3]}\boldsymbol{r}_3 \times \boldsymbol{r}_1, \quad \boldsymbol{e}_3 = \frac{1}{[\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_3]}\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_2.$$

Будем называть его биортогональным локальным базисом (сопутствующим репером) криволинейной системы координат.

Матрицу перехода от подвижного репера к сопутствующему реперу обозначим через $L(\alpha, \beta, \gamma)$. Умножая скалярно слева строчно–матричное представление

$$(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3) = (\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_3) L(\alpha, \beta, \gamma)$$

сначала на столбец $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)^T$, а затем на столбец $(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_3)^T$, найдем, что матрица $L(\alpha, \beta, \gamma)$ перехода от подвижного репера к сопутствующему совпадает с матрицей Грамма биортогонального локального базиса и равна обратной матрице к матрице Грамма подвижного репера криволинейной системы координат.

Решение $\boldsymbol{F}$ спектральной задачи для ротора удобнее разложить по векторам сопутствующего базиса, а $\operatorname{rot} \boldsymbol{F}$, как показано в [18, с. 324], в виде символического определителя по векторам подвижного репера. Имеем в векторно-матричных представлениях

$$\boldsymbol{F} = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3) \begin{pmatrix} G_1 \\ G_2 \\ G_3 \end{pmatrix}, \quad \operatorname{rot} \boldsymbol{F} = \frac{1}{[\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_3]} \begin{vmatrix} \boldsymbol{r}_1 & \boldsymbol{r}_2 & \boldsymbol{r}_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial \alpha} & \dfrac{\partial}{\partial \beta} & \dfrac{\partial}{\partial \gamma} \\ G_1 & G_2 & G_3 \end{vmatrix}.$$

Строка координат (F_1, F_2, F_3) поля $\boldsymbol{F}$ в подвижном репере $(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_3)$ вычислится по формуле

$$(F_1, F_2, F_3) = (G_1, G_2, G_3) L(\alpha, \beta, \gamma).$$

Введем новый спектральный параметр $\lambda = \mu \cdot [\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_3]$ и заменим биортогональный базис $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ его представлением через подвижный репер. Получим спектральную задачу для ротора в векторно-матричной форме относительно координат $(G_1, G_2, G_3))$ поля $\boldsymbol{F}$ в биортогональном базисе $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$:

$$\lambda L(\alpha, \beta, \gamma) \begin{pmatrix} G_1 \\ G_2 \\ G_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial G_3}{\partial \beta} - \dfrac{\partial G_2}{\partial \gamma} \\ \dfrac{\partial G_1}{\partial \gamma} - \dfrac{\partial G_3}{\partial \alpha} \\ \dfrac{\partial G_2}{\partial \alpha} - \dfrac{\partial G_1}{\partial \beta} \end{pmatrix}.$$

Видим, что выражение справа, относящееся к ротору, имеет привычную форму, применяемую в декартовой системе координат. Все особенности криволинейной системы координат отражены в матрице перехода $L(\alpha, \beta, \gamma)$ (матрице Ламе).

3.1. Геометрия криволинейной области. Для решения спектральной задачи $\mu \boldsymbol{F} = \operatorname{rot} \boldsymbol{F}$ с ненулевым значением спектрального параметра линии тока и поверхности тока идентичны вихревым линиям и вихревым поверхностям, которые обладают определенными свойствами структурной устойчивости, открытыми еще Гельмгольцем (см. [4, 6, 14]). Это значит, что коллинеарность векторного поля и его ротора в каждой точке рассматриваемой области Ω свидетельствует о наличии в ней определенной структуры. В самом деле, согласно сказанному выше решение спектральной задачи допускает два локальных разложения. Первое — по векторам подвижного репера

$$\boldsymbol{F} = F_1(\alpha, \beta, \gamma) \boldsymbol{r}_1 + F_2(\alpha, \beta, \gamma) \boldsymbol{r}_2 + F_3(\alpha, \beta, \gamma) \boldsymbol{r}_3,$$

второе — по векторам биортогонального базиса

$$\boldsymbol{F} = G_1(\alpha, \beta, \gamma) \boldsymbol{e}_1 + G_2(\alpha, \beta, \gamma) \boldsymbol{e}_2 + G_3(\alpha, \beta, \gamma) \boldsymbol{e}_3.$$

Координаты последнего разложения (G_1, G_2, G_3) находятся как решения записанной выше системы дифференциальных уравнений первого порядка. Эта система, как следует из результатов анализа оператора ротора в декартовой системе координат, принадлежит классу плохо изученных систем. Поэтому, отказываясь от нахождения общего решения, сосредоточимся на поиске частных решений специального вида. Прежде всего, перепишем эту систему в следующем удобном для нас виде:

$$(F_1, F_2, F_3) = (G_1, G_2, G_3)L(\alpha, \beta, \gamma), \qquad \begin{cases} \lambda F_1 = \dfrac{\partial G_3}{\partial \beta} - \dfrac{\partial G_2}{\partial \gamma}, \\ \lambda F_2 = \dfrac{\partial G_1}{\partial \gamma} - \dfrac{\partial G_3}{\partial \alpha}, \\ \lambda F_3 = \dfrac{\partial G_2}{\partial \alpha} - \dfrac{\partial G_1}{\partial \beta}. \end{cases}$$

В первом, алгебраическом уравнении присутствует матрица Ламе

$$L(\alpha, \beta, \gamma) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}_3 \\ \boldsymbol{e}_2 \cdot \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 \cdot \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_2 \cdot \boldsymbol{e}_3 \\ \boldsymbol{e}_3 \cdot \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_3 \cdot \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \cdot \boldsymbol{e}_3 \end{pmatrix}.$$

Это алгебраическое уравнение можно заменить другим:

$$(G_1, G_2, G_3) = (F_1, F_2, F_3)L(\alpha, \beta, \gamma)^{-1},$$

при этом обратная матрица выражается через вектора локального репера

$$L(\alpha, \beta, \gamma)^{-1} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{r}_1 \cdot \boldsymbol{r}_1 & \boldsymbol{r}_1 \cdot \boldsymbol{r}_2 & \boldsymbol{r}_1 \cdot \boldsymbol{r}_3 \\ \boldsymbol{r}_2 \cdot \boldsymbol{r}_1 & \boldsymbol{r}_2 \cdot \boldsymbol{r}_2 & \boldsymbol{r}_2 \cdot \boldsymbol{r}_3 \\ \boldsymbol{r}_3 \cdot \boldsymbol{r}_1 & \boldsymbol{r}_3 \cdot \boldsymbol{r}_2 & \boldsymbol{r}_3 \cdot \boldsymbol{r}_3 \end{pmatrix}.$$

Видим, что при $\lambda \neq 0$ наша задача распадается на две хорошо изученные математические задачи: восстановление векторного поля по его ротору и вычисление произведения матрицы на вектор. Эта факторизация позволяет строить соответствующие методы последовательных приближений нахождения частных решений нашей спектральной задачи. Здесь следует заметить, что в исходной постановке от решения $\boldsymbol{F}$ требуется равенство нулю его проекции на нормаль к границе $\partial\Omega$ в каждой ее точке. По физическим соображениям, последнее условие оказывается слишком сильным. Поэтому в [11] разрешено нарушение условия ортогональности (приглаженности поля) в «особых» точках границы рассматриваемой области $\partial\Omega$, что мы в рассматриваемых ниже примерах будем допускать.

Точки области Ω с криволинейными координатами (α, β, γ), при фиксировании ровно одной координаты, лежат на соответствующей координатной поверхности. Например, фиксируя $\alpha = \alpha^*$, получим пересечение первой координатной поверхности с областью Ω. Первый вектор $\boldsymbol{r}_1$ подвижного репера касается первой координатной линии, которая пересекает первую координатную поверхность. Поэтому, $\boldsymbol{r}_1$ «уводит» нас с первой координатной поверхности. При выполнении условия $F_1(\alpha^*, \beta, \gamma) \equiv 0$ векторное поле $\boldsymbol{F} = F_1(\alpha, \beta, \gamma)\boldsymbol{r}_1 + F_2(\alpha, \beta, \gamma)\boldsymbol{r}_2 + F_3(\alpha, \beta, \gamma)\boldsymbol{r}_3$ будет касаться первой координатной поверхности, отвечающей $\alpha = \alpha^*$. Если совокупность точек $(\alpha^*, \beta, \gamma)$, где β, γ — допустимые для области Ω значения второй и третьей координаты, образуют часть или всю границу этой области, то поле $\boldsymbol{F}$ удовлетворяет условию «приглаженности» на границе $\partial\Omega$ частично или полностью.

Взяв определенные границы изменения криволинейных координат

$$\alpha_{\min} < \alpha < \alpha_{\max}, \quad \beta_{\min} < \beta < \beta_{\max}, \quad \gamma_{\min} < \gamma < \gamma_{\max},$$

получим открытый криволинейный параллелепипед.

Здесь возникает естественная задача отыскания такой системы криволинейных координат, при которой область Ω совпадет с подходящим криволинейным параллелепипедом этой системы координат. Безусловно, это трудная задача. Тем не менее, ниже будут рассмотрены некоторые примеры, поясняющие правомерность постановки такой задачи.

Аналогичные рассуждения можно провести и для другого разложения

$$\boldsymbol{F} = G_1(\alpha, \beta, \gamma)\boldsymbol{e}_1 + G_2(\alpha, \beta, \gamma)\boldsymbol{e}_2 + G_3(\alpha, \beta, \gamma)\boldsymbol{e}_3.$$

Правда, здесь предварительно следует построить такую систему криволинейных координат

$$\boldsymbol{R} = X(\alpha,\beta,\gamma)\boldsymbol{i} + Y(\alpha,\beta,\gamma)\boldsymbol{j} + Z(\alpha,\beta,\gamma)\boldsymbol{k},$$

которая является решением следующей системы дифференциальных уравнений:

$$\left(\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial\alpha}, \frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial\beta}, \frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial\gamma}\right) = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3).$$

Примеры ниже показывают, что последняя система не всегда разрешима.

3.2. Примеры ортогональных систем. В ортогональных криволинейных системах пространственных координат вектора подвижного репера $(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_3)$ попарно ортогональны. В этом случае матрица Грама этого репера становится диагональной с элементами $(\boldsymbol{r}_1^2, \boldsymbol{r}_2^2, \boldsymbol{r}_3^2)$ на основной диагонали. При этом векторное произведение равно произведению длин векторов подвижного репера: $[\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_3] = |\boldsymbol{r}_1|\cdot|\boldsymbol{r}_1|\cdot|\boldsymbol{r}_1|$. Матрица $L(\alpha,\beta,\gamma)$, участвующая в алгебраическом уравнении спектральной задачи, будет диагональной с обратными элементами $(1/\boldsymbol{r}_1^2, 1/\boldsymbol{r}_2^2, 1/\boldsymbol{r}_3^2)$ на основной диагонали.

Зависимость между векторами двух локальных базисов $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ и $(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_3)$ оказывается простой: $\boldsymbol{e}_k = \boldsymbol{r}_k/\boldsymbol{r}_k^2$, $k = 1, 2, 3$, т.е. биортогональный базис получается простой нормировкой подвижного репера.

Аналогично выглядит зависимость между координатами (F_1, F_2, F_3) и (G_1, G_2, G_3) поля $\boldsymbol{F}$ соответственно в подвижном репере и биортогональном базисе: $F_k = G_k/\boldsymbol{r}_k^2$, $k = 1, 2, 3$.

Вспоминая, что параметр $\lambda = \mu[\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_3] = \mu|\boldsymbol{r}_1|\cdot|\boldsymbol{r}_2|\cdot|\boldsymbol{r}_1|$, получим выражения для левой части дифференциальной системы спектральной задачи для ротора:

$$\lambda F_1 = \mu G_1 \frac{|\boldsymbol{r}_2|\cdot|\boldsymbol{r}_3|}{|\boldsymbol{r}_1|}, \quad \lambda F_2 = \mu \frac{G_2|\boldsymbol{r}_1|\cdot|\boldsymbol{r}_3|}{|\boldsymbol{r}_2|}, \quad \lambda F_3 = \mu \frac{G_3|\boldsymbol{r}_1|\cdot|\boldsymbol{r}_2|}{|\boldsymbol{r}_3|}.$$

Окончательно получаем, что в случае ортогональной системы координат скалярная форма спектральной задачи для ротора принимает следующий законченный вид:

$$\mu g_1(\alpha,\beta,\gamma)G_1 = \frac{\partial G_3}{\partial\beta} - \frac{\partial G_2}{\partial\gamma}, \quad \mu g_2(\alpha,\beta,\gamma)G_2 = \frac{\partial G_1}{\partial\gamma} - \frac{\partial G_3}{\partial\alpha}, \quad \mu g_3(\alpha,\beta,\gamma)G_3 = \frac{\partial G_2}{\partial\alpha} - \frac{\partial G_1}{\partial\beta}.$$

Присутствующие здесь коэффициенты g_1, g_2, g_3 определяются через коэффициенты Ламе $h_1 = |\boldsymbol{r}_1|$, $h_2 = |\boldsymbol{r}_2|$, $h_3 = |\boldsymbol{r}_3|$ по формулам

$$g_1 = \frac{h_2\,h_3}{h_1}, \quad g_2 = \frac{h_1\,h_3}{h_2}, \quad g_3 = \frac{h_1\,h_2}{h_3}.$$

При этом решение спектральной задачи для ротора имеет следующее разложение по векторам подвижного репера:

$$\boldsymbol{F} = \frac{G_1(\alpha,\beta,\gamma)}{h_1^2}\boldsymbol{r}_1 + \frac{G_2(\alpha,\beta,\gamma)}{h_2^2}\boldsymbol{r}_2 + \frac{G_3(\alpha,\beta,\gamma)}{h_3^2}\boldsymbol{r}_3.$$

Кроме популярных сферической и цилиндрической систем (см. [13]), в классе пространственных ортогональных криволинейных систем координат содержится много и других (см., например, [21]). Мы ограничимся здесь рассмотрением еще одной ортогональной системы, у которой первой координатной поверхностью выступает поверхность тора.

В локальной системе ортогональных криволинейных координат (α,β,γ), определяемом фиксированным тором с большой окружностью B и малой окружностью A, $B > A$, формулы перехода от криволинейной системы координат к декартовой выберем в виде

$$x = (B + \alpha\cos\beta)\cos\gamma, \quad y = (B + \alpha\cos\beta)\sin\gamma, \quad z = \alpha\sin\beta.$$

Здесь первая координата α (малый радиус вращения) удовлетворяет ограничению $0 \leqslant \alpha \leqslant A$. Вторая координата β (угол поворота в малой окружности) и третья координата γ (угол поворота в большой окружности) меняются в интервале $[0, 2\pi)$.

Простые вычисления показывают, что это ортогональная система и соответствующие коэффициенты

$$g_1 = \alpha(B + \alpha\cos\beta), \quad g_2 = \frac{B + \alpha\cos\beta)}{\alpha}, \quad g_3 = \frac{\alpha}{B + \alpha\cos\beta}.$$

3.3. Два примера неортогональной системы координат. Здесь приводится два поучительных примера неортогональной системы координат, которые возникают при изучении электромагнитных полей без источников, циркулирующих внутри области, охватываемой поверхностью заданного уровня некоторого скалярного поля $\psi(\alpha, \beta, \gamma)$ и соответственно на поверхности листа Мебиуса. Первый связан с некоторым скалярным потенциалом, значение которого постоянно и равно единице на заданной поверхности. Второй пример, где возникает лента Мебиуса, навеян имеющимися разработками по созданию установки (стелларатора) Wendelstein 7-X Института Макса Планка по физической плазме в Германии, способной устойчиво удерживать в течение 0,1 с. гелиевую и водородную плазму при очень высокой температуре в заданной области.

Перейдем к вычислению подвижного репера и его биортогонального базиса для определенной ниже неявно заданной системы криволинейных координат:

$$x = \alpha, \quad y = \beta, \quad \psi(x, y, z) = \gamma.$$

Дифференцируя эти равенства последовательно по переменным α, β, γ, получим компоненты векторов подвижного репера $(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_3)$ в каноническом базисе $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$ декартовой системы координат:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{r}_1 &= \left\{\frac{\partial x}{\partial \alpha},\ \frac{\partial y}{\partial \alpha},\ \frac{\partial z}{\partial \alpha}\right\} = \left\{1,\ 0,\ -\frac{\partial \psi}{\partial x}\Big/\frac{\partial \psi}{\partial z}\right\},\\
\boldsymbol{r}_2 &= \left\{\frac{\partial x}{\partial \beta},\ \frac{\partial y}{\partial \beta},\ \frac{\partial z}{\partial \beta}\right\} = \left\{0,\ 1,\ -\frac{\partial \psi}{\partial y}\Big/\frac{\partial \psi}{\partial z}\right\}, \qquad [\boldsymbol{r}_1,\ \boldsymbol{r}_2,\ \boldsymbol{r}_3] = 1\Big/\frac{\partial \psi}{\partial z}.\\
\boldsymbol{r}_3 &= \left\{\frac{\partial x}{\partial \gamma},\ \frac{\partial y}{\partial \gamma},\ \frac{\partial z}{\partial \gamma}\right\} = \left\{0,\ 0,\ 1\Big/\frac{\partial \psi}{\partial z}\right\},
\end{aligned}$$

Компоненты биортогонального базиса (сопутствующего репера) также легко вычисляются:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{e}_1 &= \frac{1}{[\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_3]}\,\boldsymbol{r}_2 \times \boldsymbol{r}_3 = \{1, 0, 0\},\\
\boldsymbol{e}_2 &= \frac{1}{[\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_3]}\,\boldsymbol{r}_3 \times \boldsymbol{r}_1 = \{0, 1, 0\},\\
\boldsymbol{e}_3 &= \frac{1}{[\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_3]}\,\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_2 = \left\{\frac{\partial \psi}{\partial x},\ \frac{\partial \psi}{\partial y},\ \frac{\partial \psi}{\partial z}\right\} = \nabla\psi.
\end{aligned}$$

Вычисляя матрицу Грама биортогонального базиса, получим матрицу перехода от подвижного репера к сопутствующему реперу:

$$L(\alpha, \beta, \gamma) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dfrac{\partial \psi}{\partial x}\\ 0 & 1 & \dfrac{\partial \psi}{\partial y}\\ \dfrac{\partial \psi}{\partial x} & \dfrac{\partial \psi}{\partial y} & (\nabla\psi)^2 \end{pmatrix}.$$

Так как

$$\boldsymbol{F} = G_1\boldsymbol{e}_1 + G_2\boldsymbol{e}_2 + G_3\boldsymbol{e}_3 = \left\{G_1 + G_3\frac{\partial \psi}{\partial x},\ G_2 + G_3\frac{\partial \psi}{\partial y},\ G_3\frac{\partial \psi}{\partial z}\right\}$$

и на границе области Ω имеем $\psi(x, y, z) = 1$, что эквивалентно $\gamma = 1$, то условие ортогональности на этой границе поля $\boldsymbol{F}$ к нормали $\nabla\psi$ в каждой точке границы может быть записано в виде

$$\left(G_1\frac{\partial \psi}{\partial x} + G_2\frac{\partial \psi}{\partial y} + G_3(\nabla\psi)^2\right)_{|\gamma=1} = 0.$$

Из векторно-матричного представления спектральной задачи, где $\lambda = \mu / \dfrac{\partial\psi}{\partial z}$, получаем ее скалярную форму:

$$\begin{cases} \lambda\left(G_1 + G_3\dfrac{\partial\psi}{\partial x}\right) = \dfrac{\partial G_3}{\partial\beta} - \dfrac{\partial G_2}{\partial\gamma}, \\ \lambda\left(G_2 + G_3\dfrac{\partial\psi}{\partial y}\right) = \dfrac{\partial G_1}{\partial\gamma} - \dfrac{\partial G_3}{\partial\alpha}, \\ \lambda\left(G_1\dfrac{\partial\psi}{\partial x} + G_2\dfrac{\partial\psi}{\partial y} + G_3(\nabla\psi)^2\right) = \dfrac{\partial G_2}{\partial\alpha} - \dfrac{\partial G_1}{\partial\beta}. \end{cases}$$

Полученная форма спектральной задачи подсказывает обратную задачу восстановления скалярного потенциала $\psi(x,y,z)$ по заданному набору функциональных зависимостей $G_1(\alpha,\beta,\gamma)$, $G_2(\alpha,\beta,\gamma)$, $G_3(\alpha,\beta,\gamma)$.

Иллюстрируем сказанное на примере следующей области:

$$\Omega = \Big\{(x,y,z):\ a|x| + b|y| + z < 1,\ z > 0\Big\},$$

где a, b — заданные положительные скаляры. Это пирамида единичной высоты (по оси Oz), в основании которой лежит ромб с диагоналями длины $2/a$ (по оси Ox) и $2/b$ (по оси Oy). Основание этой пирамиды лежит на плоскости $z = 0$. Верхняя часть поверхности пирамиды представляет собой поверхность единичного уровня для функции $\psi(x,y,z) = a|x| + b|y| + z$, где $z \geqslant 0$. Ее можно описать явным уравнением $z = \max\big\{0,\ 1 - (a|x| + b|y|)\big\}$.

На плоскостях $x = 0$ и $y = 0$ (сингулярных поверхностях) градиент $\nabla\psi$ не определен, однако в остальной части пирамиды его координаты относительно единичного базиса декартовой системы координат вполне определены:

$$\nabla\psi = \big\{a\cdot\operatorname{sign}(x),\ b\cdot\operatorname{sign}(y),\ 1\big\},$$

где $\operatorname{sign}(x)$ — знак числа x. При этом спектральные параметры μ и λ совпадают. Заметим, что $\gamma = a\cdot|\alpha| + b\cdot|\beta| + z$.

Анализ скалярной формы спектральной задачи подсказывает, что ее вид упростится, если положить компоненту G_3 нулю (это необходимое условие, когда мы находимся на основании пармиды). Таким образом, мы отыскиваем плоские поля внутри пирамиды. В самом деле, имеем

$$\lambda G_1 = -\frac{\partial G_2}{\partial\gamma}, \quad \lambda G_2 = \frac{\partial G_1}{\partial\gamma}, \quad \lambda(G_1 a\cdot\operatorname{sign}(\alpha) + G_2 b\cdot\operatorname{sign}(\beta) = \frac{\partial G_2}{\partial\alpha} - \frac{\partial G_1}{\partial\beta}).$$

Приведем два сингулярных решения этой спектральной задачи, которые проверяются простой подстановкой в систему. Введем обозначение

$$w(\alpha,\beta) = (b\cdot\operatorname{sign}(\beta)\alpha - a\cdot\operatorname{sign}(\alpha)\beta).$$

Первое решение:

$$G_1 = \sin(\lambda\gamma)e^{\lambda w(\alpha,\beta)}, \quad G_2 = \cos(\lambda\gamma)e^{\lambda w(\alpha,\beta)}.$$

В самом деле, первые два уравнения упрощенной спектральной задачи очевидным образом выполнены. Вычислим правую часть третьего уравнения. Имеем:

$$\frac{\partial G_2}{\partial\alpha} - \frac{\partial G_1}{\partial\beta} = \lambda\Big(G_1 a\cdot\operatorname{sign}(\alpha) + G_2 b\cdot\operatorname{sign}(\beta)\Big).$$

Второе решение:

$$G_1^* = \cos(\lambda\gamma)e^{\lambda w(\alpha,\beta)}, \quad G_2^* = \sin(\lambda\gamma)e^{\lambda w(\alpha,\beta)};$$

оно также удовлетворяет всем трем уравнениям спектральной задачи. В частности,

$$\frac{\partial G_2^*}{\partial\alpha} - \frac{\partial G_1^*}{\partial\beta} = \lambda\Big(G_1^* a\cdot\operatorname{sign}(\alpha) + G_2^* b\cdot\operatorname{sign}(\beta)\Big).$$

Дискретный спектр для первого решения найдем из граничного условия:

$$\left(\frac{\partial G_2}{\partial\alpha} - \frac{\partial G_1}{\partial\beta}\right)_{|\gamma=1} = 0,$$

которое вне сингулярных поверхностей принимает следующий вид:

$$\lambda\Big(b\cdot\operatorname{sign}(\beta)cos(\lambda)+a\cdot\operatorname{sign}(\alpha)sin(\lambda)\Big)e^{\lambda w(\alpha,\beta)}=0.$$

Последнее приводит к простому уравнению

$$\cos(\lambda-\theta)=0,$$

где фаза

$$\theta=\operatorname{arctg}\left(\frac{a\cdot\operatorname{sign}(\alpha)}{b\cdot\operatorname{sign}(\beta)}\right).$$

Дискретный спектр для второго решения найдем из граничного условия:

$$\left(\frac{\partial G_2^*}{\partial\alpha}-\frac{\partial G_1^*}{\partial\beta}\right)_{|\gamma=1}=0,$$

которое вне сингулярных поверхностей имеет другой вид:

$$\lambda\Big(b\cdot\operatorname{sign}(\beta)sin(\lambda)+a\cdot\operatorname{sign}(\alpha)cos(\lambda)\Big)e^{\lambda w(\alpha,\beta)}=0.$$

Отсюда получаем $\sin(\lambda+\theta)=0$.

Из первого уравнения для спектрального параметра находим, что

$$\lambda=\theta+\frac{\pi}{2}+\pi k,\quad k=0,\pm1,\pm2,\ldots.$$

Из второго уравнения получим

$$\lambda=-\theta+\pi l,\quad l=0,\pm1,\pm2,\ldots.$$

Общее значение спектрального параметра λ возможно, и его получим из диофантова уравнения:

$$l-k=\frac{1}{2}+\frac{2\theta}{\pi}.$$

Введя обозначение $m=l-k$, найдем

$$\theta=-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}m.$$

Вспоминая определение угла θ, заключаем, что в основании пирамиды должен лежать квадрат: $a=b$.

Указанные выше решения спектральной задачи для ротора ортогональны относительно подходящего скалярного произведения и после нормировки дадут стационарные векторные поля смещения вакуума, которые позволяют сгенерировать электромагнитное поле соответствующей частоты (подробности см. в [11]).

Перейдем, наконец, к рассмотрению второй неортогональной системы криволинейных координат, первые координатные поверхности которой являются листами Мебиуса.

Переменные изучаемой локальной системы координат образуют тройку (α,β,φ) с конечными пределами изменения $|\alpha|\leqslant A$, $|\beta|\leqslant B$, $\varphi\in(0,2\pi)$. Здесь $A>B>0$. Переход к декартовой системе (x,y,z) задается системой зависимостей

$$x=\Big(\alpha+\beta\cos\frac{\varphi}{2}\Big)\cos\varphi,\quad y=\Big(\alpha+\beta\cos\frac{\varphi}{2}\Big)\sin\varphi,\quad z=\beta\sin\frac{\varphi}{2}.$$

Координатные поверхности вида $\alpha=const$ представляют собой листы Мебиуса.

При $x^2+y^2\neq0$ радиус-вектор $\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$, где $(\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k})$ — единичный базис декартовой системы, определяет подвижный локальный репер

$$(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{r}_3)=\left(\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial\alpha},\ \frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial\beta},\ \frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial\varphi}\right).$$

Это не ортогональный репер с отличным от нуля ориентированным объемом

$$V=[\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{r}_3]=-\Big(\alpha+\beta\cos\frac{\varphi}{2}\Big)\sin\frac{\varphi}{2}.$$

Векторы биортогонального к $(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_3)$ базиса

$$\boldsymbol{e}_1 = \frac{(\boldsymbol{r}_2 \times \boldsymbol{r}_3)}{V}, \quad \boldsymbol{e}_2 = \frac{(\boldsymbol{r}_3 \times \boldsymbol{r}_1)}{V}, \quad \boldsymbol{e}_3 = \frac{(\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_2)}{V}$$

нельзя рассматривать в качестве подвижного репера некоторой сопутствующей локальной системы координат $\boldsymbol{R} = X\boldsymbol{i} + Y\boldsymbol{j} + Z\boldsymbol{k}$, так как не выполнено необходимое условие совместности системы дифференциальных уравнений

$$\left(\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \alpha}, \ \frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \beta}, \ \frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \varphi}\right) = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3).$$

Матрица перехода от биортогонального базиса $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ к подвижному реперу $(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_3)$ (матрица Грама подвижного репера) имеет вид

$$L(\alpha, \beta, \varphi)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & cos\dfrac{\varphi}{2} & -\dfrac{1}{2}\beta \sin\dfrac{\varphi}{2} \\ \cos\dfrac{\varphi}{2} & 1 & 0 \\ -\dfrac{1}{2}\beta \sin\dfrac{\varphi}{2} & 0 & \alpha^2 + \dfrac{3}{4}\beta^2 + 2\alpha\beta\cos\dfrac{\varphi}{2} + \dfrac{1}{2}\beta^2 cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Ее можно применить при использовании второй формы алгебраического уравнения спектральной задачи для ротора.

4. Система аналитических вычислений

Автоматизация расчетов с применением системы аналитических вычислений на компьютере практикуется давно (см., например, вводный курс по применению методов символьной алгебры и компьютерных символьных вычислений для механики сплошных сред в среде Wolfram Mathematica [29]). Примеры, приведенные в нашей работе, показывают, что могут потребоваться достаточно громоздкие аналитические выкладки. Мы использовали Wolfram Mathematica (версия 11) для проверки правильности вычислений. Для этого было написано несколько программ на языке этой системы для визуализации координатных поверхностей и линий криволинейной системы координат, расчета решений спектральной задачи для ротора, изображения траектории движения в заданном поле скоростей.

Ниже приводится фрагмент одной из простых программ, назначение которого понятно из имеющегося в нем комментария.

`Print`[Переменные криволинейной системы координат (α, β, φ) с пределами изменения: $|\alpha| \leqslant A$, $|\beta| \leqslant B$, $0 < \varphi < 2\pi$]

$x = \left(\alpha + \beta\cos\frac{\varphi}{2}\right)\cos(\varphi);$

$y = \left(\alpha + \beta\cos\frac{\varphi}{2}\right)\sin(\varphi);$

$z = \beta\sin\frac{\varphi}{2};$

`Print`[Формулы перехода от криволинейной системы в декартову:]

$r = \{x, y, z\}$

`Print`[Подвижный репер (r_1, r_2, r_3):]

$r_1 = \partial_\alpha r$, $r_2 = \partial_\beta r$, $r_3 = \partial_\varphi r$

`Print`[Смешанное произведение:]

$V = r_1$.`Cross`$[r_2, r_3]$ // `Simplify`

`Print`[Биортогональный базис (e_1, e_2, e_3):]

$e_1 =$ `Cross`$[r_2, r_3]/V$ // `Simplify`

$e_2 =$ `Cross`$[r_3, r_1]/V$ // `Simplify`

$e_3 =$ `Cross`$[r_1, r_2]/V$ // `Simplify`

`Print`[Матрица перехода от биортогональнго базиса (e_1, e_2, e_3) к подвижному реперу (r_1, r_2, r_3):]

`MatrixForm`$[\{\{r_1.r_1, r_1.r_2, r_1.r_3\}, \{r_2.r_1, r_2.r_2, r_2.r_3\}, \{r_3.r_1, r_3.r_2, r_3.r_3\}\}]$ // `Simplify`

`Print`[Вид первой координатной поверхности:]

$A = 10$, $B = 3$, $\alpha = 8$,

`ParametricPlot3D`$[r, \{\beta, -B, B\}, \{\phi, 0, 2\pi\}]$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бицадзе А. В.* Основы теории аналитических функций комплексного переменного. — М.: Наука, 1984.
2. *Бицадзе А. В.* Избранные труды. — М.: МАКС Пресс, 2016.
3. *Вейль Г.* Избранные труды. Математика. Теоретическая физика. — М.: Наука, 1984.
4. *Вилля Г.* Теория вихрей. — Л.–М.: ОНТИ, 1936.
5. *Вишик М. И., Ладыженская О. А.* Краевые задачи для уравнений в частных производных и некоторых классов операторных уравнений// Усп. мат. наук. — 1956. — *11*, № 6 (72). — С. 41–97.
6. *Гельмгольц Г.* Основы вихревой теории. — М.–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002.
7. *Гориэли А.* Интегрируемость и сингулярность. — М.–Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2006.
8. *Джураев А. Д.* Метод сингулярных интегральных уравнений. — М.: Наука, 1987.
9. *Заславский Г. М., Сагдеев Р. З., Усиков Д. А., Черников А. А.* Слабый хаос и квазирегулярные структуры. — М.: Физматлит, 1983.
10. *Ильин В. А.* О сходимости резложений по собственным функциям оператора Лапласа// Усп. мат. наук. — 1958. — *13*, № 1 (79). — С. 87–180.
11. *Исламов Г. Г.* Об одном классе векторных полей// Вест. Самар. гос. техн. ун-та. Сер. физ.-мат. науки. — 2015. — *19*, № 4. — С. 680–696.
12. *Картан А.* Дифференциальное исчисление. Дифференциальные формы. — М.: Мир, 1971.
13. *Катанаев М. О.* Геометрические методы в математической физике. — М.: Мат. ин-т им. В. А. Стеклова РАН, 2015.
14. *Козлов В. В.* Общая теория вихрей. — М.–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2013.
15. *Красильников П. С.* Прикладные методы исследования нелинейных колебаний. — М.–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2015.
16. *Курант Р., Гильберт Д.* Методы математической физики. Т. 2. — М.–Л.: Гостехиздат, 1951.
17. *Лакс П. Д.* Гиперболические дифференциальные уравнения в частных производных. — М.–Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2007.
18. *Лаптев Г. Ф.* Элементы векторного исчисления. — М.: Наука, 1975.
19. *Лерей Ж., Шаудер Ю.* Топология и функциональные уравнения. Применение некоторых топологическихметодов к исследованию дифференциальных уравнений с частными производными// Усп. мат. наук. — 1946. — *1*, №№ 3–4 (13–14). — С. 71–95.
20. *Марсден Дж., Мак-Кракен М.* Бифуркация рождения цикла и ее приложения. — М.: Мир, 1980.
21. *Миллер У.* Симметрия и разделение переменных. — М.: Мир, 1981.
22. *Назаров С. А., Пламеневский Б. А.* Эллиптические задачи в областях с кусочно гладкой границей. — М.: Наука, 1991.
23. *Никольский С. М.* Курс математического анализа. Т. 2. — М.: Наука, 1991.
24. *Никольский С. М.* Избранные труды. Т. 1. Теория приближений. — М.: Наука, 2006.
25. *Никольский С. М.* Избранные труды, Т. 2. Функциональные пространства. — М.: Наука, 2007.
26. *Никольский С. М.* Избранные труды, Т. 3. Уравнения в функциональных пространствах. — М.: Наука, 2009.
27. *Ниренберг Л.* Лекциии о линейных дифференциальных уравнениях с частными производными// Усп. мат. наук. — 1975. — *30*, № 4 (184). — С. 147–204.
28. *Олейник О. А.* Лекции об уравнениях с частными производными. — М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2005.
29. *Папуша А. Н.* Механика сплошных сред. — М.–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2011.
30. *Петровский И. Г.* Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1970.
31. *Пуанкаре А.* Теория вихрей. — М.–Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2000.
32. *Рашевский П. К.* Геометрическая теория уравнений с частными производными. — М.–Л.: Гостехиздат, 1947.
33. *Сакс Р. С.* Решение спектральных задач для операторов ротора и Стокса// Уфим. мат. ж. — 2013. — *5*, № 2. — С. 63–81.
34. *Стеклов В. А.* Работы по механике 1902–1909. — М.–Ижевск: Ижевский институт компьютерных исследований, 2011.
35. *Степанов В. В.* Курс дифференциальных уравнений. — М.: Гостехиздат, 1953.
36. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 3. — М.: Наука, 1966.

37. *Халил Х. К.* Нелинейные системы. — М.–Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2009.
38. *Хермандер Л.* Линейные дифференциальные операторы с частными производными. — М.: Мир, 1965.
39. *Цендер Э.* Лекции по динамическим системам. Гамильтоновы векторные поля и симплектические емкости. — М.–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2015.
40. *Шилов Г. Е.* Лекции по векторному анализу. — М.: Гостехиздат, 1954.
41. *Шилов Г. Е.* Математический анализ. Функции нескольких переменных. Ч. 1, 2. — М.: Наука, 1972.
42. *Эльсгольц Л. Э.* Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. — М.: Наука, 1965.
43. *Axler S., Bourdon H., Ramey W.* Harmonic function theory. — New York: Springer-Verlag, 2001.
44. *Weyl H.* The method of orthogonal projection in potential theory// Duke Math J. — 1940. — *7*. — С. 411–444.

Г. Г. Исламов
Институт математики, информационных технологий и физики
Удмуртского государственного университета, Ижевск
E-mail: `ggislamov@gmail.com`

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 140 (2017). С. 68–77

УДК 517.5, 517.956.225

НЕРАВЕНСТВА, ВКЛЮЧАЮЩИЕ ДРОБНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ ФУНКЦИИ И ЕЕ ПРОИЗВОДНУЮ

© 2017 г. **Р. Г. НАСИБУЛЛИН**

Аннотация. Доказаны новые неравенства, включающие дробные интегралы функции и ее производную. Предварительно получены нижние оценки весовых норм производной через выражения, зависящие от дробных интегралов Римана—Лиувилля.

Ключевые слова: неравенство Харди, дробный интеграл Римана–Лиувилля, функция Бесселя.

AMS Subject Classification: 26D15, 46E30

1. Введение. В математике, в особенности в теории вложения функциональных пространств, и в математической физике широкое развитие получили неравенства, включающие функцию и ее производную. К таким видам неравенств, например, относятся неравенства Соболева (см. [29]), неравенства Харди—Мазьи—Соболева (см. [12, 21, 22, 25]), неравенства типа Опила (см. [19, 28]) и неравенства типа Харди (см. [1–9, 11, 13–18, 20, 24]). Общим свойством этих неравенств является тот факт, что в частном случае эти неравенства дают различные нижние оценки L^p-нормы производной функции. Имеются также ряд работ, которые посвящены развитию, обобщению и применению соответствующих неравенств.

Пусть $\rho > 0$ и абсолютно непрерывная функция $u : [0, \rho] \to \mathbb{R}$ удовлетворяет граничному условию $u(0) = 0$ и $u \not\equiv 0$.

В [4] было показано, что для таких функций u при условиях $r \in [1, \infty)$, $s \in (-\infty, r)$ и $u'/t^{r-1} \in L^1(0, 1)$ выполнено неравенство

$$\int_0^\rho \frac{|u(t)|}{t^s} dt < M(s, r)\rho^{r-s} \int_0^\rho \frac{|u'(t)|}{t^{r-1}} dt, \tag{1}$$

где константа $M(s, r)$ определена равенствами

$$M(s, r) := \begin{cases} (1 - s)^{-1}, & \text{если } r = 1, \\ (r - 1)^{-1} e^{-1}, & \text{если } s = 1, \\ (r - s)^{-1}((r - 1)/(r - s))^{(r-1)/(1-s)}, & \text{если } r \neq 1,\ s \neq 1, \end{cases}$$

причем постоянная $M(s, r)$ является точной для всех допустимых s и r, т.е. не может быть уменьшена без дополнительных ограничений на функцию u.

Используя неравенство Гельдера, из неравенства (1) при $s < 1$ и $p \geqslant 1$ несложно получить его L^p-аналог, а именно, следующее соотношение:

$$\int_0^\rho \frac{|u(t)|^p}{t^s} dt \leqslant \rho^{p(1-s)} \left(\frac{p}{1 - s}\right)^p \int_0^\rho \frac{|u'(t)|^p}{t^{s(1-p)}} dt. \tag{2}$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 14-01-00351-а), а также при финансовой поддержке РФФИ и Правительства Республики Татарстан в рамках научного проекта № 15-41-02433.

Константа неравенства (2))является неулучшаемой только при $p = 1$ (см. подробнее [4]). Это легко заметить, если сравнить (2) с точным неравенством из [16]:

$$\int_0^1 \frac{|u(t)|^2}{t^s} dt \leqslant \frac{4}{(1-s)^2\pi^2} \int_0^1 \frac{|u'(t)|^2}{t^{-s}} dt. \tag{3}$$

Отметим, что константа в L^p-аналоге неравенства (2) при $s = 1$ также не является оптимальной в силу неравенства

$$\int_0^1 \frac{|u(t)|^2}{t} dt \leqslant \frac{4}{j_0^2} \int_0^1 |u'(t)|^2 dt, \tag{4}$$

где равенство в неравенстве достигается на функции $u(t) = C'\sqrt{t} J_1(j_0\sqrt{t})$, причем $j_0 \approx 2{,}404826$ — это наименьший положительный корень функции Бесселя нулевого порядка J_0, J_1 — функция Бесселя первого порядка (см. подробнее [14–17, 24]). Напомним, что функции Бесселя порядка ν определяется следующим образом:

$$J_\nu(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k+\nu}}{2^{2k+\nu} k! \Gamma(k+1+\nu)}, \quad t > 0, \quad \nu \geqslant 0;$$

здесь и далее через Γ обозначена гамма функция Эйлера:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-t} dt.$$

Легко заметить, что в вышеприведенных неравенствах получены нижние оценки различных норм производной функции. Другой вид неравенств, в которых также оценивается норма производной — это неравенство Опила (см. [19, 28]). Неравенства Опила мы будем использовать далее при доказательстве соответствующих теорем.

В данной статье мы обобщим и получим L^p-аналоги неравенства (1). Как следствие из доказанных L^p-аналогов можно получить неравенство (2) с лучшей константой и неравенство (4). Сначала мы оцениваем нормы производных снизу через выражения, зависящие от дробных интегралов Римана—Лиувилля. Затем доказываем следующие результаты.

Теорема 1. *Пусть $\rho > 0$, $s \in [0, \alpha)$, $\alpha \in (0, 1]$ и $p > 1$. Тогда для любой абсолютно непрерывной функции $f : [0, \rho] \to \mathbb{R}$, удовлетворяющей условиям $f(0) = 0$ и $f'(x)/x^{s(1-p)/p} \in L^p(0, \rho)$, выполнено неравенство*

$$\int_0^\rho \frac{dx}{x^s} \int_0^x \frac{|f(t)|^{p-1}|f'(t)|}{(x-t)^{1-\alpha}} dt \leqslant \frac{\rho^{(p-1)(1-s)-\alpha+s}}{p(1-s)^{p-1}(\alpha-s)} \int_0^\rho \frac{|f'(x)|^p}{x^{s(1-p)}} dx.$$

Теорема 2. *Пусть $\rho > 0$, $\alpha \in (0, 1]$, $s < 1$ и $p > 1$. Тогда для любой абсолютно непрерывной функции $f : [0, \rho] \to \mathbb{R}$, удовлетворяющей условиям $f(0) = 0$ и $f' \in L^2(0, \rho)$, справедливо следующее неравенство*:

$$\int_0^\rho \frac{dx}{x^\alpha} \int_0^x \frac{|f(t)||f'(t)|}{(x-t)^{1-\alpha}} dt \leqslant \left(\frac{1}{\alpha} - H(\alpha)\right) \frac{\rho^{1-s}}{2(1-s)} \int_0^\rho \frac{|f'(x)|^2}{x^{-s}} dx + \frac{2}{j_0^2} \int_0^\rho |f'(x)|^2 dx.$$

Здесь и далее

$$H(\alpha) = \int_0^1 \frac{1-t^\alpha}{1-t} dt \tag{5}$$

— гармоническое число, а $j_0 \approx 2{,}404826$ — наименьший положительный корень функции Бесселя нулевого порядка J_0.

Введем следующие обозначения:

$$M_{s,r,\alpha} = \max_{0\leqslant t\leqslant 1} \Big\{ t^{r-s} \big(B_1(s-\alpha,\alpha) - B_{t/\rho}(s-\alpha,\alpha) \big) \Big\}, \tag{6}$$

где

$$B_z(s-\alpha,\alpha) = \int\limits_0^z \tau^{s-\alpha-1}(1-\tau)^{\alpha-1} d\tau. \tag{7}$$

Обозначим через $(I^\alpha_{0+}\varphi)(x)$ дробный интеграл Римана—Лиувилля функции $\varphi \in L_1(0,\rho)$:

$$(I^\alpha_{0+}\varphi)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^x \frac{\varphi(t)}{(x-t)^{1-\alpha}} dt, \quad x > 0,$$

где $0 < \alpha < 1$. Отметим, что полную информацию о свойствах дробных интегралов можно найти в [10], а примеры неравенств типа Харди с дробными интегралами приведены в [10, 11, 23].

Справедлива следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть $\rho > 0$, $r > s$ и $\alpha \in (0,1]$. Тогда для любой функции $\varphi \in L_1(0,\rho)$ выполнено следующее неравенство*:

$$\int\limits_0^\rho \frac{\big|(I^\alpha_{0+}\varphi)(x)\big|}{x^s} dx \leqslant \frac{M(s,r,\alpha)}{\Gamma(\alpha)} \rho^{r-s} \int\limits_0^\rho \frac{|\varphi(x)|}{x^{r-\alpha}} dx,$$

где

$$M(s,r,\alpha) = \begin{cases} (\alpha-s)^{-1}, & \text{если } r=\alpha,\ 0 \leqslant s < \alpha, \\ \max\limits_{x\in[0,\rho]} \big\{ 1/\alpha - H(\alpha) + \log \rho/x \big\}, & \text{если } r > \alpha,\ s = \alpha, \\ M_{s,r,\alpha}, & \text{если } r > s > \alpha. \end{cases}$$

Отметим, что при $\alpha = 1$ теорема 1 дает в качестве следствия неравенство (2) с меньшей постоянной, теорема 2 — неравенство (4), а из теоремы 3 как следствие получим неравенство (1).

2. Доказательство основных результатов. После доказательства вспомогательных утверждений, мы докажем теоремы 1–3.

Для доказательства теоремы 1 нам понадобится следующая лемма.

Лемма 1. *Пусть $\rho > 0$, $s \in [0,\alpha)$ и $\alpha \in (0,1]$. Тогда для любой функции $\varphi \in L_1(0,\rho)$ выполнено следующее неравенство*:

$$\int\limits_0^\rho \frac{\big|(I^\alpha_{0+}\varphi)(x)\big|}{x^s} dx \leqslant \frac{\rho^{\alpha-s}}{\Gamma(\alpha)(\alpha-s)} \int\limits_0^\rho |\varphi(x)| dx.$$

Доказательство леммы 1. Используя определение оператора I^α_{0+} и меняя порядок интегрирования в кратном интеграле, получим

$$\int\limits_0^\rho \frac{\big|(I^\alpha_{0+}\varphi)(x)\big|}{x^s} dx \leqslant \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^\rho \frac{dx}{x^s} \int\limits_0^x \frac{|\varphi(t)|}{(x-t)^{1-\alpha}} dt = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^\rho |\varphi(t)| dt \int\limits_t^\rho \frac{dx}{x^s (x-t)^{1-\alpha}}.$$

Учитывая, что

$$\int\limits_t^\rho \frac{dx}{x^s(x-t)^{1-\alpha}} \leqslant \int\limits_t^\rho \frac{dx}{(x-t)^{s+1-\alpha}} = \frac{(\rho-t)^{\alpha-s}}{\alpha-s} \leqslant \frac{\rho^{\alpha-s}}{\alpha-s},$$

имеем утверждение леммы. □

Учитывая, что $\rho^{\alpha-s}/x^{\alpha-s} \geqslant 1$ при $s \in [0,\alpha)$, приходим к следующему утверждению.

Следствие 1. *Пусть* $s \in [0,\alpha)$ *и* $\alpha \in (0,1]$. *Тогда для любой функции* $\varphi/x^{\alpha-s} \in L_1(0,\rho)$ *выполнено следующее неравенство*:

$$\int\limits_0^\rho \frac{\left|(I_{0+}^\alpha\varphi)(x)\right|}{x^s}dx \leqslant \frac{\rho^{2(\alpha-s)}}{\Gamma(\alpha)(\alpha-s)}\int\limits_0^\rho \frac{|\varphi(x)|}{x^{\alpha-s}}dx.$$

Доказательство теоремы 1. Пусть g — монотонная положительная абсолютно непрерывная функция, причем $g(0)=0$. Рассмотрим функцию $\varphi(x)=g^{p-1}(x)g'(x)$. Применяя лемму 1 к функциям такого вида, имеем

$$\int\limits_0^\rho \frac{dx}{x^s}\left|\int\limits_0^x \frac{g^{p-1}(t)g'(t)}{(x-t)^{1-\alpha}}dt\right| \leqslant \frac{\rho^{\alpha-s}}{\alpha-s}\int\limits_0^\rho |g^{p-1}(x)g'(x)|dx.$$

Используя известное неравенство Опила (см. [28])

$$\int\limits_0^\rho |g(t)|^{p-1}|u'(t)|dt \leqslant \frac{1}{p}\frac{\rho^{(p-1)(1-s)}}{(1-s)^{p-1}}\int\limits_0^\rho \frac{|g'(t)|^p}{t^{s(1-p)}}dt,$$

получим неравенство теоремы 1 для абсолютно непрерывных положительных монотонных функций:

$$\int\limits_0^\rho \frac{dx}{x^s}\left|\int\limits_0^x \frac{g^{p-1}(t)g'(t)}{(x-t)^{1-\alpha}}dt\right| \leqslant \frac{\rho^{(p-1)(1-s)-\alpha+s}}{p(1-s)^{p-1}}\frac{1}{\alpha-s}\int\limits_0^\rho \frac{|g'(x)|^p}{x^{s(1-p)}}dx.$$

Пусть теперь

$$g(x)=\int\limits_0^x |f'(t)|dt, \quad f(x)=\int\limits_0^x f'(t)dt,$$

где f — произвольная абсолютно непрерывная функция. Тогда

$$|f(x)| \leqslant \int\limits_0^x |f'(t)|dt = g(x), \quad g'(x)=|f'(x)|.$$

Отсюда следует, что

$$\int\limits_0^\rho \frac{dx}{x^s}\int\limits_0^x \frac{|f(t)|^{p-1}|f'(t)|}{(x-t)^{1-\alpha}}dt \leqslant \int\limits_0^\rho \frac{dx}{x^s}\left|\int\limits_0^x \frac{g^{p-1}(t)g'(t)}{(x-t)^{1-\alpha}}dt\right| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{\rho^{(p-1)(1-s)-\alpha+s}}{p(1-s)^{p-1}}\frac{1}{\alpha-s}\int\limits_0^\rho \frac{|g'(x)|^p}{x^{s(1-p)}}dx = \frac{\rho^{(p-1)(1-s)-\alpha+s}}{p(1-s)^{p-1}}\frac{1}{\alpha-s}\int\limits_0^\rho \frac{|f'(x)|^p}{x^{s(1-p)}}dx.$$

Таким образом, имеем неравенство для произвольной абсолютно непрерывной функции. □

Если в теореме 1 положим $\alpha=1$, то получим следующее утверждение.

Следствие 2. *Пусть* $\rho>0$, $s\in[0,1)$ *и* $p>1$. *Тогда для любой абсолютно непрерывной функции* $f:[0,\rho]\to\mathbb{R}$, *удовлетворяющей условиям* $f(0)=0$ *и* $f'(x)/x^{s(1-p)/p}\in L^p(0,\rho)$, *выполнено неравенство*

$$\int\limits_0^\rho \frac{|f(x)|^p}{x^s}dx \leqslant \left(\frac{\rho^{1-s}}{1-s}\right)^p\int\limits_0^\rho \frac{|f'(x)|^p}{x^{s(1-p)}}dx.$$

Легко заметить, что константа в неравенстве следствия 2 меньше, чем в (2), но все же не является точной, так как замена переменных $t = x^{1-s}$ в неравенстве (см. [24])

$$\int_0^1 y^p(t)dt \leqslant \frac{1}{p-1}\left(\frac{p}{\pi}\sin\frac{\pi}{p}\right)^p \int_0^1 y'^p(t)dt$$

приведет к неравенству

$$\int_0^1 \frac{f^p(x)}{x^s}dx \leqslant \frac{1}{p-1}\left(\frac{p}{\pi(1-s)}\sin\frac{\pi}{p}\right)^p \int_0^1 \frac{f'^p(x)}{x^{s(1-p)}}dx.$$

Для доказательства теоремы 2 нам понадобится следующее вспомогательное утверждение.

Лемма 2. *Пусть* $\varphi \in L_1(0,\rho)$, $r > \alpha$ *и* $\alpha \in (0,1]$. *Тогда выполнено следующее неравенство*:

$$\int_0^\rho \frac{\left|(I_{0+}^\alpha\varphi)(x)\right|}{x^\alpha}dx \leqslant \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\rho |\varphi(x)|\left(\frac{1}{\alpha} - H(\alpha) + \log\frac{\rho}{x}\right)dx.$$

Доказательство леммы 2. Используя определение оператора I_{0+}^α и меняя порядок интегрирования в кратном интеграле, получим

$$\int_0^\rho \frac{\left|(I_{0+}^\alpha\varphi)(x)\right|}{x^\alpha}dx \leqslant \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\rho \frac{dx}{x^\alpha}\int_0^x \frac{|\varphi(t)|}{(x-t)^{1-\alpha}}dt = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\rho |\varphi(t)|\Phi(t)dt,$$

где

$$\Phi(t) = \int_t^\rho \frac{dx}{x^\alpha(x-t)^{1-\alpha}} = \int_t^\rho \frac{(x-t)^\alpha dx}{x^{\alpha+1}} + t\int_t^\rho \frac{dx}{x^{\alpha+1}(x-t)^{1-\alpha}}.$$

Вычислим каждое слагаемое по отдельности. Имеем

$$t\int_t^\rho \frac{dx}{x^{\alpha+1}(x-t)^{1-\alpha}} = \int_t^\rho \frac{d\frac{t}{x}}{(1-\frac{t}{x})^{1-\alpha}} = \frac{1}{\alpha}\left(1-\frac{t}{\rho}\right)^\alpha.$$

Несложно показать, что

$$\int_t^\rho \frac{(x-t)^\alpha dx}{x^{\alpha+1}} = \int_t^\rho \frac{(1-t/x)^\alpha\, dx}{x} = \int_t^\rho \frac{(1-t/x)^\alpha - 1}{x}dx + \log\frac{\rho}{x}.$$

Сделав в первом слагаемом последнего соотношения замену переменных $y = 1 - t/x$, получим

$$\int_t^\rho \frac{(x-t)^\alpha dx}{x^{\alpha+1}} = \int_0^{1-t/\rho} \frac{y^\alpha - 1}{1-y}dy + \log\frac{\rho}{x} = -\int_0^1 \frac{1-y^\alpha}{1-y}dy - \int_{1-t/\rho}^1 \frac{y^\alpha-1}{1-y}dy + \log\frac{\rho}{x} =$$

$$= -H(\alpha) + G(t) + \log\frac{\rho}{t},$$

где $H(\alpha)$ — гармоническое число (5) и

$$G(t) = -\int_{1-t/\rho}^1 \frac{y^\alpha - 1}{1-y}dy.$$

Таким образом,

$$\Phi(t) = -H(\alpha) + \frac{1}{\alpha}\left(1-\frac{t}{\rho}\right)^\alpha + G(t) + \log\frac{\rho}{t}.$$

Далее получим верхнюю оценку функции Φ. Непосредственными вычислениями можно показать, что при $t \in (0,1)$ выполнено следующее неравенство:

$$\left(\frac{1}{\alpha}\left(1-\frac{t}{\rho}\right)^{\alpha}+G(t)\right)'<0.$$

Следовательно,

$$\Phi(t) \leqslant \max_{t\in[0,\rho]}\left\{\frac{1}{\alpha}\left(1-\frac{t}{\rho}\right)^{\alpha}+G(t)-H(\alpha)+\log\frac{\rho}{t}\right\}=\frac{1}{\alpha}-H(\alpha)+\log\frac{\rho}{t}.$$

Отсюда следует утверждение леммы. □

Лемма 3. *Пусть $\rho>0$. Тогда для абсолютно непрерывной функции $f:[0,\rho]\to\mathbb{R}$, удовлетворяющей условиям $f(0)=0$ и $f'\in L^2(0,\rho)$, справедливо следующее точное неравенство*:

$$\int\limits_0^\rho |f'(t)f(t)|\log\frac{\rho}{t}dt \leqslant \frac{2}{j_0^2}\int\limits_0^\rho |f'(t)|^2dt,$$

где $j_0\approx 2{,}404826$ — это наименьший положительный корень функции Бесселя нулевого порядка J_0.

Доказательство леммы 3. При доказательстве этой леммы будем опираться на следующее неравенство, которое справедливо для всех абсолютно непрерывных функций f, обладающих свойством $f(0)=0$:

$$\int\limits_0^\rho |f'(t)f^{p-1}(t)|w(t)dt \leqslant \frac{1}{\lambda_0 p}\int\limits_0^\rho |f'(t)|^p\sigma(t)dt, \quad p>1, \tag{8}$$

где λ_0 — наименьшее собственное значение следующей граничной проблемы:

$$\frac{d}{dt}\left\{\sigma(t)u'^{p-1}(t)\right\}=\lambda w'(t)u^{p-1}(t), \tag{9}$$

причем равенство в (8) достигается на собственной функции, соответствующей собственному числу λ_0.

Рассмотрим дифференциальное уравнение (9) при $p=2$ для следующих весов:

$$w(t)=\log\frac{\rho}{t}, \quad \sigma(t)=\frac{4}{j_0^2}.$$

Получим следующую граничную задачу:

$$\frac{4}{j_0^2}u''(t)+\frac{1}{t}u(t)=0, \quad u(0)=0,$$

решением которой является функция

$$u(t)=\frac{2}{j_0}C_1\sqrt{x}J_1\left(j_0\sqrt{x}\right).$$

Напомним, что J_1 — это функция Бесселя первого порядка, а j_0 — это наименьший положительный корень функции Бесселя нулевого порядка J_0.

Используя (8), получим

$$\int\limits_0^\rho |f'(t)f(t)|\log\frac{1}{t}dt \leqslant \frac{2}{j_0^2}\int\limits_0^\rho |f'(t)|^2dt. \tag{10}$$

Обратим внимание, что в последнем неравенстве и в неравенстве (4) точность достигается на одних и тех же функциях.

Докажем теперь точность константы. Положим, что константу $2/j_0^2$ можно уменьшить. Допустим, что для произвольного $\varepsilon > 0$ выполнено неравенство

$$\int_0^\rho |f'(t)f(t)|\log\frac{1}{t}dt \leqslant \left(\frac{2}{j_0^2} - \frac{\varepsilon}{2}\right)\int_0^\rho |f'(t)|^2 dt.$$

Несложно показать (см., например, [1, 26]), что выполнено следующее неравенство:

$$\int_0^\rho \frac{|f(t)|^2}{t}dt \leqslant 2\int_0^\rho |f'(t)f(t)|\log\frac{\rho}{t}dt.$$

Тогда, применяя (10), получим

$$\int_0^\rho \frac{|f(t)|^2}{t}dt \leqslant 2\int_0^\rho |f'(t)f(t)|\log\frac{1}{t}dt \leqslant \left(\frac{4}{j_0^2} - \varepsilon\right)\int_0^\rho |f'(t)|^2 dt,$$

что противоречит точному неравенству (4). □

Следствие 3. *Наименьшим собственным значением граничной задачи*

$$u''(t) = -\lambda\frac{1}{t}u(t), \quad u(0) = 0,$$

является число

$$\lambda_0 = \frac{j_0^2}{4},$$

а собственная функция, соответствующая этому собственному значению, имеет вид

$$u_0(t) = \frac{2}{j_0}C_1\sqrt{x}J_1\left(j_0\sqrt{x}\right).$$

Учитывая, что $x^{r-\alpha} \leqslant \rho^{r-\alpha}$ при $r > \alpha$, получим следующее утверждение.

Следствие 4. *Пусть $\varphi \in L_1(0,\rho)$, $r > \alpha$ и $\alpha \in (0,1]$. Тогда выполнено следующее неравенство*:

$$\int_0^\rho \frac{\left|(I_{0+}^\alpha\varphi)(x)\right|}{x^\alpha}dx \leqslant \frac{\rho^{r-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\rho \frac{|\varphi(x)|}{x^{r-\alpha}}\left(\frac{1}{\alpha} - H(\alpha) + \log\frac{\rho}{x}\right)dx.$$

Доказательство теоремы 2. Пусть g — монотонная положительная абсолютно непрерывная функция, причем $g(0) = 0$. Применяя лемму 2 к функциям вида $\varphi(x) = g(x)g'(x)$, получим

$$\int_0^\rho \frac{dx}{x^\alpha}\left|\int_0^x \frac{g(t)g'(t)}{(x-t)^{1-\alpha}}dt\right| \leqslant \left(\frac{1}{\alpha} - H(\alpha)\right)\int_0^\rho |g(x)g'(x)|dx + \int_0^\rho |g(x)g'(x)|\log\frac{1}{x}dx.$$

Используя известное неравенство Опила (см. [28])

$$\int_0^\rho |g(t)|\,|g'(t)|dt \leqslant \frac{1}{2}\frac{\rho^{1-s}}{(1-s)}\int_0^\rho \frac{|g'(t)|}{t^{-s}}dt$$

и неравенство из леммы 3, имеем

$$\int_0^\rho \frac{dx}{x^\alpha}\left|\int_0^x \frac{g(t)g'(t)}{(x-t)^{1-\alpha}}dt\right| \leqslant \left(\frac{1}{\alpha} - H(\alpha)\right)\frac{\rho^{1-s}}{2(1-s)}\int_0^\rho \frac{|g'(x)|^2}{x^{-s}}dx + \frac{2}{j_0^2}\int_0^\rho |g'(x)|^2 dx.$$

Пусть теперь

$$g(x) = \int_0^x |f'(t)|dt, \quad f(x) = \int_0^x f'(t)dt,$$

где f — произвольная абсолютно непрерывная функция, причем $f(0)=0$. Тогда

$$|f(x)| \leqslant \int\limits_0^x |f'(t)|dt = g(x), \quad g'(x) = |f'(x)|.$$

Отсюда следует, что

$$\int\limits_0^\rho \frac{dx}{x^\alpha} \int\limits_0^x \frac{|f(t)|^{p-1}|f'(t)|}{(x-t)^{1-\alpha}}dt \leqslant \int\limits_0^\rho \frac{dx}{x^\alpha} \left| \int\limits_0^x \frac{g^{p-1}(t)g'(t)}{(x-t)^{1-\alpha}}dt \right| \leqslant$$
$$\leqslant \left(\frac{1}{\alpha} - H(\alpha)\right) \frac{\rho^{1-s}}{2(1-s)} \int\limits_0^\rho \frac{|g'(x)|^2}{x^{-s}}dx + \frac{2}{j_0^2} \int\limits_0^\rho |g'(x)|^2 dx =$$
$$= \left(\frac{1}{\alpha} - H(\alpha)\right) \frac{\rho^{1-s}}{2(1-s)} \int\limits_0^\rho \frac{|f'(x)|^2}{x^{-s}}dx + \frac{2}{j_0^2} \int\limits_0^\rho |f'(x)|^2 dx.$$

Таким образом, получаем неравенство для произвольной абсолютно непрерывной функции. □

Лемма 4. *Пусть* $\varphi \in L_1(0,\rho)$, $r > s > \alpha$ *и* $\alpha \in (0,1]$. *Тогда выполнено следующее неравенство*:

$$\int\limits_0^\rho \frac{\left|(I_{0+}^\alpha \varphi)(x)\right|}{x^s}dx \leqslant \frac{M_{s,r,\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^\rho \frac{|\varphi(x)|}{x^{r-\alpha}}dx,$$

где константа $M_{s,r,\alpha}$ *и бета-функция* B_z *определены соответственно равенствами* (6) *и* (7).

Доказательство леммы 4. Используя определение оператора I_{0+}^α и меняя порядок интегрирования в кратном интеграле, получим

$$\int\limits_0^\rho \frac{\left|(I_{0+}^\alpha \varphi)(x)\right|}{x^s}dx \leqslant \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^\rho \frac{dx}{x^s} \int\limits_0^x \frac{|\varphi(t)|}{(x-t)^{1-\alpha}}dt = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^\rho \frac{|\varphi(t)|}{t^{r-\alpha}}\Psi(t)dt,$$

где

$$\Psi(t) = t^{r-\alpha} \int\limits_t^\rho \frac{dx}{x^s(x-t)^{1-\alpha}}.$$

Непосредственными вычислениями можно показать, что

$$\int\limits_t^\rho \frac{dx}{x^s(x-t)^{1-\alpha}} = t^{\alpha-s} \left(\int\limits_0^1 \frac{\tau^{s-\alpha-1}d\tau}{(1-\tau)^{1-\alpha}} - \int\limits_0^{t/\rho} \frac{\tau^{s-\alpha-1}d\tau}{(1-\tau)^{1-\alpha}} \right) =$$
$$= t^{\alpha-s}\left(B_1(s-\alpha,\alpha) - B_{t/\rho}(s-\alpha,\alpha)\right),$$

где бета-функция B_z определена равенством (7). Таким образом, имеем

$$\Psi(t) = t^{r-s}\left(B_1(s-\alpha,\alpha) - B_{t/\rho}(s-\alpha,\alpha)\right) \leqslant M_{s,r,\alpha}$$

где константа $M_{s,r,\alpha}$ определена формулой (6). Лемма доказана. □

Отметим, что при $\alpha = 1$ удается вычислить значение $M_{s,r,\alpha}$:

$$M_{s,r,1} = \frac{\left((r-1)/(r-s)\right)^{(r-1)/(1-s)}}{r-s}.$$

Легко заметить, что $M_{s,r,1}$ такая же, как и в неравенстве (1).

Доказательство теоремы 3. Утверждение теоремы 3 получается из леммы 1, следствия 4 и леммы 4. □

Автор благодарит профессора Ф. Г. Авхадиева за ценные советы, рекомендации и помощь на всех стадиях написания этой работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Авхадиев Ф. Г.* Неравенства типа Харди в плоских и пространственных открытых множествах// Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова РАН. — 2006. — *255*. — С. 8–18.
2. *Авхадиев Ф. Г.* Геометрическое описание областей, для которых константа Харди равна 1/4// Изв. РАН. Сер. мат. — 2014. — *78*, № 5. — С. 3–26.
3. *Авхадиев Ф. Г.* Интегральные неравенства в областях гиперболического типа и их применения// Мат. сб. — 2015. — *206*, № 12. — С. 3–28.
4. *Авхадиев Ф. Г., Насибуллин Р. Г.* Неравенства типа Харди в произвольных областях с конечным внутренним радиусом// Сиб. мат. ж. — 2014. — *55*, № 2. — С. 239–250.
5. *Дубинский Ю. А.* Об одном неравенстве типа Харди и его приложениях// Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова РАН. — 2010. — *269*. — С. 112–132.
6. *Насибуллин Р. Г.* Обобщения неравенств типа Харди в форме Ю. А. Дубинского// Мат. заметки. — 2014. — *95*, № 1. — С. 109–122.
7. *Насибуллин Р. Г.* Об одном дискретном неравенстве типа Харди с логарифмическим весом// Владикавказ. мат. ж. — 2016. — *18*, № 2. — С. 67–75.
8. *Насибуллин Р. Г., Тухватуллина А. М.* Неравенства типа Харди с логарифмическими и степенными весами для специального семейства невыпуклых областей// Уфим. мат. ж. — 2013. — *5*, № 2. — С. 43–55.
9. *Прохоров Д. В., Степанов В. Д.* О весовых неравенствах Харди в смешанных нормах// Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова РАН. — 2013. — *283*. — С. 155–170.
10. *Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. — Минск: Наука и техника, 1987.
11. *Степанов В. Д.* Весовые неравенство типа Харди для дробных интегралов Римана—Лиувилля// Сиб. мат. ж. — 1990. — *31*, № 3. — С. 513–522.
12. *Adimurthi, Filippas S., Tertikas A.* On the best constant of Hardy Sobolev inequalities// Nonlin. Anal. — 2009. — *70*. — С. 2826–2833.
13. *Avkhadiev F. G.* Hardy–Rellich inequalities in domains of the Euclidean space// J. Math. Anal. Appl. — 2016. — *442*. — С. 469–484.
14. *Avkhadiev F. G., Wirths K.-J.* Unified Poincaré and Hardy inequalities with sharp constants for convex domains// Z. Angew. Math. Mech. — 2007. — *87*, № 8. — С. 632–642.
15. *Avkhadiev F. G., Wirths K.-J.* Weighted Hardy inequalities with sharp constants// Lobachevskii J. Math. — 2010. — *31*. — С. 1–7.
16. *Avkhadiev F. G., Wirths K.-J.* Sharp Hardy-type inequalities with Lamb's constants// Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin. — 2011. — *18*. — С. 723–736.
17. *Avkhadiev F. G., Wirths K.-J.* On the best constants for the Brezis–Marcus inequalities in balls// J. Math. Anal. Appl. — 2012. — *396*, № 2. — С. 473–480.
18. *Balinsky A. A., Laptev A. V.* Sobolev generalized Hardy inequality for the magnetic Dirichlet forms// J. Stat. Phys. — 2004. — *116*, №№ 1–4. — С. 507–521.
19. *Boyd D. W., Wong J. S. W.* An extension of Opial's inequality// J. Math. Anal. Appl. — 1967. — *19*, № 1. — С. 100–102.
20. *Brezis H., Marcus M.* Hardy's inequality revisited// Ann. Scu. Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4). — 1997. — *25*, №№ 1–2. — С. 217–237.
21. *Filippas S., Maz'ya V., Tertikas A.* Critical Hardy–Sobolev inequalities// J. Math. Pures Appl. — 2007. — *87*, № 9. — С. 37–56.
22. *Filippas S., Tertikas A., Tidblom J.* On the structure of Hardy–Sobolev–Maz'ya inequalities// J. Eur. Math. Soc. — 2009. — *11*, № 6. — С. 1165–1185.
23. *Hardy G. H., Littlewood J. E., Polya G.* Inequalities. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1934.
24. *Levin V.* Notes on inequalities. II. On a class of integral inequalities// Rec. Math., Moscou, N.S. 4. — 1938. — *309*. — С. 309–324.
25. *Maz'ya V.* Sobolev Spaces/ Springer Ser. Sov. Math. — Berlin: Springer-Verlag, 1985.

26. *Pachpatte B. G.* A note on certain inequalities related to Hardy's inequality// Indian J. Pure Appl. Math. — 1992. — *23*, № 11. — С. 773–776.
27. *Pinchover Y., Tintarev K.* On the Hardy–Sobolev–Maz'ya inequality and their generalizations// in: Sobolev Spaces in Mathematics/ Maz'ya, V., ed. — Int. Math. Ser. — 2009. — *1.* — С. 281–297.
28. *Shum D. T.* On a class of new inequalities// Trans. Am. Math. Soc. — 1975. — *204.* — С. 299–341.
29. *Talenti G.* Best constant in Sobolev inequality// Ann. Mat. Pura Appl. — 1976. — *110*, № 4. — С. 353–372.

Р. Г. Насибуллин
Казанский (Приволжский) федеральный университет
E-mail: NasibullinRamil@gmail.com

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 140 (2017). С. 78–87

УДК 517.983, 517.986

О τ-КОМПАКТНОСТИ ПРОИЗВЕДЕНИЯ τ-ИЗМЕРИМЫХ ОПЕРАТОРОВ, ПРИСОЕДИНЕННЫХ К ПОЛУКОНЕЧНОЙ АЛГЕБРЕ ФОН НЕЙМАНА

© 2017 г. **А. М. БИКЧЕНТАЕВ**

Аннотация. Пусть $\mathcal{M}$ — алгебра фон Неймана операторов в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, τ — точный нормальный полуконечный след на $\mathcal{M}$. Получены неравенства для перестановок произведений τ-измеримых операторов. Эти неравенства применены для получения новых субмажоризаций (по Харди—Литтлвуду—Полиа) произведений τ-измеримых операторов и вывода достаточного условия ортогональности некоторых неотрицательных τ-измеримых операторов. Установлены достаточные условия τ-компактности произведений самосопряженных τ-измеримых операторов. Получен критерий τ-компактности произведения неотрицательного τ-измеримого оператора с произвольным τ-измеримым оператором. Приведен пример, показывающий существенность неотрицательности одного из сомножителей. Установлен критерий элементарности произведения неотрицательных операторов из $\mathcal{M}$. Результаты являются новыми и для *-алгебры $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ всех ограниченных линейных операторов в $\mathcal{H}$, снабженной каноническим следом $\tau = \mathrm{tr}$.

Ключевые слова: гильбертово пространство, линейный оператор, алгебра фон Неймана, нормальный полуконечный след, τ-измеримый оператор, τ-компактный оператор, элементарный оператор, нильпотент, перестановка, субмажоризация.

AMS Subject Classification: 47C15, 46L51

Введение. Пусть $\mathcal{M}$ — алгебра фон Неймана операторов в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, τ — точный нормальный полуконечный след на $\mathcal{M}$. Произведения τ-измеримых операторов возникают в различных задачах теории некоммутативного интегрирования (например, в [24] при определении дуального по Кёте пространства; в неравенствах Голдена—Томпсона [3] и Паейрлса—Боголюбова [16] и др.). Достаточные условия интегрируемости произведений τ-измеримых операторов были найдены в [18]. Настоящая работа продолжает исследования автора (см. [2, 5]), в которых были установлены критерии τ-компактности произведений неотрицательных τ-измеримых операторов. Близкие вопросы изучались в [4, 12, 14, 31]. Компактные произведения операторов были исследованы в [20, 21, 23, 27–29, 32]. Приложения компактных (соответственно, τ-компактных) произведений операторов см., например, в [26] (соответственно, в [15]).

В разделе 3 получены неравенства для перестановок произведений τ-измеримых операторов. Эти неравенства применены для получения новых субмажоризаций (по Харди—Литтлвуду—Полиа) произведений τ-измеримых операторов и вывода достаточного условия ортогональности некоторых неотрицательных τ-измеримых операторов. В разделе 4 установлены достаточные условия τ-компактности произведений самосопряженных τ-измеримых операторов. Получен критерий τ-компактности произведения неотрицательного τ-измеримого оператора с произвольным τ-измеримым оператором. Приведен пример, показывающий существенность неотрицательности одного из сомножителей. Из известного свойства перестановок (см. п. (6) леммы 2.1) имеем: неотрицательный оператор $A \in \mathcal{M}$ элементарен тогда и только тогда, когда элементарен A^p для всех $p > 0$. В теореме 4.2 показано, что аналогичная картина имеет место и для произведения неотрицательных операторов $A, B \in \mathcal{M}$: элементарность оператора AB эквивалентна элементарности операторов A^pB^r для всех $p, r > 0$. Получены приложения полученных результатов к симметричным пространствам на $(\mathcal{M}, \tau)$. Результаты являются новыми и для *-алгебры $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ всех ограниченных линейных операторов в $\mathcal{H}$, снабженной каноническим следом $\tau = \mathrm{tr}$.

1. Обозначения, определения и предварительные сведения. Пусть $\mathcal{M}$ — алгебра фон Неймана операторов в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, $\mathcal{M}^{\mathrm{pr}}$ — решетка проекторов в $\mathcal{M}$, $\mathcal{M}^+$ — конус положительных элементов из $\mathcal{M}$. Пусть I — единица алгебры $\mathcal{M}$ и $\mathcal{M}_1 = \{X \in \mathcal{M} : \|X\| \leqslant 1\}$.

Отображение $\varphi : \mathcal{M}^+ \to [0, +\infty]$ называется *следом*, если

$$\varphi(X+Y) = \varphi(X) + \varphi(Y), \quad \varphi(\lambda X) = \lambda\varphi(X) \quad \forall X, Y \in \mathcal{M}^+,\ \lambda \geqslant 0$$

(при этом $0 \cdot (+\infty) \equiv 0$) и

$$\varphi(Z^*Z) = \varphi(ZZ^*) \quad \forall Z \in \mathcal{M}.$$

След φ называется *точным*, если $\varphi(X) > 0$ для всех $X \in \mathcal{M}^+$, $X \neq 0$; *полуконечным*, если

$$\varphi(X) = \sup\Big\{\varphi(Y) :\ Y \in \mathcal{M}^+,\ Y \leqslant X,\ \varphi(Y) < +\infty\Big\} \quad \forall X \in \mathcal{M}^+;$$

нормальным, если

$$X_i \nearrow X, \quad \text{т.е.} \quad (X_i, X \in \mathcal{M}^+) \ \Rightarrow\ \varphi(X) = \sup \varphi(X_i).$$

Оператор в $\mathcal{H}$ (не обязательно ограниченный или плотно определенный) называется *присоединенным к алгебре фон Неймана* $\mathcal{M}$, если он перестановочен с любым унитарным оператором из коммутанта $\mathcal{M}'$ алгебры $\mathcal{M}$. Самосопряженный оператор присоединен к $\mathcal{M}$ тогда и только тогда, когда все проекторы из его спектрального разложения единицы принадлежат $\mathcal{M}$.

Пусть τ — точный нормальный полуконечный след на $\mathcal{M}$. Замкнутый оператор X, присоединенный к $\mathcal{M}$, имеющий всюду плотную в $\mathcal{H}$ область определения $\mathcal{D}(X)$, называется *τ-измеримым*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такой $P \in \mathcal{M}^{\mathrm{pr}}$, что $P\mathcal{H} \subset \mathcal{D}(X)$ и $\tau(I-P) < \varepsilon$. Множество $\widetilde{\mathcal{M}}$ всех τ-измеримых операторов является *-алгеброй относительно перехода к сопряженному оператору, умножению на скаляр и операций сильного сложения и умножения, получаемых замыканием обычных операций (см. [11, 30]). Для семейства $\mathcal{L} \subset \widetilde{\mathcal{M}}$ обозначим через $\mathcal{L}^+$ и $\mathcal{L}^{\mathrm{sa}}$ его положительную и эрмитову части, соответственно. Частичный порядок в $\widetilde{\mathcal{M}}^{\mathrm{sa}}$, порожденный собственным конусом $\widetilde{\mathcal{M}}^+$, будем обозначать через $\leqslant$.

Если X — замкнутый плотно заданный линейный оператор, присоединенный к $\mathcal{M}$, и $|X| = \sqrt{X^*X}$, то спектральное разложение $P^{|X|}(\cdot)$ содержится в $\mathcal{M}$ и $X \in \widetilde{\mathcal{M}}$ тогда и только тогда, когда существует такое $\lambda \in \mathbb{R}$, что

$$\tau(P^{|X|}((\lambda, +\infty))) < +\infty.$$

Если $X \in \widetilde{\mathcal{M}}$ и $X = U|X|$ — полярное разложение X, то $U \in \mathcal{M}$ и $|X| \in \widetilde{\mathcal{M}}^+$. При этом, если

$$|X| = \int_0^\infty \lambda P^{|X|}(d\lambda)$$

— спектральное разложение, то $\tau(P^{|X|}((\lambda, +\infty))) \to 0$ при $\lambda \to +\infty$.

Обозначим через $\mu_t(X)$ *перестановку* оператора $X \in \widetilde{\mathcal{M}}$, т.е. невозрастающую непрерывную справа функцию $\mu(X) : (0, \infty) \to [0, \infty)$, заданную формулой

$$\mu_t(X) = \inf\Big\{\|XP\| :\ P \in \mathcal{M}^{\mathrm{pr}},\ \tau(I-P) \leqslant t\Big\}, \quad t > 0.$$

Множество τ-компактных операторов

$$\widetilde{\mathcal{M}}_0 = \Big\{X \in \widetilde{\mathcal{M}} :\ \mu_\infty(X) \equiv \lim_{t\to\infty} \mu_t(X) = 0\Big\}$$

является идеалом в $\widetilde{\mathcal{M}}$ (см. [33]). Множество элементарных операторов

$$\mathcal{F}(\mathcal{M}) = \Big\{X \in \mathcal{M} :\ \mu_t(X) = 0 \text{ для некоторого } t > 0\Big\}$$

является идеалом в $\mathcal{M}$. Если $\tau(I) < +\infty$, то $\widetilde{\mathcal{M}}_0 = \widetilde{\mathcal{M}}$.

Пусть m — линейная мера Лебега на $\mathbb{R}$. Ассоциированное с $(\mathcal{M}, \tau)$ некоммутативное L_p-пространство Лебега $(0 < p < \infty)$ может быть определено как

$$L_p(\mathcal{M}, \tau) = \left\{ X \in \widetilde{\mathcal{M}} : \ \mu(X) \in L_p(\mathbb{R}^+, m) \right\}$$

с F-нормой (нормой для $1 \leqslant p < \infty$)

$$\|X\|_p = \|\mu(X)\|_p, \quad X \in L_p(\mathcal{M}, \tau).$$

Имеем $\mathcal{F}(\mathcal{M}) \subset L_p(\mathcal{M}, \tau) \subset \widetilde{\mathcal{M}}_0$ для всех $0 < p < \infty$.

Для операторов $X, Y \in (L_1 + L_\infty)(\mathcal{M}, \tau)$ субмажоризация (или слабый спектральный порядок Харди—Литтлвуда—Полиа) $X \prec\prec Y$ означает, что

$$\int\limits_0^t \mu_s(X) ds \leqslant \int\limits_0^t \mu_s(Y) ds \quad \text{для всех } t > 0.$$

Для операторов $X, Y \in \widetilde{\mathcal{M}}$ будем рассматривать также их йорданово произведение $X \circ Y = \frac{1}{2}(XY + YX)$ и лиево произведение (коммутатор) $[X, Y] = XY - YX$. Оператор $X \in \widetilde{\mathcal{M}}$ называется *нормальным*, если $X^*X = XX^*$; *гипонормальным*, если $X^*X \geqslant XX^*$; *когипонормальным*, если X^* гипонормален; *квазинормальным*, если X перестановочен с X^*X, т.е. $X \cdot X^*X = X^*X \cdot X$. Каждый квазинормальный оператор $X \in \widetilde{\mathcal{M}}$ является гипонормальным (см. [8, теорема 2.9]).

Если $\mathcal{M} = \mathcal{B}(\mathcal{H})$ — $*$-алгебра всех ограниченных линейных операторов в $\mathcal{H}$ и $\tau = \mathrm{tr}$ — канонический след, то $\widetilde{\mathcal{M}}$ совпадает с $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, а $\widetilde{\mathcal{M}}_0$ и $\mathcal{F}(\mathcal{M})$ совпадают с идеалами компактных операторов и конечномерных операторов в $\mathcal{H}$ соответственно. Имеем

$$\mu_t(X) = \sum_{n=1}^{\infty} s_n(X) \chi_{[n-1, n)}(t), \quad t > 0,$$

где $\{s_n(X)\}_{n=1}^\infty$ — последовательность s-чисел оператора X (см. [9, с. 46]), χ_A — индикатор множества $A \subset \mathbb{R}$. Тогда пространство $L_p(\mathcal{M}, \tau)$ есть идеал Шаттена—фон Неймана $\mathfrak{S}_p$, $0 < p < \infty$.

Пусть (Ω, ν) — пространство с мерой и $\mathcal{M}$ — алгебра фон Неймана операторов умножения на функции из $L_\infty(\Omega, \nu)$ в пространстве $L_2(\Omega, \nu)$. Алгебра $\mathcal{M}$ не содержит ненулевых компактных операторов тогда и только тогда, когда мера ν не имеет атомов (см. [1, теорема 8.4]).

2. Леммы о τ-измеримых операторах.

Лемма 2.1 (см. [13, 25, 33]). *Пусть $X, Y \in \widetilde{\mathcal{M}}$. Имеют место следующие утверждения:*

(1) $\mu_t(X) = \mu_t(|X|) = \mu_t(X^*)$ *для всех* $t > 0$;
(2) *если* $|X| \leqslant |Y|$, *то* $\mu_t(X) \leqslant \mu_t(Y)$ *для всех* $t > 0$;
(3) *если* $A, B \in \mathcal{M}$, *то* $\mu_t(AXB) \leqslant \|A\| \|B\| \mu_t(X)$ *для всех* $t > 0$;
(4) $\mu_{s+t}(XY) \leqslant \mu_s(X)\mu_t(Y)$ *для всех* $s, t > 0$;
(5) $\mu_{s+t}(X + Y) \leqslant \mu_s(X) + \mu_t(Y)$ *для всех* $s, t > 0$;
(6) $\mu_t(|X|^p) = \mu_t(X)^p$ *для всех* $p > 0$ *и* $t > 0$;
(7) $\lim\limits_{t \to 0+} \mu_t(X) = \|X\|$, *если* $X \in \mathcal{M}$, *и* $\lim\limits_{t \to 0+} \mu_t(X) = \infty$, *если* $X \notin \mathcal{M}$.

Лемма 2.2 (см. [24, с. 720]). *Если $X, Y \in \widetilde{\mathcal{M}}^+$ и $Z \in \widetilde{\mathcal{M}}$, то из неравенства $X \leqslant Y$ следует, что $ZXZ^* \leqslant ZYZ^*$.*

Лемма 2.3. *Если $X, Y \in \widetilde{\mathcal{M}}$, то $|XY| = ||X|Y|$. В частности, если $X \in \mathcal{M}$ является изометрией ($X^*X = I$), то $|XY| = |Y|$.*

Доказательство. Имеем $|XY| = (Y^*X^*XY)^{1/2} = (Y^*|X|^2Y)^{1/2} = ||X|Y|$. □

Лемма 2.4 (см. [2, предложение]). *Если $X, Y \in \widetilde{\mathcal{M}}^+$, то $XY \in \widetilde{\mathcal{M}}_0 \Leftrightarrow X^{1/2}YX^{1/2} \in \widetilde{\mathcal{M}}_0 \Leftrightarrow Y^{1/2}XY^{1/2} \in \widetilde{\mathcal{M}}_0$.*

Лемма 2.5 (см. [4, теорема 1]). *Пусть $A \in \widetilde{\mathcal{M}}^+$, $B \in \widetilde{\mathcal{M}}^{\mathrm{sa}}$ и $-A \leqslant B \leqslant A$. Тогда существует такой унитарный оператор $S \in \mathcal{M}^{\mathrm{sa}}$, что $2|B| \leqslant A + SAS$.*

Напомним также (см. [7, теорема 1]), что существуют такие операторы $X \in \widetilde{\mathcal{M}}^{\mathrm{sa}}$ и $Y \in \widetilde{\mathcal{M}}^+$, что $B = XY + YX$, $A = X^2 + Y^2$. Примеры операторов $A \in \widetilde{\mathcal{M}}^+$, $B \in \widetilde{\mathcal{M}}^{\mathrm{sa}}$ с $-A \leqslant B \leqslant A$ см. в [17]. Из леммы 2.5 вытекает следующее утверждение.

Лемма 2.6 (см. [19, предложение 1.2]). *Если $A \in \widetilde{\mathcal{M}}^+$, $B \in \widetilde{\mathcal{M}}^{\mathrm{sa}}$ и $-A \leqslant B \leqslant A$, то $B \prec\prec A$.*

Лемма 2.7 (см. [12, 14, 31]). *Если $X \in \widetilde{\mathcal{M}}^+$, $Y \in \widetilde{\mathcal{M}}^{\mathrm{sa}}$ и $XY \in (L_1 + L_\infty)(\mathcal{M}, \tau)$, то $X^t Y X^{1-t} \prec\prec XY$ для всех $0 < t < 1$.*

Лемма 2.8 (см. [5, теорема 3.5]). *Пусть $X, Y \in \widetilde{\mathcal{M}}$, X гипонормален и Y когипонормален. Тогда $\mu_t(XY) \geqslant \mu_t(YX)$ для всех $t > 0$.*

3. Неравенства для перестановок τ-измеримых операторов. Пусть τ — точный нормальный полуконечный след на алгебре фон Неймана $\mathcal{M}$.

Теорема 3.1. *Пусть $A \in \widetilde{\mathcal{M}}$, $X_k, Y_k \in \widetilde{\mathcal{M}}^+$ и $X_k \leqslant Y_k$, $k = 1, 2$. Тогда перестановка*

$$\mu_t(X_1^{1/2} A X_2^{1/2}) \leqslant \mu_t(Y_1^{1/2} A Y_2^{1/2}) \quad \forall t > 0.$$

Доказательство. В силу леммы 2.2 имеем $A^* X_1 A \leqslant A^* Y_1 A$, поэтому в силу пп. (1), (2) и (6) леммы 2.1 и монотонности вещественной функции $\lambda \mapsto \lambda^{1/2}$ ($\lambda \geqslant 0$) для всех $t > 0$ получаем

$$\mu_t(X_1^{1/2} A) = \mu_t(A^* X_1 A)^{1/2} \leqslant \mu_t(A^* Y_1 A)^{1/2} = \mu_t(Y_1^{1/2} A).$$

Аналогично получаем

$$\mu_t(X_2^{1/2} B^*) \leqslant \mu_t(Y_2^{1/2} B^*)$$

для всех $B \in \widetilde{\mathcal{M}}$ и $t > 0$. Теперь в силу п. (1) леммы 2.1 имеем

$$\mu_t(B X_2^{1/2}) = \mu_t((X_2^{1/2} B^*)^*) \leqslant \mu_t((Y_2^{1/2} B^*)^*) = \mu_t(B Y_2^{1/2})$$

для всех $B \in \widetilde{\mathcal{M}}$ и $t > 0$. Заменив оператор A на $A X_2^{1/2}$ и оператор B на $Y_1^{1/2}$, получаем для всех $t > 0$ неравенства

$$\mu_t(X_1^{1/2} A X_2^{1/2}) \leqslant \mu_t(Y_1^{1/2} A X_2^{1/2}) \leqslant \mu_t(Y_1^{1/2} A Y_2^{1/2}),$$

что и требовалось. □

Предложение 3.1. *Если операторы $X, Y \in \widetilde{\mathcal{M}}$ обратимы с $X^{-1}, Y^{-1} \in \mathcal{M}_1$, то*

$$\mu_t(X^{-1} - Y^{-1}) \leqslant \mu_t(X - Y) \quad \forall t > 0.$$

Кроме того,

$$\mu_t(X^{-2} - Y^{-2}) \leqslant 2\mu_{t/2}(X - Y) \quad \forall t > 0.$$

Доказательство. Для всех обратимых $X, Y \in \widetilde{\mathcal{M}}$ имеем

$$X^{-1} - Y^{-1} = X^{-1}(Y - X)Y^{-1} = Y^{-1}(Y - X)X^{-1}.$$

Поэтому в силу пп. (3) и (1) леммы 2.1 для всех $t > 0$ получаем

$$\mu_t(X^{-1} - Y^{-1}) = \mu_t(X^{-1}(Y - X)Y^{-1}) \leqslant \|X^{-1}\| \|Y^{-1}\| \mu_t(Y - X) \leqslant \mu_t(Y - X) = \mu_t(X - Y).$$

Поскольку

$$\|X^{-1} + Y^{-1}\| \leqslant \|X^{-1}\| + \|Y^{-1}\| \leqslant 2,$$

$$X^{-2} - Y^{-2} = \frac{1}{2}\left((X^{-1} - Y^{-1})(X^{-1} + Y^{-1}) + (X^{-1} + Y^{-1})(X^{-1} - Y^{-1})\right),$$

неравенство

$$\mu_t(X^{-2} - Y^{-2}) \leqslant 2\mu_{t/2}(X - Y)$$

для всех $t > 0$ вытекает из пп. (3) и (5) леммы 2.1. □

Если оператор $X \in \widetilde{\mathcal{M}}$ обратим в $\widetilde{\mathcal{M}}$, то в силу п. (4) леммы 2.1 имеем
$$1 = \mu_{2t}(I) = \mu_{2t}(XX^{-1}) \leqslant \mu_t(X)\mu_t(X^{-1})$$
для всех $t \in (0, 2^{-1}\tau(I))$. Поэтому $X, X^{-1} \notin \widetilde{\mathcal{M}}_0$ при $\tau(I) = +\infty$.

Предложение 3.2. *Если $X \in \widetilde{\mathcal{M}}$ и $Y \in \mathcal{M}^{\mathrm{pr}}$, то*
$$\mu_t(YXY) \leqslant \min\{\mu_t(XY),\ \mu_t(X \circ Y)\} \quad \forall t > 0.$$

Доказательство. В силу п. (3) леммы 2.1 для всех $t > 0$ имеем
$$\mu_t(YXY) \leqslant \|Y\|\mu_t(XY) = \mu_t(XY),$$
$$2\mu_t(YXY) = \mu_t(Y(XY + YX)Y) \leqslant \|Y\|^2\mu_t(XY + YX) = \mu_t(XY + YX).$$
Предложение доказано. □

В частности, если
$$X \in \widetilde{\mathcal{M}}^+,$$
то
$$\mu_t(X^{1/2}YX^{1/2}) = \mu_t(YXY), \quad \mu_t(X^{1/2}YX^{1/2}) \leqslant \min\left\{\mu_t(XY),\ \mu_t(X \circ Y)\right\}$$
для всех $t > 0$. Заметим, что для $X, Y \in \widetilde{\mathcal{M}}^+$ неравенство $\mu_t(X^{1/2}YX^{1/2}) \leqslant \mu_t(XY)$ в общем случае не выполнено (см. [14, с. 575]).

Теорема 3.2. *Если $X, Y \in \widetilde{\mathcal{M}}$, то $\mu_t(XY) = \mu_t(|X||Y^*|)$ для всех $t > 0$.*

Доказательство. В силу леммы 2.3 и п. (1) леммы 2.1 для всех $t > 0$ получаем
$$\begin{aligned}\mu_t(XY) &= \mu_t(|XY|) = \mu_t(||X|Y|) = \mu_t(|X|Y) = \mu_t((|X|Y)^*) = \mu_t(Y^*|X|) = \\ &= \mu_t(|Y^*|X||) = \mu_t(||Y^*||X||) = \mu_t(|Y^*||X|) = \mu_t((|Y^*||X|)^*) = \\ &= \mu_t(|X||Y^*|).\end{aligned}$$
Теорема доказана. □

Следствие 3.1. *Если оператор $X \in \widetilde{\mathcal{M}}$ является нильпотентом порядка n и $m \geqslant n$, то $|X^{m-k}||X^{*k}| = 0$ для всех $k \in \{1, 2, \ldots, m-1\}$.*

Доказательство. По условию $X^n = 0 \neq X^{n-1}$. Имеем
$$0 = \mu_t(X^m) = \mu_t(X^{m-k}X^k) = \mu_t(|X^{m-k}||X^{*k}|)$$
для всех $m \geqslant n$ и $t > 0$. Поэтому $|X^{m-k}||X^{*k}| = 0$ для всех $k \in \{1, 2, \ldots, m-1\}$. □

Из теоремы 3.2 и леммы 2.7 вытекает следующее утверждение.

Следствие 3.2. *Имеем $|X|^t|Y^*||X|^{1-t} \prec\prec XY$ для всех $0 < t < 1$ и $X, Y \in \widetilde{\mathcal{M}}$.*

Следствие 3.3. *Пусть $X, Y \in \widetilde{\mathcal{M}}$, причем X гипонормален и Y когипонормален. Тогда $\mu_t(|X||Y^*|) \geqslant \mu_t(|X^*||Y|)$ для всех $t > 0$.*

Доказательство. В силу леммы 2.8 и п. (1) леммы 2.1 для всех $t > 0$ имеем
$$\mu_t(|X||Y^*|) = \mu_t(XY) \geqslant \mu_t(YX) = \mu_t(|Y||X^*|) = \mu_t((|Y||X^*|)^*) = \mu_t(|X^*||Y|). \tag{1}$$
Утверждение доказано. □

Следствие 3.4. *Пусть операторы $X, Y \in \widetilde{\mathcal{M}}$ нормальны. Тогда $\mu_t(|X||Y^*|) = \mu_t(|X^*||Y|)$ для всех $t > 0$.*

Доказательство. В силу [5, следствие 3.6] имеем равенство в (1). □

Теорема 3.3. *Пусть $X, Y \in \widetilde{\mathcal{M}}$, причем $XY \in (L_1 + L_\infty)(\mathcal{M}, \tau)$, X гипонормален и Y когипонормален. Тогда*

$$\lambda XY + (1-\lambda)YX \prec\prec XY \quad \forall 0 \leqslant \lambda \leqslant 1.$$

В частности, $X \circ Y \prec\prec XY$.

Доказательство. Для всех $t > 0$ в силу леммы 2.8 и положительной однородности и субаддитивности функционала

$$\Phi(A, t) = \int\limits_0^t \mu_s(A)ds, \quad A \in (L_1 + L_\infty)(\mathcal{M}, \tau)$$

получаем

$$\int\limits_0^t \mu_s(\lambda XY + (1-\lambda)YX)ds \leqslant \lambda \int\limits_0^t \mu_s(XY)ds + (1-\lambda)\int\limits_0^t \mu_s(YX)ds \leqslant \int\limits_0^t \mu_s(XY)ds.$$

Теорема доказана. □

Из теорем 3.2 и 3.3 вытекает следующее утверждение.

Следствие 3.5. *В условиях теоремы* 3.3 *имеем* $\lambda XY + (1-\lambda)YX \prec\prec |X||Y^*|$.

Предложение 3.3. *Если $X, Y, A \in (L_1 + L_\infty)(\mathcal{M}, \tau)$ и $X, X - A \prec\prec Y$, то $X - \lambda A \prec\prec Y$ для всех $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$.*

Доказательство. Утверждение вытекает из положительной однородности и субаддитивности функционала

$$\Phi(A, t) = \int\limits_0^t \mu_s(A)ds, \quad A \in (L_1 + L_\infty)(\mathcal{M}, \tau),$$

и представления $X - \lambda A = (1-\lambda)X + \lambda(X - A)$. В частности, если $X, A \in \widetilde{\mathcal{M}}$ и $X - A \prec\prec X$, то $X - \lambda A \prec\prec X$ для всех $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$. □

Предложение 3.4. *Если $X, Y \in \widetilde{\mathcal{M}}^{\mathrm{sa}}$ и $X^2 + Y^2 \in (L_1 + L_\infty)(\mathcal{M}, \tau)$, то*

$$X \circ Y \prec\prec \frac{1}{2}(X^2 + Y^2), \quad [X, Y] \prec\prec X^2 + Y^2.$$

Доказательство. Поскольку $(X \pm Y)^2 \geqslant 0$ и $(X \pm iY)(X \mp iY) \geqslant 0$ с $i \in \mathbb{C}$, $i^2 = -1$, имеем

$$-X^2 - Y^2 \leqslant XY + YX \leqslant X^2 + Y^2, \quad -X^2 - Y^2 \leqslant i(XY - YX) \leqslant X^2 + Y^2.$$

Теперь утверждения вытекают из леммы 2.6. □

Поскольку $XY = X \circ Y + \frac{1}{2}[X, Y]$, из предложения 3.4 получаем следующее утверждение.

Следствие 3.6. *Если $X, Y \in \widetilde{\mathcal{M}}^{\mathrm{sa}}$ и $X^2 + Y^2 \in (L_1 + L_\infty)(\mathcal{M}, \tau)$, то $XY \prec\prec X^2 + Y^2$.*

Для широкого класса операторов $X, Y \in \widetilde{\mathcal{M}}^{\mathrm{sa}}$ имеем $\mu_t(XY) \leqslant \mu_t\left(\frac{X^2+Y^2}{2}\right)$ для всех $t > 0$ (см. [10, лемма 3.4]).

4. О τ-компактности произведения τ-измеримых операторов.

Теорема 4.1. *Пусть операторы $X, Y \in \widetilde{\mathcal{M}}^{\mathrm{sa}}$ таковы, что*

$$XY + YXY \in \widetilde{\mathcal{M}}_0, \quad Y^2 + Y \geqslant \lambda |Y|^p$$

с некоторыми $0 < \lambda, p < +\infty$. Тогда $XY \in \widetilde{\mathcal{M}}_0$.

Доказательство. Имеем $XY = YX + A$ с
$$A = XY - YX = XY + YXY - (XY + YXY)^* \in \widetilde{\mathcal{M}}_0.$$
Тогда
$$XY + XY^2 - AY = XY + (XY - A)Y = XY + YXY \in \widetilde{\mathcal{M}}_0$$
и поскольку $AY \in \widetilde{\mathcal{M}}_0$, имеем
$$XY + XY^2 \in \widetilde{\mathcal{M}}_0.$$
Следовательно,
$$X(Y + Y^2)X = (XY + XY^2)X \in \widetilde{\mathcal{M}}_0.$$
В силу леммы 2.2 и п. (2) леммы 2.1 имеем
$$X \cdot |Y|^p \cdot X \in \widetilde{\mathcal{M}}_0.$$
Поскольку
$$\mu_t(X|Y|^{p/2})^2 = \mu_t((X|Y|^{p/2})^*)^2 = \mu_t(|Y|^{p/2}X)^2 = \mu_t(||Y|^{p/2}X|)^2 = \mu_t(||Y|^{p/2}X|^2) = \\ = \mu_t(X|Y|^pX) \to 0 \quad \text{при } t \to +\infty,$$
получаем
$$X|Y|^{p/2} \in \widetilde{\mathcal{M}}_0.$$
Поскольку
$$|X \cdot |Y|^{p/2}| = ||X| \cdot |Y|^{p/2}|$$
в силу леммы 2.3, имеем $|X| \cdot |Y|^{p/2} \in \widetilde{\mathcal{M}}_0$. Поэтому
$$|X| \cdot |Y| \in \widetilde{\mathcal{M}}_0$$
в силу теоремы 4.1 (см. [5]). Пусть $X = U|X|$ и $Y = V|Y|$ — полярные разложения операторов X и Y. Тогда $Y = |Y|V$ и $XY = U \cdot |X||Y| \cdot V \in \widetilde{\mathcal{M}}_0$. Теорема доказана. □

Следствие 4.1. *Пусть операторы $X, Y \in \widetilde{\mathcal{M}}^{\mathrm{sa}}$ таковы, что*
$$XY - YXY \in \widetilde{\mathcal{M}}_0, \quad Y^2 - Y \geqslant \lambda|Y|^p$$
с некоторыми $0 < \lambda, p < +\infty$. Тогда $XY \in \widetilde{\mathcal{M}}_0$.

Доказательство. Для операторов $X_1 = -X$ и $Y_1 = -Y$ выполнены все условия теоремы 4.1, причем $X_1Y_1 = XY$. □

Предложение 4.1. *Для операторов $X \in \widetilde{\mathcal{M}}$ и $Y \in \widetilde{\mathcal{M}}^+$ следующие условия эквивалентны:*
(i) $XY \in \widetilde{\mathcal{M}}_0$;
(ii) $XYX^* \in \widetilde{\mathcal{M}}_0$.

Доказательство. (ii)⇒(i). В силу пп. (1) и (6) леммы 2.1 имеем
$$\mu_t(XY^{1/2})^2 = \mu_t((XY^{1/2})^*)^2 = \mu_t(Y^{1/2}X^*)^2 = \mu_t(|Y^{1/2}X^*|)^2 = \mu_t(|Y^{1/2}X^*|^2) = \\ = \mu_t(XYX^*) \to 0 \quad \text{при } t \to +\infty.$$
Поэтому $XY^{1/2} \in \widetilde{\mathcal{M}}_0$ и $XY = XY^{1/2} \cdot Y^{1/2} \in \widetilde{\mathcal{M}}_0$. □

Следствие 4.2. *Для операторов $X, Y \in \widetilde{\mathcal{M}}$ имеем эквивалентности*
$$XY \in \widetilde{\mathcal{M}}_0 \quad \Leftrightarrow \quad |X||Y^*| \in \widetilde{\mathcal{M}}_0 \quad \Leftrightarrow \quad |X|^{1/2}|Y^*||X|^{1/2} \in \widetilde{\mathcal{M}}_0 \quad \Leftrightarrow \quad |Y^*|^{1/2}|X||Y^*|^{1/2} \in \widetilde{\mathcal{M}}_0.$$

Следствие 4.3. *Пусть $X \in \widetilde{\mathcal{M}}^{\mathrm{sa}}$ и $Y \in \widetilde{\mathcal{M}}$. Если $XY \in \widetilde{\mathcal{M}}_0$, то $|Y^*|^{1/2}\, X\, |Y^*|^{1/2} \in \widetilde{\mathcal{M}}_0$.*

Доказательство. Пусть $X = X_+ - X_-$ — разложение Жордана оператора $X \in \widetilde{\mathcal{M}}^{\mathrm{sa}}$ с $X_+, X_- \in \widetilde{\mathcal{M}}^+$ и $X_+X_- = 0$. Тогда $|X| = X_+ + X_-$ и

$$|Y^*|^{1/2}\, X_\pm\, |Y^*|^{1/2} \leqslant |Y^*|^{1/2}\, |X|\, |Y^*|^{1/2}$$

в силу леммы **??**. Если $XY \in \widetilde{\mathcal{M}}_0$, то $|Y^*|^{1/2}\, |X|\, |Y^*|^{1/2} \in \widetilde{\mathcal{M}}_0$ в силу следствия 4.2. Теперь в силу п. 2) леммы 2.1 имеем

$$|Y^*|^{1/2}\, X_\pm\, |Y^*|^{1/2} \in \widetilde{\mathcal{M}}_0^+,$$

тем самым

$$|Y^*|^{1/2}\, X\, |Y^*|^{1/2} = |Y^*|^{1/2}\, X_+\, |Y^*|^{1/2} - |Y^*|^{1/2}\, X_-\, |Y^*|^{1/2} \in \widetilde{\mathcal{M}}_0.$$

Утверждение доказано. □

Пример 4.1. Условие $X, Y \in \widetilde{\mathcal{M}}^+$ существенно в лемме 2.4, а условие $Y \in \widetilde{\mathcal{M}}^+$ существенно в предложении 4.1. Снабдим алгебру фон Неймана $\mathcal{M} = \bigoplus\limits_{n=1}^{\infty} \mathbb{M}_2(\mathbb{C})$ точным нормальным полуконечным следом $\tau = \bigoplus\limits_{n=1}^{\infty} \mathrm{tr}_2$ и положим

$$X = \bigoplus_{n=1}^{\infty} \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}, \quad Y = \bigoplus_{n=1}^{\infty} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Тогда $X \in \mathcal{M}^{\mathrm{pr}}$, $Y \in \mathcal{M}^{\mathrm{sa}}$ и $X^{1/2}YX^{1/2} = 0 \in \widetilde{\mathcal{M}}_0$, но операторы

$$XY = \oplus_{n=1}^{\infty} \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}, \quad X \circ Y = \oplus_{n=1}^{\infty} \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix} \notin \widetilde{\mathcal{M}}_0.$$

Пример 4.2 (theorem on lifting of idempotents; см. [22, Proposition 7]). Пусть $\mathcal{M} = \mathcal{B}(\mathcal{H})$ и $\tau = \mathrm{tr}$ — канонический след, операторы $X \in \mathcal{M}$ и $Y = I - X$ таковы, что $XY \in \widetilde{\mathcal{M}}_0$. Тогда существует представление $X = P + Z$, где $P = P^2 \in \mathcal{M}$ и $Z \in \widetilde{\mathcal{M}}_0$.

Теорема 4.2. *Пусть $X, Y \in \mathcal{M}^+$, $n \in \mathbb{N}$, и $p_k > 0$, $q_k > 0$, $r > 0$, $k = 1, \ldots, n$. Тогда следующие условия эквивалентны*:

(i) $XY \in \mathcal{F}(\mathcal{M})$;
(ii) $X^{p_1}Y^{q_1} \cdots X^{p_n}Y^{q_n} \in \mathcal{F}(\mathcal{M})$;
(iii) $X^{p_1}Y^{q_1} \cdots X^{p_n}Y^{q_n}X^r \in \mathcal{F}(\mathcal{M})$.

Доказательство. (i)$\Longrightarrow$(ii), (iii). Имеем $XYX \in \mathcal{F}(\mathcal{M})$. В силу пп. (1) и (6) леммы 2.1 получаем

$$\mu_t(XY^{1/2}) = \mu_t(XYX)^{1/2} \quad \forall t > 0;$$

поэтому

$$XY^{1/2} \in \mathcal{F}(\mathcal{M}).$$

Теперь

$$Y^{1/2}XY^{1/2} \in \mathcal{F}(\mathcal{M}).$$

В силу пп. (1) и (6) леммы 2.1 имеем

$$\mu_t(X^{1/2}Y^{1/2}) = \mu_t(Y^{1/2}XY^{1/2})^{1/2} \quad \forall t > 0;$$

поэтому

$$X^{1/2}Y^{1/2} \in \mathcal{F}(\mathcal{M}).$$

Продолжая такой процесс, получаем

$$X^{2^{-m}}Y^{2^{-m}} \in \mathcal{F}(\mathcal{M})$$

Выберем такое m, что $2^{-m} < \min\{p_1, q_1\}$. Тогда

$$X^{p_1}Y^{q_1} = X^{p_1 - 2^{-m}} \cdot X^{2^{-m}}Y^{2^{-m}} \cdot Y^{q_1 - 2^{-m}} \in \mathcal{F}(\mathcal{M}).$$

Импликации (ii)$\Longrightarrow$(i) и (iii)$\Longrightarrow$(i) проверяются дословным повторением соответствующих рассуждений доказательства теоремы 4.1 (см. [5]). □

Теорема 4.3. *Пусть операторы* $X, Y \in \mathcal{M}^{\mathrm{sa}}$ *таковы, что* $XY + YXY \in \mathcal{F}(\mathcal{M})$ *и* $Y^2 + Y \geqslant \lambda|Y|^p$ *с некоторыми* $0 < \lambda, p < +\infty$. *Тогда* $XY \in \mathcal{F}(\mathcal{M})$.

Доказательство. Дословным повторением рассуждений доказательства теоремы 4.1 получаем $X|Y|^{p/2} \in \mathcal{F}(\mathcal{M})$. Пусть $X = U|X|$ и $Y = V|Y|$ — полярные разложения операторов X и Y. Тогда $U, V \in \mathcal{M}^{\mathrm{sa}}$ и $UX = |X|$, $Y = |Y|V$. Так как

$$|X||Y|^{p/2} = UX|Y|^{p/2} \in \mathcal{F}(\mathcal{M}),$$

то $|X||Y| \in \mathcal{F}(\mathcal{M})$ в силу теоремы 4.2. Поэтому $XY = U \cdot |X||Y| \cdot V \in \mathcal{F}(\mathcal{M})$. Теорема доказана. □

Следствие 4.4. *Пусть операторы* $X, Y \in \mathcal{M}^{\mathrm{sa}}$ *таковы, что* $XY - YXY \in \mathcal{F}(\mathcal{M})$ *и* $Y^2 - Y \geqslant \lambda|Y|^p$ *с некоторыми* $0 < \lambda, p < +\infty$. *Тогда* $XY \in \mathcal{F}(\mathcal{M})$.

Доказательство. Для операторов $X_1 = -X$ и $Y_1 = -Y$ выполнены все условия теоремы 4.3, причем $X_1Y_1 = XY$. □

Аналогично предложению 4.1 доказывается следующее утверждение.

Предложение 4.2. *Для операторов* $X \in \mathcal{M}$ *и* $Y \in \mathcal{M}^+$ *следующие условия эквивалентны*:

(i) $XY \in \mathcal{F}(\mathcal{M})$;
(ii) $XYX^* \in \mathcal{F}(\mathcal{M})$.

Рассмотренные в примере 4.1 операторы показывают, что условие положительности оператора $Y \in \mathcal{M}$ существенно в предложении 4.2.

Предложение 4.3. *Пусть оператор* $X \in \widetilde{\mathcal{M}}$ *квазинормален и* $X^n = X$ *для некоторого натурального числа* $n \geqslant 2$. *Тогда* $X \in \mathcal{M}_1$ *и следующие условия эквивалентны*:

(i) $X \in \mathcal{F}(\mathcal{M})$;
(ii) $X \in \widetilde{\mathcal{M}}_0$.

Доказательство. Имеем $\mu_t(X) = \mu_t(X^n) = \mu_t(X)^n$ для всех $t > 0$ в силу [18, теорема 2.4]. Поэтому $\mu_t(X) \in \{0, 1\}$ для всех $t > 0$ и $X \in \mathcal{M}_1$ в силу п. (7) леммы 2.1. Остальное очевидно. □

Заметим, что если $X \in \widetilde{\mathcal{M}}$ с $X^n = X$ для некоторого натурального числа $n \geqslant 2$ и $X \notin \widetilde{\mathcal{M}}_0$, то $\mu_t(X) \geqslant 1$ для всех $t > 0$ в силу [6, лемма 4.8]. Линеал $\mathcal{E}$ в $\widetilde{\mathcal{M}}$ называется *симметричным пространством на* $(\mathcal{M}, \tau)$, если из $X \in \mathcal{E}$, $Y \in \widetilde{\mathcal{M}}$ и $\mu(Y) \leqslant \mu(X)$ следует, что $Y \in \mathcal{E}$. Таковы, например, $\mathcal{M}$, $\mathcal{F}(\mathcal{M})$, $\widetilde{\mathcal{M}}_0$, $(L_1 + L_\infty)(\mathcal{M}, \tau)$ и $L_p(\mathcal{M}, \tau)$ при $0 < p < +\infty$. Если $X \in \widetilde{\mathcal{M}}$ и натуральное число $n \geqslant 2$, то в силу теоремы 3.2 имеем

$$\mu_t(X^n) = \mu_t(X^{n-k}X^k) = \mu_t(|X^{n-k}||X^{*k}|)$$

для всех $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ и $t > 0$. Поэтому $X^n \in \mathcal{E} \Leftrightarrow |X^{n-k}||X^{*k}| \in \mathcal{E}$ для всех $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Антоневич А. Б.* Линейные функциональные уравнения. Операторный подход. — Минск, 1988.
2. *Бикчентаев А. М.* Об одном свойстве L_p-пространств на полуконечных алгебрах фон Неймана// Мат. заметки. — 1998. — *64*, № 2. — С. 185–190.
3. *Бикчентаев А. М.* Перестановочность проекторов и характеризация следа на алгебрах фон Неймана. II// Мат. заметки. — 2011. — *89*, № 4. — С. 483–494.
4. *Бикчентаев А. М.* Оператор блочного проектирования в нормированных идеальных пространствах измеримых операторов// Изв. вузов. Сер. мат. — 2012. — *2*. — С. 86–91.
5. *Бикчентаев А. М.* О нормальных τ-измеримых операторах, присоединенных к полуконечной алгебре фон Неймана// Мат. заметки. — 2014. — *96*, № 3. — С. 350–360.
6. *Бикчентаев А. М.* К теории τ-измеримых операторов, присоединенных к полуконечной алгебре фон Неймана// Мат. заметки. — 2015. — *98*, № 3. — С. 337–348.
7. *Бикчентаев А. М.* Об операторно монотонных и операторно выпуклых функциях// Изв. вузов. Сер. мат. — 2016. — *5*. — С. 70–74.

8. *Бикчентаев А. М.* Об идемпотентных τ-измеримых операторах, присоединенных к алгебре фон Неймана// Мат. заметки. — 2016. — *100*, № 4. — С. 492–503.
9. *Гохберг И. Ц., Крейн М. Г.* Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов. — М.: Наука, 1965.
10. *Дауитбек Д., Токмагамбетов Н. Е., Туленов К. С.* Коммутаторные неравенства, связанные с полярными разложениями τ-измеримых операторов// Изв. вузов. Сер. мат. — 2014. — *7*. — С. 56–62.
11. *Сигал И. Е.* Некоммутативное обобщение абстрактного интегрирования// Математика (сб. пер.). — 1962. — *6*, № 1. — С. 65–132.
12. *Сукочев Ф. А.* О гипотезе А. М. Бикчентаева// Изв. вузов. Сер. мат. — 2012. — *6*. — С. 67–70.
13. *Bikchentaev A. M.* On noncommutative function spaces// Trans. Am. Math. Soc. (2). — 1992. — *154*. — C. 179–187.
14. *Bikchentaev A. M.* Majorization for products of measurable operators// Int. J. Theor. Phys. — 1998. — *37*, № 1. — C. 571–576.
15. *Bikchentaev A. M.* The continuity of multiplication for two topologies associated with a semifinite trace on von Neumann algebra// Lobachevskii J. Math. — 2004. — *14*. — C. 17–24.
16. *Bikchentaev A. M.* The Peierls–Bogoliubov inequality in C^*-algebras and characterization of tracial functionals// Lobachevskii J. Math. — 2011. — *32*, № 3. — C. 175–179.
17. *Bikchentaev A. M.* On Hermitian operators X and Y meeting the condition $-Y \leqslant X \leqslant Y$// Lobachevskii J. Math. — 2013. — *34*, № 3. — C. 227–233.
18. *Bikchentaev A. M.* Integrable products of measurable operators// Lobachevskii J. Math. — 2016. — *37*, № 4. — C. 397–403.
19. *Chilin V. I., Sukochev F. A.* Weak convergence in noncommutative symmetric spaces// J. Operator Theory. — 1994. — *31*, № 1. — C. 35–65.
20. *Chu C.* Compact product of Hankel and Toeplitz operators on the Hardy space// Indiana Univ. Math. J. — 2015. — *64*, № 4. — C. 973–982.
21. *Čučković Ž., Şahutoğlu S.* Compactness of products of Hankel operators on the polydisk and some product domains in $\mathbb{C}^2$// J. Math. Anal. Appl. — 2010. — *371*, № 1. — C. 341–346.
22. *De La Harpe P.* Initiation à l'algèbre de Calkin// Lect. Notes Math. — Berlin: Springer-Verlag, 1979. — *725*. — C. 180–219.
23. *Ding X. H.* Compact product of Toeplitz operators on the polydisk// Acta Math. Sinica (Chin. Ser.). — 2005. — *48*, № 3. — C. 493–498.
24. *Dodds P. G., Dodds T. K.-Y., de Pagter B.* Noncommutative Köthe duality// Trans. Amer. Math. Soc. — 1993. — *339*, № 2. — C. 717–750.
25. *Fack T., Kosaki H.* Generalized s-numbers of τ-measurable operators// Pac. J. Math. — 1986. — *123*, № 2. — C. 269–300.
26. *Feshchenko I. S.* On the closedness of the sum of ranges of operators A_k with almost compact products $A_i^* A_j$// J. Math. Anal. Appl. — 2014. — *416*, № 1. — C. 24–35.
27. *Flores J., Tradacete P., Troitsky V. G.* Disjointly homogeneous Banach lattices and compact products of operators// J. Math. Anal. Appl. — 2009. — *354*, № 2. — C. 657–663.
28. *Gu C.* Zero or compact products of several Hankel operators/// Integral Equations Operator Theory. — 2002. — *43*, № 3. — C. 298–312.
29. *Lee Y. J., Na K.* Compact products of Toeplitz operators on the Dirichlet space of the unit ball// J. Math. Anal. Appl. — 2013. — *401*, № 2. — C. 654–658.
30. *Nelson E.* Notes on non-commutative integration// J. Funct. Anal. — 1974. — *15*, № 2. — C. 103–116.
31. *Sukochev F. A.* On a conjecture of A. Bikchentaev// Proc. Symp. Pure Math. — Providence, Rhode Island: Am. Math. Soc., 2013. — *87*. — C. 327–339.
32. *Xia D., Zheng D.* Compact products of Hankel operators Integral Equations Operator Theory. — 2000. — *38*, № 3. — C. 357–375.
33. *Yeadon F. J.* Non-commutative L^p-spaces// Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. — 1975. — *77*, № 1. — C. 91–102.

А. М. Бикчентаев

Казанский (Приволжский) федеральный университет

E-mail: `Airat.Bikchentaev@kpfu.ru`

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 140 (2017). С. 88–118

УДК 517.982, 517.983

СЛУЧАЙНЫЕ БЛУЖДАНИЯ И МЕРЫ НА ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ, ИНВАРИАНТНЫЕ ОТНОСИТЕЛЬНО СДВИГОВ И ПОВОРОТОВ

© 2017 г. **В. Ж. САКБАЕВ**

Аннотация. Изучаются случайные блуждания в гильбертовом пространстве H и представления с их помощью решений задач Коши для дифференциальных уравнений, начальными условиями которых являются числовые функции на гильбертовом пространстве H. Приведены примеры таких представлений решений различных эволюционных уравнений в случае конечномерного пространства H. Для реализации таких представлений в бесконечномерном гильбертовом пространстве исследуются меры на гильбертовом пространстве, инвариантные относительно сдвигов. Согласно теореме А. Вейля не существует меры Лебега на бесконечномерном гильбертовом пространстве. В статье исследован конечно-аддитивный аналог меры Лебега — инвариантная относительно сдвигов и поворотов в гильбертовом пространстве H неотрицательная конечно аддитивная мера λ, определенная на минимальном кольце подмножеств бесконечномерного гильбертова пространства H, содержащем все бесконечномерные прямоугольники, произведения длин сторон которых сходятся абсолютно. Рассмотрены также конечно-аддитивные аналоги меры Лебега на пространствах l_p, $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Определено гильбертово пространство $\mathcal{H}$ комплекснозначных функций на гильбертовом пространстве H, квадратично интегрируемых по инвариантной относительно сдвигов мере λ. Получены представления решений задачи Коши для уравнения диффузии в пространстве H и уравнения Шредингера с координатным пространством H с помощью итераций математических ожиданий операторов случайного сдвига в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$.

Ключевые слова: конечно-аддитивная мера, инвариантная мера на группе, случайное блуждание, уравнение диффузии, задача Коши, теорема Чернова.

AMS Subject Classification: 28C20, 81Q05, 47D08

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение . . . 89
2. Случайные блуждания в конечномерном евклидовом пространстве . . . 91
3. Меры на банаховых пространствах, инвариантные относительно сдвигов . . . 92
4. Меры на гильбертовом пространстве, инвариантные относительно сдвигов и поворотов 103
5. Случайные блуждания и математические ожидания функционалов от них . . . 104
6. Полугруппы и их генераторы . . . 108
7. Область определения генератора Δ_ν и подпространство гладких функций . . . 110
Список литературы . . . 117

Работа выполнена в Математическом институте им. В. А. Стеклова РАН при поддержке Российского научного фонда (проект № 14-11-00687).

1. Введение

Случайным блужданием в гильбертовом пространстве H будем называть последовательность $\{\eta_n\}$ сумм независимых случайных величин $\xi_1, \ldots, \xi_n$ со значениями в банаховом пространстве $C_0(\mathbb{R}_+, H)$ непрерывных отображений ξ полуоси $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$ в гильбертово пространство H, удовлетворяющих условию $\xi(0) = 0$, снабженное нормой

$$\|\xi\|_C = \sup_{t \geqslant 0} \|\xi(t)\|_H.$$

Случайной величиной со значениями в пространстве $C_0(\mathbb{R}_+, H)$ называется измеримое отображение пространства с мерой в измеримое пространство $(C_0(\mathbb{R}_+, H), \mathcal{A}_C)$, где $\mathcal{A}_C$ — минимальная алгебра, содержащая все открытые множества банахова пространства $C_0(\mathbb{R}_+, H)$. Случайной величиной со значениями в гильбертовом пространстве H называется измеримое отображение пространства элементарных событий с вероятностной мерой $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ в измеримое пространство $(H, \mathcal{A})$, где $\mathcal{A}$ — минимальная алгебра подмножеств пространства H, порожденная топологией в H (например, слабой топологией или топологией нормы).

Целью исследования является получение эволюционных дифференциальных уравнений для математического ожидания функций от случайного блуждания вида

$$u \circ \xi(t), \quad t \geqslant 0, \tag{1.1}$$

где u — некоторая числовая функция на пространстве H. Этот подход используется в случае конечномерных пространств H для изучения уравнения Фоккера—Планка методами теории вероятности (см. [7, 11]). В бесконечномерных пространствах исследования дифференциальных уравнений, связанных со случайными процессами, проводились в [1, 3, 10, 24–26].

Для изучения случайных блужданий в бесконечномерном гильбертовом пространстве H будет введена неотрицательная нормированная конечно-аддитивная мера λ на этом пространстве, являющаяся инвариантной относительно сдвигов, но не являющуюся счетно-аддитивной. Сам факт существования такой меры а также целесообразность выбора ее в качестве аналога меры Лебега не являются достаточно исследованными (см. [8, 9] и цитированную там литературу).

В теории диффузионных процессов (см. [1, 7, 11]) устанавливается связь матрицы ковариаций процесса с коэффициентами диффузии генератора полугруппы, порождаемой уравнением диффузии. Для исследования связи эволюционных уравнений иного типа (уравнения дробной диффузии, уравнения Шредингера) со случайными процессами в координатном пространстве предлагается (см. [5, 23]) использовать метод итераций Чернова в сочетании с усреднением по комплекснозначной псевдомере. В случае конечномерного координатного пространства H эта программа была реализована в [16]. Напомним (см. [16, 29]), что две сильно непрерывные оператор-функции $\mathbf{F} : [0, +\infty) \to B(X)$ и $\mathbf{G} : [0, +\infty) \to B(X)$ со значениями в банаховом пространстве $B(X)$ ограниченных линейных преобразований некоторого банахова пространства X, удовлетворяющие условию $\mathbf{F}(0) = \mathbf{G}(0) = \mathbf{I}$, называются эквивалентными по Чернову, если

$$\lim_{n \to +\infty} \sup_{t \in [0,T]} \left\| \left(\left[\mathbf{F}\left(\frac{t}{n}\right) \right]^n - \left[\mathbf{G}\left(\frac{t}{n}\right) \right]^n \right) u \right\|_X = 0$$

для любого $u \in X$ и любого $T > 0$. Сильно непрерывная оператор-функция $\mathbf{F} : [0, +\infty) \to B(X)$, удовлетворяющая условию $\mathbf{F}(0) = \mathbf{I}$, называется эквивалентной по Чернову сильно непрерывной полугруппе $\mathbf{U}(t)$, $t \geqslant 0$, если

$$\lim_{n \to +\infty} \sup_{t \in [0,T]} \left\| \left(\left[\mathbf{F}\left(\frac{t}{n}\right) \right]^n - \mathbf{U}(t) \right) u \right\|_X = 0$$

для любого $u \in X$ и любого $T > 0$; в этом случае говорят, что полугруппа $\mathbf{U}$ представима пределом итераций оператор-функции $\mathbf{F}$. Банахово пространство X может быть реализовано как гильбертово пространство классов комплекснозначных фунций $u : H \to \mathbb{C}$, квадратично интегрируемых по некоторой мере λ на пространстве H. Тогда при каждом $t \geqslant 0$ линейный оператор $\mathbf{F}(t) \in B(X)$ определяется математическим ожиданием операторов сдвига на случайный вектор $\xi(t)$ в том смысле, что

$$\mathbf{F}(t)u(x) = \int\limits_{\Omega} u(x+\xi(t))dP(\xi),$$

а математическое ожидание операторов сдвига на случайный вектор $\eta_n(t) = \xi_1\left(\frac{t}{n}\right)+\dots+\xi_n\left(\frac{t}{n}\right)$ задается равенством

$$\left(\mathbf{F}\left(\frac{t}{n}\right)\right)^n u(x) = \int\limits_E \dots \int\limits_E u\left(x+\xi_1\left(\frac{t}{n}\right)+\dots+\xi_n\left(\frac{t}{n}\right)\right) d\mu(\xi_1)\dots d\mu(\xi_n).$$

Таким образом, композиции оператор-функции $\mathbf{F}$ описывают математическое ожидание функционалов от случайных блужданий.

Усреднение случайных операторов сдвига на векторы гильбертова пространства, рассматриваемое в настоящей работе, может быть модифицировано как усреднение случайных сдвигов вдоль орбит случайных полугрупп. Такое усреднение случайных полугрупп изучалось в [12, 16]. В [19, 20] для последовательности композиций независимых одинаково распределенных случайных однопараметрических полугрупп мультипликативный закон больших чисел сформулирован как стремление к нулю вероятности отклонения на любую положительную величину по норме или по семейству полунорм композиции случайных полугрупп от ее математического ожидания. Установлены условия выполнения закона больших чисел для композиции полугрупп и приведены примеры его нарушения.

В настоящей работе сначала будет приведен пример случайных блужданий в конечномерном евклидовом пространстве H, для которых математические ожидания являются решениями уравнения диффузии. Далее ставится задача определить случайное блуждание в бесконечномерном вещественном гильбертовом пространстве H, для которого справедливы аналоги результатов о случайных блужданиях в конечномерном пространстве.

Для этих целей будет введен специальный класс мер на бесконечномерном гильбертовом пространстве. Использование гауссовских мер на бесконечномерных гильбертовых пространствах приводит к тому, что множество операторов сдвига на единичные векторы в пространстве квадратично интегрируемых по гауссовской мере функций не является ограниченным по операторной норме. Но именно свойство равномерной ограниченности операторов сдвига на произвольный вектор в конечномерном гильбертовом пространстве позволяет (см. предложение 2.1) применить теорему Чернова и эквивалентность по Чернову для получения решений дифференциальных уравнений с помощью математического ожидания случайного оператора сдвига.

Как известно (см. [6]), не существует меры Лебега на бесконечномерном топологическом векторном пространстве, т.е. не существует ненулевой счетно-аддитивной σ-конечной меры на σ-кольце борелевских подмножеств бесконечномерного топологического векторного пространства, инвариантной относительно сдвигов на векторы этого пространства. В связи с этим изучались вопросы о существовании мер на бесконечномерных топологических векторных пространствах, инвариантных относительно сдвига на векторы из некоторого максимального допустимого подпространства (см. [8]), о существовании инвариантных мер, не являющихся σ-конечными (см. [27]), о существовании мер, не являющихся счетно-аддитивными (см. [18]). В [8] определены векторное пространство и борелевская σ-конечная мера на нем, инвариантная относительно трансляций на любые элементы некоторого бесконечномерного подпространства второй категории в себе. В [27] исследуется счетно-аддитивная, но не σ-конечная мера на пространстве $\mathbb{R}^\infty$, получаемой с помощью продолжения по схеме Лебега—Каратеодори из функции множества, заданной на измеримых брусах пространства $\mathbb{R}^\infty$. Как будет показано ниже, эта схема, примененная к конечно-аддитивной функции множества, сталкивается с проблемой несовпадения с продолжаемой функцией множества. Другое направление исследования мер на бесконечномерном пространстве связано с изучением счетно-аддитивных мер, от которых не требуется условия инвариантности относительно сдвига (см. [2, 3]). Мы ставим задачу изучить конечно-аддитивную меру λ, инвариантную относительно сдвигов на произвольный вектор. Тогда функция u от случайного блуждания ξ в соотношении (1.1) выбирается из пространства $\mathcal{H} = L_2(H, \lambda)$.

В настоящей работе исследуются неотрицательные конечно-аддитивные меры, заданные на некоторых кольцах подмножеств банаховых пространств l_p, $p \in [1, +\infty]$, содержащих все кубы с ребрами единичной длины и обладающие свойством инвариантности относительно сдвигов на произвольные векторы банахова пространства.

Для сепарабельных гильбертовых пространств установлено существование неотрицательной конечно-аддитивной меры, заданной на некотором кольце подмножеств вещественного гильбертова пространства H (содержащем все единичные кубы этого пространства), инвариантной относительно сдвига на любой вектор пространства H и относительно любого ортогонального преобразования. Показано, что такая мера не является счетно-аддитивной, σ-конечной, а ее значения на любом компакте гильбертова пространства равно нулю.

Исследовано пространство $\mathcal{H}$ классов эквивалентности комплекснозначных функций (называемых далее функциями), квадратично интегрируемых по такой инвариантной конечно-аддитивной мере. Установлены связи случайных блужданий ξ в пространстве H с полугруппами $\mathcal{U}_\xi$ операторов в пространствах функций $\mathcal{H}$, квадратично интегрируемых по мере на пространстве H, инвариантной относительно сдвигов. Определены условия на случайные блуждания ξ в пространстве H, при выполнении которых случайному блужданию соответствует оператор диффузии Δ_ξ в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, генерирующий полугруппу $\mathcal{U}_\xi$.

2. Случайные блуждания в конечномерном евклидовом пространстве

Приведем некоторые примеры случайных блужданий, математические ожидания функционалов от которых являются решениями эволюционных дифференциальных уравнений.

Предложение 2.1 (см. [5,7,16]). *Пусть $H = \mathbb{R}$, λ — мера Лебега на $\mathbb{R}$, $\mathcal{H} = L_2(\mathbb{R})$ и для каждого $\epsilon \in \mathbb{R}$ и каждого $v \in \mathbb{R}$ определено семейство (не полугруппа) преобразований $\mathbf{U}_{\epsilon,v}(t)$, $t \geqslant 0$, пространства $\mathcal{H}$, действующих по формуле*

$$\mathbf{U}_{\epsilon,v}(t)u(x) = u(x + vt + \epsilon t^{1/2}), \quad t \geqslant 0.$$

Пусть на множестве $\mathbb{R}$ задана такая вероятностная мера μ с плотностью p_μ относительно меры Лебега λ, что p_μ — четная функция и

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \epsilon^2 p_\mu(\epsilon)d\epsilon = D > 0, \quad \int\limits_{\mathbb{R}} |\epsilon|^3 p_\mu(\epsilon)d\epsilon < \infty.$$

Тогда при любом $v \in \mathbb{R}$ семейство

$$\mathbf{U}_v^\mu(t) = \int\limits_{\mathbb{R}} \mathbf{U}_{\epsilon,v}(t)p_\mu(\epsilon)d\epsilon, \quad t \geqslant 0,$$

усредненных преобразований пространства $\mathcal{H}$ является эквивалентным по Чернову полугруппе, разрешающей задачу Коши для уравнения теплопроводности

$$u_t' = Du_{xx}'' + vu_x', \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}; \quad u|_{t=+0} = u_0. \tag{2.1}$$

Существуют различные способы доказательства утверждения предложения 2.1. Мы приведем здесь схему доказательства (подробности можно найти в [5]), основанного на применении теоремы Чернова (см. [4]).

1. Поскольку

$$\|\mathbf{U}_{\epsilon,v}(t)\| = 1$$

для всех $\epsilon, v \in \mathbb{R}$, $t \geqslant 0$, а мера μ является вероятностной, то

$$\|\mathbf{U}^\mu(t)\| \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}} \|\mathbf{U}_{\epsilon,v}(t)\| p_\mu(\epsilon)d\epsilon \leqslant 1$$

для всех $v \in \mathbb{R}$, $t \geqslant 0$.

2. Для каждого $u \in \mathcal{H}$ вектор-функция $u(t) = \mathbf{U}^\mu(t)u$, $t \in \mathbb{R}_+$, непрерывна на $\mathbb{R}_+$.

3. $\mathbf{U}^\mu(t)|_{t=0} = \mathbf{I}$.
4. Для любого $u \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ выполняется равенство

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{U}^\mu(t)u)\Big|_{t=0} = \mathbf{A}u,$$

где $\mathbf{A}u = Du''_{xx} + vu'_x$; при этом линейный оператор $\mathbf{A} : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ с областью определения $C_0^\infty(\mathbb{R})$ замыкаем и его замыкание является генератором сжимающей полугруппы в пространстве $\mathcal{H}$.

Согласно теореме Чернова условий 1–4 достаточно для выполнения утверждения предложения 2.1. Важным условием применения этого метода доказательства является равномерная ограниченность по норме пространства $B(\mathcal{H})$ семейства операторов сдвига $\mathbf{U}_{\epsilon,v}(t)$, $\epsilon, v \in \mathbb{R}$, $t \geqslant 0$.

Все приведенные выше примеры одномерных случайных блужданий имеют естественные обобщения на блуждания в конечномерном евклидовом пространстве. Вопрос о случайных блужданиях в бесконечномерном сепарабельном гильбертовом пространстве H затруднен следующими фактами:

1) отсутствием меры Лебега на пространстве H, т.е. счетно-аддитивной меры на σ-кольце борелевских подмножеств H, инвариантной относительно сдвигов в пространстве H и принимающей положительные числовые значения на открытых ограниченных подмножествах пространства H (см. [9]);
2) отсутствием аддитивной функции множества на алгебре 2^H всех подмножеств пространства H, принимающей одинаковые значения на конгруэнтных множествах (см. [15]);
3) отсутствием равномерной ограниченности множества операторов сдвига $\mathbf{S}_h$, $h \in H$, в пространстве функций $L_2(H, \lambda)$, квадратично интегрируемых относительно гауссовской меры λ на пространстве H (см. [2]).

В связи с этим будет исследован вопрос о существовании неотрицательной конечно-аддитивной меры λ, заданной на некотором кольце $\mathcal{K}$ множеств пространства H, инвариантной относительно сдвигов в пространстве H. Если такие меры существуют, то они могут играть роль меры Лебега на пространстве H — в пространстве $\mathcal{H} = L_2(H, \mathcal{K}, \lambda)$ квадратично интегрируемых по мере λ комплекснозначных функций операторы сдвига $\mathbf{S}_h$, $h \in H$, являются унитарными, как и в примерах с конечномерных пространствах. Целью исследования таких конструкций является распространение результатов о связи случайных блужданий в пространстве H с полугруппами в пространстве $\mathcal{H} = L_2(H, \mathcal{K}, \lambda)$, установленных для конечномерных пространств в [7, 11] и предложении 2.1, на случай бесконечномерного пространства H.

3. Меры на банаховых пространствах, инвариантные относительно сдвигов

Как показано в предыдущем разделе, при исследовании решений дифференциальных уравнений с помощью усреднения случайных блужданий в координатном пространстве инвариантные меры на координатном пространстве являются весьма эффективным инструментом. Это связано с тем, что в пространстве функций, квадратично интегрируемых по инвариантной мере, операторы сдвига аргумента на произвольный вектор пространства являются унитарными. Для применения такого подхода к описанию решений дифференциальных уравнений для функций на бесконечномерных пространствах возникает задача изучения мер на бесконечных пространствах, инвариантных относительно сдвигов на векторы этого пространства или относительно других групп преобразований (см. [18]).

В этом разделе рассматривается задача о существовании мер на бесконечномерных банаховых пространствах, инвариантных относительно сдвигов на произвольный вектор этого пространства. Будут исследованы банаховы пространства l_p, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, числовых последовательностей; для пространства l_2 будет, как и в [18], исследован класс мер, инвариантных не только относительно сдвига на произвольный вектор, но и относительно произвольного поворота (унитарного преобразования).

В настоящем разделе дано описание множества конечно-аддитивных мер на банаховых пространствах l_p, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, инвариантных относительно сдвига на произвольный вектор из этого банахова пространства, и заданных на минимальном кольце, содержащем совокупность измеримых параллелепипедов с ребрами, параллельными координатным осям (т.е. таких, что бесконечное произведение длин их ребер сходится; см. ниже и [18,27]). Показано, что мер на пространстве l_p, $1 \leqslant p < \infty$, инвариантных относительно сдвига на произвольный вектор из пространства l_p, больше, чем мер на пространстве l_p, инвариантных относительно сдвига на произвольный вектор из пространства l_∞. Это обстоятельство служит причиной неединственности инвариантной меры на гильбертовом пространстве l_2, инвариантной относительно сдвига на произвольный вектор l_2. В завершение проанализированы перспективы применения процедуры продолжения конечно-аддитивной меры, заданной на кольце множеств пространства l_∞, порожденной измеримыми параллелепипедами, до счетно-аддитивной меры на пространстве l_∞ по схеме Каратеодори—Лебега (см. [27]). Установлено, что такое продолжение порождает меру, не совпадающую с исходной мерой на измеримых параллелепипедах, и равную нулю на всех множествах, на которой исходная конечно-аддитивная мера принимает конечные значения.

3.1. Инвариантные меры на пространстве l_∞. Как и в [27], определим на топологическом векторном пространстве $\mathbb{R}^\infty$ отображений $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$, снабженном топологией поточечной сходимости, семейство множеств $\mathcal{B}$ вида

$$\Pi_{a,b} = \Big\{x \in \mathbb{R}^\infty : \ \forall\, j \in \mathbb{N}\ x_j \in \langle a_j, b_j\rangle\Big\}, \quad a, b \in l_\infty.$$

Аналогично, на банаховом пространстве l^∞ определим семейство подмножеств

$$\Pi_{a,b} = \Big\{x \in l_\infty : \ \forall\, j \in \mathbb{N}\ x_j \in \langle a_j, b_j\rangle\Big\}, \quad a, b \in l_\infty.$$

Здесь символ $\langle a_j, b_j\rangle$ означает ограниченный промежуток с концами a_j и b_j при условии $a_j \leqslant b_j$ (если $a_j = b_j$, то представляющий собой либо одноточечное, либо пустое множество); и пустое множество при условии $a_j > b_j$.

Множества вида $\Pi_{a,b}$ при произвольных $a, b \in l_\infty$, удовлетворяющих условиям $a_j \leqslant b_j$ для всех $j \in \mathbb{N}$, будем называть брусами; брус $\Pi_{a,b}$ является пустым множеством, если найдется такое $j \in \mathbb{N}$, что $\langle a_j, b_j\rangle = \varnothing$.

Следуя [27], дадим следующее определение измеримости бруса.

Определение 3.1. Будем называть брус $\Pi_{a,b} \in \mathcal{B}$ *измеримым*, если выполняется условие

$$\sum_{j=1}^{\infty} \ln(b_j - a_j) \in [-\infty, +\infty), \tag{3.1}$$

где сумма ряда считается равной $-\infty$, если хотя бы один член ряда имеет значение $-\infty$. Обозначим совокупность измеримых брусов символом $\mathcal{P}$.

В [18, 21, 22] рассматривается более сильное, чем (3.1), условие измеримости бруса, связанное с требованием независимости свойства измеримости от изменения порядка координат.

Определение 3.2. Будем называть брус $\Pi_{a,b} \in \mathcal{B}$ *абсолютно измеримым*, если ряд

$$\sum_{j=1}^{\infty} \max\big\{0,\ \ln(b_j - a_j)\big\} \tag{3.2}$$

сходится. Обозначим совокупность абсолютно измеримых брусов символом $\mathcal{P}^a$.

Очевидно, условие (3.1) следует из условия (3.2), т.е. $\mathcal{P}^a \subset \mathcal{P}$.

На множестве измеримых брусов $\mathcal{P}$ определим функцию $\mu : \mathcal{P} \to [0, +\infty)$ равенством

$$\mu(\Pi_{a,b}) = \exp\left(\sum_{j=1}^{\infty} \ln(b_j - a_j)\right). \tag{3.3}$$

В силу определения измеримости для любого бруса $\Pi_{a,b} \in \mathcal{P}$ выполняется условие $\mu(\Pi) \in [0, +\infty)$, причем если $a, b \in l_\infty$ таковы, что найдется $j \in \mathbb{N}$, при котором $a_j = b_j$, то сумма ряда из (3.1) равна $-\infty$ и $\mu(\Pi_{a,b}) = 0$; в частности, $\mu(\varnothing) = 0$.

Функция μ, заданная на классе множеств $\mathcal{S}$, называется *аддитивной*, если из условий

$$A, A_1, \ldots, A_m \in \mathcal{S}, \quad A = \bigcup_{j=1}^{m} A_j, \quad A_j \cap A_k,\ j,k \in \overline{1,m},\ j \neq k,$$

следует, что

$$\mu(A) = \sum_{j=1}^{m} \mu(A_j).$$

Лемма 3.1 (см. [22, лемма 3])**.** *Функция множества* $\mu : \mathcal{P} \to [0, +\infty)$*, заданная равенством* (3.3)*, является инвариантной относительно сдвига на произвольный вектор из пространства* l_∞ *и аддитивной на классе множеств* $\mathcal{P}$*.*

Действительно, как установлено в [18, лемма 3], если

$$\Pi = \bigcup_{i=1}^{m} \Pi_i,$$

где $\Pi, \Pi_1, \ldots, \Pi_m \in \mathcal{P}$, то существует не более $m(m-1)/2$ гиперплоскостей вида $\pi = \{x :\ x_j = c\}$ коразмерности 1, обладающих тем свойством, что два различных бруса Π_k, Π_l, $k, l \in \overline{1,m}$, имеют общую грань в гиперплоскости π (гиперплоскость π содержит грань бруса Π_k, заданного условием (3.1), если либо $c = a_j$, либо $c = b_j$). Поэтому существует такое число $N \in \mathbb{N}$, $N \leqslant m(m-1)/2$, такой брус $\Pi_0 = \{x_j,\ j \geqslant N+1 :\ x_j \in \langle a_j, b_j \rangle\}$ и такие N-мерные брусы $\Pi', \Pi'_1, \ldots, \Pi'_m$, что

$$\Pi = \Pi' \times \Pi_0, \quad \Pi_1 = \Pi'_1 \times \Pi_0, \quad \ldots, \quad \Pi_m = \Pi'_m \times \Pi_0$$

и выполнено равенство

$$\Pi' = \bigcup_{i=1}^{m} \Pi'_j.$$

Тогда аддитивность функции μ на классе $\mathcal{P}$ следует из формулы (3.3). Инвариантность функции множества (3.3) относительно сдвига на вектор пространства l_∞ очевидна.

Пусть $\mathcal{R}$ — минимальное кольцо, содержащее класс множеств $\mathcal{P}$.

Заметим, что класс $\mathcal{P}$ является замкнутым относительно пересечений: действительно, пусть Π_{a_1,b_1}, $\Pi_{a_2,b_2} \in \mathcal{P}$. Тогда при условии, что неравенства

$$\alpha_j = \max\{a_{1,j}, a_{2,j}\} < \min\{b_{1,j}, b_{2,j}\} = \beta_j$$

выполнены при всех $j \in \mathbb{N}$, имеем

$$\Pi_{a_1,b_1} \cap \Pi_{a_2,b_2} = \Pi_{\alpha,\beta}$$

и множество $\Pi_{\alpha,\beta}$ непусто, является брусом, и, поскольку

$$\beta_j - a_j \leqslant \min\Big\{b_{1,j} - a_{1,j},\ b_{2,j} - a_{2,j}\Big\} \quad \forall j \in \mathbb{N},$$

то

$$\mu(\Pi_{\alpha,\beta}) \leqslant \min\Big\{\mu(\Pi_{a_1,b_1}),\ \mu(\Pi_{a_2,b_2})\Big\}.$$

Если что при некотором $j \in \mathbb{N}$ выполняется противоположное неравенство

$$\alpha_j = \max\{a_{1,j}, a_{2,j}\} \geqslant \min\Big\{b_{1,j}, b_{2,j}\Big\} = \beta_j,$$

то либо множество $\Pi_{a_1,b_1} \cap \Pi_{a_2,b_2} = \Pi_{\alpha,\beta}$ является пустым, либо оно является брусом с ребром нулевой длины, но в каждом из этих случаев $\mu(\Pi_{a_1,b_1} \cap \Pi_{a_2,b_2}) = 0$.

Лемма 3.2 (см. [22, лемма 1])**.** *Класс* Λ *множеств вида*

$$A = \Pi \setminus \left(\bigcup_{j=1}^{n} \Pi_j\right),$$

состоящих из разностей бруса из класса $\mathcal{P}$ *и объединения конечной совокупности брусов из класса* $\mathcal{P}$*, является полукольцом.*

Действительно, класс Λ содержит пустое множество, замкнут относительно пересечений, а разность двух множеств из класса Λ представима как объединение конечной совокупности множеств из этого класса.

Следствие 3.1. *Класс множеств $\mathcal{R}$, состоящий из конечных объединений множеств из класса Λ, является минимальным кольцом, содержащим класс измеримых брусов $\mathcal{P}$.*

Теорема 3.1 (см. [22, теорема 1]). *Функция множества μ, заданная на классе $\mathcal{P}$, допускает единственное аддитивное продолжение на полукольцо Λ.*

Для каждого $n \in \mathbb{N}$ определим через Λ_n совокупность множеств вида

$$\Pi \setminus \left(\bigcup_{j=1}^{n} \Pi_j \right), \quad \Pi, \Pi_1, \ldots, \Pi_n \in \mathcal{P}. \tag{3.4}$$

Тогда

$$\Lambda_{n+1} \supset \Lambda_n, \quad \Lambda = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Lambda_n.$$

Утверждение теоремы 3.1 будет доказано, если мы покажем, что функция множества μ допускает единственное аддитивное продолжение с класса $\mathcal{P}$ на класс Λ_n при произвольном $n \in \mathbb{N}$.

При каждом $n \in \mathbb{N}$ обозначим через $\mathcal{V}_n$ совокупность конечных объединений n измеримых брусов из класса $\mathcal{P}$.

Лемма 3.3 (см. [22, лемма 4]). *Для каждого $n \in \mathbb{N}$ функция множества* (3.3) *на классе $\mathcal{P}$ допускает единственное аддитивное продолжение на классы $\mathcal{V}_n$ и Λ_n.*

Доказательство. Докажем утверждение леммы 3.3 с помощью метода математической индукции. При $n = 1$ функция μ однозначно определена и аддитивна на классе $\mathcal{V}_1 = \mathcal{P}$ в силу леммы 3.1.

Значение функции μ на множестве $A = \Pi \setminus \Pi_1 \in \Lambda_1$ определим равенством

$$\mu(\Pi \setminus \Pi_1) = \mu(\Pi) - \mu(\Pi \cap \Pi_1).$$

Пусть

$$A = \Pi' \setminus \Pi_1' = \Pi' \setminus (\Pi_1' \cap \Pi'), \quad A = \Pi'' \setminus \Pi_1'' = \Pi'' \setminus (\Pi_1'' \cap \Pi'').$$

Тогда $A = \Pi \setminus \Pi_1$, где $\Pi = \Pi' \cap \Pi''$ и $\Pi_1 = \Pi \cap P_1' = \Pi \cap \Pi_1''$. При этом

$$\Pi' = \Pi \cup (\Pi' \setminus Pi) \in \mathcal{P};$$

следовательно,

$$\mu(\Pi') = \mu(\Pi) + \mu(\Pi' \setminus Pi).$$

Поскольку

$$\Pi' \setminus (\Pi_1' \cap \Pi') = \Pi \setminus (\Pi_1 \cap \Pi),$$

то

$$\Pi' \setminus \Pi = (\Pi_1' \cap \Pi') \setminus (\Pi_1 \cap \Pi),$$

поэтому

$$\mu(\Pi') = \mu(\Pi) + \mu(\Pi_1' \setminus Pi') - \mu(\Pi_1 \cap \Pi),$$

т.е.

$$\mu(\Pi') - \mu(\Pi_1' \setminus Pi') = \mu(\Pi) - \mu(\Pi_1 \cap \Pi).$$

Аналогично

$$\mu(\Pi) - \mu(\Pi \cap \Pi_1) = \mu(\Pi'') - \mu(\Pi'' \cap \Pi_1'').$$

Таким образом, функция множества μ определена и допускает единственное аддитивное продолжение на классы множеств Λ_1 и $\mathcal{V}_1$.

Предположим, что функция множества μ допускает единственное аддитивное продолжение на классы множеств Λ_n и $\mathcal{V}_n$ при некотором $n \in \mathbb{N}$. Покажем, что тогда функция μ допускает однозначное аддитивное продолжение на класс $\mathcal{V}_{n+1}$ и на класс Λ_{n+1}.

Произвольное множество $A \in \mathcal{V}_{n+1}$ представимо в виде
$$A = \bigcup_{k=1}^{n+1} \Pi_k = D \bigcup \Pi_{n+1} \setminus D,$$
где
$$D = \bigcup_{k=1}^{n} \Pi_k \in \mathcal{V}_n, \quad \Pi_{n+1} \setminus D \in \Lambda_n.$$
Из условия аддитивности продолжения функции μ на класс $\mathcal{V}_{n+1}$ получаем
$$\mu(A) = \mu(D) + \mu(\Pi_{n+1} \setminus D). \tag{3.5}$$

Докажем сначала, что величина $\mu\left(\bigcup\limits_{k=1}^{n+1} \Pi_k\right)$ не зависит от нумерации брусов $\Pi_1, \ldots, \Pi_{n+1}$.

Положим
$$D = \bigcup_{k=1}^{n} \Pi_k, \quad D' = \bigcup_{k=1}^{n-1} \Pi_k \cup \Pi_{n+1}, \quad D_0 = \bigcup_{k=1}^{n-1} \Pi_k.$$
Тогда
$$\mu(A) = \mu(D) + \mu\big(\Pi_{n+1} \setminus D\big) = \mu(D_0) + \mu(\Pi_n \setminus D_0) + \mu(\Pi_{n+1} \setminus D).$$
Поскольку функция μ аддитивна на классе Λ_n и
$$\Pi_n = \big(\Pi_n \setminus \Pi_{n+1}\big) \cup \big(\Pi_n \cap \Pi_{n+1}\big), \quad \Pi_{n+1} \setminus D = (\Pi_{n+1} \setminus \Pi_n) \setminus D_0,$$
то справедливо равенство
$$\mu(A) = \mu(D_0) + \mu\Big(\big(\Pi_n \setminus \Pi_{n+1}\big) \setminus D_0\Big) + \mu\Big(\big(\Pi_n \cup \Pi_{n+1}\big) \setminus D_0\Big) + \mu\Big(\big(\Pi_{n+1} \setminus \Pi_n\big) \setminus D_0\Big).$$
С другой стороны,
$$\mu(A) = \mu(D') + \mu\big(\Pi_n \setminus D'\big) = \mu(D_0) + \mu\big(\Pi_{n+1} \setminus D_0\big) + \mu\big(\Pi_n \setminus D'\big).$$
В силу аддитивности функции μ на классе Λ_n и в силу соотношения
$$\Pi_{n+1} = \big(\Pi_{n+1} \setminus \Pi_n\big) \cup \big(\Pi_n \cap \Pi_{n+1}\big)$$
справедливо равенство
$$\mu(A) = \mu(D_0) + \mu\Big(\big(\Pi_n \setminus \Pi_{n+1}\big) \setminus D_0\Big) + \mu\Big(\big(\Pi_{n+1} \setminus \Pi_n\big) \setminus D_0\Big) + \mu\Big(\big(\Pi_{n+1} \cup \Pi_n\big) \setminus D_0\Big).$$
Таким образом, величина $\mu(A)$ не изменится, если поменять нумерацию брусов Π_n и Π_{n+1} и, следовательно, не зависит от нумерации системы брусов $\Pi_1, \ldots, \Pi_{n+1}$.

Предположим теперь, что
$$A = D \cup \Pi = D' \cup \Pi',$$
где $D, D' \in \mathcal{V}_n$. Тогда
$$(D' \cup \Pi') \setminus D = \Pi \setminus D \in \Lambda_n.$$
В силу предположения индукции функция μ определена на классе Λ_n, а ее значение на множестве из Λ_n не зависит от представления множества из Λ_n в виде (3.4). Поэтому в силу аддитивности продолжения функции μ с классов $\mathcal{V}_n$ и Λ_n на класс $\mathcal{V}_{n+1}$ справедливо равенство
$$\mu\big(D' \cup \Pi'\big) = \mu(D) + \mu\Big(\big(D' \cup \Pi'\big) \setminus D\Big) = \mu(D) + \mu\big(\Pi \setminus D\big)$$
и, с другой стороны,
$$\mu(D' \cup \Pi') = \mu(D') + \mu(\Pi' \setminus D').$$
Таким образом, значение аддитивной на классах Λ_n и $\mathcal{V}_{n+1}$ функции μ на множестве $A \in \mathcal{V}_{n+1}$ определено равенством (3.5) и не зависит от его представления в виде $A = D \cup \Pi$, $\Pi \in \mathcal{P}$, $D \in \mathcal{V}_n$.

Покажем, что если функция μ определена и аддитивна на классе $\mathcal{V}_{n+1}$ и на классе Λ_n, то она допускает однозначное аддитивное продолжение на класс Λ_{n+1}.

Произвольное множество $A \in \Lambda_{n+1}$ представимо в виде $A = \Pi \setminus D$, где $\Pi \in \mathcal{P}$ и

$$D = \bigcup_{j=1}^{n+1} \Pi_j \in \mathcal{V}_{n+1}, \quad D \subset \Pi.$$

Тогда для произвольного аддитивного продолжения функции μ на класс Λ_{n+1} выполняется равенство

$$\mu\big(\Pi \setminus D\big) = \mu(\Pi) - \mu(D). \tag{3.6}$$

Если

$$A = \Pi' \setminus D' = \Pi'' \setminus D'',$$

где $\Pi', \Pi'' \in \mathcal{P}$, $D', D'' \in \mathcal{V}_{n+1}$ и $D' \subset \Pi'$, $D'' \subset \Pi''$, то $A = \Pi \setminus D$, где $\Pi = \Pi' \cap \Pi''$ и $D = \Pi \cap D' = \Pi \cap D'' \in \mathcal{V}_{n+1}$. Тогда

$$D' = D \cup \Pi' \setminus \Pi \in \mathcal{V}_{n+1}, \quad D'' = D \cup \Pi'' \setminus \Pi \in \mathcal{V}_{n+1}.$$

И поскольку функция μ аддитивна на классе $\mathcal{V}_{n+1}$, то

$$\mu(D'') = \mu(D) + \mu\big(\Pi'' \setminus \Pi\big), \quad \mu(D') = \mu(D) + \mu\big(\Pi' \setminus \Pi\big).$$

Поэтому

$$\mu(\Pi'') - \mu(D'') = \mu(\Pi') - \mu(D') = \mu(\Pi) - \mu(D).$$

Таким образом, значение аддитивной на классе Λ_{n+1} функции μ на множестве $A \in \Lambda_{n+1}$ определено равенством (3.6) и не зависит от представления множества в виде $A = \Pi \setminus D$, $\Pi \in \mathcal{P}$, $D \in \mathcal{V}_{n+1}$.

В силу предположения индукции каждое слагаемое в правой части равенства (3.6) определено однозначно, поэтому функция множества μ допускает единственное аддитивное продолжение на класс Λ_{n+1}. Лемма 3.2 доказана. $\square$

Из леммы 3.2 следует утверждение теоремы 3.1, поскольку

$$\Lambda = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Lambda_n.$$

Лемма 3.4 (см. [22]). *Функция множества μ, заданная на классе $\mathcal{P}$, допускает единственное аддитивное продолжение до меры μ на кольце $\mathcal{R}$.*

Действительно, определенная на полукольце множеств Λ функция множества μ допускает, согласно [14, гл. 5.2, теорема 1], единственное продолжение до аддитивной функции множества на минимальном кольце $\mathcal{R}$.

Лемма 3.5 (см. [22, лемма 6]). *Мера μ на пространстве l_∞, заданная на кольце $\mathcal{R}$, инвариантна относительно сдвига на любой вектор из пространства $\mathbb{R}^\infty$.*

Инвариантность функции μ на классе множеств $\mathcal{P}$ относительно сдвига на произвольный вектор пространства l_∞ очевидна. Из нее следует инвариантность функции μ на классе множеств Λ_1 и, по индукции, на классе Λ_n при любом $n \in \mathbb{N}$.

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 3.2 (см. [22, теорема 2]). *Пусть на множестве измеримых брусов $\mathcal{P}$ задана функция $\mu : \mathcal{P} \to [0, +\infty]$, аддитивная и инвариантная относительно сдвига на произвольный вектор из l_∞. Тогда функция μ однозначно продолжается до аддитивной функции на кольце $\mathcal{R}$. При этом продолжение является мерой, инвариантной относительно сдвига на произвольный вектор из l_∞.*

Таким образом, для любых двух множеств $A, B \in \mathcal{R}$, связанных между собой преобразованием сдвига на вектор из l_∞, выполняется равенство $\mu(A) = \mu(B)$.

Два множества пространства l_∞ назовем *l_∞-эквивалентными*, если одно из них является образом другого при сдвиге на вектор из пространства l_∞. Введенное отношение эквивалентности на кольце $\mathcal{R}$ позволяет представить кольцо $\mathcal{R}$ как объединение непересекающихся классов l_∞-эквивалентных множеств. Мера μ из теоремы 3.2 принимает равные значения на множествах из одного класса l_∞-эквивалентности. В то же время условие инвариантности меры μ относительно сдвигов на векторы из l_∞ требует постоянства значения меры на множествах из класса l_∞-эквивалентности и мера из теоремы 3.2 удовлетворяет этому требованию.

Пусть $p \in [1,+\infty)$. Два вектора пространства l_∞ назовем *l_p-эквивалентными*, если их разность является вектором из пространства l_p; два множества пространства l_∞ назовем *l_p-эквивалентными*, если одно из них является образом другого при сдвиге на вектор из пространства l_p.

Введенное отношение эквивалентности на кольце $\mathcal{R}$ позволяет представить кольцо $\mathcal{R}$ как объединение непересекающихся классов l_p-эквивалентных множеств. Следовательно, сдвиги на произвольный вектор из пространства l_p преобразуют множество из некоторого класса в множество из того же самого класса.

Поскольку пространство l_∞ шире пространства l_p, то один класс l_∞-эквивалентности содержит множество различных классов l_p-эквивалентности. Условие инвариантности меры μ относительно сдвигов на векторы из l_p требует постоянства значения меры на множествах из класса l_p-эквивалентности, но значения меры на множествах из различных классов l_p-эквивалентности никак не связаны между собой условием инвариантности меры μ относительно сдвигов на векторы из l_p.

Два бруса из класса $\mathcal{P}$ являются l_∞-эквивалентными тогда и только тогда, когда последовательности длин их ребер совпадают. Поэтому мера μ на кольце $\mathcal{R}$ подмножеств пространства l_∞, определенная в теореме 3.2, является единственной мерой на кольце $\mathcal{R}$, инвариантной относительно сдвигов на произвольный вектор из пространства l_∞, нормированной условием: значение меры на единичном кубе $\{x \in l^\infty : x_j \in [0,1],\ j \in \mathbb{N}\}$ равно единице. Тем более, такая мера является инвариантной относительно сдвигов на произвольный вектор из пространства l_p. Но есть и другие l_p-инвариантные меры, поскольку значения таких мер на кубах

$$\Big\{x \in l^\infty : x_j \in [a_j, a_j+1],\ j \in \mathbb{N}\Big\}, \quad \Big\{x \in l^\infty : x_j \in [\alpha_j, \alpha_j+1],\ j \in \mathbb{N}\Big\}$$

могут быть различны для таких векторов $a, \alpha \in l_\infty$, что $a - \alpha \notin l_p$.

Аналогично теореме 3.2 доказывается следующее утверждение.

Теорема 3.3. *Пусть на множестве измеримых брусов $\mathcal{P}$ задана функция $\nu : \mathcal{P} \to [0,+\infty]$, аддитивная и инвариантная относительно сдвига на произвольный вектор из l_p. Тогда функция ν однозначно продолжается до аддитивной функции на кольце $\mathcal{R}$. При этом продолжение является мерой, инвариантной относительно сдвига на произвольный вектор из l_p.*

Если поставить задачу определения меры на кольце $\mathcal{R}$ подмножеств пространства l_∞, инвариантной относительно сдвигов на произвольный вектор из пространства l_p, то помимо меры μ найдутся и другие такие меры.

Пример 3.1. Выделим в кольце $\mathcal{R}$ систему центрированных брусов, т.е. имеющих точку 0 пространства l_∞ своим геометрическим центром симметрии, а также брусов, входящих с ними в один класс l_p-эквивалентности. Пусть $\mathcal{R}_0$ — минимальное кольцо, содержащее систему центрированных и l_p-эквивалентных им брусов. Определим меру ν из условия $\nu\big|_{\mathcal{R}_0} = \mu_{\mathcal{R}_0}$, $\nu(A) = 0$ для любого множества $A \in \mathcal{R}$, не входящего в подкольцо $\mathcal{R}_0$. Тогда ν — также мера на кольце $\mathcal{R}$, инвариантная относительно сдвигов на векторы из пространства l_p.

Таким образом, множество l_p-эквивалентных мер на кольце $\mathcal{R}$ шире множества l_∞-эквивалентных мер на кольце $\mathcal{R}$ и имеет место неоднозначность в выборе l_p-эквивалентных мер на кольце $\mathcal{R}$, связанная с различием значений мер на брусах с равными ребрами, входящими в различные классы l_p-эквивалентности. Следовательно, справедливо следующее утверждение.

Замечание 3.1. Мера на пространстве l_∞, инвариантная относительно сдвига на произвольный вектор пространства l_p, определена не единственным образом. Хотя в силу теоремы 3.3 аддитивная функция множества ν на классе $\mathcal{P}$, инвариантная относительно сдвига на произвольный вектор пространства l_p, имеет единственное продолжение на кольцо $\mathcal{R}$, но на классе $\mathcal{P}$ могут существовать различные аддитивные функции множества, инвариантные относительно сдвига на произвольный вектор пространства l_p.

3.2. Инвариантные меры на пространствах l_p при $p \in [1, \infty)$. При произвольном $p \in [1, +\infty)$ обозначим через $\mathcal{P}_p$ совокупность множеств вида

$$\Pi_{a,b} = \Big\{ x \in l_p : x_j \in \langle a_j, b_j \rangle, \ j \in \mathbb{N} \Big\}, \quad a, b \in l_\infty,$$

где $a_j \leqslant b_j$ при всех $j \in \mathbb{N}$, удовлетворяющих условию (3.1). Множество $\Pi_{a,b}$ является пустым, если существует такое $j \in \mathbb{N}$, что $\langle a_j, b_j \rangle = \varnothing$. Если $\langle a_j, b_j \rangle \neq \varnothing$ для всех $j \in \mathbb{N}$, то $\Pi_{a,b} \neq \varnothing$ тогда и только тогда, когда $c \in l_p$, где c — отображение $\mathbb{N} :\to \mathbb{R}$, определяемое равенством $c_j = min\{x : x \in [a_j, b_j]\}$.

Определим на семействе брусов $\mathcal{P}_p$ функцию μ_p таким образом, что ее значение на пустом множестве равно нулю, а на всяком непустом брусе $\Pi_{a,b}$ значение меры μ_p определяется равенством (3.1). Тогда функция множества μ_p на классе $\mathcal{P}_p$ подмножеств пространства l_p определена, аддитивна и инвариантна относительно сдвигов на векторы из пространства l_p.

Обозначим через $\mathcal{R}_p$ минимальное кольцо подмножеств пространства l_p, содержащее класс $\mathcal{P}_p$. Поставим задачу определить меру на кольце $\mathcal{R}_p$ подмножеств пространства l_p, инвариантную относительно сдвигов на произвольный вектор из пространства l_p.

Теорема 3.4. *Пусть на множестве измеримых брусов $\mathcal{P}_p \subset 2^{l_p}$ задана аддитивная, инвариантная относительно сдвига на произвольный вектор из l_p функция $\nu : \mathcal{P} \to [0, +\infty]$. Тогда функция ν однозначно продолжается до аддитивной функции на кольце $\mathcal{R}_p$. При этом продолжение является мерой, инвариантной относительно сдвига на произвольный вектор из l_p.*

Доказательство теоремы 3.4 дословно повторяет доказательство теоремы 3.2.

Замечание 3.2. Мера на пространстве l_p, $p \in [1, +\infty)$, инвариантная относительно сдвига на произвольный вектор пространства l_p, определена не единственным образом. Хотя в силу теоремы 3.4 аддитивная функция множества ν на классе $\mathcal{P}_p$, инвариантная относительно сдвига на произвольный вектор пространства l_p, имеет единственное продолжение на кольцо $\mathcal{R}_p$, но на классе $\mathcal{P}_p$ могут существовать различные аддитивные функции множества, инвариантные относительно сдвига на произвольный вектор пространства l_p (см. пример 3.1).

3.3. О продолжении меры по схеме Лебега—Каратеодори. В [27] изучаются инвариантные относительно сдвигов меры на топологическом векторном пространстве $\mathbb{R}^\infty$. Нам будет удобнее провести аналогичное рассмотрение в банаховом пространстве l_∞, но все выводы остаются справедливыми и для $\mathbb{R}^\infty$. Следуя подходу [27], проведем построение меры на банаховом пространстве l_∞, в котором мера μ из теоремы 3.1 продолжается до меры $\bar{\mu}$ на минимальном σ-кольце Σ, содержащем кольцо $\mathcal{R}$, и на большее кольцо μ^*-измеримых множеств с помощью внешней меры μ^* по схеме Каратеодори. Однако, как известно (см., например, [17]), такая конструкция позволяет определить продолжение исходной меры μ до меры Лебега в случае счетной аддитивности исходной меры на области определения. В общем случае построенная мера Лебега—Каратеодори может отличаться от породившей ее меры. Как будет показано ниже, такое свойство имеет место и для меры, определенной в [27].

В [27] по аддитивной функции множества λ на совокупности измеримых брусов $\mathcal{P}$ (см. (3.3)) задается функция множества $\mu^* : 2^{l_\infty} \to [0, +\infty]$, определяемая равенством

$$\mu^*(A) = \inf_{\substack{\bigcup\limits_{j\in\mathbb{N}} B_j \supset A, \\ B_j \in \mathcal{P}}} \sum_{j\in\mathbb{N}} \mu(B_j) \quad \forall A \in 2^{l_\infty}. \tag{3.7}$$

Функция множества (3.7) является внешней мерой на пространстве l_∞: она определена на алгебре всех подмножеств, счетно-субаддитивна и удовлетворяет условию $\mu^*(\varnothing) = 0$. Кроме того, внешняя мера μ^* порождена мерой μ, заданной на минимальном кольце $\mathcal{R}$, содержащем класс $\mathcal{P}$. Если бы мера μ удовлетворяла условию счетной аддитивности[1] на классе $\mathcal{P}$, то сужение внешней меры μ^* на класс $\mathcal{P}$ (и на кольцо $\mathcal{R}$) должно было бы совпасть с мерой μ согласно [1, теорема 1.5.6] (см.

[1]Для любой последовательности множеств $A_j \in \mathcal{R}$, $j \in \mathbb{N}$, удовлетворяющей условиям $A_{j+1} \subset A_j$, $\bigcap\limits_{j=1}^{\infty} A_j = \varnothing$, выполняется равенство $\lim\limits_{j\to\infty} \mu(A_j) = 0$.

также [17, теорема 10.2]). Но, как показывают примеры (см. [1, 17]), если мера μ является лишь конечно аддитивной, то построенная по ней внешняя мера μ^* может не совпадать с мерой μ.

Лемма 3.6. *Внешняя мера μ^* (3.7) отличается от меры μ (3.3) на множествах из класса $\mathcal{P}$.*

Действительно, для единичного куба $\Pi_{0,1}$ выполняется равенство $\mu(\Pi_{0,1}) = 1$. С другой стороны

$$\bigcup_{j\in\mathbb{N}} \Pi_{0,1-1/j} \supset \Pi_{0,1},$$

и, поскольку $\mu(\Pi_{0,1-1/j}) = 0$ для любого $j \in \mathbb{N}$, согласно (3.7) выполнены условия

$$0 \leqslant \mu^*(\Pi_{0,1}) \leqslant \sum_{j\in\mathbb{N}} \mu\big(\Pi_{0,1-1/j}\big) = 0,$$

т.е.

$$0 = \mu^*(\Pi_{0,1}) < \mu(\Pi_{0,1}) = 1.$$

Таким образом, отличие меры μ^* от меры μ на множестве измеримых брусов $\mathcal{P}$ установлено. В [21, 22] показано, что в предположении, что ряд (3.2) сходится, мера μ^* обращается в нуль на всех множествах, на которых мера μ принимает конечные положительные значения.

Обозначим через $\mathcal{P}^a$ совокупность абсолютно измеримых брусов, для которых ряд (3.2) сходится, а через $\mathcal{R}^a$ — минимальное кольцо множеств, содержащее $\mathcal{P}^a$. Тогда $\mathcal{P}^a \subset \mathcal{P}$, $\mathcal{R}^a \subset \mathcal{R}$. Обозначим через ν сужение функции μ, определенной равенством (3.3), на класс множеств $\mathcal{P}^a$.

Аналогично теореме 3.2 доказывается следующее утверждение.

Теорема 3.5. *Пусть на классе абсолютно измеримых брусов $\mathcal{P}^a$ задана функция $\nu : \mathcal{P}^a \to [0, +\infty)$, аддитивная и инвариантная относительно сдвига на произвольный вектор из l_∞. Тогда функция ν однозначно продолжается до аддитивной функции на кольце $\mathcal{R}^a$. При этом продолжение является мерой, инвариантной относительно сдвига на произвольный вектор из l_∞.*

Как установлено в [21, 22], внешняя мера ν^*, построенная по мере ν на кольце $\mathcal{R}^a$, обладает следующим свойством.

Предложение 3.1 (см. [22, теорема 6])**.** *Для любого множества $A \in \mathcal{S}$ обладающего свойством $\nu(A) > 0$, выполняется равенство $\nu^*(A) = 0$.*

3.4. Меры на гильбертовом пространстве, инвариантные относительно сдвига, и пространства квадратично интегрируемых по ним функций. *Брусом* в вещественном сепарабельном гильбертовом пространстве H назовем множество $\Pi \subset H$, обладающее следующим свойством: найдется ортонормированный базис (ОНБ) $\{e_j\} \equiv \mathcal{E}$ в H, в котором координаты точек множества Π определяются условиями

$$\Pi = \Big\{x \in H : x_j \in [a_j, b_j),\ j \in \mathbb{N}\Big\}, \quad -\infty < a_j < b_j < +\infty, \quad j \in \mathbb{N}. \tag{3.8}$$

Множество Π вида (3.8) может оказаться пустым, например, если $a_j = 1$, $b_j = 2$ при всех $j \in \mathbb{N}$. Непустые брусы можно выделить из множеств вида (3.8) по следующему правилу. Для каждого бруса вида (3.8) определим величину

$$\theta(\Pi) \sum_{j=1}^{\infty} c_j^2 \in [0, +\infty],$$

где

$$c_j = \inf_{x\in[a_j,b_j)} |x|, \quad j \in \mathbb{N}.$$

Тогда $\Pi \neq \varnothing$ если и только если $\theta(\Pi) < +\infty$. Брус (3.8) называется *абсолютно измеримым*, если для него выполняется условие (3.2).

Выбор базиса $\mathcal{E}$ в гильбертовом пространстве H осуществляет изоморфизм $\Phi_{\mathcal{E}}$ пространств H и l_2. Поэтому, в соответствии с теоремой 3.4, для каждого ортонормированного базиса $\mathcal{E}$ в пространстве H изоморфизмом $\Phi_{\mathcal{E}}$ из пространства l_2 индуцирована структура кольца $\mathcal{R}(\mathcal{E})$ подмножеств пространства H с заданной на нем конечно-аддитивной неотрицательной инвариантной относительно сдвигов на векторы из пространства H мерой $\lambda(\mathcal{E})$.

Для каждого ортонормированнного базиса $\mathcal{E}$ обозначим через $\mathcal{P}(\mathcal{E})$ (соответственно, $\mathcal{P}^a(\mathcal{E})$) совокупность измеримых (соответственно, абсолютно измеримых) брусов с ребрами, сонаправленными с векторами базиса $\mathcal{E}$. Через $\mathcal{R}(\mathcal{E})$ (соответственно, через $\mathcal{R}^a(\mathcal{E})$) обозначим минимальное кольцо множеств, содержащее $\mathcal{P}(\mathcal{E})$ (соответственно, содержащее $\mathcal{P}^a(\mathcal{E})$). Тогда

$$\mathcal{P}^a(\mathcal{E}) \subset \mathcal{P}(\mathcal{E}), \quad \mathcal{R}^a(\mathcal{E}) \subset \mathcal{R}(\mathcal{E}),$$

причем совокупности множеств $\mathcal{P}^a(\mathcal{E})$, $\mathcal{P}(\mathcal{E})$, $\mathcal{R}^a(\mathcal{E})$, $\mathcal{R}(\mathcal{E})$ и $\mathcal{P}_2^a$, $\mathcal{P}_2$, $\mathcal{R}_2^a$, $\mathcal{R}_2$ (см. теоремы 3.4, 3.5) связаны изоморфизмом $\Phi_{\mathcal{E}}$.

Аналогично теореме 3.4 доказывается следующее утверждение.

Теорема 3.6. *Пусть на множестве абсолютно измеримых брусов $\mathcal{P}^a(\mathcal{E})$ задана функция $\nu : \mathcal{P}^a(\mathcal{E}) \to [0, +\infty]$, аддитивная и инвариантная относительно сдвига на произвольный вектор из пространства H. Тогда функция ν однозначно продолжается до аддитивной функции на кольце $\mathcal{R}^a(\mathcal{E})$. При этом продолжение является мерой, инвариантной относительно сдвига на произвольный вектор из H.*

Как отмечалось выше (см. замечания 3.1–3.2), существуют различные меры на гильбертовом пространстве l_2, инвариантные относительно сдвигов. Реализуем выбор одной из них, фиксировав выбор одной из аддитивных функций множества на классе $\mathcal{P}^a(\mathcal{E})$ по следующему правилу.

На совокупности брусов $\mathcal{P}^a(\mathcal{E})$ определим функцию множества $\nu_{\mathcal{E}}$, принимающую нулевое значение на пустых брусах, а на непустом брусе вида (3.8) заданную равенством

$$\nu_{\mathcal{E}}(\Pi) = \exp\left(\sum_{j=1}^{\infty} \ln(b_j - a_j)\right) \tag{3.9}$$

(см. (3.2)). Обозначим через $\lambda_{\mathcal{E}}$ конечно-аддитивную меру на кольце $\mathcal{R}^a(\mathcal{E})$, которая в силу теоремы 3.6 является единственным продолжением функции множества $\nu_{\mathcal{E}}$, определенной равенством (3.9) на классе $\mathcal{P}^a(\mathcal{E})$.

Множество $A \subset H$ назовем *$\lambda_{\mathcal{E}}$-измеримым*, если для каждого $\epsilon > 0$ найдутся такие множества $A_1, A_2 \in \mathcal{R}^a(\mathcal{E})$, что $A_1 \subset A \subset A_2$ и $\lambda_{\mathcal{E}}(A_2 \setminus A_1) < \epsilon$. Через $\mathcal{K}_{\mathcal{E}}$ обозначим совокупность $\lambda_{\mathcal{E}}$-измеримых множеств. Например, множество B, полученное из множества $A \in \mathcal{R}^a(\mathcal{E})$ поворотом в какой-либо двумерной координатной плоскости на произвольный угол, является $\lambda_{\mathcal{E}}$-измеримым; $\lambda_{\mathcal{E}}$-измеримым будет и множество, полученное из множества $A \in \mathcal{R}^a(\mathcal{E})$ с помощью ортогонального преобразования пространства H, не изменяющего координаты векторов начиная с некоторого номера $n_0 \in \mathbb{N}$.

Лемма 3.7 (см. [18, лемма 2]). *Совокупность $\mathcal{K}_{\mathcal{E}}$ $\lambda_{\mathcal{E}}$-измеримых множеств является кольцом.*

Исследуем вопрос о счетной аддитивности меры $\lambda_{\mathcal{E}}$ и о $\lambda_{\mathcal{E}}$-измеримости шаров. Для этой цели нам потребуется ввести в рассмотрение некоторые геометрические объекты (см. [18]) и понятие внешней и внутренней меры множества из пространства H.

Для произвольного множества $B \subset H$ и произвольного ортонормированного базиса $\mathcal{E}$ *внешней $\mathcal{E}$-мерой* множества называется величина

$$\bar{\mu}_{\mathcal{E}}(B) = \inf_{S \supset B}(\lambda_{\mathcal{E}}(B))$$

а *внутренней $\mathcal{E}$-мерой* — величина

$$\underline{\mu}_{\mathcal{E}}(B) = \sup_{S \subset B}(\lambda_{\mathcal{E}}(B)),$$

где точная грань берется по всевозможным множествам $S \in \mathcal{K}_{\mathcal{E}}$, содержащим множество B (содержащимся в множестве B). При этом в силу определения кольца $\mathcal{K}_{\mathcal{E}}$ $\lambda_{\mathcal{E}}$-измеримых множеств точные грани в определении внешней (внутренней) $\mathcal{E}$-меры множества можно брать не по множествам из кольца $\mathcal{K}_{\mathcal{E}}$, а по множествам из кольца $\mathcal{R}^a(\mathcal{E})$.

Лемма 3.8 (см. [18, лемма 4]). *Для шара радиуса $R > 1$ верны равенства*

$$\underline{\mu}_{\mathcal{E}}(B_R) = 0, \quad '\bar{\mu}_{\mathcal{E}}(B_R) = +\infty.$$

Если $R \in [0, 1/2)$, то $\bar{\mu}_{\mathcal{E}}(B_R) = 0$.

Лемма 3.9. *Для любого компактного множества $K \subset H$ выполнено равенство $\bar{\mu}_{\mathcal{E}}(K) = 0$.*

Действительно, компактное множество ограничено и, следовательно, лежит в некотором шаре радиуса R. Кроме того, для любого $\epsilon > 0$ существует такое натуральное N, что множество K лежит в ϵ-окрестности N-мерной гиперплоскости пространства H. Поэтому множество K можно покрыть конечным числом брусов нулевой $\lambda_{\mathcal{E}}$-меры.

Теорема 3.7 (см. [18, теорема 1]). *Мера $\lambda_{\mathcal{E}}$ не является счетно-аддитивной.*

Действительно, единичный куб пространства H с ребрами $[0, 1)$, $\lambda_{\mathcal{E}}$-мера которого равна единице, является объединением счетного сножества кубов с ребр $[0, 1-1/n)$ длины $1-1/n$, $\lambda_{\mathcal{E}}$-мера каждого из которых равна нулю.

Рассмотрим линейное пространство $\mathcal{P}(\mathcal{E})$ над полем $\mathbb{C}$ линейных комбинаций индикаторных функций из кольца $\mathcal{K}_{\mathcal{E}}$ и определим на пространстве $\mathcal{P}(\mathcal{E})$ неотрицательно определенную эрмитову полуторалинейную форму по следующему правилу: для любых $A, B \in \mathcal{K}_{\mathcal{E}}$ положим

$$(\chi_A, \chi_B) = \lambda_{\mathcal{E}}(A \cap B),$$

а для произвольных функций $u, v \in \mathcal{P}(\mathcal{E})$ вида

$$u = \sum_{j=1}^{n} c_j \chi_{A_j}, \quad v = \sum_{k=1}^{m} b_k \chi_{B_k}$$

положим

$$\beta_{\mathcal{E}}(u, v) \equiv (u, v)_{\mathcal{H}(E)} = \left(\sum_{j=1}^{n} c_j \chi_{A_j},\ \sum_{k=1}^{m} b_k \chi_{B_k} \right) = \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \bar{b}_k c_j (\chi_{A_j},\ \chi_{B_k}). \tag{3.10}$$

Две функции u и v из линейного пространства $\mathcal{P}(\mathcal{E})$ назовем *эквивалентными*, если

$$\beta_{\mathcal{E}}(u - v, u - v) = 0.$$

Линейное пространство классов эквивалентности функций из пространства $\mathcal{P}(\mathcal{E})$ с введенной полуторалинейной формой $\beta_{\mathcal{E}}$ является предгильбертовым; по нему с помощью стандартной процедуры пополнения определяется гильбертово пространство, обозначаемое далее через $L_2(H, \mathcal{K}_{\mathcal{E}}, \lambda_{\mathcal{E}}) \equiv \mathcal{H}_{\mathcal{E}}$.

Итак, для каждого ортонормированного базиса $\mathcal{E}$ в пространстве H имеется кольцо $\mathcal{K}_{\mathcal{E}}$ $\lambda_{\mathcal{E}}$-измеримых множеств, на котором определена мера $\lambda_{\mathcal{E}}$, и определено гильбертово пространство $\mathcal{H}_{\mathcal{E}}$ квадратично интегрируемых $\lambda_{\mathcal{E}}$-измеримых функций на пространстве H.

Лемма 3.10. *Пространство $\mathcal{H}_{\mathcal{E}}$ не сепарабельно.*

Действительно, пространство $\mathcal{H}_{\mathcal{E}}$ содержит систему единичных ортогональных векторов $e_\alpha = \chi_{Q_\alpha}$, где χ_{Q_α} — индикаторная функция единичного куба с ребрами $[\alpha_j, \alpha_j + 1]$, $j \in \mathbb{N}$ при условии, что все числа α_j могут принимать произвольные значения из двухэлементного множества $\{-1, 0\}$. Таким образом, каждое отображение $\alpha : \mathbb{N} \to \{-1, 0\}$ задает единичный куб Q_α, причем для различных отображений α, β кубы Q_α, Q_β не имеют общих внутренних точек и поэтому $(\chi_{Q_\alpha}, \chi_{Q_\beta})_{\mathcal{H}_{\mathcal{E}}} = 0$; при этом, поскольку при любом α куб Q_α является непустым брусом с ребрами единичной длины,

$$\left(\chi_{Q_\alpha}, \chi_{Q_\alpha}\right)_{\mathcal{H}_{\mathcal{E}}} = 1.$$

Поскольку множество отображений $\alpha : \mathbb{N} \to \{-1, 0\}$ несчетно, то пространство $\mathcal{H}_{\mathcal{E}}$ содержит несчетную ортонормированную систему векторов.

Следствие 3.2. *Мера $\lambda_{\mathcal{E}}$ не является σ-конечной.*

Замечание 3.3. Пусть A, B — два множества в H, которые конгруэнтны в том смысле, что существует унитарное преобразование $\mathbf{U}$ пространства H и, быть может, параллельный перенос $\mathbf{P}$ в H, композиция которых переводит одно множество в другое: $B = \mathbf{P} \circ \mathbf{U}(A)$ и $A \in K_{\mathcal{E}}$ для некоторого ОНБ $\mathcal{E}$. Тогда найдется такой ОНБ $\mathcal{F}$ (ОНБ $\mathcal{F}$ получается из ОНБ $\mathcal{E}$ действием унитарного преобразования $\mathbf{U}$), что $B \in K_{\mathcal{F}}$ и $\lambda_{\mathcal{F}}(B) = \lambda_{\mathcal{E}}(A)$. Поскольку меры измеримых брусов сохраняются при параллельных переносах и унитарных преобразованиях, то сохраняются и меры измеримых относительно ОНБ множеств: если $A \in K_{\mathcal{E}}$ для некоторого ОНБ $\mathcal{E}$, $\mathcal{F} = \mathbf{U}(\mathcal{E})$, and $B = \mathbf{P} \circ \mathbf{U}(A)$, then $B \in K_{\mathcal{F}}$ and $\lambda_{\mathcal{F}}(B) = \lambda_{\mathcal{E}}(A)$.

Пусть $\mathcal{S}$ — множество всех ортонормированных базисов в гильбертовом пространстве H. Тогда $\{K_{\mathcal{E}},\ \mathcal{E} \in \mathcal{S}\}$ — семейство колец подмножеств пространства H. Обозначим через $\mathcal{M}$ множество всех подмножеств пространства H, входящих хотя бы в одно из колец этого семейства. Множество $\mathcal{M}$ не является ни кольцом, ни полукольцом. Определим функцию $\lambda : \mathcal{M} \to [0, +\infty]$, заданную равенством

$$\lambda(A) = \lambda_{\mathcal{E}}(A), A \in K_{\mathcal{E}}.$$

Функция λ определена корректно, так как если $A \in K_{\mathcal{E}} \cap K_{\mathcal{F}}$, то $\lambda_{\mathcal{E}}(A) = \lambda_{\mathcal{F}}(A)$, ибо в силу замечания 3.3 функция λ обладает следующим свойством: если множества $A, B \in \mathcal{M}$ конгруэнтны, то $\lambda(A) = \lambda(B)$. Рассмотрим теперь минимальное кольцо $\mathcal{K}$, содержащее систему множеств $\mathcal{M}$, и поставим задачу о продолжении функции λ с множества $\mathcal{M}$ на кольцо $\mathcal{K}$. Эта задача будет решена в следующем разделе.

4. Меры на гильбертовом пространстве, инвариантные относительно сдвигов и поворотов

Для каждого ортонормированного базиса $\mathcal{E} \in \mathcal{S}$ в разделе 3 определено гильбертово пространство $\mathcal{H}_{\mathcal{E}}$, скалярное произведение в котором определяется полуторалинейной формой $\beta_{\mathcal{E}}$.

4.1. Продолжение скалярного произведения на линейную оболочку пространств $\mathcal{H}_{\mathcal{E}}$, $\mathcal{E} \in \mathcal{S}$. Рассмотрим линейную оболочку $\mathcal{L} = \mathrm{lin}(\mathcal{H}_{\mathcal{E}},\ \mathcal{E} \in \mathcal{S})$ пространств $\mathcal{H}_{\mathcal{E}}$, $\mathcal{E} \in \mathcal{S}$, как линейное пространство, на линейных подпространствах $\mathcal{H}_{\mathcal{E}}$ которого заданы эрмитовы положительно определенные полуторалинейные формы $\beta_{\mathcal{E}}$, определяющие скалярное произведение в $\mathcal{H}_{\mathcal{E}}$. Поставим вопрос о существовании такой полуторалинейной формы β на линейном пространстве $\mathcal{L}$, сужение которой на любое линейное подпространство $\mathcal{H}_{\mathcal{E}}$ совпадает с эрмитовой полуторалинейной формы $\beta_{\mathcal{E}}$. Решение этого вопроса дают следующие две теоремы, подробное доказательство которых содержится в [18].

Теорема 4.1 (см. [18, теорема 3]). *Каждому отношению полного порядка $\prec$ на множестве ортонормированных базисов $\mathcal{S}$ соответствует эрмитова положительно определенная полуторалинейная форма $\beta_{\prec}$, заданная на линейной оболочке $\mathcal{L} = \mathrm{lin}(\mathcal{H}_{\mathcal{E}},\ \mathcal{E} \in \mathcal{S})$ пространств $\mathcal{H}_{\mathcal{E}}$, $\mathcal{E} \in \mathcal{S}$, сужение которой на пространство $\mathcal{H}_{\mathcal{E}}$ совпадает с полуторалинейной формой $\beta_{\mathcal{E}}$ при любом $\mathcal{E} \in \mathcal{S}$.*

Теорема 4.2 (см. [18, теорема 4]). *Полуторалинейная форма $\beta_{\prec}$ на линейном пространстве $\mathcal{L}$ не зависит от выбора отношения полного порядка $\prec$ на множестве $\mathcal{S}$.*

Обозначим через β эрмитову положительно определенную полуторалинейную форму на линейном пространстве $\mathcal{L}$, соответствующую какому-либо выбору отношения полного порядка на множестве $\mathcal{S}$. Определим гильбертово пространство $\mathcal{H}$ как пополнение евклидова пространства $(\mathcal{L},\ \beta)$.

4.2. Продолжение мер $\lambda_{\mathcal{E}}$ с колец $\mathcal{K}_{\mathcal{E}}$, $\mathcal{E} \in \mathcal{S}$, на порожденное ими кольцо. .

Рассмотрим минимальное кольцо $\mathcal{K}$, содержащее множества, входящие в кольца $\mathcal{K}_{\mathcal{E}}$, $\mathcal{E} \in \mathcal{S}$. Поставим вопрос о существовании меры λ (конечно аддитивной), заданной на кольце $\mathcal{K}$, сужение которой на любое кольцо $\mathcal{K}_{\mathcal{E}}$ совпадает с мерой $\lambda_{\mathcal{E}}$.

Теорема 4.3 (см. [18, следствие 4]). *Продолжение β скалярного произведения с пространств $\mathcal{H}_\mathcal{E}$, $\mathcal{E} \in \mathcal{S}$, на пространство $\mathcal{H}$ однозначно определяет продолжение меры λ на минимальное кольцо $\mathcal{K}$, содержащее множества, входящие в какое-либо из колец $\mathcal{K}_\mathcal{E}$, $\mathcal{E} \in \mathcal{S}$, и обладающее свойством*

$$\lambda\big|_{\mathcal{K}_\mathcal{E}} = \lambda_\mathcal{E}.$$

При этом мера λ инвариантна относительно сдвигов и поворотов в пространстве H.

В [18] установлено, что для произвольных $A \in \mathcal{K}_\mathcal{E}$, $B \in \mathcal{K}_\mathcal{F}$ выполняется равенство

$$\lambda(A \cap B) = \beta(\chi_A, \chi_B).$$

На других множества из алгебры $\mathcal{K}$ мера λ определяется из условия аддитивности.

Мера λ является конечно-аддитивным аналогом меры Лебега на бесконечномерном гильбертовом пространстве как инвариантная относительно движений мера на минимальном кольце, содержащем все измеримые брусы из пространства H.

5. Случайные блуждания и математические ожидания функционалов от них

5.1. Операторы в пространстве $\mathcal{H}_\mathcal{E}$. Пусть $\mathcal{E}$ — некоторый ортонормированный базис в пространстве H и для каждого вектора $x \in H$ последовательность $\{x_j\}$ — последовательность координат вектора x в базисе $\mathcal{E}$. Для каждого $j \in \mathbb{N}$ обозначим через $\mathcal{D}_{\mathcal{E},j}$ плотное в пространстве $\mathcal{H}_\mathcal{E}$ линейное пространство, состоящее из таких функций из пространства $\mathcal{H}_\mathcal{E}$, для которых справедливо представление $u(x) = u_j(x_j)v(\hat{x})$, где $x = x_j \times \hat{x}$, $x_j \in \mathbb{R}$, $x \in H$, и выполняется условие $u_j \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Тогда на линейном пространстве $\mathcal{D}_{\mathcal{E},j}$ при каждом $j \in \mathbb{N}$ определен линейный оператор $\partial_j : \mathcal{D}_{\mathcal{E},j} \to \mathcal{D}_{\mathcal{E},j}$, ставящий функции $u \in \mathcal{D}_{\mathcal{E},j}$ в соответствие функцию $\dfrac{\partial}{\partial x_j}u \in \mathcal{D}_{\mathcal{E},j}$ (точнее, классу функций, содержащих в качестве представителя функцию u, класс функций, содержащих в качестве представителя функцию $\dfrac{\partial}{\partial x_j}u$).

Замечание 5.1. При каждом $j \in \mathbb{N}$ оператор $i\partial_j$ является симметрическим плотно определенным оператором в пространстве $\mathcal{H}_\mathcal{E}$, замыкание которого является самосопряженным оператором.

Замечание 5.2. При каждом $j \in \mathbb{N}$ заданный на линейном пространстве $\mathcal{D}_{\mathcal{E},j}$ линейный оператор $\hat{x}_j$ умножения на функцию $\phi(x) = x_j$ является симметрическим плотно определенным оператором в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}_\mathcal{E}$, замыкание которого является самосопряженным оператором.

Определим на пространстве $\mathcal{H}_\mathcal{E}$ операторы $\mathbf{S}_h$ сдвига на вектор $h \in H$, действующие по правилу $\mathbf{S}_h u(x) = u(x+h)$. По определению пространства $\mathcal{H}_\mathcal{E}$ оператор сдвига $\mathbf{S}_h$ при любом выборе вектора $h \in H$ определен на всем пространстве $\mathcal{H}_\mathcal{E}$ и является унитарным оператором в $\mathcal{H}_\mathcal{E}$.

Для каждого вектора $h \in H$ определим на пространстве $\mathcal{H}_\mathcal{E}$ однопараметрическое семейство операторов $\mathbf{S}_{th}$, $t \in \mathbb{R}$, сдвига на вектор $th \in H$, действующих по правилу

$$\mathbf{S}_{th}u(x) = u(x+th). \tag{5.1}$$

Такое семейство операторов является однопараметрической группой унитарных операторов в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}_\mathcal{E}$.

Лемма 5.1. *Однопараметрические группы унитарных операторов $\mathbf{S}_{te_j}$, $t \in \mathbb{R}$, $j \in \mathbb{N}$, являются сильно непрерывными в подпространстве $\mathcal{H}_\mathcal{E}$.*

Если функция u_Π является индикатором измеримого бруса $\Pi \in \mathcal{P}^a(\mathcal{E})$ и $h = e_j$, то операторы $\mathbf{S}_{th}$, $t \in \mathbb{R}$, действуют как операторы сдвига вдоль j-го ребра бруса.

Если мера бруса Π равна нулю, то

$$\left\| \mathbf{S}_{th}u_\Pi - u_\Pi \right\|_\mathcal{H} = 0$$

при всех $t > 0$. Если $\lambda_{\mathcal{E}}(\Pi) > 0$, то из условия $0 < \lambda_{\mathcal{E}}(\Pi) < +\infty$ следует, что $\ln(b_j - a_j) \xrightarrow[j\to\infty]{} 0$. Следовательно, существует такое $\sigma > 0$, что $b_j - a_j > \sigma$ при всех $j \in \mathbb{N}$. Поэтому для любого $\epsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что при любых $t \in (-\delta, \delta)$ и любых $j \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство

$$\left\|\mathbf{S}_{te_j} u_\Pi - u_\Pi\right\|_{\mathcal{H}_{\mathcal{E}}} < \epsilon. \tag{5.2}$$

Операторы сдвига вдоль двух разных направлений e_i, e_j коммутируют, а оператор сдвига вдоль произвольного единичного вектора $l \in H$ является композицией операторов сдвига вдоль координатных осей.

В силу полученной равномерной по всем направлениям e_j, $j \in \mathbb{N}$, оценки (5.2) для любого $l \in H$, обладающего свойством

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left|(e_j, l)\right| < \infty, \tag{5.3}$$

существует такое $\delta > 0$, что при всех $t \in (-\delta, \delta)$ выполняется неравенство

$$\left\|\mathbf{S}_{tl} u_\Pi - u_\Pi\right\|_{\mathcal{H}_{\mathcal{E}}} < C(\Pi) \left(t \sum_{j=1}^{\infty} \left|(e_j, l)\right| \right)^{1/2} \left\|u_\Pi\right\|_{\mathcal{H}_{\mathcal{E}}}.$$

Итак, при любом выборе вектора $l \in H$, обладающего свойством (5.3) однопараметрическая группа унитарных операторов $\mathbf{S}_{tl}$, $t \in \mathbb{R}$, является сильно непрерывной на индикаторах измеримых брусов, а поскольку любой элемент $u \in \mathcal{H}_{\mathcal{E}}$ может быть с любой точностью приближен в $\mathcal{H}_{\mathcal{E}}$-норме линейной комбинацией индикаторов измеримых брусов, то, следовательно, группа унитарных операторов $\mathbf{S}_{tl}$, $t \in \mathbb{R}$, является непрерывной в сильной операторной топологии пространства $B(\mathcal{H}_{\mathcal{E}})$.

У каждой сильно непрерывной группы унитарных операторов в пространстве $\mathcal{H}_{\mathcal{E}}$ должен быть самосопряженный в пространстве $\mathcal{H}_{\mathcal{E}}$ генератор. Если $h = e_j$, то генератором группы $\mathbf{S}_{th}$, $t \in \mathbb{R}$, унитарных операторов является оператор $i\partial_j$ (см. замечание 5.1).

Замечание 5.3. Для произвольного $h \in E$ унитарная группа $\mathbf{S}_{th}$, $t \in \mathbb{R}$, может не являться сильно непрерывной в $\mathcal{H}_{\mathcal{E}}$ (например, если $(e_j, h_j) = j^{-1}$).

5.2. Случайные сдвиги и операторы диффузии в пространстве $\mathcal{H}_{\mathcal{E}}$. Пусть H — вещественное сепарабельное гильбертово пространство и $\mathbf{D}$ — ядерный положительный самосопряженный оператор с ортонормированным базисом из собственных векторов $\mathcal{F}$. Пусть $\lambda_{\mathcal{E}}$ — неотрицательная локально конечная конечно-аддитивная мера на кольце $\mathcal{K}_{\mathcal{E}}$ подмножеств пространства H.

Пусть $\mathcal{H}_{\mathcal{E}} = L_2(H, \mathcal{K}_{\mathcal{E}}, \lambda_{\mathcal{E}})$ и для каждого вектора $h \in H$ определено преобразование сдвига $\mathbf{U}_{\mathcal{E},h}$ пространства $\mathcal{H}_{\mathcal{E}}$, действующее на произвольный элемент $u \in \mathcal{H}_{\mathcal{E}}$ по формуле

$$\mathbf{S}_{\mathcal{E},h} u(x) = u(x+h). \tag{5.4}$$

Пусть ν_t, $t \geqslant 0$, — однопараметрическое семейство таких гауссовских мер на пространстве H, что при каждом $t \geqslant 0$ мера ν_t имеет преобразование Фурье $\tilde{\nu}_t(\xi) = e^{-\frac{t}{2}\mathbf{D}\xi^2}$, т.е. ν_t — гауссовская мера на пространстве H с нулевым математическим ожиданием и ковариационным оператором $t\mathbf{D}$ (ядерность ковариационного оператора меры эквивалентна существованию у меры конечного второго момента, см. [9, теорема 2.1]). Однопараметрическое семейство гауссовских мер ν_t, $t \geqslant 0$, на пространстве H образует полугруппу относительно операции сверточного умножения: $\nu_t * \nu_s = \nu_{t+s}$ для всех $t, s \in \mathbb{R}_+$.

По введенному однопараметрическому семейству гауссовских мер ν_t, $t \geqslant 0$, определим однопараметрическое семейство $\mathcal{U}_{\nu,\mathcal{E}}(t)$, $t \geqslant 0$, преобразований пространства $\mathcal{H}_{\mathcal{E}}$ как результат усреднения случайного преобразования сдвига $\mathbf{S}_{\mathcal{E},h}$, распределение случайного параметра $h \in H$ которого в каждый момент времени $t \geqslant 0$ задается мерой ν_t на пространстве H. Тогда в каждый момент времени $t \geqslant 0$ образ $\mathcal{U}_{\nu,\mathcal{E}}(t)u$ элемента $u \in H$ определяется равенством

$$\mathcal{U}_{\nu,\mathcal{E}}(t)u(x) = \int\limits_H u(x+h)\,d\nu_t(h) = \int\limits_H \mathbf{S}_{\mathcal{E},h} u(x)\,d\nu_t(h). \tag{5.5}$$

Равенство (5.5) определяется как интеграл Петтиса в следующем смысле:

$$(\mathcal{U}_{\nu,\mathcal{E}}(t)u,v)_{\mathcal{H}} = \int\limits_H (\mathbf{S}_{\mathcal{E},h}u,v)_{\mathcal{H}} d\nu_t(h) \quad \forall v \in \mathcal{H}_{\mathcal{E}}. \tag{5.6}$$

Рассмотрим сначала действие оператора $\mathcal{U}_{\nu,\mathcal{E}}(t)$ на индикаторную функцию u измеримого бруса Π и рассмотрим скалярное произведение (5.6) в предположении, что элемент v является индикаторной функцией u измеримого бруса Π'.

При каждом $h \in H$ имеем $\mathbf{S}_{\mathcal{E},h}u \in \mathcal{H}_{\mathcal{E}}$, а числовая функция $\phi(h) = (\mathbf{S}_{\mathcal{E},h}u,v)_{\mathcal{H}_{\mathcal{E}}}$, $h \in H$, ограничена и ν_t-измерима. Действительно, поскольку $\mathbf{U}_{\mathcal{E},h}u$ и v — индикаторные функции брусов из класса $\mathcal{P}^a(\mathcal{E})$, то функция ϕ является произведением счетного множества цилиндрических функций вида $\phi_j(h)$, зависящих только от величины $h_j = (h,e_j)$, $j \in \mathbb{N}$. Цилиндрические множества являются ν_t-измеримыми, поэтому ν_t-измерима и функция ϕ (см. [1, теорема 2.1.5]). Следовательно, *ограниченная измеримая функция* $\phi(h)$, $h \in H$, интегрируема по мере ν_t с вариацией, равной единице.

Поэтому правая часть выражения (5.6) определена при всех $u,v \in \mathcal{H}_{\mathcal{E}}$ и в силу неравенства

$$\int\limits_H (\mathbf{S}_{\mathcal{E},h}u,v)_{\mathcal{H}_{\mathcal{E}}} d\nu_t(h) \leqslant \|v\|_{\mathcal{H}_{\mathcal{E}}} \|\mathbf{S}_{\mathcal{E},h}u\|_{\mathcal{H}_{\mathcal{E}}} \|\nu_t\|_{var} = \|u\|_{\mathcal{H}_{\mathcal{E}}} \|v\|_{\mathcal{H}_{\mathcal{E}}}$$

является полуторалинейной непрерывной формой. Следовательно, при любом $t \geqslant 0$ определен оператор $\mathcal{U}_{\nu,\mathcal{E}}(t) \in B(\mathcal{H}_{\mathcal{E}})$, норма которого не превосходит единицы.

Лемма 5.2. *Однопараметрическое семейство операторов* $\mathcal{U}_{\nu,\mathcal{E}}(t)$, $t \geqslant 0$, *является полугруппой*:

$$\mathcal{U}_{\nu,\mathcal{E}}(t)\mathcal{U}_{\nu,\mathcal{E}}(s) = \mathcal{U}_{\nu,\mathcal{E}}(t+s) \quad \forall t,s \in \mathbb{R}_+.$$

Доказательство. Действительно, рассмотрим выражение (5.6) при $t = s + r$. Поскольку мера $\nu_t * \nu_s$ является образом меры $\nu_t \otimes \nu_s$ на $H \times H$ при отображении

$$\varphi : H \times H \to H, \quad \varphi(x,y) = x + y,$$

то для всякой функции $f : H \to \mathbb{C}$, измеримой относительно алгебры борелевских подмножеств на H, справедливо равенство

$$\int\limits_H f(x) d\nu_t * \nu_s(x) = \int\limits_{H\times H} f(x+y) d(\nu_t \otimes \nu_s)(x,y).$$

Следовательно,

$$(\mathcal{U}_{\nu,\mathcal{E}}(s+r)u,v)_{\mathcal{H}_{\mathcal{E}}} = \int\limits_H (\mathbf{S}_{\mathcal{E},h}u,v)_{\mathcal{H}_{\mathcal{E}}} d\nu_{s+r}(h).$$

Фиксировав векторы $u,v \in \mathcal{H}$, определим функцию

$$f_{u,v}(h) = (\mathbf{S}_{\mathcal{E},h}u,v)_{\mathcal{H}_{\mathcal{E}}}, \quad h \in H.$$

Функция $f_{u,v}$ измерима и ограничена на H. Тогда

$$(\mathcal{U}_{\nu,\mathcal{E}}(s+r)u,v)_{\mathcal{H}_{\mathcal{E}}} = \int\limits_H f_{u,v}(h) d\nu_{s+r}(h).$$

В силу полугруппового свойства семейства мер ν_t, $t \geqslant 0$, справедливо равенство

$$\nu_{s+r}(B) = \nu_s * \nu_r,$$

поэтому

$$\int\limits_H f_{u,v}(h) d\nu_{s+r}(h) = \int\limits_{H\times H} f_{u,v}(x+y) d(\nu_s \otimes \nu_r)(x,y).$$

Поскольку функция $f_{u,v}$ измерима на H и ограничена, то функция $f_{u,v}(x+y)$, $(x,y) \in H \times H$, непрерывна на $H \times H$ (и, следовательно, измерима) и ограничена. Поэтому в силу теоремы Фубини

$$\int\limits_{H\times H} f_{u,v}(x+y)d(\nu_s \otimes \nu_r)(x,y) = \int\limits_H \left[\int\limits_H f_{u,v}(x+y)d\nu_s(x)\right] d\nu_r(y) = \int\limits_H \left[\int\limits_H f_{u,v}(x+y)d\nu_r(y)\right] d\nu_s(x).$$

С другой стороны,

$$(\mathcal{U}_{\nu,\mathcal{E}}(s)\mathcal{U}_{\nu,\mathcal{E}}(r)u,v)_{\mathcal{H}_\mathcal{E}} = \int\limits_H (\mathbf{S}_{\mathcal{E},h}\mathcal{U}_{\nu,\mathcal{E}}(r)u,v)_{\mathcal{H}_\mathcal{E}} d\nu_s(h) = \int\limits_H \left[\int\limits_H (\mathbf{S}_{\mathcal{E},\sigma}(\mathbf{S}_{\mathcal{E},h}u),v)_{\mathcal{H}_\mathcal{E}} d\nu_r(\sigma)\right] d\nu_s(h)$$

$$= \int\limits_H \left[\int\limits_H (\mathbf{S}_{\mathcal{E},h+\sigma}u,v)_{\mathcal{H}_\mathcal{E}} d\nu_r(\sigma)\right] d\nu_s(h) = \int\limits_H \left[\int\limits_H f_{u,v}(h+\sigma)d\nu_r(\sigma)\right] d\nu_s(h).$$

Поэтому

$$\mathcal{U}_{\nu,\mathcal{E}}(s)\mathcal{U}_{\nu,\mathcal{E}}(r) = \mathcal{U}_{\nu,\mathcal{E}}(s+r)$$

для всех $r, s \geqslant 0$ и лемма 5.2 доказана. □

С помощью растяжения переменной интегрирования устанавливается следующее утверждение.

Лемма 5.3. *Для любого $t > 0$ и любого измеримого бруса Π однопараметрическое семейство гауссовых мер ν_t, $t > 0$, удовлетворяет равенству*

$$\int\limits_H u_\Pi(x+h)d\nu_t(h) = \int\limits_H u_\Pi\bigl(x+\sqrt{t}h\bigr)d\nu_1(h).$$

Теорема 5.1. *Пусть корреляционный оператор $\mathbf{D}$ гауссовской меры ν_1 невырожден и таков, что $\mathbf{D}^{1/2}$ является ядерным. Тогда однопараметрическая полугруппа $\mathcal{U}_{\nu,\mathcal{E}}$ является сильно непрерывной.*

Для доказательства теоремы 5.1 достаточно показать, что для любого измеримого бруса Π выполняется условие

$$\lim_{t\to+0} \Bigl\|\mathcal{U}_{\nu,\mathcal{E}}(t)u_\Pi - u_\Pi\Bigr\|_{\mathcal{H}_\mathcal{E}} = 0.$$

Но

$$\Bigl\|\mathcal{U}_{\nu,\mathcal{E}}(t)u_\Pi - u_\Pi\Bigr\|_{\mathcal{H}_\mathcal{E}} = \Bigl\|\int\limits_H (\mathbf{S}_{\mathcal{E},h}u_\Pi - u_\Pi)d\nu_t(h)\Bigr\|_{\mathcal{H}_\mathcal{E}}$$

$$\leqslant \int\limits_H \Bigl\|\mathbf{S}_{\mathcal{E},h}u_\Pi - u_\Pi\Bigr\|_{\mathcal{H}_\mathcal{E}} d\nu_t(h) = \int\limits_H \Bigl\|\mathbf{S}_{\mathcal{E},\sqrt{t}h}u_\Pi - u_\Pi\Bigr\|_{\mathcal{H}_\mathcal{E}} d\nu_1(h).$$

Фиксируем некоторое число $\sigma > 0$. Для гауссовой меры ν_1 существует такое число R_1, что

$$\nu_1(B_{R_1}) \geqslant 1 - \frac{\sigma}{2}, \tag{5.7}$$

где

$$B_{R_1} = \Bigl\{h \in H :\ \bigl|(e_j,h)\bigr| < R_1\sqrt{d_j}\ \forall j \in \mathbb{N}\Bigr\}.$$

Как установлено в лемме 5.1, для произвольного измеримого бруса Π имеет место равномерная по всем направлениям непрерывность относительно сдвига (см. (5.2)): для любого $l \in H$, удовлетворяющего условию (5.3), существует такое $\delta > 0$, что для всех $t \in (-\delta, \delta)$ выполняется неравенство

$$\Bigl\|\mathbf{S}_{tl}u_\Pi - u_\pi\Bigr\|_{\mathcal{H}_\mathcal{E}} < \frac{\sigma}{2}. \tag{5.8}$$

Следовательно, в силу (5.7), (5.8) и леммы 5.3 справедлива оценка

$$\left\|\mathcal{U}_{\nu,\mathcal{E}}(t)u_{\Pi} - u_{\Pi}\right\|_{\mathcal{H}_{\mathcal{E}}} \leqslant \int\limits_{h\in B_{R_1}} \left\|\mathbf{S}_{\mathcal{E},\sqrt{t}h}u_{\Pi} - u_{\Pi}\right\|_{\mathcal{H}_{\mathcal{E}}} d\nu_1(h) + \int\limits_{h\in H\setminus B_{R_1}} \left\|\mathbf{S}_{\mathcal{E},\sqrt{t}h}u_{\Pi} - u_{\Pi}\right\|_{\mathcal{H}_{\mathcal{E}}} d\nu_1(h) \leqslant C\sigma.$$

А поскольку любой элемент $u \in \mathcal{H}_{\mathcal{E}}$ может быть с любой точностью приближен в $\mathcal{H}_{\mathcal{E}}$-норме линейной комбинацией индикаторов измеримых брусов, то однопараметрическая полугруппа $\mathcal{U}_{\nu,\mathcal{E}}(t)$, $t \in [0,+\infty)$, сжимающих операторов в пространстве $\mathcal{H}_{\mathcal{E}}$ является сильно непрерывной.

Следствие 5.1. *Сильно непрерывная полугруппа $\mathcal{U}_{\nu,\mathcal{E}}$ сжимающих операторов в пространстве $\mathcal{H}_{\mathcal{E}}$ диссипативным самосопряженным генератором $\Delta_{\nu,\mathcal{E}}$.*

Сильно непрерывная полугруппа $\mathcal{U}_{\nu,\mathcal{E}}$ сжимающих операторов в пространстве $\mathcal{H}_{\mathcal{E}}$ обладает плотно определенным замкнутым максимальным диссипативным генератором $\Delta_{\nu,\mathcal{E}}$. Ограниченные операторы $\mathcal{U}_{\nu,\mathcal{E}}(t)$, $t \geqslant 0$, являются самосопряженными, ибо при всех $u, v \in \mathcal{H}_{\mathcal{E}}$ равенство

$$\big(\mathcal{U}_{\nu,\mathcal{E}}(t)u, v\big) = \big(u, \mathcal{U}_{\nu,\mathcal{E}}(t)v\big)$$

справедливо в силу равенства (5.5) и инвариантности гауссовских мер ν_t относительно центральной симметрии в пространстве H. Поэтому и генератор $\Delta_{\nu,\mathcal{E}}$ полугруппы $\mathcal{U}_{\nu,\mathcal{E}}(t)$, $t \geqslant 0$, является самосопряженным оператором в пространстве H, неположительным в силу того, что является генератором сжимающей полугруппы.

Итак, для произвольного ортонормированного базиса $\mathcal{E}$ однопараметрическая полугруппа (относительно сверточного умножения мер) гауссовских мер ν_t, $t \geqslant 0$, определяет однопараметрическую полугруппу $\mathcal{U}_{\nu,\mathcal{E}}$ сжимающих преобразований в пространствах $\mathcal{H}_{\mathcal{E}}$.

6. Полугруппы и их генераторы

Для каждого вектора $h \in H$ операторы сдвига $\mathbf{S}_{\mathcal{E},h}$, заданные на каждом пространстве $\mathcal{H}_{\mathcal{E}}$, $\mathcal{E} \in \mathcal{S}$, соотношениями (5.4), допускают, очевидно, единственное продолжение до оператора сдвига $\mathbf{S}_h$, действующего в объемлющем пространстве $\mathcal{H}$ по правилу

$$\mathbf{S}_h u(x) = u(x+h), \quad x \in H,\ u \in \mathcal{H}. \tag{6.1}$$

В [18] установлено, что однопараметрические полугруппы, заданные на каждом пространстве $\mathcal{H}_{\mathcal{E}}$, $\mathcal{E} \in \mathcal{S}$, соотношениями (5.5), допускают единственное продолжение однопараметрической полугруппы в объемлющем пространстве $\mathcal{H}$.

Теорема 6.1 (см. [18, теорема 5])**.** *Пусть $\mathcal{S}$ — множество ортонормированных базисов в пространстве H, ν — гауссовская мера на пространстве H с нулевым математическим ожиданием и ядерным положительным ковариационным оператором $\mathbf{D}$, определяющая для каждого базиса $\mathcal{E} \in \mathcal{S}$ однопараметрическую полугруппу линейных самосопряженных сжимающих операторов $\mathcal{U}_{\nu,\mathcal{E}}$ в пространстве $\mathcal{H}_{\mathcal{E}}$ посредством равенств*

$$\mathcal{U}_{\nu,\mathcal{E}}(t)u = \int\limits_{H} \mathbf{S}_{\sqrt{t}h} u\, d\nu(h), \quad t \geqslant 0, \quad u \in \mathcal{H}_{\mathcal{E}}.$$

Тогда существует единственная однопараметрическая полугруппа сжимающих операторов $\mathcal{U}_{\nu}$ в пространстве $\mathcal{H}$, сужение которой на любое подпространство $\mathcal{H}_{\mathcal{E}}$ совпадает с полугруппой операторов $\mathcal{U}_{\nu,\mathcal{E}}$.

Пример 6.1. Пусть $h_0 \in H$, $\nu_1 = \delta(h - h_0)$, и

$$\nu_t = \delta(h - th_0) \tag{6.2}$$

при всех $t \geqslant 0$. При этом $\nu_t * \nu_s = \nu_{t+s}$ при любых $t, s \geqslant 0$.

Оператор $\mathbf{S}_{h_0}$ действует на произвольную функцию (точнее, на произвольный класс эквивалентности функций) $u \in \mathcal{H}$ по правилу

$$\mathbf{S}_{h_0}u(x) = u(x+h_0), \quad x \in H.$$

Однопараметрическое семейство $\mathcal{U}(t)$, $t \geqslant 0$, преобразований пространства $\mathcal{H}$, определяемое как результат усреднения случайного преобразования сдвига $\mathbf{S}_h$, распределение случайного параметра h которого в каждый момент времени $t \geqslant 0$ определяется мерой ν_t, задается равенством (5.5). В соответствии с этим усреднение случайных сдвигов по однопараметрическому семейству мер (6.2) порождает однопараметрическое семейство $\mathcal{U}(t)$, $t \geqslant 0$, преобразований пространства $\mathcal{H}$, действующих на произвольный элемент u пространства $\mathcal{H}$ по правилу

$$\mathcal{U}(t)u(x) = u(x+th_0), \quad x \in H, \quad t \geqslant 0. \tag{6.3}$$

Если вектор h_0 имеет в базисе $\mathcal{E}$ координаты $\{a_i\} \in l_2$, обращающиеся в нуль начиная некоторого номера $m_{\mathcal{E}} \in \mathbb{N}$, то для каждого элемента u_0 из плотного в пространстве $\mathcal{H}_{\mathcal{E}}$ подпространства

$$D_{h_0} \equiv \bigcap_{j=1}^{m_{\mathcal{E}}} D_{\mathcal{E},j}$$

справедливо равенство

$$\frac{d}{dt}\mathcal{U}(t)u(x)|_{t=0} = \sum_{j=1}^{m_{\mathcal{E}}} a_j \frac{\partial}{\partial x_j}u(x) \equiv \mathbf{G}_{h_0}u(x), \quad x \in H.$$

Подпространство $\mathcal{H}_{\mathcal{E}}$ является, очевидно, инвариантным относительно операторов полугруппы (6.3) подпространством пространства $\mathcal{H}$. Следовательно, если вектор h_0 имеет в базисе $\mathcal{E}$ координаты $\{a_i\} \in l_2$, обращающиеся в нуль начиная некоторого номера $m_{\mathcal{E}} \in \mathbb{N}$, то плотно определенный на пространстве $\mathcal{H}_{\mathcal{E}}$ оператор $\mathbf{G}_{h_0}$ является генератором сильно непрерывной полугруппы $\mathcal{U}|_{\mathcal{H}_{\mathcal{E}}}$ преобразований пространства $\mathcal{H}_{\mathcal{E}}$.

Пример 6.2. Пусть ν_1 — некоторая гауссовская мера на пространстве H и $\tilde{\nu}_1$ — ее преобразование Фурье. При всех $t \geqslant 0$ определим меру ν_t как меру, образ Фурье которой определяется равенством

$$\tilde{\nu}_t(\xi) = \tilde{\nu}_1(\sqrt{t}\xi), \quad \xi \in H. \tag{6.4}$$

При этом $\nu_t * \nu_s = \nu_{t+s}$ при любых $t, s \geqslant 0$.

Тогда для любого $u_0 \in \mathcal{H}$ отображение $u : [0, +\infty) \to \mathcal{H}$, определяемое при всех $t > 0$ равенствами

$$u(t) = \int\limits_H \mathbf{S}_h u_0 d\nu_t(h)$$

и равенством $u(0) = u_0$ при $t = 0$, является слабым решением задачи Коши для уравнения теплопроводности

$$\frac{d}{dt}u(t) = \Delta_\nu u(t), \quad t > 0; \qquad u(+0) = u_0,$$

в котором Δ_ν — генератор полугруппы $\mathcal{U}_\nu$ из теоремы 6.1, являющейся продолжением сжимающих полугрупп $\mathcal{U}_{\nu,\mathcal{E}}$, $\mathcal{E} \in \mathcal{S}$.

Пример 6.3. Пусть ν_t, $t \in [0, +\infty)$, — однопараметрическое семейство гауссовских мер из примера 6.2. Рассмотрим задачу Коши для уравнения Шредингера

$$i\frac{d}{dt}u(t) = \Delta_\nu u(t), \quad t > 0; \qquad u(+0) = u_0. \tag{6.5}$$

Ее решение может быть определено с помощью полугруппы $\mathcal{U}_\nu$, разрешающей задачу Коши (6.4), и теоремы Чернова благодаря подходу, предложенному в [29].

Предложение 6.1. *Пусть $\mathcal{U}_\nu$ — сжимающая полугруппа в пространстве $\mathcal{H}$, разрешающая задачу Коши (6.4). Тогда если оператор-функция $\mathbf{F}_\nu(t)$, $t \geqslant 0$, определена равенством*

$$\mathbf{F}_\nu(t) = \exp\big(i(\mathbf{I} - \mathcal{U}_\nu(t))\big), \quad t \geqslant 0,$$

то последовательность вектор-функций

$$u_n(t) = \left(\mathbf{F}_\nu\left(\frac{t}{n}\right)\right)^n u_0, \quad t \geqslant 0,\ n \in \mathbb{N},$$

сходится к решению $u(t) = e^{-it\Delta_\nu}u_0$ задачи Коши (6.5) в том смысле, что для любого $T > 0$ выполняется условие

$$\lim_{n\to\infty} \big\|u_n(t) - u(t)\big\|_{\mathcal{H}_\mathcal{S}} = 0.$$

Утверждение предложения 6.1 следует, как показано в [29], из теоремы Чернова.

Само существование полугруппы $e^{-it\Delta_\nu}$, $t \geqslant 0$, следует из самосопряженности оператора Δ_ν. Заметим, что получить решение задачи Коши (6.5) с помощью преобразования Фурье (см. [5,18], предложение 2) затруднительно из-за недостаточной информации о преобразовании Фурье в пространстве $\mathcal{H}_\mathcal{S}$. Но этот недостаток (отсутствие преобразования Фурье) позволяет преодолеть теорема Чернова и установленная в [29] связь унитарной полугруппы со сжимающей самосопряженной полугруппой.

Предложения 2.1 и 6.1 показывают, что для рассмотренных задач Коши псевдомера, усреднение по которой операторов сдвига в гильбертовом пространстве H задает оператор полугруппы, разрешающей задачу Коши, может быть либо задана явно, либо определена с помощью предельного перехода для последовательности итераций Чернова.

7. Область определения генератора Δ_ν и подпространство гладких функций

Лемма 7.1. *Пусть $\{e_j\}$ — ортонормированный базис из собственных векторов невырожденного неотрицательного ядерного оператора $\mathbf{D}$. Если $\nu_\mathbf{D}$ — вероятностная гауссовская мера на пространстве H с ковариационным оператором $\mathbf{D}$ и $\mathcal{U}_{\nu_\mathbf{D}}$ — полугруппа, определяемая равенством*

$$\mathcal{U}_{\nu_\mathbf{D}}(t)u(x) = \int\limits_H u(x + \sqrt{t}h)d\nu_\mathbf{D}(h), \quad t \geqslant 0, \quad u \in \mathcal{H},$$

то для любого $u \in \mathcal{H}$ и любого $j \in \mathbb{N}$ существует производная

$$\partial_j\mathcal{U}_{\nu_\mathbf{D}}(t)u(x) \equiv \frac{d}{ds}\mathbf{S}_{se_j}(\mathcal{U}_{\nu_\mathbf{D}}(t)u)\Big|_{s=0} \in \mathcal{H},$$

которая допускает оценку

$$\Big\|\partial_j\mathcal{U}_{\nu_\mathbf{D}}(t)u\Big\|_\mathcal{H} \leqslant \frac{c}{\sqrt{td_j}}\|u\|_\mathcal{H}. \tag{7.1}$$

Доказательство. Действительно, пусть $u \in \mathcal{H}$, тогда для любого $t > 0$ справедливо равенство

$$\mathcal{U}_{\nu_\mathbf{D}}(t)u = \int\limits_H \mathbf{S}_{\sqrt{t}h}ud\nu_\mathbf{D}(h) = \int\limits_H \mathbf{S}_h ud\nu_{t\mathbf{D}}(h).$$

Это означает существование такого элемента $\mathcal{U}_{\nu_\mathbf{D}}(t)u \in \mathcal{H}$, что для любой функции $v \in \mathcal{H}$ справедливо равенство

$$\int\limits_H (\mathbf{S}_h u, v)_\mathcal{H} d\nu_{t\mathbf{D}}(h) = (\mathcal{U}_{\nu_\mathbf{D}}(t)u, v).$$

Поэтому для любого $\tau > 0$

$$\big(\mathbf{S}_{\tau e_j}\mathcal{U}_{\nu_\mathbf{D}}(t)u,\ v\big) = \int\limits_H \big(\mathbf{S}_{h+\tau e_j}u,\ v\big)_\mathcal{H} d\nu_{t\mathbf{D}}(h) = \int\limits_H \big(\mathbf{S}_h u,\ v\big)_\mathcal{H} d\nu_{t\mathbf{D}}(h - \tau e_j) = \int\limits_H \big(\mathbf{S}_h u,\ v\big)_\mathcal{H} d(\mathbf{S}_{-\tau e_j}\nu_{t\mathbf{D}})(h).$$

Так как гауссовские меры $\nu_{t\mathbf{D}}$ и $\mathbf{S}_{-\tau e_j}\nu_{t\mathbf{D}}$ абсолютно непрерывны друг относительно друга и плотность меры $\mathbf{S}_{-\tau e_j}\nu_{t\mathbf{D}}$ относительно меры $\nu_{t\mathbf{D}}$ определяется равенством

$$\frac{\partial \mathbf{S}_{-\tau e_j}\nu_{t\mathbf{D}}(h)}{\partial \nu_{t\mathbf{D}}(h)} = \frac{\exp\left(-\frac{(h_j-\tau)^2}{2td_j}\right)}{\exp\left(-\frac{h_j^2}{2td_j}\right)} = \exp\left(-\frac{\tau^2 - 2\tau h_j}{2td_j}\right) = \Phi_j(\tau,t,h), \quad h\in H, \quad t>0, \quad \tau\geqslant 0,$$

то

$$\big(\mathbf{S}_{\tau e_j}\mathcal{U}_{\nu_\mathbf{D}}(t)u,\ v\big) = \int\limits_H (\mathbf{S}_h u, v)_{\mathcal{H}} d\big(\mathbf{S}_{-\tau e_j}\nu_{t\mathbf{D}}\big)(h) = \int\limits_H (\mathbf{S}_h u, v)_{\mathcal{H}}\Phi_j(\tau,t,h)d\nu_{t\mathbf{D}}(h).$$

Следовательно,

$$\big(\partial_j\mathcal{U}_{\nu_\mathbf{D}}(t)u,\ v\big) = \left[\frac{d}{d\tau}\left(\int\limits_H (\mathbf{S}_{\tau h}u, v)_{\mathcal{H}}\Phi_j(\tau,t,h)d\nu_{t\mathbf{D}}(h)\right)\right]\Bigg|_{\tau=0} = \int\limits_H (u,v)_{\mathcal{H}}\frac{h_j}{td_j}d\nu_{t\mathbf{D}}(h).$$

Рассмотрим гауссовскую меру $\nu_{\mathbf{D}'}$, корреляционный оператор которой отличается от оператора только j-м собственным значением: $d'_j = 2d_j$, $d'_k = d_k$ для всех $k\neq j$. Тогда гауссовские меры $\nu_{t\mathbf{D}}$ и $\nu_{\mathbf{D}'}$ абсолютно непрерывны друг относительно друга, причем

$$\frac{\partial \nu_{t\mathbf{D}}(h)}{\partial \nu_{t\mathbf{D}'}(h)} = \frac{\sqrt{2}\exp\left(-\frac{h_j^2}{2td_j}\right)}{\exp\left(-\frac{h_j^2}{4td_j}\right)} = \sqrt{2}\exp\left(-\frac{h_j^2}{4td_j}\right), \quad h\in H, \quad t>0.$$

Поэтому

$$\big(\partial_j\mathcal{U}_{\nu_\mathbf{D}}(t)u,\ v\big) = \left(\int\limits_H (\mathbf{S}_h u, v)_{\mathcal{H}}\frac{h_j}{td_j}d\nu_{t\mathbf{D}}(h)\right) = \sqrt{2}\left(\int\limits_H (\mathbf{S}_h u, v)_{\mathcal{H}}\frac{h_j}{td_j}\exp\left(-\frac{h_j^2}{4td_j}\right)d\nu_{t\mathbf{D}'}(h)\right).$$

Поскольку для всех $u\in\mathcal{H}$ и любого $t>0$ выполняется неравенство

$$\begin{aligned}\sup_{\|v\|_{\mathcal{H}}=1}\Big|\big(\partial_j\mathcal{U}_{\nu_\mathbf{D}}(t)u,\ v\big)\Big| &\leqslant \sqrt{2}\sup_{\|v\|_{\mathcal{H}}=1}\left|\left(\int\limits_H (\mathbf{S}_h u, v)_{\mathcal{H}}\frac{h_j}{td_j}\exp\left(-\frac{h_j^2}{4td_j}\right)d\nu_{t\mathbf{D}'}(h)\right)\right| \\ &\leqslant \sqrt{2}\sup_{\|v\|_{\mathcal{H}}=1}\left[\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\frac{x}{td_j}\exp\left(-\frac{x^2}{4td_j}\right)\right|\cdot\left|\int\limits_H (\mathbf{S}_h u, v)_{\mathcal{H}}d\nu_{t\mathbf{D}'}(h)\right|\right] \\ &\leqslant \frac{c}{\sqrt{td_j}}\int\limits_H \big\|\mathbf{S}_h u\big\|_{\mathcal{H}}d\nu_{t\mathbf{D}'}(h) \leqslant \frac{c}{\sqrt{td_j}}\|u\|_{\mathcal{H}},\end{aligned}$$

лемма доказана. □

Аналогично можно доказать следующее утверждение.

Лемма 7.2. *Пусть выполнены условия леммы 7.1. Тогда для любого $l\in\mathbb{N}$ существует такое число $c_l>0$, что для любых $u\in\mathcal{H}$, $j\in\mathbb{N}$ и $t>0$ существует производная $\partial_j^l\mathcal{U}_{\nu_\mathbf{D}}(t)u\in\mathcal{H}$, допускающая оценку*

$$\Big\|\partial_j^l\mathcal{U}_{\nu_\mathbf{D}}(t)u\Big\|_{\mathcal{H}} \leqslant \frac{c_l}{\big(\sqrt{td_j}\big)^l}\|u\|_{\mathcal{H}}. \tag{7.2}$$

Далее, пусть $\mathbf{D}$ — невырожденный неотрицательный ядерный оператор в гильбертовом пространстве H, собственные векторы которого образуют ортонормированный базис в $\mathcal{E}$, и такой, что оператор $\mathbf{D}^{1/2}$ ядерный. Обозначим через $C^\infty_\mathbf{D}(H)$ линейную оболочку системы функций $\{\mathcal{U}_{t,\mathbf{D}}u,\ t>0,\ u\in\mathcal{H}_\mathcal{E}\}$. В силу сильной непрерывности полугруппы (см. теорему 5.1) линейное многообразие $C^\infty_{\mathbf{D}}(H)$ плотно в пространстве $\mathcal{H}_\mathcal{E}$, поскольку $\mathcal{U}_{t,\mathbf{D}}u \to u$ при $t \to +0$ для любого $u \in \mathcal{H}_\mathcal{E}$. Заметим, что пространство $C^\infty_{\mathbf{D}}(H)$ является существенной областью определения генератора полугруппы из примера 6.1.

Для каждого числа $a > 0$ обозначим через $W^1_{2,\mathbf{D}^a}(H)$ пространство классов комплекснозначных функций u из пространства $\mathcal{H}_\mathcal{E}$, имеющих производную $u_j \equiv \partial u/\partial x_j \in \mathcal{H}_\mathcal{E}$ по направлению каждого вектора e_j из базиса собственных векторов оператора $\mathbf{D}$ из пространства $\mathcal{H}_\mathcal{E}$, для которых выполняется условие

$$\sum_{j=1}^n d_j^a \|u_j\|^2_{\mathcal{H}_\mathcal{E}} < +\infty. \tag{7.3}$$

Пространство $W^1_{2,\mathbf{D}^a}(H)$, снабженное нормой

$$\|u\|_{W^1_{2,\mathbf{D}^a}(H)} = \left(\|u\|^2_{\mathcal{H}_\mathcal{E}} + \sum_{j=1}^n d_j^a \|u_j\|^2_{\mathcal{H}_\mathcal{E}}\right)^{1/2},$$

является гильбертовым пространством, непрерывно вложенным в пространство $\mathcal{H}_\mathcal{E}$. Действительно, если последовательность $\{u_k\}$ фундаментальна в пространстве $W^1_{2,\mathbf{D}^a}(H)$, то она фундаментальна в пространстве $\mathcal{H}_\mathcal{E}$ и для любого $j \in \mathbb{N}$ последовательность $\{\partial u_k/\partial x_j\}$ фундаментальна в пространстве $\mathcal{H}_\mathcal{E}$. При этом предел последовательности $\{\partial u_k/\partial x_j\}$ является обобщенной производной по направлению вектора e_j от предела последовательности $\{u_k\}$, а норма предела последовательности $\{u_k\}$ в пространстве $W^1_{2,\mathbf{D}^a}(H)$ равна пределу последовательности $\{\|u_k\|_{W^1_{2,\mathbf{D}^a}(H)}\}$.

Теорема 7.1. *Пусть $u \in \mathcal{H}_\mathcal{E}$, пусть $\mathbf{D}$ — такой невырожденный неотрицательный ядерный оператор в гильбертовом пространстве H, что оператор $\mathbf{D}^{\frac{1}{2}}$ является ядерным. Тогда для любого $t > 0$ выполняется условие $\mathcal{U}_{\nu_{\mathbf{D}^{\frac{1}{2}}}}(t)u \in W^1_{2,\mathbf{D}}(H)$.*

Согласно лемме 7.1 имеем $\partial_j \mathcal{U}_{\nu_{\mathbf{D}^{1/2}}}(t)u \in \mathcal{H}_\mathcal{E}$, а согласно неравенству (7.1) —

$$\left\|\partial_j \mathcal{U}_{\nu_{\mathbf{D}^{1/2}}}(t)u\right\|_{\mathcal{H}_\mathcal{E}} \leqslant \frac{c}{\sqrt{t}} d_j^{-1/4} \|u\|_{\mathcal{H}_\mathcal{E}}.$$

Поэтому ряд

$$\sum_{j=1}^\infty d_j \|\partial_j u\|^2_{\mathcal{H}_\mathcal{E}}$$

сходится согласно признаку сравнения с рядом

$$\sum_{j=1}^\infty d_j^{1/2}$$

и, следовательно, $\mathcal{U}_{\nu_{\mathbf{D}^{1/2}}}(t)u \in W^1_{2,\mathbf{D}}(H)$, причем существует такое $C > 0$, что

$$\left\|\mathcal{U}_{\nu_{\mathbf{D}^{1/2}}}(t)u\right\|_{W^1_{2,\mathbf{D}}(H)} \leqslant \frac{C}{\sqrt{t}} \|u\|_{\mathcal{H}_\mathcal{E}}.$$

Из теоремы 7.1 и сильной непрерывности полугруппа $\mathcal{U}_{\nu_\mathbf{D}}$ вытекает следующее утверждение.

Следствие 7.1. *Для любого невырожденного неотрицательного ядерного оператора $\mathbf{D}$ такого, что оператор $D^{1/2}$ является ядерным, пространство $W^1_{2,\mathbf{D}}(H)$ плотно в пространстве $\mathcal{H}_\mathcal{E}$.*

Для каждого числа $a > 0$ обозначим через $W^2_{2,\mathbf{D}^a}(H)$ пространство классов комплекснозначных функций u из пространства $\mathcal{H}_\mathcal{E}$, имеющих производную второго порядка $u_{j^2} = \partial^2 u/\partial x_j^2 \in \mathcal{H}_\mathcal{E}$ по направлению каждого вектора e_j из базиса собственных векторов оператора $\mathbf{D}$, принадлежащую пространству $\mathcal{H}_\mathcal{E}$, причем выполняется условие

$$\sum_{j=1}^n d_j^a \|u_{j^2}\|^2_{\mathcal{H}_\mathcal{E}} < +\infty. \tag{7.4}$$

Аналогичным образом доказывается, что пространство $W^2_{2,\mathbf{D}^a}(H)$, снабженное нормой

$$\|u\|_{W^2_{2,\mathbf{D}^a}(H)} = \left(\|u\|^2_{\mathcal{H}_\mathcal{E}} + \sum_{j=1}^n d_j^a \|u_{j^2}\|^2_{\mathcal{H}_\mathcal{E}} \right)^{1/2},$$

является гильбертовым и что оно плотно вложено в пространство $\mathcal{H}_\mathcal{E}$. При этом существует такая константа $C > 0$, что для любого $u \in W^2_{2,\mathbf{D}^a}(H)$ выполняется неравенство

$$\|u\|_{W^1_{2,\mathbf{D}^a}(H)} \leqslant C\|u\|_{W^2_{2,\mathbf{D}^a}(H)}.$$

Лемма 7.3. *Если выполнены условия теоремы* 7.1, *то линейное многообразие* $C^\infty_{\mathbf{D}^{1/2}}(H)$ *плотно в пространствах* $\mathcal{H}_\mathcal{E}$, $W^1_{2,\mathbf{D}}(H)$, $W^2_{2,\mathbf{D}}(H)$.

Первая часть утверждения следует из теоремы 7.1 и из сильной непрерывности полугруппы $\mathcal{U}_{\nu_{\mathbf{D}^{1/2}}}(t)$, $t \geqslant 0$ (см. теорему 5.1). Докажем вторую часть утверждения (третья доказывается аналогично). Докажем, что если $u_0 \in W^1_{2,\mathbf{D}}(H)$, то

$$\lim_{t\to+0} \left\| \mathcal{U}_{\nu_{\mathbf{D}^{1/2}}}(t)u_0 - u_0 \right\|_{W^1_{2,\mathbf{D}}(H)} = 0.$$

Фиксируем некоторое $\varepsilon > 0$. Тогда существует такое $m_0 \in \mathbb{N}$, что

$$\sum_{j>m_0} d_j \|u_{0,j}\|^2_{\mathcal{H}_\mathcal{E}} < \frac{\varepsilon^2}{16}.$$

В сооветствии с теоремой о сильной непрерывности полугруппы $\mathcal{U}_{\nu_{\mathbf{D}^{1/2}}}(t)$, $t \geqslant 0$, существует такое $\delta > 0$, что

$$\left\| \mathcal{U}_{\nu_{\mathbf{D}^{1/2}}}(t)u_0 - u_0 \right\|^2_{\mathcal{H}_\mathcal{E}} + \sum_{j=1}^{m_0} d_j \left\| \mathcal{U}_{\nu_{\mathbf{D}^{1/2}}}(t)u_{0,j} - u_{0,j} \right\|^2_{\mathcal{H}_\mathcal{E}} < \frac{\varepsilon^2}{4}$$

при всех $t \leqslant \delta$. Поскольку

$$\left\| \mathcal{U}_{\nu_{\mathbf{D}^{1/2}}}(t) \right\|_{B(\mathcal{H}_\mathcal{E})} \leqslant 1,$$

для любого $j > m_0$ и $t \geqslant 0$ справедлива оценка

$$\left\| \mathcal{U}_{\nu_{\mathbf{D}^{1/2}}}(t)u_{0,j} - u_{0,j} \right\|_{\mathcal{H}_\mathcal{E}} \leqslant 2\|u_{0,j}\|_{\mathcal{H}_\mathcal{E}}.$$

Следовательно,

$$\sum_{j>m_0} d_j \left\| \mathcal{U}_{\nu_{\mathbf{D}^{1/2}}}(t)u_{0,j} - u_{0,j} \right\|^2_{\mathcal{H}_\mathcal{E}} < \frac{\varepsilon^2}{4}$$

для всех $t \in [0, \delta]$. Из полученных оценок следует, что

$$\lim_{t\to+0} \left\| \mathcal{U}_{\nu_{\mathbf{D}^{1/2}}}(t)u_0 - u_0 \right\|_{W^1_{2,\mathbf{D}}(H)} = 0.$$

Линейное многообразие $C^\infty_\mathbf{D}(H)$ является ядром замкнутой (см. [13, п. 6.1.4, теорема 1.21]) неотрицательной квадратичной формы $t_\mathbf{D}(u) = \|u\|^2_{W^1_{2,\mathbf{D}}}$, $u \in W^1_{2,\mathbf{D}}(H)$. Поэтому с квадратичной формой $t_\mathbf{D}$ ассоцированый неотрицательный самсопряженный оператор $\mathbf{A}_\mathbf{D}$ в пространстве $\mathcal{H}_\mathcal{E}$: для любого $u \in D(\mathbf{A}_\mathbf{D})$ и любого $u \in D(t_\mathbf{D})$ выполнено равенство $t_\mathbf{D}(u) = (\mathbf{A}_{j,\mathbf{D}}u)$.

Пусть $\mathbf{D}$ — невырожденный неотрицательный ядерный оператор, $\{d_j\}$ — последовательность его собственных значений. Рассмотрим последовательность $\{\mathbf{D}_n\}$ таких неотрицательных операторов ранга n, что первые n собственных значений и собственных векторов оператора $\mathbf{D}_n$ совпадают с первыми n собственными значениями и собственными векторами оператора $\mathbf{D}$. Тогда пространство $W^2_{2,\mathbf{D}}$ является существенной областью определения каждого из операторов $\mathbf{A}_{\mathbf{D}_n}$,

$n \in \mathbb{N}$, ассоциированных с квадратичными формами $t_{\mathbf{D}_n}$. При этом для каждого $n \in \mathbb{N}$ и любого вектора $u \in W^2_{2,\mathbf{D}}$ выполнены равенства

$$t_{\mathbf{D}_n}(u) = \|u\|^2_{\mathcal{H}_\mathcal{E}} + \sum_{j=1}^{n} d_j \|u_j\|^2_{\mathcal{H}_\mathcal{E}} = (\mathbf{A}_{\mathbf{D}_n} u, u),$$

где

$$\mathbf{A}_{\mathbf{D}_n} = u - \sum_{j=1}^{n} d_j u_{j^2}, \quad u \in W^2_{2,\mathbf{D}}.$$

Следовательно,

$$t_{\mathbf{D}}(u) = \lim_{n\to\infty} t_{\mathbf{D}_n}(u)$$

при любом $u \in W^2_{2,\mathbf{D}}$.

Определим оператор $\mathbf{A}_{\mathbf{D}} : \ W^2_{2,\mathbf{D}} \to \mathcal{H}_\mathcal{E}$ равенством

$$\mathbf{A}_{\mathbf{D}} u = u - \sum_{j=1}^{\infty} d_j u_{j^2}, \quad u \in W^2_{2,\mathbf{D}}.$$

Тогда каждого вектора $u \in W^2_{2,\mathbf{D}}$ выполняется соотношение

$$\lim_{n\to\infty} \Big\| \mathbf{A}_{\mathbf{D}_n} u - \mathbf{A}_{\mathbf{D}} u \Big\|_{\mathcal{H}_\mathcal{E}} = 0.$$

Таким образом, пространство $W^2_{2,\mathbf{D}}$ является областью определения оператора $\mathbf{A}_{\mathbf{D}}$, и равенство $t_{\mathbf{D}}(u) = (\mathbf{A}_{\mathbf{D}} u, u)$ выполнено при любых $u \in D(t_{\mathbf{D}})$. Следовательно, оператор $\mathbf{A}_{\mathbf{D}}$ является сильным граф-пределом последовательности операторов $\{\mathbf{A}_{\mathbf{D}_n}\}$. Поэтому в силу первой теоремы Троттера—Като (см. [28, п. III.4, с. 209, теорема 4.8]) для любых $T > 0$ и $u \in \mathcal{H}_\mathcal{E}$ выполняется равенство

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sup_{t\in[0,T]} \Big\| \big(e^{t\mathbf{A}_{\mathbf{D}_n}} - e^{t\mathbf{A}_{\mathbf{D}}}\big) u \Big\|_{\mathcal{H}_\mathcal{E}} \right) = 0. \tag{7.5}$$

Для каждого ядерного неотрицательного оператора конечного ранга $\mathbf{D}_n$ в силу теоремы 6.1 определена сильно непрерывная однопараметрическая полугруппа линейных сжимающих операторов $\mathcal{U}_{\nu_{\mathbf{D}_n}}(t)$, $t \geqslant 0$, определенных при произвольных $t \geqslant 0$ и $u \in \mathcal{H}_\mathcal{E}$ равенством

$$\mathcal{U}_{\nu_{\mathbf{D}_n}}(t) u(x) = \int\limits_H u\Big(x + \sqrt{t} h\Big) d\nu_{\mathbf{D}_n}(h), \quad x \in H,$$

генератор $\Delta_{\nu_{\mathbf{D}_n}} u$ которой является неположительным самосопряженным оператором в пространстве $\mathcal{H}_\mathcal{E}$. При этом, как известно (см. [5, 7, 11]), при каждом $n \in \mathbb{N}$ для любого $u \in W^2_{2,\mathbf{D}}(H)$ выполняется равенство

$$\left(\frac{d}{dt} \mathcal{U}_{\nu_{\mathbf{D}_n}}(t) u \right)\Bigg|_{t=0} = \sum_{j=1}^{n} d_j u_{jj} = \big(- \mathbf{A}_{\mathbf{D}_n} + \mathbf{I}\big) u.$$

Таким образом, замыкание оператора $\mathbf{I} - \mathbf{A}_{\mathbf{D}_n}$, определенного на пространстве $W^2_{2,\mathbf{D}}(H)$, совпадает с генератором $\Delta_{\nu_{\mathbf{D}_n}} u$ полугруппы $\mathcal{U}_{\nu_{\mathbf{D}_n}}$.

Теорема 7.2. *Для любого $\varepsilon > 0$, любого $T > 0$ и любого $u \in W^2_{2,\mathbf{D}}$ найдется такое $N \in \mathbb{N}$, что при всех $n \geqslant N$ выполняется оценка*

$$\sup_{t\in[0,T]} \Big\| \mathcal{U}_{\nu_{\mathbf{D}_n}}(t) u - \mathcal{U}_{\nu_{\mathbf{D}}}(t) u \Big\| \leqslant \varepsilon.$$

Выберем некоторые $\varepsilon > 0$ и $T > 0$. В силу оценки (5.2) (см. лемму 5.1) существует такое $\delta > 0$, что если $\|h\| < \delta$, то

$$\big\|\mathbf{S}_h u - u\big\| < \frac{1}{4}\varepsilon.$$

Для любого $n \in \mathbb{N}$ обозначим через $H_{(n)}$ линейную оболочку векторов $e_1, \ldots, e_n$, а через $H_{(n)}^{\perp}$ — ее ортогональное дополнение в пространстве H; тогда $H = H_{(n)} \times H_{(n)}^{\perp}$.

При каждом $n \in \mathbb{N}$ обозначим через $\nu_{n,\mathbf{D}}$ гауссовскую меру на n-мерном пространстве с корреляционным оператором $\mathbf{D}|_{H_{(n)}}$, через $\nu_{n,\mathbf{D}}^{\perp}$ — гауссовскую меру на пространстве $H_{(n)}^{\perp}$ с корреляционным оператором $\mathbf{D}|_{H_{(n)}^{\perp}}$, а через $\delta_{(n)}^{\perp}$ — меру Дирака на пространстве $H_{(n)}^{\perp}$, сосредоточенную в нуле пространства $H_{(n)}^{\perp}$. Тогда

$$\nu_{\mathbf{D}} = \nu_{n,\mathbf{D}} \otimes \nu_{n,\mathbf{D}}^{\perp}, \quad \nu_{\mathbf{D}_n} = \nu_{n,\mathbf{D}} \otimes \delta_{(n)}^{\perp}.$$

Так как $\{\sqrt{d_n}\} \in l_1$, то существует такое $N \in \mathbb{N}$, что при всех $n \geqslant N$ выполняется неравенство

$$\nu_{n,\mathbf{D}}^{\perp}(B_\delta) > 1 - \frac{1}{4}\varepsilon,$$

где

$$B_\delta = \Big\{h \in H_{(n)}^{\perp} : \ \big|(e_j, h)\big| \leqslant \delta\big(T \operatorname{Tr} \mathbf{D}^{1/2}\big)^{-1/2}\Big\}.$$

Поэтому утверждение теоремы следует из справедливой при всех $n \geqslant N$ цепочки неравенств

$$\begin{aligned}
\Big\|\mathcal{U}_{\nu_{\mathbf{D}_n}}(t)u - \mathcal{U}_{\nu_{\mathbf{D}}}(t)u\Big\| &= \left\| \int\limits_H u\big(x+\sqrt{t}h\big)d\nu_{\mathbf{D}}(h) - \int\limits_H u\big(x+\sqrt{t}h\big)d\nu_{\mathbf{D}_n}(h) \right\| \\
&= \left\| \int\limits_{H_{(n)}} \left[\int\limits_{h_{(n)}^{\perp} \in B_\delta} \leqslant \frac{\delta}{\sqrt{T}} \Big(u\big(x+\sqrt{t}h\big) - u\big(x+\sqrt{t}h_{(n)}\big)\Big) d\nu_{n,\mathbf{D}}^{\perp}(h_{(n)}^{\perp}) \right.\right. \\
&\quad \left.\left. + \int\limits_{h_{(n)}^{\perp} \in H_{(n)}^{\perp} \setminus B_\delta} \Big(u\big(x+\sqrt{t}h\big) - u\big(x+\sqrt{t}h_{(n)}\big)\Big) d\nu_{n,\mathbf{D}}^{\perp}(h_{(n)}^{\perp}) \right] d\nu_{n,\mathbf{D}}(h_{(n)}) \right\| \leqslant \varepsilon.
\end{aligned}$$

Из теоремы 7.2 и равенства (7.5) вытекает следующее утверждение.

Теорема 7.3. *Генератор $\Delta_{\nu_{\mathbf{D}}}$ полугруппы $\mathcal{U}_{\nu_{\mathbf{D}}}$ совпадает с оператором $\mathbf{I} - \mathbf{A}_{\mathbf{D}}$.*

Для каждого невырожденного неотрицательного ядерного оператора $\mathbf{D}$ в пространстве H определим гильбертово пространство $H_{\mathbf{D}}$ как область определения оператора $\mathbf{D}^{-1}$, снабженную нормой $\|u\|_{H_{\mathbf{D}}} = \|\mathbf{D}^{-1}u\|_H$.

Предложение 7.1. *Пусть $\mathbf{D}$ — такой неотрицательный ядерный оператор с последовательностью $\{d_j\}$ собственных значений и соответствующим базисом $\{f_j\}$ из собственных векторов, что оператор $\mathbf{D}^{\frac{1}{2}}$ является ядерным. Пусть для каждого $h \in H_{\mathbf{D}^{1/2}}$ определено семейство преобразований $\mathbf{U}_h(t)$, $t \geqslant 0$, пространства $\mathcal{H}_{\mathcal{E}}$, действующих по формуле*

$$\mathbf{U}_h(t)u(x) = u(x + ht^{1/2}), \quad t \geqslant 0.$$

Пусть на пространстве H задана такая вероятностная мера μ, сосредоточенная на пространстве $H_{\mathbf{D}^{1/2}} \subset H$, что

$$\int\limits_H h d\mu(h) = \mathbf{0}, \quad \int\limits_H (h,u)(v,h)d\mu(h) = (v, \mathbf{D}u) \quad \forall u, v \in H$$

и пусть

$$\int\limits_H \|h\|^3_{\mathbf{D}^{1/2}} d\mu(h) < \infty.$$

Тогда семейство

$$\mathbf{U}^\mu(t) = \int\limits_H \mathbf{U}_h(t) d\mu(h), \quad t \geqslant 0,$$

усредненных преобразований пространства $\mathcal{H}_\mathcal{E}$ является эквивалентным по Чернову полугруппе, разрешающей задачу Коши

$$u'_t = \Delta_{\nu_\mathbf{D}} u, \quad t > 0, \ x \in \mathbb{R}; \quad u|_{t=+0} = u_0.$$

По структуре доказательство предложения 7.1 почти дословно повторяет доказательство предложения 2.1, но при этом учитывается специфика функций бесконечномерного аргумента и существенно используется унитарность операторов сдвига в пространстве $\mathcal{H}_\mathcal{E}$, являющаяся следствием инвариантности меры λ относительно сдвигов.

Очевидно, что $\mathbf{U}^\mu(t)|_{t=0} = \mathbf{I}$. Поскольку благодаря инвариантности меры λ относительно сдвигов равенство $\|\mathbf{U}_h(t)\| = 1$ справедливо при всех $h \in H$, то тогда $\|\mathbf{U}^\mu(t)\| \leqslant 1$ при всех $t \geqslant 0$.

Сильная непрерывность семейства отображений $\mathbf{U}^\mu(t)$, $t \geqslant 0$, устанавливается так же, как в теореме 5.1.

Обозначим через $C^\infty_{\mathbf{D}^{1/2}}(H)$ линейную оболочку векторов пространства $\mathcal{H}_\mathcal{E}$ вида

$$\mathcal{U}_{\nu_{\mathbf{D}^{1/2}}}(t)u, \quad t > 0, \ u \in \mathcal{H}_\mathcal{E}.$$

Тогда согласно теореме 7.3 линейное многообразие $C^\infty_{\mathbf{D}^{1/2}}(H)$ является существенной областью определения самосопряженного оператора $\Delta_{\nu_\mathbf{D}}$.

Проверим условие дифференцируемости оператор-функции $\mathbf{U}^\mu$ на линейном многообразии $C^\infty_{\mathbf{D}^{1/2}}(H)$. Пусть $u_0 \in C^\infty_{\mathbf{D}^{1/2}}(H)$; тогда существуют такие $\tau > 0$ и $v \in \mathcal{H}_\mathcal{E}$, что $u_0 = \mathcal{U}_{\mathbf{D}^{1/2}}(\tau)v$. Тогда согласно соотношению (7.1) справедлива оценка

$$\left\|\partial_{f_j}(\mathcal{U}_{\mathbf{D}^{1/2}}(\tau)v)\right\|_{\mathcal{H}_\mathcal{E}} \leqslant \frac{c}{\sqrt{\tau\sqrt{d_j}}} \left\|\mathcal{U}_{\mathbf{D}^{1/2}}\left(\frac{\tau}{2}\right)v\right\|_{\mathcal{H}_\mathcal{E}}.$$

Аналогично, согласно лемме 7.2 (см. (7.2)), для любых $j_1, j_2, j_3 \in \mathbb{N}$ выполнена оценка

$$\left\|\partial_{f_{j_1}}\partial_{f_{j_2}}\partial_{f_{j_3}}(\mathcal{U}_{\mathbf{D}^{1/2}}(\tau)v)\right\|_{\mathcal{H}_\mathcal{E}} \leqslant \frac{C}{\sqrt{\tau^3\sqrt{d_{j_1}d_{j_2}d_{j_3}}}} \left\|\mathcal{U}_{\mathbf{D}^{1/2}}\left(\frac{\tau}{2}\right)v\right\|_{\mathcal{H}_\mathcal{E}}.$$

В силу леммы 7.2 для каждого $u_0 \in C^\infty_{\mathbf{D}^{1/2}}(H)$ отображение

$$\Phi_{u_0} : H_{\mathbf{D}^{1/2}} \to \mathcal{H}_\mathcal{E}, \quad \Phi_{u_0}(x) = \mathbf{S}_x u_0, \ u_0 \in C^\infty_{\mathbf{D}^{1/2}}(H),$$

имеет в каждой точке $x \in H$ производные Фреше порядка $k \in \{1, 2, 3\}$. Поскольку $u_0 = \mathcal{U}_{\nu_{\mathbf{D}^{1/2}}}(\tau)v$ при некоторых $\tau > 0$ и $v \in \mathcal{H}_\mathcal{E}$, то производные Фреше отображения Φ_{u_0} в точке $x = 0$ определяются равенствами

$$\begin{aligned} D\Phi_{u_0}(0)(h) &= \sum_{j=1}^\infty h_j \partial_{f_j} \mathcal{U}_{\nu_{\mathbf{D}^{1/2}}}(\tau)v, \\ D^2\Phi_{u_0}(0)(h,h) &= \sum_{j,k=1}^\infty h_j h_k \partial_{f_j}\partial_{f_k} \mathcal{U}_{\nu_{\mathbf{D}^{1/2}}}(\tau)v, \\ D^3\Phi_{u_0}(0)(h,h,h) &= \sum_{j,k,l=1}^\infty h_j h_k h_l \partial_{f_j}\partial_{f_k}\partial_{f_l} \mathcal{U}_{\nu_{\mathbf{D}^{1/2}}}(\tau)v, \end{aligned} \tag{7.6}$$

причем ряды (7.6) сходятся в пространстве $\mathcal{H}_\mathcal{E}$ согласно лемме 7.2 и допускают оценки

$$\left\|D\Phi_{u_0}(0)(h)\right\|_{\mathcal{H}_\mathcal{E}} \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} |h_j| \left\|\partial_{f_j}\mathcal{U}_{\nu_{\mathbf{D}^{1/2}}}(\tau)v\right\|_{\mathcal{H}_\mathcal{E}}$$

$$\leqslant \sum_{j=1}^{\infty} |h_j| \frac{c_1}{\sqrt{\tau d_j}} d_j^{1/4} \|v\|_{\mathcal{H}_\mathcal{E}} \leqslant C_1\big(\operatorname{Tr}(\mathbf{D}^{1/2})\big)^{1/2} \|h\|_{H_{\mathbf{D}^{1/2}}} \|v\|_{\mathcal{H}_\mathcal{E}}$$

и

$$\left\|D^2\Phi_{u_0}(0)(h,h)\right\|_{\mathcal{H}_\mathcal{E}} \leqslant C_2\big(\|h\|_{H^{1/2}}\big)^2 \|v\|_{\mathcal{H}_\mathcal{E}}, \quad \left\|D^2\Phi_{u_0}(0)(h,h,h)\right\|_{\mathcal{H}_\mathcal{E}} \leqslant C_3\big(\|h\|_{H^{1/2}}\big)^3 \|v\|_{\mathcal{H}_\mathcal{E}}. \tag{7.7}$$

Для произвольных $x \in H_{\mathbf{D}^{1/2}}$ и $k \in \{1,2,3\}$ имеет место равенство

$$D^k\Phi_{u_0}(x) = D^k\Phi_{\mathbf{S}_x u_0}(0). \tag{7.8}$$

В силу равенства (7.8) оценки (7.7) имеют место и для производных Фреше отображения Φ_{u_0} в произвольной точке $x \in H_{\mathbf{D}^{1/2}}$. Таким образом, для любого $u_0 \in C^\infty_{\mathbf{D}^{1/2}}(H)$ существует постоянная $L > 0$ такая, что для любого $x \in H_{\mathbf{D}^{1/2}}$ имеет место оценка

$$\left\|D^3\Phi_{u_0}(x)(h,h,h)\right\|_{\mathcal{H}_\mathcal{E}} \leqslant L\|h\|^3_{H_{\mathbf{D}^{1/2}}}.$$

Следовательно, согласно формуле Тейлора (см. [4, теорема 12.4.4]), для любого $u_0 \in C^\infty_{\mathbf{D}^{1/2}}(H)$ имеет место оценка

$$\left\|\Phi_{u_0}(h) - \Phi_{u_0}(0) - D\Phi_{u_0}(h) - \frac{1}{2}D^2\Phi_{u_0}(h,h)\right\|_{\mathcal{H}_\mathcal{E}} \leqslant L\|h\|^3_{H_{\mathbf{D}^{1/2}}}, \quad h \in H_{\mathbf{D}^{1/2}}. \tag{7.9}$$

Поэтому если $u_0 \in C^\infty_{\mathbf{D}^{1/2}}(H)$, то в соответствии с формулой Тейлора для любого $t > 0$ и любого вектора $h \in H_{\mathbf{D}^{1/2}}$ справедливо равенство

$$u_0\big(x + \sqrt{t}h\big) - \left(u_0(x) + \sqrt{t}\sum_{j=1}^{\infty} h_j \partial_{f_j} u_0(x) + t\frac{1}{2}\sum_{k,j=1}^{\infty} h_k h_j \partial_{f_k}\partial_{f_j} u_0(x)\right) = r(t,x,h),$$

где

$$\big\|r(t,x,h)\big\|_{\mathcal{H}_\mathcal{E}} \leqslant t^{3/2} L\|h\|^3_{H_{\mathbf{D}^{1/2}}}.$$

Поэтому в силу предположений о первых трех моментах меры μ для любого $u_0 \in C^\infty_{\mathbf{D}^{1/2}}(H)$ справедлива оценка

$$\left\|\int\limits_H \Big(u_0\big(x + \sqrt{t}h\big)\Big) d\mu(h) - u_0(x) - t\frac{1}{2}\mathbf{\Delta}_\mathbf{D} u_0(x)\right\|_{\mathcal{H}_\mathcal{E}} = o(t) \quad \text{as } t \to 0.$$

Таким образом, оператор-функция $\mathbf{U}^\mu_v$ удовлетворяет всем условиям теоремы Чернова и справедливо утверждение предложения 7.1.

Автор благодарит Г. Г. Амосова, М. М. Галламова, Ю. Н. Орлова, О. Г. Смолянова, Е. Т. Шавгулизде и Н. Н. Шамарова за плодотворные обсуждения затронутых в работе проблем.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Богачев В. И.* Основы теории меры. Т. 1. — М.–Ижевск: РХД, 2003.
2. *Богачев В. И.* Гауссовские меры. — М.: Физматлит, 1997.
3. *Богачев В. И., Крылов Н. В., Рекнер М.* Эллиптические и параболические уравнения для мер// Усп. мат. наук. — 2009. *64*, № 6 (390). — С. 5–116.
4. *Богачев В. И., Смолянов О. Г.* Действительный и функциональный анализ. — М.–Ижевск: РХД, 2009.
5. *Борисов Л. А., Орлов Ю. Н., Сакбаев В. Ж.* Формулы Фейнмана для усреднения полугрупп, порождаемых операторами типа Шредингера/ Препринт ИПМ им. М. В. Келдыша РАН. — No 57.
6. *Вейль А.* Интегрирование в топологических группах и его применение. — М.: ИЛ, 1950.
7. *Вентцель А. Д., Фрейдлин М. И.* Флуктуации в случайных динамических системах. — М.: Наука, 1979.

8. *Вершик А. М.* Существует ли мера Лебега в бесконечномерном пространстве?// Тр. МИАН им. В. А. Стеклова. — 2007. — *259.* — С. 256–281.
9. *Го Х. С.* Гауссовские меры в банаховых пространствах. — М.: Мир, 1979.
10. *Далецкий Ю. Л., Фомин С. В.* Меры и дифференциальные уравнения в бесконечномерных пространствах. — М.: Наука, 1983.
11. *Дынкин Е. Б.* Марковские процессы. — М.: Наука, 1963.
12. *Ефремова Л. С., Сакбаев В. Ж.* Понятие взрыва множества решений дифференциальных уравнений и усреднение случайных полугрупп// Теор. мат. физ. — 2015. — *185*, № 2. — С. 252–271.
13. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. — М.: Мир, 1972.
14. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. — М.: Физматлит, 2004.
15. *Натансон И. П.* Теория функций вещественной переменной. — М.: Наука, 1974.
16. *Орлов Ю. Н., Сакбаев В. Ж., Смолянов О. Г.* Случайные неограниченные операторы и формулы Фейнмана// Изв. РАН. — 2016. — *80*, №. 6. — С. 141–172.
17. *Порошкин А. Г.* Теория меры и интеграла. — М.: УРСС, 2006.
18. *Сакбаев В. Ж.* Усреднение случайных блужданий и меры на гильбертовом пространстве, инвариантные относительно сдвига// Теор. мат. физ. — 2017. — *190*, № 5 (принята в печать).
19. *Сакбаев В. Ж.* О законе больших чисел для композиций независимых случайных полугрупп// Изв. вузов. Сер. мат. — 2016. — *10.* — С. 86–91.
20. *Сакбаев В. Ж.* О законе больших чисел для композиций независимых случайных операторов и случайных полугрупп// Тр. МФТИ. — 2016. — *8*, № 1. — С. 140–152.
21. *Сакбаев В. Ж.* Меры на бесконечномерных пространствах, инвариантные относительно сдвигов// Тр. МФТИ. — 2016. — *8*, № 2. — С. 134–141.
22. *Сакбаев В. Ж.* Конечно-аддитивные меры на банаховых пространствах, инвариантные относительно сдвигов/ Мат. науч. конференции «Квантовая динамика и функциональные интегралы». — М.: ИПМ им. М. В. Келдыша РАН, 2016.
23. *Сакбаев В. Ж., Смолянов О. Г., Шамаров Н. Н.* Негауссовские лагранжевы формулы Фейнмана—Каца// Докл. РАН. — 2014. — *457*, № 1. — С. 28–31.
24. *Скороход А. В.* Произведения независимых случайных операторов// Усп. мат. наук. — 1983. — *38*, № 4 (232). — С. 255–280.
25. *Смолянов О. Г., Шавгулидзе Е. Т.* Континуальные интегралы. — М.: УРСС, 2015.
26. *Accardi L., Lu Y. G., Volovich I. V.* Quantum Theory and Its Stochastic Limit. — Springer-Verlagm 2001.
27. *Baker R.* “Lebesgue measure” on R^∞// Proc. Am. Math. Soc. — 1991. — *113*, №. 4. — С. 1023–1029.
28. *Engel K. J., Nagel R.* One-Parameter Semigroups for Linear Evolution Equation. — Springer-Verlag, 2000.
29. *Remizov I. D.* Quasi-Feymnan formulas — a method of obtaining the evolution operator for the Schrodinger equation// J. Funct. Anal. — 2016. — *270*, №. 12. — С. 4540–4557.

В. Ж. Сакбаев
Московский физико-технический институт
E-mail: fumi2003@mail.ru

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 140 (2017). С. 119–124

УДК 517.986

ПОРЯДОК ШОКЕ И ЙОРДАНОВЫ МОРФИЗМЫ ОПЕРАТОРНЫХ АЛГЕБР

© 2017 г. Е. А. ТУРИЛОВА, Я. ХАМХАЛТЕР

Аннотация. Показано, что порядковые изоморфизмы ортогональных мер на пространствах состояний операторных алгебр, снабженных порядком Шоке, порождаются йордановыми изоморфизмами ассоциированных алгебр фон Неймана. Это дает новый йорданов инвариант σ-конечных алгебр фон Неймана в терминах разложения состояний.

***Ключевые слова*:** порядок Шоке, ортогональные меры, абелевы подалгебры, йордановы изоморфизмы.

***AMS Subject Classification*:** 46L30, 46L45, 28A50

1. Введение. Целью статьи является описание порядковых изоморфизмов частично упорядоченного множества ортогональных мер на пространстве состояний операторных алгебр. Работа продолжает исследования, начатые в [7]: рассматриваются некоторые изложенные там результаты и их вариации. В ходе предыдущих исследований было показано, что существует связь между порядком Шоке на ортогональных мерах и структурой абелевых подалгебр алгебр фон Неймана. В частности, оказалось, что порядковые изоморфизмы частично упорядоченных по Шоке множеств находятся в соответствии с йордановыми $*$-изоморфизмами некоторых алгебр фон Неймана. Таким образом, возникают новые соотношения между классической теорией Шоке и структурами операторных алгебр, исследованных в рамках топос-подхода к основам квантовой теории (см. [3, 8]).

2. Предварительные сведения. Напомним некоторые понятия из общей теории упорядоченных множеств. Пусть $(X, \leqslant)$ — частично упорядоченное множество. Предположим, что X обладает наименьшим элементом 0. Элемент $x \in X$ называется *атомом*, если он отличен от 0 и из $0 \leqslant y \leqslant x$ следует, что $y = x$ или $y = 0$.

Отображение $F : X \to Y$ между двумя частично упорядоченными множествами $(X, \leqslant)$ и $(Y, \leqslant)$ называется *порядковым изоморфизмом*, если оно является биекцией, сохраняющей порядок в обоих направлениях, т.е.

$$a \leqslant b \iff F(a) \leqslant F(b) \quad \text{для любых } a, b \in X.$$

Напомним основные положения порядковой теории Шоке (подробности и связи с теорией разложения состояний на алгебрах операторов см. в [1, 12]). Для компактного хаусдорфова пространства X будем обозначать через $C(X)$ множество всех комплекснозначных непрерывных функций на X. Это пространство снабжено супремум-нормой $\|f\| = \sup\{|f(x)| : x \in X\}$. Под *мерой Радона* μ на X понимаем элемент дуального пространства $C(X)^*$. По известной теореме Рисса о представлении существует биекция между мерами Радона и регулярными борелевскими мерами на X. В этом случае мера $\mu \in C(X)^*$ канонически отождествляется с регулярной борелевской мерой $d\mu$ на X следующим образом:

$$\mu(f) = \int\limits_X f(\omega)\, d\mu(\omega), \quad f \in C(X).$$

Работа выполнена при поддержке Агентства грантов Чешской Республики (Grant Agency of the Czech Republic), проект P201/12/0290 «Topological and geometrical properties of Banach spaces and operator algebras».

Множество всех положительных мер Радона на X будем обозначать через $M^+(X)$. Положительную меру Радона μ будем называть *вероятностной*, если $\mu(X) = 1$. Множество всех вероятностных мер Радона на X будем обозначать $\mathcal{P}(X)$.

Пусть далее K — компактное выпуклое множество в локально выпуклом топологическом пространстве E. Через $A(K)$ и $P(K)$ будем обозначать множество всех непрерывных аффинных функций на K и множество всех непрерывных выпуклых функций на K соответственно. Рассмотрим меру $\mu \in \mathcal{P}(K)$. Элемент $b(\mu) \in K$ называется *барицентром* меры μ, если для любого $a \in A(K)$

$$a(b(\mu)) = \mu(a) = \int\limits_K a(\omega)\, d\mu(\omega).$$

Отметим, что любая вероятностная мера Радона имеет единственный барицентр.

Мера $\mu \in \mathcal{P}(K)$ называется *представляющей* для данного элемента $x \in K$, если x является барицентром μ. Множество всех представляющих мер для элемента x будем обозначать через $M_x(K)$. Заметим, что мера Дирака δ_x является представляющей для x. Более того, легко проверить, что для конечной выпуклой комбинации мер Дирака

$$\mu = \sum_{i=1}^n \lambda_i \delta_{x_i}$$

барицентр имеет вид

$$b(\mu) = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i.$$

Напомним, что выпуклая комбинация мер Дирака является вероятностной мерой с конечным носителем. В общем случае вероятностная мера может быть «дискретизирована» следующим образом (см. [1]): для любой меры $\mu \in \mathcal{P}(K)$ существует такая сеть (μ_α) вероятностных мер Радона с конечным носителем, что $b(\mu_\alpha) = b(\mu)$ для любого α и $\mu_\alpha(f) \to \mu(f)$ для любой функции $f \in C(K)$.

Теперь определим ключевую конструкцию данной работы. Для положительных мер Радона μ и ν рассмотрим отношение $\mu \prec_C \nu$, определяемое следующим образом:

$$\mu \prec_C \nu, \quad \text{если} \quad \mu(f) \leqslant \nu(f) \quad \text{для любой } f \in P(K).$$

Известно, что отношение $\prec_C$ задает частичный порядок на множестве положительных мер Радона (см. [1, 11, 12]). Порядок $\prec_C$ называется *порядком Шоке*. Порядок Шоке имеет несколько важных свойств. Так, например, поскольку для любой аффинной функции $a \in A(K)$ имеет место выпуклость a и $-a$, можно сделать вывод, что если $\mu \prec_C \nu$, то $\mu(a) = \nu(a)$ для любой $a \in A(K)$. Такие меры называются эквивалентными ($\mu \sim \nu$). В частности, меры, сравнимые по Шоке, имеют один и тот же барицентр. В качестве иллюстрации этого факта и для удобства читателя мы докажем одно простое предложение (см., например, [1]), которое будет важно для наших дальнейших рассуждений.

Предложение 1. *Для любых $\mu \in \mathcal{P}(K)$ и $x \in K$ имеем*

$$\delta_x \prec_C \mu \iff \mu \in M_x(K).$$

Доказательство. Так как барицентром меры δ_x является x, а сравнимые по Шоке меры имеют одинаковые барицентры, можно легко показать, что из $\delta_x \prec_C \mu$ следует, что $\mu \in M_x(K)$. Для обратной импликации сначала рассмотрим случай, когда μ имеет конечный носитель. Тогда μ является конечной выпуклой комбинацией мер Дирака

$$\mu = \sum_{i=1}^n \lambda_i \delta_{x_i}.$$

Если x — барицентр μ, то

$$x = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i,$$

и для любой выпуклой функции $f \in P(K)$ имеем

$$f(x) = f(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i) = \mu(f).$$

Следовательно, $\delta_x \prec_C \mu$. В общем случае можем рассматривать меру μ как $*$-слабый предел мер с конечным носителем и барицентром x. Применяя предыдущие рассуждения, получаем, что $\delta_x \prec_C \mu$. □

Отметим, что порядок Шоке имеет несколько важных характеризаций. Одной из них является теорема Картье—Фелла—Майера, характеризующая этот порядок в терминах выпуклых разложений. Другой интересный результат принадлежит К. Давидсон и М. Кеннеди, которые показали в [2], что порядок Шоке также можно охарактеризовать в операторно-алгебраических терминах, используя концепцию расширения представлений.

Перейдем теперь к пространствам состояний на C^*-алгебрах. Далее в работе будем следовать терминологии и фактам основных монографий по операторным алгебрам (см. [9, 12]), обозначая C^*-алгебру через $\mathcal{A}$ и предполагая, что $\mathcal{A}$ является унитальной с единицей $\mathbf{1}$. Под $\mathcal{A}_h$ и $\mathcal{A}^+$ будем понимать самосопряженную и положительную часть $\mathcal{A}$ соответственно, а через $\mathcal{A}^*$ будем обозначать дуальное пространство для $\mathcal{A}$. Множество $\mathcal{A}^+$ представляет собой конус, порожденный векторным порядком $\leqslant$ на $\mathcal{A}_h$:

$$a \leqslant b, \quad \text{если} \quad b - a \in \mathcal{A}^+.$$

Элемент из $\mathcal{A}^*$ будем называть самосопряженным, если это функционал, принимающий вещественные значения на $\mathcal{A}_h$. Пусть $\mathcal{A}_h^*$ — множество всех самосопряженных элементов из $\mathcal{A}^*$. Функционал φ на $\mathcal{A}$ называется положительным, если $\varphi(a) \geqslant 0$ для любого $a \in \mathcal{A}^+$. Положительный функционал единичной нормы называется *состоянием*. Положительный функционал φ на $\mathcal{A}$ называется *точным*, если для любого $a \in \mathcal{A}$ из $\varphi(a^* a) = 0$ следует $a = 0$. Два положительных функционала ψ и φ на $\mathcal{A}$ называются *ортогональными*, если справедливо следующее: любой положительный функционал ϱ на $\mathcal{A}$, обладающий свойствами $\varrho \leqslant \varphi$ и $\varrho \leqslant \psi$, является нулевым. Другими словами, ψ и φ ортогональны, если их точная нижняя грань в частично упорядоченном множестве $(\mathcal{A}^{*+}, \leqslant)$ представляет собой нулевой функционал.

Линейная биекция между C^*-алгебрами, сохраняющая произведение и $*$-операцию, называется *$*$-изоморфизмом*, а *йордановым $*$-изоморфизмом* называется линейная биекция $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ между C^*-алгебрами, сохраняющая $*$-операцию и йорданово произведение $(a, b) \to a \circ b = (ab + ba)/2$:

$$\varphi(a \circ b) = \varphi(a) \circ \varphi(b), \quad \varphi(a^*) = \varphi(a)^*, \quad a, b \in \mathcal{A}.$$

Множество всех ортопроекторов (самосопряженных идемпотентов) из C^*-алгебры $\mathcal{A}$ будем обозначать через $P(\mathcal{A})$. Два ортопроектора p и q называются *ортогональными*, если $pq = 0$.

Пусть далее $\mathcal{M}$ — алгебра фон Неймана. Функционал на $\mathcal{M}$ называется *нормальным*, если он может быть идентифицирован как элемент преддвойственного для $\mathcal{M}$ пространства. Алгебра фон Неймана $\mathcal{M}$ называется σ-конечной, если любая система ненулевых попарно ортогональных орторектров в $\mathcal{M}$ счетна. Алгебра $\mathcal{M}$ является σ-конечной тогда и только тогда, когда на $\mathcal{M}$ существует точное нормальное состояние.

Рассмотрим еще одно частично упорядоченное множество, не имеющее на первый взгляд ничего общего с порядком Шоке, но играющее важную роль в нашем исследовании. Пусть $\mathcal{V}(\mathcal{M})$ и $\mathcal{C}(\mathcal{M})$ — множества всех абелевых подалгебр фон Неймана алгебры $\mathcal{M}$ и всех абелевых C^*-подалгебр алгебры $\mathcal{M}$ соответственно, упорядоченные по включению. При этом мы предполагаем, что любая подалгебра содержит единицу алгебры.

Эти упорядоченные структуры в последнее время вызывают большой интерес как перспективные инварианты операторных алгебр (см. [4–6, 10]). Основной результат в этой области гласит, что любой порядковый изоморфизм $F : \mathcal{V}(\mathcal{M}) \to \mathcal{V}(\mathcal{N})$ индуцируется в большинстве случаев йордановым $*$-изоморфизмом $J : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ следующим равенством:

$$F(C) = J[C] \quad (= \{J(x) \,|\, x \in C\}) \quad \forall C \in \mathcal{V}(\mathcal{M}).$$

Аналогичный результат имеет место и для $\mathcal{C}(\mathcal{M})$.

3. Подалгебры и меры. Пусть $S(\mathcal{A})$ — множество всех состояний на $\mathcal{A}$, наделенное *-слабой топологией. Для фиксированного состояния φ на $\mathcal{A}$ тройка $(\pi_\varphi, \xi_\varphi, \mathcal{H}_\varphi)$ задает конструкцию представления Гельфанда—Наймарка—Сигала алгебры $\mathcal{A}$, ассоциированного с φ. Через $\mathcal{M}_\varphi$ будем обозначать алгебру фон Неймана, порожденную $\pi_\varphi(\mathcal{A})$. Тогда $\mathcal{M}'_\varphi = \pi_\varphi(\mathcal{A})'$. (Через X' обозначается коммутант множества X, состоящий из всех операторов, коммутирующих с каждым элементом из X.) Обозначим через C_φ семейство всех функционалов в $\mathcal{A}^*$, порожденное положительными функционалами, мажорирумыми φ. Другими словами,

$$C_\varphi = \operatorname{lin}\Big\{\psi \in \mathcal{A}^{*+} \;\Big|\; 0 \leqslant \psi \leqslant \varphi\Big\}.$$

Как хорошо известно (см. [12]), существует биективное положительное отображение между C_φ и $\pi_\varphi(\mathcal{A})'$, ставящее каждому элементу $\psi \in C_\varphi$ в соответствие такой оператор $a'_\psi \in \mathcal{M}'_\varphi$, что для любого $a \in \mathcal{A}$

$$\psi(a) = \Big\langle a'_\psi \pi_\varphi(a)\xi_\varphi,\ \xi_\varphi\Big\rangle.$$

Пусть $\mu \in M^+_\varphi(S(\mathcal{A}))$ и $f \in L^\infty(S(\mathcal{A}), \mu)$. Тогда, с учетом предыдущих рассуждений, существует такой единственный элемент $\theta_\mu(f) \in \mathcal{M}'_\varphi$, что для любого $a \in \mathcal{A}$

$$\Big\langle \theta_\mu(f)\pi_\varphi(a)\xi_\varphi,\ \xi_\varphi\Big\rangle = \int\limits_{S(A)} f(\omega)a(\omega)\,d\mu(\omega).$$

Отображение θ_μ представляет собой *-слабо непрерывное отображение из $L^\infty(S(\mathcal{A}), \mu)$ в алгебру фон Неймана $\mathcal{M}'_\varphi$ (см. [12]). Мера $\mu \in M^+_\varphi(S(\mathcal{A}))$ называется *ортогональной*, если для любого борелевского множества $E \subset S(\mathcal{A})$ положительные функционалы φ_E and φ_{E^c} на $\mathcal{A}$, определяемые равенствами

$$\varphi_E(a) = \int\limits_E a(\omega)\,d\mu(\omega), \quad \varphi_{E^c}(a) = \int\limits_{E^c} a(\omega)\,d\mu(\omega),$$

ортогональны (здесь $E^c = S(\mathcal{A}) \setminus E$).

Известно (см. [12]), что мера μ ортогональна тогда и только тогда, когда θ_μ является $*$-изоморфизмом между $L^\infty(S(\mathcal{A}), \mu)$ и абелевой подалгеброй фон Неймана

$$C_\mu = \theta_\mu(L^\infty(S(\mathcal{A}), \mu))$$

алгебры $\mathcal{M}'_\varphi$.

Обозначим через $O_\varphi(\mathcal{A})$ множество всех ортогональных мер в $\mathcal{P}(S(\mathcal{A}))$, имеющих барицентр φ, а через $O(\mathcal{A})$ — множество всех ортогональных вероятностных мер Радона на $S(\mathcal{A})$. Кроме того, через Θ_φ будем обозначать отображение

$$\Theta_\varphi : O_\varphi(\mathcal{A}) \to \mathcal{V}(\mathcal{M}'_\varphi) : \mu \to C_\mu.$$

Одной из основных для наших рассуждений теорем является следующая теорема Томиты (см. [12]), отождествляющая частично упорядоченное по Шоке множество с частично упорядоченным множеством абелевых подалгебр.

Теорема 1. *Отображение $\Theta_\varphi : \mu \to C_\mu$ является биекцией $O_\varphi(\mathcal{A})$ на $\mathcal{V}(\mathcal{M}'_\varphi)$. Более того, следующие условия эквивалентны для $\mu, \nu \in O_\varphi(\mathcal{A})$:*

1) $\mu \prec_C \nu$;
2) $C_\mu \subset C_\nu$.

В частности, частично упорядоченные множества $(O_\varphi(\mathcal{A}), \prec_C)$ и $(\mathcal{V}(\mathcal{M}'_\varphi), \subset)$ порядково изоморфны.

В [7] мы показали, что справедлива также дискретная версия теоремы Томиты. Обозначим через $O^{\mathrm{fin}}_\varphi(\mathcal{A})$ множество всех ортогональных мер с конечным носителем, представляющих $\varphi \in S(\mathcal{A})$. Любую такую меру можно рассматривать как выпуклое разложение φ на конечное число попарно ортогональных состояний. Оказывается, что меры такого рода в точности соответствуют конечномерных абелевым подалгебрам. Для данной C^*-алгебры $\mathcal{A}$ обозначим через

$\mathcal{C}^{\mathrm{fin}}(\mathcal{A})$ частично упорядоченное множество унитальных конечномерных абелевых C^*-подалгебр алгебры $\mathcal{A}$.

Теорема 2. *Отображение $\Theta_\varphi : \mu \to C_\mu$ является порядковым изоморфизмом $O^{\mathrm{fin}}_\varphi(\mathcal{A})$ на $\mathcal{C}^{\mathrm{fin}}(\mathcal{M}'_\varphi)$.*

Поскольку порядковые изоморфизмы частично упорядоченного множества абелевых подалгебр достаточно хорошо изучены, можно использовать полученные результаты в этой области и теоремы типа Томиты для описания порядковых по Шоке изоморфизмов.

Теорема 3 (см. [7])**.** *Пусть φ и ψ — состояния на C^*-алгебрах $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ соответственно. Предположим, что $\mathcal{M}'_\varphi$ является алгеброй фон Неймана, не содержащей прямых слагаемых типа I_2. Тогда для любого порядкового изоморфизма $F : O_\varphi(\mathcal{A}) \to O_\psi(\mathcal{B})$ существует единственный йорданов $*$-изоморфизм $J : \mathcal{M}'_\varphi \to \mathcal{M}'_\psi$, обладающий следующим свойством:*

$$F(\mu) = \Theta_\psi^{-1} J\big[\Theta_\varphi(\mu)\big] \quad \forall \mu \in O_\varphi(\mathcal{A}).$$

Справедлив также и дискретный вариант этого результата.

Теорема 4 (см. [7])**.** *Пусть φ и ψ — состояния на C^*-алгебрах $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ соответственно. Предположим, что $\mathcal{M}'_\varphi$ является алгеброй фон Неймана, не содержащей прямых слагаемых типа I_2. Тогда для любого порядкового изоморфизма $F : O^{\mathrm{fin}}_\varphi(\mathcal{A}) \to O^{\mathrm{fin}}_\psi(\mathcal{B})$ существует единственный йорданов $*$-изоморфизм $J : \mathcal{M}'_\varphi \to \mathcal{M}'_\psi$, обладающий следующим свойством:*

$$F(\mu) = \Theta_\psi^{-1} J[\Theta_\varphi(\mu)] \quad \forall \mu \in O^{\mathrm{fin}}_\varphi(\mathcal{A}).$$

В случае σ-конечной алгебры фон Неймана оказывается, что частично упорядоченное по Шоке множество является полным йордановым инвариантом.

Теорема 5. *Пусть $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ — σ-конечные алгебры фон Неймана, причем $\mathcal{M}$ не содержит прямых слагаемых типа I_2. Тогда следующие условия эквивалентны:*

1) *Существует йорданов $*$-изоморфизм между $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$.*
2) *Существуют такие точные нормальные состояния φ и ψ на $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ соответственно, что множества $(O_\varphi(\mathcal{M}), \prec_C)$ и $(O_\psi(\mathcal{N}), \prec_C)$ изоморфны как частично упорядоченные множества.*
3) *Для любых точных нормальных состояний φ и ψ на $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ соответственно множества $(O_\varphi(\mathcal{M}), \prec_C)$ и $(O_\psi(\mathcal{N}), \prec_C)$ изоморфны как частично упорядоченные множества.*
4) *Существуют такие точные нормальные состояния φ и ψ на $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ соответственно, что множества $(O^{\mathrm{fin}}_\varphi(\mathcal{M}), \prec_C)$ и $(O^{\mathrm{fin}}_\psi(\mathcal{N}), \prec_C)$ изоморфны как частично упорядоченные множества.*

Теперь мы можем описать порядковые изоморфизмы множества всех ортогональных мер.

Теорема 6. *Пусть $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ — C^*-алгебры. Предположим, что для любого состояния φ на $\mathcal{A}$ алгебра $\mathcal{M}'_\varphi$ не имеет прямых слагаемых типа I_2. Пусть $F : O(\mathcal{A}) \to O(\mathcal{B})$ — порядковый изоморфизм. Тогда существуют такие биекция $\gamma : S(\mathcal{A}) \to S(\mathcal{B})$ и семейство $(J_\varphi)_{\varphi \in S(\mathcal{A})}$ йордановых $*$-изоморфизмов между $\mathcal{M}'_\varphi$ и $\mathcal{M}'_{\gamma(\varphi)}$, что для любой $\mu \in O(\mathcal{A})$ справедливы следующие утверждения:*

1) *$b(\mu) = \varphi$ тогда и только тогда, когда $b(F(\mu)) = \gamma(\varphi)$;*
2) *$F(\mu) = \Theta^{-1}_{\gamma(b(\mu))} J_{b(\mu)}\big[\Theta_{b(\mu)}(\mu)\big]$.*

Доказательство. Заметим, что атомы в $(O(\mathcal{A})), \prec_C)$ являются мерами Дирака. Следовательно, для данного $\varphi \in S(\mathcal{A})$ существует такое состояние $\gamma(\varphi)$, что $F(\delta_\varphi) = \delta_{\gamma(\varphi)}$. Это означает, что отображение $\varphi \to \gamma(\varphi)$ является биекцией между соответствующими пространствами состояний. Более того, с учетом предложения 1 получаем, что

$$\mu \in O_\varphi(\mathcal{A}) \iff F(\mu) \in O_{\gamma(\varphi)}(\mathcal{A}).$$

Другими словами,

$$F[O_\varphi(\mathcal{A})] = O_{\gamma(\varphi)}(\mathcal{B}).$$

Поскольку $O(\mathcal{A})$ имеет непересекающееся покрытие $(O_\varphi(\mathcal{A}))_{\varphi\in S(\mathcal{A})}$, элементы которого сохраняются F, можем применить теорему 3, чтобы установить второе утверждение. $\square$

Используя те же самые аргументы, что и в теореме 6, можно доказать, что аналогичное описание может быть дано для порядковых изоморфизмов между частично упорядоченными множествами ортогональных мер с конечным носителем $O^{\mathrm{fin}}(\mathcal{A})$. Кроме того, если отображение γ в теореме 6 переводит точное нормальное состояние на алгебре фон Неймана $\mathcal{A}$ в точное нормальное состояние на алгебре фон Неймана $\mathcal{B}$, то $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ изоморфны. Вопрос о том, является ли частично упорядоченное множество $(\mathcal{P}(K), \prec_C)$ полным инвариантом для выпуклого компактного множества K, требует дальнейших исследований.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Brateli O., Robinson D. W.* Operator Algebras and Quantum Statistical Mechanics. Vol. 1. — Springer-Verlag, 1997.
2. *Davidson K., Kennedy M.* Choquet order and hyperrigidity for function systems/ `arXiv:1608.02334v1`
3. *Halvorson H.* (ed.). Deep Beauty: Understanding the Quantum World through Mathematical Innovation. — Cambridge Univ. Press, 2011.
4. *Hamhalter J.* Isomorphisms of ordered structures of abelian C^*-subalgebras of C*-algebras// J. Math. Anal. Appl. — 2011. — *383*. — С. 391–399.
5. *Hamhalter J., Turilova E.* Structure of associative subalgebras of Jordan operator algebras// Quart. J. Math. — 2013. — *64*, № 2. — С. 397–408.
6. *Hamhalter J., Turilova E.* Automorphisms of ordered structures of abelian parts of operator algebras and their role in quantum theory// Int. J. Theor. Phys. — 2014. — *53*, № 10. — С. 3333–3345.
7. *Hamhalter J., Turilova E.* Orthogonal measures on state spaces and context structures of quantum theory// Int. J. Theor. Phys. — 2016. — *55*, № 7. — С. 3353–3365.
8. *Heunen C., Landsman N. P., Spitters B.* Bohrification of operator algebras and quantum logic// Synthese. — 2012. — *186*, № 3. — С. 719–752.
9. *Kadison R. V., Ringrose J. R.* Theory of Operator Alegebras. Vols. I, II. — Academic Press, 1986.
10. *Lindenhovius B.* $C(A)$/ Ph.D. thesis. — Nijmegen: Radbound Univ., 2016.
11. *Lukeš J., Malý J., Netuka I., Spurný J.* Integral Representation Theory, Applications to Convexity, Banach Spaces, and Potential Theory. — Berlin–New York: de Gruyter, 2010.
12. *Takesaki, M.* Theory of Operator Algebras. Vols. I–III. — Springer-Verlag, 2001.

Е. А. Турилова
Казанский (Приволжский) Федеральный Университет
E-mail: `Ekaterina.Turilova@kpfu.ru`

Я. Хамхалтер
Czech Technical University, Prague, Czech Republic
E-mail: `hamhalte@math.feld.cvut.cz`