ISSN 0233-6723

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ

СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Тематические обзоры

Том 139

Москва 2017

ISSN 0233–6723

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

ВСЕРОССИЙСКИЙ ИНСТИТУТ
НАУЧНОЙ И ТЕХНИЧЕСКОЙ ИНФОРМАЦИИ
(ВИНИТИ РАН)

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ

СЕРИЯ
СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

ТЕМАТИЧЕСКИЕ ОБЗОРЫ

Том 139

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Москва 2017

СОДЕРЖАНИЕ

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 139 (2017). С. 3–8

УДК 514.763.8

О НИКОЛАЕ ВАСИЛЬЕВИЧЕ СТЕПАНОВЕ И ЕГО ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

© 2017 г. **Г. А. БАНАРУ**

К 90-летию со дня рождения Н. В. Степанова (1926–1991)

Аннотация. Представлены основные результаты в области геометрической теории обыкновенных дифференциальных уравнений, полученные замечательным отечественным специалистом Н. В. Степановым (1926–1991). Некоторые построения Н. В. Степанова проиллюстрированы на примере обыкновенных дифференциальных уравнений третьего и пятого порядков.

Ключевые слова: обыкновенное дифференциальное уравнение, инвариант, связность, классификация, дифференциально-алгебраические характеристики, группы симметрий.

AMS Subject Classification: 34A26, 53A55

1. Введение. В сентябре 2016 г. исполнилось 90 лет со дня рождения известного отечественного геометра, профессора, доктора физико-математических наук Николая Васильевича Степанова (1926–1991). Последние 10 лет своей жизни Н. В. Степанов заведовал кафедрой геометрии Смоленского государственного педагогического института им. К. Маркса (ныне этот вуз именуется Смоленским государственным университетом).

Практически вся научная деятельность Н. В. Степанова была связана с одним направлением — геометрической теорией обыкновенных дифференциальных уравнений. Им опубликовано около 40 значительных работ по этой тематике. Наиболее полно его результаты представлены в двух обзорах [6, 7], которые чаще всего цитируются специалистами в данной области. Достижениям Н. В. Степанова в геометрической теории обыкновенных дифференциальных уравнений уделено значительное место в обзоре [4] выдающегося отечественного специалиста Л. Е. Евтушика. В упомянутом обзоре Л. Е. Евтушик подчеркивает, что важнейшим направлением приложения современного аппарата геометрических исследований стала геометрия дифференциальных уравнений. Толчок этому направлению исследований дан работами замечательного французского геометра Эли Картана (см., например, [10]). Фундаментальные результаты в геометрической теории дифференциальных уравнений были получены Г. Ф. Лаптевым, А. М. Васильевым, В. И. Близникасом, А. К. Рыбниковым, Н. В. Степановым и их учениками (см. [4]).

Данная статья посвящена основным научным достижениям Н. В. Степанова и их связи с результатами других известных отечественных геометров. Некоторые построения и результаты Н. В. Степанова проиллюстрированы на примере обыкновенных дифференциальных уравнений третьего и пятого порядков. Представлен ряд результатов автора, относящихся к геометрии обыкновенных дифференциальных уравнений третьего и пятого порядков (группы преобразований, относительно которых уравнения инвариантны; расслоенные пространства со связностью, присоединенные к уравнениям и др.). Эти результаты, полученные как с использованием методов, разработанных Н. В. Степановым, так и другими средствами, развивают и дополняют дифференциально-геометрические построения этого замечательного отечественного геометра.

2. Основные результаты Н. В. Степанова в геометрической теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Основной целью (и задачей) исследований Н. В. Степанова было отыскание инвариантов произвольного обыкновенного дифференциального уравнения

$$y^{(n)} = f\big(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}\big) \tag{1}$$

порядка $n > 3$ относительно псевдогруппы g; все остальные задачи являлись либо средствами достижения основной цели (дифференциально-геометрический аппарат, теория связностей и т. п.), либо ее естественными следствиями и развитием (классификация обыкновенных дифференциальных уравнений, различные истолкования инвариантов и связей между ними).

Н. В. Степановым была построена система (в принципе бесконечная) продолжений основного уравнения, которая изучалась с точки зрения введенных операций ковариантного дифференцирования. Из системы продолжений выделялись структуры алгебраического характера (вообще говоря, бесконечномерные) с набором операторов ковариантного дифференцирования — дифференциальные алгебры, и доказывалось, что данные алгебры возможно рассматривать в целом. Были введены различные числовые характеристики элементов алгебры, важнейшие из которых допускают весьма широкие обобщения и играют значительную роль в исследованиях. Была доказана теорема об однородности всех формул теории по одной из введенных характеристик.

После проведенной (для всех порядков) адаптации репера, Н. В. Степанов получил один из самых значительных своих результатов: уравнения структуры фундаментально-групповой связности, инвариантно присоединенной к обыкновенному дифференциальному уравнению. Фундаментальная группа этой связности была изучена для уравнения $y^{(n)} = 0$ и для линейных дифференциальных уравнений порядка n.

Н. В. Степанов провел детальное исследование коэффициентов продолжений основного уравнения (1) и тензора кручения-кривизны связности. Были изучены соотношения между ними, что привело к выделению так называемого основного объекта обыкновенного дифференциального уравнения. Доказана ныне хорошо известная теорема о возможности выражения всех коэффициентов в теории через компоненты основного объекта. Из этого утверждения, в свою очередь, была выведена другая фундаментальная теорема об эквивалентности внутренней геометрии (определяемой структурными уравнениями связности) и внешней геометрии (которая определяется системой продолжений основного уравнения).

Компактным образом были введены понятия инвариантов (относительных и абсолютных) различных объектов, описывались их признаки и свойства. Был доказан ряд теорем, позволявших выделять и строить неограниченное количество инвариантов и инвариантных объектов. В итоге на основании этих результатов была построена инвариантная классификация обыкновенных дифференциальных уравнений, причем в качестве классификационных признаков были выбраны дифференциально-алгебраические характеристики, тангенциальные свойства (свойства касательных расслоений) и структурные свойства (т.е. свойства присоединенной к уравнению связности). Подобная классификация обыкновенных дифференциальных уравнений, по мнению самого Н. В. Степанова, не могла претендовать на полноту и завершенность, но была проведена впервые и оказалась весьма содержательной. Классификационные методы также были оригинальными и нашли применение в других исследованиях, использующих аналогичный аппарат (например, при классификации связностей).

Значительная часть исследований Н. В. Степанова в геометрической теории обыкновенных дифференциальных уравнений проводилась так называемым бескоординатным инвариантным методом. Однако и при введении координат и некоторых вторичных параметров было получено множество замечательных результатов. Поскольку все коэффициенты в данной теории в принципе должны выражаться через координаты и вторичные параметры, то понятия упомянутых выше числовых характеристик легко обобщаются на координаты и координатные формулы, причем теорема об однородности остается справедливой. Н. В. Степанов выделил классы обыкновенных дифференциальных уравнений с правой частью, легко выражающейся через координаты и производные (например, в случае, когда правая часть есть полином от старших производных с коэффициентами, которые являются функциями координат и младших производных). Н. В. Степанов отмечал, что при переходе к координатам теряются многие преимущества бескоординатного метода, ибо сразу возникают рамки одной координатной карты. С другой стороны, исследование становится более конкретным, возникают достаточно узкие классы обыкновенных дифференциальных уравнений, для которых координатное описание может быть более целесообразным.

По аналогии с классической теорией групп Ли, Н. В. Степанов ввел в рассмотрение так называемые импримитивные обыкновенные дифференциальные уравнения (импримитивной называют и соответствующую присоединенную структуру). Им был получен совершенно общий, не зависящий от выбора координат вид правой части импримитивных уравнений. Специально исследован случай, когда импримитивное обыкновенное дифференциальное уравнение допускает связность с нулевой кривизной (тогда правая часть приводится к виду, не зависящему от $y^{(n-1)}$ и $y^{(n-2)}$). При наложении некоторых дополнительных условий получаются линейные обыкновенные дифференциальные уравнения. Класс импримитивных обыкновенных дифференциальных уравнений допускает инвариантное присоединение поля направлений на плоскости. Подавляющее большинство имеющих практическое применение обыкновенных дифференциальных уравнений как раз обладает этим свойством. Для таких уравнений Н. В. Степанов исследовал возможности введения инвариантной координатизации, им найдена общая форма импримитивных обыкновенных дифференциальных уравнений как в общих, так и в специальных координатах. Были введены в рассмотрение новые классы импримитивных обыкновенных дифференциальных уравнений, выявлены критерии эквивалентности импримитивных линейных обыкновенных дифференциальных уравнений.

Н. В. Степанов рассматривал и такую задачу: найти такую упорядоченную пару $\langle g, E\rangle$, что каждый нетривиальный абсолютный инвариант (относительно g) уравнения E является первым интегралом того же уравнения E. Идея такого исследования, скорее всего, была высказана Э. Картаном, но вопрос о существовании таких пар, где E — обыкновенное дифференциальное уравнение порядка ни ниже 3, решена именно Н. В. Степановым. Им были найдены такие пары. В ходе исследований в данном направлении были выделены специальные классы обыкновенных дифференциальных уравнений, а в ходе дальнейших дифференциально-геометрических построений возникли так называемые разрешимые структуры (аналоги разрешимых групп Ли), интегрирующие множители и их обобщения — множители Дарбу, а также другие факты, имеющие самое прямое отношение к проблеме интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений.

Н. В. Степанов считал основными следующие свои результаты [8]:

1) нахождение фундаментально-групповой картановой связности, инвариантно относительно псевдогруппы всех достаточно гладких точечных преобразований плоскости присоединяемой к произвольному обыкновенному дифференциальному уравнению порядка $n \geqslant 3$;
2) выделение из систем продолжений основного уравнения специальных структур алгебраического характера с формальными операторами дифференцирования; присоединяемые к обыкновенному дифференциальному уравнению дифференциальные алгебры являются совершенно необходимой частью аппарата, применяемого для построения присоединенной связности;
3) подробное изучение инвариантов и инвариантных объектов обыкновенных дифференциальных уравнений, их структуры и взаимосвязи; доказательство теорем, позволяющих получать неограниченное количество инвариантов и инвариантных объектов, причем вычисление таких инвариантов и инвариантных объектов всегда может быть доведено до конца;
4) решение проблемы соотношения внешней и внутренней геометрии обыкновенных дифференциальных уравнений (они оказались эквивалентными!);
5) построение на базе имеющихся инвариантов так называемой инвариантной классификации обыкновенных дифференциальных уравнений. Такая классификация, являясь единой, может отражать различные свойства уравнений и присоединенных к ним структур: дифференциально-алгебраических характеристик, касательных расслоений, присоединенных связностей.

3. Некоторые иллюстрации дифференциально-геометрических построений Н. В. Степанова на примере обыкновенных дифференциальных уравнений третьего и пятого порядков. Обратим внимание на то, что практически все упомянутые выше результаты Н. В. Степанова относятся к геометрической теории обыкновенных дифференциальных уравнений n-го порядка. Однако, свои исследования в этой области Николай Васильевич начал в 1957 году под руководством А. М. Васильева с изучения пары (не системы) двух обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка. Позже Н. В. Степанов и его ученики (В. А. Кондрашенков, И. Ф. Ковренко, В. И. Усачев, В. Л. Федоров, Г. А. Банару) получали результаты об уравнениях третьего, четвертого и пятого порядков.

Рассмотрим одну из задач, поставленных Н. В. Степановым. Как известно (см. [6]), каждому классу уравнений, эквивалентных с точностью до точеной аналитической замены координат, соответствует вполне определенное расслоенное пространство со связностью, однозначно описываемое конкретными уравнениями структуры. Для некоторого уравнения определенного класса тензор кручения-кривизны структурных уравнений может быть равным нулю. В этом случае уравнения структуры определяют группу инвариантности данного уравнения. Например, так обстоит дело со следующим дифференциальным уравнением пятого порядка:

$$y^{(5)} = \frac{5y^{(3)}y^{(4)}}{y''} - \frac{40(y^{(3)})^3}{9(y'')^2}. \tag{2}$$

Интегральными кривыми уравнения (2) являются линии второго порядка общего вида (в этом легко убедить непосредственной проверкой). Они, как хорошо известно, инвариантны относительно проективных преобразований (см. [3]). Вот почему уравнению (2) соответствует плоский случай связности проективного пространства. Структурные уравнения проективного пространства представляют собой частный случай структурных уравнений пространства проективной связности — расслоенного пространства с проективной фундаментальной группой (см. [5]). Поэтому естественно возникает такой вопрос: существует ли класс (уравнение (2), разумеется, должно содержаться в таком классе) обыкновенных дифференциальных уравнений пятого порядка, соответствующее которым расслоенное пространство было бы пространством проективной связности?

Ключом к решению данной задачи является доказанная около двадцати лет тому назад теорема.

Теорема 1 (см. [2]). *Следующие уравнения структуры определяют пространство проективной связности*:

$$D\omega^1 - \omega^1 \wedge \omega^1_1 + \omega^2 \wedge \left(\omega^1_{11} - \frac{2}{3}\omega^2_{111}\right) + \Omega^1; \tag{3a}$$

$$D\omega^2 = \omega^1 \wedge \omega^2_1 + \omega^2 \wedge \left(2\omega^1_1 - \omega^2_{11}\right) + \Omega^2; \tag{3b}$$

$$D\omega^2_1 = \omega^1 \wedge \omega^2_{11} + \omega^2_1 \wedge \left(\omega^1_1 - \omega^2_{11}\right) + \omega^2 \wedge \left(2\omega^1_{11} - \omega^2_{111}\right) + \Omega^2_1; \tag{3c}$$

$$D\omega^2_{11} = \omega^1 \wedge \omega^2_{111} + \omega^2_1 \wedge \left(3\omega^1_{11} - 2\omega^2_{111}\right) + \Omega^2_{11}; \tag{3d}$$

$$D\omega^2_{111} = \omega^2_{1111} \wedge \left(\frac{1}{2}\omega^2_1 - \omega^1\right) + \omega^2_{111} \wedge \left(2\omega^2_{11} - \omega^1_1\right) + 3\omega^2_{11} \wedge \omega^1_{11} + \Omega^2_{111}; \tag{3e}$$

$$D\omega^2_{1111} = \omega^2_{1111} \wedge \left(\omega^2_{11} - 2\omega^1_1\right) + 2\omega^2_{111} \wedge \omega^1_{11} + \Omega^2_{1111}; \tag{3f}$$

$$D\omega^1_1 = \omega^1 \wedge \omega^1_{11} + \omega^2_1 \wedge \left(\omega^1_{11} - \frac{2}{3}\omega^2_{111}\right) + \frac{1}{6}\omega^2_{1111} \wedge \omega^2 + \Omega^1_1; \tag{3g}$$

$$D\omega^1_{11} = \omega^1_1 \wedge \omega^1_{11} + \omega^2_{1111} \wedge \left(\frac{1}{3}\omega^2_1 - \frac{1}{2}\omega^1\right) + \omega^2_{11} \wedge \left(\omega^1_{11} - \frac{2}{3}\omega^2_{111}\right) + \Omega^1_{11}. \tag{3h}$$

Здесь Ω — формы кручения-кривизны, образованные внешними произведениями дифференциальных форм ω^1, $\omega^2 m$ ω^2_1, ω^2_{11}, ω^2_{111}, ω^2_{1111}.

Окончательное решение поставленной задачи содержит следующая теорема.

Теорема 2. *Обыкновенное дифференциальное уравнение пятого порядка*

$$y^{(5)} = \left(\frac{5y^{(3)}}{y'' + E} + D\right) y^{(4)} + B,$$

где $B = B\big(x, y, y', y'', y^{(3)}\big)$, $D = D\big(x, y, y', y''\big)$, $E = E\big(x, y, y'\big)$, допускает инвариантное присоединение к себе пространства проективной связности, описываемого уравнениями структуры (3) *и имеющего линии второго порядка в качестве образующих элементов.*

Другая задача, поставленная Н. В. Степановым, относилась к геометрии обыкновенных дифференциальных уравнений третьего порядка. Требовалось провести анализ групп симметрий, допускаемых обыкновенными дифференциальными уравнениями третьего порядка, и отыскание условий, при которых обыкновенное дифференциальное уравнение третьего порядка допускает присоединение к себе расслоенного пространства со связностью с той или иной фундаментальной группой.

Вначале эта задача была решена автором (уже под руководством Л. Е. Евтушика) для семимерных и шестимерных групп преобразований [1].

Теорема 3. *Уравнение $y''' = f\bigl(x, y, y', y''\bigr)$ обладает семимерной группой точечных симметрий тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия* (*здесь переменным x, y, y', y'' приписаны номера* 1, 2, 3, 4 *соответственно*):

$$f_{444} = 0; \tag{4a}$$

$$(f_{44})^2 + 6f_{443} = 0; \tag{4b}$$

$$3f_{33} - 3f_3f_{44} - 6f_{42} + 2f_4f_{43} - \frac{1}{3}(f_4)^2f_{44} + f_{44}\Bigl(f_{41} + f_{42}y' + f_{43}y'' + f_{44}f\Bigr) = 0; \tag{4c}$$

$$\begin{gathered} 6f_2 + 2f_3f_4 + \frac{4}{9}(f_4)^3 - 2f_4\Bigl(f_{41} + f_{42}y' + f_{43}y''\Bigr) - ff_4f_{44} + f_{42}y'' - 2ff_{43} + \\ + f_{44}\Bigl(f_1 + f_2y' + f_3y''\Bigr) - 3f_{31} - 3f_{32}y' - 3f_{33}y'' + f_{411} + 2f_{421}y' + 2f_{431}y'' + \\ + 2ff_{441} + f_{442}(y')^2 + 2f_{432}y'y'' + 2ff_{442}y' + f_{433}(y'')^2 + 2ff_{443}y'' = 0. \end{gathered} \tag{4d}$$

Теорема 4. *Уравнение $y''' = f\bigl(x, y, y', y''\bigr)$ обладает шестимерной группой точечных симметрий тогда только тогда, когда выполняются условия* (4a), (4b) *и* (4d) *теоремы* 3 *и, кроме этого, еще два следующих условия*:

$$(f_{44})^2 + 6f_{443} \neq 0; \tag{5a}$$

$$\frac{1}{3}f_4(f_{44})^2 + 2f_4f_{443} + f_{44}\Bigl(f_{441} + f_{442}y' + f_{443}y''\Bigr) + 3f_{4431} + 3f_{4432}y' + 3f_{4433}y'' = 0. \tag{5b}$$

Среди уравнений, обладающих семимерной группой точечных симметрий, помимо тривиального примера $y''' = 0$ укажем уравнение

$$y''' = \frac{3(y'')^2}{y'}$$

(см. [1]); среди обыкновенных дифференциальных уравнений третьего порядка с шестимерной группой точечных симметрий достаточно простых примеров можно привести больше (см. [1]):

$$y''' = \frac{3(y'')^2}{2y'}, \quad y''' = \frac{3y'(y'')^2}{(y')^2 + 1}, \quad y''' = \frac{3y'(y'')^2}{(y')^2 - 1}.$$

Более сложной оказалась данная задача в случае пятимерной группы преобразований. Попытки решить ее предпринимались автором с начала текущего века (см. [9]). Сформулируем основной результат, полученный в данном направлении.

Теорема 5. *Единственно возможной пятимерной группой точечных симметрий, а также фундаментальной группой расслоенного пространства со связностью для обыкновенного дифференциального уравнения третьего порядка является группа* ***g5,5*** (*в терминологии Картана*).

Подчеркнем еще раз, что все перечисленные выше результаты в области геометрии обыкновенных дифференциальных уравнений третьего и пятого порядков проводились с помощью метода внешних дифференциальных форм, разработанного Э. Картаном и усовершенствованного многими выдающимися отечественными математиками. Николай Васильевич Степанов был одним из них.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Банару Г. А.* Обыкновенные дифференциальные уравнения 3-го порядка с 6-мерной и 7-мерной группами точечных симметрий// Вестн. МГУ. Сер. 1. Мат. Мех. — 1994. — № 3. — С. 31–36.
2. *Банару Г. А.* О проективной связности, допускаемой обыкновенным дифференциальным уравнением пятого порядка// Изв. вузов. Сер. мат. — 1996. — № 2. — С. 3–9.
3. *Глаголев Н. А.* Проективная геометрия. — М.: Высшая школа, 1963.
4. *Евтушик Л. Е.* Геометрия обыкновенных дифференциальных уравнений. Исследования в семинаре Лаптева—Васильева при Московском университете (1980–1992 гг.)// Итоги науки и техн. Совр. мат. прилож. Тематич. обзоры. — 2002. — *11*. — С. 24–81.
5. *Картан Э.* Пространства проективной связности// В сб.: Пространства аффинной, проективной и конформной связности. — Казань, 1962. — С. 119–153.
6. *Степанов Н. В.* Дифференциально-геометрическая теория уравнения $y^{(n)} = f\big(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}\big)$// Итоги науки и техн. Пробл. геом. — 1977. — *8*. — С. 47–66.
7. *Степанов Н. В.* Геометрия дифференциальных уравнений// Итоги науки и техн. Пробл. геом. — 1981. — *12*. С. 127–164.
8. *Степанов Н. В.* Дифференциально-геометрическая теория уравнения $y^{(n)} = f\big(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}\big)$/ Дисс. на соискание уч. степ. доктора физ.-мат. наук. — М.: МГУ им. М. В. Ломоносова, 1986.
9. *Banaru G. A.* A note on third-order ordinary differential equations// Изв. АН Респ. Молдова. Сер. мат. — 2002. — *39*, № 2. — С. 65–70.
10. *Cartan E.* La geometria de las ecuaciones diferenciales de terces order// Rev. Mat. Hisp. Amer. — 1941. — *1*. — С. 3–33.

Г. А. Банару
Смоленский государственный университет
E-mail: mihail.banaru@yahoo.com

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 139 (2017). С. 9–14

УДК 514.142.2, 514.174.6

ОПИСАНИЕ ФУНКЦИОНАЛОВ, МИНИМИЗИРУЕМЫХ Φ-ТРИАНГУЛЯЦИЯМИ

© 2017 г. **В. А. КЛЯЧИН, Е. Г. ГРИГОРЬЕВА**

Посвящается нашему учителю профессору В. М. Миклюкову

Аннотация. Получены условия на функцию f, определенную на множестве симплексов S, при которых величины $F(T) = \sum\limits_{S\in T} f(S)$ или $F_f^m(T) = \max\limits_{S\in T} f(S)$ минимальны для Φ-триангуляций T. Как следствие, получены некоторые экстремальные свойства классической триангуляции Делоне.

***Ключевые слова*:** триангуляция, условие Делоне, пустая сфера, функционал.
***AMS Subject Classification*:** 52B55, 68U05

1. Введение. Пусть $P = \{p_i\}$, $i = 1, \ldots, N$ — такой набор точек $P_i \in \mathbb{R}^n$, что любой симплекс с вершинами в этих точках является невырожденным. Триангуляцией T заданного набора точек будем называть такой набор n-мерных симплексов $S_1, \ldots, S_m$, что:

1) каждая точка p_i заданного набора является вершиной одного из симплексов $S \in T$;
2) каждая вершина любого симплекса $S \in T$ является одной из точек p_i, $i = 1, \ldots, N$;
3) внутренность пересечения любых двух симплексов пуста;
4) объединение всех симплексов из T совпадает с выпуклой оболочкой точек p_i.

В настоящей статье мы обозначаем симплексы с вершинами $p_i \in \mathbb{R}^n$, $i = 0, \ldots, n$, через $S = S(p_0, p_1, \ldots, p_n)$.

В работах Б. Н. Делоне [2, 12] для построения триангуляций предложен метод, основанный на условии пустой сферы. Это условие означает, что описанная сфера каждого симплекса триангуляции не содержит внутри себя точек заданного конечного множества P. Триангуляции, для которых выполняется это условие, получили название триангуляции Делоне. В [6, 9–11] показана важная роль условия Делоне в задаче приближения первых производных при кусочно-линейной аппроксимации гладких функций. Также следует отметить, что триангуляции Делоне облаадают рядом экстремальных свойств в классе все триангуляций заданного конечного множества точек. Например, хорошо известно (см. [4,16]), что триангуляция Делоне имеет минимальное значение суммы радиусов описанных окружностей своих треугольников среди всех триангуляций фиксированного конечного множества. В [3,13] для бесконечных триангуляций Делоне доказаны экстремальные свойства плотности непрерывных функционалов.

В [5, 7] предложен алгоритм построения триангуляции, основанный на применении условия пустого выпуклого множества (Φ-триангуляции), а в [8] доказано одно экстремальное свойство такого класса триангуляций. В настоящей статье найдены условия на функционалы, определенные на множестве всех триангуляций конечного подмножества точек плоскости, при выполнении которых Φ-триангуляция минимизирует этот функционал.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 15-41-02517-Поволжье-а).

2. Минимизация функционалов типа суммы. Для конечного множества $P \subset \mathbb{R}^n$ обозначим через $T(P)$ множество всех триангуляций P. Предположим, что на множестве всех симплексов определена некоторая неотрицательная непрерывная функция $f(S)$. Тогда всякой триангуляции $T \in T(P)$ можно поставить в соответствие число

$$F(T) = \sum_{S \in T} f(S) \tag{1}$$

или число

$$F_f^m(T) = \max_{S \in T} f(S). \tag{2}$$

В настоящей работе будет показано, что при некоторых условиях на функцию $f(S)$ введенный класс триангуляций минимизирует один из приведенных функционалов. Перейдем к формулировкам.

Рассмотрим в $\mathbb{R}^n$ семейство Φ выпуклых компактных множеств с непустой внутренностью. Пусть S — произвольный невырожденный симплекс. Определим *охватывающее множество* $B \in \Phi$ (если оно существует) из данного семейства как множество, граница которого содержит вершины симплекса (а, значит содержит и весь симплекс в силу выпуклости). В общем случае таких охватывающих множеств из данного семейства Φ может быть несколько.

Определение. *Триангуляция конечного множества точек $P \subset \mathbb{R}^n$ называется Φ-триангуляцией, если для любого ее симплекса S внутренность любого охватывающего множества B не содержит вершин других симплексов.*

Заметим, что если семейство Φ представляет собой семейство всех шаров в $\mathbb{R}^n$, то приведенное выше определение совпадает с определением триангуляции Делоне. Из результатов работы [7] следует существование Φ-триангуляции конечного множества точек при условии, что семейство Φ обладает следующим свойством: для любого невырожденного симплекса S в семействе Φ существует и притом только одно охватывающее множество $B(S)$.

В дальнейшем будем предполагать, что это условие на семейство выпуклых множеств является выполненным. В таком случае охватывающее множество будем обозначать через $B(S)$.

Замечание 1. *Из приведенного определения следует, что для двух выпуклых множеств $B_1, B_2 \in \Phi$ из семейства с указанным свойством пересечение их границ состоит из не более двух точек. Отсюда можно получить следующее свойство: если четыре точки p_0, p_1, p_2, p_3 лежат в вершинах выпуклого четырехугольника, то из того, что $p_3 \notin B(S(p_0, p_1, p_2))$, следует*

$$p_0 \notin B(S(p_1, p_2, p_3)), \quad p_1 \in B(S(p_0, p_2, p_3)), \quad p_2 \in B(S(p_0, p_1, p_3)).$$

Пусть $S = S(p_0, \dots, p_n)$ — невырожденный симплекс с вершинами $p_0, p_1, \dots, p_n \in \mathbb{R}^n$ и точка $x \in \mathbb{R}^n \setminus S$. Мы будем говорить, что грань G этого симплекса *f-минимальна* (*f-максимальна*) относительно точки x, если для симплекса S', построенного из вершин грани G и точки x, имеет место неравенство

$$f(S') < f(S) \quad (text f(S') > f(S)).$$

Заметим, что если грань f-минимальна (f-максимальна) относительно точки x, то она также $\mu \circ f$-максимальна ($\mu \circ f$-минимальна) для любой возрастающей функции μ.

Теорема 1. *Предположим, что для любого треугольника $S \subset \mathbb{R}^2$ и для любой точки $x \in \mathbb{R}^2 \setminus B(S)$ существуют как минимум две стороны, f-максимальные относительно точки x. Тогда Φ-триангуляция конечного множества точек $P \subset \mathbb{R}^2$ доставляет минимальное значение функционалу*

$$F_f(T) = \sum_{S \in T} f(S).$$

Доказательство. В [14] показано, что в двумерном случае для доказательства свойства экстремальности для функционалов типа (1) достаточно проверить следующее локальное свойство функции f. Пусть заданы точки $p_0, p_1, p_2, p_3 \in \mathbb{R}^2$, образующие выпуклый четырехугольник. Введем следующие обозначения для треугольников: $S_1 = S(p_0, p_1, p_2)$, $S_2 = S(p_1, p_2, p_3)$,

$S_1^* = S(p_0, p_1, p_3)$, $S_2^* = S(p_0, p_2, p_3)$. Если предположить, что треугольники S_1, S_2 принадлежат Ф-триангуляции, то для проверки экстремального свойства достаточно показать, что

$$f(S_1) + f(S_2) \leqslant f(S_1^*) + f(S_2^*).$$

Не ограничивая общности будем считать, что $f(S_1^*) \leqslant f(S_2^*)$ и $f(S_1) \leqslant f(S_2)$. Для треугольника S_2 и точки $x = p_0$ применим условие f-максимальности. Поскольку сторона p_0p_1 в силу сделанного предположения не может быть f-максимальной, то должны быть выполнены неравенства $f(S_2) < f(S_1^*)$ и $f(S_2) < f(S_2^*)$. Из этого получаем требуемое неравенство

$$f(S_1) + f(S_2) \leqslant 2f(S_2) < f(S_1^*) + f(S_2^*).$$

□

Замечание 2. *Аналогично доказывается утверждение в предположении, что для любого треугольника $S \subset \mathbb{R}^2$ и для любой точки $x \in B(S) \setminus S$ существуют как минимум две стороны f-минимальные относительно точки x.*

Рассмотрим симплекс $S = S(p_0, \dots, p_n) \subset \mathbb{R}^n$. Для каждой вершины p_i построим коническое множество

$$C(p_i) = \Big\{ x \in \mathbb{R}^n : \ \exists \delta > 0 \ \forall t \in (0, \delta) \ p_0 + t \cdot (x - p_0) \in S \Big\}.$$

Введем обозначение

$$C(S) = \bigcup_{i=0}^{n} C(p_i).$$

Теорема 2. *Предположим, что функция f такова, что для любого треугольника $S \subset \mathbb{R}^2$ и для любой точки $x \in C(S) \setminus B(S)$ существуют как минимум одна сторона, f-максимальная относительно точки x, и для любой точки $x \in B(S) \setminus S$ существуют как минимум одна сторона, f-минимальная относительно точки x. Тогда Ф-триангуляция конечного множества точек $P \subset \mathbb{R}^2$ доставляет минимальное значение функционалу*

$$F_f(T) = \sum_{S \in T} f(S).$$

Доказательство. Как и при доказательстве предыдущей теоремы, доказательство сводится к доказательству неравенства

$$f(S_1) + f(S_2) \leqslant f(S_1^*) + f(S_2^*).$$

Не ограничивая общности, будем считать, что $f(S_1^*) \leqslant f(S_2^*)$ и $f(S_1) \leqslant f(S_2)$. Тогда для симплекса S_2 и точки $x = p_0$ из условия f-максимальности получим

$$f(S_2) < f(S_1^*) \quad \text{или} \quad f(S_2) < f(S_2^*).$$

Для симплекса S_2^* и точки p_2, применяя условия f-минимальности, получим

$$f(S_1^*) > f(S_1) \quad \text{или} \quad f(S_1^*) > f(S_2).$$

Рассмотрим три случая. Если $f(S_2) < f(S_1^*)$, то $f(S_1) \leqslant f(S_2) \leqslant f(S_1^*) \leqslant f(S_2^*)$, откуда

$$f(S_1) + f(S_2) \leqslant f(S_1^*) + f(S_2^*).$$

Если же выполнены неравенства $f(S_2) < f(S_2^*)$ и $f(S_1^*) > f(S_1)$ или выполнены неравенства $f(S_2) < f(S_2^*)$ и $f(S_1^*) > f(S_2)$, то опять получаем требуемое неравенство

$$f(S_1) + f(S_2) \leqslant f(S_1^*) + f(S_2^*).$$

Теорема 2 доказана. □

Теорема 3. *Функция $f(S) = R(S)$, где $R(S)$ — радиус описанной окружности треугольника S, удовлетворяет условию теоремы 2.*

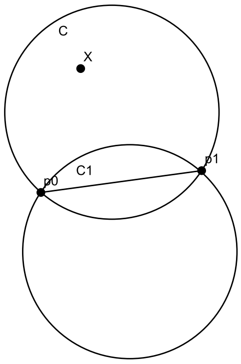

Рис. 1

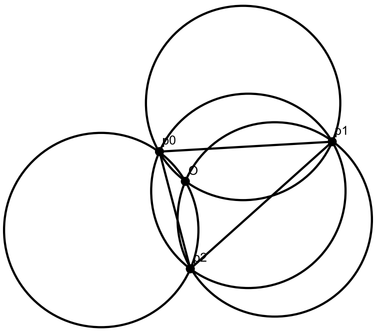

Рис. 2

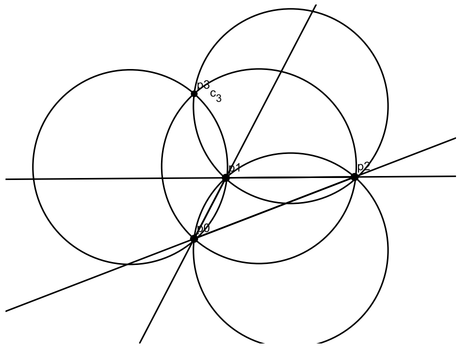

Рис. 3

Доказательство. Пусть p_0p_1 — произвольный отрезок на плоскости и C — некоторая окружность радиуса R, проходящая через его концы, с центром, не лежащим на p_0p_1. Построим окружность C_1, проходящую через те же точки и симметричную окружности C относительно отрезка p_0p_1. Тогда, очевидно, что множество точек x, лежащих внутри C и таких, что радиус описанной окружности треугольника p_0p_1x меньше R, расположено между дугами окружностей C, C_1, соединяющими точки p_0, p_1 (см. рис. 1). Обозначим это множество через $\Sigma(p_0, p_1)$. Рассмотрим треугольник $S = S(p_0, p_1, p_2)$. Тогда свойство f-минимальности для радиуса описанной окружности будет доказано, если мы покажем, что объединение $\Sigma(p_0, p_1) \cup \Sigma(p_1, p_2) \cup \Sigma(p_2, p_0)$ покрывает множество $B(S) \setminus S$. Как и выше, построим на всех трех сторонах треугольника три окружности, симметричные относительно соответствующей стороны. Хорошо известно, что эти окружности пересекаются в общей точке O (см. рис. 2). Поскольку все они различны, то каждая пара этих окружностей не имеет третьей точки пересечения. Отсюда следует, например, что та компонента связности множества $B(S) \setminus S$, которая примыкает к отрезку p_0p_1, покрывается объединением $\Sigma(p_0, p_2) \cup \Sigma(p_1, p_2)$. Аналогично и для двух других компонент. Таким образом, свойство f-минимальности доказано.

Для доказательства свойства f-максимальности обозначим через $D(p_0, p_1)$, $D(p_1, p_2)$, $D(p_2, p_0)$ соответствующие части кругов построенных выше окружностей, которые лежат вне описанной окружности треугольника $p_0p_1p_2$. Ясно, что сторона p_0p_1 обладает свойством f-максимальности относительно всякой точки, лежащей вне множества $B(S) \cup D(p_0, p_1)$. Несложно видеть, что для остроугольных треугольников парные пересечения кругов построенных трех окружностей лежат внутри окружности, описанной вокруг треугольника $p_0p_1p_2$. Поэтому свойство f-максимальности для остроугольных треугольников выполнено для всех точек, лежащих вне круга $B(S)$. Если треугольник S имеет тупой угол (например, угол при вершине p_1), то расположение рассматриваемых кругов будет таким, как показано на рис. 3. В этом случае из геометрических соображений ясно, что свойство f-максимальности не имеет места относительно точек, которые расположены в пересечении кругов окружностей, построенных на сторонах p_0p_1 и p_2p_1. Но это пересечение лежит вне множества $C(S)$. Следовательно, для точек $x \in C(S) \setminus B(S)$ свойство f-максимальности выполнено. Теорема доказана. □

Следствие 1. *Триангуляция Делоне конечного множества точек $P \subset \mathbb{R}^2$ доставляет минимальное значение функционалу*

$$F(T) = \sum_{S \in T} \mu(R(S)),$$

где $R(S)$ — радиус описанной окружности треугольника $S \in T$, а $\mu : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ — произвольная возрастающая функция.

Для случая степенных функций $\mu(t) = t^a$, $a > 0$, данное утверждение доказано в [15].

3. Минимизация функционалов типа максимума. В этом разделе приведем результаты, касающиеся свойства экстремальности Ф-триангуляций для функционалов типа (2).

Теорема 4. *Если функция f такова, что для любого треугольника $S \subset \mathbb{R}^2$ и для любой точки $x \in C(S) \setminus B(S)$ существуют как минимум одна сторона, f-максимальная относительно точки x, то Ф-триангуляция конечного множества точек $P \subset \mathbb{R}^2$ доставляет минимум функционалу*

$$F_f^m(T) = \max_{S \in T} f(S).$$

Доказательство. Как и при доказательстве теоремы 1, проверим выполнение локального свойства функции f. Именно, достаточно показать, что если для треугольников $S_1 = S(p_0, p_1, p_2)$, $S_2 = S(p_1, p_2, p_3)$ выполнено условие пустого охватывающего множества, то значение функционала $F_f^m(T)$ увеличится после замены этих треугольников треугольниками $S_1^* = S(p_0, p_3, p_1)$, $S_2^* = S(p_0, p_3, p_2)$. Обозначим триангуляцию до выполнения операции замены через T, а после — через T^*. Предположим для определенности, что $f(S_1) \geqslant f(S_2)$. Из этого предположения следует, что сторона p_1p_2 не может быть f-максимальной для точки p_3. Поскольку p_3 лежит вне $B(S_1)$, то для этой точки одна из сторон p_0p_1 или p_0p_2 является f-максимальной по условию теоремы. Это значит, что выполнено одно из неравенств

$$f(S_1^*) > f(S_1) \quad \text{или} \quad f(S_2^*) > f(S_1). \tag{3}$$

Если значение функционала $F_f^m(T)$ достигается не на треугольнике S_1, то при выполнении рассматриваемой операции замены треугольников значение функционала не может уменьшиться, и в этом случае имеем неравенство $F_f^m(T) \leqslant F_f^m(T^*)$. Если же значение $F_f^m(T)$ достигается на S_1, то из (3) следует, что в триангуляции T^* найдется треугольник с бóльшим значением функции f. Поэтому и в этом случае $F_f^m(T) \leqslant F_f^m(T^*)$. Теорема доказана. ☐

Из теорем 3 и 4 получаем хорошо известное свойство триангуляции Делоне.

Следствие 2. *Триангуляция Делоне конечного множества точек $P \subset \mathbb{R}^2$ доставляет имеет минимальное значение функционалу*

$$F_R^m(T) = \max_{S \in T} R(S),$$

где $R(S)$ — радиус описанной окружности треугольника $S \in T$.

Следствие 3. *Триангуляция Делоне конечного множества точек $P \subset \mathbb{R}^2$ доставляет имеет максимальное значение функционалу*

$$F_\alpha^m(T) = \min_{S \in T} \alpha(S),$$

где $\alpha(S)$ — минимальный угол треугольника $S \in T$.

Доказательство. Введем обозначение $\beta(S) = \pi - \alpha(S)$. Пусть задан треугольник $S = S(p_0, p_1, p_2)$ и $\alpha = \alpha(S)$ — величина его минимального угла. Рассмотрим произвольную точку $x \in C(S) \setminus B(S)$. Для определенности, пусть $x \in C(p_0)$. Покажем, что одна из сторон p_0p_1 или p_1p_2 обладает свойством f-максимальности относительно точки x для величины $\beta(S)$. Рассмотрим два случая. В первом случае будем предполагать, что α — это угол между сторонами p_0p_1 и p_1p_2. Поскольку точка x лежит вне описанной окружности треугольника S, то угол p_2xp_0 меньше угла $p_2p_1p_0$, равного α. Тем более наименьший угол в треугольнике p_0p_2x будет меньше α. Поэтому $\beta(S(p_0p_1x)) > \beta(S)$. Аналогично доказывается свойство f-максимальности, если α — это угол между сторонами p_0p_2 и p_1p_2. Во втором случае предположим, что минимальный угол в треугольнике S — это угол $p_1p_0p_2$. Тогда угол p_2p_0x меньше угла $p_2p_0p_1$, и тем самым $\alpha(S(p_0p_x)) < \alpha$, откуда $\beta(S(p_0p_2x)) < \beta(S)$. Из теоремы 4 следует, что триангуляция Делоне минимизирует функционал максимального значения $\beta(S)$, а значит, максимизирует функционал минимального значения $\alpha(S)$. Следствие доказано. ☐

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Акопян А. В.* Экстремальные свойства триангуляции Делоне// Тр. ин-та сист. анализа РАН. — 2009. — *46*. — С. 174–187.
2. *Делоне Б. Н.* Геометрия положительных квадратичных форм// Усп. мат. наук. — 1937. — *3*. — С. 16–62.
3. *Долбилин Н. П. , Мусин О. Р., Эдельсбруннер Г.* Об оптимальности функционалов на триангуляциях множеств Делоне// Усп. мат. наук. — 2012. — *67*, № 4 (406). — С. 189–190.
4. *Ильман В. М.* Экстремальные свойства триангуляции Делоне// Алгоритмы и программы. — 1985. — № 10 (88). — С. 57–66.
5. *Клячин В. А.* Об одном обобщении условия Делоне// Вестн. Томск. гос. ун-та. Мат. мех. — 2008. — *1*. — С. 48–50.
6. *Клячин В. А.* О многомерном аналоге примера Шварца// Изв. РАН. Сер. мат. — 2012. — *76*, № 4. — С. 41–48.
7. *Клячин В. А.* Алгоритм триангуляции, основанный на условии пустого выпуклого множества// Вестн. Волгоград. гос. ун-та. Сер. 1. Мат. Физ. — 2015. — *28*, № 3. — С. 27–33.
8. *Клячин В. А.* Экстремальные свойства триангуляции, основанной на условии пустого выпуклого множества// Сиб. электр. мат. изв. — 2015. — *12*. — С. 991–997.
9. *Клячин В. А.* Модифицированное условие пустой сферы Делоне в задаче аппроксимации градиента// Изв. РАН. Сер. мат. — 2016. — *80*, № 3. — С. 95–102.
10. *Клячин В. А., Пабат Е. А.* C^1-аппроксимация поверхностей уровня функций, заданных на нерегулярных сетках// Сиб. ж. индустр. мат. — 2010. — *13*, № 2. — С. 69–78.
11. *Клячин В. А., Широкий А. А.* Триангуляция Делоне многомерных поверхностей и ее аппроксимационные свойства// Изв. вузов. Сер. мат. — 2012. — *1*. — С. 31–39.
12. *Delaunay B. N.* Sur la sphere vide. A la memoire de Georges Voronoi// Изв. АН СССР. — 1934. — *6*. — С. 793–800.
13. *Dolbilin N. P., Edelsbrunner H., Glazyrin A., Musin O. R.* Functionals on triangulations of Delaunay sets// Mosc. Math. J. — 2014. — *14*, № 3. — С. 491–504.
14. *Edelsbrunner H.* Geometry and topology for mesh generation. — Cambridge Univ. Press, 2001.
15. *Musin O. R.* Properties of the Delaunay triangulation// Proc. 13th Ann. Symp. on Computational Geometry. — Nice, 1997. — С. 424–426.
16. *Sibson R.* Locally equiangular triangulations// Computer J. — 1978. — *21*, № 3. — С. 243–245.

В. А. Клячин
Волгоградский государственный университет
E-mail: `klchnv@mail.ru,kiem@volsu.ru`

Е. Г. Григорьева
Волгоградский государственный университет
E-mail: `e_grigoreva@mail.ru, kiem@volsu.ru`

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 139 (2017). С. 15–38

УДК 517.956.25

СУЩЕСТВОВАНИЕ ЭНТРОПИЙНЫХ РЕШЕНИЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ В АНИЗОТРОПНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ СОБОЛЕВА—ОРЛИЧА

© 2017 г. Л. М. КОЖЕВНИКОВА

Аннотация. Для некоторого класса анизотропных эллиптических уравнений с L_1-правой частью в произвольной неограниченной области рассматривается задача Дирихле с неоднородным граничным условием. Доказано существование энтропийных решений в анизотропных пространствах Соболева—Орлича.

Ключевые слова: анизотропное эллиптическое уравнение, энтропийное решение, существование решения, пространство Соболева—Орлича, N-функции, псевдомонотонный оператор.

AMS Subject Classification: 35J25, 35J62, 35D30

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение

Пусть Ω — произвольная область пространства $\mathbb{R}^n = \{\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)\}$, $\Omega \subsetneq \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$. Рассмотрим задачу Дирихле для уравнения

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i(\boldsymbol{x}, u, \nabla u))_{x_i} = a_0(\boldsymbol{x}, u), \quad \boldsymbol{x} \in \Omega, \tag{1.1}$$

с неоднородным краевым условием

$$u(\boldsymbol{x})\Big|_{\partial\Omega} = \psi(\boldsymbol{x})\Big|_{\partial\Omega}. \tag{1.2}$$

С 80-х годов прошлого столетия ведутся активные исследования нелинейных эллиптических уравнений второго порядка

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i(\boldsymbol{x}, u, \nabla u))_{x_i} - a_0(\boldsymbol{x}, u, \nabla u) = f(\boldsymbol{x}) \tag{1.3}$$

с $f \in L_1$ и мерами в качестве правых частей. Слабые решения уравнений вида (1.3) со степенными нелинейностями во всем пространстве $\mathbb{R}_n$ с $f \in L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_n)$ исследовались в работах Х. Брезиса [17], Л. Боккардо, Т. Галуэт и Ж. Васкеза [16], М. Бендамана, К. Карлсена [10] и др. Существование слабого решения задачи Дирихле в ограниченной области Ω с функцией $f \in L_1(\Omega)$ установлено Л. Боккардо, Т. Галуэт [14], Л. Боккардо, Т. Галуэт, П. Марчелини [15].

В работах Ф. Бенилана, Л. Боккардо, Т. Галлуэт, Р. Гарьепи, М. Пьера и Ж. Л. Васкеза [11], Л. Боккардо [13] для эллиптических уравнений со степенными нелинейностями с L_1-правой частью было предложено понятие энтропийного решения задачи Дирихле и доказаны его существование и единственность. Авторы указывают, что вместо энтропийного решения, введенного впервые С. Н. Кружковым [5] для уравнений первого порядка, можно рассматривать также ренормализованное решение. Такие решения являются элементами того же функционального класса, которому принадлежат энтропийные решения, но в отличие от последних удовлетворяют другому семейству интегральных соотношений. В ряде случаев понятия энтропийного и ренормализованного решения эквивалентны. Вопросы существования и единственности ренормализованных решений эллиптических задач в пространствах Орлича исследовались в [9, 20].

Свойства суммируемости и оценки энтропийных решений задачи Дирихле в ограниченных областях для нелинейного эллиптического уравнения (1.3) с условием вырождающейся коэрцитивности установлены А. А. Ковалевским [1].

Изучению существования энтропийных решений задачи Дирихле в пространствах Орлича для эллиптических уравнений с нестепенными нелинейностями второго порядка с $f \in L_1(\Omega)$ (Ω – ограниченная область) посвящена статья А. Бенкиране и Дж. Бенноуна [12].

Следует заметить, что в известных автору работах результаты установлены для энтропийных и ренормализованных решений эллиптических задач в ограниченных областях (за исключением статьи [11]) с однородными граничными условиями. В настоящей статье доказано существование энтропийных решений задачи Дирихле (1.1), (1.2) в анизотропных пространствах Соболева—Орлича без предположения ограниченности области Ω.

2. N-функции и пространства Орлича

В этом разделе приведены необходимые сведения из теории N-функций и пространств Орлича (см. [7]. Неотрицательная непрерывная выпуклая вниз функция $B(z)$, $z \in \mathbb{R}$б называется *N-функцией*, если она четна и
$$\lim_{z\to 0}\frac{B(z)}{z} = 0, \quad \lim_{z\to\infty}\frac{B(z)}{z} = \infty.$$
Отметим, что $B(\varepsilon z) \leqslant \varepsilon B(z)$, $z \in \mathbb{R}$, при $0 < \varepsilon \leqslant 1$.

N-функция
$$\overline{B}(z) = \sup_{y\geqslant 0}(y|z| - B(y)), \quad z \in \mathbb{R},$$
называется *дополнительной* к N-функции $B(z)$. Очевидно *неравенство Юнга*:
$$|zy| \leqslant B(y) + \overline{B}(z), \quad z, y \in \mathbb{R}. \tag{2.1}$$
Кроме того, имеет место равенство
$$zB'(z) = \overline{B}(B'(z)) + B(z), \quad z \in \mathbb{R}, \tag{2.2}$$
где $B'(z)$ — правая производная N-функции $B(z)$.

Для N-функций $B(z)$, $M(z)$ записывают $B(z) \prec M(z)$, если существуют такие числа $l > 0$, $z_0 > 0$, что
$$B(z) \leqslant M(lz), \quad |z| \geqslant z_0.$$
N-функция $B(z)$ *растет существенно быстрее* N-функции $M(z)$ (обозначение $M(z) \prec\prec B(z)$), если для любого числа $l > 0$
$$\lim_{z\to\infty}\frac{M(z)}{B(lz)} = 0.$$

Говорят, что N-функция $B(z)$ *удовлетворяет Δ_2-условию* при больших значениях z, если существуют такие числа $c > 0$, $z_0 \geqslant 0$, что
$$B(2z) \leqslant cB(z) \quad \text{для любых } |z| \geqslant z_0.$$

Δ_2-условие эквивалентно выполнению при $|z| \geqslant z_0$ неравенства

$$B(lz) \leqslant c(l)B(z), \tag{2.3}$$

где l — любое число, большее единицы, $c(l) > 0$.

N-функция $B(z)$ удовлетворяет Δ_2-условию тогда и только тогда, когда существуют такие числа $c > 1$, $z_0 \geqslant 0$, что при $|z| \geqslant z_0$ справедливо неравенство

$$zB'(z) \leqslant cB(z) \tag{2.4}$$

(см. [7, гл. I, § 4, теорема 4.1]). В дальнейшем в работе предполагается, что Δ_2-условие для рассматриваемых N-функций выполняется при всех значениях $z \in \mathbb{R}$ (т.е. $z_0 = 0$).

Для N-функции $B(z)$, ввиду выпуклости и неравенства (2.3), существует такое $c > 0$, что справедливо неравенство

$$B(y+z) \leqslant cB(z) + cB(y), \quad z, y \in \mathbb{R}. \tag{2.5}$$

Пусть Q — произвольная область пространства $\mathbb{R}^n$. Будем рассматривать пространство Орлича $L_B(Q)$ с нормой Люксембурга

$$\|v\|_{B,Q} = \inf\left\{ k > 0 \;\middle|\; \int\limits_Q B\left(\frac{v(\boldsymbol{x})}{k}\right) d\boldsymbol{x} \leqslant 1 \right\}.$$

Справедливы неравенства (см. [7, гл. II, § 9, неравенства (9.21), (9.12)])

$$\int\limits_Q B\left(\frac{v(\boldsymbol{x})}{\|v\|_{B,Q}}\right) d\boldsymbol{x} \leqslant 1, \tag{2.6}$$

$$\|v\|_{B,Q} \leqslant \int\limits_Q B(v) d\boldsymbol{x} + 1. \tag{2.7}$$

Кроме того, если N-функция $B(z)$ удовлетворяет Δ_2-условию, то для $v \in L_B(Q)$ выполнено неравенство

$$\int\limits_Q B(v) d\boldsymbol{x} \leqslant c(\|v\|_{B,Q}). \tag{2.8}$$

Для функций $u \in L_B(Q)$, $v \in L_{\overline{B}}(Q)$ имеет место неравенство Гельдера (см. [7, гл. II, § 9, неравенства (9.24), (9.27)]:

$$\left| \int\limits_Q u(\boldsymbol{x})v(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x} \right| \leqslant 2\|u\|_{B,Q}\|v\|_{\overline{B},Q}. \tag{2.9}$$

Норму в пространствах $L_p(Q)$, $p \in [1, \infty]$, будем обозначать $\|\cdot\|_{p,Q}$. Индекс $Q = \Omega$ в обозначениях $\|\cdot\|_{p,Q}$, $\|\cdot\|_{B,Q}$ будем опускать. Для любой N-функции $B(z)$, если $\operatorname{mes} Q < \infty$, то $L_B(Q) \subset L_1(Q)$ и выполнено неравенство

$$\|v\|_{1,Q} \leqslant A_0(\operatorname{mes} Q)\|v\|_{B,Q}, \quad v \in L_B(Q). \tag{2.10}$$

Для N-функций $B_1(z), \ldots, B_n(z)$ определим анизотропное пространство Соболева—Орлича $\mathring{H}^1_{\mathrm{B}}(Q)$ как пополнение $C_0^\infty(Q)$ по норме

$$\|v\|_{\mathring{H}^1_{\mathrm{B}}(Q)} = \sum_{i=1}^n \|v_{x_i}\|_{B_i,Q}.$$

Приведем теорему вложения для анизотропного пространства $\mathring{H}^1_{\mathrm{B}}(Q)$. Положим

$$h(\theta) = \left(\prod_{i=1}^n \frac{B_i^{-1}(\theta)}{\theta} \right)^{1/n}$$

и будем предполагать, что интеграл

$$\int\limits_0^1 \frac{h(\theta)}{\theta} d\theta$$

сходится. Тогда можно определить N-функцию $B_*^{-1}(z)$ по формуле

$$B_*^{-1}(z) = \int\limits_0^{|z|} \frac{h(\theta)}{\theta} d\theta.$$

Лемма 2.1 ((см. [4])). *Пусть* $v \in \mathring{H}^1_{\mathrm{B}}(Q)$.

(1) *Если*

$$\int\limits_1^\infty \frac{h(\theta)}{\theta} d\theta = \infty, \tag{2.11}$$

то $\mathring{H}^1_{\mathrm{B}}(Q) \subset L_{B_*}(Q)$ *и*

$$\|v\|_{B_*,Q} \leqslant A_1 \|v\|_{\mathring{H}^1_{\mathrm{B}}(Q)}; \tag{2.12}$$

(2) *если*

$$\int\limits_1^\infty \frac{h(\theta)}{\theta} d\theta < \infty, \tag{2.13}$$

то $\mathring{H}^1_{\mathrm{B}}(Q) \subset L_\infty(Q)$ *и*

$$\|v\|_{\infty,Q} \leqslant A_2 \|v\|_{\mathring{H}^1_{\mathrm{B}}(Q)}. \tag{2.14}$$

Здесь

$$A_1 = \frac{n-1}{n}, \quad A_2 = \int\limits_0^\infty \frac{h(\theta)}{\theta} d\theta.$$

3. Предположения и формулировка результатов

Пусть N-функции $B_1(z), \ldots, B_n(z)$ и дополнительные к ним $\overline{B}_1(z), \ldots, \overline{B}_n(z)$ подчиняются Δ_2-условию. Через $\mathrm{L}_{\mathrm{B}}(\Omega)$ обозначим пространство $L_{B_1}(\Omega) \times \ldots \times L_{B_n}(\Omega)$ с нормой

$$\|\boldsymbol{v}\|_{\mathrm{B}} = \|v_1\|_{B_1} + \ldots + \|v_n\|_{B_n}, \quad \boldsymbol{v} = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathrm{L}_{\mathrm{B}}(\Omega). \tag{3.1}$$

Аналогично определяется пространство $\mathrm{L}_{\overline{\mathrm{B}}}(\Omega)$. Будем считать, что $\psi(\boldsymbol{x}) \in L_\infty(\Omega)$, $\nabla\psi \in \mathrm{L}_{\mathrm{B}}(\Omega)$.

Пусть $\boldsymbol{s} \cdot \boldsymbol{t}$ — скалярное произведение векторов $\boldsymbol{s} = (s_1, \ldots, s_n)$, $\boldsymbol{t} = (t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}^n$ и

$$\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x}, s_0, \boldsymbol{s}) = \Big(a_1(\boldsymbol{x}, s_0, \boldsymbol{s}),\ \ldots,\ a_n(\boldsymbol{x}, s_0, \boldsymbol{s})\Big). \tag{3.2}$$

Приведем условия на функции, входящие в уравнение (1.1). Предполагается, что функции $a_0(\boldsymbol{x}, s_0)$, $a_i(\boldsymbol{x}, s_0, \boldsymbol{s})$, $\alpha = 1, \ldots, n$, измеримы по $\boldsymbol{x} \in \Omega$ для $s_0 \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{s} \in \mathbb{R}^n$, непрерывны по $s_0 \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{s} \in \mathbb{R}^n$ для почти всех $\boldsymbol{x} \in \Omega$. Предполагается, что функция $a_0(\boldsymbol{x}, s_0)$ неубывающая по $s_0 \in \mathbb{R}$.

Пусть существуют такие измеримые неотрицательные функции $\phi(\boldsymbol{x})$, $\Phi(\boldsymbol{x}) \in L_1(\Omega)$, положительная непрерывная функция $\widehat{a}(k)$ и положительная константа $\overline{a}$, что справедливы неравенства:

$$\overline{\mathrm{B}}(\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x}, s_0, \boldsymbol{s})) \leqslant \widehat{a}(k)\{\Phi(\boldsymbol{x}) + \mathrm{B}(\boldsymbol{s})\}, \quad \overline{\mathrm{B}}(\boldsymbol{a}) = \sum_{i=1}^n \overline{B}_i(a_i), \quad \mathrm{B}(\boldsymbol{s}) = \sum_{i=1}^n B_i(s_i); \tag{3.3}$$

$$\Big(\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x}, s_0, \boldsymbol{s}) - a(\boldsymbol{x}, s_0, \boldsymbol{t})\Big) \cdot (\boldsymbol{s} - \boldsymbol{t}) > 0 \tag{3.4}$$

при почти всех $\boldsymbol{x} \in \Omega$ и любых $s_0 \in [-k, k]$, $\boldsymbol{s}, \boldsymbol{t} \in \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{s} \neq \boldsymbol{t}$. Следующее неравенство предполагается выполненным при почти всех $\boldsymbol{x} \in \Omega$ и всех $s_0 \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{s} \in \mathbb{R}^n$:

$$\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x}, s_0, \boldsymbol{s}) \cdot (\boldsymbol{s} - \nabla\psi) \geqslant \overline{a}\mathrm{B}(\boldsymbol{s}) - \phi(\boldsymbol{x}). \tag{3.5}$$

Функции $a_i(\boldsymbol{x}, s_0, \boldsymbol{s})$, $i = 1, \ldots, n$, удовлетворяют условию Гельдера по переменной s_0: существуют такие непрерывная функция $\widehat{A}(R, \rho)$, $R, \rho > 0$, возрастающая по каждому аргументу, и число $\alpha \in (0, 1)$, что для любых $\boldsymbol{x} \in \Omega(R) = \{\boldsymbol{x} \in \Omega : |\boldsymbol{x}| < R\}$, $s_0, t_0 \in \mathbb{R}$, $|s_0| < \rho$, $|t_0| < \rho$, $\boldsymbol{s} \in \mathbb{R}^n$ справедливы неравенства

$$\overline{B}_i\left(\frac{|a_i(\boldsymbol{x}, s_0, \boldsymbol{s}) - a_i(\boldsymbol{x}, t_0, \boldsymbol{s})|}{|s_0 - t_0|^\alpha}\right) \leqslant \widehat{A}(R, \rho)\mathrm{B}(\boldsymbol{s}), \quad i = 1, \ldots, n. \tag{3.6}$$

Здесь N-функции $B_1(z), \ldots, B_n(z)$ и дополнительные к ним N-функции $\overline{B}_1(z), \ldots, \overline{B}_n(z)$ удовлетворяют Δ_2-условию. Неклассическое условие ранее использовалось в [8] для нелинейных эллиптических вариационных односторонних задач в пространствах Орлича.

Положим $a_0(\boldsymbol{x}, s_0) = a_0(\boldsymbol{x}, \psi) + b(\boldsymbol{x}, s_0)$. Пусть существует такое $\delta_0 > 0$, что:

$$a_0(\boldsymbol{x}, \psi),\ a_0(\boldsymbol{x}, \psi \pm \delta_0)\ \in L_1(\Omega). \tag{3.7}$$

Функция $b(\boldsymbol{x}, s_0)$ каратеодориева, неубывающая по $s_0 \in \mathbb{R}$, $b(\boldsymbol{x}, \psi) = 0$ для почти всех $\boldsymbol{x} \in \Omega$, поэтому для почти всех $\boldsymbol{x} \in \Omega$, $s_0 \in \mathbb{R}$ справедливо неравенство

$$b(\boldsymbol{x}, s_0)(s_0 - \psi) \geqslant 0. \tag{3.8}$$

Предположим, что

$$\sup_{|s_0| \leqslant k} |b(\boldsymbol{x}, s_0)| = G_k(\boldsymbol{x}) \in L_{1,\mathrm{loc}}(\Omega). \tag{3.9}$$

Из условия (3.7) следует, что

$$b(\boldsymbol{x}, \psi \pm \delta_0) \in L_1(\Omega). \tag{3.10}$$

Определим функцию

$$T_k(r) = \begin{cases} k & \text{при } r > k, \\ r & \text{при } |r| \leqslant k, \\ -k & \text{при } r < -k. \end{cases}$$

Введем обозначение

$$[v] = \int\limits_\Omega v \, d\boldsymbol{x}.$$

Определение 3.1. *Энтропийным решением* задачи (1.1), (1.2) называется такая измеримая функция $u : \Omega \to \mathbb{R}$, что

$$\begin{aligned} &1) \quad A_0(\boldsymbol{x}) = a_0(\boldsymbol{x}, u) \in L_1(\Omega), \\ &2) \quad T_k(u - \psi) \in \mathring{H}^1_{\mathrm{B}}(\Omega) \quad \text{при всех } k > 0 \end{aligned}$$

и при всех $k > 0$, $\xi(\boldsymbol{x}) \in C_0^1(\Omega)$ справедливо неравенство

$$\Big[a_0(\boldsymbol{x}, u)T_k(u - \psi - \xi) + \boldsymbol{a}(\boldsymbol{x}, u, \nabla u) \cdot \nabla T_k(u - \psi - \xi)\Big] \leqslant 0. \tag{3.11}$$

Теорема 3.1. *Пусть выполнены условия* (2.11), (3.3)–(3.7), (3.9). *Тогда существует энтропийное решение задачи* (1.1), (1.2).

4. Подготовительные сведения

Все постоянные, встречающиеся ниже в работе, положительны.

Рассмотрим каратеодориевы функции $a_{i\psi}(\boldsymbol{x}, s_0, \boldsymbol{s}) = a_i\Big(\boldsymbol{x}, s_0 + \psi(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{s} + \nabla\psi(\boldsymbol{x})\Big)$, $i = 1, \ldots, n$, $a_{0\psi}(\boldsymbol{x}, s_0) = a_0\big(\boldsymbol{x}, s_0 + \psi(\boldsymbol{x})\big)$, $\boldsymbol{x} \in \Omega$, $s_0 \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{s} \in \mathbb{R}^n$. Функция $a_{0\psi}(\boldsymbol{x}, s_0)$ является неубывающей по s_0. Применяя (3.3), (2.5), (3.4), для вектор-функции $\boldsymbol{a}_\psi(\boldsymbol{x}, s_0, \boldsymbol{s}) =$

$\Big(a_{1\psi}(\boldsymbol{x}, s_0, \boldsymbol{s}),\ \ldots,\ a_{n\psi}(\boldsymbol{x}, s_0, \boldsymbol{s})\Big)$ при почти всех $\boldsymbol{x} \in \Omega$ и любых $s_0 \in [-k, k]$, $\boldsymbol{s}, \boldsymbol{t} \in \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{s} \neq \boldsymbol{t}$ выводим неравенства:

$$\overline{\mathrm{B}}\big(\boldsymbol{a}_\psi(\boldsymbol{x}, s_0, \boldsymbol{s})\big) = \overline{\mathrm{B}}\Big(\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x}, s_0 + \psi(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{s} + \nabla\psi(\boldsymbol{x}))\Big) \leqslant$$
$$\leqslant \widehat{a}\big(k + \|\psi\|_\infty\big)\Big\{\Phi(\boldsymbol{x}) + \mathrm{B}\big(\boldsymbol{s} + \nabla\psi(\boldsymbol{x})\big)\Big\} \leqslant \widehat{a}\big(k + \|\psi\|_\infty\big)\Big\{\Phi(\boldsymbol{x}) + c\mathrm{B}\big(\nabla\psi(\boldsymbol{x})\big) + c\mathrm{B}(\boldsymbol{s})\Big\} \leqslant$$
$$\leqslant \widehat{a}_\psi(k)\Big\{\Phi_\psi(\boldsymbol{x}) + \mathrm{B}(\boldsymbol{s})\Big\}, \quad (3.3\psi)$$

$$\Big(\boldsymbol{a}_\psi(\boldsymbol{x}, s_0, \boldsymbol{s}) - a_\psi(\boldsymbol{x}, s_0, \boldsymbol{t})\Big) \cdot (\boldsymbol{s} - \boldsymbol{t}) > 0. \quad (3.4\psi)$$

Используя (3.5), (2.5), для почти всех $\boldsymbol{x} \in \Omega$ и всех $s_0 \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{s} \in \mathbb{R}^n$ получаем неравенства

$$\boldsymbol{a}_\psi(\boldsymbol{x}, s_0, \boldsymbol{s}) \cdot \boldsymbol{s} = \boldsymbol{a}\Big(\boldsymbol{x},\ s_0 + \psi(\boldsymbol{x}),\ \boldsymbol{s} + \nabla\psi(\boldsymbol{x})\Big) \cdot \boldsymbol{s} \geqslant$$
$$\geqslant \overline{a}\mathrm{B}(\boldsymbol{s} + \nabla\psi) - \phi(\boldsymbol{x}) \geqslant \frac{\overline{a}}{c\mathrm{B}(\boldsymbol{s})} - \overline{a}\mathrm{B}\big(\nabla\psi(\boldsymbol{x})\big) - \phi(\boldsymbol{x}) = \overline{a}_\psi\mathrm{B}(\boldsymbol{s}) - \phi_\psi(\boldsymbol{x}). \quad (3.5\psi)$$

Очевидно, что функции $\phi_\psi(\boldsymbol{x})$, $\Phi_\psi(\boldsymbol{x}) \in L_1(\Omega)$ неотрицательны, функция $\widehat{a}_\psi(k)$ положительна и непрерывна и $\overline{a}_\psi$ — положительное число.

Из неравенств (3.6) следует, что существуют такие непрерывная функция $\widehat{A}_\psi(R, \rho)$ и число $\alpha \in (0, 1)$, что для любых $\boldsymbol{x} \in \Omega(R)$, $s_0, t_0 \in \mathbb{R}$, $|s_0| < \rho$, $|t_0| < \rho$, $\boldsymbol{s} \in \mathbb{R}^n$ справедливы неравенства:

$$\overline{B}_i\left(\frac{|a_{i\psi}(\boldsymbol{x}, s_0, \boldsymbol{s}) - a_{i\psi}(\boldsymbol{x}, t_0, \boldsymbol{s})|}{|s_0 - t_0|^\alpha}\right) \leqslant \widehat{A}\big(R, \rho + \|\psi\|_\infty\big)\mathrm{B}\big(\boldsymbol{s} + \nabla\psi\big) \leqslant$$
$$\leqslant \widehat{A}_\psi(R, \rho)\big(\mathrm{B}(\boldsymbol{s}) + \mathrm{B}(\nabla\psi)\big), \quad i = 1, \ldots, n. \quad (3.6\psi)$$

Положим $a_{0\psi}(\boldsymbol{x}, s_0) = a_{0\psi}(\boldsymbol{x}, 0) + b_\psi(\boldsymbol{x}, s_0)$, $a_{0\psi}(\boldsymbol{x}, 0) = a_0(\boldsymbol{x}, \psi)$, $b_\psi(\boldsymbol{x}, s_0) = b(\boldsymbol{x}, s_0 + \psi)$. Согласно (3.7), имеем

$$A^0_{0\psi}(\boldsymbol{x}) = a_{0\psi}(\boldsymbol{x}, 0) \in L_1(\Omega). \quad (3.7\psi)$$

Функция $b_\psi(\boldsymbol{x}, s_0)$ каратеодориева, неубывающая по $s_0 \in \mathbb{R}$, $b_\psi(\boldsymbol{x}, 0) = 0$ для почти всех $\boldsymbol{x} \in \Omega$, поэтому для почти всех $\boldsymbol{x} \in \Omega$, $s_0 \in \mathbb{R}$

$$b_\psi(\boldsymbol{x}, s_0)s_0 \geqslant 0. \quad (3.8\psi)$$

Из (3.9) имеем

$$\sup_{|s_0| \leqslant k} \big|b_\psi(\boldsymbol{x}, s_0)\big| \leqslant \sup_{|s_0 + \psi| \leqslant k + \|\psi\|_\infty} \big|b(\boldsymbol{x}, s_0 + \psi)\big| = G_{k + \|\psi\|_\infty}(\boldsymbol{x}) \in L_{1,\mathrm{loc}}(\Omega). \quad (3.9\psi)$$

Наконец, из (3.10) следует, что существует такое $\delta_0 > 0$, что

$$b_\psi(\boldsymbol{x}, \pm\delta_0) \in L_1(\Omega). \quad (3.10\psi)$$

Пусть u — энтропийное задачи (1.1), (1.2). Положив $w = u - \psi$, определение 3.1 можно сформулировать следующим образом.

Определение 3.1$\boldsymbol{\psi}$. *Энтропийным решением* задачи (1.1), (1.2) называется такая измеримая функция $u : \Omega \to \mathbb{R}$, что $u(\boldsymbol{x}) = w(\boldsymbol{x}) + \psi(\boldsymbol{x})$ и выполнены следующие условия:

$$1\psi) \quad A_{0\psi}(\boldsymbol{x}) = a_{0\psi}(\boldsymbol{x}, w) \in L_1(\Omega),$$
$$2\psi) \quad T_k(w) \in \mathring{H}^1_{\mathrm{B}}(\Omega)\text{при всех } k > 0$$

и при всех $k > 0$, $\xi(\boldsymbol{x}) \in C^1_0(\Omega)$ справедливо неравенство

$$\Big[a_{0\psi}(\boldsymbol{x}, w)T_k(w - \xi) + \boldsymbol{a}_\psi(\boldsymbol{x}, w, \nabla w) \cdot \nabla T_k(w - \xi)\Big] \leqslant 0. \quad (3.11\psi)$$

Пусть $\chi(P)$ обозначает логическую функцию, равную 1, когда P истинно, и 0, когда P ложно.

Из условия 2ψ) определения энтропийного решения следует, что для любого $k > 0$

$$\chi(|w| < k)\nabla w \in \mathrm{L}_{\mathrm{B}}(\Omega). \quad (4.1)$$

Отсюда, применяя (3.3ψ), устанавливаем, что для любого $k > 0$

$$\chi(|w| < k)\boldsymbol{a}_\psi(\boldsymbol{x}, w, \nabla w) \in \mathrm{L}_{\overline{\mathrm{B}}}(\Omega). \tag{4.2}$$

Лемма 4.1. *Если $u = w + \psi$ — энтропийное решение задачи* (1.1), (1.2), *то для всех $k \geqslant 1$ справедливо неравенство*

$$\big\|\mathrm{B}(\nabla T_k w)\big\|_1 = \int\limits_{\{\Omega:|w|<k\}} \mathrm{B}(\nabla w) d\boldsymbol{x} \leqslant C_1 k. \tag{4.3}$$

Доказательство. Согласно неравенству (3.11ψ) для $\xi = 0$ и условию (1ψ) имеем

$$\int\limits_{\{\Omega:|w|<k\}} \boldsymbol{a}_\psi(\boldsymbol{x}, w, \nabla w) \cdot \nabla w d\boldsymbol{x} = \int\limits_{\Omega} \boldsymbol{a}_\psi(\boldsymbol{x}, w, \nabla w) \cdot \nabla T_k(w) d\boldsymbol{x} \leqslant -\int\limits_{\Omega} a_{0\psi}(\boldsymbol{x}, w) T_k(w) d\boldsymbol{x} \leqslant k\|A_{0\psi}\|_1.$$

Применяя неравенство (3.5ψ), устанавливаем неравенство

$$\overline{a}_\psi \int\limits_{\{\Omega:|w|<k\}} \mathrm{B}(\nabla w) d\boldsymbol{x} \leqslant k\|A_{0\psi}\|_1 + \|\phi_\psi\|_1,$$

Из которого следует (4.3). □

Лемма 4.2. *Пусть выполнено условие* (2.11). *Предположим, что для измеримой функции $v : \Omega \to \mathbb{R}$, удовлетворяющей условию $T_k v \in \mathring{H}^1_{\mathrm{B}}(\Omega)$ при всех $k \geqslant 1$, справедливы неравенства*

$$\big\|\mathrm{B}(\nabla T_k v)\big\|_1 = \int\limits_{\{\Omega:|v|<k\}} \mathrm{B}(\nabla v) d\boldsymbol{x} \leqslant C_2 k. \tag{4.4}$$

Тогда

$$\operatorname{mes}\Big(\big\{\Omega : |v| \geqslant k\big\}\Big) \to 0, \quad k \to \infty. \tag{4.5}$$

Доказательство. Для N-функции $\overline{B}$, удовлетворяющей Δ_2-условию, справедливо соотношение

$$\lim_{\|\omega\|_B \to \infty} \frac{\|B(\omega)\|_1}{\|\omega\|_B} = \infty \tag{4.6}$$

(см. [19, лемма 3.14]). Согласно неравенствам (2.12), (4.4) с учетом (4.6) имеем

$$\|T_k v\|_{B_*} \leqslant A_1 \|\nabla T_k v\|_{\mathrm{B}} \leqslant A_1 \varepsilon(k) \|\mathrm{B}(\nabla T_k v)\|_1 \leqslant C_3 k \varepsilon(k), \quad k \geqslant 1, \tag{4.7}$$

$\varepsilon(k) \to 0$ при $k \to \infty$.

Неравенство (4.7) установлено при условии

$$\|\nabla T_k v\|_{\mathrm{B}} \to \infty, \quad k \to \infty.$$

В противном случае

$$\|\nabla T_k v\|_{\mathrm{B}} \leqslant C_4 = C_4 k \varepsilon(k), \quad k > 0,$$

поэтому неравенство (4.7) также справедливо.

Из (4.7) имеем:

$$B_*\left(\frac{k}{\|T_k v\|_{B_*}}\right) \geqslant B_*\left(\frac{1}{C_3 \varepsilon(k)}\right) \to \infty, \quad k \to \infty. \tag{4.8}$$

Далее, применяя (2.6), получаем:

$$1 \geqslant \int\limits_{\Omega} B_*\left(\frac{T_k v}{\|T_k v\|_{B_*}}\right) d\boldsymbol{x} \geqslant B_*\left(\frac{k}{\|T_k v\|_{B_*}}\right) \operatorname{mes}\Big(\big\{\Omega : |v| \geqslant k\big\}\Big).$$

Пользуясь (4.8), из последнего неравенства выводим (4.5). □

Замечание 4.1. Если $u = w + \psi$ — энтропийное решение задачи (1.1), (1.2) и выполнено условие (2.11), то из лемм 4.1, 4.2 следует

$$\operatorname{mes}\Big(\big\{\Omega : |w| \geqslant k\big\}\Big) \to 0, \quad k \to \infty. \tag{4.9}$$

Лемма 4.3. *Пусть выполнено условие* (2.11). *Предположим, что для измеримой функции* $v : \Omega \to \mathbb{R}$, *удовлетворяющей условию* $T_k v \in \mathring{H}^1_{\mathrm{B}}(\Omega)$ *при всех* $k \geqslant 1$, *справедливы неравенства* (4.4). *Тогда*

$$\operatorname{mes}\Big(\big\{\Omega : \mathrm{B}(\nabla v) \geqslant \rho\big\}\Big) \to 0, \quad \rho \to \infty. \tag{4.10}$$

Доказательство. Положим

$$\Phi(k,\rho) = \operatorname{mes}\Big\{\Omega : \ |v| \geqslant k, \ \mathrm{B}(\nabla v) \geqslant \rho\Big\}, \quad k,\rho \geqslant 0.$$

Выше установлено (см. (4.5)), что

$$\Phi(k,0) \to 0, \quad k \to \infty.$$

Поскольку функция $\rho \to \Phi(k,\rho)$ невозрастающая, то для $k,\rho > 0$ справедливы неравенства

$$\Phi(0,\rho) \leqslant \frac{1}{\rho}\int\limits_0^\rho \Phi(0,\varrho)d\varrho \leqslant \Phi(k,0) + \frac{1}{\rho}\int\limits_0^\rho \Big(\Phi(0,\varrho) - \Phi(k,\varrho)\Big)d\varrho. \tag{4.11}$$

Отметим, что

$$\Phi(0,\varrho) - \Phi(k,\varrho) = \operatorname{mes}\Big\{\Omega : \ |v| < k, \ \mathrm{B}(\nabla v) \geqslant \varrho\Big\}.$$

Поэтому из (4.4) следует, что

$$\int\limits_0^\infty \Big(\Phi(0,\varrho) - \Phi(k,\varrho)\Big)d\varrho = \int\limits_{\{\Omega:|v|<k\}} \mathrm{B}(\nabla v)d\boldsymbol{x} \leqslant C_2 k.$$

Теперь из (4.11) получаем неравенство

$$\Phi(0,\rho) \leqslant \Phi(k,0) + \frac{C_2 k}{\rho}.$$

Выбирая k так, чтобы $\Phi(k,0) < \varepsilon$, затем выбирая ρ добиваемся неравенства $\Phi(0,\rho) < 2\varepsilon$. Тем самым (4.10) установлено. □

Лемма 4.4. *Пусть N-функция $\overline{B}(z)$ удовлетворяет Δ_2-условию, $v^m(\boldsymbol{x})$, $m = 1,\ldots,\infty$, $v(\boldsymbol{x})$ — такие функции из $L_B(\Omega)$, что*

$$\|v^m\|_B \leqslant C, \quad m = 1,2,\ldots,$$
$$v^m \to v \quad \textit{почти всюду в } \Omega, \quad m \to \infty.$$

Тогда $v^m \rightharpoonup v$ слабо в $L_B(\Omega)$ при $m \to \infty$.

Доказательство леммы 4.4 для $B(z) = |z|^a$, $a > 1$, проведено в [6, гл. I, § 1.4, лемма 1.3], для N-функции $B(z)$ осуществляется аналогичным образом.

Лемма 4.5. *Если $u = w + \psi$ является энтропийным решением задачи* (1.1), (1.2), *то неравенство* (3.11ψ) *справедливо для любой функции $\xi \in \mathring{H}^1_{\mathrm{B}}(\Omega) \cap L_\infty(\Omega)$.*

Доказательство. По определению пространства $\mathring{H}^1_{\mathrm{B}}(\Omega)$ существует такая последовательность $\xi^m \in C_0^\infty(\Omega)$, что

$$\nabla\xi^m \to \nabla\xi \quad \text{в } \mathrm{L}_{\mathrm{B}}(\Omega) \text{ при } m \to \infty.$$

Отсюда, согласно (2.12), (2.10), следует сходимость $\xi^m \to \xi$, $\nabla\xi^m \to \nabla\xi$ в $L_{1,\mathrm{loc}}(\Omega)$ при $m \to \infty$, а значит, можно выделить такую подпоследовательность (обозначим ее также), что $\xi^m \to \xi$, $\nabla\xi^m \to \nabla\xi$ почти всюду в Ω. Тогда для любого $k > 0$ имеют место сходимости:

$$T_k(w - \xi^m) \to T_k(w - \xi), \quad \nabla T_k(w - \xi^m) \to \nabla T_k(w - \xi) \quad \text{почти всюду в } \Omega \text{ при } m \to \infty. \tag{4.12}$$

Пусть

$$\widehat{k} = k + \sup_{m=1,2,\ldots} \Big(\|\xi^m\|_\infty,\ \|\xi\|_\infty\Big);$$

тогда

$$\big|\nabla T_k(w-\xi^m)\big| \leqslant \big|\nabla T_{\widehat{k}}(w)\big| + \big|\nabla \xi^m\big|, \quad \boldsymbol{x}\in\Omega, \quad m=1,2,\ldots.$$

Поскольку сходящаяся последовательность $\nabla\xi^m$ ограничена в $\mathrm{L}_{\mathrm{B}}(\Omega)$, то отсюда, согласно (4.1), следует ограниченность норм $\|\nabla T_k(w-\xi^m)\|_{\mathrm{B}}$. Применяя (4.12) и лемму 4.4, при любом $k>0$ имеем

$$\nabla T_k(w-\xi^m) \rightharpoonup \nabla T_k(w-\xi) \quad \text{в } \mathrm{L}_{\mathrm{B}}(\Omega) \text{ при } m\to\infty. \tag{4.13}$$

Теперь перейдем к пределу при $m\to\infty$ в неравенстве

$$\Big[a_{0\psi}(\boldsymbol{x},w)T_k(w-\xi^m) + \boldsymbol{a}_\psi(\boldsymbol{x},w,\nabla w)\cdot\nabla T_k(w-\xi^m)\Big] \leqslant 0.$$

Поскольку $a_{0\psi}(\boldsymbol{x},w)\in L_1(\Omega)$, то в первом слагаемом, применяя (4.12), согласно теореме Лебега, можно перейти к пределу при $m\to\infty$. Ввиду того, что $\boldsymbol{a}_\psi(\boldsymbol{x},w,\nabla w)\chi(|w|<\widehat{k})\in \mathrm{L}_{\overline{\mathrm{B}}}(\Omega)$ (см. (4.2)), применяя (4.13), устанавливаем, что второе слагаемое последнего неравенства также имеет предел при $m\to\infty$. □

Замечание 4.2. В дальнейшем, чтобы избежать громоздкости в рассуждениях, вместо утверждения типа «из последовательности u^m можно выделить подпоследовательность (обозначим ее также) сходящуюся почти всюду в Ω при $m\to\infty$» будем писать просто «последовательность u^m выборочно сходится почти всюду в Ω при $m\to\infty$». Соответственно, будем использовать термин «выборочно слабо сходится» и т. п.

Обозначим через $\mathcal{F}$ класс функций $T\in C^2(\mathbb{R})\cap L_\infty(\mathbb{R})$:

$$T(0)=0;\quad T'(r)\geqslant 0,\ r\in\mathbb{R};\quad T'(r)=0,\ |r|\geqslant k;$$
$$T(-r)=-T(r),\ r\in\mathbb{R};\quad T''(r)\leqslant 0,\ r\geqslant 0.$$

Лемма 4.6. *Энтропийное решение $u=w+\psi$ задачи* (1.1), (1.2) *удовлетворяет неравенству*

$$\Big[a_{0\psi}T(w-\xi) + \boldsymbol{a}_\psi\cdot\nabla T(w-\xi)\Big] \leqslant 0 \tag{3.11ψT}$$

при любом $\xi\in C_0^1(\Omega)$ и всех $T\in\mathcal{F}$.

Доказательство. Очевидно, что (3.11ψT) выполнено при $T(r)=\sum a_j T_{k_j}(r)$, $a_j\geqslant 0$. В общем случае приближаем функции $T\in\mathcal{F}$ такими линейными комбинациями в норме $C^1(\mathbb{R})$ (см. [11, лемма 3.2]). □

Лемма 4.7 (см. [3, лемма 4]). *Пусть Q — ограниченная область и, если выполнено условие* (2.13), *то $M(z)$ — произвольная N-функция, а если выполнено условие* (2.11), *то $M(z)\prec\prec B_*(z)$. Тогда оператор вложения $\mathring{H}^1_{\mathrm{B}}(Q)\subset L_M(Q)$ вполне непрерывен.*

Лемма 4.8 (см. [14, лемма 2]). *Пусть* $(X,\mathcal{T},\mathrm{mes})$ *— такое измеримое пространство, что* $\mathrm{mes}(X)<\infty$. *Пусть $\gamma: X\to[0,+\infty]$ — такая измеримая функция, что* $\mathrm{mes}\big(\{\boldsymbol{x}\in X:\gamma(\boldsymbol{x})=0\}\big)=0$. *Тогда для любого $\varepsilon>0$ существует такое $\delta>0$, что неравенство*

$$\int\limits_Q \gamma(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}\leqslant\delta$$

влечет $\mathrm{mes}(Q)\leqslant\varepsilon$.

5. Существование обобщенного решения

Для анизотропных квазилинейных эллиптических уравнений второго порядка рассмотрим задачу Дирихле

$$\sum_{i=1}^{n}\big(a_i(\boldsymbol{x},u,\nabla u)\big)_{x_i} - a_0(\boldsymbol{x},u,\nabla u) = 0, \quad \boldsymbol{x}\in\Omega; \tag{5.1}$$

$$u\Big|_{\partial\Omega} = 0. \tag{5.2}$$

Предполагается, что функции $a_i(\boldsymbol{x},s_0,\boldsymbol{s})$, $i=0,\ldots,n$, измеримы по $\boldsymbol{x}\in\Omega$ для $\mathbf{s}=(s_0,\boldsymbol{s})=(s_0,s_1,\ldots,s_n)\in\mathbb{R}^{n+1}$, непрерывны по $\mathbf{s}\in\mathbb{R}^{n+1}$ для почти всех $\boldsymbol{x}\in\Omega$. Пусть $\mathbf{s}\cdot\mathbf{t}$ обозначает скалярное произведение $\mathbf{s}=(s_0,\boldsymbol{s})$, $\mathbf{t}=(t_0,\boldsymbol{t})\in\mathbb{R}^{n+1}$ и

$$\mathbf{a}(\boldsymbol{x},\mathbf{s}) = \Big(a_0(\boldsymbol{x},\mathbf{s}),\ a_1(\boldsymbol{x},\mathbf{s}),\ \ldots,\ a_n(\boldsymbol{x},\mathbf{s})\Big).$$

Пусть существуют такие измеримые неотрицательные функции $\phi(\boldsymbol{x})$, $\Phi(\boldsymbol{x})\in L_1(\Omega)$, что для почти всех $\boldsymbol{x}\in\Omega$ и любых $\mathbf{s}=(s_0,\boldsymbol{s})\in\mathbb{R}^{n+1}$ справедливы неравенства (3.4) и

$$\overline{\mathbf{B}}(\mathbf{a}(\boldsymbol{x},\mathbf{s})) \leqslant \widehat{a}\mathbf{B}(\mathbf{s})+\Phi(\boldsymbol{x}), \quad \overline{\mathbf{B}}(\mathbf{a}) = \sum_{i=0}^{n}\overline{B}_i(a_i), \quad \mathbf{B}(\mathbf{s}) = \sum_{i=0}^{n}B_i(s_i) = B_0(s_0)+\mathrm{B}(\boldsymbol{s}); \tag{5.3}$$

$$\mathbf{a}(\boldsymbol{x},\mathbf{s})\cdot\mathbf{s} \geqslant \overline{a}\mathbf{B}(\mathbf{s})-\phi(\boldsymbol{x}). \tag{5.4}$$

Здесь N-функции $B_0(z)$, $B_1(z),\ldots$, $B_n(z)$ и дополнительные к ним N-функции $\overline{B}_0(z)$, $\overline{B}_1(z),\ldots$, $\overline{B}_n(z)$ удовлетворяют Δ_2-условию.

Через $\mathbf{L}_{\overline{\mathbf{B}}}(\Omega)$ обозначим пространство $L_{\overline{B}_0}(\Omega)\times L_{\overline{B}_1}(\Omega)\times\ldots\times L_{\overline{B}_n}(\Omega)$ с нормой

$$\|\mathbf{v}\|_{\overline{\mathbf{B}}} = \|v_0\|_{\overline{B}_0}+\|v_1\|_{\overline{B}_1}+\ldots+\|v_n\|_{\overline{B}_n}, \quad \mathbf{v}=(v_0,v_1,\ldots,v_n)\in\mathbf{L}_{\overline{\mathbf{B}}}(\Omega).$$

Определим пространство Соболева—Орлича $\mathring{W}^1_{\mathbf{B}}(\Omega)$ как пополнение пространства $C_0^\infty(\Omega)$ по норме

$$\|v\|_{\mathring{W}^1_{\mathbf{B}}(\Omega)} = \|v\|_{B_0}+\|v\|_{\mathring{H}^1_{\mathrm{B}}(\Omega)}.$$

В случае выполнения условия (2.11), будем считать, что

$$B_0(z) \prec\!\prec B_*(z), \tag{5.5}$$

а при выполнении (2.13) — что $B_0(z)$ является произвольной N-функцией.

Будем считать, что

$$B_i(z)\prec B_0(z), \quad i=1,2,\ldots,n. \tag{5.6}$$

Из условия (5.3), пользуясь (2.7), для $u\in\mathring{W}^1_{\mathbf{B}}(\Omega)$ выводим оценку

$$\begin{aligned}\big\|\mathbf{a}(\boldsymbol{x},u,\nabla u)\big\|_{\overline{\mathbf{B}}} &= \sum_{i=0}^{n}\big\|a_i(\boldsymbol{x},u,\nabla u)\big\|_{\overline{B}_i} \leqslant \\ &\leqslant \sum_{i=0}^{n}\int\limits_{\Omega}\overline{B}_i\big(a_i(\boldsymbol{x},u,\nabla u)\big)d\boldsymbol{x}+n+1 \leqslant \widehat{a}\big\|\mathrm{B}(\nabla u)\big\|_1+\widehat{a}\big\|B_0(u)\big\|_1+\|\Phi\|_1+n+1.\end{aligned} \tag{5.7}$$

Введем обозначение $v_{x_0}=v$. Далее, по элементу $\mathbf{a}(\boldsymbol{x},u,\nabla u)\in\mathbf{L}_{\overline{\mathbf{B}}}(\Omega)$ для $v(\boldsymbol{x})\in\mathring{W}^1_{\mathbf{B}}(\Omega)$ определим функционал $\mathbf{A}(u)$ равенством

$$\langle\mathbf{A}(u),v\rangle = \Big[\mathbf{a}(\boldsymbol{x},u,\nabla u)\cdot(v,\nabla v)\Big] = \sum_{i=0}^{n}\big[a_i v_{x_i}\big]. \tag{5.8}$$

Используя неравенство Гельдера (2.9), для функций $u(\boldsymbol{x}),v(\boldsymbol{x})\in\mathring{W}^1_{\mathbf{B}}(\Omega)$ выводим неравенства

$$\Big|\langle\mathbf{A}(u),v\rangle\Big| \leqslant 2\sum_{i=0}^{n}\|a_i\|_{\overline{B}_i}\|v_{x_i}\|_{B_i} \leqslant 2\big\|\mathbf{a}(\boldsymbol{x},u,\nabla u)\big\|_{\overline{\mathbf{B}}}\|v\|_{\mathring{W}^1_{\mathbf{B}}(\Omega)}. \tag{5.9}$$

Из (5.9), (5.7) следует, что функционал $\mathbf{A}(u)$, определяемый равенством (5.8) в пространстве $\mathring{W}^1_{\mathbf{B}}(\Omega)$, является ограниченным.

Определение 5.1. Обобщенным решением задачи (5.1), (5.2) назовем функцию $u(\boldsymbol{x}) \in \mathring{W}^1_{\mathbf{B}}(\Omega)$, удовлетворяющую интегральному тождеству

$$\langle \mathbf{A}(u), v\rangle = 0 \tag{5.10}$$

для любой функции $v(\boldsymbol{x}) \in \mathring{W}^1_{\mathbf{B}}(\Omega)$.

Теорема 5.1. *Если выполнены условия* (3.4), (5.3)–(5.6), *то существует обобщенное решение задачи* (5.1), (5.2).

Существование решения задачи (5.1), (5.2) с монотонным оператором оператором $\mathbf{A}$ установлено в [2]. Для изотропного уравнения со степенными нелинейностями существование решения задачи Дирихле установлено Ф. Браудером [18]: оно основано на абстрактной теореме для псевдомонотонных операторов.

Определение 5.2. Оператор $A : V \to V'$ называется *псевдомонотонным*, если

(i) A — ограниченный оператор;

(ii) из условий $u^j \rightharpoonup u$ слабо в V и

$$\lim_{j\to\infty} \sup\langle A(u^j), u^j - u\rangle \leqslant 0$$

следует, что для любого $v \in V$ справедливо неравенство

$$\lim_{j\to\infty} \inf\langle A(u^j), u^j - v\rangle \geqslant \langle A(u), u - v\rangle. \tag{5.11}$$

Лемма 5.1 (см. [6, гл. II,§ 2, теорема 2.7]). *Пусть V — рефлексивное сепарабельное банахово пространство. Пусть оператор $A : V \to V'$ является псевдомонотонным и коэрцитивным, т.е.*

$$\frac{\langle A(u), u\rangle}{\|u\|} \to \infty, \quad \|u\| \to \infty. \tag{5.12}$$

Тогда отображение $A : V \to V'$ сюръективно, т.е. для всякого $F \in V'$ существует такой $u \in V$, что $A(u) = F$.

Прежде чем перейти к проверке условий леммы 5.1 приведем вспомогательные оценки и замечания.

Замечание 5.1. Из неравенств (2.7), (2.8) следует, что, если N-функция $B(z)$ удовлетворяет Δ_2-условию, то ограниченность множества функций в пространстве $L_B(\Omega)$ равносильна ограниченности в среднем. Поэтому ограниченность множества $\Theta \subset \mathring{W}^1_{\mathbf{B}}(\Omega)$ по норме равносильна ограниченности множества $\{\|\mathbf{B}(u)\|_1,\ u \in \Theta\}$.

Замечание 5.2. Пространство $\mathring{W}^1_{\mathbf{B}}(\Omega)$ является рефлексивным сепарабельным банаховым пространством.

Предложение 5.1. *Пусть выполнены условия* (3.4), (5.3)–(5.6). *Тогда оператор*

$$\mathbf{A} : \mathring{W}^1_{\mathbf{B}}(\Omega) \to \left(\mathring{W}^1_{\mathbf{B}}(\Omega)\right)',$$

определяемый равенством (5.8), *является псевдомонотонным.*

Доказательство. Ограниченность оператора $\mathbf{A}$ следует из оценок (5.9), (5.7). Рассмотрим такую последовательность $\{u^j\}_{j=1}^{\infty}$ в пространстве $\mathring{W}^1_{\mathbf{B}}(\Omega)$, что

$$u^j \rightharpoonup u \quad \text{слабо в } \mathring{W}^1_{\mathbf{B}}(\Omega), \quad j \to \infty; \tag{5.13}$$

$$\lim_{j\to\infty} \sup\langle \mathbf{A}(u^j), u^j - u\rangle \leqslant 0. \tag{5.14}$$

Покажем, что

$$\mathbf{A}(u^j) \rightharpoonup \mathbf{A}(u) \quad \text{слабо в } \Big(\mathring{W}^1_{\mathbf{B}}(\Omega)\Big)', \quad j \to \infty; \tag{5.15}$$

$$\langle \mathbf{A}(u^j), u^j - u\rangle \to 0, \quad j \to \infty. \tag{5.16}$$

Очевидно, что из (5.15), (5.16) следует (5.11).

Прежде всего, из сходимости (5.13) и неравенства (2.8) следуют оценки:

$$\|u^j\|_{\mathring{W}^1_{\mathbf{B}}(\Omega)} \leqslant C_1, \quad j = 1, 2, \ldots; \tag{5.17}$$

$$\|B_0(u^j)\|_1 + \|\mathrm{B}(\nabla u^j)\|_1 \leqslant C_2, \quad j = 1, 2, \ldots. \tag{5.18}$$

Кроме того, соединяя (5.7), (5.18), выводим оценку

$$\big\|\mathbf{a}(\boldsymbol{x}, u, \nabla u)\big\|_{\overline{\mathbf{B}}} = \sum_{i=0}^{n} \big\|a_i(\boldsymbol{x}, u^j, \nabla u^j)\big\|_{\overline{B}_i} \leqslant C_3, \quad j = 1, 2, \ldots. \tag{5.19}$$

Зафиксируем произвольное $R > 0$. В случае (2.11) по лемме 4.7 пространство $\mathring{W}^1_{\mathbf{B}}(\Omega(R+1))$ компактно вложено в $L_P(\Omega(R+1))$ для любой N-функции $M(z)$, удовлетворяющей условию $M(z) \prec\prec B_*(z)$. В случае (2.13) для любой N-функции $M(z)$ по лемме 4.7 пространство $\mathring{W}^1_{\mathbf{B}}(\Omega(R+1))$ компактно вложено в $L_M(\Omega(R+1))$. Согласно условиям (5.5), (5.6), в обоих случаях (2.11) и (2.13), пространство $\mathring{W}^1_{\mathbf{B}}(\Omega(R+1))$ компактно вложено в пространства $L_{B_i}(\Omega(R+1))$, $i = 0, \ldots, n$.

Из условия (5.6), применяя (2.3), устанавливаем существование такого $z_0 > 0$, что

$$B_i(z) \leqslant C_4 B_0(z), \quad |z| \geqslant z_0, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{5.20}$$

Пусть $\eta_R(r) = \min(1, \max(0, R + 1 - r))$. Пользуясь (2.5), (5.20), (5.18) выводим неравенства

$$\int\limits_{\Omega(R+1)} \Big(\mathrm{B}\Big(\nabla\big(u^j\eta_R(|\boldsymbol{x}|)\big)\Big) + B_0\Big(u^j\eta_R\big(|\boldsymbol{x}|\big)\Big)\Big)\, d\boldsymbol{x} = \int\limits_{\Omega(R+1)} \Big(\mathrm{B}\Big(\nabla u^j\eta_R + u^j\nabla\eta_R\Big) + B_0\big(u^j\eta_R\big)\Big)\, d\boldsymbol{x} \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{\Omega(R+1)} \Big(C_5\Big\{\mathrm{B}(\nabla u^j) + \mathrm{B}(u^j)\Big\} + B_0(u^j)\Big)\, d\boldsymbol{x} \leqslant C_6 \int\limits_{\Omega(R+1)} \big(\mathrm{B}(\nabla u^j) + \mathrm{B}(z_0) + B_0(u^j)\big)\, d\boldsymbol{x} \leqslant$$

$$\leqslant C_6\Big(\big\|B_0(u^j)\big\|_{1,\Omega(R+1)} + \big\|\mathrm{B}(\nabla u^j)\big\|_{1,\Omega(R+1)}\Big) + C_7 \operatorname{mes}\Omega(R+1) \leqslant C_8(R), \quad j = 1, 2, \ldots.$$

Следовательно (см. замечание 5.1), последовательность $\{u^j\eta_R\}_{j=1}^{\infty}$ ограничена в пространстве $\mathring{W}^1_{\mathbf{B}}(\Omega(R+1))$. Ввиду компактности вложений

$$\mathring{W}^1_{\mathbf{B}}(\Omega(R+1)) \subset L_{B_i}(\Omega(R+1)), \quad i = 0, \ldots, n,$$

имеют место сильные сходимости

$$u^j\eta_R \to u\eta_R \quad \text{в } L_{B_i}(\Omega(R+1)),\ i = 0, 1, \ldots, n, \quad j \to \infty,$$

из которых следуют сильные сходимости

$$u^j \to u \quad \text{в } L_{B_i}(\Omega(R)),\ i = 0, 1, \ldots, n, \quad j \to \infty, \tag{5.21}$$

а также выборочная сходимость $u^j \to u$ почти всюду в $\Omega(R)$. Диагональным процессом устанавливается сходимость

$$u^j \to u \quad \text{почти всюду в } \Omega, \quad j \to \infty. \tag{5.22}$$

Положим

$$A^j(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=0}^{n} \Big(a_i\big(\boldsymbol{x}, u^j, \nabla u^j\big) - a_i\big(\boldsymbol{x}, u, \nabla u\big)\Big)(u^j - u)_{x_i}, \quad j = 1, \ldots;$$

тогда

$$\langle \mathbf{A}(u^j) - \mathbf{A}(u), u^j - u\rangle = \int\limits_{\Omega} A^j(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x}, \quad j = 1, \ldots.$$

Согласно (5.13), (5.14), имеем

$$\lim_{j\to\infty} \sup \int\limits_{\Omega} A^j(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} \leqslant 0. \tag{5.23}$$

Запишем $A^j(\boldsymbol{x})$ в следующем виде:

$$A^j(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{n} \Big(a_i\big(\boldsymbol{x}, u^j, \nabla u^j\big) - a_i\big(\boldsymbol{x}, u^j, \nabla u\big)\Big)(u^j - u)_{x_i} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} \Big(a_i\big(\boldsymbol{x}, u^j, \nabla u\big) - a_i\big(\boldsymbol{x}, u, \nabla u\big)\Big)(u^j - u)_{x_i} +$$

$$+ \Big(a_0\big(\boldsymbol{x}, u^j, \nabla u^j\big) - a_0\big(\boldsymbol{x}, u, \nabla u\big)\Big)(u^j - u) =$$

$$= q^j(\boldsymbol{x}) + r^j(\boldsymbol{x}) + s^j(\boldsymbol{x}), \quad j = 1, \ldots. \tag{5.24}$$

Покажем, что

$$r^j(\boldsymbol{x}) \to 0 \quad \text{почти всюду в } \Omega, \quad j \to \infty, \tag{5.25}$$

$$s^j(\boldsymbol{x}) \to 0 \quad \text{почти всюду в } \Omega, \quad j \to \infty. \tag{5.26}$$

Рассмотрим операторы Немыцкого $A_i(u) = a_i(\boldsymbol{x}, u, \nabla v)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, при фиксированном $v \in \mathring{H}^1_{\mathrm{B}}(\Omega)$ для $\boldsymbol{x} \in \Omega(R)$, $R > 0$. Применяя оценку (5.3), выводим неравенство

$$\overline{B}_i(a_i(\boldsymbol{x}, u, \nabla v)) \leqslant \widehat{a}\mathrm{B}(\nabla v) + B_0(u) + \Phi(\boldsymbol{x}),$$

с функцией $\widehat{a}\mathrm{B}(\nabla v) + \Phi(\boldsymbol{x}) \in L_1(\Omega)$. Согласно [7, гл. III, § 17, теорема 17.5], операторы A_i действуют из $L_{B_0}(\Omega(R))$ в $L_{\overline{B}_i}(\Omega(R))$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Кроме того, из [7, гл. III, § 17, теорема 17.3] следует непрерывность операторов A_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, в $L_{B_0}(\Omega(R))$ при любом $R > 0$.

Применяя неравенство (2.9), выводим

$$\int\limits_{\Omega(R)} \big|r^j(\boldsymbol{x})\big|d\boldsymbol{x} \leqslant 2\sum_{i=1}^{n} \Big\|a_i\big(\boldsymbol{x}, u^j, \nabla u\big) - a_i\big(\boldsymbol{x}, u, \nabla u\big)\Big\|_{\overline{B}_i, \Omega(R)} \big\|(u^j - u)_{x_i}\big\|_{B_i, \Omega(R)}.$$

Ввиду сходимости $u^j \to u$ в $L_{B_0}(\Omega(R))$ при $j \to \infty$ (см. (5.21)) и непрерывности операторов $A_i : L_{B_0}(\Omega(R)) \to L_{\overline{B}_i}(\Omega(R))$, $i = 1, 2, \ldots, n$, первый сомножитель стремится к нулю, а второй равномерно ограничен (см. (5.17)). Таким образом, установлено, что для любого $R > 0$

$$r^j(\boldsymbol{x}) \to 0, \quad j \to \infty,$$

в $L_1(\Omega(R))$. Отсюда при помощи диагонального процесса устанавливается сходимость (5.25).

Используя неравенство (2.9), выводим

$$\int\limits_{\Omega(R)} bbb\big|s^j(\boldsymbol{x})\big|d\boldsymbol{x} \leqslant 2\Big\|a_0\big(\boldsymbol{x}, u^j, \nabla u^j\big) - a_0\big(\boldsymbol{x}, u, \nabla u\big)\Big\|_{\overline{B}_0, \Omega(R)} \|u^j - u\|_{B_0, \Omega(R)}.$$

Первый сомножитель равномерно ограничен (см. (5.19)), а второй стремится к нулю (см. (5.21)), поэтому для любого $R > 0$

$$s^j(\boldsymbol{x}) \to 0, j \to \infty,$$

в $L_1(\Omega(R))$. Отсюда при помощи диагонального процесса устанавливается сходимость (5.26).

Далее, запишем $A^j(\boldsymbol{x})$ в виде

$$A^j(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{n} a_i\big(\boldsymbol{x}, u^j, \nabla u^j\big)u^j_{x_i} + a_0\big(\boldsymbol{x}, u^j, \nabla u^j\big)u^j - g^j(\boldsymbol{x}), \quad j = 1, \ldots, \tag{5.27}$$

где

$$g^j(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{n} a_i\big(\boldsymbol{x}, u, \nabla u\big)(u^j - u)_{x_i} + a_0\big(\boldsymbol{x}, u, \nabla u\big)(u^j - u) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} a_i\big(\boldsymbol{x}, u^j, \nabla u^j\big) u_{x_i} + a_0\big(\boldsymbol{x}, u^j, \nabla u^j\big) u \in L_1(\Omega), \quad j = 1, \ldots .$$

Используя неравенство (2.1) для $\varepsilon \in (0,1)$, получаем

$$\big|g^j(\boldsymbol{x})\big| \leqslant \varepsilon\Big(B_0(u^j) + \mathrm{B}(\nabla u^j) + \overline{\mathbf{B}}(\mathbf{a}(\boldsymbol{x}, u^j, \nabla u^j))\Big) + C_9(\varepsilon)\Big(B_0(u) + \mathrm{B}(\nabla u) + \overline{\mathbf{B}}(\mathbf{a}(\boldsymbol{x}, u, \nabla u))\Big).$$

Применяя (5.3), выводим неравенства

$$\big|g^j(\boldsymbol{x})\big| \leqslant \varepsilon C_{10}\Big(\mathrm{B}(\nabla u^j) + B_0(u^j)\Big) + C_{11}(\varepsilon)\Big(\mathrm{B}(\nabla u) + B_0(u) + \Phi(\boldsymbol{x})\Big). \tag{5.28}$$

Используя (5.4), из (5.27) выводим неравенства:

$$A^j(\boldsymbol{x}) \geqslant \overline{a}\Big(\mathrm{B}(\nabla u^j) + B_0(u^j)\Big) - \phi(\boldsymbol{x}) - \big|g^j(\boldsymbol{x})\big|. \tag{5.29}$$

Соединяя (5.28), (5.29), выбирая $\varepsilon < \overline{a}/C_{10}$, устанавливаем оценки

$$A^j(\boldsymbol{x}) \geqslant C_{12}\Big(\mathrm{B}(\nabla u^j) + B_0(u^j)\Big) - \Phi_u(\boldsymbol{x}), \quad j = 1, \ldots, \tag{5.30}$$

с неотрицательной функцией

$$\Phi_u(\boldsymbol{x}) = \phi(\boldsymbol{x}) + C_{11}\Big(\mathrm{B}(\nabla u) + B_0(u) + \Phi(\boldsymbol{x})\Big) \in L_1(\Omega),$$

конечной почти всюду в Ω.

Пусть $A^j(\boldsymbol{x}) = A^{j+}(\boldsymbol{x}) - A^{j-}(\boldsymbol{x})$, где $A^{j+}(\boldsymbol{x})$, $A^{j-}(\boldsymbol{x})$ — положительная и отрицательная части $A^j(\boldsymbol{x})$, соответственно. Из (5.30) следуют оценки

$$A^{j+}(\boldsymbol{x}) \geqslant C_{12}\Big(\mathrm{B}(\nabla u^j) + B_0(u^j)\Big) - \Phi_u(\boldsymbol{x}), \quad j = 1, \ldots . \tag{5.31}$$

Если $\chi^j(\boldsymbol{x})$ — характеристическая функция множества $\{\boldsymbol{x} : A^{j-}(\boldsymbol{x}) > 0\}$, то

$$-A^{j-} = \chi^j q^j + \chi^j r^j + \chi^j s^j,$$

причем, согласно (5.25), (5.26), $\chi^j r^j(\boldsymbol{x}) \to 0$, $\chi^j s^j(\boldsymbol{x}) \to 0$ почти всюду в Ω при $j \to \infty$. Ввиду (5.4), $\chi^j q^j(\boldsymbol{x}) \geqslant 0$ почти всюду в Ω; тогда $A^{j-}(\boldsymbol{x}) \to 0$ почти всюду в Ω при $j \to \infty$.

Кроме того, из (5.30) следует оценка

$$A^j(\boldsymbol{x}) \geqslant -\Phi_u(\boldsymbol{x}), \quad j = 0, 1, \ldots .$$

Отсюда имеем: $A^{j-}(\boldsymbol{x}) \leqslant \Phi_u(\boldsymbol{x})$, $j = 1, \ldots$. Тогда, согласно теореме Лебега,

$$A^{j-}(\boldsymbol{x}) \to 0 \quad \text{в } L_1(\Omega), \quad j \to \infty. \tag{5.32}$$

Поэтому, согласно (5.23),

$$0 \leqslant \lim_{j\to\infty} \sup \int\limits_{\Omega} A^{j+}(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x} = \lim_{j\to\infty} \sup \int\limits_{\Omega} A^j(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x} + \lim_{j\to\infty} \sup \int\limits_{\Omega} A^{j-}(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x} \leqslant 0.$$

Следовательно,

$$A^{j+}(\boldsymbol{x}) \to 0 \quad \text{в } L_1(\Omega), \quad j \to \infty. \tag{5.33}$$

Таким образом, из (5.32), (5.33) имеем сходимость

$$A^j(\boldsymbol{x}) \to 0 \quad \text{в } L_1(\Omega), \quad j \to \infty, \tag{5.34}$$

а также выборочные сходимости

$$A^{j+}(\boldsymbol{x}) \to 0, \quad A^j(\boldsymbol{x}) \to 0 \quad \text{почти всюду в } \Omega, \quad j \to \infty. \tag{5.35}$$

Установим сходимость

$$u^j_{x_i}(\boldsymbol{x}) \to u_{x_i}(\boldsymbol{x}) \quad \text{почти всюду в } \Omega, \quad \alpha = 1, 2, \ldots, n, \quad j \to \infty. \tag{5.36}$$

Обозначим через $\Omega' \subset \Omega$ подмножество точек полной меры, для которых имеют место сходимости (5.22), (5.35) и выполнены неравенства (3.4), (5.3), (5.4).

От противного, пусть в некоторой точке $\boldsymbol{x}^* \in \Omega'$ нет сходимости. Введем обозначения

$$s_0^j = u^j(\boldsymbol{x}^*), \quad s_0 = u(\boldsymbol{x}^*),$$
$$\boldsymbol{s}^j = \Big(s_1^j,\ s_2^j,\ \ldots,\ s_n^j\Big) = \Big(u_{x_1}^j(\boldsymbol{x}^*),\ u_{x_2}^j(\boldsymbol{x}^*),\ \ldots,\ u_{x_n}^j(\boldsymbol{x}^*)\Big),$$
$$\boldsymbol{s} = \Big(s_1,\ s_2,\ \ldots,\ s_n\Big) = \Big(u_{x_1}(\boldsymbol{x}^*),\ u_{x_2}(\boldsymbol{x}^*),\ \ldots,\ u_{x_n}(\boldsymbol{x}^*)\Big).$$

Предположим, что последовательность $\{\mathrm{B}(\boldsymbol{s}^j)\}_{j=1}^{\infty}$ не ограничена. Тогда из оценки (5.31) следует неограниченность последовательности $A^{j+}(\boldsymbol{x}^*)$, $j = 1, 2, \ldots$, что противоречит (5.35). Поэтому последовательность $\{s^j\}_{j=1}^{\infty}$ ограничена.

Пусть $\boldsymbol{s}^* = \big(s_1^*,\ s_2^*,\ \ldots,\ s_n^*\big)$ — один из частичных пределов $\boldsymbol{s}^j = \big(s_1^j,\ s_2^j,\ \ldots,\ s_n^j\big)$ при $j \to \infty$. Тогда, с учетом (5.22), имеем

$$s_0^j \to s_0, \quad s_i^j \to s_i^*, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \quad j \to \infty.$$

Поэтому, применяя (5.25), (5.26), (5.35), из (5.24) и непрерывности $a_i(\boldsymbol{x}^*, s_0, \boldsymbol{s})$ по $\mathbf{s} = (s_0, \boldsymbol{s})$ вытекает, что

$$A^j(\boldsymbol{x}^*) \to \sum_{i=1}^{n} \Big(a_i(\boldsymbol{x}^*, s_0, \boldsymbol{s}^*) - a_i(\boldsymbol{x}^*, s_0, \boldsymbol{s})\Big)(s_i^* - s_i) = 0;$$

следовательно, согласно (3.4), $\boldsymbol{s} = \boldsymbol{s}^*$. Это противоречит тому, что в точке $\boldsymbol{x}^*$ нет сходимости.

Таким образом, из (5.22), (5.36) и непрерывности $a_i(\boldsymbol{x}, s_0, \boldsymbol{s})$ по $\mathbf{s} = (s_0, \boldsymbol{s})$ следует, что при $j \to \infty$

$$a_i\big(\boldsymbol{x}, u^j, \nabla u^j\big) \to a_i\big(\boldsymbol{x}, u, \nabla u\big) \quad \text{почти всюду в } \Omega, \quad i = 0, 1, \ldots, n.$$

Кроме того, из (5.19) следует ограниченность $a_i\big(\boldsymbol{x}, u^i, \nabla u^i\big)$ в $L_{\overline{B}_i}(\Omega)$, $i = 0, 1, \ldots, n$. Применяя лемму 4.4, устанавливаем слабые сходимости

$$a_i\big(\boldsymbol{x}, u^j, \nabla u^j\big) \rightharpoonup a_i\big(\boldsymbol{x}, u, \nabla u\big) \quad \text{в } L_{\overline{B}_i}(\Omega), \quad i = 0, 1, 2, \ldots, n. \tag{5.37}$$

Очевидно, из (5.37) следует слабая сходимость (5.15).

Чтобы завершить доказательство, заметим, что из (5.13), (5.34) следует (5.16):

$$\langle \mathbf{A}(u^j), u^j - u\rangle = \langle \mathbf{A}(u^j) - \mathbf{A}(u), u^j - u\rangle + \langle \mathbf{A}(u), u^j - u\rangle \to 0, \quad j \to \infty.$$

Предложение 5.1 доказано. □

Доказательство теоремы 5.1. Коэрцитивность оператора $\mathbf{A}$ установлена в [3]. Из предложения 5.1, согласно лемме 5.1, следует существование такой функции $u \in \mathring{W}_{\mathbf{B}}^1(\Omega)$, что $\mathbf{A}(u) = \mathbf{0}$. Таким образом, для любого $v \in \mathring{W}_{\mathbf{B}}^1(\Omega)$ справедливо тождество (5.10). □

ddd

6. Существование энтропийного решения

Доказательство теоремы 3.1

Шаг 1. Выберем последовательность функций $A_{0\psi}^m(\boldsymbol{x}) \in C_0^{\infty}(\Omega)$ так, чтобы

$$A_{0\psi}^m \to A_{0\psi}^0 \quad \text{в} \quad L_1(\Omega), \quad m \to \infty, \tag{6.1}$$

и при этом

$$\|A_{0\psi}^m\|_1 \leqslant \|A_{0\psi}^0\|_1, \quad m = 1, 2, \ldots. \tag{6.2}$$

Рассмотрим уравнение

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i^m(\boldsymbol{x}, w, \nabla w))_{x_i} = a_0^m(\boldsymbol{x}, w), \quad \boldsymbol{x} \in \Omega, \tag{6.3}$$

с функциями $a_i^m(\boldsymbol{x}, s_0, \boldsymbol{s}) = a_{i\psi}(\boldsymbol{x}, T_m s_0, \boldsymbol{s})$, $a_0^m(\boldsymbol{x}, s_0) = A_{0\psi}^m(\boldsymbol{x}) + b^m(\boldsymbol{x}, s_0) + B_0'(s_0)/m$. Здесь $b^m(\boldsymbol{x}, s_0) = T_m b_{\psi}(\boldsymbol{x}, s_0)\kappa_m(\boldsymbol{x})$, $\kappa_m(\boldsymbol{x})$ — характеристическая функция множества $\Omega(m) = \{\boldsymbol{x} \in$

$\Omega : |\boldsymbol{x}| < m\}$. Предполагаем, что непрерывно дифференцируемые N – функции B_0, $\overline{B}_0$ удовлетворяют Δ_2 – условию и выполнены требования (5.5), (5.6).

Очевидно, что

$$|b^m(\boldsymbol{x}, s_0)| \leqslant |b_\psi(\boldsymbol{x}, s_0)|, \quad s_0 \in \mathbb{R}, \quad \boldsymbol{x} \in \Omega. \tag{6.4}$$

Кроме того, применяя (3.8ψ), устанавливаем неравенства

$$b^m(\boldsymbol{x}, s_0)s_0 \geqslant 0, \quad s_0 B_0'(s_0) \geqslant B_0(s_0) \geqslant 0, \quad s_0 \in \mathbb{R}, \quad \boldsymbol{x} \in \Omega. \tag{6.5}$$

Обобщенным решением задачи (6.3), (5.2) является функция $w^m \in \mathring{W}^1_{\mathbf{B}}(\Omega)$, удовлетворяющая интегральному тождеству

$$[A^m_{0\psi}(\boldsymbol{x}) + T_m b_\psi(\boldsymbol{x}, w^m)\kappa_m(\boldsymbol{x}) + B_0'(w^m)/m) + \boldsymbol{a}_\psi(\boldsymbol{x}, T_m w^m, \nabla w^m) \cdot \nabla v] = 0 \tag{6.6}$$

для любой функции $v \in \mathring{W}^1_{\mathbf{B}}(\Omega)$.

Для функций $\boldsymbol{a}^m(\boldsymbol{x}, s_0, \boldsymbol{s}) = (a^m_1(\boldsymbol{x}, s_0, \boldsymbol{s}), \ldots, a^m_n(\boldsymbol{x}, s_0, \boldsymbol{s}))$, $a^m_0(\boldsymbol{x}, s_0)$ проверим условия (3.4), (5.3), (5.4). Очевидно, что

$$\overline{B}_0(b^m(\boldsymbol{x}, s_0)) = \overline{B}_0(T_m b_\psi(\boldsymbol{x}, s_0)\kappa_m(\boldsymbol{x})) \leqslant \overline{B}_0(m)\kappa_m(\boldsymbol{x}) \in L_1(\Omega),$$

поэтому, применяя (2.5), (2.2), (2.4), устанавливаем

$$\begin{gathered}\overline{B}_0(a^m_0(\boldsymbol{x}, s_0)) \leqslant c\overline{B}_0(A^m_{0\psi}(\boldsymbol{x})) + c\overline{B}_0(b^m(\boldsymbol{x}, s_0)) + c\overline{B}_0(B_0'(s_0)/m) \leqslant \\ \leqslant \widehat{a}_m B_0(s_0) + \Phi_m(\boldsymbol{x}), \quad \Phi_m(\boldsymbol{x}) \in L_1(\Omega).\end{gathered} \tag{6.7}$$

Из (3.3ψ), (6.7) следует неравенство (5.3).

Далее, применяя (2.1), (6.5), получаем

$$a^m_0(\boldsymbol{x}, s_0)s_0 = (A^m_{0\psi}(\boldsymbol{x}) + b^m(\boldsymbol{x}, s_0) + B_0'(s_0)/m)s_0 \geqslant B_0(s_0)/m - \varepsilon B_0(s_0) - C(\varepsilon)\overline{B}_0(A^m_{0\psi}).$$

Отсюда, выбирая $\varepsilon < 1/m$, выводим неравенство

$$a^m_0(\boldsymbol{x}, s_0)s_0 \geqslant \overline{a}_m B_0(s_0) - \phi_m(\boldsymbol{x}), \quad \phi_m(\boldsymbol{x}) \in L_1(\Omega). \tag{6.8}$$

Соединяя (3.5ψ), (6.8), устанавливаем неравенство (5.4).

Кроме того, ввиду (3.4ψ), справедливо (3.4). Согласно теореме 5.1 существует $w^m \in \mathring{W}^1_{\mathbf{B}}(\Omega)$ обобщенное решение задачи (6.3), (5.2).

Шаг 2. Рассмотрим функцию $T_{k,h}(r) = T_k(r - T_h(r))$. Очевидно,

$$T_{k,h}(r) = \begin{cases} 0 & \text{при } |r| < h, \\ r - h \operatorname{sign} r & \text{при } h \leqslant |r| < k + h, \\ k \operatorname{sign} r & \text{при } |r| \geqslant k + h. \end{cases}$$

Положив в (6.6) $v = T_{k,h}w^m$, учитывая (6.5), будем иметь

$$\begin{gathered}\int\limits_{\{\Omega: h \leqslant |w^m| < k+h\}} \boldsymbol{a}_\psi(\boldsymbol{x}, T_m w^m, \nabla w^m) \cdot \nabla w^m d\boldsymbol{x} + k \int\limits_{\{\Omega: |w^m| \geqslant k+h\}} \big(|b^m(\boldsymbol{x}, w^m)| + |B_0'(w^m)|/m\big)\, d\boldsymbol{x} + \\ + \int\limits_{\{\Omega: h \leqslant |w^m| < k+h\}} \big(b^m(\boldsymbol{x}, w^m) + B_0'(w^m)/m\big)\,(w^m - h \operatorname{sign} w^m) d\boldsymbol{x} \leqslant k \int\limits_{\{\Omega: |w^m| \geqslant h\}} |A^m_{0\psi}| d\boldsymbol{x}.\end{gathered} \tag{6.9}$$

Ввиду (6.5) для $h \leqslant |w^m|$ справедливо неравенство $(b^m(\boldsymbol{x}, w^m) + B_0'(w^m)/m)(w^m - h \operatorname{sign} w^m) \geqslant 0$. Учитывая это, из (6.9) выводим

$$\begin{gathered}\int\limits_{\{\Omega: h \leqslant |w^m| < k+h\}} \boldsymbol{a}_\psi(\boldsymbol{x}, T_m w^m, \nabla w^m) \cdot \nabla w^m d\boldsymbol{x} + \\ + k \int\limits_{\{\Omega: |w^m| \geqslant k+h\}} \big(|b^m(\boldsymbol{x}, w^m)| + |B_0'(w^m)|/m\big)\, d\boldsymbol{x} \leqslant k \int\limits_{\{\Omega: |w^m| \geqslant h\}} |A^m_{0\psi}| d\boldsymbol{x}.\end{gathered} \tag{6.10}$$

Применяя (3.5ψ), учитывая (6.2), неравенство (6.10) приводим к виду:

$$\overline{a}_\psi \int\limits_{\{\Omega: h\leqslant |w^m|<k+h\}} \mathrm{B}(\nabla w^m) d\boldsymbol{x} + k \int\limits_{\{\Omega:|w^m|\geqslant k+h\}} \big(|b^m(\boldsymbol{x},w^m)| + |B_0'(w^m)|/m\big)\, d\boldsymbol{x} \leqslant \tag{6.11}$$

$$\leqslant k \int\limits_{\{\Omega:|w^m|\geqslant h\}} |A^m_{0\psi}| d\boldsymbol{x} + \int\limits_{\{\Omega: h\leqslant |w^m|<k+h\}} \phi_\psi d\boldsymbol{x} \leqslant k\|A^0_{0\psi}\|_1 + \|\phi_\psi\|_1.$$

Теперь в качестве пробной функции в (6.6) возьмем $T_k w^m$, получим

$$\int\limits_\Omega \{\boldsymbol{a}_\psi(\boldsymbol{x}, T_m w^m, \nabla w^m)\cdot \nabla T_k w^m + (A^m_{0\psi}(\boldsymbol{x}) + b^m(\boldsymbol{x},w^m) + B_0'(w^m)/m) T_k w^m\} = 0.$$

Применяя (6.2), (6.5), выводим

$$\int\limits_{\{\Omega:|w^m|<k\}} \boldsymbol{a}_\psi(\boldsymbol{x}, T_m w^m, \nabla w^m)\cdot \nabla w^m d\boldsymbol{x} + k \int\limits_{\{\Omega:|w^m|\geqslant k\}} \big(|b^m(\boldsymbol{x},w^m)| + |B_0'(w^m)|/m\big)\, d\boldsymbol{x} \leqslant$$

$$\leqslant k\|A^m_{0\psi}\|_1 \leqslant k\|A^0_{0\psi}\|_1.$$

Отсюда, используя неравенство (3.5ψ), получаем

$$\overline{a}_\psi \int\limits_{\{\Omega:|w^m|<k\}} \mathrm{B}(\nabla w^m) d\boldsymbol{x} + k \int\limits_{\{\Omega:|w^m|\geqslant k\}} \big(|b^m(\boldsymbol{x},w^m)| + |B_0'(w^m)|/m\big)\, d\boldsymbol{x} \leqslant \tag{6.12}$$

$$\leqslant k\|A^0_{0\psi}\|_1 + \|\phi_\psi\|_1.$$

Согласно (6.4), (3.9ψ), имеем:

$$\sup_{|w^m|\leqslant k} \big(|b^m(\boldsymbol{x},w^m)| + |B_0'(w^m)|/m\big) \leqslant \sup_{|w^m|\leqslant k} \big(|b_\psi(\boldsymbol{x},w^m)| + |B_0'(w^m)|\big) \leqslant \tag{6.13}$$

$$\leqslant G_{k+\|\psi\|_\infty}(\boldsymbol{x}) + |B_0'(k)| \in L_{1,\mathrm{loc}}(\Omega).$$

Соединяя (6.12), (6.13), приходим к выводу, что для любого компакта $Q\subset\Omega$ справедливы неравенства:

$$\|b^m(\boldsymbol{x},w^m)\|_{1,Q} + \|B_0'(w^m)\|_{1,Q}/m \leqslant C_1, \quad m=1,2,\ldots. \tag{6.14}$$

Докажем, что

$$\|b^m(\boldsymbol{x},w^m)\|_1 \leqslant C_2, \quad m=1,2,\ldots. \tag{6.15}$$

Выбирая в (6.12) $k=\delta_0$ (δ_0 из (3.10ψ)), получим

$$\int\limits_{\{\Omega:|w^m|\geqslant\delta_0\}} |b^m(\boldsymbol{x},w^m)| d\boldsymbol{x} \leqslant C_3, \quad m=1,2,\ldots. \tag{6.16}$$

Из (6.4), (3.10ψ) имеем:

$$\int\limits_{\{\Omega:|w^m|<\delta_0\}} |b^m(\boldsymbol{x},w^m)| d\boldsymbol{x} \leqslant \int\limits_{\{\Omega:|w^m|<\delta_0\}} |b_\psi(\boldsymbol{x},w^m)| d\boldsymbol{x} \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{\{\Omega:0\leqslant w^m<\delta_0\}} b_\psi(\boldsymbol{x},\delta_0) d\boldsymbol{x} + \int\limits_{\{\Omega:-\delta_0< w^m<0\}} |b_\psi(\boldsymbol{x},-\delta_0)| d\boldsymbol{x} \leqslant C_4. \tag{6.17}$$

Соединяя (6.16), (6.17), выводим (6.15).

Шаг 3. Из (6.12) для любого $k>0$ следует оценка:

$$\int\limits_\Omega \mathrm{B}(\nabla T_k w^m) d\boldsymbol{x} = \int\limits_{\{\Omega:|w^m|<k\}} \mathrm{B}(\nabla w^m) d\boldsymbol{x} \leqslant kC_5 + C_6, \quad m=1,2,\ldots. \tag{6.18}$$

Отсюда, согласно лемме 4.2, имеем:

$$\operatorname{mes}(\{\Omega : |w^m| \geqslant k\}) \to 0 \quad \text{равномерно по } m, \quad k \to \infty. \tag{6.19}$$

Установим сходимость:

$$w^m \to w \quad \text{почти всюду в} \quad \Omega, \quad m \to \infty. \tag{6.20}$$

Из оценки (6.18), применяя (2.5), выводим:

$$\int\limits_{\Omega} \mathrm{B}(\nabla(\eta_R(|\boldsymbol{x}|)T_k w^m))d\boldsymbol{x} \leqslant c \int\limits_{\{\Omega:|w^m|<k\}} \mathrm{B}(\nabla w^m)d\boldsymbol{x} + c\int\limits_{\Omega} \mathrm{B}(T_k w^m \nabla \eta_R(|\boldsymbol{x}|))d\boldsymbol{x} \leqslant C_7(k,R).$$

Отсюда при любых фиксированных $k, R > 0$ следует ограниченность множества $\{\eta_R T_k w^m\}$ в $\mathring{H}^1_{\mathrm{B}}(\Omega(R+1))$. Для N-функции $M \prec\prec B_*$, согласно лемме 4.7, имеем компактность вложения $\mathring{H}^1_{\mathrm{B}}(\Omega(R+1)) \subset L_M(\Omega(R+1))$. Таким образом, для любых фиксированных $k, R > 0$ установлена выборочная сходимость $\eta_R T_k w^m \to v$ в $L_M(\Omega(R+1))$ при $m \to \infty$. Отсюда следует сходимость $T_k w^m \to v$ в $L_M(\Omega(R))$, а также выборочная сходимость $T_k w^m \to v$ почти всюду в $\Omega(R)$ при $m \to \infty$ для $k = 1, 2, \ldots$. Диагональным процессом устанавливается, что найдется измеримая функция $w : \Omega \to \mathbb{R}$ такая, что $v = T_k w$ и $w^m \to w$ почти всюду в $\Omega(R)$ для любого $R > 0$. Отсюда следует сходимость (6.20).

Из сходимости $w^m \to w$ почти всюду в $\Omega(R)$ для любого $R > 0$ следует локальная сходимость по мере, а значит и локальная фундаментальность w^m по мере:

$$\operatorname{mes}\{\Omega(R) : |w^m - w^l| \geqslant \nu\} \to 0 \quad \text{при} \quad m, l \to \infty \quad \text{для любого} \quad \nu > 0. \tag{6.21}$$

Шаг 4. Из (6.18), (3.3ψ) при любом $k > 0$ имеем оценку:

$$\|\overline{\mathrm{B}}(\boldsymbol{a}_\psi(\boldsymbol{x}, T_m w^m, \nabla w^m))\chi(|w^m| < k)\|_1 \leqslant C_8(k), \quad m = 1, 2, \ldots. \tag{6.22}$$

Из неравенств (6.18), согласно лемме 4.3, имеем:

$$\operatorname{mes}\{\Omega : \mathrm{B}(\nabla w^m) \geqslant \rho\} \to 0 \quad \text{равномерно по} \quad m, \quad \rho \to \infty. \tag{6.23}$$

Сначала установим сходимость:

$$\nabla w^m \to \nabla w \quad \text{локально по мере}, \quad m \to \infty. \tag{6.24}$$

Рассмотрим множество

$$E_{\nu,\theta,\rho}(R) =$$
$$= \{\Omega(R) : |w^l - w^m| < \nu,\ \mathrm{B}(\nabla w^l) \leqslant \rho,\ \mathrm{B}(\nabla w^m) \leqslant \rho,\ |w^l| \leqslant \rho,\ |w^m| \leqslant \rho,\ |\nabla(w^l - w^m)| \geqslant \theta\}.$$

Поскольку справедливо вложение

$$\{\Omega(R) : |\nabla(w^l - w^m)| \geqslant \theta\} \subset \{\Omega : \mathrm{B}(\nabla w^l) > \rho\} \cup \{\Omega : \mathrm{B}(\nabla w^m) > \rho\} \cup$$
$$\{\Omega(R) : |w^l - w^m| \geqslant \nu\} \cup \{\Omega : |w^l| > \rho\} \cup \{\Omega : |w^m| > \rho\} \cup E_{\nu,\theta,\rho}(R),$$

то, в силу (6.19), (6.23), выбором ρ добьемся неравенств

$$\operatorname{mes}\{\Omega(R) : |\nabla(w^l - w^m)| \geqslant \theta\} < \tag{6.25}$$
$$< 4\varepsilon + \operatorname{mes} E_{\nu,\theta,\rho}(R) + \operatorname{mes}\{\Omega(R) : |w^l - w^m| \geqslant \nu\}, \quad m, l = 1, 2, \ldots.$$

По условию (3.4ψ) и известному факту, что непрерывная функция на компакте достигает наименьшего значения, найдется $\gamma(\boldsymbol{x}) > 0$ почти всюду в Ω такая, что при $\mathrm{B}(\boldsymbol{s}) \leqslant \rho$, $\mathrm{B}(\boldsymbol{t}) \leqslant \rho$, $|s_0| \leqslant \rho$, $|\boldsymbol{s} - \boldsymbol{t}| \geqslant \theta$ справедливо неравенство

$$(\boldsymbol{a}_\psi(\boldsymbol{x}, s_0, \boldsymbol{s}) - \boldsymbol{a}_\psi(\boldsymbol{x}, s_0, \boldsymbol{t})) \cdot (\boldsymbol{s} - \boldsymbol{t}) \geqslant \gamma(\boldsymbol{x}). \tag{6.26}$$

Введем обозначение $A_0^m(\boldsymbol{x}) = A_{0\psi}^m(\boldsymbol{x}) + b^m(\boldsymbol{x}, w^m) + B_0'(w^m)/m$, из (6.2), (6.14) следует ограниченность $A_0^m(\boldsymbol{x})$ в $L_{1,\mathrm{loc}}(\Omega)$ равномерно по m. Запишем (6.6) дважды для w^m и w^l и вычтем из первого второе, получим

$$\Big[(\boldsymbol{a}_\psi(\boldsymbol{x}, T_m w^m, \nabla w^m) - \boldsymbol{a}_\psi(\boldsymbol{x}, T_l w^l, \nabla w^l)) \cdot \nabla v + (A_0^m - A_0^l)v\Big] = 0.$$

Подставляя пробную функцию $v = \eta_R(|\boldsymbol{x}|)\eta_\rho(|w^l|)\eta_\rho(|w^m|)T_\nu(w^m - w^l)$, устанавливаем

$$\Big[(\boldsymbol{a}_\psi(\boldsymbol{x}, T_m w^m, \nabla w^m) - \boldsymbol{a}_\psi(\boldsymbol{x}, T_l w^l, \nabla w^l)) \cdot \nabla(\eta_R(|\boldsymbol{x}|)\eta_\rho(|w^l|)\eta_\rho(|w^m|)T_\nu(w^m - w^l))\Big] =$$
$$= -\Big[(A_0^m - A_0^l)\eta_R(|\boldsymbol{x}|)\eta_\rho(|w^l|)\eta_\rho(|w^m|)T_\nu(w^m - w^l)\Big] \leqslant C_9(R)\nu. \qquad (6.27)$$

Далее, применяя (6.26), выводим

$$\int\limits_{E_{\nu,\theta,\rho}(R)} \gamma(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} \leqslant \int\limits_{E_{\nu,\theta,\rho}(R)} \Big(\boldsymbol{a}_\psi(\boldsymbol{x}, T_m w^m, \nabla w^m) - \boldsymbol{a}_\psi(\boldsymbol{x}, T_m w^m, \nabla w^l)\Big) \cdot \nabla(w^m - w^l)d\boldsymbol{x} \leqslant$$
$$\leqslant \int\limits_{|w^m - w^l| < \nu} \eta_R(|\boldsymbol{x}|)\eta_\rho(|w^l|)\eta_\rho(|w^m|)(\boldsymbol{a}_\psi(\boldsymbol{x}, T_m w^m, \nabla w^m) - \boldsymbol{a}_\psi(\boldsymbol{x}, T_m w^m, \nabla w^l)) \cdot \nabla(w^m - w^l)d\boldsymbol{x} =$$
$$= \int\limits_{|w^m - w^l| < \nu} \eta_R(|\boldsymbol{x}|)\eta_\rho(|w^l|)\eta_\rho(|w^m|)(\boldsymbol{a}_\psi(\boldsymbol{x}, T_m w^m, \nabla w^m) - \boldsymbol{a}_\psi(\boldsymbol{x}, T_l w^l, \nabla w^l)) \cdot \nabla(w^m - w^l)d\boldsymbol{x} +$$
$$+ \int\limits_{|w^m - w^l| < \nu} \eta_R(|\boldsymbol{x}|)\eta_\rho(|w^l|)\eta_\rho(|w^m|)(\boldsymbol{a}_\psi(\boldsymbol{x}, T_l w^l, \nabla w^l) - \boldsymbol{a}_\psi(\boldsymbol{x}, T_m w^m, \nabla w^l)) \cdot \nabla(w^m - w^l)d\boldsymbol{x} =$$
$$= I_1 + I_2. \qquad (6.28)$$

Для оценки I_1 используем (6.27), (2.1)

$$I_1 \leqslant \sum_{i=1}^n \int\limits_{|w^m| < \rho+1, |w^l| < \rho+1, |\boldsymbol{x}| < R+1} (|a_{i\psi}(\boldsymbol{x}, T_m w^m, \nabla w^m)| + |a_{i\psi}(\boldsymbol{x}, T_l w^l, \nabla w^l)|)|T_\nu(w^m - w^l)|d\boldsymbol{x} +$$
$$+ \sum_{i=1}^n \int\limits_{\rho < |w^l| < \rho+1, |w^m| < \rho+1} (|a_{i\psi}(\boldsymbol{x}, T_m w^m, \nabla w^m)| + |a_{i\psi}(\boldsymbol{x}, T_l w^l, \nabla w^l)|)|w^l_{x_i}||T_\nu(w^m - w^l)|d\boldsymbol{x} +$$
$$+ \sum_{i=1}^n \int\limits_{\rho < |w^m| < \rho+1, |w^l| < \rho+1} (|a_{i\psi}(\boldsymbol{x}, T_m w^m, \nabla w^m)| + |a_{i\psi}(\boldsymbol{x}, T_l w^l, \nabla w^l)|)|w^m_{x_i}||T_\nu(w^m - w^l)|d\boldsymbol{x} +$$
$$+ C_9(R)\nu \leqslant \nu(3\|\overline{\mathrm{B}}(\boldsymbol{a}_\psi(\boldsymbol{x}, T_m w^m, \nabla w^m))\chi(|w^m| < \rho+1)\|_1 +$$
$$+ 3\|\overline{\mathrm{B}}(\boldsymbol{a}_\psi(\boldsymbol{x}, T_l w^l, \nabla w^l))\chi(|w^l| < \rho+1)\|_1 +$$
$$+ 2\|\mathrm{B}(\nabla w^m)\chi(|w^m| < \rho+1)\|_1 + 2\|\mathrm{B}(\nabla w^l)\chi(|w^l| < \rho+1)\|_1 + C_{10}(R)).$$

Применяя (6.12), (6.22), выводим

$$I_1 \leqslant C_{11}(R, \rho)\nu. \qquad (6.29)$$

Для $m, l \geqslant \rho+1$ из $|w^l| < \rho+1, |w^m| < \rho+1$, $|w^m - w^l| < \nu$ следует $|T_m w^m - T_l w^l| < \nu$. Применяя условие гельдеровости (3.6ψ) и неравенства (2.1), (2.5), для $m, l \geqslant \rho+1$ имеем

$$|I_2| \leqslant \int\limits_{|w^m - w^l| < \nu, |w^l| < \rho+1, |w^m| < \rho+1} |w^m - w^l|^\alpha \sum_{i=1}^n \overline{B}_i^{-1}(C_{12}(R, \rho)\mathrm{B}(\nabla w^l + \nabla\psi))(|w^m_{x_i}| + |w^l_{x_i}|)d\boldsymbol{x} \leqslant$$
$$\leqslant \nu^\alpha C_{13} \int\limits_{|w^l| < \rho+1, |w^m| < \rho+1} \Big(\mathrm{B}(\nabla w^l) + \mathrm{B}(\nabla w^m) + \mathrm{B}(\nabla\psi)\Big)\, d\boldsymbol{x}.$$

Учитывая (6.12), устанавливаем оценку

$$|I_2| \leqslant C_{14}(R, \rho)\nu^\alpha, \quad m, l \geqslant \rho+1. \qquad (6.30)$$

Соединяя (6.28) – (6.30), выводим

$$\int\limits_{E_{\nu,\theta,\rho}(R)} \gamma(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} \leqslant C_{15}(R,\rho)\nu^{\alpha}, \quad \nu \in (0,1].$$

Для любого $\delta > 0$ при фиксированных R, ρ выбором ν можно добиться оценки $C_{15}(R,\rho)\nu^{\alpha} < \delta$.

Применяя лемму 4.8, для любого $\varepsilon > 0$ устанавливаем неравенство

$$\operatorname{mes} E_{\nu,\theta,\rho}(R) < \varepsilon, \quad m, l \geqslant m_1. \tag{6.31}$$

Кроме того, согласно (6.21), можно выбрать $m_2(\nu, R)$ такое, что

$$\operatorname{mes}\{\Omega(R) : |w^l - w^m| \geqslant \nu\} < \varepsilon, \quad m, l \geqslant m_2. \tag{6.32}$$

Соединяя (6.25), (6.31), (6.32), в итоге выводим неравенство

$$\operatorname{mes}\{\Omega(R) : |\nabla(w^l - w^m)| \geqslant \theta\} < 6\varepsilon, \quad m, l \geqslant m_0 = \max\{m_1, m_2\}.$$

Отсюда следует фундаментальность по мере последовательности $\{\nabla w^m\}$ на множестве $\Omega(R)$ при любом $R > 0$, это влечет (6.24), а также выборочную сходимость:

$$\nabla w^m \to \nabla w \quad \text{почти всюду в} \quad \Omega, \quad m \to \infty. \tag{6.33}$$

Шаг 5. Докажем, что

$$b^m(\boldsymbol{x}, w^m) \to b_{\psi}(\boldsymbol{x}, w) \quad \text{в} \quad L_{1,\mathrm{loc}}(\Omega), \quad m \to \infty, \tag{6.34}$$

$$b^m(\boldsymbol{x}, w^m) \to b_{\psi}(\boldsymbol{x}, w) \quad \text{почти всюду в} \quad \Omega, \quad m \to \infty. \tag{6.35}$$

Из (6.11) при $h = k$ имеем:

$$\int\limits_{\{\Omega:|w^m|\geqslant 2k\}} \big(|b^m(\boldsymbol{x}, w^m)| + |B_0'(w^m)|/m\big)\, d\boldsymbol{x} \leqslant \int\limits_{\{\Omega:|w^m|\geqslant k\}} |A_{0\psi}^m - A_{0\psi}^0| d\boldsymbol{x} +$$

$$+ \int\limits_{\{\Omega:|w^m|\geqslant k\}} |A_{0\psi}^0| d\boldsymbol{x} + \frac{1}{k} \int\limits_{\{\Omega:k\leqslant|w^m|<2k\}} \phi_{\psi} d\boldsymbol{x}.$$

Ввиду того, что $A_{0\psi}^0,\ \phi_{\psi} \in L_1(\Omega)$, сходимости (6.1) и абсолютной непрерывности интегралов в правой части последнего неравенства, учитывая (6.19), для любого $\varepsilon > 0$ можно выбрать достаточно большое k такое, что:

$$\int\limits_{\{\Omega:|w^m|\geqslant 2k\}} \big(|b^m(\boldsymbol{x}, w^m)| + |B_0'(w^m)|/m\big)\, d\boldsymbol{x} < \varepsilon, \quad m = 1, 2, \ldots. \tag{6.36}$$

Из непрерывности $b_{\psi}(\boldsymbol{x}, s_0)$ по s_0 и сходимости $w^m \to w$ почти всюду в Ω следует сходимость (6.35).

Теперь установим фундаментальность последовательности $\{b^m(\boldsymbol{x}, w^m)\}$ в пространстве $L_{1,\mathrm{loc}}(\Omega)$: для любого компакта $Q \subset \Omega$

$$\int\limits_{Q} |b^m(\boldsymbol{x}, w^m) - b^l(\boldsymbol{x}, w^l)| d\boldsymbol{x} \to 0, \quad m, l \to \infty. \tag{6.37}$$

Для этого введем обозначение $\Delta^{ml}(\boldsymbol{x}) = |b^m(\boldsymbol{x}, w^m) - b^l(\boldsymbol{x}, w^l)|$ и запишем соотношение:

$$\int\limits_{Q} \Delta^{ml}(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x} = \int\limits_{\{Q:|w^m|\geqslant 2k, |w^l|\geqslant 2k\}} \Delta^{ml}(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x} + \int\limits_{\{Q:|w^m|<2k, |w^l|<2k\}} \Delta^{ml}(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x} +$$

$$+ \int\limits_{\{Q:|w^m|<2k, |w^l|\geqslant 2k\}} \Delta^{ml}(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x} + \int\limits_{\{Q:|w^m|\geqslant 2k, |w^l|<2k\}} \Delta^{ml}(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x} = I_1 + I_2 + I_3 + I_4.$$

Согласно (6.36), для любого $\varepsilon > 0$ за счет выбора k справедлива оценка $I_1 < 2\varepsilon$ равномерная по m и l.

Применяя (6.35), (6.13) и теорему Лебега, выбором m_0 можно установить неравенство

$$I_2 \leqslant \int\limits_{\{Q:|w^m|<2k,|w^l|<2k\}} \Delta^{ml}(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} < \varepsilon, \quad m,l > m_0.$$

Оценим интеграл I_3. Для области интегрирования в I_3 справедливо вложение:

$$\{Q : |w^m| < 2k, |w^l| \geqslant 2k\} \subset \{Q : |w^m| \geqslant k, |w^l| \geqslant 2k\} \cup \{Q : |w^m| < k, |w^l| \geqslant 2k\}.$$

Согласно (6.36), выбором k можно установить оценки:

$$I_{31} = \int\limits_{\{Q:|w^m|\geqslant k,|w^l|\geqslant 2k\}} |b^m(\boldsymbol{x}, w^m) - b^l(\boldsymbol{x}, w^l)|d\boldsymbol{x} < 2\varepsilon,$$

$$I_{32} = \int\limits_{\{Q:|w^m|<k,|w^l|\geqslant 2k\}} |b^m(\boldsymbol{x}, w^m) - b^l(\boldsymbol{x}, w^l)|d\boldsymbol{x} \leqslant \int\limits_{\{Q:|w^m|<k,|w^l|\geqslant 2k\}} G_{k+\|\psi\|_\infty}(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} + \varepsilon,$$

равномерные по m, l. Поскольку $\mathrm{mes}\{Q : |w^m| < k, |w^l| \geqslant 2k\} \to \mathrm{mes}\{Q : |w| \leqslant k, |w| \geqslant 2k\} = 0$ при $k, l \to \infty$, то, ввиду $G_{k+\|\psi\|_\infty}(\boldsymbol{x}) \in L_1(Q)$ и абсолютной непрерывности интеграла, выбором m_0 можно установить неравенство

$$\int\limits_{\{Q:|w^m|<k,|w^l|\geqslant 2k\}} G_{k+\|\psi\|_\infty}(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} < \varepsilon, \quad m,l \geqslant m_0.$$

Таким образом $I_3 < 4\varepsilon$ для $m, l \geqslant m_0$. Интеграл I_4 оценивается аналогичным образом.

Соединяя оценки для $I_i,\ i = 1, 2, 3, 4$, устанавливаем (6.37). Ввиду полноты пространства $L_1(Q)$ найдется функция $v \in L_1(Q)$ такая, что

$$b^m(\boldsymbol{x}, w^m) \to v \quad \text{в} \quad L_1(Q), \quad m \to \infty. \tag{6.38}$$

Кроме того, $b^m(\boldsymbol{x}, w^m) \to v,\ m \to \infty$, выборочно почти всюду в Ω. Отсюда, ввиду сходимости (6.35), следует, что $v(\boldsymbol{x}) = b_\psi(\boldsymbol{x}, w)$ почти всюду в Ω. Таким образом, сходимость (6.34) доказана.

Далее, установим сходимости:

$$B_0'(w^m)/m \to 0 \quad \text{почти всюду в} \quad \Omega, \quad m \to \infty, \tag{6.39}$$

$$B_0'(w^m)/m \to 0 \quad \text{в} \quad L_{1,\mathrm{loc}}(\Omega), \quad m \to \infty. \tag{6.40}$$

Согласно (6.36), для любого $\varepsilon > 0$ можно выбрать k так, что:

$$\int\limits_{\{\Omega:|w^m|\geqslant 2k\}} |B_0'(w^m)|/m d\boldsymbol{x} < \varepsilon, \quad m = 1, 2, \ldots.$$

Кроме того, выбором m_0 можно добиться неравенства:

$$\int\limits_{\{Q:|w^m|<2k\}} |B_0'(w^m)|/m d\boldsymbol{x} \leqslant |B_0'(2k)|/m \,\mathrm{mes}\, Q < \varepsilon, \quad m \geqslant m_0.$$

Из последних оценок следует сходимость (6.40), которая влечет (6.39).

Из оценки (6.15), ввиду (6.35), согласно теореме Фату следует, что $b_\psi(\boldsymbol{x}, w) \in L_1(\Omega)$, отсюда вытекает справедливость условия 1ψ) определения 1ψ.

Шаг 6. Покажем, что $T_k w \in \mathring{H}^1_{\mathrm{B}}(\Omega)$ для любого $k > 0$. Соединяя (6.18), (2.7) для любого фиксированного $k > 0$ выводим оценку

$$\|T_k w^m\|_{\mathring{H}^1_{\mathrm{B}}(\Omega)} = \|\nabla T_k w^m\|_{\mathrm{B}} \leqslant C_{17}(k), \quad m = 1, 2, \ldots.$$

Рефлексивность пространства $\mathring{H}^1_{\mathrm{B}}(\Omega)$ позволяет выделить слабо сходящуюся в $\mathring{H}^1_{\mathrm{B}}(\Omega)$ подпоследовательность $T_k w^m \rightharpoonup v,\ m \to \infty$, причем $v \in \mathring{H}^1_{\mathrm{B}}(\Omega)$. Непрерывность естественного отображения $\mathring{H}^1_{\mathrm{B}}(\Omega) \to \mathrm{L}_{\mathrm{B}}(\Omega)$ влечет слабую сходимость

$$\nabla T_k w^m \rightharpoonup \nabla v \quad \text{в} \quad \mathrm{L}_{\mathrm{B}}(\Omega), \quad m \to \infty. \tag{6.41}$$

Пользуясь сходимостями (6.20), (6.33), для любого фиксированного $k>0$ устанавливаем
$$\nabla T_k w^m \to \nabla T_k w \quad \text{почти всюду в} \quad \Omega, \quad m\to\infty.$$
Отсюда, применяя лемму 4.4, имеем слабую сходимость
$$\nabla T_k w^m \rightharpoonup \nabla T_k w \quad \text{в} \quad \mathrm{L}_{\mathrm{B}}(\Omega), \quad m\to\infty. \tag{6.42}$$
Из (6.41), (6.42) следует равенство $v=T_k w\in \mathring{H}^1_{\mathrm{B}}(\Omega)$.

Шаг 7. Чтобы доказать неравенство (3.11ψ) возьмем функции $T\in\mathcal{F}$, $\xi\in C_0^\infty(\Omega)$ и применим пробную функцию $v=T(w^m-\xi)$ в тождестве (6.6). Получим
$$J=[\boldsymbol{a}_\psi(\boldsymbol{x},T_m w^m,\nabla w^m)\cdot\nabla T(w^m-\xi)]=-[\big(b^m(\boldsymbol{x},w^m)+B_0'(w^m)/m+A^m_{0\psi}\big)\,T(w^m-\xi)]=-I. \tag{6.43}$$
Левый интеграл можно записать в виде
$$J=[\boldsymbol{a}_\psi(\boldsymbol{x},T_m w^m,\nabla w^m)\cdot\nabla w^m T'(w^m-\xi)-\boldsymbol{a}_\psi(\boldsymbol{x},T_m w^m,\nabla w^m)\cdot\nabla\xi T'(w^m-\xi)]=J_1-J_2. \tag{6.44}$$
Из сходимостей $w^m\to w$, $T_m w^m\to w$, $\nabla w^m\to\nabla w$ почти всюду в Ω (см. (6.20), (6.33)), ввиду непрерывности функций $\boldsymbol{a}_\psi(\boldsymbol{x},s_0,\boldsymbol{s})$ по $s_0,\boldsymbol{s}$, $T'(r)$, имеем:
$$\boldsymbol{a}_\psi(\boldsymbol{x},T_m w^m,\nabla w^m)T'(w^m-\xi)\to\boldsymbol{a}_\psi(\boldsymbol{x},w,\nabla w)T'(w-\xi) \quad \text{почти всюду в} \quad \Omega, \quad m\to\infty.$$
Отсюда, по лемме Фату имеем:
$$[\boldsymbol{a}_\psi(\boldsymbol{x},w,\nabla w)\cdot\nabla w T'(w-\xi)d]\leqslant\lim_{m\to\infty}\inf J_1. \tag{6.45}$$
Из (6.22) следует ограниченность последовательности норм
$$\|\overline{\mathrm{B}}(\boldsymbol{a}_\psi(\boldsymbol{x},T_m w^m,\nabla w^m)T'(w^m-\xi))\|_1\leqslant$$
$$\leqslant C_{18}\|\overline{\mathrm{B}}(\boldsymbol{a}_\psi(\boldsymbol{x},T_m w^m,\nabla w^m))\chi(|w^m|\leqslant k+\|\xi\|_\infty)\|_1\leqslant C_{19}, \quad m=1,2,\ldots.$$
Применяя лемму 4.4, устанавливаем слабую сходимость:
$$\boldsymbol{a}_\psi(\boldsymbol{x},T_m w^m,\nabla w^m)T'(w^m-\xi)\rightharpoonup\boldsymbol{a}_\psi(\boldsymbol{x},w,\nabla w)T'(w-\xi) \quad \text{в} \quad L_{\overline{\mathrm{B}}}(\Omega), \quad m\to\infty.$$
Выполняя предельный переход в J_2 имеем:
$$\lim_{m\to\infty}J_2=[\boldsymbol{a}_\psi(\boldsymbol{x},w,\nabla w)\cdot\nabla\xi T'(w-\xi)]. \tag{6.46}$$
Интеграл I также разобьем на два слагаемых. Первый интеграл
$$I_1=[\big(b^m(\boldsymbol{x},w^m)+B_0'(w^m)/m\big)\,T(w^m-\xi)]$$
оценивается следующим образом. Рассмотрим возрастающую последовательность $\{K^l\}$ компактных подмножеств Ω таких, что $\bigcup\limits_{l=1}^{\infty}K^l=\Omega$. Пусть $\operatorname{supp}\xi\subset K^l$, $l\geqslant l_0$, $v^m=w^m-\xi$, $v=w-\xi$, $c^m(\boldsymbol{x},w^m)=b^m(\boldsymbol{x},w^m)+B_0'(w^m)/m$, тогда, учитывая (6.5), при $l\geqslant l_0$ имеем:
$$I_1=\int\limits_{\Omega\setminus K^l}c^m(\boldsymbol{x},w^m)T(w^m)d\boldsymbol{x}+\int\limits_{K^l}c^m(\boldsymbol{x},w^m)T(v^m)d\boldsymbol{x}\geqslant\int\limits_{K^l}c^m(\boldsymbol{x},w^m)T(v^m)d\boldsymbol{x}=\overline{I}_1.$$
Рассмотрим интеграл
$$\widetilde{I}_1=\int\limits_{K^l}(b_\psi(\boldsymbol{x},w)T(v)-c^m(\boldsymbol{x},w^m)T(v^m))d\boldsymbol{x}=\int\limits_{K^l}(b_\psi(\boldsymbol{x},w)-c^m(\boldsymbol{x},w^m))T(v)d\boldsymbol{x}+$$
$$+\int\limits_{K^l}c^m(\boldsymbol{x},w^m)(T(v)-T(v^m))d\boldsymbol{x}=\widetilde{I}_{11}+\widetilde{I}_{12}.$$

В силу сходимостей (6.34), (6.40) интеграл $\widetilde{I}_{11} \to 0$ при $m \to \infty$. Для $\widetilde{I}_{12}$ имеем:

$$\widetilde{I}_{12} = \int\limits_{\{K^l:|w^m|\geqslant L\}} c^m(\boldsymbol{x}, w^m)(T(v) - T(v^m))d\boldsymbol{x} + \int\limits_{\{K^l:|w^m|<L\}} c^m(\boldsymbol{x}, w^m)(T(v) - T(v^m))d\boldsymbol{x} = \\ = \widetilde{I}_{121} + \widetilde{I}_{122}.$$

В силу (6.36) выбором большого L получим неравенство $|\widetilde{I}_{121}| < \varepsilon$ (равномерно по m). А для фиксированного L, ввиду (6.13), применяя теорему Лебега находим, что $|\widetilde{I}_{122}| < \varepsilon$ при $m \geqslant m_0$.

Итак, $\widetilde{I}_1 \to 0$ при $m \to \infty$, поэтому

$$\int\limits_{K^l} b_\psi(\boldsymbol{x}, w)T(w - \xi)d\boldsymbol{x} = \lim_{m\to\infty} \overline{I}_1 \leqslant \lim_{m\to\infty} \inf I_1. \tag{6.47}$$

Переходя к пределу при $l \to \infty$, заменяем K_l на Ω.

Применяя (6.1), (6.2), пользуясь теоремой Лебега, выполняем предельный переход при $m \to \infty$ во втором интеграле, получаем

$$I_2 = [A^m_{0\psi}T(w^m - \xi)d] \to [A^0_{0\psi}T(w - \xi)]. \tag{6.48}$$

Соединяя (6.43) – (6.48) выводим (3.11ψ).

□

Пример 6.1. Рассмотрим уравнение

$$\sum_{i=1}^{n}(g_i(u - \psi)B'_i(u_{x_i} - \psi_{x_i}) + f_i(\boldsymbol{x}))_{x_i} - g_0(u - \psi)\varphi(\boldsymbol{x}) - f_0(\boldsymbol{x}) = 0 \tag{6.49}$$

с непрерывно дифференцируемыми N–функциями $B_1(z), \dots, B_n(z)$, удовлетворяющими Δ_2–условию, такими, что $B'_1(z), \dots, B'_n(z)$ строго монотонны при $z \geqslant 0$ и справедливо (2.11). Функции $g_i(z)$, $z \in \mathbb{R}$, $i = 0, \dots, n$, — неубывающие, непрерывные, кроме того $g_i(z)$, $i = 1, \dots, n$, липшецевы, положительные, ограничены снизу. Если $f_i(\boldsymbol{x}) \in L_{\overline{B}_i}(\Omega)$, $i = 1, 2, \dots, n$, $f_0(\boldsymbol{x}), \varphi(\boldsymbol{x}) \in L_1(\Omega)$, то для функций

$$a_i(\boldsymbol{x}, s_0, \boldsymbol{s}) = g_i(s_0 - \psi)B'_i(s_i - \psi_{x_i}) + f_i(\boldsymbol{x}),\ i = 1, 2, \dots, n, \quad a_0(\boldsymbol{x}, s_0) = g_0(s_0 - \psi)\varphi(\boldsymbol{x}) + f_0(\boldsymbol{x}),$$

выполнены условия (3.3)–(3.7), (3.9). Согласно теореме 3.1 существует решение задачи (6.49), (1.2).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ковалевский А. А.* Априорные свойства решений нелинейных уравнений с вырождающейся коэрцитивностью и L_1-данными// Совр. мат. Фундам. напр. — 2006. – *16*, — С. 47–67.
2. *Кожевникова Л. М., Хаджи А. А.* О решениях эллиптических уравнений с нестепенными нелинейностями в неограниченных областях// Вестн. Самарск. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. — 2015. — № 19. — С. 44–62.
3. *Кожевникова Л. М., Хаджи А. А.* Существование решений анизотропных эллиптических уравнений с нестепенными нелинейностями в неограниченных областях// Мат. сб. — 2015. — *206*, № 8. — С. 99–126.
4. *Королев А. Г.* Теоремы вложения анизотропных пространств Соболева—Орлича// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. мех. — 1983. — № 1. — С. 32–37.
5. *Кружков С. Н.* Квазилинейные уравнения первого порядка со многими независимыми переменными// Мат. сб. — 1970. — *81 (123)*, № 2. — С. 228–255.
6. *Лионс Ж. Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. — М.: Мир, 1972.
7. *Рутицкий Я. Б., Красносельский М. А.* Выпуклые функции и пространства Орлича. — М.: Физматлит, 1958.
8. *Aharouch L., Benkirane A., Rhoudaf M.* Strongly nonlinear elliptic variational unilateral problems in Orlicz space// Abstr. Appl. Anal. — 2006. — *2006*. — Article ID 46867; http://dx.doi.org/10.1155/AAA/2006/46867

9. *Aharouch L., Bennouna J., Touzani A.* Existence of renormalized solution of some elliptic problems in Orlicz spaces// Rev. Mat. Complut. — 2009. — *22*, № 1. — С. 91–110.
10. *Bendahmane M., Karlsen K.* Nonlinear anisotropic elliptic and parabolic equations in R^n with advection and lower order terms and locally integrable data// Potential Anal. — 2005. — *22*, № 3. — С. 207–227.
11. *Benilan P., Boccardo L., Galluet T., Pierre M., Vazquez J. L.* An L_1-theory of existence and uniqueness of solutions of nonlinear elliptic equations// Ann. Scu. Norm. Super. Pisa. Class. Sci. — 1995. — *22*, № 2. — С. 241–273.
12. *Benkirane A., Bennouna J.* Existence of entropy solutions for some elliptic problems involving derivatives of nonlinear terms in Orlicz spaces// Abstr. Appl. Anal. — 2002. — *7*, № 2. — С. 85–102.
13. *Boccardo L.* Some nonlinear Dirichlet problems in L_1 involving lower order terms in divergence form// Pitman Res. Notes Math. Ser. V. — 1996. — *350*. — С. 43–57.
14. *Boccardo L., Gallouet T.* Nonlinear elliptic equations with right-hand side measures// Commun. Partial Differ. Eqs. — 1992. — *17*, №№ 3–4. — С. 641–655.
15. *Boccardo L., Gallouet T., Marcellini P.* Anisotropic equations in L_1// Differ. Integral Eqs. — 1996. — *9*, № 1. — С. 209–212.
16. *Boccardo L., Gallouet T., Vazquez J. L.* Nonlinear elliptic equations in R^n without growth restrictions on the data// J. Differ. Eqs. — 1993. — *105*, № 2. — С. 334–363.
17. *Brezis H.* Semilinear equations in R_N without condition at infnity// Appl. Math. Optim. — 1984. — *12*, № 3. — С. 271–282.
18. *Browder F. E.* Pseudo-monotone operators and nonlinear elliptic boundary value problems on unbounded domains// Proc. Natl. Acad. Sci. USA. — 1977. — *74*, № 7. — С. 2659–2661.
19. *Gossez J. P.* Nonlinear elliptic boundary value problems for equations with rapidly (or slowly) increasing coefficients// Trans. Am. Math. Soc. — 1974. — *190*. — С. 163–206.
20. *Gwiazda P., Wittbold P., Wróblewska A., Zimmermann A.* Renormalized solutions of nonlinear elliptic problems in generalized Orlicz spaces/ Ph.D. programme: Mathematical methods in natural sciences. — 2011. — Preprint № 2011-013.

Л. М. Кожевникова
Стерлитамакский филиал Башкирского государственного университета;
Елабужский институт Казанского (Приволжского) федерального университета
E-mail: kosul@mail.ru

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 139 (2017). С. 39–43

УДК 517.926, 517.98

УСЛОВИЯ ОСЦИЛЛЯТОРНОСТИ И НЕОСЦИЛЛЯТОРНОСТИ ПОЛУЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

© 2017 г. **Л. К. КУСАИНОВА, Б. С. КОШКАРОВА**

Аннотация. В данной работе получены условия осцилляторности и неосцилляторности одного полулинейного дифференциального уравнения.

Ключевые слова: полулинейное дифференциальное уравнение, осцилляторность, неосцилляторность, вариационный метод.

AMS Subject Classification: 34C10

1. Введение. В данной работе рассматриваются условия осцилляторности и неосцилляторности полулинейного дифференциального уравнения

$$\Big(\rho(t)\left|y'(t)\right|^{p-2}y'(t)\Big)' + q(t)\left|y(t)\right|^{p-2}y(t) = 0, \quad t \geqslant a, \quad 1 < p < \infty,\ p \neq 2, \tag{1}$$

в случае, когда $q(\cdot)$ меняет знак в любой окрестности $+\infty$. Будем предполагать, что функция $q(\cdot)$ может быть представлена в виде $q = u - v$, где u, v — положительные и непрерывные на $\bar{I} = [a, \infty)$ функции, функция $\rho(t) > 0$ непрерывна на I и такова, что $\rho\left|y'\right|^{p-2}$ дифференцируема почти всюду в I для всех $y \in C^2(I)$.

Вопросы осцилляторности (неосцилляторности) уравнения (1) в случае $q > 0$ хорошо изучены (см. [4, 5]). Введем некоторые определения.

Под *решением* уравнения (1) в данной работе будем подразумевать всякое дважды дифференцируемое в I решение $y(t)$, для которого функция $\rho(t)\left|y'(t)\right|^{p-2}y(t)$ дифференцируема в I.

Решение $y(t)$ уравнения (1) называют *осцилляторным* на I, если найдется последовательность точек $x_k \xrightarrow[k\to\infty]{} \infty$, в которых $y(x_k) = 0$. Уравнение (1) называется *осцилляторным*, если всякое его решение осцилляторно.

Существуют различные методы исследования свойств осцилляторности (неосцилляторности) уравнений вида (1). Среди них отметим два основных метода: это так называемая «техника Риккати» и вариационный принцип (см. [2–5]).

Вариационный принцип основывается на следующей теореме.

Теорема 1 (см. [4])**.** *Уравнение* (1) *неосцилляторно тогда и только тогда, когда существует такое $T \in \mathbb{R}$, что для всех $T \leqslant c \leqslant d < \infty$ выполняется условие*

$$F(y, c, d) = \int\limits_c^d \big(\rho(t)|y'(t)|^p - q(t)|y(t)|^p\big)\,dt > 0$$

для любой нетривиальной функции $y \in \dot{W}_p^1(T, \infty)$.

Через $W_p^1(\Omega)$ обозначим пространство всех абсолютно непрерывных на отрезке $\Omega = [\Omega^-, \Omega^+]$ функций, для которых

$$\|f; W_p^1(\Omega)\| = \left(\int\limits_\Omega \big(|y'|^p + |y|^p\big)\,dt\right)^{\frac{1}{p}} < \infty,$$

ISSN 0233–6723

и положим $\dot{W}_p^1(\Omega) = \{y \in W_p^1(\Omega) : y(\Omega^-) = y(\Omega^+) = 0\}$.

2. Вспомогательные утверждения. На отрезке $[0, 1]$ имеет место известная оценка

$$\max_{t\in[0,1]} |z(t)| \leqslant A_0 \int\limits_0^1 \big(|z'| + |z|\big)\, dt. \tag{2}$$

Из (2) заменой переменной выводим, что для всех $y \in W_p^1(x, x+h)$ имеет место неравенство

$$\max_{t\in[x,x+h]} |y(t)| \leqslant A_0 \int\limits_x^{x+h} \big(|y'| + h^{-1}|y|\big)\, dt, \tag{3}$$

где A_0 — наилучшая постоянная в (2).

Лемма. *Пусть выполнено условие*

$$\left(\int\limits_x^{x+h} \rho^{-\frac{p'}{p}} dt\right)^{\frac{p}{p'}} \int\limits_x^{x+h} v dt \geqslant 1.$$

Тогда для всех $y \in W_p^1(x, x+h)$ справедлива оценка

$$h^{-1} \int\limits_x^{x+h} |y(t)| dt \leqslant 2^p \left(\int\limits_x^{x+h} \big(\rho(t)|y'|^p + v(t)|y|^p\big)\, dt\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int\limits_x^{x+h} \rho^{-\frac{p'}{p}} dt\right)^{\frac{1}{p'}}. \tag{4}$$

Доказательство. Можно считать, что

$$h^{-1} \int\limits_x^{x+h} |y| dt = 1,$$

и доказывать неравенство

$$1 \leqslant 2^p \int\limits_x^{x+h} \big(\rho(t)|y'|^p + v(t)|y|^p\big)\, dt \left(\int\limits_x^{x+h} \rho^{-\frac{p'}{p}}\right)^{\frac{p}{p'}}. \tag{5}$$

Оценка (5) нетривиальна, если только

$$\left(\int\limits_x^{x+h} \rho^{-\frac{p'}{p}}\right)^{\frac{p}{p'}} \int\limits_x^{x+h} \rho(t)|y'|^p dt < 2^{-p}. \tag{6}$$

Так как y непрерывна на $[x, x+h]$, то

$$1 = h^{-1} \int\limits_x^{x+h} |y(t)|^p dt = |y(t_0)|^p, \quad t_0 \in [x, x+h].$$

Из (6) следует, что для любой точки $t \in [x, x+h]$

$$|y(t) - y(t_0)| = \left|\int\limits_{t_0}^{t} y'(\xi) d\xi\right| \leqslant \int\limits_x^{x+h} |y'(\xi)| d\xi \leqslant \left(\int\limits_x^{x+h} \rho |y'(\xi)|^p d\xi\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int\limits_x^{x+h} \rho^{-\frac{p'}{p}} d\xi\right)^{\frac{1}{p'}} < 2^{-1}.$$

Поэтому для всех $t \in [x, x+h]$ имеем

$$\big|y(t)\big| = \Big|y(t_0) - (y(t_0) - y(t))\Big| \geqslant \Big||y(t_0)| - |y(t_0) - y(t)|\Big| \geqslant \frac{1}{2},$$

откуда следует

$$\left(\int\limits_x^{x+h} \rho^{-\frac{p'}{p}} d\xi\right)^{\frac{p}{p'}} \int\limits_x^{x+h} v(t)|y(t)|^p dt \geqslant \frac{1}{2^p} \left(\int\limits_x^{x+h} \rho^{-\frac{p'}{p}} d\xi\right)^{\frac{p}{p'}} \int\limits_x^{x+h} v(t) dt \geqslant \frac{1}{2^p}.$$

Лемма доказана. □

Весовую пару (ρ, v) на $\bar{I}$ назовем *допустимой*, если

$$h^*(x) = h^*(x|\rho, v) = \sup\left\{h > 0 : \left(\int\limits_x^{x+h} \rho^{1-p'} dt\right)^{\frac{p}{p'}} \int\limits_x^{x+h} v dt \leqslant 1\right\} < \infty$$

для всех $x \geqslant a$.

Пусть $\Delta^*(x) = [x, x + h^*(x)]$ $(\Delta^*(x) < \infty)$. Тогда имеет место равенство

$$\left(\int\limits_{\Delta^*(x)} \rho^{1-p'}\right)^{\frac{p'}{p}} \int\limits_{\Delta^*(x)} v = 1, \tag{7}$$

которое следует из абсолютной непрерывности интеграла Лебега.

3. Основные результаты.

Теорема 2. *Пусть (ρ, v) — допустимая пара на $\bar{I}$. Если существует такое $T > a$, что для всех $x \geqslant T$*

$$\int\limits_{\Delta^*(x)} u(t) dt < \frac{1}{2^p(1 + 2^p)A_0^p} \int\limits_{\Delta^*(x)} v(t) dt, \tag{8}$$

то уравнение (1) *неосцилляторно.*

Доказательство. Для того чтобы уравнение (1) было неосцилляторным, в силу теоремы 1 нужно показать следующее: существует такое $T > a$, что для любых $c < d$ $(c \geqslant T)$ и любой функции $y \in \dot{W}_p^1(c, d)$

$$\int\limits_c^d \left(\rho(t)|y'(t)^p + v(t)|y|^p\right) dt > \int\limits_c^d u(t)|y|^p dt.$$

Поскольку $y(d) = 0$, то можно считать $y(t) = 0$ для $t \geqslant d$.

Возьмем систему покрывающих $[c, d]$ отрезков $\{\Delta_k\}_{k=1}^N$, $N \leqslant \infty$, где $\Delta_k = [x_k, x_k + h_k]$, $x_{k+1} = x_k + h_k$, $x_1 = c$, $h_k = h^*(x_k)$. Из (3)–(5), (7), (8) следует

$$\int\limits_c^d u(t)|y|^p dt \leqslant A_0^p \sum_{k=1}^N \int\limits_{\Delta_k} u(t) dt \left(\int\limits_{\Delta_k} \left(|y'| + h^{-1}|y|\right) dt\right)^p \leqslant$$

$$\leqslant A_0^p \sum_{k=1}^N \int\limits_{\Delta_k} u(t) dt \left[\left(\int\limits_{\Delta_k} \rho^{-\frac{p'}{p}}\right)^{\frac{1}{p'}} \left(\int\limits_{\Delta_k} \rho(t)|y|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} + \right.$$

$$\left. + 2\left(\int\limits_{\Delta_k} \rho^{-\frac{p'}{p}}\right)^{\frac{1}{p'}} \left(\int\limits_{\Delta_k} \left(\rho(t)|y'|^p + v(t)|y|^p\right) dt\right)^{\frac{1}{p}}\right]^p \leqslant$$

$$\leqslant (1+2^p)(2A_0)^p \sup_{x\geqslant T} \int\limits_{\Delta^*(x)} u(t)dt \left(\int\limits_{\Delta_k^*} v(t)dt\right)^{-1} \int\limits_c^d \left(\rho(t)|y'|^p + v(t)|y|^p\right) dt <$$

$$< \int\limits_c^d \left(\rho(t)|y'|^p + v(t)|y|^p\right) dt.$$

Теорема 2 доказана. □

Положим

$$\Omega^*(x) = \Big[x + \tau h^*(x),\ x + (1-\tau)h^*(x)\Big], \quad \tau = \frac{1}{4}.$$

Теорема 3. *Пусть* (ρ, v) *— допустимая пара на* $\bar{I}$. *Уравнение* (1) *является осцилляторным, если существует последовательность точек* $x_k \xrightarrow[k\to\infty]{} \infty$, *удовлетворяющая следующим условиям*:

$$\begin{aligned} &(1) \quad \left(\int\limits_{\Delta_k} \rho^{-\frac{p'}{p}} dt\right)^{\frac{1}{p'}} \left(\int\limits_{\Delta_k} \rho(t)dt\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant C_\rho h^*(x_k), \\ &(2) \quad \int\limits_{\Omega^*(x_k)} u(t)dt \geqslant (1 + (2\pi C_\rho)^p) \int\limits_{\Delta^*(x_k)} v(t)dt. \end{aligned} \tag{9}$$

Доказательство. Согласно теореме 1 уравнение (1) осцилляторно, если для любого $T > 0$ найдется такая функция $y \in \dot{W}_p^1(c,d)$, $T < c < d < \infty$, что

$$\int\limits_c^d |y|^p u(t)dt \geqslant \int\limits_c^d \left(\rho(t)|y'|^p + v(t)|y|^p\right) dt.$$

Возьмем

$$\theta(t) = \frac{\pi}{2}\int\limits_0^t \sin(\pi\xi)d\xi.$$

Пусть $\Delta_k = [x_k, x_k + h_k]$, $h_k = h^*(x_k)$ и

$$y_k(t) = \begin{cases} \theta\left(\dfrac{t-\Delta_k^-}{\tau h_k}\right), & \Delta_k^- \leqslant t \leqslant \Omega_k^-, \\ 1, & t \in \Omega_k, \\ \theta\left(\dfrac{\Delta_k^+ - t}{\tau h_k}\right), & \Omega_k^+ \leqslant t \leqslant \Delta_k^+. \end{cases}$$

Тогда

$$y_k'(t) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2\tau h_k}\sin\dfrac{t-\Delta_k^-}{\tau h_k}, & \Delta_k^- \leqslant t \leqslant \Omega_k^-, \\ 0, & t \in \Omega_k, \\ -\dfrac{\pi}{2\tau h_k}\sin\dfrac{\Delta_k^+ - t}{\tau h_k}, & \Omega_k^+ \leqslant t \leqslant \Delta_k^+. \end{cases}$$

Поэтому $|y'(t)| \leqslant 2\pi/h_k$. Мы видим, что $y_k \in \dot{W}_p^1(\Delta_k)$ и в силу условия (2) теоремы имеем

$$\frac{\int\limits_{\Delta_k} u(t)|y_k|^p dt}{\int\limits_{\Delta_k} \left(\rho(t)|y_k'(t)|^p + v(t)|y_k(t)|^p\right) dt} \geqslant \left(\int\limits_{\Delta_k} (\rho(t))^{-\frac{p'}{p}} dt\right)^{\frac{p}{p'}} \int\limits_{\Omega_k} u(t)dt \cdot \frac{1}{\frac{\pi}{2\tau}C_\rho + 1} = 1.$$

Поскольку $x_k \to \infty$, то для любого $T > 0$ возьмем $c = x_k$, $d = x_k + h^*(x_k)$, где $x_k > T$. □

Замечание 1. Условие теоремы 2 эквивалентно следующему:

$$\lim_{x\to\infty} \sup \frac{\int\limits_{\Delta^*(x)} u(t)dt}{\int\limits_{\Delta^*(x)} v(t)dt} < \frac{1}{2^p(1+2^p)A_0^p}.$$

Замечание 2. Пусть ρ — положительная и непрерывная на всей вещественной оси функция. Если ρ удовлетворяет условию (A_p), то в условии (9) теоремы 3 можно взять $C_\rho = \|\rho\|_{A_p}$ (см. [1]). Например, $\rho(x) = x^\alpha$, $-1 < \alpha < p - 1$, удовлетворяет условию (9) на $\bar{I} = [a, \infty)$, $a > 0$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Дынькин Е. М., Осиленкер Б. П.* Весовые оценки сингулярных интегралов и их применения// Итоги науки и техн. Мат. анал. — М.: ВИНИТИ, 1983. — *21*. — С.42–129.
2. *Došlý O.* Methods of oscillation theory of half–liner second order differential equations// Czechoslovak Math. J. — 2000. — *50* (125). — С. 657–671.
3. *Došlý O.* Qualitative theory of half-linear second-order differential equations// Math. Bohem. — 2002. — *127*. — С. 181–185.
4. *Došlý O., Rehak P.* Half-linear differential equations. — Amsterdam: Elsevier, 2005.
5. *Rakhimova S.* The oscillation properties for the solutions of half-linear second-order and higher order differential equations/ Preprint. — Padova: Universita degli Studi di Padova, 2011.

Л. К. Кусаинова
Евразийский национальный университет им. Л. Н. Гумилева, Астана, Казахстан
E-mail: leili2006@mail.ru

Б. С. Кошкарова
Евразийский национальный университет им. Л. Н. Гумилева, Астана, Казахстан
E-mail: b-koshkarova@yandex.kz

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 139 (2017). С. 44–58

УДК 517.954, 517.956.45, 517.958:531.72

СУЩЕСТВОВАНИЕ СЛАБОГО РЕШЕНИЯ ЭЛЛИПТИКО-ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ПЕРЕМЕННЫМ ПОРЯДКОМ НЕЛИНЕЙНОСТИ

© 2017 г. **Ф. Х. МУКМИНОВ, Э. Р. АНДРИЯНОВА**

Аннотация. Рассматривается уравнение с переменными нелинейностями вида $|u|^{p(x)}$, в котором параболический член может обращаться в нуль, т.е. в соответствующей области параболическое уравнение превращается в «эллиптическое». При слабом условии монотонности (нестрогое неравенство) доказывается существование решения первой смешанной задачи в цилиндре с ограниченным основанием.

Ключевые слова: слабое решение, эллиптико-параболическое уравнение, переменные нелинейности, существование решения.

AMS Subject Classification: 35K20, 35D30, 35K55, 35K65

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение

Пусть Ω — ограниченная область пространства $\mathbb{R}^n = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n)\}$, $n \geqslant 1$. В цилиндрической области $D^T = (0,T) \times \Omega$ рассматривается первая смешанная задача для уравнения вида

$$(\beta(x,u))'_t = \operatorname{div} a\bigl(x, \beta(x,u), \nabla u\bigr) + b\bigl(x, \beta(x,u)\bigr), \quad a = (a_1, \dots, a_n), \tag{1}$$

$$u(t,x)\Big|_S = 0, \quad S = \{t > 0\} \times \partial\Omega; \tag{2}$$

$$\beta\bigl(x, u(0,x)\bigr) = \beta\bigl(x, u_0(x)\bigr) \in L_1(\Omega), \tag{3}$$

где $\beta(x,u)$ — неубывающая и непрерывная по u функция, измеримая по x. Точные условия на функцию $\beta(x,u)$ приведены ниже. Отметим лишь, что допустима, например, функция

$$\beta(x,u) = f(x)|u|^{q(x)-2}u, \quad f \in L_1(\Omega),$$

где $q(x)$, $1 < q(x) < \infty$, — ограниченная измеримая функция. В том случае, когда функция $\beta(x,u)$ строго возрастает, любая функция $a(x,u,y)$ может быть представлена в виде $a(x,u,y) = \widehat{a}\bigl(x, \beta(x,u), y\bigr)$.

Работа Ф. Х. Мукминова выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект №15-01-07920-а).

Модельным примером уравнений (1) с переменным порядком нелинейности служит уравнение вида
$$\big(\beta(u)\big)_t = \sum_{i=1}^{n} \Big(|u_{x_i}|^{p_i(x)-2}u_{x_i} + \Psi_i(x)\Big)_{x_i} + \Phi(x),$$
где $\beta(u)$ — неубывающая непрерывная функция,
$$0 < p_- \leqslant p_i(x) \leqslant p^+, \quad x \in \Omega.$$

В настоящей работе исследуется существование решения задачи (1)–(3) с переменными нелинейностями и условием монотонности в виде нестрогого неравенства.

Вопросы существования и единственности решения параболических уравнений с двойной нелинейностью уже более полувека привлекают внимание математиков. В [21] впервые было доказано существование слабого решения уравнения с двойной нелинейностью
$$\big(\beta(u)\big)_t = \big(|u|^{\alpha-2}u\big)_t = \sum_{i=1}^{n} \Big(|u_{x_i}|^{p-2}u_{x_i}\Big)_{x_i} + f(t,x), \quad \alpha, p > 1, \quad \nabla u_0(x) \in L_p,$$
в ограниченной области $D^T = (0,T)\times\Omega$.

Существование слабого решения уравнения $(\beta(u))'_t = \operatorname{div} a\big(\beta(u), \nabla u\big)$ (и систем таких уравнений) и его единственность в предположении $(\beta)'_t \in L_1(D^T)$ доказаны в [10, 16]. В первой из этих работ рассматриваются степенные нелинейности, во второй — нестепенные нелинейности, определяемые N-функциями. Требование $(\beta)'_t \in L_1(D^T)$ было ослаблено до $\beta \in L_1(D^T)$ в [18] при доказательстве единственности решения. В этой работе Ф. Отто показано, что в методе удвоения переменных, предложенном С. Н. Кружковым (см. [6]), достаточно удвоения только переменной t. По сути, в ней разработана техника, которая позже стала использоваться в исследованиях ренормализованных решений параболических уравнений.

В [13] показана необходимость расширения понятия решения в случае уравнения $\Delta_p u = F(x,u)$ с L_1-данными: $\sup\limits_{|u|<c} F(x,u) \in L_{1,\mathrm{loc}}(\Omega)$, и доказаны существование и единственность энтропийного решения задачи Дирихле для эллиптического уравнения. Авторы [13] указывают, что вместо энтропийного решения, введенного впервые С. Н. Кружковым (см. [6]0 для уравнений первого порядка, можно рассматривать также ренормализованные решения.

В [11] доказаны существование и единственность ренормализованного решения уравнения $u_t - \operatorname{div} a\big(t,x,\nabla u\big) = f$. В [20] для этого же уравнения доказаны существование и единственность энтропийного решения и показана его эквивалентность ренормализованному решению.

Существенно более сильное утверждение — единственность ренормализованного решения эллиптико-параболической задачи для уравнения со степенными нелинейностями $(\beta(u))'_t = \operatorname{div} a(u, \nabla u)$ — сформулировано в [14], однако в доказательстве имеется существенный пробел. Доказательство использует метод удвоения всех переменных, предложенный С. Н. Кружковым в [6].

В [3] доказаны теоремы существования и единственности слабого решения первой смешанной задачи для параболических уравнений вида (1) в частном случае $\beta = u$, $a = u^{\gamma(t,x)}\nabla u$. Единственность ренормализованного решения первой смешанной задачи в ограниченной области для изотропного уравнения (1) с нестепенными нелинейностями доказана в [22] при сильных ограничениях
$$0 < c < \beta'_u < C(K), \quad \nabla_x \beta'_u < C(K), \quad |u| < K,$$
называемых ограничениями Редвана. При тех же предположениях в [23] доказано существование ренормализованного решения. Существование и единственность ренормализованного решения первой смешанной задачи в ограниченной области для уравнения (1) с $\beta = u$ и переменными нелинейностями доказана в [12, 25].

В [9], [17] доказывается существование ренормализованных решений параболических уравнений с нестепенными нелинейностями при условии Редвана. В [15] доказывается существование ренормализованного решения параболического уравнения с $\beta = u$ в пространстве Музилака—Орлича.

В [24] доказывается существование слабого решения параболического уравнения с $\beta = u$ и переменными нелинейностями при условии монотонности в виде строгого неравенства.

Отметим еще работу [19] в которой доказано, что слабые пределы приближенных энтропийных решений для одномерного вырождающегося параболического уравнения также являются энтропийными решениями.

В [2] доказаны существование решения для уравнения (1) с нестепенными нелинейностями в неограниченной области, принцип максимума и степенные оценки решения снизу и сверху, характеризующие степенное убывание решения при $t \to \infty$. Исследованию поведения решения при $t \to \infty$ смешанной задачи для анизотропных параболических уравнений с двойной нелинейностью посвящена работа [5]. В случае степенных нелинейностей точные оценки скорости убывания решения анизотропного параболического уравнения с двойной нелинейностью установлены в [4].

2. Функциональные пространства и предположения

Введем следующие обозначения

$$\langle f(t)\rangle = \int\limits_{\Omega} f(t,x)dx, \quad [f] = \int\limits_{D^T} f(t,x)dxdt, \quad f(\varphi) = (f,\varphi)_{\Omega}.$$

В последнем равенстве записано значение обобщенной функции f на элементе φ.

Все постоянные, встречающиеся в работе, положительны (или, в оговоренных случаях, неотрицательны).

Будем предполагать, что область Ω имеет липшицеву границу. Через $L_{p(\cdot)}(Q)$ обозначим пространство Орлича

$$L_{p(\cdot)}(Q) = \left\{ u : \int\limits_{Q} |u(x)|^{p(x)}dx < \infty \right\},$$

соответствующее функции $p(x)$, $1 < p_- \leqslant p(x) \leqslant p^+$ с нормой Люксембурга

$$\|u\|_{p(\cdot),Q} = \inf \left\{ k > 0 : \int\limits_{Q} \left| \frac{u(x)}{k} \right|^{p(x)} dx \leqslant 1 \right\}.$$

Ниже в качестве Q могут выступать области Ω, D^T и другие, причем индекс $Q = \Omega$ может быть опущен. Будут рассматриваться только функции $p(x)$, удовлетворяющие условию

$$|p(x) - p(y)| \leqslant \frac{C}{-\ln|x-y|} \tag{4}$$

при $|x-y| \leqslant 1/2$, $x, y \in \overline{\Omega}$. При таком условии имеет место сходимость осреднений (см. [1]): если функция $f \in L_{p(\cdot)}(Q)$ продолжена нулем вне ограниченной области Q и

$$f_{\rho_m}(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(y)\rho_m(x-y)dy,$$

то $f_{\rho_m} \to f$ в пространстве $L_{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ при $m \to \infty$. Здесь $\rho_m = m^n\rho(m|x|)$ — ядро осреднения. Сходимость имеет место и для осреднений Стеклова: $f_h \to f$ в пространстве $L_{p(\cdot)}(D^T)$ при $h \to 0$,

$$f_h(t,x) = \frac{1}{h}\int\limits_{t}^{t+h} f(\tau,x)d\tau.$$

Определим анизотропное пространство Соболева—Орлича $\mathring{W}^1_{\mathbf{p}(\cdot)}(\Omega)$ как пополнение $C_0^1(\Omega)$ по норме

$$\|u\|_{W^1_{\mathbf{p}(\cdot)}(\Omega)} = \sum_{i=1}^{n} \|u_{x_i}\|_{p_i(\cdot),\Omega},$$

где функции $p_i(x)$, $x \in \overline{\Omega}$, удовлетворяют условию (4). Функции $\overline{p}_i(x)$, обдадающие свойством

$$\frac{1}{p_i} + \frac{1}{\overline{p}_i} = 1,$$

также удовлетворяют условию (4).

Пространство $\mathring{W}^1_{\mathbf{p}(\cdot)}(D^T)$ определяется как пополнение $C^1_0(D^{T+1}_{-1})$, $D^b_a = (a,b) \times \Omega$, по норме

$$\|u\|_{W^1_{\mathbf{p}(\cdot)}(D^T)} = \sum_{i=1}^n \|u_{x_i}\|_{p_i(\cdot),D^T}.$$

Пусть $X = \{\nabla u \mid u \in \mathring{W}^1_{\mathbf{p}}(D^T)\}$ — пространство с нормой

$$\|u\|_X = \|u\|_{W^1_{\mathbf{p}(\cdot)}(D^T)}.$$

Пространство $\prod\limits_{i=1}^n L_{\overline{p}_i(\cdot)}(D^T)$ обозначим через X'. Элементы $v \in X'$ действуют как функционалы на элементы $u \in \mathring{W}^1_{\mathbf{p}}(D^T)$ по формуле $(v,u)_{D^T} = [v \cdot \nabla u]$.

Определим еще пространство

$$V(D^T) = L_{p_-}(D^T) \cap \mathring{W}^1_{\mathbf{p}(\cdot)}(D^T)$$

с нормой

$$\|u\|_V = \|\nabla u\|_{\mathbf{p}(\cdot)} + \|u\|_{p_-}.$$

Приведем условия на функции, входящие в уравнение (1). Функция $\beta(x,r)$, $\beta(x,0) = 0$, удовлетворяет условию Каратеодори, не убывает по r и при любом $r \in \mathbb{R}$

$$\beta(x,r) \in L_1(\Omega). \tag{5}$$

Функции $a_i(x,u,y), b(x,u)$ непрерывны по $u \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}^n$ и измеримы по $x \in \Omega$. Будем предполагать, что измеримая начальная функция u_0 такова, что $\beta(x,u_0) \in L_1(\Omega)$ и при любом $\delta > 0$ найдется такая функция $v \in C^1_0(\Omega)$, что

$$\langle|\beta(x,u_0) - \beta(x,v)|\rangle < \delta.$$

Положим

$$B(x,r) = \beta(x,r)r - \Phi(x,r), \quad \Phi(x,r) = \int\limits_0^r \beta(x,s)ds,$$
$$B(x,r) = \Psi(x,\beta(x,r)); \qquad \Psi(x,r) = \sup_s\{sr - \Phi(x,s)\}.$$

Поскольку $\beta(x,r)$ — неубывающая по r функция, то Φ и Ψ — выпуклые функции при фиксированных x. Интегрированием по частям устанавливается формула

$$B(x,r) = \int\limits_0^r s d_s \beta(x,s),$$

из которой следует, что $B(x,r) \in L_1(\Omega)$ при фиксированных r, и

$$B(x,r) - B(x,r_0) \geqslant (\beta(x,r) - \beta(x,r_0))r_0. \tag{6}$$

Условие монотонности записывается в следующем виде:

$$\big(a(x,r,y) - a(x,r,z)\big) \cdot (y - z) \geqslant 0, \quad y,z \in \mathbb{R}^n. \tag{7}$$

Положим

$$S(x,y) = \sum_{i=1}^n |y_i|^{p_i(x)}, \quad M(x,r,y) = \Big|a\big(x,\beta(x,r),y\big) \cdot y\Big|.$$

Пусть существуют такие число $C > 0$, функция $F(x) \in L_1(\Omega)$ и невозрастающая ограниченная функция $\alpha(r) \xrightarrow[r\to+\infty]{} 0$, что

$$\Big|a_j\big(x, \beta(x,r), y\big)\Big|^{\overline{p}_j(x)} \leqslant C\Big(F(x) + \alpha(|r|)B(x,r) + S(x,y)\Big) \tag{8}$$

при всех $r \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}^n$, $x \in \Omega$. Наложим условие коэрцитивности:

$$M(x,r,y) \geqslant \delta_0 S(x,y) - C(F(x) + B(x,r)). \tag{9}$$

Пусть выполнено следующее неравенство:

$$\big|b(x,r,y)\big|^{\overline{p}_-} \leqslant C\Big(\alpha(|r|)B(x,r) + F(x)\Big). \tag{10}$$

3. Основной результат

Определение 1. *Слабым решением* задачи (1)–(3) называется такая функция $u \in V(D^T)$, что $\beta(x,u) \in L_1(D^T)$, $b(x,u,\nabla u) \in L_1(D^T)$, $a(x,u,\nabla u) \in X'$, удовлетворяющая при $\varphi \in C_0^\infty(D_{-1}^T)$ равенству

$$\left[\big(\beta(x,u_0) - \beta(x,u)\big)\varphi_t + \sum_{i=1}^n a_i\big(x, \beta(x,u), \nabla u\big)D_i\right] + \Big[b\big(x, \beta(x,u)\big)\varphi\Big] = 0. \tag{11}$$

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* (5), (7)–(10), $B(x,u_0) \in L_1(\Omega)$. *Тогда существует такое слабое решение задачи* (1)–(3), *что*

$$\big\langle B(x,u(t,x))bbb\rangle \leqslant C, \quad t \in [0,T].$$

Следующая лемма использует идею работы [18].

Лемма 1. *Пусть $\beta_m(x,r)$ — каратеодориева функция, неубывающая по r, и измеримые функции $v, v_0 : \Omega \to \mathbb{R}$ таковы, что $\beta_m(x,v) \in L_1(D^T)$, $\beta_m(x,v_0) \in L_1(\Omega)$. Пусть $w \in X' + L_1(D^T)$ и*

$$\Big[\xi_t\big(\beta_m(x,v) - \beta_m(x,v_0)\big)\Big] + (w,\xi)_{D^T} = 0$$

при всех $\xi \in C_0^\infty((-1,T)\times\Omega)$. Тогда

$$-\Big(\beta_m(x,v)_t, h(x,v)\varphi\Big)_{D^T} = \left[\varphi_t \int_{v_0}^{v} h(x,r)\,d\beta_m(x,r)\right] \tag{12}$$

при всех ограниченных $h(x,s)$, монотонных и липшицевых по s и удовлетворяющих условию $\nabla h(x,v) \in X$, и $\varphi \in C_0^\infty((-1,T)\times\mathbb{R}^n)$ (либо $h = h(s) \in \mathrm{Lip}_0\,\mathbb{R}$ и $\nabla(h(v)\varphi) \in X$ при всех $\varphi \in C_0^\infty((-1,T)\times\Omega)$).

Доказательство приведено в разделе 5.

Обычно формулу (12), в частной форме установленную впервые в [10], называют «формулой интегрирования по частям» и доказывают только для функций $h = h(v)$.

4. Существование слабого решения

Решение задачи (1)–(3) будем строить как предел решений уравнений, полученных дискретизацией уравнения (1) по переменной t.

Выберем целое $m > 0$. Пусть $h = T/m$; положим

$$\partial_t^{-h}\beta(x,u(t,x)) = \frac{\beta(x,u(t,x)) - \beta(x,u(t-h,x))}{h}.$$

Имеем эллиптическое уравнение

$$\partial_t^{-h}\beta(x,u(t)) = \operatorname{div}\Big(a\big(x,\beta(x,u(t-h,x))\big), \nabla u(t)\Big) + b\big(x,\beta(x,u(t-h,x))\big), \tag{13}$$

которое решается последовательно на интервалах $((k-1)h, kh]$, $k = 1, 2, \ldots, m$, с начальным условием

$$u(t,x) = u_{0m}(x), \quad t \in (-h, 0]. \tag{14}$$

Начальные функции берутся гладкие, $u_{0m}(x) \in C_0^\infty(\Omega)$, чтобы $\langle B(x, u_{0m}(x))\rangle \to \langle B(x, u_0(x))\rangle$ при $m \to \infty$.

Выберем последовательность $w_j \in C_0^\infty(\Omega)$ линейно независимых функций, линейная оболочка которых плотна в $\mathring{W}^1_{\mathbf{p}(\cdot)}(\Omega)$. Галеркинские приближения к решению задачи (13), (14) будем искать в виде

$$u_m(t,x) = \sum_{j=1}^m c_{mj}(t) w_j(x),$$

где функции $c_{mj}(t)$ постоянны на интервалах $((k-1)h, kh]$ и определяются индуктивно из уравнений для каждого $j = 1, 2, \ldots, m$:

$$J_j(u_m(t)) := \langle \partial_t^{-h} \beta(x, u_m(t)) w_j + a\bigl(x, \beta_{mh}, \nabla u_m(t)\bigr) \cdot \nabla w_j - b(x, \beta_{mh}) w_j \rangle = 0. \tag{15}$$

Здесь используется обозначение

$$\beta_{mh}(t,x) = \beta(x, u_m(t-h,x)), \quad u_m(t,x) = u_{0m}(x), \quad t \leqslant 0.$$

Пусть функции $c_{mj}(t)$ уже определены на отрезке $([0, (k-1)h]$. Докажем, что числа $d_j = c_{mj}(t)$, $j = 1, 2, \ldots, m$, $t \in ((k-1)h, kh]$, определяются из уравнений (15) при фиксированном m. Определим отображение $P : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ формулами $P_j(d) = J_j(u_m(t))$. Тогда задача отыскания чисел d_j сводится к решению уравнения $P(d) = 0$. Существование решения последнего уравнения следует из [8, гл. 1, лемма 4.3], поскольку ниже будет установлено неравенство $(P(d), d) > 0$ при достаточно больших $|d|$. Имеем

$$(P(d), d) = \sum_{j=1}^m J_j(u_m(t)) d_j = \Bigl\langle \partial_t^{-h} \beta(x, u_m(t)) u_m(t) + a\bigl(x, \beta_{mh}, \nabla u_m(t)\bigr) \cdot \nabla u_m(t) - b(x, \beta_{mh}) u_m(t) \Bigr\rangle.$$

Воспользовавшись неравенством (9), получим

$$\bigl\langle a\bigl(x, \beta_{mh}, \nabla u_m(t)\bigr) \cdot \nabla u_m(t) \bigr\rangle \geqslant \bigl\langle \delta_0 S\bigl(x, \nabla u_m(t)\bigr) - C\bigl(F(x) + B(x, u_m(t-h,x))\bigr) \bigr\rangle. \tag{16}$$

Поскольку $u_m(t-h,x)$ не зависит от d при $t \in ((k-1)h, kh]$, то $\langle B(x, u_m(t-h,x))\rangle = C(m,k)$. С помощью неравенства Фридрихса и (10) устанавливаем оценку

$$\begin{aligned} \bigl\langle |u_m(t) b(x, \beta_{mh})| \bigr\rangle &\leqslant \bigl\langle |\varepsilon u_m|^{p_-} + |b(x, \beta_{mh})/\varepsilon|^{\overline{p}_-} \bigr\rangle \leqslant \\ &\leqslant \bigl\langle c_\Omega |\varepsilon \nabla u_m|^{p_-} + C_\varepsilon\bigl(F(x) + B(x, u_m(t-h,x))\bigr) \bigr\rangle \leqslant \\ &\leqslant \Bigl\langle \frac{\delta_0}{2} S(x, \nabla u_m(t)) + C B(x, u_m(t-h,x)) \Bigr\rangle + C. \end{aligned} \tag{17}$$

В последнем неравенстве выбрано достаточно малое ε. Оценим снизу параболический член с помощью неравенства (6):

$$\bigl\langle u_m \partial_t^{-h} \beta(x, u_m(t)) \bigr\rangle \geqslant \Bigl\langle \bigl(B(x, u_m(t)) - B(x, u_m(t-h))\bigr)/h \Bigr\rangle. \tag{18}$$

Пользуясь (16), (17), (18), устанавливаем неравенство

$$(P(d), d) \geqslant \Bigl\langle \delta_0 S(x, u_m(t))/2 + B(x, u_m(t))/h \Bigr\rangle - C(m,k) > 0.$$

Последнее неравенство выполнено при достаточно больших d, поскольку $\lim\limits_{d \to \infty} \langle S(x, u_m(t))\rangle = \infty$.

После умножения уравнений (15) на $c_{mj}(t)$, суммирования и интегрирования, будем иметь

$$\int_0^\tau \Bigl\langle u_m \partial_t^{-h} \beta(x, u_m(t)) + a\bigl(x, \beta_{mh}, \nabla u_m(t)\bigr) \cdot \nabla u_m(t) - b(x, \beta_{mh}) u_m(t) \Bigr\rangle dt = 0. \tag{19}$$

С помощью неравенства (18) устанавливаем, что

$$\int_0^\tau \Big\langle u_m \partial_t^{-h} \beta(x, u_m(t)) \Big\rangle dt \geqslant \left\langle \frac{1}{h} \int_0^\tau \Big(B(x, u_m(t)) - B(x, u_m(t-h)) \Big) dt \right\rangle =$$
$$= \left\langle \frac{1}{h} \int_{\tau-h}^{\tau} B(x, u_m(t)) dt - B(x, u_{0m}) \right\rangle. \quad (20)$$

Пользуясь (16),(17), (20), из (19) выводим неравенство

$$\left\langle \frac{1}{h} \int_{\tau-h}^{\tau} B(x, u_m(t)) dt \right\rangle + \frac{\delta_0}{2} \int_0^\tau \Big\langle S(x, \nabla u_m(t)) \Big\rangle dt \leqslant$$
$$\leqslant C \int_0^\tau \Big\langle B(x, u_m(t-h)) \Big\rangle dt + C\Big(T + \big\langle B(x, u_0) \big\rangle \Big). \quad (21)$$

Поскольку функция $B(x, u_m(t))$ кусочно постоянна по времени, по лемме Гронуолла при достаточно больших m (и малых h) устанавливаем неравенство

$$\max_{[0,T]} \big\langle B(x, u_m(t)) \big\rangle + \big[S(x, \nabla u_m) \big] \leqslant C. \quad (22)$$

Отсюда следует ограниченность последовательности u_m в пространстве $\mathring{W}^1_{\mathbf{p}(\cdot)}(D^T)$. Неравенство Фридрихса $||u||_{p_-} \leqslant C_\Omega ||\nabla u||_{p_-}$ влечет также ограниченность последовательности u_m в пространстве $Lp_-(D^T)$.

Неравенство (22) при помощи условия (8) позволяет установить ограниченность последовательности $a(x, \beta_{mh}, \nabla u_m)$ в пространстве X'. Отсюда следуют сходимости при $m \to \infty$ (по подпоследовательности):

$$a_i(x, \beta_{mh}, \nabla u_m(t)) \to w_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \quad (23)$$

слабо в $L_{\overline{p}_i(\cdot)}(D^T)$.

Далее, как и в [10], устанавливается компактность последовательности $\beta(x, u_m(t))$ в пространстве $L_1(D^T)$. Неравенство (22) позволяет выбрать подпоследовательность $u_m \to u$, слабо сходящуюся в пространствах $\mathring{W}^1_{\mathbf{p}(\cdot)}(D^T)$ и $L_{p_-}(D^T)$ при $m \to \infty$ (индекс подпоследовательности будем опускать).

Лемма 2 (см. [10])**.** *Пусть последовательность u_m сходится к u слабо в $L_1([0,T]; W^1_1(\Omega))$ и*

$$\int_\Omega B(x, u_m(t)) dx \leqslant c, \quad t \in (0,T), \quad m = 1, 2, \ldots;$$
$$\int_0^{T-\mu} \int_\Omega \Big(\beta(x, u_m(t+\mu)) - \beta(x, u_m(t)) \Big) \big(u_m(t+\mu) - u_m(t) \big) dx\, dt \leqslant c\mu \quad (24)$$

при всех $\mu \in [0, \mu_0]$ и любом $m > 1/\mu$. Тогда найдется такая подпоследовательность, что $\beta(x, u_m) \to \beta(x, u)$ в $L_1(D^T)$ и почти всюду в D^T.

Для доказательства неравенства (24) установим оценку

$$\int_0^{T-kh} \Big\langle \big(\beta(x, u_m(t+kh)) - \beta(x, u_m(t)) \big) \Delta_{kh} u_m(t) \Big\rangle dt \leqslant Ckh, \quad (25)$$

где $\Delta_{kh} u_m(t) = u_m(t+kh) - u_m(t)$, $k = 0, \ldots, m$.

Пусть

$$\gamma(x) = \sum_{j=1}^{m} d_j w_j(x), \quad t_i = ih, \quad i = 0, \dots, m.$$

Из (15) следует равенство

$$\Big\langle \Big(\beta(x, u_m(t_i+h)) - \beta(x, u_m(t_i))\Big)\gamma \Big\rangle = \\ = h\Big\langle b\big(x, \beta(x, u_m(t_i))\big)\gamma - a\big(x, \beta(x, u_m(t_i)), \nabla u_m(t_i+h)\big)\cdot\nabla\gamma \Big\rangle.$$

После суммирования по $i = s, \dots, s+k-1$ будем иметь

$$\Big\langle \Big(\beta(x, u_m(t_{s+k})) - \beta(x, u_m(t_s))\Big)\gamma \Big\rangle = \\ = h\sum_{l=0}^{k-1}\Big\langle b\big(x, \beta(x, u_m(t_{s+l}))\big)\gamma - a\big(x, \beta(x, u_m(t_{s+l})), \nabla u_m(t_{s+l+1})\big)\cdot\nabla\gamma \Big\rangle.$$

Выберем $\gamma_s(x) = h(u_m(t_{s+k}, x) - u_m(t_s, x))$ и просуммируем по $s = 0, \dots, m-k$. Получим

$$I = \int_0^{T-kh} \Big\langle \Big(\beta(x, u_m(t+kh)) - \beta(x, u_m(t))\Big)\Delta_{kh}u_m(t) \Big\rangle dt = \\ = h\sum_{l=0}^{k-1}\sum_{s=0}^{m-k}\Big\langle b\big(x, \beta(x, u_m(t_{s+l}))\big)\gamma_s(x) - a\big(x, \beta(x, u_m(t_{s+l})), \nabla u_m(t_{s+l+1})\big)\cdot\nabla\gamma_s(x) \Big\rangle.$$

Следовательно,

$$I = h\sum_{l=0}^{k-1}\int_0^{T-kh}\Big\langle b\big(x, \beta(x, u_m(t+lh))\big)\Delta_{kh}u_m - \\ - a\big(x, \beta(x, u_m(t+lh)), \nabla u_m(t+lh+h)\big)\cdot\nabla\Delta_{kh}u_m \Big\rangle dt.$$

Имеем оценку

$$\sum_{l=0}^{k-1}\int_0^{T-kh}\Big|\Big\langle b\big(x, \beta(x, u_m(t+lh))\big)(u_m(t+kh) - u_m(t))\Big\rangle\Big| dt \leqslant \\ \leqslant 2k\big\|b(x, \beta(x, u_m))\big\|_{\overline{p_-}, D^T}\|u_m\|_{p_-, D^T} \leqslant Ck.$$

Далее,

$$\sum_{l=0}^{k-1}\int_0^{T-kh}\Big\langle\Big|a\big(x, \beta(x, u_m(t+lh)), \nabla u_m(t+lh+h)\big)\cdot\nabla(u_m(t+kh) - u_m(t))\Big|\Big\rangle dt \leqslant \\ \leqslant 2k\Big\|a(x, \beta(x, u_m(t)), \nabla u_m(t+h))\Big\|_{X'(D^{T-h})}\|u_m\|_{W^1_{p(\cdot)}(D^T)} \leqslant Ck.$$

Постоянная C не зависит от m и h. В итоге имеем оценку (25). Из того факта, функция $u_m(t)$ кусочно постоянна, следует неравенство (24) при $\mu \in [1/m, T]$.

Пользуясь леммой, выбираем такую подпоследовательность $\beta(x, u_m)$, что $\beta(x, u_m) \to \beta(x, u)$ в $L_1(D^T)$ и почти всюду в D^T. Тогда $\beta_{mh} \to \beta(x, u)$ почти всюду в D^T.

Докажем, что

$$a\big(x, \beta_{mh}, \nabla\varphi\big) \to a\big(x, \beta(x, u), \nabla\varphi\big) \tag{26}$$

сильно в $L_{\overline{p}_j(\cdot)}(D^T)$ при любой функции $\varphi \in C_0^1(D^T_{-1})$. Действительно, пусть $\alpha(r) < \varepsilon$ при $r > r_0$ и $E \subset D^T$ — множество малой меры. Тогда

$$\Big[\chi((t,x)\in E)\alpha(|u_m|)B(x,u_m)\Big] \leqslant \varepsilon\Big[\chi\big((t,x)\in E;\ u_m > r_0\big)B(x,u_m)\Big] + \\ + \Big[\chi\big((t,x)\in E;\ u_m \leqslant r_0\big)CB(x,r_0)\Big] \leqslant C_1\varepsilon.$$

Поэтому, в силу (8), интегралы $\big[|a(x,u_{mh},\nabla\varphi)|^{\overline{p}_j(x)}\big]$ равностепенно абсолютно непрерывны. Теперь (26) легко следует из теоремы Витали. Аналогично устанавливается сходимость

$$b\big(x,\beta(x,u_m)\big) \to b\big(x,\beta(x,u)\big) = v_0, \tag{27}$$

сильная в $L_{\overline{p}_-}(D^T)$. Следствием этого является соотношение

$$\Big[u_m b\big(x,\beta(x,u_m)\big)\Big] \to [uv_0]. \tag{28}$$

Лемма 3.

$$\limsup_{m\to\infty}\Big[a(x,\beta_{mh},\nabla u_m)\cdot\nabla u_m\Big] \leqslant \sum_{i=1}^n \big[w_i D_i u\big].$$

Доказательство. После умножения уравнений (15) на $d_j(t) \in C_0^\infty(-1, T-\delta)$ и интегрирования по $t \in [0,T]$ получим:

$$\Big[\varphi\Big(\partial_t^{-h}\beta(x,u_m(t)) - b(x,\beta_{mh})\Big) + a\Big(x,\beta_{mh},\nabla u_m(t)\Big)\cdot\nabla\varphi\Big] = 0, \tag{29}$$

где

$$\varphi = \sum_{j=1}^k d_j(t)w_j(x), \quad k \leqslant m.$$

Нетрудно видеть, что при $2h < \delta$, $m \to \infty$, имеет место соотношение

$$\Big[\varphi\partial_t^{-h}\beta(x,u_m)\Big] = -\int\limits_0^{T-h}\Big\langle\beta(x,u_m)\partial_t^h\varphi(t)\Big\rangle dt - \frac{1}{h}\int\limits_0^h\Big\langle\varphi(t)\beta(x,u_{0m})\Big\rangle dt \longrightarrow \\ \longrightarrow -\big[\beta(x,u)\varphi_t\big] - \big\langle\varphi(0)\beta(x,u_0)\big\rangle. \tag{30}$$

После предельного перехода в (29) с учетом (30) будем иметь

$$\Big[(\beta(x,u_0)-\beta(x,u))\varphi_t\Big] + \Big[\sum_{i=1}^n w_i D_i\varphi - v_0\varphi\Big] = 0. \tag{31}$$

Множество линейных комбинаций вида

$$\varphi_k = \sum_{i=1}^k d_j(t)w_j(x)$$

обозначим через V_k. Отметим, что любая функция $\varphi \in C_0^\infty(D^T_{-1})$ может быть приближена функциями $\varphi_k \in V_k$ так, что $\varphi_k \to \varphi$ в $V(D^T)$ и $(\varphi_k)_t \to \varphi_t$ в $L_\infty(D^T)$. Поэтому соотношение (31) справедливо и для функций $\varphi \in C_0^\infty(D^T_{-1})$. Применяя к (31) лемму 1, получаем

$$\Bigg[\varphi_t\int\limits_{u_0}^u h(x,r)d\beta(x,r) - \sum_{i=1}^n w_i D_i(h\varphi) + v_0\varphi h\Bigg] = 0, \tag{32}$$

где $h = h(r) \in \mathrm{Lip}_0(\mathbb{R})$ и $\varphi \in C_0^\infty(D^T_{-1})$. Выбирая $h = T_k(r)$, где

$$T_k(r) = \begin{cases} k, & r > k, \\ r, & |r| \leqslant k, \\ -k, & r < -k, \end{cases}$$

и $\varphi = \varphi(t) \in C_0^\infty(-1, T)$, будем иметь

$$\left[\varphi_t\Big(B_k(x,u(t)) - B_k(x,u_0)\Big) - \sum_{i=1}^n w_i\varphi D_i T_k u + v_0\varphi T_k u\right] = 0, \tag{33}$$

где

$$B_k(x,r) = \int_0^r T_k(s)d\beta(x,s).$$

Отсюда следует, что функция $\langle B_k(x,u(t))\rangle$ абсолютно непрерывна по t. Устремляя $\varphi(t)$ по подходящей последовательности φ_j к $\chi(-1<t<T)$, получим из (33)

$$\big\langle B_k(x,u_0)\big\rangle - \big\langle B_k(x,u(T))\big\rangle - \sum_{i=1}^n \big[w_i D_i T_k u\big] + \big[v_0 T_k u\big] = 0.$$

Переходя к пределу при $k\to\infty$, устанавливаем, что

$$\big\langle B(x,u_0)\big\rangle - \big\langle B(x,u(T))\big\rangle - \sum_{i=1}^n \big[w_i D_i u\big] + \big[v_0 u\big] = 0. \tag{34}$$

Из (20) имеем соотношение

$$\liminf_{m\to\infty}\int_0^\tau \Big\langle u_m\partial_\tau^{-h}\beta(x,u_m(t))\Big\rangle dt \geqslant \liminf_{m\to\infty}\frac{1}{h}\int_{\tau-h}^\tau \big\langle B(x,u_m)\big\rangle dt - \big\langle B(x,u_0)\big\rangle \geqslant$$
$$\geqslant \big\langle B(x,u(\tau))\big\rangle - \big\langle B(x,u_0)\big\rangle. \tag{35}$$

Здесь используется неравенство из работы [16]:

$$\liminf_{m\to\infty}\frac{1}{h}\int_{\tau-h}^\tau \big\langle B(x,u_m(t))\big\rangle dt \geqslant \big\langle B(x,u(\tau))\big\rangle.$$

Проинтегрировав (19) и используя (28), (35) будем иметь

$$\big\langle B(x,u(T))\big\rangle - \big\langle B(x,u_0)\big\rangle \leqslant \liminf_{m\to\infty}\Big(-\Big[a\big(x,\beta_{mh},\nabla u_m\big)\cdot\nabla u_m\Big]\Big) + \big[v_0 u\big].$$

Сложив последнее и (34), получаем утверждение леммы 3. □

Утверждение теоремы последует из (34), если будут доказаны равенства $w_i = a_i(x,\beta(x,u),\nabla u)$. Для этого воспользуемся условием монотонности (7) при $\varphi\in C_0^\infty(D_{-1}^T)$:

$$\Big[\Big(a\big(x,\beta_{mh},\nabla u_m\big)\Big) - a\big(x,\beta_{mh},\nabla\varphi\big)\cdot\nabla(u_m-\varphi)\Big]\geqslant 0.$$

Перепишем это в виде

$$0\leqslant\Big[\big(x,\beta_{mh},\nabla u_m\big)\cdot\nabla u_m\Big] - \Big[a\big(x,\beta_{mh},\nabla u_m\big)\cdot\nabla\varphi\Big] - \Big[a\big(x,\beta_{mh},\nabla\varphi\big)\cdot\nabla(u_m-\varphi)\Big].$$

Используя лемму (3) и соотношения (23), (26), получаем неравенство

$$0\leqslant\big[w\cdot\nabla u\big] - \big[w\cdot\nabla\varphi\big] - \Big[a\big(x,\beta(x,u),\nabla\varphi\big)\cdot\nabla(u-\varphi)\Big],$$

которое справедливо также и для функций $\varphi\in V$. Перепишем его в виде

$$0\leqslant\Big[\big(w - a(x,\beta(x,u),\nabla\varphi)\big)\cdot\nabla(u-\varphi)\Big].$$

Подставляя сюда $\varphi = u+\varepsilon v$, получим

$$0\leqslant\Big[\Big(w - a\big(x,\beta(x,u),\nabla(u+\varepsilon v)\big)\Big)\cdot\nabla(-v)\Big].$$

Предельный переход $\varepsilon\to 0$ приводит к соотношению

$$0\leqslant\Big[\Big(w - a\big(x,\beta(x,u),\nabla u\big)\Big)\cdot\nabla(-v)\Big],$$

откуда, ввиду произвольности $v \in V$, следует равенство $w = a(x, \beta(x,u), \nabla u)$.

5. Приложение

Доказательство леммы 1 легко выводится из следующего утверждения.

Лемма 4. *Пусть $\beta(x,r)$ — каратеодориева функция, неубывающая по r, и измеримые функции $v, v_0 : \Omega \to \mathbb{R}$ таковы, что $\beta(x,v) \in L_1(D^T)$, $\beta(x,v_0) \in L_1(\Omega)$. Пусть $w \in X' + L_{1,\mathrm{loc}}(\overline{D^T})$ и выполнено неравенство*

$$\Big[\big(\beta(x,v) - \beta(x,v_0)\big)\varphi_t\Big] \begin{smallmatrix}\geqslant\\ \leqslant\end{smallmatrix} (w,\varphi)_{D^T} \tag{36}$$

при всех неотрицательных $\varphi \in C_0^1(D^T_{-1})$. Тогда

$$\left[\varphi_t \int\limits_{v_0}^{v} h(x,r)d\beta(x,r)\right] \begin{smallmatrix}\geqslant\\ \leqslant\end{smallmatrix} (w, h(x,v)\varphi)_{D^T} \tag{37}$$

при всех неотрицательных ограниченных $h(x,s)$, монотонных и липшицевых по s, и таких неотрицательных $\varphi \in C_0^1((-1,T)\times\mathbb{R}^n)$, что либо $\nabla h(x,v) \in X$, либо $h = h(s) \in W^1_\infty(\mathbb{R})$ и $\nabla(h(v)\varphi) \in X$ при всех $\varphi \in C_0^1(D^T_{-1})$.

Доказательство. Поскольку

$$\left|\int\limits_{v_0}^{v} h(x,r)d\beta(x,r)\right| \leqslant \|h\|_\infty \big|\beta(x,v) - \beta(x,v_0)\big|,$$

имеем

$$\int\limits_{v_0}^{v} h(x,r)d\beta(x,r) \in L_1(D^T)$$

и интегралы в (37) определены.

Достаточно доказать одно из неравенств леммы, так как если v удовлетворяет первому неравенству в (36), то $-v$ удовлетворяет другому с заменой $\widetilde{\beta}(x,r) = -\beta(x,-r)$, $\widetilde{v}_0 = -v_0$ и $\widetilde{w} = -w$ соответственно.

Если справедливо первое из неравенств (36), то оно справедливо также и для неотрицательных функций $\psi \in Y$:

$$Y = \left\{\psi(t,x) \in L_\infty(D^T): \ \psi(t,x) = \int\limits_t^T z(s,x)ds \ \middle| \ \nabla z \in X, \ \operatorname{supp} z \text{ ограничен}\right\};$$

это легко установить соответствующим предельным переходом, выбирая равномерно ограниченную последовательность функций $\varphi_k \in C_0^\infty(D^T)$, с градиентами, сходящимися слабо к $\nabla z \in X$ как функционалы над X' и такую, что

$$\int\limits_t^T \varphi_k(s,x)ds \xrightarrow{\text{п.в.}} \psi(t,x) = \int\limits_t^T z(s,x)ds.$$

Сначала предположим, что $h(x,s) \geqslant 0$ не убывает и непрерывна по s. Ясно, что

$$\int\limits_r^s h(x,\tau)d\beta(x,\tau) \leqslant h(x,s)\big(\beta(x,s) - \beta(x,r)\big)$$

при всех $r, s \in \mathbb{R}$ и почти всех $x \in \Omega$. Следовательно, при всех $t > 0$

$$\int\limits_{v(t-\mu)}^{v(t)} h(x,r)d\beta(x,r) \leqslant h(x,v(t))\Big(\beta(x,v(t)) - \beta(x,v(t-\mu))\Big), \tag{38}$$

$$\int\limits_{v(t-\mu)}^{v(t)} h(x,r)d\beta(x,r) \geqslant h(x,v(t-\mu))\Big(\beta(x,v(t)) - \beta(x,v(t-\mu))\Big) \tag{39}$$

почти всюду в Ω, где полагаем $v(t) = v_0$ при $t < 0$. Пусть $\varphi \in C_0^1((-\infty,T)\times\mathbb{R}^n)$, $\varphi \geqslant 0$ и $\nabla h(x,v) \in X$; тогда функция $\zeta = h(x,v)\varphi$ такова, что $\nabla\zeta \in X$. Если же $h(x,s) = h(s) \in W_\infty^1(\mathbb{R})$, $\nabla h(v) \notin X$, то выбираем $\varphi \in C_0^1((-\infty,T)\times\Omega)$, и снова при $\zeta = h(v)\varphi$ имеем $\nabla\zeta \in X$. Отметим, что при любом малом $\mu > 0$ функция

$$\zeta_\mu(t) = \frac{1}{\mu}\int\limits_t^{t+\mu}\zeta(s)ds, \quad \zeta_\mu(T) = 0$$

лежит в пространстве Y. Поэтому ζ_μ можно подставить в (36). Согласно (38), запишем цепочку соотношений

$$\begin{aligned}
(w,\zeta_\mu)_{D^T} \leqslant \Big[(\zeta_\mu)_t\big(\beta(x,v)-\beta(x,v_0)\big)\Big] = \\
= \int\limits_{D^T_{-\infty}} \frac{1}{\mu}\big(\zeta(t+\mu)-\zeta(t)\big)\big(\beta(x,v(t))-\beta(x,v_0)\big)dx\,dt = \\
= \int\limits_{D^T_{-\infty}} \frac{1}{\mu}\zeta(t)\big(\beta(x,v(t-\mu))-\beta(x,v(t))\big)dx\,dt = \\
= \int\limits_{D^T_{-\infty}} \frac{\varphi(t)}{\mu}h(v(t))\big(\beta(x,v(t-\mu))-\beta(x,v(t))\big) \leqslant \\
\leqslant \int\limits_{D^T_{-\infty}} \frac{\varphi(t)}{\mu}\int\limits_{v(t)}^{v(t-\mu)} h(x,r)d\beta(x,r)dx\,dt = \left[\frac{\varphi(t+\mu)-\varphi(t)}{\mu}\int\limits_{v_0}^{v(t)} h(x,r)d\beta(x,r)\right].
\end{aligned} \tag{40}$$

Так как при $\mu \to 0$

$$\big[\zeta_\mu, f\big] = \big[\zeta, f_{-\mu}\big] \longrightarrow \big[\zeta, f\big] \quad \forall f \in L_{1,\mathrm{loc}}(D^T),$$

$(\varphi(t+\mu)-\varphi(t))/\mu \to \varphi_t(t)$ в $L_\infty(D^T)$ и градиенты сходятся вX, $\nabla\zeta_\mu \to \nabla\zeta = \nabla(h(x,v)\varphi)$, то после предельного перехода в (40) получим (37).

Теперь предположим, что $h_1(x,s) \geqslant 0$ не возрастает по s. Пусть $v_{0m} \in C_0^1(\Omega)$, $\beta(x,v_{0m}) \to \beta(x,v_0)$ в $L_1(\mathbb{R}^n)$ при $m \to \infty$ и пусть m фиксировано в следующих выкладках. Подставляя $h = -h_1$ в (39), будем иметь

$$\int\limits_{v(t-\mu)}^{v(t)} h_1(x,r)d\beta(x,r) \leqslant h_1\big(x,v(t-\mu)\big)\Big(\beta\big(x,v(t)\big) - \beta\big(x,v(t-\mu)\big)\Big) \tag{41}$$

для п.в. $t > 0$, при $\mu > 0$, где в этот раз при $t < 0$ мы определяем $v(t) = v_{0m}$. Функция φ выбирается как и ранее, так что $\zeta = h_1(x,v)\varphi \in X$. Следовательно, при малых $\mu > 0$ функция

$$\zeta_{-\mu}(t) = \frac{1}{\mu}\int\limits_{t-\mu}^{t}\zeta(s)ds, \quad \zeta_{-\mu}(T) = 0,$$

лежит в пространстве Y. Поэтому $\zeta_{-\mu}$ можно подставить в (36). Используя (41), запишем следующие соотношения:

$$(w,\zeta_{-\mu})_{D^T} \leqslant \Big[(\zeta_{-\mu})_t(\beta(x,v(t))-\beta(x,v_0))\Big] = \Big[\frac{1}{\mu}\Big(\zeta(t)-\zeta(t-\mu)\Big)\Big(\beta(x,v(t))-\beta(x,v_0)\Big)\Big] =$$

$$= \Big[\frac{1}{\mu}\zeta(t-\mu)\Big(\beta(x,v(t-\mu))-\beta(x,v(t))\Big)\Big] - \frac{1}{\mu}\int\limits_0^{\mu}\Big\langle\zeta(t-\mu)\Big(\beta(x,v_{0m})-\beta(x,v_0)\Big)\Big\rangle dt \leqslant$$

$$\leqslant \left[\frac{\varphi(t-\mu)}{\mu}\int\limits_{v(t)}^{v(t-\mu)} h_1(x,r)d\beta(x,r)\right] - \frac{1}{\mu}\int\limits_{-\mu}^{0}\Big\langle\varphi(t)h_1(x,v_{0m})\Big(\beta(x,v_{0m})-\beta(x,v_0)\Big)\Big\rangle dt =$$

$$= \left[\frac{\varphi(t)-\varphi(t-\mu)}{\mu}\int\limits_{v_0}^{v(t)} h_1(x,r)d\beta(x,r)\right] + \frac{1}{\mu}\int\limits_{-\mu}^{0}\Big\langle\varphi(t)\int\limits_{v_0}^{v_{0m}} h_1(x,r)d\beta(x,r)\Big\rangle dt -$$

$$- \frac{1}{\mu}\int\limits_{-\mu}^{0}\Big\langle\varphi(t)h_1(x,v_{0m})\Big(\beta(x,v_{0m})-\beta(x,v_0)\Big)\Big\rangle dt.$$

Отметим, что

$$\frac{1}{\mu}\int\limits_{-\mu}^{0}\left\langle\varphi(t)\int\limits_{v_0}^{v_{0m}} h_1(x,r)d\beta(x,r)\right\rangle dt =$$

$$= \left\langle\varphi(0)\int\limits_{v_0}^{v_{0m}} h_1(x,r)d\beta(x,r)\right\rangle + \frac{1}{\mu}\int\limits_{-\mu}^{0}\left\langle(\varphi(t)-\varphi(0))\int\limits_{v_0}^{v_{0m}} h_1(x,r)d\beta(x,r)\right\rangle dt,$$

где последний интеграл стремится к 0 при $\mu\to 0$. Аналогично имеем

$$\frac{1}{\mu}\int\limits_{-\mu}^{0}\Big\langle\varphi(t)h_1(x,v_{0m})\Big(\beta(x,v_{0m})-\beta(x,v_0)\Big)\Big\rangle dt =$$

$$= \Big\langle\varphi(0)h_1(x,v_{0m})\Big(\beta(x,v_{0m})-\beta(x,v_0)\Big)\Big\rangle +$$

$$+ \frac{1}{\mu}\int\limits_{-\mu}^{0}\Big\langle\Big(\varphi(t)-\varphi(0)\Big)h_1(x,v_{0m})\Big(\beta(x,v_{0m})-\beta(x,v_0)\Big)\Big\rangle dt,$$

где последний интеграл стремится к 0 при $\mu\to 0$. Теперь, пользуясь сходимостью

$$\nabla\zeta_{-\mu} \xrightarrow[\mu\to 0]{} \nabla(h_1(v)\varphi) \qquad \text{в } X,$$

$$\frac{\varphi(t+\mu)-\varphi(t)}{\mu} \xrightarrow[\mu\to 0]{} \varphi_t(t) \qquad \text{в } L_\infty(D^T),$$

получаем

$$\Big(w,h_1(x,v)\varphi\Big)_{D^T} \leqslant \left[\varphi_t\int\limits_{v_0}^{v} h_1(x,r)d\beta(x,r)\right] + \left\langle\varphi(0)\int\limits_{v_0}^{v_{0m}} h_1(x,r)d\beta(x,r)\right\rangle -$$

$$- \Big\langle\varphi(0)h(x,v_{0m})\Big(\beta(x,v_{0m})-\beta(x,v_0)\Big)\Big\rangle.$$

Поскольку $\beta(x,v_{0m})\to\beta(x,v_0)$ в $L_1(\Omega)$, то после предельного перехода при $m\to\infty$, пользуясь ограниченностью функции h_1, получаем (37) в случае невозрастания h_1.

Перепишем (37) в виде
$$\big(\widetilde{w}, \psi\big)_{D^T} \leqslant \Big[\psi_t\Big(\widetilde{\beta}(x, v) - \widetilde{\beta}(x, v_0)\Big)\Big], \tag{42}$$
где
$$\widetilde{w} = wh_1(v), \quad \widetilde{\beta}(x, s) = \int\limits_0^s h_1(x, r)d\beta(x, r).$$
Неравенство (42), установленное для $\psi \in C_0^1((-1, T) \times \mathbb{R}^n)$, предельным переходом распространяется и на функции $\psi \in Y$. В частности, как было показано выше, для неубывающей неотрицательной функции $h_2 \in W^1_\infty(\mathbb{R})$ из (42) следует соотношение
$$\big(\widetilde{w}, h_2(v)\varphi\big)_{D^T} \leqslant \left[\varphi_t \int\limits_{v_0}^{v} h_2(r)d\widetilde{\beta}(x, r)\right]$$
при любой функции $\varphi \in C_0^1((-1, T) \times \mathbb{R}^n)$, $\varphi \geqslant 0$, равносильное (37) с $h = h_1h_2$. Любая неотрицательная функция $h \in W^1_\infty(\mathbb{R})$ может быть приближена выпуклой комбинацией таких произведений. Поэтому лемма верна для таких функций. □

Для доказательства леммы 1 достаточно воспользоваться формулой $h\varphi = (h^+ - h^-)(\varphi^+ - \varphi^-)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Алхутов Ю. А., Жиков В. В.* Теоремы существования и единственности решений параболических уравнений с переменным порядком нелинейности// Мат. сб. — 2014. — *205*, № 3. — С. 3–14.
2. *Андриянова Э. Р., Мукминов Ф. Х.* Существование и качественные свойства решения первой смешанной задачи для параболического уравнения с двойной нестепенной нелинейностью// Мат. сб. — 2016. — *207*, № 1. — С. 3–44.
3. *Антонцев С. Н., Шмарев С. И.* Существование и единственность решений вырождающихся параболических уравнений с переменными показателями нелинейности// Фундам. прикл. мат. — 2006. — *12*, № 4. — С. 3–19.
4. *Кожевникова Л. М., Леонтьев А. А.* Убывание решения анизотропного параболического уравнения с двойной нелинейностью в неограниченных областях// Уфим. мат. ж. — 2013. — *5*, № 1. — С. 63–82.
5. *Кожевникова Л. М., Леонтьев А. А.* О решениях анизотропных параболических уравнений высокого порядка в неограниченных областях// Мат. сб. — 2014. — *205*, № 1. — С. 9–46.
6. *Кружков С. Н.* Квазилинейные уравнения первого порядка со многими независимыми переменными// Мат. сб. — 1970. — *81* (123), № 2. — С. 228–255.
7. *Лаптев Г. И.* Слабые решения квазилинейных параболических уравнений второго порядка с двойной нелинейностью// Мат. сб. — 1997. — *188*, № 9. — С. 83–112.
8. *Лионс Ж. Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. — М.: Мир, 1972.
9. *Akdim Y., Bennouna J., Mekkour M., Redwane H.* Strongly nonlinear parabolic inequality in orlicz spaces via a sequence of penalized equations// Afr. Mat. — 2015. — *26*. — С. 1669–1695; `DOI: 10.1007/s13370-014-0309-0`
10. *Alt H. W., Luckhaus S.* Quasilinear elliptic-parabolic differential equations// Math. Z. — 1983. — *183*. — С. 311–341.
11. *Blanchard D., Murat F.* Renormalised solutions of nonlinear parabolic problems with L_1 data: existence and uniqueness// Proc. Roy. Soc. Edinburgh. 1997. — *127A*. — С. 1137–1152.
12. *Bendahmane M., Wittbold P., Zimmermann A.* Renormalized solutions for a nonlinear parabolic equation with variable exponents and L_1 data// J. Differ. Equ. — 2010. — *249*. — С. 1483–1515.
13. *Benilan P., Boccardo L., Galluet T., Pierre M., Vazquez J. L.* An L_1-theory of existence and uniqueness of solutions of nonlinear elliptic equations// Ann. Scu. Norm. Super. Pisa. Class. Sci. — 1995. — *22*, № 2. — С. 241–273.
14. *Carrillo J., Wittbold P.* Uniqueness of renormalized solutions of degenerate elliptic-parabolic problems// J. Differ. Equ. — 1999. — *156*. — С. 93–121.
15. *Gwiazda P., Wittbold P., Wróblewska-Kamińska A., Zimmermann A.* Renormalized solutions to nonlinear parabolic problems in generalized Musielak–Orlicz spaces// Nonlin. Anal. — 2015. — *129*. — С. 1–36.
16. *Kacur J.* On a solution of degenerate elliptic-parabolic systems in Orlicz–Sobolev spaces, I// Math. Z. — 1990. — *203*. — С. 153–171.

17. *Hadj Nassar S., Moussa H., Rhoudaf M.* Renormalized solution for a nonlinear parabolic problems with noncoercivity in divergence form in Orlicz spaces// Appl. Math. Comput. — 2014. — *249.* — C. 253–264.
18. *Otto F.* L_1-Contraction and uniqueness for quasilinear elliptic-parabolic equations// J. Differ. Equ. — 1996. — *131.* — C. 20–38.
19. *Panov E.* On weak completeness of the set of entropy solutions to a degenerate nonlinear parabolic equation// SIAM J. Math. Anal. — 2012. — *44*, № 1. — C. 513–535.
20. *Prignet A.* Existence and uniqueness of entropy solutions of parabolic problems with L_1 data// Nonlin. Anal. Theory Math. Appl. — 1997. — *28.* — C. 1943–1954.
21. *Raviart P. A.* Sur la resolution de certaines equations paraboliques non lineaires// J. Funct. Anal. — 1970. — *5.* — C. 209–328.
22. *Redwane H.* Uniqueness of renormalized solutions for a class of parabolic equations with unbounded nonlinearities// Rend. Mat. Ser. VII, Roma. — 2008. — *28.* — C. 189–200.
23. *Redwane H.* Existence results for a class of nonlinear parabolic equations in Orlicz spaces// Electr. J. Qualit. Theory Differ. Equ. — 2010. — *2.* — C. 1–19; `http://www.math.u-szeged.hu/ejqtde/`
24. *oussfi A., zroul E., Lahmi B.* Strongly nonlinear variational parabolic equations with p(x)-growth// Acta Math. Sci. — 2016. — *36*, № 5; `https://www.researchgate.net/publication/291698314`; `DOI: 10.1016/S0252-9602(16)30076-5`
25. *Zhang Ch., Zhou Sh.* Renormalized and entropy solutions for nonlinear parabolic equations with variable exponents and L_1 data// J. Differ. Equ. — 2010. — *248.* — C. 1376–1400.

Ф. Х. Мукминов
Институт математики с вычислительным центром
Уфимского научного центра РАН
E-mail: `mfkh@rambler.ru`

Э. Р. Андриянова
Австралийский институт математических наук, Мельбурн, Австралия;
Австралийский национальный университет, Мельбурн, Австралия
E-mail: `elina.andriyanov@mail.ru`

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 139 (2017). С. 59–69

УДК 517.912, 517.958:539.3(3)

РЕШЕНИЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ В ВЕКТОРНОЙ ФОРМЕ

© 2017 г. **Е. А. ОСИПОВ**

Аннотация. Рассмотрены граничные задачи для системы уравнений пространственной теории упругости в классе двоякопериодических функций. Получено общее решение системы уравнений теории упругости. Выделены шесть типов элементарных волн Флоке и исследованы их энергетические характеристики. Рассмотрены основные граничные задачи в полупространстве в векторной форме. Задача дифракции упругой волны на периодической системе дефектов сведена в векторной форме к парному сумматорному функциональному уравнению.

***Ключевые слова*:** периодические системы, теория упругости, волны Флоке.

***AMS Subject Classification*:** 74B05

СОДЕРЖАНИЕ

1. Квазипериодические по двум переменным решения уравнений трехмерной теории упругости

Задачи дифракции трехмерной теории упругости более сложны, по сравнению с задачами плоской теории упругости, а так же задачами электродинамики. Большое количество неизвестных искомых функций приводит к сложным системам уравнений. В свою очередь становится более сложным процесс доказательства важных теорем. Например, теорем существования и единственности решения, или вопрос о сходимости рядов. Важные вопросы, касающиеся возможности применения переопределенных граничных задач для теории распространения волн, затронуты в [5]. Сложности при решении граничных задач и задач дифракции электромагнитной волны (и волновых процессов в целом) на периодических системах рассмотрены в [4].

1.1. Уравнения пространственной теории упругости. В трехмерной динамической теории упругости в декартовой системе координат состояние упругой среды описывают две величины: вектор перемещений $\mathbf{U} = \mathbf{U}(x, y, z) = \Big(u_x(x, y, z), u_y(x, y, z), u_z(x, y, z)\Big)$ и симметричный тензор напряжений

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx}(x, y, z) & \sigma_{xy}(x, y, z) & \sigma_{xz}(x, y, z) \\ \sigma_{xy}(x, y, z) & \sigma_{yy}(x, y, z) & \sigma_{yz}(x, y, z) \\ \sigma_{zx}(x, y, z) & \sigma_{zy}(x, y, z) & \sigma_{zz}(x, y, z) \end{bmatrix}.$$

Компоненты вектора $\mathbf{U}$ и тензора $\mathbf{\Sigma}$ — вещественнозначные функции.

Уравнения пространственной теории упругости в координатах имеют вид

$$\begin{gathered}
\frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_{xz}}{\partial z}-\rho\frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2}=0,\\
\frac{\partial\sigma_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{yy}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_{yz}}{\partial z}-\rho\frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2}=0,\\
\frac{\partial\sigma_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_{zz}}{\partial z}-\rho\frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2}=0,
\end{gathered}\tag{1}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{xx}&=(\lambda+2\mu)\frac{\partial u_x}{\partial x}+\lambda\left(\frac{\partial u_y}{\partial y}+\frac{\partial u_z}{\partial z}\right), &\quad \sigma_{xy}&=\mu\left(\frac{\partial u_x}{\partial y}+\frac{\partial u_y}{\partial x}\right),\\
\sigma_{yy}&=(\lambda+2\mu)\frac{\partial u_y}{\partial y}+\lambda\left(\frac{\partial u_x}{\partial x}+\frac{\partial u_z}{\partial z}\right), &\quad \sigma_{yz}&=\mu\left(\frac{\partial u_y}{\partial z}+\frac{\partial u_z}{\partial y}\right),\\
\sigma_{zz}&=(\lambda+2\mu)\frac{\partial u_z}{\partial z}+\lambda\left(\frac{\partial u_x}{\partial x}+\frac{\partial u_y}{\partial y}\right), &\quad \sigma_{xz}&=\mu\left(\frac{\partial u_x}{\partial z}+\frac{\partial u_z}{\partial x}\right),
\end{aligned}\tag{2}$$

где ρ — плотность упругой среды, λ, μ — постоянные Ламе.

Применим метод комплексных амплитуд. Пусть упругое поле гармонически зависит от времени. Зависимость от времени имеет вид $\exp(i\omega t)$, где ω — круговая частота.

Будем обозначать комплексные амплитуды вещественнозначных функций так же, как и исходные функции. Система уравнений для комплекснозночных амплитуд состоит из трех уравнений:

$$\begin{gathered}
\frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_{xz}}{\partial z}+\rho\omega^2 u_x=0,\\
\frac{\partial\sigma_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{yy}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_{yz}}{\partial z}+\rho\omega^2 u_y=0,\\
\frac{\partial\sigma_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_{zz}}{\partial z}+\rho\omega^2 u_z=0
\end{gathered}\tag{3}$$

и шести уравнений того же вида, что и уравнения (2). Эту систему уравнений легко преобразовать к системе дифференциальных уравнений второго порядка, которая является аналогом системы уравнений Ламе плоской теории упругости:

$$\begin{aligned}
(\lambda+\mu)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u_x}{\partial x}+\frac{\partial u_y}{\partial y}+\frac{\partial u_z}{\partial z}\right)+\mu\left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2}\right)+\rho\omega^2 u_x=0,\\
(\lambda+\mu)\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u_x}{\partial x}+\frac{\partial u_y}{\partial y}+\frac{\partial u_z}{\partial z}\right)+\mu\left(\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2}\right)+\rho\omega^2 u_y=0,\\
(\lambda+\mu)\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u_x}{\partial x}+\frac{\partial u_y}{\partial y}+\frac{\partial u_z}{\partial z}\right)+\mu\left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}\right)+\rho\omega^2 u_z=0.
\end{aligned}\tag{4}$$

В уравнениях (4) содержатся только компоненты вектора перемещений $\mathbf{U}$, точнее, их комплекснозначные амплитуды.

Пусть $\widetilde{\mathbf{U}}$ — решение системы уравнений (3), (2) или системы уравнений (4). Если $\operatorname{rot}(\widetilde{\mathbf{U}})=0$, то $\widetilde{\mathbf{U}}$ определяет продольную упругую волну. Если $\operatorname{div}(\widetilde{\mathbf{U}})=0$, то $\widetilde{\mathbf{U}}$ — поперечная упругая волна.

1.2. Решения, квазипериодические по двум переменным. Будем искать решения системы пространственной теории упругости в виде квазипериодических по двум переменным комплекснозначных функций вида

$$f(x,y,z)=e^{i\alpha_x x}e^{i\alpha_y y}f_0(x,y,z),$$

где α_x и α_y — параметры Флоке, $f_0(x,y,z)$ — периодическая по двум аргументам x и y функция с периодами l_x и l_y соответственно. Будем предполагать, что функция $f_0(x,y,z)$ разлагается в двойной ряд Фурье по переменным x и y; тогда

$$f(x,y,z) = e^{i\alpha_x x} e^{i\alpha_y y} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_{mn}(z) \exp\left(i\frac{2\pi}{l_x} mx\right) \exp\left(i\frac{2\pi}{l_y} ny\right) = \\ = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_{mn}(z) e^{iL_{xm}x} e^{iL_{yn}y}, \quad (5)$$

где

$$L_{xm} = \alpha_x + \frac{2\pi m}{l_x}, \quad L_{yn} = \alpha_y + \frac{2\pi n}{l_y}.$$

Подставим функции напряжений и перемещений в виде (5) в уравнения (3), (2) и получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений для их коэффициентов Флоке:

$$\begin{aligned} &iL_{xm}\sigma_{xxmn}(z) + iL_{yn}\sigma_{xymn}(z) + \sigma'_{xzmn}(z) + \rho\omega^2 u_{xmn}(z) = 0, \\ &iL_{xm}\sigma_{xymn}(z) + iL_{yn}\sigma_{yymn}(z) + \sigma'_{yzmn}(z) + \rho\omega^2 u_{ymn}(z) = 0, \\ &iL_{xm}\sigma_{xzmn}(z) + iL_{yn}\sigma_{yzmn}(z) + \sigma'_{zzmn}(z) + \rho\omega^2 u_{zmn}(z) = 0, \\ \\ &\sigma_{xxmn}(z) = i(\lambda+2\mu)L_{xm}u_{xmn}(z) + i\lambda L_{yn}u_{ymn}(z) + \lambda u'_{zmn}(z), \\ &\sigma_{yymn}(z) = i(\lambda+2\mu)L_{yn}u_{ymn}(z) + i\lambda L_{xm}u_{xmn}(z) + \lambda u'_{zmn}(z), \\ &\sigma_{zzmn}(z) = (\lambda+2\mu)u'_{zmn}(z) + i\lambda L_{xm}u_{xmn}(z) + i\lambda L_{yn}u_{ymn}(z), \\ \\ &\sigma_{xymn}(z) = i\mu\big(L_{yn}u_{xmn}(z) + L_{xm}u_{ymn}(z)\big), \\ &\sigma_{xzmn}(z) = \mu\big(u'_{xmn}(z) + iL_{xm}u_{zmn}(z)\big), \\ &\sigma_{yzmn}(z) = \mu\big(u'_{ymn}(z) + iL_{yn}u_{zmn}(z)\big). \end{aligned} \quad (6)$$

Исключим функции $\sigma_{xxmn}(z)$, $\sigma_{yymn}(z)$, $\sigma_{xymn}(z)$ из уравнений (**??**) и перепишем оставшиеся уравнения в виде

$$u'_{xmn}(z) = -iL_{xm}u_{zmn}(z) + \frac{1}{\mu}\sigma_{xzmn}(z), \quad (7a)$$

$$u'_{ymn}(z) = -iL_{yn}u_{zmn}(z) + \frac{1}{\mu}\sigma_{yzmn}(z), \quad (7b)$$

$$u'_{zmn}(z) = -iL_{xm}\frac{\lambda}{\lambda+2\mu}u_{xmn}(z) - iL_{yn}\frac{\lambda}{\lambda+2\mu}u_{ymn}(z) + \frac{1}{\lambda+2\mu}\sigma_{zzmn}(z), \quad (7c)$$

$$\sigma'_{xzmn}(z) = \left(\left(\lambda+2\mu-\frac{\lambda^2}{\lambda+2\mu}\right)L_{xm}^2 + \mu L_{yn}^2 - \rho\omega^2\right)u_{xmn}(z) + \\ + L_{xm}L_{yn}\left(\lambda+\mu-\frac{\lambda^2}{\lambda+2\mu}\right)u_{ymn}(z) - iL_{xm}\frac{\lambda}{\lambda+2\mu}\sigma_{zzmn}(z), \quad (7d)$$

$$\sigma'_{yzmn}(z) = L_{xm}L_{yn}\left(\lambda+\mu-\frac{\lambda^2}{\lambda+2\mu}\right)u_{xmn}(z) + \\ + \left(\left(\lambda+2\mu-\frac{\lambda^2}{\lambda+2\mu}\right)L_{yn}^2 + \mu L_{xm}^2 - \rho\omega^2\right)u_{ymn}(z) - iL_{yn}\frac{\lambda}{\lambda+2\mu}\sigma_{zzmn}(z), \quad (7e)$$

$$\sigma'_{zzmn}(z) = -\rho\omega^2 u_{zmn}(z) - iL_{xm}\sigma_{xzmn}(z) - iL_{yn}\sigma_{yzmn}(z). \quad (7f)$$

Введем обозначение

$$\beta_{jmn} = \sqrt{k_j^2 - L_{xm}^2 - L_{yn}^2} = \begin{cases} i\sqrt{L_{xm}^2 + L_{yn}^2 - k_j^2}, & |L_{xm}^2 + L_{yn}^2| \leqslant k_j^2, \\ -\sqrt{k_j^2 - L_{xm}^2 - L_{yn}^2}, & |L_{xm}^2 + L_{yn}^2| \geqslant k_j^2, \end{cases} \quad j = 1,2.$$

Будем считать, что $\beta_{jmn} \neq 0$ при $j = 1, 2$. Случай, когда для некоторых индексов m, n обращается в нуль число β_{1mn} или число β_{2mn}, в данной работе не рассматривается.

Найдем общее решение системы уравнений (7). Матрица коэффициентов этой системы имеет шесть собственных значений:

$$\pm i\beta_{1mn}, \quad \pm i\beta_{2mn}, \quad \pm i\beta_{2mn}.$$

Им соответствуют собственные векторы

$$\begin{aligned}
\mathbf{h}_{mn}^{1,2} &= \Big(L_{xm},\ L_{yn},\ \pm\beta_{1mn},\ \pm 2i\mu\beta_{1mn}L_{xm},\ \pm 2i\mu\beta_{1mn}L_{yn},\ i\big(\lambda k_1^2 + 2\mu\beta_{1mn}^2\big)\Big),\\
\mathbf{h}_{mn}^{3,4} &= \Big(\beta_{2mn},\ 0,\ \mp L_{xm},\ \pm i\mu\big(\beta_{2mn}^2 - L_{xm}^2\big),\ \mp i\mu L_{xm}L_{yn},\ -i2\mu\beta_{2mn}L_{xm}\Big),\\
\mathbf{h}_{mn}^{5,6} &= \Big(0,\ \beta_{2mn},\ \mp L_{yn},\ \mp i\mu L_{xm}L_{yn},\ \pm i\mu\big(\beta_{2mn}^2 - L_{yn}^2\big),\ -i2\mu\beta_{2mn}L_{yn}\Big).
\end{aligned}$$

Объединим перемещения и напряжения в один искомый вектор

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}(x, y, z) = \Big(u_x,\ u_y,\ u_z,\ \sigma_{xy},\ \sigma_{xz},\ \sigma_{yz},\ \sigma_{xx},\ \sigma_{yy},\ \sigma_{zz}\Big).$$

Определим матрицы $\mathbf{A}_{mn}$ и $\mathbf{B}_{mn}$ следующим образом:

$$\mathbf{A}_{mn} = \begin{pmatrix}
L_{xm} & \beta_{2mn} & 0\\
L_{yn} & 0 & \beta_{2mn}\\
\beta_{1mn} & -L_{xm} & -L_{yn}\\
2i\mu L_{xm}L_{yn} & i\mu\beta_{2mn}L_{yn} & i\mu\beta_{2mn}L_{xm}\\
2i\mu\beta_{1mn}L_{xm} & i\mu\big(\beta_{2mn}^2 - L_{xm}^2\big) & -i\mu L_{xm}L_{yn}\\
2i\mu\beta_{1mn}L_{yn} & -i\mu L_{xm}L_{yn} & i\mu\big(\beta_{2mn}^2 - L_{yn}^2\big)\\
i\big(\lambda k_1^2 + 2\mu L_{xm}^2\big) & i2\mu\beta_{2mn}L_{xm} & 0\\
i\big(\lambda k_1^2 + 2\mu L_{yn}^2\big) & 0 & i2\mu\beta_{2mn}L_{yn}\\
i\big(\lambda k_1^2 + 2\mu\beta_{1mn}^2\big) & -i2\mu\beta_{2mn}L_{xm} & -i2\mu\beta_{2mn}L_{yn}
\end{pmatrix},$$

$$\mathbf{B}_{mn} = \begin{pmatrix}
L_{xm} & \beta_{2mn} & 0\\
L_{yn} & 0 & \beta_{2mn}\\
-\beta_{1mn} & L_{xm} & L_{yn}\\
2i\mu L_{xm}L_{yn} & i\mu\beta_{2mn}L_{yn} & i\mu\beta_{2mn}L_{xm}\\
-2i\mu\beta_{1mn}L_{xm} & -i\mu\big(\beta_{2mn}^2 - L_{xm}^2\big) & i\mu L_{xm}L_{yn}\\
-2i\mu\beta_{1mn}L_{yn} & i\mu L_{xm}L_{yn} & -i\mu\big(\beta_{2mn}^2 - L_{yn}^2\big)\\
i\big(\lambda k_1^2 + 2\mu L_{xm}^2\big) & i2\mu\beta_{2mn}L_{xm} & 0\\
i\big(\lambda k_1^2 + 2\mu L_{yn}^2\big) & 0 & i2\mu\beta_{2mn}L_{yn}\\
i\big(\lambda k_1^2 + 2\mu\beta_{1mn}^2\big) & -i2\mu\beta_{2mn}L_{xm} & -i2\mu\beta_{2mn}L_{yn}
\end{pmatrix}.$$

Матрицы $\mathbf{E}_{mn}^{+}(z)$ и $\mathbf{E}_{mn}^{-}(z)$ определим так:

$$\mathbf{E}_{mn}^{+}(z) = \begin{pmatrix}
e^{i\beta_{1mn}z} & 0 & 0\\
0 & e^{i\beta_{2mn}z} & 0\\
0 & 0 & e^{i\beta_{2mn}z}
\end{pmatrix}, \quad
\mathbf{E}_{mn}^{-}(z) = \begin{pmatrix}
e^{-i\beta_{1mn}z} & 0 & 0\\
0 & e^{-i\beta_{2mn}z} & 0\\
0 & 0 & e^{-i\beta_{2mn}z}
\end{pmatrix}.$$

Теорема 1. *Общее квазипериодическое решение системы уравнений* (1)–(2) *имеет вид*

$$\mathbf{u}(x,y,z) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathbf{A}_{mn}\mathbf{E}^{+}_{mn}(z)\mathbf{a}_{mn}e^{iL_{xm}x}e^{iL_{yn}y} + \\ + \sum_{m=-\infty}^{+\infty}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathbf{B}_{mn}\mathbf{E}^{-}_{mn}(z)\mathbf{b}_{mn}e^{iL_{xm}x}e^{iL_{yn}y}, \quad (8)$$

где $\mathbf{a}_{mn}$, $\mathbf{b}_{mn}$ — *произвольные постоянные векторы.*

Как и в двумерном случае [3], каждая гармоника Флоке представляет собой сумму шести слагаемых — элементарных волн. Выпишем их компоненты.

Волна типа A:

$$\begin{aligned}
u_x(x,y,z) &= L_{xm}e^{i\beta_{1mn}z}e^{iL_{xm}x}e^{iL_{yn}y},\\
u_y(x,y,z) &= L_{yn}e^{i\beta_{1mn}z}e^{iL_{xm}x}e^{iL_{yn}y},\\
u_z(x,y,z) &= \beta_{1mn}e^{i\beta_{1mn}z}e^{iL_{xm}x}e^{iL_{yn}y},\\
\sigma_{xy}(x,y,z) &= 2i\mu L_{xm}L_{yn}e^{i\beta_{1mn}z}e^{iL_{xm}x}e^{iL_{yn}y},\\
\sigma_{xz}(x,y,z) &= 2i\mu L_{xm}\beta_{1mn}e^{i\beta_{1mn}z}e^{iL_{xm}x}e^{iL_{yn}y},\\
\sigma_{yz}(x,y,z) &= 2i\mu L_{yn}\beta_{1mn}e^{i\beta_{1mn}z}e^{iL_{xm}x}e^{iL_{yn}y},\\
\sigma_{xx}(x,y,z) &= i\big(\lambda k_1^2 + 2\mu L_{xm}^2\big)e^{i\beta_{1mn}z}e^{iL_{xm}x}e^{iL_{yn}y},\\
\sigma_{yy}(x,y,z) &= i\big(\lambda k_1^2 + 2\mu L_{yn}^2\big)e^{i\beta_{1mn}z}e^{iL_{xm}x}e^{iL_{yn}y},\\
\sigma_{zz}(x,y,z) &= i\big(\lambda k_1^2 + 2\mu \beta_{1mn}^2\big)e^{i\beta_{1mn}z}e^{iL_{xm}x}e^{iL_{yn}y};
\end{aligned} \quad (9)$$

волна типа B:

$$\begin{aligned}
u_x(x,y,z) &= L_{xm}e^{-i\beta_{1mn}z}e^{iL_{xm}x}e^{iL_{yn}y},\\
u_y(x,y,z) &= L_{yn}e^{-i\beta_{1mn}z}e^{iL_{xm}x}e^{iL_{yn}y},\\
u_z(x,y,z) &= -\beta_{1mn}e^{-i\beta_{1mn}z}e^{iL_{xm}x}e^{iL_{yn}y},\\
\sigma_{xy}(x,y,z) &= 2i\mu L_{xm}L_{yn}e^{-i\beta_{1mn}z}e^{iL_{xm}x}e^{iL_{yn}y},\\
\sigma_{xz}(x,y,z) &= -2i\mu L_{xm}\beta_{1mn}e^{-i\beta_{1mn}z}e^{iL_{xm}x}e^{iL_{yn}y},\\
\sigma_{yz}(x,y,z) &= -2i\mu L_{yn}\beta_{1mn}e^{-i\beta_{1mn}z}e^{iL_{xm}x}e^{iL_{yn}y},\\
\sigma_{xx}(x,y,z) &= i\big(\lambda k_1^2 + 2\mu L_{xm}^2\big)e^{-i\beta_{1mn}z}e^{iL_{xm}x}e^{iL_{yn}y},\\
\sigma_{yy}(x,y,z) &= i\big(\lambda k_1^2 + 2\mu L_{yn}^2\big)e^{-i\beta_{1mn}z}e^{iL_{xm}x}e^{iL_{yn}y},\\
\sigma_{zz}(x,y,z) &= i\big(\lambda k_1^2 + 2\mu \beta_{1mn}^2\big)e^{-i\beta_{1mn}z}e^{iL_{xm}x}e^{iL_{yn}y};
\end{aligned} \quad (10)$$

волна типа C:

$$\begin{aligned}
u_x(x,y,z) &= \beta_{2mn}e^{i\beta_{2mn}z}e^{iL_{xm}x}e^{iL_{yn}y},\\
u_y(x,y,z) &= 0,\\
u_z(x,y,z) &= -L_{xm}e^{i\beta_{2mn}z}e^{iL_{xm}x}e^{iL_{yn}y},\\
\sigma_{xy}(x,y,z) &= i\mu L_{yn}\beta_{2mn}e^{i\beta_{2mn}z}e^{iL_{xm}x}e^{iL_{yn}y},\\
\sigma_{xz}(x,y,z) &= i\mu\big(\beta_{2mn}^2 - L_{xm}^2\big)e^{i\beta_{2mn}z}e^{iL_{xm}x}e^{iL_{yn}y},\\
\sigma_{yz}(x,y,z) &= -i\mu L_{xm}L_{yn}e^{i\beta_{2mn}z}e^{iL_{xm}x}e^{iL_{yn}y},\\
\sigma_{xx}(x,y,z) &= 2i\mu L_{xm}\beta_{2mn}e^{i\beta_{2mn}z}e^{iL_{xm}x}e^{iL_{yn}y},\\
\sigma_{yy}(x,y,z) &= 0,\\
\sigma_{zz}(x,y,z) &= -2i\mu L_{xm}\beta_{2mn}e^{i\beta_{2mn}z}e^{iL_{xm}x}e^{iL_{yn}y};
\end{aligned} \quad (11)$$

волна типа D:

$$
\begin{aligned}
&u_x(x,y,z) = \beta_{2mn} e^{-i\beta_{2mn}z} e^{iL_{xm}x} e^{iL_{yn}y},\\
&u_y(x,y,z) = 0,\\
&u_z(x,y,z) = L_{xm} e^{-i\beta_{2mn}z} e^{iL_{xm}x} e^{iL_{yn}y},\\
&\sigma_{xy}(x,y,z) = i\mu L_{yn}\beta_{2mn} e^{-i\beta_{2mn}z} e^{iL_{xm}x} e^{iL_{yn}y},\\
&\sigma_{xz}(x,y,z) = -i\mu\bigl(\beta_{2mn}^2 - L_{xm}^2\bigr) e^{-i\beta_{2mn}z} e^{iL_{xm}x} e^{iL_{yn}y},\\
&\sigma_{yz}(x,y,z) = i\mu L_{xm} L_{yn} e^{-i\beta_{2mn}z} e^{iL_{xm}x} e^{iL_{yn}y},\\
&\sigma_{xx}(x,y,z) = 2i\mu L_{xm}\beta_{2mn} e^{-i\beta_{2mn}z} e^{iL_{xm}x} e^{iL_{yn}y},\\
&\sigma_{yy}(x,y,z) = 0,\\
&\sigma_{zz}(x,y,z) = -2i\mu L_{xm}\beta_{2mn} e^{-i\beta_{2mn}z} e^{iL_{xm}x} e^{iL_{yn}y};
\end{aligned}
\tag{12}
$$

волна типа E:

$$
\begin{aligned}
&u_x(x,y,z) = 0,\\
&u_y(x,y,z) = \beta_{2mn} e^{i\beta_{2mn}z} e^{iL_{xm}x} e^{iL_{yn}y},\\
&u_z(x,y,z) = -L_{yn} e^{i\beta_{2mn}z} e^{iL_{xm}x} e^{iL_{yn}y},\\
&\sigma_{xy}(x,y,z) = i\mu L_{xm}\beta_{2mn} e^{i\beta_{2mn}z} e^{iL_{xm}x} e^{iL_{yn}y},\\
&\sigma_{xz}(x,y,z) = -i\mu L_{xm} L_{yn} e^{i\beta_{2mn}z} e^{iL_{xm}x} e^{iL_{yn}y},\\
&\sigma_{yz}(x,y,z) = i\mu\bigl(\beta_{2mn}^2 - L_{yn}^2\bigr) e^{i\beta_{2mn}z} e^{iL_{xm}x} e^{iL_{yn}y},\\
&\sigma_{xx}(x,y,z) = 0,\\
&\sigma_{yy}(x,y,z) = 2i\mu L_{yn}\beta_{2mn} e^{i\beta_{2mn}z} e^{iL_{xm}x} e^{iL_{yn}y},\\
&\sigma_{zz}(x,y,z) = -2i\mu L_{yn}\beta_{2mn} e^{i\beta_{2mn}z} e^{iL_{xm}x} e^{iL_{yn}y};
\end{aligned}
\tag{13}
$$

волна типа H:

$$
\begin{aligned}
&u_x(x,y,z) = 0,\\
&u_y(x,y,z) = \beta_{2mn} e^{-i\beta_{2mn}z} e^{iL_{xm}x} e^{iL_{yn}y},\\
&u_z(x,y,z) = L_{yn} e^{-i\beta_{2mn}z} e^{iL_{xm}x} e^{iL_{yn}y},\\
&\sigma_{xy}(x,y,z) = i\mu L_{xm}\beta_{2mn} e^{-i\beta_{2mn}z} e^{iL_{xm}x} e^{iL_{yn}y},\\
&\sigma_{xz}(x,y,z) = i\mu L_{xm} L_{yn} e^{-i\beta_{2mn}z} e^{iL_{xm}x} e^{iL_{yn}y},\\
&\sigma_{yz}(x,y,z) = -i\mu\bigl(\beta_{2mn}^2 - L_{yn}^2\bigr) e^{-i\beta_{2mn}z} e^{iL_{xm}x} e^{iL_{yn}y},\\
&\sigma_{xx}(x,y,z) = 0,\\
&\sigma_{yy}(x,y,z) = 2i\mu L_{yn}\beta_{2mn} e^{-i\beta_{2mn}z} e^{iL_{xm}x} e^{iL_{yn}y},\\
&\sigma_{zz}(x,y,z) = -2i\mu L_{yn}\beta_{2mn} e^{-i\beta_{2mn}z} e^{iL_{xm}x} e^{iL_{yn}y}.
\end{aligned}
\tag{14}
$$

Компоненты произвольных векторов в представлении (8) будем в дальнейшем обозначать в соответствии с типами волн (9)–(14): $\mathbf{a}_{mn} = (A_{mn}, C_{mn}, E_{mn})$, $\mathbf{b}_{mn} = (B_{mn}, D_{mn}, H_{mn})$.

2. Энергетические характеристики упругих волн

Чтобы определить ориентацию отдельных элементарных гармоник Флоке, исследуем их энергетические характеристики.

2.1. Закон сохранения энергии. Дифференциальное тождество из системы уравнений трехмерной динамической теории упругости (1)–(2), которое характеризует закон сохранения энергии в случае пространственной теории упругости было получено ранее в [2]. Сформулируем следующую теорему.

Теорема 2. *Если* u_x, u_y, u_z, σ_{xx}, σ_{yy}, σ_{zz}, σ_{xy}, σ_{xz}, σ_{yz} — *решение системы уравнений* (1)–(2), *то*

$$\frac{\partial}{\partial t}\Bigg\{\frac{\rho}{2}\left[\left(\frac{\partial u_x}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial u_y}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial u_z}{\partial t}\right)^2\right]+\frac{\lambda+2\mu}{2}\left[\left(\frac{\partial u_x}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u_y}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u_z}{\partial z}\right)^2\right]+$$
$$+\frac{\mu}{2}\left[\left(\frac{\partial u_x}{\partial y}+\frac{\partial u_y}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u_y}{\partial z}+\frac{\partial u_z}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u_z}{\partial x}+\frac{\partial u_x}{\partial z}\right)^2\right]+$$
$$+\lambda\left[\frac{\partial u_x}{\partial x}\frac{\partial u_y}{\partial y}+\frac{\partial u_y}{\partial y}\frac{\partial u_z}{\partial z}+\frac{\partial u_z}{\partial z}\frac{\partial u_x}{\partial x}\right]\Bigg\}-\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial u_x}{\partial t}\sigma_{xx}+\frac{\partial u_y}{\partial t}\sigma_{xy}+\frac{\partial u_z}{\partial t}\sigma_{xz}\right]-$$
$$-\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial u_x}{\partial t}\sigma_{xy}+\frac{\partial u_y}{\partial t}\sigma_{yy}+\frac{\partial u_z}{\partial t}\sigma_{yz}\right]-\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\partial u_x}{\partial t}\sigma_{xz}+\frac{\partial u_y}{\partial t}\sigma_{yz}+\frac{\partial u_z}{\partial t}\sigma_{zz}\right]$$

(*закон сохранения энергии*).

Из теоремы 2 следует, что плотность энергии

$$E=\frac{\rho}{2}\left[\left(\frac{\partial u_x}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial u_y}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial u_z}{\partial t}\right)^2\right]+\frac{\lambda+2\mu}{2}\left[\left(\frac{\partial u_x}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u_y}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u_z}{\partial z}\right)^2\right]+$$
$$+\frac{\mu}{2}\left[\left(\frac{\partial u_x}{\partial y}+\frac{\partial u_y}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u_y}{\partial z}+\frac{\partial u_z}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u_z}{\partial x}+\frac{\partial u_x}{\partial z}\right)^2\right]+\lambda\left[\frac{\partial u_x}{\partial x}\frac{\partial u_y}{\partial y}+\frac{\partial u_y}{\partial y}\frac{\partial u_z}{\partial z}+\frac{\partial u_z}{\partial z}\frac{\partial u_x}{\partial x}\right]$$

и компоненты вектора Умова—Пойнтинга

$$\mathbf{\Pi}_x=-\frac{\partial u_x}{\partial t}\sigma_{xx}-\frac{\partial u_y}{\partial t}\sigma_{xy}-\frac{\partial u_z}{\partial t}\sigma_{xz},$$
$$\mathbf{\Pi}_y=-\frac{\partial u_x}{\partial t}\sigma_{xy}-\frac{\partial u_y}{\partial t}\sigma_{yy}-\frac{\partial u_z}{\partial t}\sigma_{yz},$$
$$\mathbf{\Pi}_z=-\frac{\partial u_x}{\partial t}\sigma_{xz}-\frac{\partial u_y}{\partial t}\sigma_{yz}-\frac{\partial u_z}{\partial t}\sigma_{zz}.$$

Среднее значение вектора Умова—Пойнтинга выражается через комплексные амплитуды перемещений и напряжений следующим образом:

$$\overline{\mathbf{\Pi}}=-\frac{\omega}{2}\operatorname{Im}\Big(u_x^*\sigma_{xx}+u_y^*\sigma_{xy}+u_z^*\sigma_{xz},\ u_x^*\sigma_{xy}+u_y^*\sigma_{yy}+u_z^*\sigma_{yz},\ u_x^*\sigma_{xz}+u_y^*\sigma_{yz}+u_z^*\sigma_{zz}\Big). \tag{15}$$

2.2. Условия на бесконечности. Определим, в каком направлении переносят энергию элементарные упругие волны (9)–(14).

По формуле (15) средние значения третьей компоненты вектора Умова—Пойнтинга для элементарных гармоник

$$\begin{aligned}
A:&\quad \overline{\Pi}_z=-\frac{\omega}{2}\,e^{-2\Im\beta_{1mn}\,z}\Re\beta_{1mn}\,\rho\omega^2,\\
B:&\quad \overline{\Pi}_z=\frac{\omega}{2}\,e^{2\Im\beta_{1mn}\,z}\Re\beta_{1mn}\,\rho\omega^2,\\
C:&\quad \overline{\Pi}_z=-\mu\frac{\omega}{2}\,e^{-2\Im\beta_{2mn}\,z}\Re\beta_{2mn}\,\Big[L_{xm}^2+\Big|k_2^2-\big(L_{xm}^2+L_{yn}^2\big)\Big|\Big],\\
D:&\quad \overline{\Pi}_z=\mu\frac{\omega}{2}\,e^{2\Im\beta_{2mn}\,z}\Re\beta_{2mn}\,\Big[L_{xm}^2+\Big|k_2^2-\big(L_{xm}^2+L_{yn}^2\big)\Big|\Big],\\
E:&\quad \overline{\Pi}_z=-\mu\frac{\omega}{2}\,e^{-2\Im\beta_{2mn}\,z}\Re\beta_{2mn}\,\Big[L_{yn}^2+\Big|k_2^2-\big(L_{xm}^2+L_{yn}^2\big)\Big|\Big],\\
H:&\quad \overline{\Pi}_z=\mu\frac{\omega}{2}\,e^{2\Im\beta_{2mn}\,z}\Re\beta_{2mn}\,\Big[L_{yn}^2+\Big|k_2^2-\big(L_{xm}^2+L_{yn}^2\big)\Big|\Big].
\end{aligned} \tag{16}$$

Легко видеть, что при мнимых значениях β_{jmn} третья компонента вектора Умова—Пойнтинга обращается в нуль, а напряжения и перемещения исчезают при $z \to +\infty$ или $z \to -\infty$ (затухающие волны). При вещественных значениях β_{jmn} компонента $\overline{\mathbf{\Pi}}_z$ для всех элементарных гармоник не зависит от пространственной координаты z. В этом случае элементарные гармоники переносят энергию вдоль оси z (распространяющиеся волны). В соответствии со знаком $\overline{\mathbf{\Pi}}_z$ гармоники Флоке типов A, C и E положительно ориентированы по отношению к координатной плоскости Oxy, а гармоники типов B, D, H — отрицательно ориентированы.

Квазипериодическую волну общего вида будем называть положительно ориентированной (уходящей на бесконечность в направлении оси z), если она состоит только из положительно ориентированных гармоник. Квазипериодическую волну будем называть отрицательно ориентированной (приходящей с бесконечности), если она состоит только из отрицательно ориентированных гармоник. Требование ориентированности волны равносильно в нашем случае условиям на бесконечности.

Таким образом, для положительно ориентированных волн в формуле (8) имеем $\mathbf{b}_{mn} = 0$. Тогда

$$\mathbf{u}(x,y,z) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathbf{A}_{mn}\mathbf{E}^{+}_{mn}(z)\mathbf{a}_{mn}e^{iL_{xm}x}e^{iL_{yn}y}. \tag{17}$$

Для отрицательно ориентированных волн $\mathbf{a}_{mn} = 0$ и

$$\mathbf{u}(x,y,z) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathbf{B}_{mn}\mathbf{E}^{-}_{mn}(z)\mathbf{b}_{mn}e^{iL_{xm}x}e^{iL_{yn}y}. \tag{18}$$

3. Граничные задачи для системы уравнений теории упругости в полупространстве

3.1. Основные граничные задачи. В общем случае в пространственной теории упругости основные граничные задачи ставятся следующим образом: первая граничная задач — когда на границе упругого полупространств заданы следы перемещений $u_x(x,y,0) = f_x(x,y)$, $u_y(x,y,0) = f_y(x,y)$, $u_z(x,y,0) = f_z(x,y)$, вторая граничная задача — когда заданы следы напряжений $\sigma_{xz}(x,y,0) = g_{xz}(x,y)$, $\sigma_{yz}(x,y,0) = g_{yz}(x,y)$, $\sigma_{zz}(x,y,0) = g_{zz}(x,y)$.

Рассмотрим две задачи об отражении упругой волны от границы упругого полупространства. Покажем, что решение таких задач может быть найдено в явном виде.

Пусть отрицательно ориентированная упругая волна от бесконечно удаленного источника $\Big(u_x^{(0)},\, u_y^{(0)},\, u_z^{(0)},\, \sigma_{xy}^{(0)},\, \sigma_{xz}^{(0)},\, \sigma_{yz}^{(0)},\, \sigma_{xx}^{(0)},\, \sigma_{yy}^{(0)},\, \sigma_{zz}^{(0)}\Big)$ набегает на границу упругого полупространства, находящегося в контакте с жестким основанием. Требуется найти отраженную положительно ориентированную волну $\Big(u_x,\, u_y,\, u_z,\, \sigma_{xy},\, \sigma_{xz},\, \sigma_{yz},\, \sigma_{xx},\, \sigma_{yy},\, \sigma_{zz}\Big)$, удовлетворяющую граничным условиям вида

$$u_x^{(0)}(x,y,0) + u_x(x,y,0) = 0, \quad u_y^{(0)}(x,y,0) + u_y(x,y,0) = 0, \quad u_z^{(0)}(x,y,0) + u_z(x,y,0) = 0, \tag{19}$$

или

$$\sigma_{xz}^{(0)}(x,y,0) + \sigma_{xz}(x,y,0) = 0, \quad \sigma_{yz}^{(0)}(x,y,0) + \sigma_{yz}(x,y,0) = 0, \quad u_z^{(0)}(x,y,0) + u_z(x,y,0) = 0. \tag{20}$$

Падающую волну зададим по формуле (18) в виде вектор-функции одной гармоники Флоке с индексами (s,r):

$$\mathbf{u}^{(0)} = \mathbf{B}_{sr}\mathbf{E}^{-}_{sr}(z)\mathbf{b}^{(0)}_{sr}e^{iL_{xs}x}e^{iL_{yr}y}. \tag{21}$$

Отраженную волну будем искать в виде (17).

Теорема 3. *Если упругое полупространство находится в полном контакте с жестким основанием, то у отраженной волны отлична от нуля только гармоника с индексом (s,r). Если упругое полупространство скользит без трения по жесткому основанию, то у отраженной волны отлична от нуля только гармоника с индексом (s,r).*

Доказательство. Рассмотрим первую задачу, когда при $x \in (0, l_x)$, $y \in (0, l_y)$ должны быть выполнены условия (19).

Введем матрицы $\mathbf{P}_{jk}$ и $\mathbf{Q}_{jk}$, составленные из первых трех строк матриц $\mathbf{A}_{mn}$ и $\mathbf{B}_{mn}$:

$$\mathbf{P}_{jk} = \begin{pmatrix} L_{xj} & \beta_{2jk} & 0 \\ L_{yk} & 0 & \beta_{2jk} \\ \beta_{1jk} & -L_{xj} & -L_{yk} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q}_{jk} = \begin{pmatrix} L_{xj} & \beta_{2jk} & 0 \\ L_{yk} & 0 & \beta_{2jk} \\ -\beta_{1jk} & L_{xj} & L_{yk} \end{pmatrix}.$$

Условия (19) в векторной форме примут вид

$$\mathbf{Q}_{sr}\mathbf{b}_{sr}^{(0)} e^{iL_{xs}x} e^{iL_{yr}y} + \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathbf{P}_{mn}\mathbf{a}_{mn} e^{iL_{xm}x} e^{iL_{yn}y} = 0.$$

Очевидно, что $\mathbf{a}_{mn} = 0$, если $(m, n) \neq (s, r)$.

Для гармоники с парой индексов (s, r)

$$\mathbf{a}_{sr} = -\mathbf{P}_{sr}^{-1}\mathbf{Q}_{sr}\mathbf{b}_{sr}^{(0)}. \tag{22}$$

Отметим, что формула (22) имеет смысл, если существует обратная матрица P_{sr}^{-1}, т.е. если

$$|\mathbf{P}_{sr}| = \beta_{2sr}\big(\beta_{1sr}\beta_{2sr} + L_{xs}^2 + L_{yr}^2\big) \neq 0.$$

Предположим, что это условие не выполнено. Так как случай $\beta_{2sr} = 0$ был исключен, то должно быть

$$L_{xs}^2 + L_{yr}^2 = -\beta_{1sr}\beta_{2sr}.$$

Это равенство выполняется, если $\beta_{1sr}\beta_{2sr} < 0$. Тогда оба числа β_{jsr} должны быть мнимыми:

$$\beta_{1sr} = i\sqrt{L_{xs}^2 + L_{yr}^2 - k_1^2}, \quad \beta_{2sr} = i\sqrt{L_{xs}^2 + L_{yr}^2 - k_2^2}.$$

Но равенство

$$L_{xs}^2 + L_{yr}^2 = \sqrt{L_{xs}^2 + L_{yr}^2 - k_1^2}\sqrt{L_{xs}^2 + L_{yr}^2 - k_2^2}$$

невозможно при положительных k_1 и k_2 (см. [1]). Пришли к противоречию.

Для второй граничной задачи, когда должны быть выполнены условия (20), составим из третьей, пятой и шестой строк матриц $\mathbf{A}_{mn}$ и $\mathbf{B}_{mn}$ еще две матрицы:

$$\mathbf{R}_{mn} = \begin{pmatrix} \beta_{1mn} & -L_{xm} & -L_{yn} \\ 2i\mu\beta_{1mn}L_{xm} & i\mu\big(\beta_{2mn}^2 - L_{xm}^2\big) & -i\mu L_{xm}L_{yn} \\ 2i\mu\beta_{1mn}L_{yn} & -i\mu L_{xm}L_{yn} & i\mu\big(\beta_{2mn}^2 - L_{yn}^2\big) \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{S}_{mn} = \begin{pmatrix} -\beta_{1mn} & L_{xm} & L_{yn} \\ -2i\mu\beta_{1mn}L_{xm} & -i\mu\big(\beta_{2mn}^2 - L_{xm}^2\big) & i\mu L_{xm}L_{yn} \\ -2i\mu\beta_{1mn}L_{yn} & i\mu L_{xm}L_{yn} & -i\mu\big(\beta_{2mn}^2 - L_{yn}^2\big) \end{pmatrix}.$$

Условия (20) равносильны системе уравнений

$$\mathbf{S}_{sr}\mathbf{b}_{sr}^{(0)} e^{iL_{xs}x} e^{iL_{yr}y} + \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathbf{R}_{mn}\mathbf{a}_{mn} e^{iL_{xm}x} e^{iL_{yn}y} = 0.$$

Ее решение имеет вид

$$\mathbf{a}_{sr} = -\mathbf{R}_{sr}^{-1}\mathbf{S}_{sr}\mathbf{b}_{sr}^{(0)}, \qquad \mathbf{a}_{mn} = 0 \quad \text{при } m \neq s,\, n \neq r.$$

Матрица $\mathbf{R}_{sr}$ имеет обратную матрицу тогда и только тогда, когда

$$|\mathbf{R}_{sr}| = -\mu^2\beta_{1sr}\beta_{2sr}^2\big(\beta_{2sr}^2 + L_{xs}^2 + L_{yr}^2\big) \neq 0.$$

Комплексное число $\beta_{2sr}^2 + L_{xs}^2 + L_{yr}^2$ отлично от нуля, иначе $\beta_{2sr} = i\sqrt{L_{xs}^2 + L_{yr}^2 - k_2^2}$, откуда следует, что $k_2 = 0$. Противоречие. □

3.2. Задача дифракции упругой волны на двоякопериодической системе дефектов. Рассмотрим следующую задачу. Пусть бесконечно удаленный источник в верхнем полупространстве возбуждает отрицательно ориентированную упругую волну $\mathbf{u}^{(0)}$ вида (21)). Упругое полупространство $z > 0$ лежит на жестком основании $z < 0$. На плоскости $z = 0$ расположен двоякопериодическая система дефектов. Обозначим через $\mathcal{M}$ часть плоскости, занятую дефектами, а остальную ее часть через $\mathcal{N}$. Требуется найти отраженную вверх положительно ориентированную волну вида (17), удовлетворяющую следующим граничным условиям: на $\mathcal{N}$ должны быть выполнены условия (19), на $\mathcal{M}$ — условия (20).

Будем искать решение задачи, как сумму решений двух задач: вспомогательной задачи об отражении волны (без дефектов) и волны, представляющей собой возмущение от дефектов.

Пусть решение вспомогательной задачи существует и единственно. Обозначим его через $\underline{u_x}$, $\underline{u_y}$, $\underline{u_z}$, $\underline{\sigma_{xx}}$, $\underline{\sigma_{yy}}$, $\underline{\sigma_{zz}}$, $\underline{\sigma_{xy}}$, $\underline{\sigma_{xz}}$, $\underline{\sigma_{yz}}$.

Перейдем к задаче о возмущении упругого поля с дефектами. По условиям этой задачи $u_z = 0$ всюду; следовательно для всех пар индексов (m, n) должно выполняться равенство

$$A_{mn} = C_{mn}\frac{L_{xm}}{\beta_{1mn}} + E_{mn}\frac{L_{yn}}{\beta_{1mn}}.$$

Исключим коэффициенты A_{mn} и запишем оставшиеся граничные условия в скалярной форме следующим образом:

$$\begin{cases} \sum\limits_{m=-\infty}^{+\infty}\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}\left(C_{mn}\dfrac{\beta_{1mn}\beta_{2mn}+L_{mx}}{\beta_{1mn}} + E_{mn}\dfrac{L_{yn}}{\beta_{1mn}}\right)e^{iL_{xm}x}e^{iL_{yn}y} = 0, \\ \sum\limits_{m=-\infty}^{+\infty}\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}\left(C_{mn}\dfrac{L_{xm}}{\beta_{1mn}} + E_{mn}\dfrac{\beta_{1mn}\beta_{2mn}+L_{yn}}{\beta_{1mn}}\right)e^{iL_{xm}x}e^{iL_{yn}y} = 0, \end{cases} \quad (x, y) \in \mathcal{N}, \quad (23)$$

$$\begin{cases} i\mu\sum\limits_{m=-\infty}^{+\infty}\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}\left(C_{mn}\big(\beta_{2mn}^2 + L_{xm}^2\big) + E_{mn}L_{xn}L_{yn}\right)e^{iL_{xm}x}e^{iL_{yn}y} = -\underline{\sigma_{xz}} - \sigma_{xz}^{(0)}, \\ i\mu\sum\limits_{m=-\infty}^{+\infty}\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}\left(C_{mn}L_{xn}L_{yn} + E_{mn}\big(\beta_{2mn}^2 + L_{yn}^2\big)\right)e^{iL_{xm}x}e^{iL_{yn}y} = -\underline{\sigma_{yz}} - \sigma_{yz}^{(0)}, \end{cases} \quad (x, y) \in \mathcal{M}. \quad (24)$$

Пусть $\mathbf{c}_{mn} = (C_{mn}, E_{mn})$, $\underline{\sigma} = (\underline{\sigma_{xz}} + \sigma_{xz}^{(0)},\ \underline{\sigma_{yz}} + \sigma_{yz}^{(0)})$ и матрицы

$$\mathbf{P}_{mn} = \begin{pmatrix} \dfrac{\beta_{1mn}\beta_{2mn}+L_{mx}}{\beta_{1mn}} & \dfrac{L_{yn}}{\beta_{1mn}} \\ \dfrac{L_{xm}}{\beta_{1mn}} & \dfrac{\beta_{1mn}\beta_{2mn}+L_{yn}}{\beta_{1mn}} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q}_{mn} = \begin{pmatrix} i\mu\big(\beta_{2mn}^2 + L_{xm}^2\big) & i\mu L_{xn}L_{yn} \\ i\mu L_{xn}L_{yn} & i\mu\big(\beta_{2mn}^2 + L_{yn}^2\big) \end{pmatrix}.$$

Тогда равенства (23), (24) в векторной форме имеют вид

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\mathbf{P}_{mn}\,\mathbf{c}_{mn}\,e^{iL_{xm}x}e^{iL_{yn}y} = 0, \qquad (x, y) \in \mathcal{N}, \quad (25)$$

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\mathbf{Q}_{mn}\,\mathbf{c}_{mn}\,e^{iL_{xm}x}e^{iL_{yn}y} = -\underline{\sigma}, \quad (x, y) \in \mathcal{M} \quad (26)$$

и носят название парного сумматорного функционального уравнения (ПСФУ).

Пусть новые искомые векторы $\mathbf{d}_{mn} = \mathbf{Q}_{mn}\mathbf{c}_{mn}$, тогда (25), (26) можно записать в виде

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\mathbf{P}_{mn}\mathbf{Q}_{mn}^{-1}\,\mathbf{d}_{mn}\,e^{iL_{xm}x}e^{iL_{yn}y} = 0, \quad (x, y) \in \mathcal{N}, \quad (27)$$

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\mathbf{d}_{mn}\,e^{iL_{xm}x}e^{iL_{yn}y} = -\underline{\sigma}, \qquad (x, y) \in \mathcal{M}. \quad (28)$$

Теорема 4. *Задача дифракции упругой волны на периодической системе дефектов, расположенных на границе полупространства, с граничными условиями* (19) *на* $\mathcal{N}$ *и* (20) *на* $\mathcal{M}$ *сводится к векторному парному сумматорному функциональному уравнению* (27), (28).

Заметим, что условие существования обратной матрицы $\mathbf{Q}_{m,n}^{-1}$ в формуле(27) сводится к условию

$$\beta_{2mn}^2 + L_{xm}^2 + L_{yn}^2 \neq 0.$$

Равенство $\beta_{2mn}^2 = -L_{xm}^2 - L_{yn}^2$ может быть выполнено только при $k_2 = 0$, что невозможно.

Полученное ПСФУ можно свести к БСЛАУ в векторной форме, используя метод интегральных тождеств. Решение БСЛАУ может быть найдено методом усечения (редукции).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Осипов Е. А.* О задачах дифракции упругих волн на периодических системах дефектов в слоистой среде// Тр. Мат. центра им. Н. И. Лобачевского. — Казань: Изд-во Казанск. мат. об-ва, 2010. — *40*. — С. 250–255.
2. *Осипов Е. А.* Энергетические характеристики упругой волны для периодических задач теории упругости// Сб. мат. IV Всеросс. научно-инновационной школы. — Саров: Альфа, 2010. — С. 93–95.
3. *Осипов Е. А., Плещинский Н. Б.* Сумматорные и интегральные уравнения периодических задач дифракции упругих волн на дефектах в слоистых средах// Изв. вузов. Сер. мат. — 2008. — № 9. — С. 76–82.
4. *Aleksandrova I. L., Osipov E. A., Pleshchinskii N. B., Rogozhin P. A.* On problems of electromagnetic wave diffraction on periodical sets of heterogeneities in the layered media// Int. Conf. Math. Methods in Electromagnetic Theory MMET 2012. — Kharkiv, Ukraine, August 28–30, 2012. — С. 455–458.
5. *Pleshchinskaya I. E., Pleshchinskii N. B.* Over-determined boundary value problems for PDE and their application in the wave propagation theory// Appl. Anal. — 2014. — *93*, № 11. — С. 2350–2359.

Е. А. Осипов
Казанский (Приволжский) федеральный университет
E-mail: `Evgenij.Osipov@kpfu.ru, osipove@mail.ru`

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 139 (2017). С. 70–78

УДК 517.925.54, 517.928.1

РАЗЛИЧНЫЕ ПОДХОДЫ К ВЫЯВЛЕНИЮ АСИМПТОТИК РЕШЕНИЙ ТРЕТЬЕГО УРАВНЕНИЯ ПЕНЛЕВЕ В ОКРЕСТНОСТИ БЕСКОНЕЧНОСТИ

© 2017 г. **А. В. ВАСИЛЬЕВ, А. В. ПАРУСНИКОВА**

Аннотация. Проведено асимптотическое исследование третьих трансцендентов Пенлеве при $\alpha\delta \neq 0$, $\gamma = 0$ в окрестности бесконечности в некотором секторе с углом раствора $<2\pi$ методом доминантных мономов (англ. *method of dominant balance*). Промежуточные результаты сравниваются с результатами, полученными при использовании методов трехмерной степенной геометрии. Найдены возможные асимптотики, выраженные в терминах эллиптических функций, а также степенной ряд, являющийся асимтотическим разложением решения рассматриваемого третьего уравнения Пенлеве в некотором секторе, для раствора угла которого получена оценка, а для коэффициентов ряда приведено рекуррентное соотношение.

Ключевые слова: уравнения Пенлеве, многоугольник Ньютона, асимптотические разложения, порядки Жевре.

AMS Subject Classification: 34M25, 34M55

1. Введение. Напомним, что обыкновенное дифференциальное уравнение на расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ удовлетворяет *свойству Пенлеве*, если у его решений нет подвижных особых точек, помимо полюсов.

Как показал П. Пенлеве вместе со своими учениками Б. Гамбье и Р. Гарнье (см. [4]), существует только 50 канонических уравнений, удовлетворяющих этому свойству и имеющих вид

$$w'' = P(z, w, w'),$$

где функция $P(z, w, w')$ мероморфна по z и рациональна по w и w'. Из этих 50 уравнений 44 могут быть либо проинтегрированы в элементарных или известных специальных функциях, либо сведены к оставшимся шести, которые получили название *уравнений Пенлеве.*

В общем случае решения уравнений Пенлеве определяют новые специальные функции, называющиеся *трансцендентами Пенлеве.*

П. Бутру нашел возможные асимптотики первых и вторых трансцендентов Пенлеве в окрестности бесконечности (см. [9]). Он показал, что $\overline{\mathbb{C}}$ в этой окрестности разбивается на секторы, внутри которых общее асимптотическое поведение первых и вторых трансцендентов Пенлеве задается эллиптическими функциями, а также рассмотрел специальные случаи, в которых их асимптотика выражается через экспоненты или степенные функции. Для первых трансцендентов Пенлеве границы этих секторов задаются углами $2k\pi/5$, а для вторых — углами $k\pi/3$, где $k \in \mathbb{Z}$. Позднее Н. Джоши и М. Д. Крускал с помощью обобщенного метода быстро-медленных переменных продолжили исследования, начатые П. Бутру (см. [11]). Дальнейшему изучению этой тематики для первого и второго уравнений Пенлеве посвящен обширный цикл работ различных авторов. В частности, в [5, п. 1] дан подробный обзор работ по эллиптическим асимптотикам уравнений Пенлеве.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 16-51-150005 НЦНИ_а.

В данной работе ищем асимптотики третьих трансцендентов Пенлеве в окрестности бесконечности, имеющие тот же вид, что и асимптотики первых и вторых трансцендентов Пенлеве, найденные П. Бутру, т.е. выраженные через эллиптические функции. Часть результатов этой работы была представлена в докладе на VIII Приокской научной конференции (см. [1]).

2. Предварительные замечания. Определим, как будем сравнивать функции друг с другом при $z \to z_0$ (в нашем случае эта запись означает, что переменная z стремится к точке z_0 вдоль пути, лежащего внутри некоторого сектора с вершиной в точке z_0 и с углом раствора меньше 2π).

Определение 1. Говорят, что функция $f(z)$ *мала* по сравнению с функцией $g(z)$ при $z \to z_0$, если

$$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = 0$$

(т.е. $f(z) = o(g(z))$ при $z \to z_0$). Следуя обозначениям из [8], будем записывать это следующим образом: $f(z) \ll g(z)$.

Определение 2. Ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^{-n}$ называется *степенным асимптотическим разложением* функции $w(z)$ при $z \to \infty$, если для всех $N \in \mathbb{N}$ выполнено условие

$$w(z) - \sum_{n=0}^{N} a_n z^{-n} \ll z^{-N} \quad \text{при } z \to \infty.$$

Это определение обобщается в [6] следующим образом.

Определение 3. Ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \mu_n(z)$ называется *асимптотическим разложением* функции $w(z)$ при $z \to \infty$, если существует такая последовательность функций $q_n(z)$, что при $z \to \infty$

$$q_{n+1}(z) \ll q_n(z), \quad \mu_{n+1}(z) \ll q_n(z); \quad \overline{\lim_{z\to\infty}} \left| \frac{\mu_n(z)}{q_n(z)} \right| > 0,$$

а также при всех $N \in \mathbb{N}$ выполняется условие

$$w(z) - \sum_{n=0}^{N} a_n \mu_n(z) \ll q_N(z).$$

Будем использовать обозначение

$$w(z) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n \mu_n(z) \quad \text{при } z \to \infty.$$

В частности, если $\mu_n(z) = q_n(z) = z^{-n}$, получается степенное асимптотическое разложение функции $w(z)$ при $z \to \infty$.

Первый член асимптотического разложения называется *главным членом асимптотики функции* $w(z)$, а сумма первых нескольких членов называется *асимптотикой функции* $w(z)$.

Определение 4 (см. [7]). Пусть $\Omega_R(\varphi_1, \varphi_2)$ — открытый сектор с вершиной в бесконечности на $\overline{\mathbb{C}}$, т.е.

$$\Omega_R(\varphi_1, \varphi_2) = \Big\{ z: \ |z| > R, \ \operatorname{Arg} z \in (\varphi_1, \varphi_2) \Big\}.$$

Пусть w — голоморфная на $\Omega_R(\varphi_1, \varphi_2)$ функция и $\hat{w} \in \mathbb{C}[[z^{-1}]]$. Говорят, что w *асимптотически приближается по Жевре* рядом $\hat{w}$ на $\Omega_R(\varphi_1, \varphi_2)$ с порядком $1/k$, если для точек z любого замкнутого подсектора Y из $\Omega_R(\varphi_1, \varphi_2)$ и любого $n \in \mathbb{N}$ существуют такие постоянные $A_Y > 0$, $C > 0$, что

$$|z^n| \left| w(z) - \sum_{p=0}^{n-1} a_p z^{-p} \right| < C (n!)^{1/k} A_Y^n.$$

Теперь перейдем непосредственно к асимптотическому исследованию третьего уравнения Пенлеве (уравнения P_3):

$$w'' = \frac{(w')^2}{w} - \frac{w'}{z} + \frac{\alpha w^2 + \beta}{z} + \gamma w^3 + \frac{\delta}{w}. \tag{1}$$

Можно показать (см. [2]), что третье уравнение Пенлеве явно интегрируется при выполнении одного из следующих условий:

1) $\alpha = \gamma = 0$;
2) $\beta = \delta = 0$.

Таким образом, всего выделяется четыре случая, когда уравнение P_3 не интегрируется в явном виде:

1) $\gamma = 0$, $\alpha\delta \neq 0$;
2) $\gamma = \delta = 0$, $\alpha\beta \neq 0$;
3) $\delta = 0$, $\beta\gamma \neq 0$;
4) $\gamma\delta \neq 0$.

Известно (см. [2]), что пункты 3), 2) сводятся к 1), 4) соответственно. Следовательно, остаются два случая, которые нужно рассмотреть.

В этой работе остановимся на случае $\gamma = 0$, $\alpha\delta \neq 0$.

3. Метод доминантых мономов. Для нахождения асимптотических свойств решений дифференциальных уравнений можно использовать *метод доминантных мономов* (англ. *method of dominant balance*), который заключается в следующем (см. [8]).

1. Накладывая определенные условия на функцию, асимптотику которой требуется найти, предположим, что некоторые мономы дифференциального уравнения малы по сравнению с оставшимися вблизи данной точки, после чего пренебрегаем ими. Полученное уравнение будем называть *укороченным дифференциальным уравнением.*
2. Решив укороченное дифференциальное уравнение, проверяем *согласованность*: подставляя полученное решение в исходное дифференциальное уравнение, убеждаемся, что отброшенные в п. 1 мономы действительно малы по сравнению с оставшимися. Если согласованность имеет место, то решение укороченного дифференциального уравнения является возможной асимптотикой решения исходного дифференциального уравнения.

Воспользуемся методом доминантных мономов для исследования третьего уравнения Пенлеве при $\gamma = 0$, $\alpha\delta \neq 0$, т.е. для уравнения

$$w'' = \frac{(w')^2}{w} - \frac{w'}{z} + \frac{\alpha w^2 + \beta}{z} + \frac{\delta}{w}. \tag{2}$$

Сделаем степенную замену

$$w(z) = z^{1/3}u(x), \quad x = \frac{3}{2}z^{2/3}. \tag{3}$$

При замене (3) уравнение (2) переходит в

$$u''_{xx} = \frac{(u'_x)^2}{u} - \frac{u'_x}{x} + \alpha u^2 + \frac{3}{2}\frac{\beta}{x} + \frac{\delta}{u}. \tag{4}$$

Предположим, что $u(x)$, $u'_x(x)$ и $u''_{xx}(x)$ отделены от нуля и бесконечности. В этом случае мономы u'_x/x и $3\beta/(2x)$ малы по сравнению с оставшимися слагаемыми. Получаем укороченное уравнение

$$u''_{xx} = \frac{(u'_x)^2}{u} + \alpha u^2 + \frac{\delta}{u}. \tag{5}$$

Пусть $u'_x = s(u)$; тогда уравнение (5) принимает вид

$$s'_u s = \frac{s^2}{u} + \alpha u^2 + \frac{\delta}{u};$$

его решение имеет вид

$$s(u) = \pm\sqrt{2\alpha u^3 + c_1 u^2 - \delta},$$

где c_1 — константа.

Следовательно, уравнение (5) можно переписать в виде

$$(u'_x)^2 = 2\alpha u^3 + c_1 u^2 - \delta. \tag{6}$$

Решение уравнения (6) выражается через эллиптические функции. Действительно, сделаем замену $u = \dfrac{2}{\alpha}\Big(U - \dfrac{c_1}{12}\Big)$; тогда

$$(U'_x)^2 = 4U^3 - \frac{c_1^2}{12}U - \left(\frac{\delta\alpha^2}{4} - \frac{c_1^3}{216}\right). \tag{7}$$

Как известно (см. [3]), уравнению вида

$$(w')^2 = 4w^3 - g_2 w - g_3$$

с параметрами g_2 и g_3 удовлетворяет *эллиптическая* $\wp$*-функция Вейерштрасса* $\wp(z; g_2, g_3)$; параметры g_2 и g_3 определяют периоды ω_1 и ω_2 этой функции.

Таким образом, решение $U(x)$ уравнения (7) и решение $u(x)$ укороченного уравнения (5) имеют соответственно вид

$$U(x) = \wp\left(x + c_2;\ \frac{c_1^2}{12},\ \frac{\delta\alpha^2}{4} - \frac{c_1^3}{216}\right),$$
$$u(x) = \frac{2}{\alpha}\left(\wp\left(x + c_2;\ \frac{c_1^2}{12},\ \frac{\delta\alpha^2}{4} - \frac{c_1^3}{216}\right) - \frac{c_1}{12}\right), \tag{8}$$

где c_1 и c_2 — произвольные константы.

Полученное решение удовлетворяет условию согласованности, если функции $u(x)$, $u'_x(x)$ и $u''_{xx}(x)$ отделены от нуля и бесконечности, т.е. x должен стремится к бесконечности по пути, лежащему вне малых окрестностей точек, в которых эти функции принимают значение нуль или бесконечность, а путь должен лежать внутри некоторого сектора с углом раствора меньше 2π.

Для существования таких путей достаточно, чтобы указанные точки образовывали нигде не плотное множество. Воспользуемся тем, что первая и вторая производные функции $\wp(z; g_2, g_3)$ выражаются через нее следующим образом:

$$(\wp')^2 = 4\wp^3 - g_2\wp - g_3, \quad \wp'' = 6\wp^2 - \frac{g_2}{2}.$$

Следовательно, нужно показать, что множество точек z, в которых $\wp(z; g_2, g_3) = \infty$ или $\wp(z; g_2, g_3) = c$, где c — некоторая фиксированная константа, нигде не плотно. Рассмотрим поведение $\wp$-функции Вейерштрасса в основном параллелограмме периодов. Известно (см. [3]), что $\wp$-функция Вейерштрасса имеет полюсы лишь в вершинах основного параллелограмма. Также в основном параллелограмме она имеет либо два простых нуля, либо один двойной. Поэтому остается разобрать случай, когда c — ненулевая константа. Достаточно доказать утверждение для некоторого значения $c \neq 0$, так как

$$\wp(z; g_2, g_3) = a^2\wp\left(az;\ \frac{g_2}{a^4},\ \frac{g_3}{a^6}\right), \quad \text{где } a \text{ — константа.}$$

Рассмотрим корни $e_1 = \wp(\omega_1/2)$, $e_2 = \wp((\omega_1 + \omega_2)/2)$ и $e_3 = \wp(\omega_2/2)$ уравнения

$$4w^3 - g_2 w - g_3 = 0.$$

Корни e_1, e_2 и e_3 не равны нулю одновременно, иначе $g_2 = g_3 = 0$ и $\wp$-функция Вейерштрасса вырождается. Тогда, исходя из вида этого уравнения, получаем, что у него имеется ненулевой корень, который не равен двум другим; пусть это e_1. В этом случае множество точек z, в которых $\wp(z) = e_1$, совпадает с множеством полюсов функции $\wp(z + \omega_1/2)$, поскольку (см. [3])

$$\wp\left(z + \frac{\omega_1}{2}\right) = e_1 + \frac{(e_1 - e_2)(e_1 - e_3)}{\wp(z) - e_1};$$

рассуждения для e_2 и e_3 аналогичны. Исходя из сказанного получаем, что множество точек x, в которых хотя бы одна из функций $u(x)$, $u'_x(x)$ или $u''_{xx}(x)$ принимает значение нуль или бесконечность, является нигде не плотным и счетным.

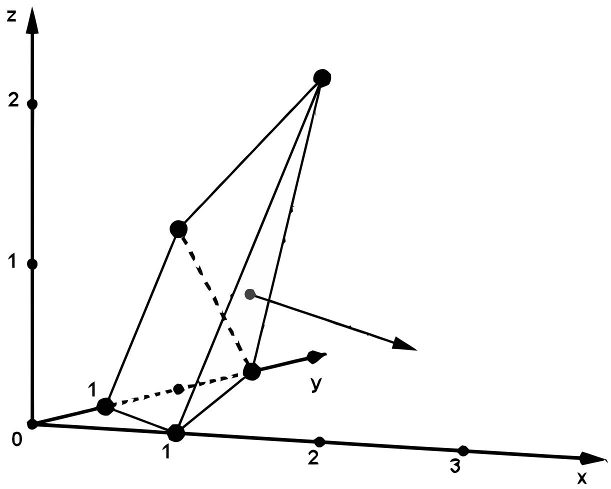

Рис. 1

Таким образом, функция (8) удовлетворяет условию согласованности при $x \to \infty$ вдоль пути, лежащего вне малых окрестностей указанных выше точек, а значит является возможной асимптотикой решения уравнения (4).

Сделав обратную замену, получаем возможную асимптотику решения уравнения (2):

$$w(z) = \frac{2}{\alpha} z^{1/3} \left(\wp\left(\frac{3}{2} z^{2/3} + c_2;\ \frac{c_1^2}{12},\ \frac{\delta\alpha^2}{4} - \frac{c_1^3}{216} \right) - \frac{c_1}{12} \right), \tag{9}$$

c_1 и c_2 — константы.

То же самое укороченное уравнение (5) можно получить, используя трехмерную степенную геометрию (см. [10]).

4. Трехмерная степенная геометрия. Чтобы исследовать уравнение (2) с помощью трехмерной степенной геометрии (см. [10]), требуется наложить следующие ограничения на функцию $w(z)$: порядок роста функции $w(z)$ при стремлении z к бесконечности по некоторому лучу должен изменяться на фиксированную константу при каждом дифференцировании.

Перепишем уравнение (2) в виде дифференциальной суммы, приравненной к нулю:

$$-zww'' + z(w')^2 - ww' + \alpha w^3 + \beta w + \delta z = 0.$$

Построим многогранник Ньютона этой дифференциальной суммы (см. рис. 1).

Согласно [10], найдем двумерные грани полученного многогранника, у которых внешняя нормаль $N = (n_1, n_2, n_3)$ удовлетворяет условиям $n_1 = 1$ и $n_1 + n_3 > 0$. Такая грань только одна: она натянута на вершины $(1, 0, 0)$, $(0, 3, 0)$, $(1, 2, 2)$ и имеет внешнюю нормаль $N = (1, 1/3, -1/3)$. Этой грани соответствует уравнение

$$-zww'' + z(w')^2 + \alpha w^3 + \delta z = 0. \tag{10}$$

Зная координаты внешней нормали, можно сделать замену $w(z) = f(z)u(x)$, $x = g(z)$ по правилу

$$f(z) = z^{n_2}, \quad g(z) = \frac{1}{n_1 + n_3} z^{n_1 + n_3}.$$

Получается в точности замена (3), при которой уравнение (10) переходит в укороченное уравнение (5), проинтегрированное выше.

5. Поиск возможных асимптотик решений уравнения P_3: дальнейший анализ методом доминантных мономов. Вернемся к уравнению (4). Можно предположить, что помимо мономов u'_x/x и $3\beta/(2x)$ в нём есть и другие, которые малы по сравнению с оставшимися при $x \to \infty$ по пути, удовлетворяющему описанным выше условиям. Тогда, применяя метод доминантных мономов, получаем десять укороченных уравнений:

Таблица 1

1) $\alpha u^2+\dfrac{\delta}{u}=0,$	2) $\dfrac{(u'_x)^2}{u}+\dfrac{\delta}{u}=0,$
3) $u''_{xx}-\dfrac{\delta}{u}=0,$	4) $u''_{xx}-\dfrac{(u'_x)^2}{u}=0,$
5) $u''_{xx}-\alpha u^2=0,$	6) $\dfrac{(u'_x)^2}{u}+\alpha u^2=0,$
7) $\dfrac{(u'_x)^2}{u}+\alpha u^2+\dfrac{\delta}{u}=0,$	8) $u''_{xx}-\alpha u^2-\dfrac{\delta}{u}=0,$
9) $u''_{xx}-\dfrac{(u'_x)^2}{u}-\dfrac{\delta}{u}=0,$	10) $u''_{xx}-\dfrac{(u'_x)^2}{u}-\alpha u^2=0.$

Покажем, что решения всех перечисленных уравнений, кроме первого, не удовлетворяют соответствующим условиям согласованности.

Для уравнений 2), 4), 6), 9) и 10) из таблицы 1 сделаем это, вычислив их решения.

В качестве примера рассмотрим уравнение 2):

$$\frac{(u'_x)^2}{u}+\frac{\delta}{u}=0,$$

условия согласованности для которого имеют вид

$$\frac{u'_x}{x},\ \frac{3}{2}\frac{\beta}{x},\ \alpha u^2,\ u''_{xx}\ \ll\frac{(u'_x)^2}{u},\ \frac{\delta}{u}\quad \text{при } x\to\infty.$$

Его решение — $u(x)=c_1\pm\sqrt{-\delta}x$, где c_1 — константа. Оно не удовлетворяет условию $u^2\ll 1/u$ при $x\to\infty$, поскольку $u(x)\nrightarrow 0$ при $x\to\infty$.

В случаях 4), 6), 9) и 10) из таблицы 1 решения имеют несколько более сложный вид, но рассуждения аналогичны.

Далее, не решая уравнения 3), 5), 7) и 8) из таблицы 1 в явном виде, можно показать, что их решения не могут удовлетворять условиям согласованности. Проведем требуемые рассуждения для уравнения 3):

$$u''_{xx}-\frac{\delta}{u}=0,$$

условия согласованности для которого имеют вид

$$\frac{u'_x}{x},\ \frac{3}{2}\frac{\beta}{x},\ \frac{(u'_x)^2}{u},\ \alpha u^2\ \ll u''_{xx},\ \frac{\delta}{u}\quad \text{при } x\to\infty.$$

Домножив на $2u'_x$ и проинтегрировав обе части уравнения, получим уравнение

$$(u'_x)^2=2\delta\ln u+c_1,\quad c_1=\mathrm{const}\,.$$

Решение этого уравнения не может удовлетворять условиям согласованности. Действительно, предположим обратное. Тогда $(u'_x)^2/u\ll\delta/u$ и, следовательно, $(u'_x)^2\ll 1$ при $x\to\infty$. В то же время, $u^2\ll\delta/u$, т.е. $u\to 0$, а значит $\ln u\to\infty$ при $x\to\infty$. Получаем противоречие, так как левая часть уравнения стремится к нулю при $x\to\infty$, а правая — к бесконечности.

Также покажем, что решение уравнения 5) не может удовлетворять условиям согласованности. Для укороченного уравнения $u''_{xx}-\alpha u^2=0$ условия согласованности имеют вид:

$$\frac{u'_x}{x},\ \frac{3}{2}\frac{\beta}{x},\ \frac{(u'_x)^2}{u},\ \frac{\delta}{u}\ \ll u''_{xx},\ \alpha u^2\quad \text{при } x\to\infty.$$

Равносильное уравнение:

$$(u'_x)^2=\frac{2}{3}\alpha u^3+c_1,\quad c_1=\mathrm{const}\,.$$

Из условия $(u'_x)^2/u \ll \alpha u^2$ следует, что отношение $c_1/\alpha u^3$ должно стремиться к $(-2/3)$ при $x \to \infty$. Получаем противоречие с условием $\delta/u \ll \alpha u^2$ при $x \to \infty$.

Для уравнений 7) и 8) рассуждения аналогичны.

Осталось рассмотреть уравнение 1) из таблицы 1:

$$\alpha u^2 + \frac{\delta}{u} = 0,$$

условия согласованности для которого имеют вид

$$\frac{u'_x}{x},\ \frac{3}{2}\frac{\beta}{x},\ \frac{(u'_x)^2}{u},\ u''_{xx} \ll \alpha u^2,\ \frac{\delta}{u} \quad \text{при } x \to \infty.$$

Решением уравнения 1) является константа $u = (-\delta/\alpha)^{1/3}$ (для некоторой ветви корня третьей степени), которая, очевидно, удовлетворяет условиям согласованности. Этому решению укороченного уравнения соответствует степенная асимптотика решения третьего уравнения Пенлеве при $\gamma = 0$, $\alpha\delta \neq 0$.

Перейдём к её исследованию.

6. Поиск степенных асимптотических разложений. С помощью метода доминантных мономов была найдена возможная асимптотика решения уравнения (4): $u = (-\delta/\alpha)^{1/3}$. Можно предположить, что некоторое решение уравнения (4) имеет степенное асимптотическое разложение с главным членом $a_0 = (-\delta/\alpha)^{1/3}$; ищем это разложение в виде

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{-n}, \quad \text{где} \quad a_0 = \left(-\frac{\delta}{\alpha}\right)^{1/3}. \tag{11}$$

Подставив формальный ряд (11) в уравнение (4), получим три формальных степенных разложения вида (11) с коэффициентами, определенными формулами

$$a_1 = -\frac{\beta}{2\alpha a_0}, \quad a_2 = 0, \quad a_3 = -\frac{\beta}{6\alpha^2 a_0^2}\left(\frac{\beta^2}{4\delta} + 1\right),$$

$$a_n = \frac{1}{3\alpha a_0^2}\left(-\alpha\sum_{k=1}^{n-1}\left(a_k\sum_{j=0}^{n-k} a_j a_{n-k-j}\right) - \alpha a_0 \sum_{k=1}^{n-1} a_k a_{n-k} - {} \right.$$
$$\left. {} - \frac{3}{2}\beta a_{n-1} + \sum_{k=1}^{n-2}\Big(\big(2k^2 + k(2-n)\big)a_k a_{n-2-k}\Big)\right).$$

Согласно теореме (см. [7, с. 37]), доказанной в различных случаях О. Перроном [14], Ж.-П. Рамисом и Й. Сибуйя [15, 16], Б. Мальгранжем [12], для формального степенного ряда вида (11), удовлетворяющего уравнению (4), верно, что он является степенным асимптотическим разложением некоторого решения данного уравнения в некотором секторе с вершиной в бесконечности.

Более того, можно явно вычислить угол раствора сектора, в котором применимо степенное асимптотическое разложение, исходя из вида линеаризации левой части обыкновенного дифференциального уравнения

$$G(z, w, Dw, \dots, D^n w) = 0, \tag{12}$$

где $D = x\dfrac{d}{dx}$, функция $G(z, Y, Y_1, \dots, Y_n)$ является аналитической функцией $n + 2$ переменных.

Теорема 1 (Ж. П. Рамис [7])**.** *Пусть $\hat{w} \in \mathbb{C}[[z^{-1}]]$ — формальное решение уравнения* (12)*. Тогда ряд $\hat{w}$ сходится или имеет порядок Жевре s, где $s \in \{0,\ 1/k_1,\ \dots,\ 1/k_N\}$ и $0 < k_1 < \dots < k_N < +\infty$ — все положительные тангенсы углов наклона к оси абсцисс сторон многоугольника Ньютона уравнения* (12) *на решении $\hat{w}$.*

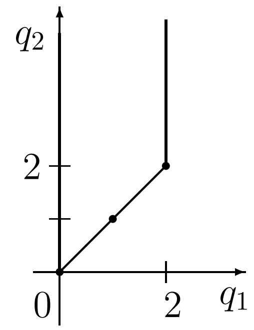

Рис. 2

Процесс построения данного многоугольника изложен в [17]. Для построения многоугольника Ньютона вычислим первую вариацию преобразованной левой части уравнения (4), умноженного на u, и получим

$$u\frac{d^2}{dx^2} + u''_{xx} - 2u'_x\frac{d}{dx} - \frac{1}{x}\frac{d}{dx} - 3\alpha u^2 - \frac{3}{2}\frac{\beta}{x}. \tag{13}$$

Переписав (13) через оператор D, имеем

$$\frac{u}{x}D^2 - \left(\frac{u}{x} + \frac{2u'_x}{x} + \frac{1}{x^2}\right)D + u_{xx} - 3\alpha u^2 - \frac{3}{2}\frac{\beta}{x}. \tag{14}$$

Подставив формальное степенное решение (11) в оператор (14), выпишем лишь коэффициенты при операторах D, D^2 и тождественном операторе с максимальной по x степенью:

$$\left(-\frac{\delta}{\alpha}\right)^{2/3}\frac{1}{x^2}D^2 - \left(-\frac{\delta}{\alpha}\right)^{1/3}\frac{1}{x}D - 3(-\alpha\delta^2)^{1/3}. \tag{15}$$

Многоугольник Ньютона выражения (15) изображён на рис. 2 (см. [15]).

Как видно на рис. 2, единственный положительный тангенс угла наклона сторон многоугольника Ньютона равен единице. Согласно теореме 1, получаем следующее утверждение.

Теорема 2. *Существуют такие* $k' \geqslant 1$ *и* $R_0 \in \mathbb{R}_+$, *что для каждого открытого сектора* $\Big\{z:\ |z| > R \geqslant R_0,\ \operatorname{Arg} z \in (\varphi_1, \varphi_2)\Big\}$, $\varphi_2 - \varphi_1 < \pi/k' \leqslant \pi$, *существует решение уравнения* (4), *асимптотически приближаемое рядом* (11) *по Жевре с порядком* 1.

При $\alpha\beta\delta\gamma \neq 0$ порядки Жевре формальных асимптотичских разложений третьего уравнения Пенлеве в окрестности бесконечности получены в [13].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Васильев А. В., Парусникова А. В.* Некоторые способы выявления асимптотик решений третьего уравнения Пенлеве в окрестности бесконечности// Тр. VIII Приокской научной конференции «Дифференциальные уравнения и смежные вопросы математики», 10–11 июня 2016 г. — Коломна, 2016. — С. 34–43.
2. *Громак В. И., Лукашевич Н. А.* Аналитические свойства решений уравнений Пенлеве. — Минск: Университетское, 1990.
3. *Гурвиц А.* Теория аналитических и эллиптических функций. — Л.-М.: Гостехиздат, 1933.
4. *Итс А. Р., Капаев А. А., Новокшенов В. Ю., Фокас А. С.* Трансценденты Пенлеве. Метод задачи Римана. — М.–Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2005.
5. *Китаев А. В.* Эллиптические асимптотики первого и второго трансцендентов Пенлеве// Усп. мат. наук. — 1994. — *49*, № 1 (295). — С. 77–140.
6. *Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.* Методы теории функции комплексного переменного. — М.: Наука, 1987.
7. *Рамис Ж. П.* Расходящиеся ряды и асимптотическая теория. — М.–Ижевск: Ин-т компьют. исслед., 2002.

8. *Bender C. M., Orszag S. A.* Advanced mathematical methods for scientists and engineers. — New York: McGraw Hill, 1978.
9. *Boutroux P.* Recherches sur les transcendantes de M. Painlevé et l'étude asymptotique des équations différentielles du second ordre// Ann. Sci. École Norm. Supér. — 1913. — *30.* — С. 255–375.
10. *Bruno A. D.* Space power geometry for an ODE and P_1–P_4, P_6// in: Painlevé equations and related topics/ A. D. Bruno, A. B. Batkhin, eds. — Berlin–Boston: De Gruyter, 2012. — С. 41–51.
11. *Joshi N., Kruskal M. D.* The Painlevé connection problem: An asymptotic approach. I// Stud. Appl. Math. — 1992. — *86*, № 4. — С. 315–376.
12. *Malgrange B.* Sur le théorème de Maillet// Asympt. Anal. — 1989. — *2.* — С. 1–4.
13. *Parusnikova A. V.* On Gevrey orders of formal power series solutions to the third and fifth Painlevé equations near infinity// Opusc. Math. — 2014. — *34*, № 3. — С. 591–599.
14. *Perron* Über lineare und Differentialgleichungen mit rationalen Koeffizienten// Acta Math. — 1910. — *34.* — С. 139–163.
15. *Ramis J.-P.* Dévissage Gevrey// Astérisque. — 1978. — *59–60.* — С. 173–204.
16. *Ramis J.-P., Sibuya Y.* Hukuhara domains and fundamental existence and uniqueness theorems for asymptotic solutions of Gevrey type// Asympt. Anal. — 1989. — *2.* — С. 39–84.
17. *Sibuya Y.* Linear differential equations in the complex domain: Problems of analytic continuation/ Trans. Math. Monogr. — Am. Math. Soc., 1990. — *82.*

А. В. Васильев
Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», Москва
E-mail: `vasiljev.andr@gmail.com`

А. В. Парусникова
Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», Москва
E-mail: `parus-a@mail.ru`

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 139 (2017). С. 79–90

УДК 517.926.2

ЗАДАЧА ГИЛЬБЕРТА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ КОШИ—РИМАНА С СИНГУЛЯРНОЙ ОКРУЖНОСТЬЮ И ОСОБОЙ ТОЧКОЙ

© 2017 г. А. Б. РАСУЛОВ, М. А. БОБОДЖАНОВА, Ю. С. ФЕДОРОВ

Аннотация. Рассматривается обобщенная система типа Коши—Римана, коэффициенты которой имеют особенности. Построена резольвента интегрального уравнения и найдено интегральное представление общего решения.

***Ключевые слова*:** обобщенная система типа Коши—Римана, сингулярное интегральное уравнение, задача Гильберта.

***AMS Subject Classification*:** 35F15

СОДЕРЖАНИЕ

1. Постановки задачи

В теории дифференциальных уравнений в частных производных особое место занимает система уравнений Коши—Римана с регулярными и сингулярными коэффициентами. Теория таких уравнений с регулярными коэффициентами достаточно глубоко разработана, чего нельзя сказать о системах с сингулярными коэффициентами. В работах многих авторов различные решения системы Коши—Римана с сингулярной точкой найдены в виде рядов либо доказана компактность основного интегрального оператора только в достаточно малой окрестности сингулярной точки (при условиях типа малости на коэффициенты уравнения). Ранее отдельно исследовались дифференциальные уравнения с сингулярной точкой и уравнения с одной сингулярной линией. Получение интегральных представлений общего решения уравнений с оператором Коши—Римана с особенностями в коэффициентах до сих пор мало исследовано, хотя существует множество примеров, подтверждающих прикладную значимость таких уравнений.

В классе эллиптических систем первого порядка особое место занимает обобщенная система Коши—Римана

$$u_{\bar z} + a(z)u(z) + b(z)\overline{u} = f(z), \tag{1}$$

где $2\partial_{\overline{z}} = \partial_x + i\partial_y$ — оператор Коши—Римана, $a(z)$, $b(z)$, $f(z)$ — заданные в ограниченной области G функции, $u(z)$ — неизвестная функция.

Существует несколько различных математических теорий уравнения (1), которые обобщают методы теории функций комплексного переменного. В первую очередь следует отметить работу Л. Берса [16], где обобщены операции интегрирования по комплексному переменному для системы (1). Такой подход получил известное завершение в теории псевдоаналитических функций. В работах украинского математика Г. Н. Положего была развита теория p-аналитических функций, которая по своим идеям близка к работам Л. Берса. Другое направление, получившее название «обобщенные аналитические функции», развивалось И. Н. Векуа (см. [2]) и его последователями (Б. В. Боярский и др.). Здесь на основе использования аппарата функционального анализа развивается идея соответствия между функциями комплексного переменного $\phi(z)$ и решениями системы (1).

Теория Векуа построена в предположении, что функции $a(z)$, $b(z)$, $f(z)$ принадлежат пространству $L^p(G)$, $p > 2$. Коэффициенты таких систем могут допускать «слабые» особенности, лимитируемые требованием p-интегрируемости. В частности, если $a(z)$, $b(z)$ обращаются в бесконечность в некоторой изолированной особой точке $z = 0$, то порядок этой особенности должен быть строго меньше единицы. Поэтому даже уравнения с такими коэффициентами, как $a(z) = 1/z$, $b(z) = 1/\overline{z}$, не охватываются теорией Векуа.

Исследованию задач для уравнения (1) с коэффициентами, имеющими особенности первого порядка в изолированной особой точке или на линии, посвящены работы А. В. Бицадзе [1], Л. Г. Михайлова [5], З. Д. Усманова [14], Н. Р. Раджабова [8] , А. Тунгатарова [13], Н. Бергера [15], М. Райссега [18], А. Мезиани [17], С. Б. Климентова [4] и др.

Особенностью многих из этих работ является то, что решения обобщенной системы Коши—Римана представлены в виде рядов типа Фурье или степенных рядов в окрестности изолированной особой точки.

Заметим, что интерес к этой области дифференциальных уравнений с сингулярными коэффициентами не случаен, так как он непосредственно связан не только с развитием принципиально новых методов анализа, но также с их применением к решению задач изгибаний поверхностей и деформаций, осесимметрической теории поля, тонких безмоментных оболочек и т. д. (см. [1, 2]).

Пусть область G содержит точку $z = 0$ и окружность $L = \{z : |z| = R\}$ и ограничена простым ляпуновским контуром ∂G, ориентированным против часовой стрелки. Удобно положить $G_0 = G \setminus \{\{0\} \cup L\}$ и $G_\varepsilon = G \setminus \{g_{0\varepsilon} \cup g_{1\varepsilon}\}$ с малым $\varepsilon > 0$, где

$$g_{0\varepsilon} = \{z : \ |z| < \varepsilon\}, \quad g_{1\varepsilon} = \{z : \ R - \varepsilon < |z| < R + \varepsilon\}.$$

В области G_0 рассмотрим уравнение

$$u_{\overline{z}} - z\big(|z|(|z| - R)\big)^{-1} a(z)u + |z|^{-m} b(z)\overline{u} = f(z), \tag{2}$$

где $2\partial_{\overline{z}} = \partial_x + i\partial_y$, $a, b \in C(\overline{G})$ и $f \in L^p(G)$, причем $0 < m < 1$ и $p > 2$.

В настоящей работе для обобщенной системы типа Коши—Римана с комплексным сопряжением (1), коэффициенты которой допускают особенность на окружности $L = \{z : |z| = R\}$ и слабую особенность в точке $z = 0$, найдено интегральное представление общего решения и исследована задача типа задачи Гильберта.

Под обобщенным решением уравнения (1) понимается функция $u \in C(\overline{G} \backslash \{\{0\} \cup L\})$, имеющая первую обобщенную производную по $\overline{z}$ и принадлежащая классу $L^p(G_\varepsilon)$ для любого $\varepsilon > 0$.

Рассмотрим сначала частный случай уравнения (1) с $b = 0$, т.е. уравнение

$$u_{\overline{z}} - Au = f, \tag{3}$$

где для краткости положено $A(z) = z\big(|z|(|z| - R)\big)^{-1} a(z)$, $a(z) \in C(\overline{G})$. В данном случае коэффициент A ограничен в начале координат и имеет неподвижную особенность на окружности L.

В дальнейшем важную роль играет интегральный оператор И. Н. Векуа (см. [2])

$$(Tf)(z) = -\frac{1}{\pi} \int\limits_G \frac{f(\zeta) d_2\zeta}{\zeta - z},$$

с плотностью $f \in L^p(G)$. Здесь и ниже $p > 2$, а $d_2\zeta$ означает элемент площади. Хорошо известно, что этот оператор ограничен из $L^p(G)$ в соболевское пространство $W^{1,p}(G)$ и имеет место вложение $W^{1,p}(G) \subseteq C^\alpha(\overline{G})$ с показателем Гельдера $\alpha = (p - 2)/p$. В частности, этот оператор компактен в пространстве $L^p(G)$. В дальнейшем, когда точное значение α несущественно, используем класс $H(\overline{G})$ функций, удовлетворяющих условию Гельдера с некоторым показателем (см. [6]). Аналогичный оператор по области G_ε обозначаем T_ε; он используется по отношению к коэффициенту $f = A$.

Если $A, f \in L^p(G)$, то $\Omega_0 = TA \in W^{1,p}(G)$ является решением уравнения $(\Omega_0)_{\bar{z}} - A = 0$. Следовательно, для функции $U_0 = e^{-\Omega_0}U$ имеем соотношение

$$(U_0)_{\bar{z}} = e^{-\Omega_0}U_{\bar{z}} - Ae^{-\Omega_0}U = e^{-\Omega_0}f.$$

В результате приходим к представлению

$$U = e^{\Omega_0}(\phi + T(e^{-\Omega_0}f)]$$

с произвольной аналитической в G функцией $\phi \in C(\overline{G})$. Эта процедура получения общего решения хорошо известна (см. [2]).

2. Представление явного решения в частном случае

В общем случае сингулярного коэффициента A указанную процедуру также можно применить при условии, что известно некоторое решение уравнения $\Omega_{\bar{z}} = A$ в области G_0. Следующая лемма описывает одно из таких решений.

Лемма 1 (см. [9]). *В предположении*

$$A_0(z) = \frac{z(a(z) - a(R))}{|z|(|z| - R)} \in L^p(G) \tag{4}$$

сингулярный интеграл

$$\Omega(z) = \lim_{\varepsilon\to 0}(T_\varepsilon A)(z), \quad z \neq L,$$

существует и определяет функцию, которая представима в виде

$$\Omega(z) = 2a(R)\ln\big||z| - R\big| + h(z),$$

где $h(z) \in H(\overline{G})$ определяется равенством

$$h(z) = (TA_0)(z) + \frac{a(R)}{\pi i}\int\limits_{\partial G}\frac{\ln|\rho - R|d\zeta}{\zeta - z}.$$

С помощью леммы 1, используя обычную процедуру (см. [2]), приходим к следующему представлению.

Теорема 1. *Пусть выполнено условия* (4) *и*

$$\big||z| - R\big|^{-2a(R)}f \in L^p(G).$$

Тогда общее решение уравнения (4) *в классе $C(\overline{G}\backslash L)$ дается формулой*

$$u = \big||z| - R\big|^{2a(R)}e^h\left[\phi - \frac{1}{\pi}\int\limits_G \big||\zeta| - R\big|^{-2a(R)}e^{-h}f(\zeta)\frac{d_2\zeta}{\zeta - z},\right], \tag{5}$$

где $\phi \in C(\overline{G}\backslash\{L\})$ аналитична в области $C(\overline{G}\backslash\{L\})$.

Если $\big||z| - R\big|^{-2a(R)}u \in C(\overline{G}\backslash\{L\})$, то интегральное представление (5) *обратимо. Соответствующая аналитическая функция ϕ единственным образом внутри области $\overline{G}\backslash L$ находится через значение u по формуле*

$$\phi(z) = \big||z| - R\big|^{-2a(R)}e^{-h}u - \frac{1}{\pi}\int\limits_G \big||\zeta| - R\big|^{2a(R)}e^h f(\zeta)\frac{d_2\zeta}{\zeta - z}.$$

Теорема показывает, что

$$u = O(1)\Big(\big||z| - R\big|^{2a(R)}\Big), \quad |z| \to R. \tag{6}$$

3. Постановка задачи Гильберта R

Полученное интегральное представление (5) и его оценка вблизи сингулярной окружности L указывает на правильную постановку граничных задач.

Задача Гильберта R. Требуется найти такое решение уравнение (4) из класса $C(\overline{G}\backslash L)$, что $\big||z|-R\big|^{-2a(R)}u \in C^{0,\alpha}(\overline{G})$, имеющее поведение (6) при $|z|\to R$ и удовлетворяющие на границе ∂G условию

$$\operatorname{Re}[\lambda||z|-R|^{-2a(R)}u]_{\partial G}=g, \tag{7}$$

где $\lambda(t), g(t)\in C(\partial G)$ — заданные функции, причем $\lambda(t)\neq 0$, $t\in\partial G$.

Решение задачи R для уравнения (2)**.** Предполагая, что коэффициент λ и правая часть g краевого условия принадлежат классу Гельдера $H(\partial G)$, решение задачи (6), (7) будем также искать в классе $H_{\mathrm{loc}}(\overline{G}\setminus L)$ функций, принадлежащих $H(K)$ на любом компакте $K\subseteq(\overline{G}\setminus L)$.

В силу представления (5) теоремы 1 эта задача эквивалентным образом редуцируется к задаче Римана—Гильберта

$$\operatorname{Re}[\lambda_0\phi]_{\partial G}=g_0(t) \tag{8}$$

для аналитической в G функции $\phi\in H(\overline{G})$, где положено

$$\lambda_0(t)=e^{h(t)}\lambda(t),\quad g_0(t)=g(t)+\operatorname{Re}\left[\frac{\lambda(t)e^{h(t)}}{\pi}\int\limits_G\big||\zeta|-R\big|^{-2a(R)}e^{-h(\zeta)}f(\zeta)\frac{d_2\zeta}{\zeta-z}\right],\quad t\in\partial G.$$

Очевидно, функции λ_0, g_0 вместе с λ, g также принадлежат классу $H(\partial G)$. Обозначим через $\varkappa$ индекс Коши функции λ, т.е. деленное на 2π приращение непрерывной ветви $\arg\lambda$ на контуре ∂G:

$$\varkappa=\frac{1}{2\pi}\arg\lambda\big|_{\partial G}=\frac{1}{2\pi}\arg\lambda_0\big|_{\partial G}.$$

Применяя к задаче (8) классическую теорему о разрешимости, приходим к следующему результату.

Теорема 2. *Пусть $\lambda, g\in H(\partial G)$, $A_0\in L^p(G)$, $p>2$, а правая часть f уравнения 4 такова, что $\big||z|-R\big|^{-2a(R)}f\in L^p(G)$. Тогда при $\varkappa\geqslant 0$ однородная задача R имеет $\varkappa+1$ линейно независимые решения $u_1,\dots,u_{\varkappa+1}$, принадлежащие $H(\overline{G_\varepsilon})$ при каждом $\varepsilon>0$, а неоднородная задача всегда разрешима. Если $\varkappa<0$, то однородная задача имеет только нулевое решение, а неоднородная задача разрешима при выполнении $-\varkappa-1$ условий разрешимости вида*

$$\int\limits_{\partial G}g_0(t)h_j(t)dt=0,\quad 1\leqslant j\leqslant-\varkappa-1,$$

где g_0 определяется известным образом через правые части g, f краевой задачи.

Заметим, что при предположении, что $\lambda(t)\equiv 1$, $t\in\partial G$ и $\partial G=R_1$, $R<R_1$, справедливо следующее утверждениею

Предложение 1. *Пусть выполнены все условия теоремы 1 в том числе $\operatorname{Re}a(R)>0$ и $\phi\in C(\overline{G})$. Тогда задача (6), (7) разрешима, и ее решение из класса $C(\overline{G})$ дается при помощи формулы (5), в которой аналитическая функция $\phi(z)$ определяется формулой*

$$\phi(z)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\zeta|=R_1}\widetilde{g}_1(\zeta)\frac{\zeta+z}{\zeta-z}\frac{d\zeta}{\zeta}+iC_1,\quad |z|<R_1,$$

где

$$\widetilde{g}_1(t)=g(t)+\operatorname{Re}\left[\frac{e^{h(t)}}{\pi}\int\limits_G\big||\zeta|-R\big|^{-2a(R)}e^{-h(\zeta)}f(\zeta)\frac{d_2\zeta}{\zeta-z}\right]$$

и C_1 — произвольная постоянная.

4. Построение резольвенты интегрального уравнения

Теперь рассмотрим случай, когда $a(z) \neq 0$, $b(z) \neq 0$ для любого $z \in \overline{G}$. Заметим, что теперь область G содержит сингулярное многообразие, которое состоит из двух неподвижных особенностей: точка $z = 0$ и окружность $L = \{z : |z| = R\}$. Используя общее решение уравнения , приходим к следующему интегральному уравнению:

$$V + T(B\overline{V}) = \phi + F, \tag{9}$$

где $V = e^{-\Omega}u$, $B = |z|^{-m}b(z)e^{-2i\operatorname{Im}\Omega}$, $F = T(e^{-\Omega}f)$, причем значение Ω указано в лемме 1.

В случае отсутствия сингулярности коэффициентов подобное уравнение возникало у И. Н. Векуа в [2], где был предложен метод последовательных приближений. Однако этот метод применим лишь в предположении, что коэффициент b по модулю достаточно мал. В общем случае необходимо построить в явном виде резольвенту этого уравнения.

Предварительно изучим действие в различных пространствах интегрального оператора вида

$$(T_0\varphi)(z) = \int\limits_G \frac{\varphi(\zeta)d_2\zeta}{|\zeta|^{\alpha_0}|\zeta - z|^{\alpha_1}}, \quad z \in G, \tag{10}$$

с положительными α_j.

Лемма 2. *Пусть*

$$0 < \alpha_0 < 1 \leqslant \alpha_1 < 2, \quad \alpha_0 + 2\alpha_1 < 3, \quad p > \frac{2}{3 - \alpha_0 - 2\alpha_1}, \tag{11}$$

так что

$$0 < \mu_0 = 3 - \alpha_0 - 2\alpha_1 - \frac{2}{p} < 1. \tag{12}$$

Тогда оператор $T_0 : L^p(G) \to C^\mu(\overline{G})$ *ограничен.*

Доказательство. Отметим сначала, что если $0 < \beta_0 < 1 < \beta_1 < 2 - \beta_0$, то имеет место равномерная по $z \in \mathbb{C}$ оценка

$$\int\limits_{|\zeta|\leqslant 1} \frac{d_2\zeta}{|\zeta + z|^{\beta_0}|\zeta|^{\beta_1}} \leqslant C_\alpha. \tag{13}$$

Аналогично, при $0 < \beta_0 < 1$, $\beta_2 > 2$ имеем

$$\int\limits_{\mathbb{C}} \frac{d_2\zeta}{|\zeta|^{\beta_0}(1 + |\zeta|^{\beta_2})} < \infty. \tag{14}$$

Обратимся к интегралу $\psi = T_0\varphi$ в (10). Полагая $\beta_0 = q\alpha_0$, $\beta_1 = q\alpha_1$, на основании неравенства Гельдера можем написать

$$|\psi(z)| \leqslant |\varphi|_{L^p} \left(\int\limits_G \frac{d_2\zeta}{|\zeta|^{\beta_0}\,|\zeta - z|^{\beta_1}}\right)^{1/q},$$

так что в силу (13), (14) имеем оценку

$$|\psi(z)| \leqslant C_0|\varphi|_{L^p}. \tag{15}$$

Аналогичным образом для любых точек $z_1, z_2 \in G$ справедливо неравенство

$$\bigl|\psi(z_1) - \psi(z_2)\bigr| \leqslant \alpha_1 R^{\alpha_1 - 1}|z_1 - z_2| \left(\int\limits_G \frac{d_2\zeta}{|\zeta|^{\alpha_0 q}\,|\zeta - z_1|^{\alpha_1 q}\,|\zeta - z_2|^{\alpha_1 q}}\right)^{1/q} |\varphi|_{L^p},$$

где R — диаметр области G. Здесь учтено, что $1 - t^\alpha \leqslant \alpha(1 - t)$ при $0 < t \leqslant 1 \leqslant \alpha$ и, следовательно,

$$\bigl(|u_1|^\alpha - |u_2|^\alpha\bigr) \leqslant \alpha|u_1|^{\alpha-1}\bigl(|u_1| - |u_2|\bigr) \leqslant \alpha|u_1|^{\alpha-1}|u_1 - u_2| \tag{16}$$

при $|u_1| \geqslant |u_2|$.

Замена $\zeta - z_1 = |z_1 - z_2|\zeta'$ приводит интеграл в правой части этого неравенства к выражению

$$\big|z_1 - z_2\big|^{2-(\alpha_0+2\alpha_1)q} \int\limits_{G'} \frac{d_2\zeta}{|\zeta+\zeta_0|^{\alpha_0 q}\,|\zeta|^{\alpha_1 q}\,|\zeta-\zeta_1|^{\alpha_1 q}},$$

где G' — образ G при преобразовании $\zeta \to \zeta'$ и

$$\zeta_0 = \frac{z_1}{|z_1 - z_2|}, \quad \zeta_1 = -\frac{z_1 - z_2}{|z_1 - z_2|}.$$

Интеграл здесь разобьем на сумму интегралов по $G_0 = G' \cap \{|\zeta| \leqslant 1/2\}$, $G_2 = G' \cap \{|\zeta - \zeta_1| \leqslant 1/2\}$ и $G_1 = G' \setminus (G_0 \cup G_2)$. Интегралы по G_0 и G_2 равномерно ограничены в силу (13), а интеграл по G_1 обладает аналогичным свойством в силу (14). В результате приходим к оценке

$$\big|\psi(z_1) - \psi(z_2)\big| \leqslant C_1|\varphi|_{L^p}\,|z_1 - z_2|^{1+2/q-\alpha_0-2\alpha_1},$$

которая вместе с (13), (14) и (15), завершает доказательство леммы 2. □

Обратимся к уравнению (2) с ненулевым коэффициентом b, предполагая $n > 1$, $0 < m < 1$. Увеличивая m, без ограничения общности можно считать, что функция $b(\zeta) \to 0$ при $\zeta \to 0$ и, следовательно, в обозначениях теоремы 1

$$b_1(\zeta) = 2^{-m} e^{-2i\,\mathrm{Im}\,\Omega(\zeta)} b(z) \in C(\overline{G}). \tag{17}$$

Как будет показано ниже, в представлении общего решения этого уравнения важную роль играют $\mathbb{R}$-линейный интегральный оператор

$$(K\varphi)(z) = \frac{1}{\pi}\int\limits_G \frac{b_1(\zeta)}{|\zeta|^m(\zeta - z)}\overline{\varphi(\zeta)}d_2\zeta, \quad z \in G, \tag{18}$$

и связанное с ним уравнение Фредгольма $\varphi + K\varphi = f$.

Теорема 3.

(a) *Однородное уравнение $\varphi + K\varphi = 0$ в классе $C(\overline{G})$ имеет конечное число линейно независимых (над полем $\mathbb{R}$) решений $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in H(\overline{G})$ и существуют такие линейно независимые суммируемые функции $h_1, \dots, h_n \in L(G)$, что условия ортогональности*

$$\mathrm{Re}\int\limits_G f(\zeta)h_j(\zeta)d_2\zeta = 0, \quad 1 \leqslant j \leqslant n, \tag{19}$$

необходимы и достаточны для разрешимости неоднородного уравнения $\varphi + K\varphi = f$.

(b) *Для заданного $1 < \alpha < 2$, которое по отношению к $\alpha_0 = m$ удовлетворяет условиям (11), найдутся такие функции $P_1(z,\zeta), P_2(z,\zeta) \in C(\overline{G} \times \overline{G})$, что при выполнении условий (19) функция*

$$\varphi(z) = f(z) + (Pf)(z), \quad (Pf)(z) = \frac{1}{\pi}\int\limits_G \frac{[P_1(z,\zeta)f(\zeta) + P_2(z,\zeta)\overline{f(\zeta)}]d_2\zeta}{|\zeta|^m|\zeta - z|^\alpha}, \tag{20}$$

служит одним из решений уравнения $\varphi + K\varphi = f$.

(c) *Для достаточно малого $\varepsilon > 0$ оператор P ограничен $C(\overline{G}) \to C^\varepsilon(\overline{G})$.*

Доказательство. (a) К оператору K можно применить лемму 2 с $\alpha_0 = m$, $\alpha_1 = 1$, так что $\mu = 2/q - m - 1 = 1 - m - 2/p$. Согласно этой лемме оператор $K : L^p(G) \to C^\mu(\overline{G})$ ограничен и, в частности, компактен в пространстве $C(\overline{G})$. На основании теоремы Рисса (см. [10, с. 117]) отсюда следует, что однородное уравнение $\varphi + K\varphi = 0$ имеет конечное число линейно независимых решений $\varphi_1, \dots, \varphi_n$, которые, очевидно, принадлежат $C^\mu(\overline{G})$.

Рассмотрим союзный с K оператор K' относительно билинейной формы $\langle\varphi, \psi\rangle$, определяемой левой частью (19). Другими словами, этот оператор связан с K тождеством

$$\langle K\varphi, \psi\rangle = \langle\varphi, K'\psi\rangle. \tag{21}$$

В явном виде действие оператора K' определяется формулой

$$(K'\psi)(z) = \frac{\overline{b_1(z)}}{\pi|z|^m} \int\limits_G \frac{\psi(\zeta) d_2\zeta}{\bar{z} - \bar{\zeta}}.$$

Выберем $p_0 > 1$ столь близким к 1 и $p_1 > 1$ столь большим, чтобы $|\zeta|^{-m}\psi(\zeta) \in L^{p_0}(G)$ для любой функции $\psi \in L^{p_1}(G)$ (с оценкой соответствующих норм). С другой стороны, интеграл в правой части (18) представляет собой свертку функции $\widetilde{\psi}$, полученной продолжением ψ нулем на всю плоскость, с функцией $\bar{\zeta}^{-1}$. Поэтому на основании неравенства Юнга для сверток (см., например, [12, С. 42]) оператор K' ограничен в $L^{p_0}(G)$. Аппроксимируя $\bar{\zeta}^{-1}$ гладкими срезывающими функциями, убеждаемся, что этот оператор и компактен в данном пространстве.

По теореме Рисса однородное уравнение $\psi + K'\psi = 0$ имеет конечное число линейно независимых решений $h_j \in L^{p_0}(G)$, $1 \leqslant j \leqslant n'$. Утверждается, что $n' = n$ и условия (19) необходимы и достаточны для разрешимости неоднородного уравнения $\varphi + K\varphi = f$. В самом деле, по теореме Рисса коядро оператора $1 + K$ в сопряженном пространстве $[C(\overline{G})]^*$ имеет размерность n. В силу (**??**) условия $\langle f, h_j \rangle = 0$, $1 \leqslant j \leqslant n'$, необходимы для разрешимости уравнения $\varphi + K\varphi = f$. Другими словами, функции h_j входят в коядро оператора $1 + K$ и, следовательно, $n' \leqslant n$. В частности, при $n' = n$ условия (19) будут и достаточными для разрешимости этого уравнения. Остается заметить, что аналогичные соображения, примененные к уравнению $\psi + K'\psi = g$ приводят к неравенству $n \leqslant n'$.

(b) Выберем в пространстве $C^\mu(\overline{G})$ системы функций f_j, $1 \leqslant j \leqslant n$, и g_j, $1 \leqslant j \leqslant n$, биортогональные, соответственно, к h_j, $1 \leqslant j \leqslant n$, и φ_j, $1 \leqslant j \leqslant n$, т.е.

$$\langle f_i, h_j \rangle = \langle g_i, \varphi_j \rangle = \delta_{ij}, \tag{22}$$

где δ — символ Кронекера. Утверждается, что оператор

$$N\varphi = \varphi + K\varphi + 2\sum_{j=1}^{n} \langle \varphi, g_j \rangle f_j \tag{23}$$

обратим в пространстве $C(\overline{G})$. В самом деле, в соответствии с теоремой Рисса достаточно убедиться, что его ядро нулевое. Пусть $N\varphi = 0$; тогда $\varphi + K\varphi = -2f$, где f означает сумму в правой части (23), так что f удовлетворяет условиям (19). На основании (22) отсюда получаем $\langle \varphi, g_j \rangle = 0$ для всех j. Поскольку по условию φ является линейной комбинацией функций $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$, в силу (22) имеем $\varphi = 0$.

Согласно (23) оператор N действует по формуле

$$(N\varphi)(z) = \varphi(z) + \frac{1}{\pi} \int\limits_G \frac{c(z,\zeta)\varphi(\zeta) + \big[b_1(\zeta) + \overline{c(z,\zeta)}\big]\overline{\varphi(\zeta)}}{|\zeta|^m\,(\zeta - z)} d_2\zeta, \quad z \in G,$$

где

$$c(z,\zeta) = |\zeta|^m\,(\zeta - z)\,\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{n} f_j(z) g_j(\zeta).$$

Переходя от φ к паре $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$ вещественных функций $\varphi_1 = \mathrm{Re}\,\varphi$ и $\varphi_2 = \mathrm{Im}\,\varphi$ и полагая

$$c(z,\zeta) = c_1(z,\zeta) + ic_2(z,\zeta), \quad b_1(\zeta) = b_{11}(\zeta) + ib_{12}(\zeta), \quad \frac{|z-\zeta|^\alpha}{z-\zeta} = d_1(z,\zeta) + id_2(z,\zeta),$$

можем записать этот оператор в форме

$$N\varphi = \varphi + T(q)\varphi, \quad \big[T(q)\varphi\big](z) = \int\limits_G \frac{q(z,\zeta)\varphi(\zeta)d_2(\zeta)}{|\zeta|^m|\zeta - z|^\alpha} d_2\zeta, \quad z \in G, \tag{24}$$

где $1 < \alpha < 2$ и q означает (2×2)-матрицу-функцию

$$q(z,\zeta) = \frac{1}{\pi}\begin{pmatrix} d_1(2c_1 + b_{11}) + d_2 b_{12} & d_1(b_{12} - 2c_2) - d_2 b_{11} \\ -d_2(2c_1 + b_{11}) + d_1 b_{12} & -d_2(b_{12} - 2c_2) - d_1 b_{11} \end{pmatrix}.$$

Нетрудно видеть, что $c_j \in C^{\varepsilon_1}(\overline{G}\times\overline{G})$, $\varepsilon_1 = \min(m,\mu)$ и $d_j \in C^{\varepsilon_2}(\overline{G}\times\overline{G})$, $\varepsilon_2 = \alpha - 1$. Поэтому функция $q(z,\zeta)$ непрерывна на $\overline{G}\times\overline{G}$ и по переменной z принадлежит $C^{\varepsilon}(\overline{G})$, $\varepsilon = \min(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$, равномерно по $\zeta \in G$.

В частности, на основании леммы 2 оператор $T(q)$ указанного вида компактен в пространстве $C(\overline{G})$.

Утверждается, что

$$\big[1+T(q)\big]^{-1} = 1 + T(p) \tag{25}$$

с некоторой матрицей-функцией $p \in C(\overline{G}\times\overline{G})$. При $m = 0$ этот факт установлен в [11]; в общем случае действуем по этой же схеме. Именно, введем в классе $C(\overline{G}\times\overline{G})$ билинейную операцию $p*q$ по формуле

$$(p*q)(z,\zeta) = |z-\zeta|^{\alpha}\int\limits_G \frac{p(z,t)q(t,\zeta)d_2t}{|t|^m|t-z|^{\alpha}\,|t-\zeta|^{\alpha}}, \quad z \neq \zeta.$$

Это определение мотивировано тем, что перестановка повторного интегрирования $T(p)\big[T(q)\varphi\big]$ приводит к равенству $T(p)T(q) = T(p*q)$.

Аналогично лемме 2 можно проверить, что функция $p*q$ непрерывна и

$$(p*q)(z,\zeta) = |z-\zeta|^{2-m-\alpha}O(1), \quad |z-\zeta| \to 0,$$

причем билинейное отображение $C\times C \to C$, $(p,q) \mapsto p*q$ ограничено. Кроме того, при фиксированном p линейный оператор $R(p)q = p*q$ компактен в пространстве $C(\overline{G}\times\overline{G})$. Пользуясь этими фактами, совершенно аналогично [11, с. 74–78] можно установить существование ядра $p \in C(\overline{G}\times\overline{G})$ со свойством (24). Возвращаясь от пары $\varphi = (\varphi_1,\varphi_2)$ вещественных функций к одной комплексной $\varphi = \varphi_1 + i\varphi_2$, оператор $T(p)f$ можем записать в форме оператора Pf, фигурирующего в (22), где комплексные функции $P_j(z,\zeta)$ обладают тем же свойством, что и матрица-функция $p(z,\zeta)$.

(c) Достаточно показать, что в предыдущих обозначениях оператор $T(p) : C(\overline{G}) \to C^{\varepsilon}(\overline{G})$ ограничен. Легко видеть, что при $\varepsilon \leqslant 3 - 2\alpha - m$ этот факт следует из оценки

$$\Big|p(z_1,\zeta) - p(z_2,\zeta)\Big| \leqslant C|z_1-z_2|^{\varepsilon}\Big[|\zeta-z_1|^{-m} + |\zeta-z_2|^{-m}\Big], \tag{26}$$

где постоянная $C > 0$ не зависит от z_j и ζ.

В самом деле, тогда разность $\Big|\big[T(p)\varphi\big](z_1) - \big[T(p)\varphi\big](z_2)\Big|$ не превосходит

$$C|\varphi|_0\left[\int\limits_{|\zeta-z_1|\leqslant R}\left(\frac{1}{|\zeta-z_1|^m} + \frac{1}{|\zeta-z_2|^m}\right)\frac{|z_1-z_2|^{\varepsilon}d_2\zeta}{|\zeta|^m|\zeta-z_1|^{\alpha}} + \int\limits_{\mathbb{C}}\frac{|z_1-z_2|d_2\zeta}{|\zeta|^m|\zeta-z_1|^{\alpha}|\zeta-z_2|^{\alpha}}\right]$$

с некоторой постоянной C, где R — диаметр области G. Подстановка $\zeta - z_1 = |z_1 - z_2|t$ преобразует выражение в квадратных скобках к виду

$$|z_1-z_2|^{\varepsilon+2-\alpha-2m}\int\limits_{|t|\leqslant R}\left(\frac{1}{|t|^m} + \frac{1}{|t-w|^m}\right)\frac{d_2t}{|t-u|^m|t|^{\alpha}} + |z_1-z_2|^{3-2\alpha-m}\int\limits_{\mathbb{C}}\frac{d_2t}{|t-u|^m|t|^{\alpha}|t-w|^{\alpha}},$$

где

$$u = -\frac{z_1}{|z_1-z_2|}, \quad w = -\frac{z_1-z_2}{|z_1-z_2|}.$$

На основании (13), (14) интегралы здесь равномерно ограничены, что и завершит доказательство п. (c). $\square$

Обратимся к обоснованию оценки (26). Равенство (25) влечет соотношение $p + q + q*p = 0$ для операторных ядер. В развернутом виде

$$-p(z,\zeta) = q(z,\zeta) + \int\limits_G \left|\frac{z-\zeta}{(z-t)(\zeta-t)}\right|^{\alpha}\frac{q(z,t)p(t,\zeta)}{|t|^m}d_2t.$$

Как было отмечено, функция $q(z,t)p(t,\zeta)$ по переменной z принадлежит $C^\varepsilon(\overline{G})$ равномерно по $\zeta, t \in G$. Поэтому с учетом (13) оценка (26) для функции

$$h(z,\zeta) = \int\limits_G \left|\frac{z-\zeta}{(z-t)(\zeta-t)}\right|^\alpha \frac{d_2t}{|t|^m}$$

вытекает из следующей леммы.

Лемма 3. *Для любых $z_1, z_2, \zeta \in G$, $z_j \neq \zeta$ справедлива оценка*

$$\Big|h(z_1,\zeta) - h(z_2,\zeta)\Big| \leqslant C|z_1-z_2|^{3-2\alpha-m}\Big[\big|z_1-\zeta\big|^{-m} + \big|z_2-\zeta\big|^{-m}\Big], \tag{27}$$

где постоянная $C>0$ не зависит от z_j и ζ.

Доказательство. Поскольку

$$u_j = \frac{z_j-\zeta}{(z_j-t)(\zeta-t)} = \frac{1}{\zeta-t} - \frac{1}{z_j-t}, \quad j=1,2,$$

на основании (16) имеем оценку

$$\Big|h(z_1,\zeta)-h(z_2,\zeta)\Big| \leqslant \alpha|z_1-z_2| \int\limits_{\mathbb{C}} \frac{\big(|u_1|^{\alpha-1}+|u_2|^{\alpha-1}\big)d_2t}{|t|^m\,|z_1-t|\,|z_2-t|},$$

которую можно переписать в форме

$$\Big|h(z_1,\zeta)-h(z_2,\zeta)\Big| \leqslant \alpha|z_1-z_2|\Big(\big|z_1-\zeta\big|^{\alpha-1}I_1 + \big|z_2-\zeta\big|^{\alpha-1}I_2\Big), \tag{28}$$

где

$$I_1 = \int\limits_{\mathbb{C}} \frac{d_2t}{|t|^m\,|z_1-t|^\alpha\,|z_2-t|\,|\zeta-t|^{\alpha-1}}, \quad I_2 = \int\limits_{\mathbb{C}} \frac{d_2t}{|\operatorname{Im} t|^m\,|z_2-t|^\alpha\,|z_1-t|\,|\zeta-t|^{\alpha-1}}.$$

Замена $t-z_j = |z_1-z_2|s$ под знаком интеграла I_j преобразует его к виду

$$I_j = |z_1-z_2|^{2-2\alpha-m}\widetilde{I}_j, \quad \widetilde{I}_j = \int\limits_{\mathbb{C}} \frac{d_2t}{|t+v_j|^m\,|t|^\alpha\,|t-u_j|\,|t-w_j|^{\alpha-1}}, \tag{29}$$

где

$$v_j = \frac{z_j}{|z_1-z_2|}, \quad u_1 = -u_2 = \frac{z_1-z_2}{|z_1-z_2|}, \quad w_j = \frac{z_j-\zeta}{|z_1-z_2|}.$$

Рассмотрим зависимость интеграла I_1 от параметров v_1, w_1 и $|u_1|=1$. Если одновременно $|w| \geqslant 1/4$ и $|w-u| \geqslant 1/4$, то, как и в доказательстве леммы 2 с помощью оценок (13), (14) убеждаемся, что интеграл $\widetilde{I}_1$ равномерно ограничен по всем трем параметрам. В результате для рассматриваемого случая приходим к справедливости оценке (28) леммы.

Оставшиеся два случая $|w| \leqslant 1/4$ и $|w-u| \leqslant 1/4$ рассмотрим отдельно. Пусть $|w_1| \leqslant 1/4$. Тогда

$$\widetilde{I}_1 \leqslant C\left(\int\limits_{|t|\leqslant 1/2} \frac{d_2t}{|t+v_1|^m\,|t|^\alpha\,|t-w_1|^{\alpha-1}} + \int\limits_{|t|\geqslant 1/2} \frac{d_2t}{|t+v_1|^m\,|t|^{2\alpha-1}\,|t-u_1|}\right).$$

Как и выше, убеждаемся, что второй интеграл равномерно ограничен, поэтому после переобозначения константы можем написать

$$\widetilde{I}_1 \leqslant C(1+I_1'), \quad I_1' = \int\limits_{|t|\leqslant 1/2} \frac{d_2t}{|t+v_1|^m\,|t|^\alpha\,|t-w_1|^{\alpha-1}}.$$

Полагая $t = s|w_1|$, получим

$$I_1' = |w|^{3-2\alpha-m} \int\limits_{|w_1||t|\leqslant 1/2} \frac{d_2t}{|t+v_1'|^m\,|t|^\alpha\,|t-w_1'|^{\alpha-1}},$$

где $|w_1'| = 1$. Нетрудно видеть, что интеграл оценивается следующим образом:

$$C_1 + C_2 \int\limits_{2\leqslant|s|\leqslant 1/(2|w_1|)} \frac{d_2t}{|t+v_1'|^m\,|t|^{2\alpha-1}} \leqslant C_3|w_1|^{2\alpha-3}.$$

Таким образом, имеем оценку $\widetilde{I}_1 \leqslant C|w_1|^{-m}$. Вспоминая выражение для w, совместно с (24) отсюда приходим к оценке

$$I_1 \leqslant C\big|z_1 - z_2\big|^{2-2\alpha}\big|z_1 - \zeta\big|^{-m}. \tag{30}$$

Пусть далее $|w_1 - u_1| \leqslant 1/4$. Тогда

$$I_1 \leqslant C\left(\int\limits_{|t-u_1|\leqslant 1/2} \frac{d_2t}{|t+v_1|^m\,|t-u_1|\,|t-w_1|^{\alpha-1}} + \int\limits_{|t-u_1|\geqslant 1/2} \frac{d_2t}{|t+v_1|^m\,|t|^\alpha\,(1+|t|^\alpha)}\right).$$

Как и в предыдущем случае, второй интеграл равномерно ограничен, так что после переобозначения константы можем написать

$$I_1 \leqslant C(1+I_1'), \quad I_1' = \int\limits_{|t-u_1|\leqslant 1/2} \frac{d_2t}{|t+v_1|^m\,|t-u_1|\,|t-w_1|^{\alpha-1}}.$$

Полагая $t - u_1 = |u_1 - w_1|s$, получим

$$I_1' = |u_1 - w_1|^{2-\alpha-m} \int\limits_{|u_1-w_1||t|\leqslant 1/2} \frac{d_2t}{|t+\tilde{v}_1'|^m\,|t|^\alpha\,|t-w_1'|},$$

де $|w_1'| = 1$. Как и выше, интеграл имеет оценку $O(1)|u_1 - w_1|^{\alpha-2}$, так что

$$I_1' \leqslant C|u_1 - w_1|^{-m}.$$

Учитывая выражения для w_1 и u_1, а также (29), отсюда приходим к оценке

$$I_1 \leqslant C\big|z_1 - z_2\big|^{2-2\alpha}\,\big|z_2 - \zeta\big|^{-m}.$$

Объединив ее с (30), можем утверждать, что равномерно по всем трем параметрам

$$I_1 \leqslant C\big|z_1 - z_2\big|^{2-2\alpha}\Big[\big|z_1 - \zeta\big|^{-m} + \big|z_2 - \zeta\big|^{-m}\Big].$$

Совершенно аналогично эта оценка устанавливается и для интеграла I_2, что вместе с (28) приводит к справедливости (27). $\square$

5. Представление решения уравнения с комплексно-сопряженной функцией

Обратимся к уравнению (9) с ядром $B = |z|^{-m}b(z)e^{-2i\,\mathrm{Im}\,\Omega}$ и правой частью $\phi + F$, где

$$F = T(||\zeta| - R|^{-a(R)}e^{-h}f).$$

Заметим, что $\Omega(z)$ согласно лемме 1 определяется равенством

$$\Omega(z) = 2a(R)\ln||z| - R| + h(z),$$

где

$$h(z) = (TA_0)(z) + \frac{a(R)}{\pi i}\int\limits_{\partial G} \frac{\ln|R-\rho|d\zeta}{\zeta - z},$$

причем $h(z) \in H(\overline{G})$.

Теорема 4. *Пусть $n > 1$, $0 < m < 1$, $1 < \alpha < (3-m)/2$ и выполнены условия теоремы 1. Пусть*

$$\big||z|-R\big|^{-a(R)}e^{-h(z)}f \in L^p(G), \quad p>2,$$

так что $F \in H(\overline{G})$. Тогда в обозначениях теоремы 2 любое решение и уравнения (2) в классе $u \in C(\overline{G}\backslash\{\{0\}\cup L\})$ представимо в виде

$$u = \big||z|-R\big|^{a(R)}e^{h(z)}\left[\phi + P\phi + F + PF + \sum_{j=1}^{n}\xi_j\varphi_j\right] \tag{31}$$

с произвольными $\xi_j \in \mathbb{R}$, где интегральный оператор P определяется формулой (20), а функция $\phi(z) \in H(\overline{G})$ аналитична в областях G и удовлетворяет условиям

$$\operatorname{Re}\int_G (\phi+F)(\zeta)h_j(\zeta)d_2\zeta = 0, \quad 1 \leqslant j \leqslant n. \tag{32}$$

Доказательство. Согласно (9) подстановка $u = e^{\Omega}V$ приводит (2) к уравнению $V_{\bar z}+B\overline{V} = e^{-\Omega}f$ с коэффициентом $B = |z|^{-m}e^{\overline{\Omega}-\Omega}b$. В свою очередь, в обозначениях (17), (18) это уравнение в классе $V \in H(\overline{G})$ равносильно интегральному уравнению $V + KV = \phi + F$, где $F = T(e^{-\Omega}f) \in H(\overline{G})$, а функция $\phi \in H(\overline{G})$ аналитична в области G. Поэтому остается применить к этому уравнению теорему 3. □

Заметим, что при выполнение условий теоремы 4 решения уравнения (2) принадлежит классу

$$\Big\{u:\ \big||z|-R\big|^{-a(R)}u \in H(\overline{G})\Big\}. \tag{33}$$

6. Решение задачи R

С помощью теоремы 4 легко получить следующий аналог теоремы 2 применительно к общему уравнению (2).

Теорема 5. *В условиях теорем 3, 4 задача R для уравнения (2) является фредгольмовой в классе (33) и ее индекс равен $1-2\varkappa$. Другими словами, однородная задача имеет конечное число m линейно независимых решений, неоднородная задача разрешима при выполнении некоторого числа m' условий ортогональности на правую часть f уравнения (2) и правой части g задачи R, причем $m - m' = 1-2\varkappa$.*

Доказательство. Подставляя представление (31) в (7), для аналитической функции ϕ вместе с дополнительными условиями (32) получим краевую задачу

$$\operatorname{Re}\lambda_0(\phi+R\phi)\Big|_{\partial G} + \sum_{j=1}^{n}\xi_j\operatorname{Re}(\lambda_0\varphi_j)\Big|_{\partial G} = f_0 \tag{34}$$

с коэффициентом $\lambda_0 = \lambda e^h\big|_{\partial G}$ и правыми частями

$$f_0 = f - \operatorname{Re}\Big[\lambda e^h(F+RF)\Big]\Big|_{\partial G}.$$

Неизвестными в этой задаче вместе с ϕ являются и вещественные числа ξ_j.

Соотношения (23)—(24),(34) запишем в следующем операторном виде:

$$R^0\phi + P^0\phi + \sum_{j=1}^{n}\xi_j\varphi_j^0 = f^0, \quad \operatorname{Re}\int_G \phi(\zeta)h_j(\zeta)d_2\zeta = \eta_j, \quad 1 \leqslant j \leqslant n, \tag{35}$$

где

$$R^0\phi = \operatorname{Re}\lambda_0 e^h\phi\big|_{\partial G}, \quad P^0\phi = \operatorname{Re}\lambda_0 e^h(P\phi)\big|_{\partial G}, \quad \varphi_j^0 = \operatorname{Re}\lambda_0 e^h\varphi_j|_{\partial G},$$
$$f^0 = f_0, \quad \eta_j = -\operatorname{Re}\int_G F(\zeta)h_j(\zeta)d_2\zeta.$$

Обозначим через X банахово пространство функций ϕ, которые аналитичны в G и принадлежат $C^\mu(\overline{G})$, а через $Y^0 = C^\mu(\partial G)$ — пространство вещественных функций. Тогда при достаточно малом μ оператор $R^0 : X \to Y^0$ ограничен, а с учетом теоремы 4 оператор $P^0 : X \to Y^0$ компактен. Как видно из доказательства теоремы 3, оператор $R^0 : X \to Y^0$ фредгольмов, а его индекс равен $1 - 2\varkappa$. Поэтому на основании известных свойств фредгольмовых операторов (см. [7, с. 122]) это же верно и для оператора $N = (R^0 + P^0)$. С другой стороны, оператор системы (35) можно рассматривать как ограниченный оператор $\widetilde{N} : X \times \mathbb{R}^n \to Y^0 \times \mathbb{R}^n$, главная часть которого совпадает с N. Поэтому оператор $\widetilde{N}$ также фредгольмов (см. [7, с. 122]) и его индекс равен $\operatorname{ind} \widetilde{N} = \operatorname{ind} N = 1 - 2\varkappa$. Остается заметить, что система (35) эквивалентна исходной задаче R (см. [3, 6]). $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бицадзе А. В.* Некоторые классы уравнений в частных производных. — М.: Наука, 1981.
2. *Векуа И. Н.* Обобщенные аналитические функции. — М.: Физматгиз, 1959.
3. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи. — М: Наука, 1977.
4. *Гончаров А. Л., Климентов С. Б.* Построении нелокальных решений обобщённых систем Коши—Римана с сингулярной точкой// Междунар. школа-семинар по геометрии и анализу памяти Н. В. Ефимова, Абрау-Дюрсо, 5–11 сент. 1998/ Тез. докл. — С. 185–187.
5. *Михайлов Л. Г.* Новые классы особых интегральных уравнений и их применение к дифференциальным уравнениям с сингулярными коэффициентами. — Душанбе: ТаджикНИИНТИ, 1963.
6. *Мусхелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения. — М.: Наука, 1968.
7. *Пале Р.* Семинар по теореме Атьи—Зингера об индексе. — М.: Мир, 1970.
8. *Раджабов Н. Р.* Введение в теорию дифференциальных уравнений в частных производных со сверхсингулярными коэффициентами. — Душанбе: Изд-во ТГУ, 1992.
9. *Расулов А. Б.* Интегральное представления для обобщенной системы Коши—Римана с сингулярными коэффициентами// Пробл. мат. анал. — 2015. — *80*. — С. 89–95.
10. *Рудин У.* Функциональный анализ. — М.: Мир, 1975.
11. *Солдатов А. П.* К теории интегральных уравнений Фредгольма второго рода// Докл. Адыг. (Черкес.) Междунар. акад. наук. — 2009. — *11*, № 1. — С. 68–72.
12. *Стейн И., Вейс Г.* Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. — М.: Мир, 1974.
13. *Тунгатаров А., Абдыманапов С. А.* Некоторые классы эллиптических систем на плоскости с сингулярными коэффициентами. — Алматы: Гылым, 2005.
14. *Усманов З. Д.* Обобщенные системы Коши–Римана с сингулярной точкой. — Душанбе: Изд. АН Тадж. ССР, 1993.
15. *Begehr H., Dao-Qing Dai.* On continuous solutions of a generalized Cauchy–Riemann system with more than one singularity// J. Differ. Equ. — 2004. — *196*. — С. 67–90.
16. *Bers L.* Theory of Pseudo Analityc Functions. — NewYork, 1953.
17. *Meziani A.* Representation of solutions of a singular Cauchy–Riemann equation in the plane// Complex Var. Ellipt. Equ. — 2008. — *53*, № 12. — С. 1111–1130.
18. *Reissig M., Timofeev A.* Dirichlet problems for generalized Cauchy–Riemann systems with singular coefficients// Complex Var. Theory Appl. — 2005. — *50*, №№ 7–11. — С. 653–672.

А. Б. Расулов
Национальный исследовательский университет «МЭИ», Москва
E-mail: `rasulov_abdu@rambler.ru`

М. А. Бободжанова
Национальный исследовательский университет «МЭИ», Москва
E-mail: `bobojanovma@mpei.ru`

Ю. С. Федоров
Национальный исследовательский университет «МЭИ», Москва
E-mail: `Fedorovjs@mpei.ru`

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 139 (2017). С. 91–103

УДК 517.925.51

СТОХАСТИЧЕСКИЕ ВОЗМУЩЕНИЯ УСТОЙЧИВЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ: ПОТРАЕКТОРНЫЙ ПОДХОД

© 2017 г. **О. А. СУЛТАНОВ**

Аннотация. Исследуется стохастическое возмущение динамической системы с локально устойчивой неподвижной точкой. Возмущенная система записывается в форме стохастических дифференциальных уравнений Ито. При этом предполагается, что возмущение не исчезает в равновесии детерминированной системы. Используя потраекторный подход к анализу стохастических дифференциальных уравнений, мы находим ограничения на возмущения, при которых сохраняется устойчивость равновесия с вероятностью 1.

Ключевые слова: динамические системы, возмущение, белый шум, стохастические дифференциальные уравнения, устойчивость с вероятностью 1.

AMS Subject Classification: 93E15, 34D10, 60H10

1. Введение. Рассматривается система обыкновенных дифференциальных уравнений на полуоси:

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, t), \quad \boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n, \quad t \geqslant 0, \tag{1}$$

имеющая тривиальное решение $\boldsymbol{x}(t) \equiv 0$. Предполагается, что вектор-функция $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, t) = (f_1(\boldsymbol{x}, t), \ldots, f_n(\boldsymbol{x}, t))^T$ непрерывна и удовлетворяет глобальному условию Липшица

$$\big|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_1, t) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_2, t)\big| \leqslant M_1|\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2| \quad \forall \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in \mathbb{R}^n, \quad t \geqslant 0, \quad M_1 > 0.$$

Будем также предполагать, что существует функция Ляпунова $V(\boldsymbol{x}, t)$, для которой имеют место оценки:

$$|\boldsymbol{x}| \leqslant V(\boldsymbol{x}, t) \leqslant A_1|\boldsymbol{x}|, \quad |\partial_{\boldsymbol{x}} V| \leqslant A_2, \quad \frac{dV}{dt}\Big|_{(1)} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial V}{\partial t} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_k} f_k \leqslant -\gamma V \tag{2}$$

при $|\boldsymbol{x}| \leqslant R$ и $t \geqslant 0$. Здесь A_1, A_2, γ, R — положительные постоянные. Наличие такой функции Ляпунова влечет за собой локальную асимптотическую устойчивость тривиального решения (см., например, [1, § 10], [4, гл. 2, § 4]).

Вместе с (1) рассматривается возмущенная система в форме стохастических дифференциальных уравнений Ито:

$$d\boldsymbol{y}(t, \omega) = \boldsymbol{f}\big(\boldsymbol{y}(t, \omega), t\big)\, dt + \mu\, \boldsymbol{G}\big(\boldsymbol{y}(t, \omega), t\big)\, d\boldsymbol{W}(t, \omega), \quad t > 0, \quad \boldsymbol{y}(0, \omega) = \boldsymbol{y}_0 \in \mathbb{R}^n. \tag{3}$$

Здесь $\boldsymbol{W}(t, \omega) = (W_1(t, \omega), \ldots, W_n(t, \omega))^T$ — n-мерный винеровский процесс с непрерывными траекториями, определенный на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{y}, t)$ — равномерно ограниченная матрица размерности $n \times n$, которая не зависит от $\omega \in \Omega$ и удовлетворяет условию Липшица:

$$\big\|\boldsymbol{G}(\boldsymbol{y}_1, t) - \boldsymbol{G}(\boldsymbol{y}_2, t)\big\| \leqslant M_2|\boldsymbol{y}_1 - \boldsymbol{y}_2| \quad \forall\, \boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2 \in \mathbb{R}^n, \quad t \geqslant 0, \quad M_2 > 0. \tag{4}$$

Малый параметр $0 < \mu \ll 1$ отвечает за интенсивность возмущений. Начальные данные $\boldsymbol{y}_0$ считаются детерминированными. Указанные ограничения на коэффициенты системы (3) гарантируют

Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации (грант № 02.a03.21.0008).

существование и единственность непрерывного с вероятностью 1 решения при всех $t > 0$ для любой начальной точки $\boldsymbol{y}_0 \in \mathbb{R}^n$ (см. [9, § 5.2]). В работе ставится вопрос об устойчивости решения $\boldsymbol{x}(t) \equiv 0$ системы (1) относительно постоянно действующих стохастических возмущений, когда $\boldsymbol{G}(0,t) \not\equiv 0$. Целью ставится определить ограничения на матрицу $\boldsymbol{G}$, при которых почти все траектории возмущенной системы с достаточно малыми начальными данными будут оставаться в окрестности нуля.

В качестве примера рассмотрим уравнение:

$$dy(t,\omega) = -y(t,\omega)dt + \mu g(t)dW(t,\omega), \quad y(0,\omega) = y_0.$$

Соответствующее невозмущенное уравнение $dx/dt = -x$ имеет (глобально) асимптотически устойчивое тривиально решение. Покажем, что устойчивость нулевого решения сохраняется при наличии стохастических возмущений с затухающей функцией $g(t) \geqslant 0$. Вначале заметим, что решение возмущенного уравнения можно выписать явно:

$$y(t,\omega) = y_0 e^{-t} + \mu(I_1 + I_2),$$

где

$$I_1 = g(t)W(t,\omega) - e^{-t}\int\limits_0^t e^s g(s)W(s,\omega)\,ds, \quad I_2 = -e^{-t}\int\limits_0^t e^s g'(s)W(s,\omega)\,ds.$$

Воспользуемся законом повторного логарифма (см. [6, Ch. 4]) для оценки винеровского процесса в окрестности бесконечности: для почти всех $\omega \in \Omega$ и для любого $\alpha > 0$ существует такое $t_\alpha(\omega) > 0$, что

$$\frac{|W(t)|}{\sqrt{2t\ln\ln(t+e)}} < 1+\alpha, t \geqslant t_\alpha.$$

С другой стороны, свойство локальной гёльдеровости траекторий винеровского процесса (см. [6, Ch. 4]) гарантирует существование такого параметра $\beta(\omega) > 0$, что

$$\frac{|W(t)|}{\left[1+\sqrt{2t\ln\ln(t+e)}\right]} < 1+\alpha+\beta, \quad t > 0.$$

Отсюда следует, что если

$$\Big(g(t) + |g'(t)|\Big)\Big[1+\sqrt{2t\ln\ln(t+e)}\Big] \leqslant 1$$

то для почти всех $\omega \in \Omega$ имеют место оценки

$$|I_1| \leqslant 1+\alpha+\beta, \quad |I_2| \leqslant 1+\alpha+\beta, \quad t > 0.$$

Следовательно, для почти всех $\omega \in \Omega$ для любого $\varepsilon > 0$ найдутся такие $\delta = \varepsilon/2$ и $\Delta = \varepsilon/(4(1+\alpha+\beta))$, что для любых $|y_0| < \delta$ и $\mu < \Delta$ решение $y(t,\omega)$ с начальным значением y_0 останется в окрестности нуля:

$$\big|y(t,\omega)\big| \leqslant \delta + 2\Delta(1+\alpha+\beta) = \varepsilon, \quad t > 0.$$

Отсюда вытекает потраекторная устойчивость тривиального решения с вероятностью 1. В общем случае явные формулы для точных решений стохастических дифференциальных уравнений не доступны и вопрос устойчивости решается не так просто.

Устойчивость стохастических дифференциальных уравнений относительно постоянно действующих возмущений обсуждалась во многих работах. Например, в [5] показано, что если существует глобальная стохастическая функция Ляпунова, то имеет место устойчивость решения по вероятности относительно возмущений с ограниченной матрицей $\boldsymbol{G}$. Если при этом коэффициенты матрицы $\boldsymbol{G}$ достаточно быстро затухают со временем, имеет место более сильная устойчивость с вероятностью 1 (см. [8, § 7.4]). Однако если невозмущенная система имеет хотя бы два устойчивых решения, то возмущения с ограниченной матрицей $\boldsymbol{G}$ приводят к потере устойчивости: почти все траектории рано или поздно покидают окрестность устойчивого равновесия (см. [5], [7, гл. 4, § 2]). Проблема на конечном временном интервале обсуждалась в [4, гл. 7], где была доказана устойчивость равновесия по вероятности на отрезке $0 \leqslant t \leqslant \mathcal{O}(\mu^{-2})$ относительно возмущений с равномерно ограниченной матрицей $\boldsymbol{G}$ при условии, что для детерминированной системы существует локальная функции Ляпунова, обладающая оценками типа (2) с $\gamma = 0$. Из [10] следует, что в случае $\gamma > 0$ имеет место устойчивость решения по вероятности при $0 \leqslant t \leqslant \mathcal{O}(\mu^{-N})$, $N \geqslant 2$. Условия на возмущения, гарантирующие сохранение устойчивости локально устойчивого решения детерминированной системы при всех $t \geqslant 0$, до сих пор были не известны. Эта проблема обсуждается в настоящем тексте.

В настоящей работе описываются классы возмущений, при которых имеет место потраекторная устойчивость тривиального решения системы (1) с вероятностью 1 на всей полуоси $t \geqslant 0$ в случае, когда невозмущенная система имеет только локальную функцию Ляпунова (2). Приводимый анализ опирается на известные результаты о структуре решений стохастических дифференциальных уравнений (см. [2, § 10-11]).

Структура работы следующая. В разделе 2 исследуется устойчивость относительно аддитивных возмущений, когда $\boldsymbol{G} \equiv \boldsymbol{G}_0(t)$. В разделе 3 обсуждается устойчивость в случае диагональных мультипликативных возмущений. В разделе 4 полученные утверждения иллюстрируются примерами. В заключении приводится обсуждение результатов.

2. Аддитивные возмущения. В настоящем разделе предполагается, что $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{y}, t) \equiv \boldsymbol{G}_0(t)$. Определим класс возмущений $\mathcal{A}_h$ как множество матриц $\boldsymbol{G}_0(t)$, для которых выполняется оценка (4) и

$$\sup_{t>0} \Big\{ \|\boldsymbol{G}_0(t)\| + \|\boldsymbol{G}_0'(t)\| \Big\} \Big[1 + \sqrt{2t \ln\ln(t+e)} \Big] \leqslant h.$$

Теорема 1. *Пусть для системы* (1) *существует функция Ляпунова* $V(\boldsymbol{x}, t)$*, обладающая оценками* (2). *Тогда для почти всех* $\omega \in \Omega$ *и для любых* $h > 0$ *и* $\varepsilon > 0$ *найдутся такие* $\delta(\varepsilon) > 0$ *и* $\Delta(\varepsilon, h, \omega) > 0$*, что при всех* $|\boldsymbol{y}_0| < \delta$*,* $\mu < \Delta$*, и* $\boldsymbol{G}_0 \in \mathcal{A}_h$ *решение* $\boldsymbol{y}(t,\omega)$ *системы* (3) *с начальными данными* $\boldsymbol{y}(0,\omega) = \boldsymbol{y}_0$ *обладает оценкой*

$$|\boldsymbol{y}(t,\omega)| < \varepsilon, \quad t > 0.$$

Доказательство. Зафиксируем положительные параметры $\varepsilon < R$ и h. В системе (3) сделаем замену переменных:

$$\boldsymbol{y}(t,\omega) = \boldsymbol{z}(t,\omega) + \mu \boldsymbol{G}_0(t) \boldsymbol{W}(t,\omega).$$

Тогда случайный процесс $\boldsymbol{z}(t,\omega)$ будет удовлетворять системе обыкновенных (не стохастических) дифференциальных уравнений со случайной правой частью:

$$\frac{d\boldsymbol{z}}{dt} = \boldsymbol{f}\big(\boldsymbol{z} + \mu \boldsymbol{G}_0(t)\boldsymbol{W}(t,\omega), t\big) - \mu \boldsymbol{G}_0'(t)\boldsymbol{W}(t,\omega), \quad \boldsymbol{z}(0,\omega) = \boldsymbol{y}_0.$$

Последнее уравнение можно рассматривать как возмущение динамической системы (1) некоторой случайной силой:

$$\frac{d\boldsymbol{z}}{dt} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{z}, t) + \mu \boldsymbol{F}(\boldsymbol{z}, t, \omega), \tag{5}$$

где

$$\mu \boldsymbol{F}(\boldsymbol{z}, t, \omega) = \boldsymbol{f}\big(\boldsymbol{z} + \mu \boldsymbol{G}_0(t)\boldsymbol{W}(t,\omega), t\big) - \mu \boldsymbol{G}_0'(t)\boldsymbol{W}(t,\omega) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{z}, t), \quad \boldsymbol{F}(0, t, \omega) \neq 0.$$

Таким образом, задача свелась к анализу устойчивости тривиального решения системы (1) относительно постоянно действующего возмущения $\mu \boldsymbol{F}$. Заметим, что из липшицивости функции $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{z}, t)$ вытекают следующие оценки:

$$\big|\boldsymbol{F}(\boldsymbol{z}, t, \omega)\big| \leqslant \Big(M_1 \big\|\boldsymbol{G}_0(t)\big\| + \big\|\boldsymbol{G}_0'(t)\big\| \Big) \big|\boldsymbol{W}(t,\omega)\big|,$$

$$\Big|\boldsymbol{F}(\boldsymbol{z}_1, t, \omega) - \boldsymbol{F}(\boldsymbol{z}_2, t, \omega)\Big| \leqslant \Big(1 + \mu \big\|\boldsymbol{G}_0(t)\big\| \, \big|\boldsymbol{W}(t,\omega)\big| \Big) M_1 |\boldsymbol{z}_1 - \boldsymbol{z}_2|$$

для всех $t \geqslant 0$, $\boldsymbol{z}, \boldsymbol{z}_1, \boldsymbol{z}_2 \in \mathbb{R}^n$ и $\omega \in \Omega$. Отсюда и из свойств винеровского процесса следует, что для любой начальной точки $\boldsymbol{y}_0$ существует и единственно решение системы (5), которое представляет собой случайный процесс $\boldsymbol{z}(t,\omega)$ (см. [8, § 1.3]).

Для анализа устойчивости равновесия относительно возмущения $\mu\boldsymbol{F}$ воспользуемся функцией Ляпунова (2) для невозмущенной системы. Такой подход применялся в [1, § 70] для детерминированных возмущений. Вычислим полную производную функции $V(\boldsymbol{z},t)$ на траекториях системы (5):

$$\frac{dV}{dt}\bigg|_{(5)} = \frac{dV}{dt}\bigg|_{(1)} + \mu\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial z_i}F_i.$$

Из определения класса $\mathcal{A}_h$ и закона повторного логарифма для винеровского процесса $\boldsymbol{W}(t,\omega)$ следует, что при почти всех $\omega\in\Omega$ для любых $\alpha>0$ существует такое $t_\alpha(\omega)$, что

$$\big|\boldsymbol{F}(\boldsymbol{z},t,\omega)\big| \leqslant (1+M_1)(1+\alpha)h, \quad t\geqslant t_\alpha(\omega).$$

При этом из свойства гельдеровости винеровского процесса вытекает существование такого $\beta(\omega)>0$, что

$$\big|\boldsymbol{F}(\boldsymbol{z},t,\omega)\big| \leqslant (1+M_1)\beta h, \quad 0<t\leqslant t_\alpha(\omega).$$

Отсюда при $\delta<|\boldsymbol{z}|<R$ и $\mu<\Delta_1$ вытекает оценка для производной функции Ляпунова:

$$\frac{dV}{dt}\bigg|_{(5)} \leqslant \Big(-\gamma + \Delta_1(1+M_1)(1+\alpha+\beta)hA_2\delta^{-1}\Big)V \quad \forall\, t>0.$$

Зафиксируем

$$\delta = \frac{\varepsilon}{4A_1}, \quad \Delta_1 = \frac{\delta\gamma}{2(1+M_1)(1+\alpha+\beta)hA_2};$$

тогда

$$\frac{dV}{dt} \leqslant -\gamma\frac{V}{2} < 0 \quad \text{при } \delta<|\boldsymbol{z}|<R \text{ с вероятностью 1.}$$

Из свойств функции Ляпунова вытекают следующие оценки:

$$\sup\Big\{V(\boldsymbol{z},t) \text{ при } |\boldsymbol{z}|\leqslant\delta,\ t\geqslant 0\Big\} \leqslant A_1\delta < \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \inf\Big\{V(\boldsymbol{z},t) \text{ при } |\boldsymbol{z}| = \frac{\varepsilon}{2},\ t\geqslant 0\Big\}.$$

Следовательно, траектории, стартующие в δ-окрестности равновесия, не могут выйти за границу области $|\boldsymbol{z}|<\varepsilon/2$ с вероятностью 1.

С другой стороны, легко видеть, что при $t\geqslant 0$ и $\mu<\Delta_2=\varepsilon/(2(1+\alpha+\beta)h)$ справедлива оценка

$$\mu\big\|\boldsymbol{G}_0(t)\big\|\,\big|\boldsymbol{W}(t,\omega)\big| \leqslant \mu(1+\alpha+\beta)h < \frac{\varepsilon}{2}$$

с вероятностью 1. Определим $\Delta=\min(\Delta_1,\Delta_2)$; тогда при почти всех $\omega\in\Omega$ для всех $\mu<\Delta$ решение

$$\boldsymbol{y}(t,\omega) = \boldsymbol{z}(t,\omega) + \mu\boldsymbol{G}_0(t)\boldsymbol{W}(t,\omega)$$

системы (3) с начальными данными

$$|\boldsymbol{y}(0,\omega)| = |\boldsymbol{z}(0,\omega)| < \delta$$

будет обладать оценкой

$$|\boldsymbol{y}(t,\omega)| < \varepsilon, \quad t>0.$$

Теорема доказана. □

Следствие 1. *Пусть для системы* (1) *существует функция Ляпунова* $V(\boldsymbol{x},t)$, *обладающая оценками* (2) *при* $|\boldsymbol{x}|\leqslant R$, $t\geqslant 0$ *с положительными постоянными* A_1, A_2, γ, R, *причем* $0<\gamma<2A_2(1+M_1)$. *Тогда для почти всех* $\omega\in\Omega$ *существует такое* $T(\omega)>0$, *что для любого* $h>0$ *найдутся такие* $\delta>0$ *и* $\Delta(h)>0$, *что при всех* $|\boldsymbol{y}_0|<\delta$, $\mu<\Delta$, $\boldsymbol{G}_0\in\mathcal{A}_h$ *решение* $\boldsymbol{y}(t,\omega)$ *системы* (3) *с начальными данными* $\boldsymbol{y}(T,\omega)=\boldsymbol{y}_0$ *обладает оценкой*

$$\big|\boldsymbol{y}(t,\omega)\big| \leqslant \frac{R}{2}e^{-\gamma(t-T)/2} + \frac{\gamma R}{4A_1A_2(1+M_1)} \leqslant R, \quad t>T. \tag{6}$$

Доказательство. Как и выше в системе (3), сделаем замену переменных

$$\boldsymbol{y}(t,\omega) = \boldsymbol{z}(t,\omega) + \mu \boldsymbol{G}_0(t)\boldsymbol{W}(t,\omega);$$

тогда случайный процесс $\boldsymbol{z}(t,\omega)$ будет удовлетворять системе (5). Из свойств винеровского процесса следует, что для функции $\mu\boldsymbol{F}$ при почти всех $\omega \in \Omega$ найдется такое $T(\omega) > 0$, что

$$\bigl|\boldsymbol{F}(\boldsymbol{z},t,\omega)\bigr| \leqslant 2(1+M_1)h$$

при всех $t \geqslant T$. Отсюда вытекает оценка для производной функции Ляпунова в силу системы (5):

$$\frac{dV}{dt} \leqslant -\gamma\frac{V}{2}, \quad t \geqslant T, \quad \delta_0 \leqslant |\boldsymbol{z}| \leqslant R, \quad \mu < \Delta,$$

где

$$\Delta = \frac{\delta_0\gamma}{4(1+M_1)hA_2}.$$

Выберем $\delta_0 = R/(2A_1)$; тогда справедлива оценка

$$\sup\Bigl\{V(\boldsymbol{z},t) \text{ при } |\boldsymbol{z}| \leqslant \delta_0,\ t \geqslant T\Bigr\} \leqslant A_1\delta_0 < R \leqslant \inf\Bigl\{V(\boldsymbol{z},t) \text{ при } |\boldsymbol{z}| = R,\ t \geqslant T\Bigr\}.$$

Следовательно, траектории $\boldsymbol{z}(t,\omega)$, стартующие при $t = T$ из δ_0-окрестности нуля, не могут выйти на границу $|\boldsymbol{z}| = R$ при $t > T$ с вероятностью 1. Более того, из свойств функции V и неравенства для производной dV/dt на траекториях системы (5) вытекает оценка

$$\bigl|\boldsymbol{z}(t,\omega)\bigr| \leqslant \frac{R}{2}\exp\Bigl(-\frac{\gamma}{2}(t-T)\Bigr), \quad t \geqslant T.$$

Заметим, что при $t \geqslant T$ и $\mu < \Delta$ имеет место оценка

$$\mu\bigl\|\boldsymbol{G}_0(t)\bigr\|\,\bigl|\boldsymbol{W}(t,\omega)\bigr| \leqslant 2\Delta h = \frac{\gamma R}{4A_1A_2(1+M_1)}$$

с вероятностью 1. Условие

$$\bigl|\boldsymbol{z}(T,\omega)\bigr| \leqslant \delta_0,$$

где

$$\boldsymbol{z}(T,\omega) = \boldsymbol{y}(T,\omega) - \mu\boldsymbol{G}_0(T)\boldsymbol{W}(T,\omega),$$

дает границу допустимых начальных данных при $t = T$ для решений исходного стохастического уравнения:

$$\bigl|\boldsymbol{y}(T,\omega)\bigr| < \delta, \quad \delta = \frac{R}{2A_1}\left(1 - \frac{\gamma}{2A_2(1+M_1)}\right) > 0.$$

Таким образом, при почти всех $\omega \in \Omega$ для любого $\mu < \Delta$ решение

$$\boldsymbol{y}(t,\omega) = \boldsymbol{z}(t,\omega) + \mu\boldsymbol{G}_0(t)\boldsymbol{W}(t,\omega)$$

системы (3) с начальными данными $|\boldsymbol{y}(T,\omega)| < \delta$ обладает оценкой (6). □

3. Мультипликативные возмущения. В настоящем разделе предполагается, что матрица $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{y},t)$ является диагональной. Вначале рассмотрим случай, когда $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{y},t) = \boldsymbol{B}(\boldsymbol{y})\boldsymbol{G}_0(t)$. Определим класс возмущений $\mathcal{P}_h$ как множество матриц $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{y},t)$, удовлетворяющих условию (4) и имеющих вид

$$\boldsymbol{G}(\boldsymbol{y},t) \equiv \operatorname{diag}\bigl(b_1(y_1)\sigma_1(t),\dots,b_n(y_n)\sigma_n(t)\bigr),$$

где $0 < m_0 \leqslant b_i(y) \leqslant m_1$, $\bigl|b_j'(y)\bigr| \leqslant m_2$ равномерно по $y \in \mathbb{R}$ и

$$\sup_{t>0}\Bigl\{|\sigma(t)| + |\sigma'(t)|\Bigr\}\Bigl[1 + \sqrt{2t\ln\ln(t+e)}\Bigr] \leqslant h,$$

где $\sigma = (\sigma_1,\dots,\sigma_n)$.

Теорема 2. *Пусть для системы* (1) *существует функция Ляпунова* $V(\boldsymbol{x},t)$*, обладающая оценками* (2)*. Тогда для почти всех* $\omega\in\Omega$*, для любого* $h>0$ *и* $\varepsilon>0$ *найдутся такие* $\delta(\varepsilon)>0$ *и* $\Delta(\varepsilon,h,\omega)>0$*, что при всех* $|\boldsymbol{y}_0|<\delta$*,* $\mu<\Delta$*,* $G\in\mathcal{P}_h$ *решение* $\boldsymbol{y}(t,\omega)$ *системы* (3) *с начальными данными* $\boldsymbol{y}(0,\omega)=\boldsymbol{y}_0$ *обладает оценкой*

$$\big|\boldsymbol{y}(t,\omega)\big|<\varepsilon,\quad t>0.$$

Доказательство. Вначале докажем утверждение при $n=1$. Введем обозначения

$$\boldsymbol{y}(t,\omega)=y(t,\omega),\quad \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y},t)=f(y,t),\quad \boldsymbol{G}(\boldsymbol{y},t)=b(y)\sigma(t).$$

Зафиксируем положительные параметры $\varepsilon<R$ и h. В уравнении

$$dy(t)=f(y,t)dt+\mu b(y)\sigma(t)dW(t)$$

сделаем замену переменных:

$$y(t,\omega)=\psi\big(c(t,\omega)+\mu\sigma(t)W(t,\omega)\big),$$

где функция $\psi(v)$ является решением уравнения

$$\frac{d\psi}{dv}=b(\psi),\quad \psi(0)=0.$$

Тогда случайный процесс $c(t,\omega)$ удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению со случайными коэффициентами

$$\psi'\big(c+\mu\sigma W\big)\left[\frac{dc}{dt}+\mu\sigma'W\right]=f\Big(\psi(c+\mu\sigma W),t\Big)-\frac{\mu^2}{2}\sigma^2 b\Big(\psi(c+\mu\sigma W)\Big)b'\Big(\psi(c+\mu\sigma W)\Big)$$

(см. [2, § 10]). В последнем уравнении сделаем замену $z=\psi(c)$; тогда функция $z(t,\omega)$ будет удовлетворять уравнению

$$\frac{dz}{dt}=f(z,t)+\mu F(z,t,\omega),\quad z(0,\omega)=y_0, \tag{7}$$

где

$$\mu F(z,t,\omega)=\frac{f\big(\psi(c+\mu\sigma W),t\big)\psi'(c)-f(z,t)\psi'(c+\mu\sigma W)}{\psi'(c+\mu\sigma W)}-$$
$$-\left[\frac{\mu^2}{2}\sigma^2 b(z)b'\Big(\psi(c+\mu\sigma W)\Big)+\mu b(z)\sigma'W\right].$$

Задача состоит в исследовании устойчивости тривиального решения уравнения $dz/dt=f(z,t)$ относительно постоянно действующего возмущения μF. Оценим каждое слагаемое в функции F:

$$\Big|f\big(\psi(c+\mu\sigma W),t\big)\psi'(c)-f(z,t)\psi'(c+\mu\sigma W)\Big|=$$
$$=\Big|f\big(\psi(c+\mu\sigma W),t\big)\psi'(c)-f(z,t)\psi'(c+\mu\sigma W)\pm f\big(\psi(c),t\big)\psi'(c)\Big|\leqslant$$
$$\leqslant\Big|f\big(\psi(c+\mu\sigma W),t\big)-f\big(\psi(c),t\big)\Big|\,\big|\psi'(c)\big|+\big|f(z,t)\big|\,\big|\psi'(c)-\psi'(c+\mu\sigma W)\big|\leqslant$$
$$\leqslant\mu M_1 m_1^2|\sigma|\,|W|+\mu M_1 m_1 m_2|\sigma|\,|W|\,|z|,$$

$$\psi'(c+\mu\sigma W)=b\big(\psi(c+\mu\sigma W)\big)\geqslant m_0>0,$$
$$\left|\frac{\mu^2}{2}\sigma^2 b(z)b'\big(\psi(c+\mu\sigma W)\big)+\mu b(z)\sigma'W\right|\leqslant\mu^2 h m_1 M_2+\mu m_1|\sigma'|\,|W|$$

для всех $t\geqslant 0$, $z\in\mathbb{R}$. Отсюда вытекает оценка

$$\big|\mu F(z,t,\mu)\big|\leqslant\mu M_*\Big[|\sigma|\,|W|\,(1+|z|)+|\sigma'|\,|W|+h\Big],$$

где

$$M_*=\frac{m_1}{m_0}M_1(m_1+m_2)+m_1(1+M_2).$$

Вычислим полную производную функции $V(z,t)$ на траекториях уравнения (7):

$$\frac{dV}{dt}\bigg|_{(7)} = \frac{dV}{dt}\bigg|_{(1)} + \mu\partial_z V\cdot F \leqslant -\gamma V + \mu A_2 M_*\Big[|\sigma|\,|W|(1+|z|) + |\sigma'|\,|W| + h\Big].$$

Из определения класса $\mathcal{P}_h$ и свойств винеровского процесса следует, что при почти всех $\omega\in\Omega$ существует такое $\nu(\omega)$, что

$$\big(|\sigma|+|\sigma'|\big)|W| \leqslant \nu h, \quad t>0.$$

Отсюда при $\delta<|z|<R$ и $\mu<\Delta_1$ вытекает оценка

$$\frac{dV}{dt}\bigg|_{(5)} \leqslant \Big(-\gamma + \Delta_1 A_2 M_* h\delta^{-1}(1+\nu)(1+\delta)\Big)V \quad \forall\, t>0.$$

Выберем

$$\delta = \frac{\varepsilon}{4A_1}, \quad \Delta_1 = \frac{\delta\gamma}{2A_2M_*h(1+\nu)(1+\delta)};$$

тогда

$$\frac{dV}{dt} \leqslant -\frac{\gamma V}{2} < 0$$

с вероятностью 1 при $\delta<|z|<\varepsilon/2$ и $t>0$. Из свойств функции Ляпунова вытекают оценки

$$\sup\Big\{V(z,t) \text{ при } |z|\leqslant\delta,\ t\geqslant 0\Big\} \leqslant A_1\delta < \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \inf\Big\{V(z,t) \text{ при } |z| = \frac{\varepsilon}{2},\ t\geqslant 0\Big\}.$$

Следовательно, траектории, стартующие в δ-окрестности нуля, не могут выйти за границу области $|z|<\varepsilon/2$ с вероятностью 1.

С другой стороны, заметим, что

$$\big|y(t,\omega)\big| \leqslant \big|z(t,\omega)\big| + \mu m_1\big|\sigma(t)\big|\,\big|W(t,\omega)\big|.$$

Действительно,

$$y(t,\omega) = z(t,\omega) + r(t,\omega),$$

где

$$\big|r(t,\omega)\big| = \Big|\psi\big(c(t,\omega)+\mu\sigma(t)W(t,\omega)\big) - \psi\big(c(t,\omega)\big)\Big| \leqslant \mu m_1\big|\sigma(t)\big|\,\big|W(t,\omega)\big|.$$

Зафиксируем $\Delta_2 = \varepsilon/(2hm_1\nu)$; тогда при почти всех $\omega\in\Omega$ для любого $\mu<\Delta_2$ справедлива оценка

$$\mu m_1\big|\sigma(t)\big|\,\big|W(t,\omega)\big| \leqslant \Delta_2 m_1 h\nu = \frac{\varepsilon}{2}$$

при $t>0$. Определим $\Delta = \min(\Delta_1,\Delta_2)$; тогда при почти всех $\omega\in\Omega$ для любого $\mu<\Delta$ решение уравнения (3) с начальными данными $|y(0,\omega)|<\delta$ удовлетворяет оценке

$$\big|y(t,\omega)\big| < \varepsilon, \quad t>0.$$

Рассмотрим теперь случай $n\geqslant 2$. Из [2, § 11] следует, что решение системы (3) имеет вид

$$y_i(t,\omega) = \psi_i\big(c_i(t,\omega) + \mu\sigma_i(t)W_i(t,\omega)\big),$$

где функции $\psi_1(v_1),\dots,\psi_n(v_n)$ удовлетворяют уравнениям

$$\frac{d\psi_i}{dv_i} = b_i\big(\psi_i(v_i)\big), \quad \psi_i(0)=0,$$

а случайный процесс $\boldsymbol{c}(t,\omega) = (c_1,\dots,c_n)$ удовлетворяет системе обыкновенных дифференциальных уравнений со случайными коэффициентами:

$$\psi_i'(c_i+\mu\sigma_iW_i)\left[\frac{dc_i}{dt} + \mu\sigma_i'W_i\right] = f_i\Big(\psi_1(c_1+\mu\sigma_1W_1),\ \dots,\ \psi_n(c_n+\mu\sigma_nW_n), t\Big) - \\ - \frac{\mu^2}{2}\sigma_i^2 b_i\Big(\psi_i\big(c_i+\mu\sigma_iW_i\big)\Big)\partial_{y_i} b_i\Big(\psi_i\big(c_i+\mu\sigma_iW_i\big)\Big).$$

Сделаем замену переменных $z_i=\psi_i(c_i)$, $i=1,\dots,n$; тогда
$$\frac{d\boldsymbol{z}}{dt}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{z},t)+\mu\boldsymbol{F}(\boldsymbol{z},t,\omega),\quad \boldsymbol{z}(0,\omega)=\boldsymbol{y}_0,\quad \boldsymbol{F}=(F_1,\dots,F_n),\tag{8}$$
где
$$\mu F_i(\boldsymbol{z},t,\omega)=\frac{f_i\Big(\psi_1(c_1+\mu\sigma_1W_1),\ \dots,\ \psi_n(c_n+\mu\sigma_nW_n),t\Big)\psi_i'(c_i)-f_i(\boldsymbol{z},t)\psi_i'\big(c_i+\mu\sigma_iW_i\big)}{\psi_i'\big(c_i+\mu\sigma_iW_i\big)}-$$
$$-\left[\frac{\mu^2}{2}\sigma_i^2b_i(z_i)\partial_{y_i}b_i\Big(\psi_i\big(c_i+\mu\sigma_iW_i\big)\Big)+\mu b_i(z_i)\sigma_i'W_i\right].$$
и $c_i=\psi_i^{-1}(z_i)$. Для каждой компоненты возмущения справедлива оценка
$$\big|\mu F_i(\boldsymbol{z},t,\mu)\big|\leqslant\mu M_*\Big[|\sigma|\,|\boldsymbol{W}|\big(1+|\boldsymbol{z}|\big)+|\sigma'|\,|\boldsymbol{W}|+h\Big]$$
с константой
$$M_*=\frac{m_1}{m_0}M_1(m_1+m_2)+m_1(1+M_2).$$
Эта оценка вытекает из следующих неравенств:
$$\Big|f_i\Big(\psi_1\big(c_1+\mu\sigma_1W_1\big),\ \dots,\ \psi_n\big(c_n+\mu\sigma_nW_n\big),t\Big)\psi_i'(c_i)-f_i(\boldsymbol{z},t)\psi_i'\big(c_i+\mu\sigma_iW_i\big)\Big|\leqslant$$
$$\leqslant\Big|f_i\Big(\psi_1\big(c_1+\mu\sigma_1W_1\big),\ \dots,\ \psi_n\big(c_n+\mu\sigma_nW_n\big),t\Big)-f_i(\boldsymbol{z},t)\Big|+$$
$$+\big|f_i(\boldsymbol{z},t)\big|\,\Big|\psi_i'(c_i)-\psi_i'\big(c_i+\mu\sigma_iW_i\big)\Big|\leqslant\mu M_1m_1^2|\sigma|\,|\boldsymbol{W}|+\mu M_1m_1m_2|\sigma|\,|\boldsymbol{W}|\,|\boldsymbol{z}|,$$
$$\left|\frac{\mu^2}{2}\sigma_i^2b_i(z_i)\partial_{y_i}b_i\Big(\psi_i\big(c_i+\mu\sigma_iW_i\big)\Big)\right|\leqslant\mu^2hm_1M_2,$$
$$\big|\mu b_i(z_i)\sigma_i'W_i\big|\leqslant\mu m_1|\sigma'|\,|\boldsymbol{W}|,\quad \psi_i'\big(c_i+\mu\sigma_iW_i\big)=b_i\Big(\psi_i\big(c_i+\mu\sigma_iW_i\big)\Big)\geqslant m_0>0$$
для всех $t\geqslant0$, $z\in\mathbb{R}$.

Покажем, что тривиальное решение системы (1) устойчиво относительно возмущения $\mu\boldsymbol{F}(\boldsymbol{z},t,\omega)$. Вычислим полную производную функции $V(\boldsymbol{z},t)$ на траекториях возмущенной системы (8):
$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{(8)}=\left.\frac{dV}{dt}\right|_{(1)}+\mu\sum_{i=1}^n\frac{\partial V}{\partial z_i}F_i\leqslant-\gamma V+\mu A_2M_*\Big[|\sigma|\,|\boldsymbol{W}|\big(1+|\boldsymbol{z}|\big)+|\sigma'|\,|\boldsymbol{W}|+h\Big].$$
Из определения класса $\mathcal{P}_h$ и свойств винеровского процесса $\boldsymbol{W}(t,\omega)$ следует, что при почти всех $\omega\in\Omega$ существует такое $\nu(\omega)>0$, что
$$\big(|\sigma|+|\sigma'|\big)|\boldsymbol{W}|\leqslant\nu h,\quad t>0.$$
Отсюда при $\delta<|\boldsymbol{z}|<R$ и $\mu<\Delta_1$ вытекает оценка
$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{(5)}\leqslant\Big(-\gamma+\Delta_1A_2M_*h\delta^{-1}(1+\nu)(1+\delta)\Big)V\quad\forall\,t>0.$$
Зафиксируем
$$\delta=\frac{\varepsilon}{4A_1},\quad \Delta_1=\frac{\delta\gamma}{2A_2M_*h(1+\nu)(1+\delta)};$$
тогда
$$\frac{dV}{dt}\leqslant-\frac{\gamma V}{2}<0$$
с вероятностью 1 при $\delta/2<|\boldsymbol{z}|<R$ и $t>0$. Отсюда и из оценок
$$\sup\Big\{V(\boldsymbol{z},t)\text{ при }|\boldsymbol{z}|\leqslant\delta,\ t\geqslant0\Big\}\leqslant A_1\delta<\frac{\varepsilon}{2}\leqslant\inf\Big\{V(\boldsymbol{z},t)\text{ при }|\boldsymbol{z}|=\frac{\varepsilon}{2},\ t\geqslant0\Big\}$$

следует, что при почти всех $\omega \in \Omega$ траектории $\boldsymbol{z}(t,\omega)$ системы (7), стартующие в δ-окрестности нуля, не могут выйти за границу области $|\boldsymbol{z}| < \varepsilon/2$.

Решение $\boldsymbol{y}(t,\omega)$ исходной системы (3) можно представить в виде

$$\boldsymbol{y}(t,\omega) = \boldsymbol{z}(t,\omega) + \boldsymbol{r}(t,\omega),$$

где $\boldsymbol{r} = (r_1,\ldots,r_n)$ и $r_i = \psi_i(c_i + \mu\sigma_i W_i) - \psi_i(c_i)$, $c_i = \psi_i^{-1}(z_i)$. Из определения функций ψ_i и свойств b_i следует, что

$$|r_i| \leqslant \mu m_1 |\sigma_i|\,|W_i|, \quad i = 1,\ldots,n, \quad t \geqslant 0, \quad \omega \in \Omega.$$

Зафиксируем $\Delta_2 = \varepsilon/(2hm_1\nu)$; тогда для любого $\mu < \Delta_2$ справедлива оценка

$$|\boldsymbol{r}| \leqslant \Delta_2 m_1 \nu h = \frac{\varepsilon}{2}$$

с вероятностью 1 при $t > 0$. Определим $\Delta = \min(\Delta_1, \Delta_2)$; тогда для любого $\mu < \Delta$ решение уравнения (3) с начальными данными $|\boldsymbol{y}(0,\omega)| < \delta$ с вероятностью 1 удовлетворяет оценке

$$|\boldsymbol{y}(t,\omega)| < \varepsilon, \quad t > 0.$$

Теорема доказана. □

Рассмотрим теперь более общие мультипликативные возмущения вида $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{y},t) = \boldsymbol{B}(\boldsymbol{y},t)\boldsymbol{G}_0(t)$. Определим класс $\mathcal{M}_h$ как множество матриц $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{y},t)$, удовлетворяющих условию (4) и имеющих вид

$$\boldsymbol{G}(\boldsymbol{y},t) \equiv \operatorname{diag}\Big(b_1(\boldsymbol{y},t)\sigma_1(t),\ \ldots,\ b_n(\boldsymbol{y},t)\sigma_n(t)\Big),$$

где

$$0 < m_0 \leqslant b_i(\boldsymbol{y},t) \leqslant m_1, \quad \big|\partial_t b_i(\boldsymbol{y},t)\big| + \big|\partial_{y_j} b_i(\boldsymbol{y},t)\big| \leqslant m_2$$

равномерно по $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ и $t \geqslant 0$ и

$$\sup_{t>0}\Big\{|\sigma(t)| + |\sigma'(t)|\Big\}\Big[1 + \sqrt{2t\ln\ln(t+e)}\Big] \leqslant h,$$

где $\sigma = (\sigma_1,\ldots,\sigma_n)$.

Теорема 3. *Пусть для системы* (1) *существует функция Ляпунова $V(\boldsymbol{x},t)$, обладающая оценками* (2)*. Тогда для почти всех $\omega \in \Omega$ для любого $h > 0$ и $\varepsilon > 0$ найдутся такие $\delta(\varepsilon) > 0$, $\Delta(\varepsilon,h,\omega) > 0$, что при всех $|\boldsymbol{y}_0| < \delta$, $\mu < \Delta$, $\boldsymbol{G} \in \mathcal{M}_h$ решение $\boldsymbol{y}(t,\omega)$ системы* (3) *с начальными данными $\boldsymbol{y}(0,\omega) = \boldsymbol{y}_0$ обладает оценкой*

$$\big|\boldsymbol{y}(t,\omega)\big| < \varepsilon, \quad t > 0.$$

Доказательство. Докажем утверждение в случае $n = 1$. Зафиксируем положительные параметры ε и h. В (3) сделаем замену переменных

$$y(t,\omega) = \psi\big(c(t,\omega) + \mu\sigma(t)W(t,\omega), t\big),$$

где функция $\psi(v,t)$ является решением уравнения

$$\frac{\partial\psi}{\partial v} = b(\psi,t), \quad \psi(0,t) = 0.$$

Тогда случайный процесс $c(t,\omega)$ будет удовлетворять обыкновенному дифференциальному уравнению со случайными коэффициентами:

$$\partial_v\psi\big(c+\mu\sigma W,t\big)\left[\frac{dc}{dt} + \mu\sigma' W\right] = f\big(\psi\big(c+\mu\sigma W,t\big),t\big) - \partial_t\psi\big(c+\mu\sigma W,t\big) - \\ - \frac{\mu^2}{2}\sigma^2 b\big(\psi\big(c+\mu\sigma W,t\big),t\big)\partial_y b\big(\psi\big(c+\mu\sigma W,t\big),t\big).$$

В последнем уравнении сделаем замену переменных: $z(t) = \psi(c(t),t)$; тогда

$$\frac{dz}{dt} = f(z,t) + \mu F(z,t,\omega), \quad z(0,\omega) = y_0, \tag{9}$$

где

$$
\begin{aligned}
&\mu F = D_1 + D_2 + D_3,\\
&D_1 \equiv \frac{f\big(\psi(c+\mu\sigma W,t),t\big)\partial_v\psi(c,t)}{\partial_v\psi(c+\mu\sigma W,t)} - f(z,t),\\
&D_2 \equiv \partial_t\psi(c,t) - \frac{\partial_v\psi(c,t)\partial_t\psi(c+\mu\sigma W,t)}{\partial_v\psi(c+\mu\sigma W,t)},\\
&D_3 \equiv -\left[\frac{\mu^2}{2}\sigma^2\partial_y b\big(\psi(c+\mu\sigma W,t),t\big) + \mu\sigma' W\right] b(z,t).
\end{aligned}
$$

Оценим каждое слагаемое в функции F. Для D_1 имеем:

$$
\begin{aligned}
|D_1| &\leqslant \big|\partial_v\psi(c+\mu\sigma W,t)\big|^{-1}\Big|f\big(\psi(c+\mu\sigma W,t),t\big)\partial_v\psi(c,t) - f(z,t)\partial_v\psi(c+\mu\sigma W,t)\Big| \leqslant\\
&\leqslant m_0^{-1}\Big|f\big(\psi(c+\mu\sigma W,t),t\big)\partial_v\psi(c,t) - f(z,t)\partial_v\psi(c+\mu\sigma W,t) \pm f(z,t)\partial_v\psi(c,t)\Big| \leqslant\\
&\leqslant m_0^{-1}\Big[\Big|f\big(\psi(c+\mu\sigma W,t),t\big) - f\big(\psi(c,t),t\big)\Big|\,|b(z,t)| + |f(z,t)|\Big|b(z,t) - b\big(\psi(c+\mu\sigma W,t),t\big)\Big|\Big] \leqslant\\
&\leqslant \mu m_0^{-1}M_1 m_1|\sigma|\,|W|(m_1+m_2|z|) \quad \forall\, z\in\mathbb{R},\ t\geqslant 0.
\end{aligned}
$$

Здесь мы использовали условие

$$\partial_v\psi(v,t) \equiv b\big(\psi(v,t),t\big) \geqslant m_0 > 0$$

для всех v и t. Для второго слагаемого D_2 имеют место похожие оценки:

$$
\begin{aligned}
|D_2| &\leqslant m_0^{-1}\Big|\partial_t\psi(c,t)\partial_v\psi(c+\mu\sigma W,t) - \partial_v\psi(c,t)\partial_t\psi(c+\mu\sigma W,t)\Big| \leqslant\\
&\leqslant m_0^{-1}\Big[\big|\partial_t\psi(c,t)\big|\,\Big|\partial_v\psi(c+\mu\sigma W,t) - \partial_v\psi(c,t)\Big| + \big|\partial_v\psi(c,t)\big|\,\Big|\partial_t\psi(c+\mu\sigma W,t) - \partial_t\psi(c,t)\Big|\Big].
\end{aligned}
$$

Заметим, что из определения функции $\psi(v,t)$ следует, что

$$\int\limits_0^{\psi(v,t)} \frac{d\phi}{b(\phi,t)} \equiv v, \quad \partial_t\psi(v,t) \equiv b\big(\psi(v,t),t\big)\int\limits_0^{\psi(v,t)} \frac{\partial_y b(\phi,t)}{b^2(\phi,t)}\,d\phi.$$

Отсюда вытекают оценки:

$$\big|\partial_t\psi(c,t)\big| \leqslant \frac{m_1m_2}{m_0^2}|\psi(c,t)| = \frac{m_1m_2}{m_0^2}|z|,$$

$$
\begin{aligned}
&\Big|\partial_t\psi(c+\mu\sigma W,t) - \partial_t\psi(c,t)\Big| = \left|b\big(\psi(c+\mu\sigma W,t),t\big)\int\limits_0^{\psi(c+\mu\sigma W,t)} \frac{\partial_\phi b(\phi,t)}{b^2(\phi,t)}\,d\phi - b\big(z,t\big)\int\limits_0^{z} \frac{\partial_\phi b(\phi,t)}{b^2(\phi,t)}\,d\phi\right| \leqslant\\
&\leqslant \left|b\big(\psi(c+\mu\sigma W,t),t\big)\int\limits_{\psi(c,t)}^{\psi(c+\mu\sigma W,t)} \frac{\partial_\phi b(\phi,t)}{b^2(\phi,t)}\,d\phi\right| + \left|\Big[b\big(\psi(c+\mu\sigma W,t),t\big) - b\big(\psi(c,t),t\big)\Big]\int\limits_0^{z} \frac{\partial_\phi b(\phi,t)}{b^2(\phi,t)}\,d\phi\right| \leqslant\\
&\leqslant \frac{m_1^2m_2}{m_0^2}\mu|\sigma|\,|W| + \frac{m_1m_2^2}{m_0^2}\mu|\sigma|\,|W|\,|z|.
\end{aligned}
$$

Следовательно,

$$|D_2| \leqslant \frac{\mu|\sigma|\,|W|}{m_0^3}\big[m_1^3m_2 + 2(m_1m_2)^2|z|\big].$$

Для D_3 имеет место оценка

$$|D_3| \leqslant \mu m_1\big(|\sigma'||W| + M_2h\big).$$

Таким образом,

$$|\mu F| \leqslant \mu M_* \Big[|\sigma||W|(1+|z|) + |\sigma'||W| + h \Big]$$

с константой

$$M_* = \frac{m_1}{m_0^3}(m_1+m_2)(2m_1m_2 + m_0^2 M_1) + m_1 M_2.$$

Покажем, что решение возмущенного уравнения (9) с достаточно малыми начальными данными остается в окрестности тривиального решения уравнения $dz/dt = f(z,t)$. Вычислим полную производную функции $V(z,t)$ на траекториях возмущенной системы (9):

$$\frac{dV}{dt}\bigg|_{(9)} = \frac{dV}{dt}\bigg|_{(1)} + \mu \partial_z V \cdot F \leqslant -\gamma V + \mu A_2 M_* \Big[|\sigma|\,|W|\big(1+|z|\big) + |\sigma'|\,|W| + h \Big].$$

Из определения класса $\mathcal{M}_h$ и свойств винеровского процесса $W(t,\omega)$ следует, что при почти всех $\omega \in \Omega$ существует такое $\nu(\omega)$, что

$$\big(|\sigma| + |\sigma'|\big)|W| \leqslant \nu h, \quad t > 0.$$

Отсюда при $\delta < |z| < R$ и $\mu < \Delta_1$ вытекает оценка

$$\frac{dV}{dt}\bigg|_{(9)} \leqslant \Big(-\gamma + \Delta_1 A_2 M_* h \delta^{-1}(1+\nu)(1+\delta) \Big) V \quad \forall\, t > 0.$$

Зафиксируем

$$\delta = \frac{\varepsilon}{4A_1}, \quad \Delta_1 = \frac{\delta\gamma}{2A_2 M_* h(1+\nu)(1+\delta)};$$

тогда

$$\frac{dV}{dt} \leqslant -\frac{\gamma V}{2} < 0$$

при $\delta < |z| < \varepsilon/2$ и $t > 0$. Для функции Ляпунова имеют место оценки

$$\sup\Big\{ V(z,t) \text{ при } |z| \leqslant \delta,\ t \geqslant 0 \Big\} \leqslant A_1\delta < \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \inf\Big\{ V(z,t) \text{ при } |z| = \frac{\varepsilon}{2},\ t \geqslant 0 \Big\}.$$

Следовательно, траектории системы (9), стартующие в δ-окрестности равновесия, не могут выйти за границу области $|z| < \varepsilon/2$ с вероятностью 1.

Заметим, что решение $y(t,\omega)$ исходной системы (3) можно представить в виде

$$y(t,\omega) = z(t,\omega) + r(t,\omega),$$

где $r = \psi(c + \mu\sigma W, t) - \psi(c,t)$, $c = \psi^{-1}(z,t)$. Из определения функций ψ следует, что

$$|r| \leqslant \mu m_1 |\sigma|\,|W|, \quad t \geqslant 0, \quad \omega \in \Omega.$$

Зафиксируем $\Delta_2 = \varepsilon/(2m_1\nu h)$; тогда для любого $\mu < \Delta_2$ справедлива оценка

$$|r| \leqslant \Delta_2 m_1 \nu h = \frac{\varepsilon}{2}$$

с вероятностью 1 при $t > 0$. Определим $\Delta = \min(\Delta_1, \Delta_2)$; тогда для почти всех $\omega \in \Omega$ для любого $\mu < \Delta$ решение уравнения (3) с начальными данными $|y(0,\omega)| < \delta$ удовлетворяет оценке

$$|y(t,\omega)| < \varepsilon, \quad t > 0.$$

Доказательство теоремы в случае $n \geqslant 2$ проводится аналогично. □

4. Примеры. В качестве иллюстрации полученных результатов приведем несколько примеров.

1. Рассмотрим нелинейное одномерное стохастическое дифференциальное уравнение

$$dy = -\left(\frac{y-y^3}{1+y^2}\right)dt + \mu g(t)dW.$$

Соответствующее невозмущенное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{x-x^3}{1+x^2}$$

имеет локально асимптотически устойчивое решение $x(t) \equiv 0$, для которого существует функция Ляпунова $V(x) = |x|$, обладающая оценками (2) с

$$0 < \gamma < 1, \quad A_1 = A_2 = 1, \quad R = \sqrt{\frac{1-\gamma}{1+\gamma}}.$$

Пусть $g(t) = (1+t)^{-\alpha}$, $\alpha > 1/2$ при $t \geqslant 0$; тогда из теоремы 1 вытекает потраекторная устойчивость с вероятностью 1 тривиального решения при $t > 0$.

2. Рассмотрим систему двух уравнений:

$$dy_1 = y_2 dt + \mu g_1(y_1, y_2, t)dW_1, \quad dy_2 = -\left(\sin y_1 + \frac{y_2}{2}\right)dt + \mu g_2(y_1, y_2, t)dW_2.$$

Невозмущенная система

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = -\sin x_1 - \frac{x_2}{2}$$

имеет локально асимптотически устойчивое равновесие $(0,0)$, для которого существует функция Ляпунова

$$V(x_1, x_2) = \left[4U(x_1, x_2)\right]^{1/2}, \quad U(x_1, x_2) = 2(1-\cos x_1) + x_2^2 + \frac{1}{2}x_1 x_2,$$

обладающая оценками (2) с $\gamma = 1/40$, $A_1 = A_2 = \sqrt{5}$, $R = \pi/3$. Пусть

$$\left|g_i(y_1, y_2, t)\right| \leqslant (1+t)^{-\alpha}, \quad \alpha > \frac{1}{2}$$

при $t \geqslant 0$ равномерно по $(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$; тогда из теоремы 3 вытекает потраекторная устойчивость с вероятностью 1 тривиального решения $x_1(t) \equiv 0$, $x_2(t) \equiv 0$ при $t > 0$.

5. Заключение. Исследована устойчивость с вероятностью 1 локально устойчивых динамических систем относительно постоянно действующих стохастических возмущений типа «белый шум». Определены достаточные условия, которым должна удовлетворять матрица диффузии для сохранения устойчивости равновесия. Полученные результаты опираются на потраекторный подход к анализу стохастических дифференциальных уравнений (см. [2]). В настоящей работе показано, что анализ устойчивости динамической системы (1) относительно белого шума сводится к исследованию системы (8) со случайными коэффициентами. Это позволяет провести анализ на основе модификации метода Малкина (см. [1, § 70]).

Заметим, что полученные выше теоремы об устойчивости содержат параметр Δ, зависящий от $\omega \in \Omega$. Распределение вероятностей этого параметра неизвестно, его нахождение представляют собой отдельную задачу, которая здесь не обсуждалась. В рамках потраекторного подхода оценки снизу для Δ, равномерные по ω, могут быть получены при более сильных ограничениях на исходную динамическую систему или на класс возмущений. В качестве примера приведем получаемые таким образом утверждения для случая аддитивных возмущений: $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{y}, t) = \boldsymbol{G}_0(t)$. Определим класс $\mathcal{A}_h^\ell$ как множество матриц $\boldsymbol{G}_0(t)$, для которых выполняется оценка (4) и

$$\sup_{t>0}\left\{\|\boldsymbol{G}_0(t)\| + \|\boldsymbol{G}_0'(t)\|\right\}(1+t)^{\ell/2} \leqslant h.$$

Тогда имеет место следующее утверждение.

Предложение 1. *Пусть для системы* (1) *существует функция Ляпунова* $V(\boldsymbol{x},t)$, *обладающая оценками* (2) *с* $R=\infty$ ($R<\infty$). *Тогда для любых* $h>0$, $\nu>0$ *и* $\varepsilon>0$ *найдутся такие* $\delta(\nu,\varepsilon)>0$ *и* $\Delta(\nu,\varepsilon,h)>0$, *что при всех* $|\boldsymbol{y}_0|<\delta$, $\mu<\Delta$, $\boldsymbol{G}_0\in\mathcal{A}_h^\ell$, $\ell=1$ ($\ell>3$) *решение* $\boldsymbol{y}(t,\omega)$ *системы* (3) *с начальными данными* $\boldsymbol{y}(0,\omega)=\boldsymbol{y}_0$ *обладает оценкой*

$$\mathbb{P}\big(|\boldsymbol{y}(t,\omega)|>\varepsilon\big)<\nu,\quad t>0.$$

Доказательство. С помощью замены $\boldsymbol{y}(t,\omega)=\boldsymbol{z}(t,\omega)+\mu\boldsymbol{G}_0(t)\boldsymbol{W}(t,\omega)$ в (3) проблема сводится к исследованию устойчивости равновесия $\boldsymbol{x}(t)\equiv 0$ системы (1) относительно случайного возмущения $\mu\boldsymbol{F}(\boldsymbol{z},t,\omega)$. Далее, к системе (5) применяются результаты [8, § 1.6] и [3] об устойчивости глобально и локально устойчивых детерминированных систем соответственно. □

Отметим, что последнее утверждение вытекает из более сильных результатов, полученных в [5, 10].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Малкин И. Г.* Теория устойчивости движения. — М.–Л.: ГИТТЛ, 1952.
2. *Насыров Ф. С.* Локальные времена, симметричные интегралы и стохастический анализ. — М.: Физматлит, 2011.
3. *Султанов О. А.* Устойчивость моделей авторезонанса относительно случайных возмущений для систем уравнений нелинейных колебаний// Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 2014. — *54*, № 1. — С. 65–79.
4. *Хапаев М. М.* Асимптотические методы и устойчивость в теории нелинейных колебаний. — М.: Высшая школа, 1988.
5. *Хасьминский Р. З.* Об устойчивости при постоянно действующих случайных возмущениях// В сб.: Теория передачи информации. Опознание образов. — М.: Наука, 1965. — С. 74–87.
6. *Borodin A. N., Salminen P.* Handbook of Brownian motion. Facts and formulae. — Basel–Boston–Berlin: Birkhäuser-Verlag, 2002.
7. *Freidlin M. I., Wentzell A. D.* Random perturbations of dynamical systems. — New York–Heidelberg–Berlin: Springer-Verlag, 1998.
8. *Khasminskii R.* Stochastic stability of differential equations. — Berlin–Heidelberg: Springer-Verlag, 2012.
9. *Øksendal B.* Stochastic differential equations. An introduction with applications. — New York–Heidelberg–Berlin: Springer-Verlag, 1998.
10. *Sultanov O.* White noise perturbation of locally stable dynamical systems// Stochast. Dynam. — 2017. — *17*, № 1. — С. 1750002; `arXiv:1509.07323`

О. А. Султанов
Институт математики с вычислительным центром Уфимского научного центра РАН;
Российский университет дружбы народов, Москва
E-mail: `oasultanov@gmail.com`

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 139 (2017). С. 104–113

УДК 591.65

ОБ ОПТИМАЛЬНОМ ПРИБЛИЖЕНИИ НОРМЫ ОПЕРАТОРА ФУРЬЕ СЕМЕЙСТВОМ ЛОГАРИФМИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

© 2017 г. **И. А. ШАКИРОВ**

Аннотация. Константа Лебега, соответствующая классическому оператору Фурье, приближается семейством логарифмических функций, зависящим от двух параметров. Найдены оптимальные значения параметров, при которых достигается наилучшее равномерное приближение константы Лебега вполне определенной функцией из этого семейства. Рассмотрен случай, когда соответствующий остаточный член строго возрастает.

Ключевые слова: частные суммы ряда Фурье, норма оператора Фурье, константа Лебега, асимптотическая формула, оценка константы Лебега, экстремальная задача.

AMS Subject Classification: 42A20, 57Q55

1. Введение. Равномерная сходимость частичных сумм ряда Фурье функции напрямую связана с поведением соответствующей ей константы Лебега (см., например, [2, с. 125])

$$L_n = \frac{16}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty} c_{n,k}\frac{1}{4k^2-1}, \qquad c_{n,k} = \sum_{m=1}^{(2n+1)k}\frac{1}{2m-1}, \quad n\in\mathbb{N}. \tag{1}$$

Она была получена Г. Сёге в [8] при помощи известного интегрального представления

$$L_n = \|S_n\| = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{|\sin(2n+1)t|}{\sin t}dt, \quad n\in\mathbb{N}; \qquad L_0 = 1, \quad L_1 = \frac{1}{3}+\frac{2\sqrt{3}}{\pi}. \tag{2}$$

Исследованием свойств (1), (2) в первой половине прошлого столетия активно занимались А. Лебег, Л. Фейер, Э. Ландау, Г. Сеге, Г. Харди, Г. Ватсон, А. Зигмунд, а затем и советские математики А. Н. Колмогоров, С. Б. Стечкин, Н. И. Ахиезер, С. А. Теляковский, П. В. Галкин, Г. И. Натансон и др.

Оставались неизученными некоторые вопросы приближения константы (1) в равномерной метрике семейством логарифмических функций вида $(4/\pi^2)\ln(n+a)+b$. Например, в приближенном равенстве

$$L_n \approx \left(\frac{4}{\pi^2}\right)\ln(n+a)+b, \quad (a,b)\in\widetilde{\Omega} = [0,+\infty)\times[0,+\infty), \tag{3}$$

интерес представляет задача оптимального (наилучшего в метрике $C_{2\pi}$) выбора значений параметров a, b. Здесь содержательным является лишь случай, когда пары (a,b) принадлежат более узкому подмножеству $\overline{\Omega} = [0,1]\times[0,2] \subset \widetilde{\Omega}$. В дополнении этого множества, как следует из результатов упомянутых выше работ, задача об оптимальности не может иметь решений.

Приведем дополнительные сведения, имеющие непосредственное отношение к данной тематике. Изучение приближенного равенства (3) связано с асимптотическим равенством

$$L_n = L(n) = \frac{4}{\pi^2}\ln n + O(1), \quad n\to\infty, \tag{4}$$

введенным еще в начале двадцатого века Л. Фейером [6], а также поведением соответствующего остаточного члена

$$O_n = O(n) = L_n - \frac{4}{\pi^2}\ln n, \qquad O_1 = L_1 = 1{,}43599112\ldots, \quad n\in\mathbb{N}. \tag{5}$$

ISSN 0233–6723

В 1930 г. формула (4) была уточнена Г. Ватсоном в его работе [9] для обобщения $L_{n/2}$ константы (1):

$$L_{n/2} = \frac{4}{\pi^2}\ln(n+1) + c_0 + O\left(\frac{1}{n}\right), \qquad c_0 = \frac{8}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\ln k}{4k^2-1} + \frac{4}{\pi^2}(\ln 4 + \gamma), \quad n = 0,1,2,\dots, \tag{6}$$

где γ — известная константа Эйлера, $c_0 = 0{,}98943127\dots$. Затем А. Н. Колмогоровым в [7] формула (4) была обобщена для более узких подклассов пространства непрерывных функций. Позднее П. В. Галкин [1] изучал поведение остаточных членов

$$L_{n/2} - \frac{4}{\pi^2}\ln(n+1), \quad L_{n/2} - \frac{4}{\pi^2}\ln(n+2), \quad n = 0,1,2,\dots, \tag{7}$$

а Г. И. Натансон в [4] исследовал их непрерывные аналоги

$$L(y) - \frac{4}{\pi^2}\ln(y+1), \quad L(y) - \frac{4}{\pi^2}\ln y, \quad L(y) - \frac{4}{\pi^2}\ln(y+a), \quad y \in [1,\infty). \tag{8}$$

Из результатов упомянутых работ видно, что в одних случаях остаточные члены строго возрастают, в других — строго убывают либо их поведения не определены. В формулах (4)–(8) различны не только аргументы логарифмов, но и области определений и значений соответствующих остаточных членов. Следовательно, для ответа на эти вопросы целесообразно ввести в рассмотрение параметрически определенный остаточный член (функцию двух переменных) вида

$$O_n(a) \equiv O(n;a) = L_n - \frac{4}{\pi^2}\ln(n+a), \quad a \in D_a = [0,1], \quad n \in \mathbb{N}. \tag{9}$$

Исследование поведения функции (9), установление оптимальных значений параметров a, b в приближенной формуле (3) и оценка допущенной в ней погрешности относятся к не рассмотренным в математической литературе задачам. В работе получены следующие новые результаты:

(i) доказано, что для всех $a \in [a^*,1]$ остаточный член (9) строго возрастает, где

$$a^* = 0{,}5 + 0{,}5\cdot\theta^* = 0{,}51188859\dots, \quad \theta^* = -3 + \Big[\big(\exp(2/7)-1\big)^{-1}\Big] = 0{,}02377719\dots; \tag{10}$$

(ii) вычислено предельное значение $\alpha_0 = 1{,}27035324\dots$ остаточного члена (9) равномерно относительно $a \in D_a$ (теорема 1);

(iii) найдена пара чисел $(a^*, b^*) = (0{,}51188859\dots, 1{,}26940801\dots)$, обеспечивающая в (3) наилучшее приближение [3, с. 9] в области $\Omega = [a^*,1]\times[0,2] \subset \overline{\Omega}$, соответствующей строгому возрастанию $O_n(a)$;

(iv) решена экстремальная задача

$$\inf_{a,b\in\Omega}\sup_{n\in\mathbb{N}}\left|L_n - \frac{4}{\pi^2}\ln(n+a) - b\right| = \left\|L_n - \frac{4}{\pi^2}\ln(n+a^*) - b^*\right\| = \varepsilon = 0{,}00094523\dots, \tag{11}$$

соответствующая строго возрастающим остаточным членам вида (9);

(v) приведены алгоритмы, позволяющие последовательно уменьшать значение наилучшего приближения ε в (11).

2. Вспомогательные результаты. Вначале приведем определения классов функций, которые использовались в [5] для изучения свойств фундаментальных характеристик операторов Лагранжа. Ниже их применим для детального исследования остаточного члена (9).

Определение 1. Строго монотонную функцию $\varphi = \varphi(n)$, $n \in D = D(\varphi) \subseteq N$, дискретного аргумента, имеющую малое изменение $\delta = \delta(\varphi)$ области значений $R(\varphi)$, назовем *функцией с малой вариацией*; класс таких функций обозначим через $V_\delta^\pm$, где знак плюс используется в случае возрастания функции в области D, минус — при ее убывании;

$$\delta = \delta(\varphi) = \sup\Big\{\varphi(n)|_{n\in D}\Big\} - \inf\Big\{\varphi(n)|_{n\in D}\Big\}, \quad 0 < \delta < 0{,}5.$$

Малую вариацию имеют все функции (последовательности), участвующие в основных утверждениях данной работы, но даже у самой «худшей» из них вариация будет меньше, чем 0,5. Из таких функций и состоят классы V_δ^+, V_δ^-. Они имеют определяющее значение в ходе доказательства лемм и теорем работы.

Замечание 1. Для непрерывных продолжений $\overline{\varphi} = \overline{\varphi}(n)$, $n \in \overline{D} = \overline{(\inf D, \sup D)} \subset R$, дискретно определенных функций $\varphi = \varphi(n)$, $n \in D \subset N$, обозначения, формулировка и суть определения 1 полностью сохраняются.

Замечание 2. Функции из классов V_δ^+ и V_δ^- обладают тем замечательным свойством, что относительно большие изменения их областей значений (вариации) происходят при первоначальных значениях аргумента n, $n = 1 \vee n = \overline{1,2} \vee n = \overline{1,3}$, с последующей «стабилизацией» этих последовательностей около вполне определенных асимптот. Данное свойство используется для уменьшения погрешности в (11).

Приведем необходимые в дальнейшем формулы и некоторые характеристики, связанные с константой Эйлера:

$$\begin{gathered}\gamma = \lim_{m\to\infty} \gamma_m = 0{,}57721566\ldots, \quad \gamma_m = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k} - \ln m,\ m \in \mathbb{N}; \\ (\gamma_m) \in V_\delta^-, \quad R(\gamma_m) = (\gamma, 1], \quad \delta(\gamma_m) = 0{,}42278433\ldots. \end{gathered} \tag{12}$$

Лемма 1. *Разность двух расходящихся числовых рядов* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} 2/(2k-1)$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} 1/k$ *является сходящимся рядом, и для его суммы* s *верна формула*

$$s = \lim_{m\to\infty} s_m = \ln 4, \quad s_m = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k(2k-1)},\ m \in \mathbb{N}, \tag{13}$$

причем $R(s_m) = [1, \ln 4]$, $\delta(s_m) = 0, \ldots$; $(s_m) \in V_\delta^+$.

Доказательство. Вначале известное разложение функции $y = \ln(1-t)$, $t \in [0,1)$, в ряд Маклорена представим в виде

$$-\frac{1}{t^2}\ln(1-t^2) = 1 + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{3}t^4 + \frac{1}{4}t^6 + \ldots, \quad t \in (0,1).$$

Применяя затем формулу интегрирования по частям к несобственному интегралу в левой части равенства

$$-\int_0^1 \frac{1}{t^2}\ln(1-t^2)dt = \int_0^1 \left(1 + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{3}t^4 + \frac{1}{4}t^6 + \ldots\right) dt$$

и проведя некоторые вычисления, найдем его значение, равное $\ln 4$. В правой части равенства получим ряд с положительными членами $\sum\limits_{k=1}^{\infty} 1/(k(2k-1))$, совпадающий с разностью

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{2k-1} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k},$$

частные суммы которого принадлежат классу V_δ^+. □

Приведем еще несколько лемм, которые являются усилениями результатов работы [1], другими словами, являются более точными и общими, чем их аналоги из указанной работы. Они имеют принципиальное значение в ходе доказательства основных теорем работы.

Лемма 2. *Для функции* $f(x) = 1/x$ *выполняется неравенство*

$$\frac{1}{\nu - 1/2} < \int_{\nu-1}^{\nu} \frac{1}{x}dx, \quad \nu = 2, 3, \ldots. \tag{14}$$

Доказательство. Справедливость неравенства (14) обеспечивается строгим убыванием и выпуклостью вниз функции $1/x$. Заметим, что в работе [1] применяется менее точный вариант этого неравенства вида

$$\frac{1}{\nu} < 0{,}5 \int\limits_{\nu-1}^{\nu+1} \frac{1}{x} dx \quad \nu = 2, 3, \ldots .$$

□

Лемма 3. *Для натуральных чисел ν, $\nu \geqslant 4$, всегда можно указать вполне определенные действительные числа θ_ν, для которых имеют место равенства*

$$\frac{1}{\nu - 1/2} = \int\limits_{\nu-1+\theta_\nu}^{\nu+\theta_\nu} \frac{1}{x} dx, \quad \theta_\nu = \theta(\nu),\ \nu = 4, 5, \ldots; \tag{15}$$

функция (последовательность) $\theta(\nu)$ строго убывает, $\lim\limits_{\nu\to\infty} \theta(\nu) = 0$, т.е. $\theta(\nu) \in V_\delta^-$.

Доказательство. Вначале отметим, что далее нам нужны будут лишь формулы и функции, в которых значение переменой ν строго больше трех (например, $\nu = (2n+1)k + m,\ n, k, m \in \mathbb{N} \Rightarrow \nu \geqslant 4$). Меньшие значения ν специально исключены из рассмотрения в связи с тем, что они влияют на точность получаемых в леммах численных результатов.

Если на границах области интегрирования определенного интеграла из (15) при каждом ν сдвиг границы интегрирования (сдвиг) θ_ν отсутствует, то мы автоматически оказываемся в рамках неравенства (14). Чтобы получить равенство (15), каждый раз в (14) область интегрирования $[\nu - 1, \nu]$ необходимо сдвигать вправо (согласно свойствам гиперболы $1/x$) на вполне определенную положительную величину θ_ν. Другими словами, равенство (15) является «аналогом теоремы о среднем», в котором фиксированная площадь прямоугольника с единичным основанием (левая часть (15)) заменяется площадью криволинейной трапеции с некоторой поправкой области интегрирования функции $1/x$ на величину θ_ν.

После несложных преобразований и упрощений равенства (15), для сдвига получим явную формулу:

$$\begin{gathered} \theta_\nu = \theta(\nu) = 1 - \nu + \frac{1}{\exp(1/(\nu - 1/2)) - 1}, \\ \nu \geqslant 4, \quad \theta^* = \theta(4) = -3 + \frac{1}{\exp(2/7) - 1} = 0{,}02377719\ldots . \end{gathered} \tag{16}$$

Используя замечание 1, вычислим производную функции (16):

$$\begin{aligned} (\theta_\nu)' = -1 - \frac{1}{(\exp(1/(\nu - 1/2)) - 1)^2} \cdot \left[\exp\left(\frac{1}{\nu - 1/2}\right) - 1\right]' = \frac{1}{(\nu - 1/2)^2} \cdot \frac{1}{(\exp(1/(\nu - 1/2)) - 1)^2} \cdot \\ \cdot \exp\left(\frac{1}{\nu - 1/2}\right) \cdot \left\{1 - (\nu - 1/2)^2 \cdot \left[\exp\left(\frac{1}{\nu - 1/2}\right) + \exp\left(-\frac{1}{\nu - 1/2}\right) - 2\right]\right\}. \end{aligned}$$

Ясно, что знак производной зависит от знака выражения в фигурных скобках. Упростим его, а затем оценим сверху:

$$\begin{aligned} &\left\{1 - (\nu - 1/2)^2 \cdot \left[\exp\left(\frac{1}{\nu - 1/2}\right) + \exp\left(-\frac{1}{\nu - 1/2}\right) - 2\right]\right\} = \\ &\quad = 1 - 2(\nu - 1/2)^2 \left(\frac{1}{2!(\nu - 1/2)^2} + \frac{1}{4!(\nu - 1/2)^4} + \frac{1}{6!(\nu - 1/2)^6} + \frac{1}{8!(\nu - 1/2)^8} + \ldots\right) = \\ &\quad = -\frac{2}{(\nu - 1/2)^2} \left(\frac{1}{4!} + \frac{1}{6!(\nu - 1/2)^2} + \frac{1}{8!(\nu - 1/2)^4} + \frac{1}{10!(\nu - 1/2)^6} + \ldots\right) < 0 \quad \forall \nu \in [4, \infty). \end{aligned}$$

Итак, $(\theta_\nu)' < 0$ для всех $\nu \in [4, \infty)$; следовательно, (16) является строго убывающей последовательностью. Найдем ее предел:

$$\lim_{\nu\to\infty} \theta(\nu) = \lim_{\nu\to\infty} \left[1 - \nu + \frac{1}{\exp(1/(\nu - 1/2)) - 1}\right] =$$
$$= \lim_{\nu\to\infty} \left[1 - \nu + (\nu - 0{,}5)\Big/\left(1 + \frac{1}{2!(\nu - 0{,}5)} + \frac{1}{3!(\nu - 0{,}5)^2} + \frac{1}{4!(\nu - 0{,}5)^3} + \dots\right)\right] =$$
$$= \lim_{\nu\to\infty} \left[\nu - 0{,}5 + (1 - \nu)\Big/\left(1 + \frac{1}{2!(\nu - 0{,}5)} + \frac{1}{3!(\nu - 0{,}5)^2} + \frac{1}{4!(\nu - 0{,}5)^3} + \dots\right)\right] =$$
$$= \lim_{\nu\to\infty} \left[\frac{0{,}5}{2!(\nu - 0{,}5)} + \frac{1 - \nu}{3!(\nu - 0{,}5)^2} + \frac{1 - \nu}{4!(\nu - 0{,}5)^3} + \dots\right] = 0.$$

Приведенные расчеты позволяют утверждать, что $\theta(\nu) \in V_\delta^-$, причем $R(\theta_\nu) = [\theta^*, 0) = [0{,}02377719\dots, 0)$, $\delta(\theta_\nu) = 0{,}02377719\dots$. □

Лемма 4. *Для произвольно взятого натурального значения переменной ν, $\nu \geqslant 4$, выполняется неравенство*

$$\frac{1}{\nu - 1/2} \geqslant \int\limits_{\nu-1+\theta^*}^{\nu+\theta^*} \frac{1}{x} dx, \quad \nu \geqslant 4,\ \theta^* = 0{,}02377719\dots; \tag{17}$$

равенство имеет место лишь при $\nu = 4$.

Доказательство. Если в условиях леммы значение аргумента ν равно 4, то формулы (15), (16) обеспечивают выполнение равенства в (17). Для остальных значений аргумента, учитывая неравенство (14), строгое убывание последовательности (θ_ν), свойства подынтегральной функции и определенного интеграла, имеем импликацию

$$\theta_\nu < \theta\ (\nu \geqslant 5) \quad \Rightarrow \quad \int\limits_{\nu-1}^{\nu} \frac{1}{x} dx > \int\limits_{\nu-1+\theta_\nu}^{\nu+\theta_\nu} \frac{1}{x} dx > \int\limits_{\nu-1+\theta^*}^{\nu+\theta^*} \frac{1}{x} dx \quad \forall \nu \geqslant 5.$$

Для завершения доказательства леммы среднему интегралу достаточно применить равенство (15). □

Лемма 5. *Зависящая от параметра a функция переменных n и k*

$$\varphi(n, k; a) = \sum_{m=1}^{(2k+1)k} \frac{2}{2m - 1} - \ln(n + a), \quad n, k \in \mathbb{N},\ a \in D_a = [0, 1], \tag{18}$$

для всех $a \in [a^*, 1] \subset D_a$ является строго возрастающей функцией аргумента n равномерно относительно переменной k, где значение $a^* = 0{,}51188859\dots$ определено в (10).

Доказательство. Оценим приращение $\varphi(n + 1, k, ; a) - \varphi(n, k; a)$ функции (18) по первому аргументу, используя при этом неравенство (17) и полагая $\nu = (2n + 1)k + m$ (в нашем случае

$n, k, m \in \mathbb{N}$; следовательно $\nu \geqslant 4$):

$$\Delta\varphi_{n,k}(a) \equiv \varphi(n+1,k,;a) - \varphi(n,k;a) = \sum_{m=(2n+1)k+1}^{(2n+1)k+2k} \frac{2}{2m-1} + \ln(n+a) - \ln(n+a+1) =$$

$$= \sum_{m=1}^{2k} \frac{1}{(2n+1)k+m-1/2} - \ln\frac{n+a+1}{n+a} > \sum_{m=1}^{2k} \int\limits_{(2n+1)k+m-1+\theta^*}^{(2n+1)k+m+\theta^*} \frac{1}{x}dx - \ln\frac{n+a+1}{n+a} =$$

$$= \int\limits_{(2n+1)k+\theta^*}^{(2n+3)k+\theta^*} \frac{1}{x}dx - \ln\frac{n+a+1}{n+a} = \ln\frac{(2n+3)k+\theta^*}{(2n+1)k+\theta^*} - \ln\frac{n+a+1}{n+a} =$$

$$= \ln\frac{(n+a)\left[(2n+3)k+\theta^*\right]}{(n+a+1)\left[(2n+1)k+\theta^*\right]} \equiv g_{n,k}(a), \quad a \in D_a.$$

В правой части установленного неравенства $\Delta\varphi_{n,k}(a) > g_{n,k}(a)$ участвует аргумент k, $k \in \mathbb{N}$. Согласно утверждению леммы 5 нас интересует равномерная по второму аргументу оценка. Для ее получения вначале потребуем выполнение неравенства $g_{n,k}(a) \geqslant 0$, $n,k \in \mathbb{N}$, откуда после некоторых преобразований и упрощений для параметра a получим ограничение вида

$$a \geqslant \frac{1}{2} + \frac{\theta^*}{2k}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Очевидно, равномерное относительно k ограничение для параметра a имеет вид

$$a \geqslant \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\theta^* = a^*$$

(см. (10)). В итоге для рассматриваемого приращения $\Delta\varphi_{n,k}(a)$ с учетом области определения D_a получим неравенства

$$\varphi(n+1,k;a) - \varphi(n,k;a) > g_{n,k}(a) \geqslant 0, \quad a \in [a^*,1],\ n \in \mathbb{N}, \tag{19}$$

которые справедливы при любых натуральных значениях аргумента k. □

3. Основные теоремы. Ниже сформулируем и докажем теоремы, которые в следующем пункте позволят решить экстремальные задачи вида (11).

Теорема 1. *Для остаточного члена* (9) *равномерно относительно параметра a имеет место предельное равенство*

$$\lim_{n\to\infty} O(n;a) = \alpha_0 = 1{,}27035324\ldots, \quad a \in D. \tag{20}$$

Доказательство. Используя формулу (1), равенство

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2-1} = \frac{1}{2},$$

обозначения конечных сумм γ_m и s_m из формул (12) и (13), преобразуем остаточный член константы Лебега:

$$O_n(a) = \frac{8}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4k^2-1}\sum_{m=1}^{(2n+1)k}\frac{2}{2m-1}\right) - \frac{8}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{4k^2-1}\ln(n+a) =$$

$$= \frac{8}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{4k^2-1}\left[\left(\sum_{m=1}^{(2n+1)k}\frac{2}{2m-1} - \sum_{m=1}^{(2n+1)k}\frac{1}{m}\right) + \left(\sum_{m=1}^{(2n+1)k}\frac{1}{m} - \ln k(2n+1)\right) + \ln\frac{(2n+1)k}{n+a}\right] =$$

$$= \frac{8}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{4k^2-1}\left[\sum_{m=1}^{(2n+1)k}\frac{1}{m(2m-1)} + \gamma_{(2n+1)k} + \ln k + \ln\frac{2n+1}{n+a}\right] =$$

$$= \frac{8}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\ln k}{4k^2-1} + \frac{8}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{4k^2-1}\left[s_{(2n+1)k} + \gamma_{(2n+1)k}\right] + \frac{8}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{4k^2-1}\cdot\ln\frac{2+1/n}{1+a/n}.$$

Переходя к пределу слева и справа в этом равенстве по переменной n, получим:

$$\lim_{n\to\infty} O(n;a) = \frac{8}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\ln k}{4k^2-1} + \frac{8}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{4k^2-1}\lim_{n\to\infty}\left(s_{(2n+1)k} + \gamma_{(2n+1)k}\right) +$$

$$+ \frac{8}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{4k^2-1}\cdot\lim_{n\to\infty}\ln\frac{2+1/n}{1+a/n} = \frac{8}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\ln k}{4k^2-1} + \frac{4}{\pi^2}(2\ln 2+\gamma) + \frac{4}{\pi^2}\ln 2 =$$

$$= c_0 + \frac{4}{\pi^2}\ln 2 = \alpha_0 = 1{,}27035324\ldots, \quad a \in D_a,$$

где пределы $\lim\limits_{n\to\infty} s_{(2n+1)k}$ и $\lim\limits_{n\to\infty}\gamma_{(2n+1)k}$ вычислены согласно формулам (12), (13) равномерно относительно k, $k \in \mathbb{N}$. □

Теорема 2. *Для всех значений параметра a из отрезка $[a^*, 1] \subset D_a$ остаточный член (9) является строго возрастающей функцией натурального аргумента n, имеет достаточно малые область значений $R(O_n(a))$ и вариацию $\delta(a) = \delta(O_n(a))$, т.е. $O_n(a) \in V_\delta^+$, $a \in [a^*, 1]$, $a^* = 0{,}51188859\ldots$.*

Доказательство. Использованные в ходе доказательства леммы 5 обозначения позволяют записать приращение остаточного члена (9) в следующем виде:

$$\Delta O_n(a) = O_{n+1}(a) - O_n(a) =$$

$$= \frac{8}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{4k^2-1}\left[\sum_{m=1}^{(2n+3)k}\frac{2}{2m-1} - \ln(n+1+a) - \sum_{m=1}^{(2n+1)k}\frac{2}{2m-1} + \ln(n+a)\right] =$$

$$= \frac{8}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{4k^2-1}\left[\varphi(n+1,k;a) - \varphi(n,k;a)\right] = \frac{8}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{4k^2-1}\Delta\varphi_{n,k}(a), \quad a \in [a^*, 1],\ n \in \mathbb{N}.$$

К элементам $\Delta\varphi_{n,k}(a)$ ряда применим неравенство (19) и оценим его сверху:

$$O_{n+1}(a) - O_n(a) = \frac{8}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{4k^2-1}\Delta\varphi_{n,k}(a) > \frac{8}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{4k^2-1}\cdot g_{n,k}(a) > 0,$$

т.е. $O_{n+1}(a) > O_n(a)$ для всех $a \in [a^*, 1]$, $n \in \mathbb{N}$. С учетом результатов теоремы 1 для области значений и вариации функции (9) имеем:

$$R(O_n(a)) = \left[\frac{1}{3} + \frac{2\sqrt{3}}{\pi} - \frac{4}{\pi^2}\ln(1+a), \alpha_0\right) \subset \Big(1{,}15506915, 1{,}27035324\Big) \quad \forall a \in [a^*, 1], \tag{21}$$

$$\delta(a) = \alpha_0 - \frac{1}{3} - \frac{2\sqrt{3}}{\pi} + \frac{4}{\pi^2}\ln(1+a) \in \Big(0{,}00189045, 0{,}11528410\Big) \quad \forall a \in [a^*, 1], \tag{22}$$

т.е. $O_n(a) \in V_\delta^+$, $a \in [a^*, 1]$, и теорема полностью доказана. $\square$

4. Экстремальные задачи. В математической литературе экстремальные задачи вида (11) до сих пор не рассматривались, хотя они являются актуальными и имеющими практическое значение задачами теории приближения. Связано это с тем, что не были разработаны способы исследования параметрически определенных остаточных членов, зависящих от нескольких параметров. Доказанные в предыдущих двух пунктах леммы и теоремы позволят ниже решить эту проблему, а затем и уменьшить значение наилучшего приближения ε. Другими словами, в (3) константу Лебега можно заменить вполне определенной логарифмической функцией с любой наперед заданной точностью.

Теорема 3. *В условиях теоремы* 2 *наилучшее равномерное приближение в* (3) *достигается при значениях параметров* $a^* = 0{,}51188859\ldots$ *и* $b^* = 1{,}26940801\ldots$, *т.е. они обеспечивают решение экстремальной задачи*

$$\inf_{a,b\in\Omega}\sup_{n\in\mathbb{N}}\left|L_n - \frac{4}{\pi^2}\ln(n+a) - b\right| = 0{,}00094522\dots = \varepsilon, \quad \Omega = [a^*, 1]\times[0,2] \subset \overline{\Omega}. \tag{23}$$

Доказательство. Остаточный член (9) имеет вполне определенные характеристики вида (21) и (22), где вторая из них $\delta = \delta(a)$ является строго возрастающей функцией своего аргумента (отметим, что $\delta'(a) = 4/(\pi^2(1+a)) > 0$ для всех $a \in [a^*, 1]$). Поэтому ее наименьшее значение достигается при $a = a^* = 0{,}51188859\ldots$ и равно

$$\min_{a\in[a^*,1]}\delta(a) = \delta(a^*) = \alpha_0 - \frac{1}{3} - \frac{2\sqrt{3}}{\pi} + \frac{4}{\pi^2}\ln(1+a^*) = 0{,}00189045\ldots.$$

При этом сама функция

$$y = O(n, a^*) = L_n - \frac{4}{\pi^2}\ln(1+a^*), \quad n \in \mathbb{N},$$

рассматриваемая в декартовой системе координат nOy, наилучшим образом приближается прямой $y = \alpha_0 - \delta(a^*)/2$. Следовательно, наилучшее равномерное приближение константы Лебега (1) логарифмическими функциями достигается на элементе $(4/\pi^2)\ln(n+a^*) + b^*$, где $b^* = \alpha_0 - \delta(a^*)/2 = 1{,}26940801\ldots$. Сказанное выше позволяет записать последовательность решения экстремальной задачи (11) в виде

$$\varepsilon = \inf_{a,b\in\Omega}\sup_{n\in\mathbb{N}}\left|L_n - \frac{4}{\pi^2}\ln(n+a) - b\right| = \min_{a,b\in\Omega}\max_{n\in\mathbb{N}}\left|L_n - \frac{4}{\pi^2}\ln(n+a) - b\right| =$$
$$= \left\|L_n - \frac{4}{\pi^2}\ln(n+a^*) - b^*\right\| = \left|L_n - \frac{4}{\pi^2}\ln(n+a^*) - b^*\right| = 0{,}00094522\ldots,$$

где области Ω соответствуют остаточные члены, принадлежащие классу V_δ^+. $\square$

Экстремальная задача (23) зависит от выбора множеств Ω и N. Первое из них выражается через отрезок $[a^*, 1]$, следовательно, и через определенную в соотношении (16) величину θ^*, $a^* = 0{,}5 + \theta^*/2$. Согласно теореме 2 для произвольно взятых значений параметра a из указанного отрезка остаточный член 9 строго возрастает.

Возникает вопрос: можно ли несколько расширить область $D^* = [a^*, 1]$ до области $D^0 = [a^0, 1]$, $0{,}5 < a^0 < a^*$, сохранив при этом в D^0 свойство строгого возрастания остаточного члена (9)? Положительный ответ на поставленный вопрос дается в следующей теореме.

Теорема 4. *Решение экстремальной задачи*

$$\inf_{a,b\in\Omega^0}\sup_{n\in\mathbb{N}}\left|L_n-\frac{4}{\pi^2}\ln(n+a)-b\right|,$$

поставленной в расширенной области $\Omega^0 = D^0\times[0,2]$, *достигается на элементах* $a^0 = 0{,}51089714\ldots$ *и* $b^0 = 1{,}26954009\ldots$, *т.е.*

$$\inf_{a,b\in\Omega^0}\sup_{n\in\mathbb{N}}\left|L_n-\frac{4}{\pi^2}\ln(n+a)-b\right| = \left\|L_n-\frac{4}{\pi^2}\ln(n+a^0)-b^0\right\| = 0{,}00081229\dots=\varepsilon^0. \tag{24}$$

Доказательство. Сначала величину a^0 определим так, чтобы для остаточного члена выполнилось условие

$$O_n(a)\in V_\delta^+,\quad a\in[a^0,1].$$

Для этого сдвиг θ^0 (ср. (16)) определим из условия

$$\frac{1}{4-1/2}+\frac{1}{5-1/2}=\int\limits_{3+\theta^0}^{5+\theta^0}\frac{1}{x}dx, \tag{25}$$

откуда после небольших упрощений получим

$$\theta^0=-3+\frac{2}{\exp(32/63)-1}=0{,}02179428\ldots\quad\Rightarrow\quad a^0=\frac{1}{2}+\frac{\theta^0}{2}=1{,}51089714\ldots. \tag{26}$$

В новой области $D^0=[a^0,1]$ оценим приращение остаточного члена (9) снизу:

$$\begin{aligned}\Delta O_n(a) &= \frac{8}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{4k^2-1}\left[\varphi(n+1,k;a)-\varphi(n,k;a)\right]=\\
&=\frac{8}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{4k^2-1}\left[\sum_{m=1}^{2k}\frac{1}{(2n+1)k+m-1/2}-\ln\frac{n+a+1}{n+a}\right]>\\
&>\frac{8}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{4k^2-1}\left[\sum_{m=1}^{2k}\int\limits_{(2n+1)k+m-1+\theta^0}^{(2n+1)k+m+\theta^0}\frac{1}{x}dx-\ln\frac{n+a+1}{n+a}\right]=\\
&=\frac{8}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{4k^2-1}\ln\frac{(n+a)\left[(2n+3)k+\theta^0\right]}{(n+a+1)\left[(2n+1)k+\theta^0\right]}>0\quad\forall a\in D^0.\end{aligned}$$

Здесь существенно использованы схемы доказательства теоремы 2, леммы 5, а также аналог неравенства (17) вида

$$\frac{1}{\nu-1/2}>\int\limits_{\nu-1+\theta^0}^{\nu+\theta^0}\frac{1}{x}dx,\quad \nu=(2n+1)k\geqslant 6$$

(значения параметров $\nu=4$ и $\nu=5$ использованы в (26) для определения θ^0). Решение задачи (24) теперь завершается по аналогии со схемой обоснования соответствующей части предыдущей теоремы. □

Замечание 3. Рассматривая исходную экстремальную задачу (23) на вложенных друг в друга подмножествах множества натуральных чисел и учитывая при этом замечание 2, можно также уменьшать погрешность ε. Например, соответствующая множеству $\mathbb{N}_1=\{4,5,6,\dots\}\subset\mathbb{N}$ погрешность

$$\varepsilon^1=\inf_{a,b\in\Omega}\sup_{n\in\mathbb{N}_1}\left|L_n-\frac{4}{\pi^2}\ln(n+a)-b\right|,$$

вычисленная согласно использованному в теореме 3 алгоритму, равна $\varepsilon^1 = 0{,}00046078\ldots$. Таким образом, выбор подмножества $\mathbb{N}_1$ обеспечивает уменьшение первоначальной погрешности (23) в два раза.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Галкин П. В.* Оценки для констант Лебега// Тр. МИАН СССР. — 1971. — *109.* — С. 3–5.
2. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды. Т. 1. — М.: Мир, 1965.
3. *Корнейчук И. П.* Экстремальные задачи теории приближения. — М.: Наука, 1976.
4. *Натансон Г. И.* Об оценке констант Лебега сумм Валле-Пуссена// В сб.: Геометрические вопросы теории функций и множеств. — Калинин, 1986.
5. *Шакиров И. А.* О влиянии выбора узлов лагранжевой интерполяции на точные и приближенные значения констант Лебега// Сиб. мат. ж. — 2014. — *55*, № 6. — С. 1404–1423.
6. *Fejer L.* Lebesguesche konstanten und divergente Fourierreihen// J. Reine Angew. Math. — 1910. — *138.* — С. 22–53.
7. *Kolmogorov A. N.* Zur Grossenordnung des Restglieders Fourierscher Reihen differenzierbarer Funktionen// Ann. Math. — 1935. — *36.* — С. 521–526.
8. *Szego G.* Über die Lebesgueschen Konstanten bei den Fourierchen reihen// Math. Z. — 1921. — *9.* — С. 163–166.
9. *Watson G. H.* The constant of Landau and Lebesgue// Quart. J. Math. — 1930. — Ser. 1. — С. 310–318.

И. А. Шакиров
Набережночелнинский государственный педагогический университет
E-mail: iskander@tatngpi.ru

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 139 (2017). С. 114–127

УДК 517.923, 517.925.52

ИССЛЕДОВАНИЕ ОСНОВНЫХ СЦЕНАРИЕВ БИФУРКАЦИЙ В ОКРЕСТНОСТЯХ ГРАНИЦ ОБЛАСТЕЙ УСТОЙЧИВОСТИ ТОЧЕК ЛИБРАЦИИ ЗАДАЧИ ТРЕХ ТЕЛ

© 2017 г. **М. Г. ЮМАГУЛОВ**

Аннотация. В статье рассматриваются задачи о построении областей устойчивости в линейном приближении треугольных точек либрации плоской ограниченной эллиптической задачи трех тел и об основных сценариях бифуркаций при переходе параметров системы через границы этих областей. Предлагается новая схема построения границ областей устойчивости, приводящая к приближенным формулам, описывающим эти границы. Доказывается, что на одной части границы основным сценарием бифуркации является возникновение близких к треугольной точке либрации нестационарных 4π-периодических решений, а на другой — возникновение квазипериодических решений.

Ключевые слова: задача трех тел, точки либрации, устойчивость, область устойчивости, бифуркация, периодические решения, параметр.

AMS Subject Classification: 35B32

1. Введение

Рассматривается плоская эллиптическая ограниченная задача трех тел (см. [8, 11, 12]). Дифференциальные уравнения этой задачи в координатах Нехвилла (ξ, η) имеют вид:

$$\begin{cases} \xi'' - \eta' = \rho\left(\xi - \mu + \dfrac{\mu - 1}{(\xi^2+\eta^2)^{3/2}}\xi - \dfrac{\mu}{[(\xi-1)^2+\eta^2]^{3/2}}(\xi - 1)\right), \\ \eta'' + 2\xi' = \rho\left(\eta + \dfrac{\mu - 1}{(\xi^2+\eta^2)^{3/2}}\eta - \dfrac{\mu}{[(\xi-1)^2+\eta^2]^{3/2}}\eta\right); \end{cases} \tag{1}$$

здесь

$$\rho = \frac{1}{1+\varepsilon\cos t}, \quad \mu = \frac{m_1}{m_0+m_1}, \tag{2}$$

ε — эксцентриситет кеплеровской орбиты ($0 \leqslant \varepsilon < 1$), t — истинная аномалия, m_0 и m_1 — массы активно гравитирующих тел, μ — параметр масс ($0 < \mu < 1$).

Система (1) имеет пять постоянных решений — точек либрации: прямолинейных L_1, L_2 и L_3 и треугольных L_4 и L_5. В плоскости (ξ, η) прямолинейные точки либрации лежат на прямой $\eta = 0$, а треугольные точки либрации имеют координаты

$$L_4\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \quad L_5\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Координаты прямолинейных точек либрации, в отличие от треугольных, зависят от параметра μ и явно не выписываются; найти их можно лишь приближенно.

Систему двух дифференциальных уравнений (1) можно также представить одним уравнением в комплексной форме:

$$z'' + 2iz' = \rho[z - \mu + f(z)], \tag{3}$$

где

$$f(z) = \frac{\mu - 1}{|z|^3}z - \frac{\mu}{|z-1|^3}(z-1), \quad z = \xi + i\eta.$$

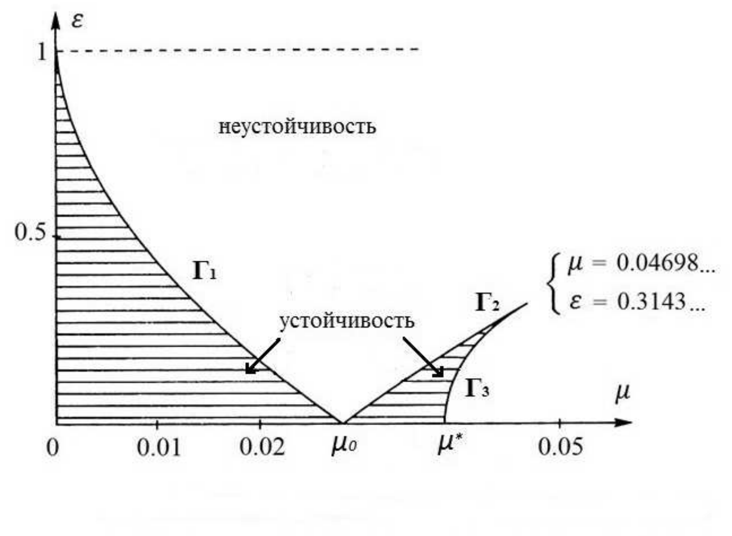

Рис. 1

Треугольные точки либрации L_4 и L_5 системы (1) соответствует постоянным решениям

$$z_0 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \overline{z}_0 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

уравнения (3).

Динамические свойства точек либрации важны как в теоретическом, так и в практическом плане. Здесь особо интересны и важны вопросы об устойчивости по Ляпунову точек либрации и, в частности, зависимости свойств устойчивости от параметров μ и ε, вопросы о существовании в окрестностях точек либрации ограниченных и периодических решений, о качественных перестройках (бифуркациях) поведения решений системы (1). Отметим, что прямолинейные точки либрации неустойчивы при всех μ и малых ε. В то же время треугольные точки либрации могут быть как устойчивыми, так и неустойчивыми (более детально это будет обсуждаться ниже) и, следовательно, в их окрестностях возможны различные бифуркации.

Нас будут интересовать как вопросы об устойчивости треугольных точек либрации, так и вопросы о бифуркациях в окрестностях этих точек. С этой целью в плоскости параметров (μ, ε) системы (1) определим прямоугольник

$$\Pi = \Big\{(\mu, \varepsilon) : \ 0 < \mu < 1, \ 0 \leqslant \varepsilon < 1\Big\}.$$

Множество $G \subset \Pi$ будем называть *областью устойчивости* системы (1), если для любого $(\mu, \varepsilon) \in G$ треугольные точки либрации системы (1) устойчивы в линейном приближении, а для любого $(\mu, \varepsilon) \in F = \Pi \setminus G$ эти точки неустойчивы в линейном приближении. При этом множество F будем называть *областью неустойчивости* системы (1). Точку (μ, ε) будем называть *граничной точкой* области устойчивости системы (1), если в каждой ее окрестности имеются точки из G и F. Множество Γ граничных точек будем называть *границей* области устойчивости системы (1). Обратим внимание на то, что в приведенных здесь понятиях термины «устойчивость» и «неустойчивость» понимаются как устойчивость и неустойчивость точек либрации в линейном приближении.

Вопросам построения областей устойчивости системы (1) и их границ посвящены многочисленные исследования. Известные здесь наиболее полные результаты были получены во второй половине прошлого столетия (см. [11] и имеющуюся там библиографию). Исследования в указанном направлении активно продолжаются (см., например, [1, 2, 10, 19–21]).

На рис. 1 изображены области устойчивости и неустойчивости системы (1) для малых значений μ. Здесь

$$\mu_0 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{3} = 0{,}028595\ldots, \quad \mu^* = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{69}}{18} = 0{,}038520\ldots. \tag{4}$$

Заштрихованная область соответствует устойчивости. Граница области устойчивости образована тремя непрерывными линиями Γ_1, Γ_2 и Γ_3.

При переходе параметров (μ, ε) через границы области устойчивости возможны различные бифуркации в окрестностях треугольных точек либрации системы (1), в том числе возникновение периодических и квазипериодических решений. Соответствующие вопросы привлекали и продолжают привлекать повышенное внимание многих авторов (см., например, [3, 4, 6, 9, 13, 16, 17]).

В настоящей работе предлагается новая схема определения границ областей устойчивости системы (1) и обсуждаются некоторые вопросы об основных сценариях бифуркационного поведения системы при переходе параметров (μ, ε) через эти границы.

2. Основные результаты

2.1. Исследование областей устойчивости. Приведем сначала основные результаты работы относительно исследования областей устойчивости системы (1).

Теорема 2.1. *Для любого $\mu \in (\mu^*, 1-\mu^*)$ существует такое $\delta > 0$, что при всех $0 \leqslant \varepsilon < \delta$ треугольные точки либрации системы (1) неустойчивы.*

Теорема 2.2. *Для любого $\mu \in (0, \mu^*) \cup (1-\mu^*, 1)$, $\mu \neq \mu_0$, $\mu \neq 1-\mu_0$, существует такое $\delta > 0$, что при всех $0 \leqslant \varepsilon < \delta$ треугольные точки либрации системы (1) устойчивы в линейном приближении.*

Теорема 2.3. *При $\mu \in (0, \mu^*)$ и малых ε граница области устойчивости системы (1) состоит в точности из трех гладких кривых Γ_1, Γ_2 и Γ_3, первые две из которых выходят на ось μ в плоскости параметров (μ, ε) в точке $\mu = \mu_0$, а третья — в точке $\mu = \mu^*$.*

Аналогичное теореме 2.3 утверждение имеет место и для значений $\mu \in (1-\mu^*, 1)$ и малых ε.

Рассмотрим теперь задачу построения границы областей устойчивости системы (1) при $\mu \in (0, \mu^*)$. С целью построения кривых Γ_1 и Γ_2 положим $\delta = \mu - \mu_0$. Тогда кривые Γ_1 и Γ_2 естественно строить в виде функций $\varepsilon = f_1(\delta)$ и $\varepsilon = f_2(\delta)$, определенных и монотонных на промежутках $(-\mu_0, 0]$ и $[0, \mu_3 - \mu_0)$ (здесь $\mu_3 = 0,04698\ldots$) соответственно, при этом $f_1(0) = f_2(0) = 0$.

Теорема 2.4. *Функции $f_1(\delta)$ и $f_2(\delta)$ представимы в виде*

$$f_1(\delta) = -\varepsilon_1\delta + \psi_1(\delta), \quad f_2(\delta) = \varepsilon_1\delta + \psi_2(\delta), \tag{5}$$

в котором

$$\varepsilon_1 = \sqrt{\frac{3456}{11}} = 17,725174\ldots, \tag{6}$$

а нелинейности $\psi_j(\delta)$ удовлетворяют соотношениям $\psi_j(\delta) = O(\delta^2)$ при $\delta \to 0$.

Кривую Γ_3 также можно строить в виде функции $\varepsilon = f_3(\delta)$, где $\delta = \mu - \mu^*$. Эта функция определена и монотонна на промежутке $[0, \mu_3 - \mu^*)$, при этом $f_3(0) = 0$.

Теорема 2.5. *Функция $f_3(\delta)$ представима в виде*

$$f_3(\delta) = \zeta_1\sqrt{\delta} + \psi_3(\delta), \tag{7}$$

где

$$\zeta_1 = \sqrt[4]{\frac{621}{4}} = 3,529863\ldots, \tag{8}$$

а нелинейность $\psi_3(\delta)$ удовлетворяет условию $\psi_3(\delta) = O(\delta)$ при $\delta \to 0$.

Отметим, что в приводимом в п. 3 доказательстве теорем 2.4 и 2.5 приводится схема получения более полных, чем (5) и (7), формул для представления функций $f_j(\delta)$:

$$f_1(\delta) = -\varepsilon_1\delta + \varepsilon_2\delta^2 + O(\delta^3), \quad f_2(\delta) = \varepsilon_1\delta + \varepsilon_2\delta^2 + O(\delta^3), \quad f_3(\delta) = \zeta_1\sqrt{\delta} + \zeta_2\delta + O(\delta^{3/2}); \tag{9}$$

при этом указывается алгоритм вычисления значений коэффициентов ε_1, ε_2, ζ_1 и ζ_2.

Отметим также, что аналогичные теоремам 2.1–2.5 утверждения (в явной или неявной форме) были получены и в работах других авторов (см., например, [11, 19, 21, 22]). В настоящей работе теоремы 2.1–2.5 получены с использованием предлагаемой ниже новой схемы построения границы областей устойчивости треугольных точек либрации системы (1) в линейном приближении.

2.2. Исследование основных сценариев бифуркаций. Теоремы 2.1–2.5 можно использовать также для исследования задач о бифуркациях в окрестностях треугольных точек либрации системы (1). Приведем основные результаты, полученные в этом направлении.

Система (1) зависит от двух параметров ε и μ. При переходе этих параметров через границу области устойчивости возможны различные бифуркации. Здесь обычно выделяют два основных сценария бифуркаций. Первый связан с возникновением у системы (1) в окрестностях точек либрации периодических решений с периодом кратным 2π (указанное значение периода определено тем фактом, что система (1) является неавтономной с 2π-периодической правой частью). Приведем соответствующее определение; при этом для краткости изложения нам удобно использовать уравнение (3), равносильное системе (1).

Пусть (μ^0, ε^0) — какая-нибудь точка границы области устойчивости системы (1). Пусть k — натуральное число. В соответствии с общей теорией бифуркаций (см., например, [7, 15]) будем говорить, что пара (μ^0, ε^0) является *точкой бифуркации $2\pi k$-периодических решений системы* (1) в окрестности треугольной точки либрации, если при некотором $\delta_0 > 0$ каждому $\delta \in (0, \delta_0)$ отвечают значения $\varepsilon = \varepsilon(\delta) \in (\varepsilon^0 - \delta, \varepsilon^0 + \delta)$ и $\mu = \mu(\delta) \in (\mu^0 - \delta, \mu^0 + \delta)$, при которых уравнение (3) имеет нестационарное $2\pi k$-периодическое решение $z = z(t, \delta)$, при этом $\max\limits_t |z(t, \delta) - z_0| < \delta$.

Другими словами, в каждой δ-окрестности точки (μ^0, ε^0) найдется значение $(\mu(\delta), \varepsilon(\delta))$, при котором система (1) имеет нестационарное $2\pi k$-периодическое решение $\xi = \xi(t, \delta)$ и $\eta = \eta(t, \delta)$ малой амплитуды, которое при $\delta \to 0$ стягивается в точку либрации L_4.

Теорема 2.6. *Существует такое $\delta_0 > 0$, что при $0 \leqslant \varepsilon^0 < \delta_0$ точки (μ^0, ε^0) участков Γ_1 и Γ_2 границы области устойчивости являются точками бифуркации 4π-периодических решений системы* (1) *в окрестности треугольных точек либрации.*

Второй сценарий бифуркаций является существенно более сложным. Для описания этого сценария преобразуем систему (1). А именно, путем введения новых переменных $u_1 = \xi$, $u_2 = \eta$, $u_3 = \xi'$, $u_4 = \eta'$ перейдем от (1) к равносильной системе:

$$\begin{cases} u_1' = u_3, \\ u_2' = u_4, \\ u_3' = 2u_4 + \rho\left(u_1 - \mu + \dfrac{\mu - 1}{(u_1^2 + u_2^2)^{3/2}}u_1 - \dfrac{\mu}{[(u_1 - 1)^2 + u_2^2]^{3/2}}(u_1 - 1)\right), \\ u_4' = -2u_3 + \rho\left(u_2 + \dfrac{\mu - 1}{(u_1^2 + u_2^2)^{3/2}}u_2 - \dfrac{\mu}{[(u_1 - 1)^2 + u_2^2]^{3/2}}u_2\right), \end{cases} \tag{10}$$

т.е. к системе вида

$$u' = F(u, \varepsilon, \mu, t), \quad u \in \mathbb{R}^4, \tag{11}$$

где $F(u, \varepsilon, \mu, t)$ – вектор-функция, определяемая правой частью системы (10).

Точки либрации системы (1) соответствуют постоянным решениям системы (11). В частности, треугольные точки либрации L_4 и L_5 соответствуют следующим постоянным решениям системы (11):

$$v_4 = \begin{bmatrix} 1/2 \\ \sqrt{3}/2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v_5 = \begin{bmatrix} 1/2 \\ -\sqrt{3}/2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{12}$$

Поведение системы (11) одинаково в окрестностях точек либрации v_4 и v_5. Всюду ниже для определенности будем изучать поведение системы (11) в окрестности точки либрации v_4.

Систему (11) можно ассоциировать с дискретной динамической системой, описываемой уравнением

$$x_{n+1} = U(x_n, \mu, \varepsilon), \; n = 0, 1, 2, \ldots, \quad x_n \in \mathbb{R}^4, \tag{13}$$

где $U(*, \mu, \varepsilon)$ — оператор сдвига по траекториям системы (11) за время от 0 до $T = 2\pi$. Система (13) при всех значениях параметров μ и ε имеет неподвижную точку v_4.

Второй сценарий бифуркации в исходной системе (1) связан с тем, что при близких к (μ^0, ε^0) значениях (μ, ε) в окрестности точки v_4 фазовый портрет системы (13) содержит гладкое замкнутое многообразие $\gamma(\mu, \varepsilon)$. Это многообразие является инвариантным для системы (13). Динамика системы (13) на многообразии $\gamma(\mu, \varepsilon)$ может оказаться весьма сложной, содержащей семейство периодических и квазипериодических орбит. Такой сценарий часто называют *бифуркацией Андронова—Хопфа* системы (1) в окрестности треугольной точки либрации.

Теорема 2.7. *Существует $\delta_0 > 0$ такое, что при $0 \leqslant \varepsilon^0 < \delta_0$ точки (μ^0, ε^0) участка Γ_3 границы области устойчивости являются точками бифуркации Андронова—Хопфа системы* (1) *в окрестности треугольных точек либрации.*

Из теорем 2.6 и 2.7 следует, что при переходе параметров (μ, ε) через участки Γ_1, Γ_2 и Γ_3 границы области устойчивости у системы (1) в окрестности точки либрации z_0 возникает семейство нестационарных 4π-периодических решений $z = z(\varepsilon, \mu, t)$ (в теореме 2.6) или семейство периодических и квазипериодических решений (в теореме 2.7). В этих теоремах не говорится о том, при каких именно значениях параметров ε и μ система (1) имеет такие решения и каковы асимптотические (по параметрам ε и μ) свойства этих решений. Для изучения этих вопросов в теореме 2.6 можно ввести вспомогательный малый параметр $\delta > 0$ так, что бифурцирующие решения $z(\varepsilon, \mu, t)$ уравнения (3) и соответствующие значения μ и ε представляются в параметрической форме:

$$z(t) = z_0 + z_1(t)\delta + z_2(t)\delta^2 + \ldots, \quad \mu = \mu^0 + \mu_1\delta + \mu_2\delta^2 + \ldots, \quad \varepsilon = \varepsilon^0 + \varepsilon_1\delta + \varepsilon_2\delta^2 + \ldots.$$

Для определения неизвестных коэффициентов $z_j(t)$, ε_j, μ_j можно воспользоваться алгоритмом, предложенным в [5].

Доказательства приведенных утверждений приводятся ниже.

3. Схема построения границы области устойчивости

Считая уже доказанными теоремы 2.1–2.3 (их доказательства приводятся в п. 4), приведем основные этапы построения границы области устойчивости системы (1) и одновременно докажем теоремы 2.4 и 2.5.

3.1. Преобразование системы (1)**.** На первом этапе перейдем от (1) к равносильной системе (11). Так как нас интересуют вопросы устойчивости точки либрации v_4 в линейном приближении, то далее перейдем от (11) к линеаризованному (в точке v_4) уравнению

$$h' = A(\varepsilon, \mu, t)h, \quad h \in \mathbb{R}^4, \tag{14}$$

где $A(\varepsilon,\mu,t) = F'_u(v_4,\varepsilon,\mu,t)$ — матрица Якоби вектор-функции $F(u,\varepsilon,\mu,t)$, вычисленная в точке $u = v_4$; матрица $A(\varepsilon,\mu,t)$ равна

$$A(\varepsilon,\mu,t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \dfrac{3}{4}\rho & \dfrac{3\sqrt{3}}{4}\rho(1-2\mu) & 0 & 2 \\ \dfrac{3\sqrt{3}}{4}\rho(1-2\mu) & \dfrac{9}{4}\rho & -2 & 0 \end{bmatrix}. \tag{15}$$

В силу первого из равенств (2) система (14) при $0 \leqslant \varepsilon < 1$ представима в виде

$$h' = A_0(\mu)h + (-\varepsilon\cos t + \varepsilon^2\cos^2 t)A_1(\mu)h + \varepsilon^3 A_3(\varepsilon,\mu,t)h, \quad h \in \mathbb{R}^4, \tag{16}$$

где

$$A_0(\mu) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \dfrac{3}{4} & \dfrac{3\sqrt{3}}{4}(1-2\mu) & 0 & 2 \\ \dfrac{3\sqrt{3}}{4}(1-2\mu) & \dfrac{9}{4} & -2 & 0 \end{bmatrix}, \; A_1(\mu) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dfrac{3}{4} & \dfrac{3\sqrt{3}}{4}(1-2\mu) & 0 & 0 \\ \dfrac{3\sqrt{3}}{4}(1-2\mu) & \dfrac{9}{4} & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_3(\varepsilon,\mu,t) = -\frac{\cos^3 t}{1+\varepsilon\cos t}A_1(\mu).$$

Для краткости ограничимся построением участков Γ_1 и Γ_2 границы области устойчивости системы (1). Построение участка Γ_3 проводится по той же схеме. Ниже для удобства (там где это не вызовет путаницы) искомые функции $f_1(\delta)$ и $f_2(\delta)$ из (9) будем обозначать одинаково:

$$f(\delta) = \varepsilon_1\delta + \varepsilon_2\delta^2 + \psi(\delta), \tag{17}$$

в котором коэффициенты ε_1 и ε_2 требуют определения, а нелинейность $\psi(\delta)$ удовлетворяет соотношению $\psi(\delta) = O(\delta^3)$ при $\delta \to 0$. По сути, речь идет о вычислении производных $f'(0) = \varepsilon_1$ и $f''(0) = 2\varepsilon_2$.

Подставим в (16) функции $\varepsilon = f(\delta)$ и $\mu = \mu_0 + \delta$ и перейдем к зависящему от малого параметра δ уравнению

$$\frac{dh}{dt} = [A_0 + \delta P_1(t,\varepsilon_1) + \delta^2 P_2(t,\varepsilon_1,\varepsilon_2)]h + \delta^3 P_3(t,\varepsilon_1,\varepsilon_2,\delta)h, \tag{18}$$

где $A_0 = A_0(\mu_0)$,

$$P_1(t,\varepsilon_1) = B_0 - \varepsilon_1\cos t A_1, \quad P_2(t,\varepsilon_1,\varepsilon_2) = \varepsilon_1^2\cos^2 t A_1 - \varepsilon_1\cos t B_0 - \varepsilon_2\cos t A_1,$$

$$B_0 = -\frac{3\sqrt{3}}{2}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_1 = A_1(\mu_0),$$

а матрица $P_3(t,\varepsilon_1,\varepsilon_2,\delta)$ является 2π-периодической по t и непрерывной.

Матрица A_0 имеет простые собственные значения:

$$\lambda_{1,2} = \pm\frac{i}{2}, \quad \lambda_{3,4} = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

Пусть e_1, e_2, e_3, $e_4 \in C^4$ — соответствующие собственные векторы. Перейдем в уравнении (18) к базису из векторов e_1, e_2, e_3, e_4. Для этого составим из этих векторов матрицу Q и произведем в (18) замену $h = Qy$. Тогда получим равносильное уравнение

$$y' = \Big[\widetilde{A}_0 + \delta\widetilde{P}_1(t,\varepsilon_1) + \delta^2\widetilde{P}_2(t,\varepsilon_1,\varepsilon_2) + \delta^3\widetilde{P}_3(t,\varepsilon_1,\varepsilon_2,\delta)\Big]y, \quad y \in C^4, \tag{19}$$

где

$$\widetilde{A}_0 = Q^{-1}A_0Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2}i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2}i \end{bmatrix},$$

$$\widetilde{P}_1(t,\varepsilon_1) = \widetilde{B}_0 - \varepsilon_1\cos t\widetilde{A}_1, \quad \widetilde{P}_2(t,\varepsilon_1,\varepsilon_2) = \varepsilon_1^2\cos^2 t\widetilde{A}_1 - \varepsilon_1\cos t\widetilde{B}_0 - \varepsilon_2\cos t\widetilde{A}_1, \tag{20}$$

$$\widetilde{B}_0 = Q^{-1}B_0Q, \quad \widetilde{A}_1 = Q^{-1}A_1Q.$$

Непосредственная проверка показывает, что верны равенства:

$$\widetilde{B}_0 = -\frac{3\sqrt{3}}{2}\begin{bmatrix} -2i\sqrt{6} & -2i\sqrt{6}-4 & -\frac{5\sqrt{6}}{3}i+\frac{4\sqrt{3}}{3}-2 & -\frac{5\sqrt{6}}{3}i-\frac{4\sqrt{3}}{3}-2 \\ 2i\sqrt{6}-4 & 2i\sqrt{6} & \frac{5\sqrt{6}}{3}i-\frac{4\sqrt{3}}{3}-2 & \frac{5\sqrt{6}}{3}i+\frac{4\sqrt{3}}{3}-2 \\ \frac{5\sqrt{2}}{2}i-\sqrt{3}+2 & \frac{5\sqrt{2}}{2}i+\sqrt{3}+2 & 2i\sqrt{6} & 2i\sqrt{2}+4 \\ -\frac{5\sqrt{2}}{2}i+\sqrt{3}+2 & -\frac{5\sqrt{2}}{2}i-\sqrt{3}+2 & -2i\sqrt{2}+4 & -2i\sqrt{6} \end{bmatrix},$$

$$\widetilde{A}_1 = \begin{bmatrix} \frac{9}{4}i & -\frac{\sqrt{6}}{2}-\frac{3}{4}i & i\sqrt{3}+i-\frac{\sqrt{6}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2} & -i\sqrt{3}+i-\frac{\sqrt{6}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{6}}{2}+\frac{3}{4}i & -\frac{9}{4}i & i\sqrt{3}-i-\frac{\sqrt{6}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2} & -i\sqrt{3}-i-\frac{\sqrt{6}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2}i-\frac{3}{2}i-\frac{3\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{6}}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{2}i+\frac{3}{2}i+\frac{3\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{6}}{4} & -\frac{7\sqrt{3}}{4}i & \frac{\sqrt{3}}{4}i+\sqrt{6} \\ \frac{\sqrt{3}}{2}i-\frac{3}{2}i+\frac{3\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{\sqrt{3}}{2}i+\frac{3}{2}i-\frac{3\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{6}}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4}i+\sqrt{6} & \frac{7\sqrt{3}}{4}i \end{bmatrix}.$$

3.2. О методе М. Розо. Для исследования системы (19) воспользуемся методом М. Розо [14] малого параметра анализа устойчивости линейных дифференциальных уравнений

$$z' = [A_0 + \delta P_1(t) + \delta^2 P_2(t) + \ldots + \delta^k P_k(t) + \delta^{k+1}Q(t,\delta)]z, \quad z \in C^N, \tag{21}$$

с T-периодическими коэффициентами и постоянной матрицей A_0; здесь δ — малый параметр. Метод предлагает способ перехода от (21) к равносильному уравнению вида

$$y' = \Big[A_0 + \delta S_1 + \delta^2 S_2 + \ldots + \delta^k S_k + \delta^{k+1}\tilde{Q}(t,\delta)\Big]y, \quad y \in C^N,$$

где $S_1, S_2, \ldots, S_k$ — эффективно конструируемые постоянные матрицы, а $\tilde{Q}(t,\delta)$ — непрерывная T-периодическая матрица. Такой переход позволяет решить задачу исследования устойчивости указанной линейной системы путем построения собственных значений постоянной матрицы $A_0 + \delta S_1 + \delta^2 S_2 + \ldots + \delta^k S_k$, например, методами теории возмущений (см. [**?**]).

Этот метод применим для ситуаций, когда для матрицы A_0 выполняется условие отсутствия T-резонанса: любая пара λ_1 и λ_2 различных собственных значений этой матрицы должна удовлетворять соотношению $\lambda_1 - \lambda_2 \neq 2\pi qi/T$ при целых q.

Но в системе (19) для матрицы $\widetilde{A}_0$ условие отсутствия T-резонанса при $T = 2\pi$ не выполняется, так как

$$\lambda_1 - \lambda_2 = \frac{1}{2}i - \left(-\frac{1}{2}i\right) = i.$$

С целью перехода к уравнению с нерезонансной матрицей положим

$$P_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Тогда замена $y = e^{iP_1t}z$ преобразует (19) к виду:

$$z' = \Big[\widehat{A} + \delta\widehat{P}_1(t,\varepsilon_1) + \delta^2\widehat{P}_2(t,\varepsilon_1,\varepsilon_2) + \delta^3\widehat{P}_3(t,\varepsilon_1,\varepsilon_2,\delta)]z, \tag{22}$$

где

$$\widehat{P}_j = e^{-iP_1t}\widetilde{P}_j e^{iP_1t}, \quad \widehat{A} = \widetilde{A}_0 - iP_1 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2}i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2}i \end{bmatrix}. \tag{23}$$

Для системы (22) условие отсутствия 2π-резонанса выполнено.

Обозначим элементы определенных в (20) матриц $\widetilde{B}_0$ и $\widetilde{A}_1$ через k_{ij} и l_{ij} соответственно. Положим

$$\widehat{B}_0 = e^{-iP_1t}\widetilde{B}_0 e^{iP_1t}, \quad \widehat{A}_1 = e^{-iP_1t}\widetilde{A}_1 e^{iP_1t}.$$

Тогда матрицы $\widehat{P}_1$ и $\widehat{P}_2$ в правой части системы (22) могут быть определены равенствами

$$\widehat{P}_1(t,\varepsilon_1) = \widehat{B}_0 - \varepsilon_1 \cos t\widehat{A}_1, \quad \widehat{P}_2(t,\varepsilon_1,\varepsilon_2) = \varepsilon_1^2\cos^2 t\widehat{A}_1 - \varepsilon_1\cos t\widehat{B}_0 - \varepsilon_2\cos t\widehat{A}_1.$$

Метод М. Розо позволяет с помощью специально конструируемой замены $y = (I - \delta H_1(t) - \delta^2 H_2(t))z$ с 2π-периодическими матрицами $H_1(t)$ и $H_2(t)$ перейти от (22) к системе

$$y' = \Big[\widehat{A} + \delta S_1(\varepsilon_1) + \delta^2 S_2(\varepsilon_1,\varepsilon_2) + \delta^3 S_3(t,\varepsilon_1,\varepsilon_2)\Big]z \tag{24}$$

с постоянными матрицами S_1 и S_2 и непрерывной 2π-периодической матрицей S_3. Тем самым свойства устойчивости системы (22) (а значит и треугольных точек либрации в линейном приближении исходной системы (1)) можно определить с помощью постоянной матрицы $\widehat{A} + \delta S_1(\varepsilon_1) + \delta^2 S_2(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$.

В соответствии с методом М. Розо рассмотрим матричное уравнение

$$\int_0^{2\pi} e^{-\widehat{A}t} S e^{\widehat{A}t} dt = \int_0^{2\pi} e^{-\widehat{A}t}\widehat{P}_1(t,\varepsilon_1) e^{\widehat{A}t} dt. \tag{25}$$

Эта система имеет единственное решение:

$$S_1(\varepsilon_1) =$$

$$= \begin{bmatrix} 9i\sqrt{2} & \varepsilon_1(\frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{3}{8}i) & k_{13}\frac{(\sqrt{3}+1)^2}{2} + \varepsilon_1 l_{13}\frac{1}{\sqrt{3}} & k_{14}\frac{(1-\sqrt{3})^2}{2} - \varepsilon_1 l_{14}\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \varepsilon_1(\frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{3}{8}i) & -9i\sqrt{2} & k_{23} - \varepsilon_1 l_{23}\frac{(\sqrt{3}+1)^2}{2\sqrt{3}} & k_{24} + \varepsilon_1 l_{24}\frac{(\sqrt{3}-1)^2}{2\sqrt{3}} \\ -k_{31} - \varepsilon_1 l_{31}\frac{1}{\sqrt{3}} & k_{32} - \varepsilon_1 l_{32}\frac{(\sqrt{3}+1)^2}{2\sqrt{3}} & 3\sqrt{6}i & k_{34} - \frac{3}{2}\varepsilon_1 l_{34} \\ k_{41}\frac{(\sqrt{3}-1)^2}{2} - \varepsilon_1 l_{41}\frac{1}{\sqrt{3}} & k_{42} + \varepsilon_1 l_{42}\frac{(\sqrt{3}-1)^2}{2\sqrt{3}} & k_{43} - \frac{3}{2}\varepsilon_1 l_{43} & -3\sqrt{6}i \end{bmatrix}. \tag{26}$$

Так как в системе (22) матрица $\widehat{A}$ имеет вид (23), то свойства устойчивости этой системы определяет первый блок матрицы $S_1(\varepsilon_1)$, т.е. матрица

$$S_1^* = \begin{bmatrix} 9i\sqrt{2} & \varepsilon_1(\frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{3}{8}i) \\ \varepsilon_1(\frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{3}{8}i) & -9i\sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

Найдем собственные значения матрицы S_1^*:

$$\lambda_{1,2} = \pm\frac{1}{8}\sqrt{33\varepsilon^2 - 10368}. \tag{27}$$

Из этого равенства следует, что изменение характера устойчивости системы (24) происходит при значении ε_1, определенном равенством (6). Это завершает доказательство теоремы 2.4.

Теорема 2.5 может быть доказана по той же схеме, что и теорема 2.4. Различие состоит в том, что при переходе к аналогу уравнения (18) получим матрицу A_0, для которой выполняется условие отсутствия T-резонанса. Однако, это матрица будет иметь пару чисто мнимых собственных значений кратности два (по этому поводу см. ниже п. 4.2).

3.3. Схема вычисления коэффициента ε_2. Следуя методу М. Розо положим

$$H_1(t) = e^{\widehat{A}t}\left[\int_0^t e^{-\widehat{A}\tau}(\widehat{P}_1(\tau,\varepsilon_1) - S_1)e^{\widehat{A}\tau}d\tau\right]e^{-\widehat{A}t},$$

где $S_1 = S_1(\varepsilon_1)$ — матрица (26), а ε_1 — число (6). Определим матрицу

$$F(\varepsilon_1,\varepsilon_2,t) = \widehat{P}_2(t,\varepsilon_1,\varepsilon_2) - H_1(t)\widehat{P}_1(t,\varepsilon_1) + S_1H_1(t)$$

и рассмотрим зависящее от ε_2 матричное уравнение

$$\int_0^{2\pi} e^{-\widehat{A}t}S_2e^{\widehat{A}t}dt = \int_0^{2\pi} e^{-\widehat{A}t}F(\varepsilon_1,\varepsilon_2,t)e^{\widehat{A}t}dt.$$

Это уравнение (так же, как и (25)) имеет единственное решение $S_2(\varepsilon_2)$. Анализируя теперь матрицу $S_2(\varepsilon_2)$ (также, как и матрицу (26)) найдем значение ε_2.

4. Доказательства основных утверждений

4.1. Вспомогательные сведения из теории динамических систем. Приведем сначала некоторые вспомогательные сведения из теории бифуркаций динамических систем (см., например, [7, 15]). Рассмотрим зависящую от скалярного или векторного параметра ξ динамическую систему

$$\frac{dx}{dt} = f(x,t,\xi), \quad x \in \mathbb{R}^N, \tag{28}$$

правая часть $f(x,t,\xi)$ которой является гладкой по x и ξ, непрерывной и T-периодической по t. Пусть система (28) при всех значениях ξ имеет точку равновесия x^*, которую без ограничения общности можно считать нулевой: $x^* = 0$, т.е. $f(0,t,\xi) \equiv 0$. Обозначим через $A(t,\xi) = f'_x(0,t,\xi)$ матрицу Якоби вектор-функции $f(x,t,\xi)$, вычисленную в точке $x = 0$. Наряду с (28) будем рассматривать линейную T-периодическую систему

$$\frac{dx}{dt} = A(t,\xi)x, \quad x \in \mathbb{R}^N. \tag{29}$$

Обозначим через n_-, n_0 и n_+ количество (с учетом кратности) мультипликаторов линейной системы (29), модуль которых меньше, равен или больше 1 соответственно; тогда $n_-+n_0+n_+ = N$. Тройку (n_-,n_0,n_+) называют *топологическим типом* точки равновесия $x = 0$ системы (28). Также говорят, что точка равновесия $x = 0$ системы (28) является *гиперболической*, если $p_0 = 0$; в противном случае ее называют *негиперболической*.

В окрестности гиперболических точек равновесия система (28) структурно устойчива по отношению к малым изменениям параметра ξ. Иначе обстоит дело в ситуации, когда при некотором значении $\xi = \xi_0$ точка равновесия $x = 0$ системы (28) является негиперболической. В этом случае при переходе параметра ξ через ξ_0 в окрестности точки равновесия возможны различные сценарии бифуркации.

Рассмотрим ситуацию, когда выполнено следующее условие:

U1. При $\xi = \xi_0$ линейная система (29) имеет пару простых мультипликаторов $e^{\pm i2\pi\theta_0}$, где $\theta_0 = p/q$ — несократимая дробь и $0 < \theta_0 \leqslant 1/2$, и не имеет мультипликаторов вида $e^{\pm i2\pi\theta}$ с другим рациональным θ.

Тогда при $\xi = \xi_0$ точка равновесия $x = 0$ системы (28) является негиперболической, при этом основным сценарием бифуркации в системе (28) является возникновение в окрестности точки равновесия $x = 0$ нестационарных $2\pi q$-периодических решений. Приведем соответствующее понятие.

Говорят, что значение $\xi = \xi_0$ является *точкой бифуркации $2\pi q$-периодических решений системы* (28) в окрестности точки равновесия $x = 0$, если каждому $\delta > 0$ отвечает такое $\xi = \xi_\delta$, $|\xi_\delta - \xi_0| < \delta$, что при $\xi = \xi_\delta$ система (28) имеет нестационарное $2\pi q$-периодическое решение $x_\delta(t)$; при этом $\max_t |x_\delta(t)| < \delta$.

Необходимым (но не достаточным) условием того, чтобы значение $\xi = \xi_0$ было точкой бифуркации $2\pi q$-периодических решений системы (28) является требование, чтобы система (29) имела мультипликаторы вида $e^{\pm i2\pi\theta_0}$, где $\theta_0 = p/q$.

Приведем полученный в [5] достаточный признак бифуркации в ситуации, когда выполнено условие U1. Пусть параметр ξ является двумерным: $\xi = (\alpha, \beta)$. Задача о $2\pi q$-периодических решениях системы (28) различными способами может быть сведена к решению операторного уравнения

$$x = B(\alpha, \beta)x + b(x, \alpha, \beta), \quad x \in \mathbb{R}^N, \tag{30}$$

с гладко зависящими от скалярных параметров α и β матрицей $B(\alpha, \beta)$ и нелинейностью $b(x, \alpha, \beta)$, удовлетворяющей равномерно по α и β соотношению $\|b(x, \alpha, \beta)\| = O(\|x\|^2)$ при $\|x\| \to 0$.

Приведенное выше понятие точки бифуркации $2\pi q$-периодических решений системы (28) равносильно следующему понятию для уравнения (30). Пару (α_0, β_0) называют *точкой бифуркации малых ненулевых решений уравнения* (30), если каждому $\delta > 0$ отвечает такая пара $(\alpha_\delta, \beta_\delta)$, $|\alpha_\delta - \alpha_0| < \delta$, $|\beta_\delta - \beta_0| < \delta$, что при $\alpha = \alpha_\delta$ и $\beta = \beta_\delta$ уравнение (30) имеет ненулевое решение x_δ, для которого $\|x_\delta\| < \delta$.

Необходимым условием бифуркации малых ненулевых решений уравнения (30) является требование, чтобы матрица $B_0 = B(\alpha_0, \beta_0)$ имела собственное значение 1. Будем предполагать, что матрица $B_0 = B(\alpha_0, \beta_0)$ имеет собственное значение 1 кратности 2.

Пусть сначала собственное значение 1 матрицы B_0 является полупростым. Обозначим через e, g и e^*, g^* соответственно собственные векторы матрицы B_0 и транспонированной матрицы B_0^*, отвечающие собственному значению 1. Их можно выбрать из условий $\|e\| = \|g\| = 1$, $(e, e^*) = (g, g^*) = 1$ и $(e, g^*) = (g, e^*) = 0$; здесь (x, y) — скалярное произведение векторов x и y. Тогда достаточный признак бифуркации $2\pi q$-периодических решений системы (28) в ситуации, когда выполнено условие U1 представляется как условие:

$$\Delta = \det \begin{bmatrix} (B'_\alpha e, e^*) & (B'_\beta e, e^*) \\ (B'_\alpha e, g^*) & (B'_\beta e, g^*) \end{bmatrix} \neq 0, \tag{31}$$

где введены обозначения

$$B'_\alpha = B'_\alpha(\alpha_0, \beta_0), \quad B'_\beta = B'_\beta(\alpha_0, \beta_0).$$

Пусть теперь собственное значение 1 матрицы B_0 является неполупростым. Пусть e — собственный вектор B_0, g — присоединенный вектор: $B_0 e = e$, $B_0 g = g + e$. Сопряженный оператор B_0^* также имеет собственное значение 1 кратности 2, которому отвечают собственный и присоединенный векторы e^* и g^*:

$$B_0^* e^* = e^*, \quad B_0^* g^* = g^* + e^*.$$

Эти векторы можно выбрать исходя из соотношений

$$(e, e^*) = (g, g^*) = 0, \quad (e, g^*) = (g, e^*) = 1.$$

Тогда достаточный признак бифуркации $2\pi q$-периодических решений системы (28) в ситуации, когда выполнено условие U1 представляется как условие

$$\Delta_1 = \det \begin{bmatrix} (B'_\alpha e, g^*) + 1 & (B'_\beta e, g^*) \\ (B'_\alpha e, e^*) & (B'_\beta e, e^*) \end{bmatrix} \neq 0. \tag{32}$$

Приведем теперь некоторые сведения из теории гамильтоновых динамических систем с периодическими коэффициентами (см., например, [11, 18]). Пусть N четно и система (29) является гамильтоновой. Тогда справедливы следующие утверждения:

(i) если система (29) имеет мультипликатор p_1, то число $p_2 = 1/p_1$ также является ее мультипликатором той же кратности;

(ii) если система (29) имеет мультипликатор $p = 1$ или $p = -1$, то его кратность четна;

(iii) система (29) устойчива по Ляпунову если и только если все ее мультипликаторы p удовлетворяют равенству $|p| = 1$ и являются полупростыми.

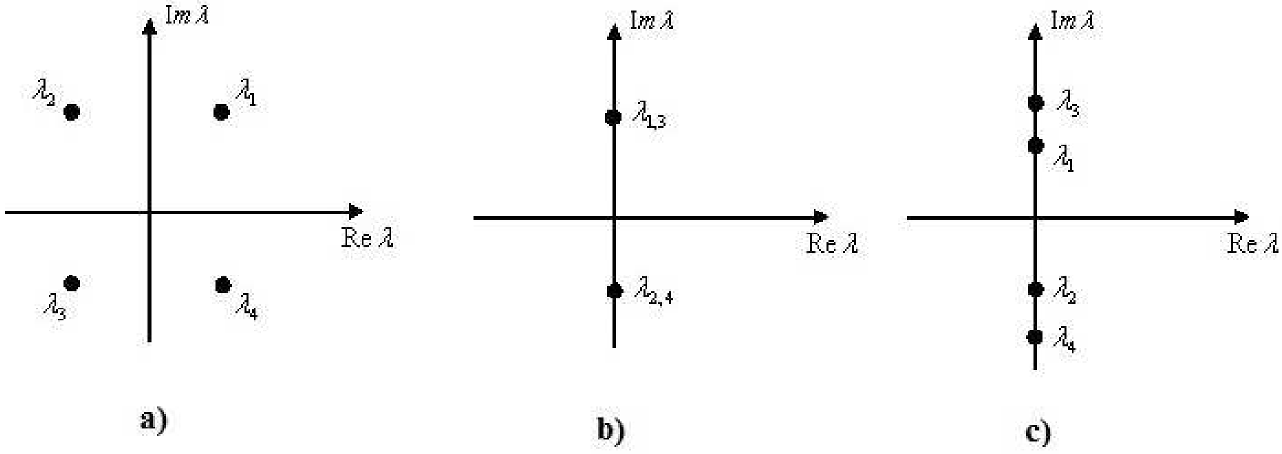

Рис. 2

4.2. О топологическом типе треугольных точек либрации. Нам понадобятся некоторые факты относительно топологического типа треугольных точек либрации системы (1), определяемого свойствами линейной системы (14). В частности, топологический тип в круговой постановке определяется свойствами матрицы (15) при $\varepsilon = 0$, т.е. свойствами матрицы

$$A_0(\mu) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \dfrac{3}{4} & \dfrac{3\sqrt{3}}{4}(1-2\mu) & 0 & 2 \\ \dfrac{3\sqrt{3}}{4}(1-2\mu) & \dfrac{9}{4} & -2 & 0 \end{bmatrix},$$

Здесь следует различать три случая:

S1. $\mu \in (\mu^*, 1-\mu^*)$;
S2. $\mu = \mu^*$ или $\mu = 1-\mu^*$;
S3. $\mu \in (0, \mu^*) \cup (1-\mu^*, 1)$.

Простым подсчетом можно убедиться, что в случае S1 все собственные значения матрицы $A_0(\mu)$ будут комплексными числами с ненулевыми вещественными частями. При этом два из них имеют положительные вещественные части, а два других — отрицательные вещественные части. Таким образом, расположение собственных значений матрицы $A_0(\mu)$ в случае S1 на комплексной плоскости имеет вид, изображенный на рис. 2(a).

В случае S2 все собственные значения матрицы $A_0(\mu)$ являются чисто мнимыми и кратными:

$$\lambda_1 = \lambda_3 = \sqrt{\frac{1}{2}}i, \quad \lambda_2 = \lambda_3 = -\sqrt{\frac{1}{2}}i.$$

Расположение этих собственных значений на комплексной плоскости будет иметь вид, изображенный на рис. 2(b).

Наконец, в случае S3 все собственные значения матрицы $A_0(\mu)$ будут чисто мнимыми:

$$\lambda_{1,2} = \pm\omega_1(\mu)i, \quad \lambda_{3,4} = \pm\omega_2(\mu)i,$$

где

$$\omega_1(\mu) = \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1-27\mu(1-\mu)}}, \quad \omega_2(\mu) = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1-27\mu(1-\mu)}}. \tag{33}$$

Очевидно, что

$$0 < \omega_1(\mu) < \frac{1}{\sqrt{2}} < \omega_2(\mu) < 1. \tag{34}$$

Расположение собственных значений матрицы $A_0(\mu)$ в случае S3 на комплексной плоскости будет иметь вид, изображенный на рис. 2(c).

4.3. Доказательство теоремы 2.1. Мультипликаторы p системы (14) при $\varepsilon = 0$ связаны с собственными λ значениями матрицы $A_0(\mu)$ равенством $p = e^{2\pi\lambda}$. Поэтому топологический тип треугольных точек либрации системы (1) при $\varepsilon = 0$ в случае S1 равен $(2, 0, 2)$. Следовательно, в указанном случае треугольные точки либрации системы (1) являются гиперболическими. Так как при этом они являются неустойчивыми в линейном приближении, то треугольные точки либрации системы (1) будут неустойчивыми и в общей нелинейной постановке при $\mu \in (\mu^*, 1-\mu^*)$ и всех малых значениях $\varepsilon \geqslant 0$. Это означает справедливость теоремы 2.1.

4.4. Доказательство теоремы 2.2. Иначе обстоит дело в случаях S2 и S3. Здесь топологический тип треугольных точек либрации системы (1) при $\varepsilon = 0$ равен $(0, 4, 0)$ и, следовательно, эти точки являются негиперболическими. При этом в линейном приближении в случае S3 эти точки являются устойчивыми, а в случае S2 — неустойчивыми.

Рассмотрим случай S3. При этом ограничимся рассмотрением подслучая, когда $0 < \mu < \mu^*$; подслучай $\mu^* < \mu < 1 - \mu^*$ рассматривается аналогично. Мультипликаторы системы (14) при $\varepsilon = 0$ в случае S3 — это числа

$$p_{1,2}(\mu) = e^{\pm 2\pi\omega_1(\mu)i}, \quad p_{3,4}(\mu) = e^{\pm 2\pi\omega_2(\mu)i},$$

где $\omega_{1,2}(\mu)i$ определены равенствами (33). В силу (34) числа $p_{3,4}(\mu)$ являются числами вида $e^{\pm\varphi i}$, $2\pi/\sqrt{2} < \varphi < 2\pi$, и, следовательно, не равны 1 или -1 ни при каком $\mu \in (0, \mu^*)$. В то же время числа $p_{1,2}(\mu)$ являются числами вида $e^{\pm\varphi i}$, $0 < \varphi < 2\pi/\sqrt{2}$, и, следовательно, могут равняться -1. А именно, они равны -1, если $\omega_1(\mu) = 1/2$; это уравнение при $0 < \mu < \mu^*$ имеет единственное решение μ_0, совпадающее со вторым из чисел (4).

Таким образом, при $\mu = \mu_0$ и $\varepsilon = 0$ система (14) имеет мультипликаторы

$$p_1 = p_2 = -1, \quad p_{3,4} = e^{\pm\pi\sqrt{3}i}. \tag{35}$$

Для остальных значений $\mu \in (0, \mu^*)$ и $\varepsilon = 0$ мультипликаторы p системы (14) являются простыми, невещественными и такими, что $|p| = 1$.

Система (1) является гамильтоновой (см., например, [11]). Поэтому справедливость теоремы 2.2 следует из приведенных в п. 4.1 свойств гамильтоновых систем.

4.5. Доказательство теоремы 2.3. Ограничимся приведением доказательства утверждения теоремы относительно существования гладких кривых Γ_1 и Γ_2, начинающиеся в точке $(\mu_0, 0)$ и состоящих из граничных точек области устойчивости системы (1).

Обозначим через $X(\mu, \varepsilon)$ матрицу монодромии системы (14). Справедливо следующее утверждение.

Теорема 4.1. *При близких к μ_0 значениях μ и малых ε граничные точки (μ, ε) области устойчивости системы* (1) *являются решениями уравнения*

$$F(\mu, \varepsilon) \equiv \det\left(X(\mu, \varepsilon) + I\right) = 0. \tag{36}$$

Действительно, собственные значения матрицы $X(\mu, \varepsilon)$ — это мультипликаторы системы (14). Поэтому решения уравнения (36) — это те (μ, ε), при которых система (14) имеет мультипликатор -1. Отметим, что пара $(\mu_0, 0)$ является решением уравнения (36); это следует из того, что при $\mu = \mu_0$ и $\varepsilon = 0$ система (14) имеет мультипликаторы (35). Отсюда и из приведенных в п. 4.1 свойств гамильтоновых систем следует, что близкая к $(\mu_0, 0)$ точка (μ^0, ε^0) будет граничной точкой области устойчивости системы (1) только если при $\mu = \mu^0$ и $\varepsilon = \varepsilon^0$ система (14) имеет мультипликатор -1.

Из леммы 4.1 следует, что для доказательства теоремы 2.3 достаточно установить, что, во-первых, уравнение (36) имеет в точности две гладкие ветви решений Γ_1 и Γ_2, начинающихся в точке $(\mu_0, 0)$, и, во-вторых, кривые Γ_1 и Γ_2 состоят из граничных точек области устойчивости системы (1).

Зафиксируем число φ, $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$, и рассмотрим прямую, заданную уравнениями в параметрической форме

$$\mu = \mu_0 + \delta \cos\varphi, \quad \varepsilon = \delta \sin\varphi, \tag{37}$$

где δ — параметр. В плоскости (μ, ε) эта прямая проходит через точку $(\mu_0, 0)$, образуя с осью μ угол φ.

Подставим в (16) функции (37) и перейдем к уравнению, аналогичному уравнению (18). Повторяя затем те же рассуждения, что и для уравнения (18), придем к аналогу равенств (27):

$$\lambda_{1,2}(\varphi) = \pm\frac{1}{8}\sqrt{10401\sin^2\varphi - 10368}. \tag{38}$$

Это означает, что если δ мало, то при значениях (μ, ε), лежащих на прямой (37), система (14) имеет мультипликаторы вида

$$p_{1,2}(\delta, \varphi) = -\exp[\delta\lambda_{1,2}(\varphi) + \chi_{1,2}(\delta, \varphi)],$$

где $\chi_{1,2}(\delta, \varphi) = O(\delta^2)$ при $\delta \to 0$ равномерно по φ. Поэтому из равенства (38) и общих свойств мультипликаторов системы (14) следует, что для каждого малого $\delta > 0$ существует в точности два значения $\varphi_1(\delta)$, $\varphi_2(\delta) \in (0, \pi)$, для которых выполняются равенства

$$p_{1,2}(\delta, \varphi_1(\delta)) = p_{1,2}(\delta, \varphi_2(\delta)) = -1.$$

При этом функции $\varphi_1(\delta)$ и $\varphi_2(\delta)$ являются гладкими.

Подставляя функции $\varphi_1(\delta)$ и $\varphi_2(\delta)$ в (37), а затем полученные функции в матрицу $X(\mu, \varepsilon)$, получим, что уравнение (36) действительно имеет в точности две гладкие ветви решений Γ_1 и Γ_2, начинающихся в точке $(\mu_0, 0)$. Тот факт, что кривые Γ_1 и Γ_2 состоят из граничных точек области устойчивости системы (1) следует из свойств функции (38).

4.6. Доказательство теоремы 2.6. Сначала отметим, что для любой точки $(\mu, \varepsilon) \in \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ линейная система (14) имеет мультипликатор -1 кратности 2. Этот факт следует из указанных в п. 4.1 свойств гамильтоновых систем. Действительно, если допустить противное, то при некоторых $(\mu, \varepsilon) \in \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ все мультипликаторы линейной системы (14) будут простыми, располагаясь на единичной окружности. Но в этом случае точки (μ, ε) не могут быть граничными для области устойчивости системы (1).

Отметим также, что для любого $(\mu, \varepsilon) \in \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, $(\mu, \varepsilon) \neq (\mu_0, 0)$, указанный мультипликатор -1 является неполупростым. Этот факт вытекает из равенства (24) и того свойства матрицы $S(\varepsilon_1)$, что она имеет неполупростое нулевое собственное значение кратности два.

В [16, 17] было показано, что значение $(\mu_0, 0)$ является точкой бифуркации 4π-периодических решений системы (1) в окрестности треугольных точек либрации. При этом показано, что для соответствующего операторного уравнения (30) выполнены указанные в п. 4.1 условия U1 и (31). Рассмотрим теперь произвольную точку $(\mu, \varepsilon) \in \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, близкую к точке $(\mu_0, 0)$. Так как линейная система (14) для всех таких точек имеет неполупростой мультипликатор -1 кратности 2, то для соответствующего операторного уравнения (30) выполнено указанное в п. 4.1 условие U1. Условие (32) также будет выполнено, что проверяется по той же схеме, что и в [16, 17].

4.7. Доказательство теоремы 2.7. Из отмеченных в п. 4.2 свойств собственных значений матрицы $A_0(\mu)$ (см. случай S2) следует, что при $\mu = \mu^*$ и $\varepsilon = 0$ линейная система (14) имеет пару мультипликаторов вида $\exp(\pm 2\pi i/\sqrt{2})$ кратности 2. Тогда из приведенных в п. 4.1 свойств гамильтоновых систем следует, что для всех точек $(\mu, \varepsilon) \in \Gamma_3$ линейная система (14) имеет пару мультипликаторов вида $\exp(\pm 2\pi\varphi i)$ кратности 2, где $\varphi \in [1 - 1/\sqrt{2}, 1/2]$. Справедливость теоремы 2.7 следует поэтому из общих теорем о точках бифуркации дискретных динамических систем [7, 15].

Благодарности. Автор выражает благодарность профессорам А. Д. Брюно и Э. М. Мухамадиеву за полезное обсуждение ряда вопросов, связанных с подготовкой работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Арнольд В. И., Козлов В. В., Нейштадт А. И.* Математические аспекты классической и небесной механики. — М.: ВИНИТИ, 1985.
2. *Батхин А. Б., Брюно А. Д., Варин В. П.* Множества устойчивости многопараметрических гамильтоновых систем// Прикл. мат. мех. — 2012. — *76*, № 1. — С. 80–133.
3. *Брюно А. Д., Варин В. П.* Периодические решения ограниченной задачи трех тел при малом отношении масс// Прикл. мат. мех. — 2007. — *71*, № 6. — С. 1034–1066.
4. *Брюно А. Д., Варин В. П.* О семействе периодических решений ограниченной задачи трех тел// Астрон. вестн. — 2008. — *42*, № 3. — С. 163–185.
5. *Вышинский А. А., Ибрагимова Л. С., Муртазина С. А., Юмагулов М. Г.* Операторный метод приближенного исследования правильной бифуркации в многопараметрических динамических системах// Уфимск. мат. ж. — 2010. — *2*, № 4. — С. 3–26.
6. *Гребеников Е. А., Рябов Ю. А.* Новые качественные методы в небесной механике. — М.: Наука, 1971.
7. Гукенхеймер Дж., Холмс Ф. Нелинейные колебания, динамические системы и бифуркации векторных полей. — М.—Ижевск: Ин-т компьют. исслед., 2002.
8. *Дубошин Г. Н.* Небесная механика. Аналитические и качественные методы. — М.: Наука, 1978.
9. *Икромов А.* О 6π-периодических решениях плоской ограниченной эллиптической задачи трех тел в окрестностях точек либрации// Космич. исслед. — 1984. — *22*, № 3. — С. 335–340.
10. *Куницын А. Л.* О построении областей устойчивости в задаче трех тел методом исключения параметра// Прикл. мат. мех. — 2009. — *73*, № 6. — С. 886–892.
11. *Маркеев А. П.* Точки либрации в небесной механике и космодинамике. — М.: Наука, 1978.
12. *Маршал К.* Задача трех тел. — М.—Ижевск: Ин-т компьют. исслед., 2004.
13. *Мухамадиев Э. М., Муратов Ю., Икромов А.* О периодических решениях плоской ограниченной эллиптической задачи трех тел в окрестностях точек либрации// Докл. АН Тадж. ССР. — 1984. — *27*, № 4. — С. 186–189.
14. *Розо М.* Нелинейные колебания и теория устойчивости. — М.: Наука, 1971.
15. *Шильников Л. П., Шильников А. Л., Тураев Д. В., Чуа Л.* Методы качественной теории в нелинейной динамике. Ч. 2. — М.—Ижевск: Ин-т компьют. исслед., 2009.
16. *Юмагулов М. Г., Беликова О. Н.* Бифуркация 4π-периодических решений плоской ограниченной эллиптической задачи трех тел// Астрон. ж. — 2009. — *86*, № 2. — С. 170–174.
17. *Юмагулов М. Г., Беликова О. Н.* Бифуркации периодических решений в окрестностях треугольных точек либрации задачи трех тел// Изв. высш. учеб. завед. Сер. мат. — 2010. — № 6. — С. 82–89.
18. *Якубович В. А., Старжинский В. М.* Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения. — М.: Наука, 1972.
19. *Chiang H. D., Alberto L. F. C.* Stability regions of nonlinear dynamical systems: Theory, estimation, and applications. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2015.
20. *Gareth E. R.* Linear stability of the elliptic Lagrangian triangle solutions in the three-body problem// J. Differ. Eqs. — 2002. — *182*. — С. 191–218.
21. *Kovacs T.* Stability chart of the triangular points in the elliptic restricted problem of three bodies// Mon. Not. R. Astron. Soc. — 2013. — *430*, № 4. — С. 2755–2760.
22. *Nayfeh A. H., Kamel A. A.* Stability of the triangular points in the elliptic restricted problem of three bodies// AIAA J. — 1970. — *8*, № 2. — С. 221–223.

М. Г. Юмагулов
Башкирский государственный университет, Уфа
E-mail: yum_mg@mail.ru