

ISSN 0233-6723



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ

СОВРЕМЕННАЯ
МАТЕМАТИКА
И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Тематические
обзоры

Том 137



Москва 2017

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Главный редактор:

Р. В. Гамкрелидзе (Математический институт им. В. А. Стеклова РАН)

Заместители главного редактора:

А. В. Овчинников (МГУ им. М. В. Ломоносова)

В. Л. Попов (Математический институт им. В. А. Стеклова РАН)

Члены редколлегии:

А. А. Аграчёв (Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, SISSA)

Е. С. Голод (МГУ им. М. В. Ломоносова)

А. Б. Жижченко (Отделение математических наук РАН)

Е. П. Кругова (ВИНИТИ РАН)

А. В. Михалёв (МГУ им. М. В. Ломоносова)

И. Ю. Никольская (ВИНИТИ РАН)

Н. Х. Розов (МГУ им. М. В. Ломоносова)

М. В. Шамолин (Институт механики МГУ им. М. В. Ломоносова)

Ответственные редакторы:

И. А. Жлябинкова

Н. Ю. Селиванова

Редакторы-составители:

Г. Г. Амосов (Математический институт им. В. А. Стеклова РАН),

Д. И. Борисов (Институт математики с ВЦ УНЦ РАН, Уфа),

Ф. Х. Мукминов (Институт математики с ВЦ УНЦ РАН, Уфа),

И. Х. Мусин (Институт математики с ВЦ УНЦ РАН, Уфа),

И. Т. Хабибуллин (Институт математики с ВЦ УНЦ РАН, Уфа),

Р. С. Юлмухаметов (Институт математики с ВЦ УНЦ РАН, Уфа).

Научный редактор:

И. А. Жлябинкова

ISSN 0233–6723

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ВСЕРОССИЙСКИЙ ИНСТИТУТ
НАУЧНОЙ И ТЕХНИЧЕСКОЙ ИНФОРМАЦИИ
(ВИНИТИ РАН)

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ

СЕРИЯ
СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА
И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

ТЕМАТИЧЕСКИЕ ОБЗОРЫ

Том 137

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ.
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА



Москва 2017

СОДЕРЖАНИЕ

Вторая краевая задача для уравнения Лаврентьева—Бицадзе с двумя линиями изменения типа в прямоугольной области (<i>А. А. Гималтдинова</i>)	3
Гиперболические уравнения лиувиллевого типа специального класса (<i>А. В. Жибер, А. М. Юрьева</i>)	17
Начально-граничная задача для неоднородных вырождающихся уравнений смешанного параболо-гиперболического типа (<i>К. Б. Сабитов, С. Н. Сидоров</i>)	26
Некоммутативная геометрия и анализ (<i>А. Г. Сергеев</i>)	61
Об аналитических в секторе разрешающих семействах операторов сильно вырожденных эволюционных уравнений высокого и дробного порядков (<i>В. Е. Федоров, Е. А. Романова</i>)	82
Вихревые установившиеся плоские энтропийные течения идеального газа (<i>С. В. Хабиров</i>)	97
Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении к многомерной сфере (<i>М. В. Шамолин</i>)	104
Моделирование внутренней структуры тропических циклонов: уравнение потока на траектории ветра (<i>Х. Фуджита Яшима</i>)	118



ВТОРАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЛАВРЕНТЬЕВА—БИЦАДЗЕ С ДВУМЯ ЛИНИЯМИ ИЗМЕНЕНИЯ ТИПА В ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ОБЛАСТИ

© 2017 г. А. А. ГИМАЛТДИНОВА

Аннотация. Для уравнения смешанного типа изучена вторая краевая задача и спектральным методом доказаны теоремы единственности и существования решения. Критерий единственности задачи доказан на основании свойства полноты биортогональной системы функций соответствующей одномерной спектральной задачи. Решение задачи построено в виде суммы биортогонального ряда.

Ключевые слова: уравнение смешанного типа, биортогональная система функций, полнота, существование и единственность решения.

AMS Subject Classification: 35M12

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение	3
2. Постановка задачи	4
3. Необходимое условие разрешимости	4
4. Построение биортогональной системы. Доказательство полноты	5
5. Единственность решения задачи	7
6. Существование решения задачи	11
Список литературы	15

1. ВВЕДЕНИЕ

Известно, что к краевым задачам для уравнений смешанного типа приводятся некоторые проблемы трансзвуковой газовой динамики. Исследуя обтекание клина сверхзвуковым потоком газа, Ф. И. Франкль [17] показал, что если перед клином образуется зона дозвуковых скоростей, то возникает краевая задача, в которой на части гиперболической границы задаются значения решения $u(x, y)$ уравнения Чаплыгина, а на части эллиптической границы имеет место линейное соотношение

$$P(x, y)u_x + Q(x, y)u_y = 0$$

с заданными коэффициентами P, Q .

В работах [3, 19] было положено начало большой серии работ по изучению задачи Дирихле для уравнений смешанного типа. В работах [9, 16, 18, 20] единственность решения задачи Дирихле для уравнений смешанного типа с одной линией изменения типа доказана с помощью принципа экстремума или методом интегральных тождеств, а существование — методом интегральных уравнений или разделения переменных, в [10] используются методы спектрального анализа.

Аналогом задачи Неймана для уравнений эллиптического типа в случае уравнений смешанного типа является задача Моравец. В [21] показано, что специальное краевое условие задачи Моравец при соответствующей замене переменных переходит в краевое условие Неймана. В монографии [2]

рассмотрена задача Моравец для уравнения Лаврентьева—Бицадзе. В [11] при некоторых ограничениях на коэффициенты общего уравнения смешанного типа установлены экстремальные свойства решения задачи Моравец и получены теоремы единственности ее решения. В [1] построено решение задачи Неймана для эллипτικο-гиперболического уравнения с одной линией изменения типа в прямоугольной области.

Краевым задачам для уравнений смешанного типа с двумя линиями изменения типа посвящены работы [12–15]. В этих работах исследована задача Трикоми для уравнения с оператором Лаврентьева—Бицадзе и для уравнения с двумя линиями степенного вырождения. Единственность решения задач доказана на основании принципа максимума или методом интегральных тождеств, а вопрос существования решения исследован методом интегральных уравнений или методом рядов по собственным функциям.

В настоящей работе для уравнения с двумя внутренними перпендикулярными линиями изменения типа изучена задача Неймана в прямоугольной области, методами спектрального анализа аналогично [4, 10] установлен критерий единственности и построено решение задачи в виде суммы ряда. При разделении переменных возникла спектральная задача на сопряжение для обыкновенного дифференциального оператора с разрывным коэффициентом, были построены система корневых функций и биортогональная система, причем в отличие от работ [4, 10] в настоящей работе к системе собственных функций добавляется одна присоединенная функция. Единственность решения поставленной задачи доказана на основании свойства полноты биортогональной системы функций. Ранее такая идея впервые была использована в [7] при обосновании единственности решения задач для гиперболических уравнений и в [10] для уравнений смешанного типа с одной линией изменения типа.

Отметим, что статья является расширенным и дополненным вариантом статьи автора [5].

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим уравнение

$$Lu \equiv (\operatorname{sgn} y)u_{xx} + (\operatorname{sgn} x)u_{yy} = f(x, y) \quad (2.1)$$

в прямоугольной области

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 < x < 1, -\alpha < y < \beta \right\}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad \alpha, \beta > 0.$$

Введем обозначения

$$D_1 = D \cap \{x > 0, y > 0\}, \quad D_2 = D \cap \{x > 0, y < 0\},$$

$$D_3 = D \cap \{x < 0, y < 0\}, \quad D_4 = D \cap \{x < 0, y > 0\}.$$

Задача Неймана. Найти функцию $u(x, y)$, удовлетворяющую следующим условиям:

$$u(x, y) \in C^1(\overline{D}) \cap C^2(D_1 \cup D_2 \cup D_3 \cup D_4), \quad (2.2)$$

$$Lu(x, y) \equiv f(x, y), \quad (x, y) \in D_1 \cup D_2 \cup D_3 \cup D_4, \quad (2.3)$$

$$u_x(x, y) \Big|_{x=1} = g(y), \quad -u_x(x, y) \Big|_{x=-1} = z(y), \quad y \in [-\alpha, \beta], \quad (2.4)$$

$$u_y(x, y) \Big|_{y=\beta} = \varphi(x), \quad -u_y(x, y) \Big|_{y=-\alpha} = \psi(x), \quad x \in [-1, 1], \quad (2.5)$$

где f, g, z, φ и ψ — заданные достаточно гладкие функции.

3. НЕОБХОДИМОЕ УСЛОВИЕ РАЗРЕШИМОСТИ

Отойдем от границ областей D_i , $i = \overline{1, 4}$, внутрь на расстояние $\delta > 0$. Полученные подобласти обозначим D_i^δ . Тогда

$$\iint_{\bigcup_{i=1}^4 D_i^\delta} Lu \, dx \, dy = \iint_{\bigcup_{i=1}^4 D_i^\delta} f(x, y) \, dx \, dy. \quad (3.1)$$

На основании формулы Грина, при переходе к пределу при $\delta \rightarrow 0$, имеем:

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \iint_{D_1^\delta} (u_{xx} + u_{yy}) dx dy = \int_0^\beta u_x(1, y) dy + \int_0^1 u_y(x, \beta) dx - \int_0^\beta u_x(0, y) dy - \int_0^1 u_y(x, 0) dx;$$

аналогичные вычисления можно провести и для D_i , $i = \overline{2, 4}$.

Складывая полученные равенства, с учетом (3.1) и граничных условий (2.4) и (2.5), получим

$$\int_{-\alpha}^\beta (\operatorname{sgn} y)(g(y) + z(y)) dy + \int_{-1}^1 (\operatorname{sgn} x)(\varphi(x) + \psi(x)) dx = \iint_D f(x, y) dx dy. \quad (3.2)$$

Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Теорема 1 (необходимое условие разрешимости задачи Неймана). *Если $u(x, y)$ — решение задачи (2.2)–(2.5), то справедливо равенство (3.2).*

Для простоты дальнейших рассуждений будем рассматривать однородное уравнение (2.1) и однородные условия (2.4), т.е.

$$f(x, y) \equiv 0, \quad g(y) = z(y) \equiv 0;$$

тогда равенство (3.2) примет вид

$$\int_{-1}^1 (\operatorname{sgn} x)(\varphi(x) + \psi(x)) dx = 0. \quad (3.3)$$

4. ПОСТРОЕНИЕ БИОРТОГОНАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПОЛНОТЫ

С учетом условий $f(x, y) = g(y) = z(y) \equiv 0$ разделим переменные $u(x, y) = X(x)Y(y)$ в уравнении (2.1). Имеем

$$\operatorname{sgn} x \cdot X'' + d \cdot X = 0, \quad x \in (-1, 0) \cup (0, 1), \quad d = \mu^2 \in \mathbb{C}, \quad (4.1)$$

$$X(0+0) = X(0-0), \quad X'(0+0) = X'(0-0), \quad X'(1) = X'(-1) = 0, \quad (4.2)$$

$$\operatorname{sgn} y \cdot Y'' - d \cdot Y = 0, \quad y \in (-\alpha, 0) \cup (0, \beta), \quad (4.3)$$

$$Y(0+0) = Y(0-0), \quad Y'(0+0) = Y'(0-0). \quad (4.4)$$

Решениями уравнения (4.1), удовлетворяющими условиям (4.2), являются функции

$$X(x) = \begin{cases} C_1 \cos(\mu x) + C_2 \sin(\mu x), & x > 0, \\ C_1 \operatorname{ch}(\mu x) + C_2 \operatorname{sh}(\mu x), & x < 0, \end{cases}$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные, μ удовлетворяет уравнению

$$\operatorname{tg} \mu = \operatorname{th} \mu. \quad (4.5)$$

Лемма 1. *Уравнение (4.5) имеет счетное множество корней, состоящее из нуля, попарно противоположных действительных чисел $\pm \mu_k$ и попарно противоположных чисто мнимых чисел $\pm i\mu_k$, где*

$$\mu_k = \frac{\pi}{4} + \pi k + O(e^{-2\pi k}), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Тогда постоянная d принимает значения $d_0 = 0$, $d_k^{(1)} = \mu_k^2 > 0$ и $d_k^{(2)} = -\mu_k^2 < 0$, $k \in \mathbb{N}$, и решениями задачи (4.1), (4.2) будут соответственно функции $X_0(x) \equiv 1$,

$$X_k^{(1)}(x) = \begin{cases} \frac{\cos[\mu_k(x-1)]}{\cos \mu_k}, & x > 0, \\ \frac{\operatorname{ch}[\mu_k(x+1)]}{\operatorname{ch} \mu_k}, & x < 0, \end{cases} \quad X_k^{(2)}(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{ch}[\mu_k(x-1)]}{\operatorname{ch} \mu_k}, & x > 0, \\ \frac{\cos[\mu_k(x+1)]}{\cos \mu_k}, & x < 0. \end{cases}$$

Определим присоединенную функцию X_{n1} , соответствующую собственному значению d_n и собственной функции X_n , как решение уравнения

$$\operatorname{sgn} x \cdot X_{n1}'' + d_n X_{n1} = X_n, \quad (4.6)$$

удовлетворяющее условиям (4.2).

Можно убедиться, что собственному значению $d_0 = 0$ и собственной функции $X_0(x)$ соответствует присоединенная функция

$$X_{01}(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2} - x, & x > 0, \\ -\frac{x^2}{2} - x, & x < 0. \end{cases} \quad (4.7)$$

Других присоединенных функций у задачи нет.

Система $\{X_0(x), X_{01}(x), X_k^{(1)}(x), X_k^{(2)}(x)\}$ не является ортогональной в $L_2[-1, 1]$, так как, например,

$$\int_{-1}^1 X_0(x) X_k^{(1)}(x) dx = \frac{\operatorname{th} \mu_k + \operatorname{tg} \mu_k}{\mu_k} \neq 0.$$

Поэтому рассмотрим задачу, сопряженную к задаче (4.1), (4.2), т.е. задачу

$$\operatorname{sgn} x \cdot Z'' + d \cdot Z = 0, \quad x \in (-1, 0) \cup (0, 1), \quad (4.8)$$

$$Z(0-0) = -Z(0+0), \quad Z'(0-0) = -Z'(0+0), \quad Z'(-1) = Z'(1) = 0. \quad (4.9)$$

Решениями задачи (4.8), (4.9) при $d_0 = 0$, $d_k^{(1)} = \mu_k^2$ и $d_k^{(2)} = -\mu_k^2$ соответственно являются функции

$$Z_0(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ -1, & x < 0, \end{cases} \quad Z_k^{(1)}(x) = \begin{cases} \frac{\cos[\mu_k(x-1)]}{\cos \mu_k}, & x > 0, \\ -\frac{\operatorname{ch}[\mu_k(x+1)]}{\operatorname{ch} \mu_k}, & x < 0, \end{cases} \quad Z_k^{(2)}(x) = \begin{cases} -\frac{\operatorname{ch}[\mu_k(x-1)]}{\operatorname{ch} \mu_k}, & x > 0, \\ \frac{\cos[\mu_k(x+1)]}{\cos \mu_k}, & x < 0. \end{cases} \quad (4.10)$$

Аналогично вышеизложенному получим, что значению $d_0 = 0$ и функции $Z_0(x)$ соответствует присоединенная функция

$$Z_{01}(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2} - x, & x > 0, \\ \frac{x^2}{2} + x, & x < 0. \end{cases}$$

Системы $\{X_0, X_{01}, X_k^{(1)}, X_k^{(2)}\}$ и $\{Z_{01}, Z_0, Z_k^{(1)}, Z_k^{(2)}\}$ являются биортогонально сопряженными, поскольку

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 X_0(x) Z_{01}(x) dx &= -\frac{2}{3} \neq 0, & \int_{-1}^1 X_0(x) Z_0(x) dx &= 0, & \int_{-1}^1 X_0(x) Z_k^{(1)}(x) dx &= 0, \\ \int_{-1}^1 X_0(x) Z_k^{(2)}(x) dx &= 0, & \int_{-1}^1 X_{01}(x) Z_{01}(x) dx &= 0, & \int_{-1}^1 X_{01}(x) Z_0(x) dx &= -\frac{2}{3} \neq 0, \\ \int_{-1}^1 X_{01}(x) Z_k^{(1)}(x) dx &= 0, & \int_{-1}^1 X_{01}(x) Z_k^{(2)}(x) dx &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 X_k^{(j)}(x) Z_k^{(j)}(x) dx &= \frac{\operatorname{ch}^2 \mu_k - \cos^2 \mu_k}{2 \cos^2 \mu_k \operatorname{ch}^2 \mu_k}, \quad j = 1, 2, \\ \int_{-1}^1 X_k^{(j)}(x) Z_n^{(j)}(x) dx &= 0, \quad j = 1, 2, \quad k \neq n, \\ \int_{-1}^1 X_k^{(i)}(x) Z_n^{(j)}(x) dx &= 0, \quad j = 1, 2, \quad i \neq j, \quad k, n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Лемма 2. Система $\{Z_{01}, Z_0, Z_k^{(1)}, Z_k^{(2)}\}$ полна в $L_2[-1, 1]$.

Доказательство аналогично работам [6, 8].

5. ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

Пусть существует решение задачи (2.2)–(2.5) при $f(x, y) = g(y) = z(y) \equiv 0$. Рассмотрим функции

$$\begin{aligned} u_0(y) &= \int_{-1}^1 u(x, y) Z_0(x) dx, & u_{01}(y) &= \int_{-1}^1 u(x, y) Z_{01}(x) dx, \\ u_k^{(1)}(y) &= \int_{-1}^1 u(x, y) Z_k^{(1)}(x) dx, & u_k^{(2)}(y) &= \int_{-1}^1 u(x, y) Z_k^{(2)}(x) dx, \quad k \in \mathbb{N}. \end{aligned} \quad (5.1)$$

На основании (5.1) введем следующие вспомогательные функции:

$$\begin{aligned} u_{0,\varepsilon}(y) &= \int_{-1}^{-\varepsilon} u(x, y) Z_0(x) dx + \int_{\varepsilon}^1 u(x, y) Z_0(x) dx, \\ u_{01,\varepsilon}(y) &= \int_{-1}^{-\varepsilon} u(x, y) Z_{01}(x) dx + \int_{\varepsilon}^1 u(x, y) Z_{01}(x) dx, \\ u_{k,\varepsilon}^{(1)}(y) &= \int_{-1}^{-\varepsilon} u(x, y) Z_k^{(1)}(x) dx + \int_{\varepsilon}^1 u(x, y) Z_k^{(1)}(x) dx, \\ u_{k,\varepsilon}^{(2)}(y) &= \int_{-1}^{-\varepsilon} u(x, y) Z_k^{(2)}(x) dx + \int_{\varepsilon}^1 u(x, y) Z_k^{(2)}(x) dx. \end{aligned}$$

Продифференцируем каждую из них дважды по y , подставим u_{yy} , выраженную из уравнения (2.1), проинтегрируем по частям и после перехода к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$ получим, что функции (5.1) удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$u_0''(y) = 0, \quad u_{01}''(y) = -\operatorname{sgn} y \cdot u_0(y), \quad (5.2)$$

$$\operatorname{sgn} y \cdot (u_k^{(1)})'' - \mu_k^2 \cdot u_k^{(1)}(y) = 0, \quad (5.3)$$

$$\operatorname{sgn} y \cdot (u_k^{(2)})'' + \mu_k^2 \cdot u_k^{(2)}(y) = 0. \quad (5.4)$$

Как видно, первое из уравнений (5.2) и уравнения (5.3), (5.4) совпадают с уравнением (4.3) при $d = 0$, $d = \mu_k^2$ и $d = -\mu_k^2$ и соответственно, а второе из уравнений (5.2) определяет присоединенную функцию $u_{01}(y)$.

Общие решения уравнений (5.2)–(5.4) с учетом условия (2.2) запишем в следующем виде:

$$u_0(y) = a_0 y + b_0,$$

$$u_{01}(y) = \begin{cases} -a_0 \frac{y^3}{6} - b_0 \frac{y^2}{2} + c_0 y + d_0, & y > 0, \\ a_0 \frac{y^3}{6} + b_0 \frac{y^2}{2} + c_0 y + d_0, & y < 0, \end{cases} \quad (5.5)$$

$$u_k^{(1)}(y) = \begin{cases} a_k^{(1)} \operatorname{ch}(\mu_k y) + b_k^{(1)} \operatorname{sh}(\mu_k y), & y > 0, \\ a_k^{(1)} \cos(\mu_k y) + b_k^{(1)} \sin(\mu_k y), & y < 0, \end{cases} \quad (5.6)$$

$$u_k^{(2)}(y) = \begin{cases} a_k^{(2)} \cos(\mu_k y) + b_k^{(2)} \sin(\mu_k y), & y > 0, \\ a_k^{(2)} \operatorname{ch}(\mu_k y) + b_k^{(2)} \operatorname{sh}(\mu_k y), & y < 0, \end{cases} \quad (5.7)$$

где $a_0, b_0, c_0, d_0, a_k^{(j)}, b_k^{(j)}$ — неизвестные пока коэффициенты.

Из равенств (5.1) с учетом граничных условий (2.5) получим:

$$\left\{ \begin{aligned} u'_0(\beta) &= \int_{-1}^1 u_y(x, \beta) Z_0(x) dx = \int_{-1}^1 (\operatorname{sgn} x) \varphi(x) dx = \varphi_0, \\ u'_{01}(\beta) &= \int_{-1}^1 u_y(x, \beta) Z_{01}(x) dx = \int_{-1}^1 \varphi(x) Z_{01}(x) dx = \varphi_{01}, \\ [u_k^{(1)}]'(\beta) &= \int_{-1}^1 u_y(x, \beta) Z_k^{(1)}(x) dx = \int_{-1}^1 \varphi(x) Z_k^{(1)}(x) dx = \varphi_k^{(1)}, \\ [u_k^{(2)}]'(\beta) &= \int_{-1}^1 u_y(x, \beta) Z_k^{(2)}(x) dx = \int_{-1}^1 \varphi(x) Z_k^{(2)}(x) dx = \varphi_k^{(2)}, \end{aligned} \right. \quad (5.8)$$

$$\left\{ \begin{aligned} u'_0(-\alpha) &= \int_{-1}^1 u_y(x, -\alpha) Z_0(x) dx = - \int_{-1}^1 (\operatorname{sgn} x) \psi(x) dx = \psi_0, \\ u'_{01}(-\alpha) &= \int_{-1}^1 u_y(x, -\alpha) Z_{01}(x) dx = \int_{-1}^1 \psi(x) Z_{01}(x) dx = \psi_{01}, \\ [u_k^{(1)}]'(-\alpha) &= \int_{-1}^1 u_y(x, -\alpha) Z_k^{(1)}(x) dx = - \int_{-1}^1 \psi(x) Z_k^{(1)}(x) dx = \psi_k^{(1)}, \\ [u_k^{(2)}]'(-\alpha) &= \int_{-1}^1 u_y(x, -\alpha) Z_k^{(2)}(x) dx = - \int_{-1}^1 \psi(x) Z_k^{(2)}(x) dx = \psi_k^{(2)}. \end{aligned} \right. \quad (5.9)$$

Тогда на основании (5.5)–(5.9) получим системы для нахождения коэффициентов $a_0, b_0, c_0, a_k^{(j)}, b_k^{(j)}$:

$$\left\{ \begin{aligned} a_0 &= \varphi_0 = \psi_0, \\ \frac{1}{2} a_0 \alpha^2 - b_0 \alpha + c_0 &= \psi_{01}, \\ -\frac{1}{2} a_0 \beta^2 - b_0 \beta + c_0 &= \varphi_{01}, \end{aligned} \right. \quad (5.10)$$

$$\begin{cases} a_k^{(1)} \operatorname{sh}(\mu_k \beta) + b_k^{(1)} \operatorname{ch}(\mu_k \beta) = \frac{\varphi_k^{(1)}}{\mu_k}, \\ a_k^{(1)} \sin(\mu_k \alpha) + b_k^{(1)} \cos(\mu_k \alpha) = \frac{\psi_k^{(1)}}{\mu_k}, \end{cases} \quad \begin{cases} -a_k^{(2)} \sin(\mu_k \beta) + b_k^{(2)} \cos(\mu_k \beta) = \frac{\varphi_k^{(2)}}{\mu_k}, \\ -a_k^{(2)} \operatorname{sh}(\mu_k \alpha) + b_k^{(2)} \operatorname{ch}(\mu_k \alpha) = \frac{\psi_k^{(2)}}{\mu_k}. \end{cases} \quad (5.11)$$

Решениями системы (5.10) являются:

$$a_0 = \varphi_0, \quad b_0 = \frac{2(\psi_{01} - \varphi_{01}) - \varphi_0(\alpha^2 + \beta^2)}{2(\beta - \alpha)}, \quad c_0 = \frac{2(\psi_{01}\beta - \varphi_{01}\alpha) - \varphi_0\alpha\beta(\alpha + \beta)}{2(\beta - \alpha)}. \quad (5.12)$$

Заметим, что равенство $\varphi_0 = \psi_0$ из (5.10) есть условие (3.3).

Если при всех $k \in \mathbb{N}$ определители систем (5.11) отличны от нуля,

$$\Delta_k^{(1)}(\alpha, \beta) = \cos(\mu_k \alpha) \cdot \operatorname{sh}(\mu_k \beta) - \sin(\mu_k \alpha) \cdot \operatorname{ch}(\mu_k \beta) \neq 0, \quad (5.13)$$

$$\Delta_k^{(2)}(\alpha, \beta) = \operatorname{sh}(\mu_k \alpha) \cdot \cos(\mu_k \beta) - \operatorname{ch}(\mu_k \alpha) \cdot \sin(\mu_k \beta) \neq 0, \quad (5.14)$$

то системы имеют единственное решение:

$$\begin{aligned} a_k^{(1)} &= \frac{\varphi_k^{(1)} \cos(\mu_k \alpha) - \psi_k^{(1)} \operatorname{ch}(\mu_k \beta)}{\mu_k \cdot \Delta_k^{(1)}(\alpha, \beta)}, & b_k^{(1)} &= \frac{-\varphi_k^{(1)} \sin(\mu_k \alpha) + \psi_k^{(1)} \operatorname{sh}(\mu_k \beta)}{\mu_k \cdot \Delta_k^{(1)}(\alpha, \beta)}, \\ a_k^{(2)} &= \frac{\varphi_k^{(2)} \operatorname{ch}(\mu_k \alpha) - \psi_k^{(2)} \cos(\mu_k \beta)}{\mu_k \cdot \Delta_k^{(2)}(\alpha, \beta)}, & b_k^{(2)} &= \frac{\varphi_k^{(2)} \operatorname{sh}(\mu_k \alpha) - \psi_k^{(2)} \sin(\mu_k \beta)}{\mu_k \cdot \Delta_k^{(2)}(\alpha, \beta)}. \end{aligned}$$

Тогда с учетом найденных значений функции $u_0(y)$, $u_{01}(y)$, $u_k^{(j)}(y)$ примут вид:

$$u_0(y) = \varphi_0 y + \frac{2(\psi_{01} - \varphi_{01}) - \varphi_0(\alpha^2 + \beta^2)}{2(\beta - \alpha)}, \quad (5.15)$$

$$u_{01}(y) = \begin{cases} -\varphi_0 \frac{y^3}{6} - b_0 \frac{y^2}{2} + c_0 y + d_0, & y > 0, \\ \varphi_0 \frac{y^3}{6} + b_0 \frac{y^2}{2} + c_0 y + d_0, & y < 0, \end{cases} \quad (5.16)$$

где b_0, c_0 определяются формулами (5.12), d_0 — любое число,

$$u_k^{(1)}(y) = \begin{cases} \frac{\varphi_k^{(1)} \left(\cos(\mu_k \alpha) \operatorname{ch}(\mu_k y) - \sin(\mu_k \alpha) \operatorname{sh}(\mu_k y) \right) - \psi_k^{(1)} \operatorname{ch}[\mu_k(\beta - y)]}{\mu_k \cdot \Delta_k^{(1)}(\alpha, \beta)}, & y > 0, \\ \frac{\varphi_k^{(1)} \cos[\mu_k(y + \alpha)] + \psi_k^{(1)} \left(\operatorname{sh}(\mu_k \beta) \sin(\mu_k y) - \operatorname{ch}(\mu_k \beta) \cos(\mu_k y) \right)}{\mu_k \cdot \Delta_k^{(1)}(\alpha, \beta)}, & y < 0, \end{cases} \quad (5.17)$$

$$u_k^{(2)}(y) = \begin{cases} \frac{\varphi_k^{(2)} \left(\operatorname{ch}(\mu_k \alpha) \cos(\mu_k y) + \operatorname{sh}(\mu_k \alpha) \sin(\mu_k y) \right) - \psi_k^{(2)} \cos[\mu_k(\beta - y)]}{\mu_k \cdot \Delta_k^{(2)}(\alpha, \beta)}, & y > 0, \\ \frac{\varphi_k^{(2)} \operatorname{ch}[\mu_k(y + \alpha)] - \psi_k^{(2)} \left(\cos(\mu_k \beta) \operatorname{ch}(\mu_k y) + \sin(\mu_k \beta) \operatorname{sh}(\mu_k y) \right)}{\mu_k \cdot \Delta_k^{(2)}(\alpha, \beta)}, & y < 0. \end{cases} \quad (5.18)$$

Пусть $\varphi(x) = \psi(x) \equiv 0$ на $[-1, 1]$; тогда на основании (5.8), (5.9), (5.15)–(5.18) при любом $y \in [-\alpha, \beta]$ получим

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 u(x, y) Z_0(x) dx &= 0, & \int_{-1}^1 u(x, y) Z_{01}(x) dx &= d_0, \\ \int_{-1}^1 u(x, y) Z_k^{(j)}(x) dx &= 0, & j &= 1, 2, \quad k = 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

Нетрудно убедиться, что для функции $v(x, y) = u(x, y) - d_0$ справедливо

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 v(x, y) Z_0(x) dx &= 0, & \int_{-1}^1 v(x, y) Z_{01}(x) dx &= 0, \\ \int_{-1}^1 v(x, y) Z_k^{(j)}(x) dx &= 0, & j &= 1, 2, \quad k = 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

Отсюда в силу полноты системы $\{Z_0, Z_{01}, Z_k^{(1)}, Z_k^{(2)}\}$ в $L_2[-1, 1]$ получаем, что $v(x, y) = 0$ почти всюду при $x \in [-1, 1]$ при любом $y \in [-\alpha, \beta]$. В силу непрерывности $v(x, y)$ в $\overline{D}$ имеем $v(x, y) \equiv 0$, или $u(x, y) \equiv d_0 = \text{const}$ в $\overline{D}$.

Пусть при некоторых α, β и $k = p \in \mathbb{N}$ имеем $\Delta_p^{(1)}(\alpha, \beta) = 0$ или $\Delta_p^{(2)}(\alpha, \beta) = 0$. Пусть, например, $\Delta_p^{(1)}(\alpha, \beta) = 0, \Delta_p^{(2)}(\alpha, \beta) \neq 0$. Тогда однородная задача (2.2)–(2.5) (где $\varphi(x) = \psi(x) = 0, g(y) = z(y) = 0, f(x, y) = 0$) имеет нетривиальное решение

$$u_p(x, y) = \begin{cases} \frac{\cos[\mu_p(x-1)] \operatorname{ch}[\mu_p(\beta-y)]}{\cos \mu_p \operatorname{ch}(\mu_p \beta)}, & (x, y) \in D_1, \\ \frac{\operatorname{ch}[\mu_p(x-1)] \operatorname{ch}[\mu_p(\alpha+y)]}{\operatorname{ch} \mu_p \operatorname{ch}(\mu_p \alpha)}, & (x, y) \in D_2, \\ \frac{\cos[\mu_p(x+1)] \operatorname{ch}[\mu_p(\alpha+y)]}{\cos \mu_p \operatorname{ch}(\mu_p \alpha)}, & (x, y) \in D_3, \\ \frac{\operatorname{ch}[\mu_p(x+1)] \operatorname{ch}[\mu_p(\beta-y)]}{\operatorname{ch} \mu_p \cos(\mu_p \beta)}, & (x, y) \in D_4. \end{cases}$$

Возникает вопрос об обращении определителей $\Delta_k^{(j)}(\alpha, \beta)$ в нуль. Можно убедиться, что система уравнений

$$\Delta_k^{(1)}(\alpha, \beta) = 0, \quad \Delta_k^{(2)}(\alpha, \beta) = 0 \quad (5.19)$$

при каждом $k \in \mathbb{N}$ имеет счетное множество нулей (α, β) . В самом деле, представим указанные определители в виде

$$\Delta_k^{(1)}(\alpha, \beta) = \sqrt{\operatorname{ch}(2\mu_k \beta)} \sin(\xi_k - \mu_k \alpha), \quad \Delta_k^{(2)}(\alpha, \beta) = \sqrt{\operatorname{ch}(2\mu_k \alpha)} \sin(\chi_k - \mu_k \beta), \quad (5.20)$$

где $\xi_k = \operatorname{arctg}(\operatorname{th} \mu_k \beta), \chi_k = \operatorname{arctg}(\operatorname{th} \mu_k \alpha)$; тогда система (5.19) равносильна системе

$$\mu_k \alpha = \operatorname{arctg}(\operatorname{th} \mu_k \beta) - \pi m, \quad \mu_k \beta = \operatorname{arctg}(\operatorname{th} \mu_k \alpha) - \pi t, \quad m, t \in \mathbb{Z}.$$

Зафиксируем $k \in \mathbb{N}$ и введем обозначение $\mu_k \alpha = \xi, \mu_k \beta = \eta$. Для каждой пары (m, t) нетрудно убедиться графически, что система

$$\begin{cases} \xi = \operatorname{arctg}(\operatorname{th} \eta) - \pi m, \\ \eta = \operatorname{arctg}(\operatorname{th} \xi) - \pi t \end{cases}$$

имеет единственное решение (ξ, η) .

Теорема 2. Если существует решение задачи (2.2)–(2.5), то оно единственно (с точностью до постоянного слагаемого) тогда и только тогда, когда для всех $k \in \mathbb{N}$ выполняются условия $\Delta_k^{(j)}(\alpha, \beta) \neq 0$, $j = 1, 2$.

6. СУЩЕСТВОВАНИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

Из формул (5.17) и (5.18) видно, что выражения $\Delta_k^{(j)}(\alpha, \beta)$ являются знаменателями дробей и при некоторых значениях (α, β) могут обратиться в нуль, т.е. возникает проблема «малых знаменателей». Поэтому для обоснования существования решения задачи (2.2)–(2.5) необходимо показать существование таких чисел α и β , что при больших k выражения $\Delta_k^{(j)}(\alpha, \beta)$ отделены от нуля.

Справедливо следующее утверждение.

Лемма 3. Пусть выполнено одно из следующих условий:

- 1) α — любое натуральное число, кроме чисел вида $4p - 3$, $p \in \mathbb{N}$;
- 2) α — любое дробное число, т.е. $\alpha = p/q$, где $p, q \in \mathbb{N}$, $(p, q) = 1$, число $q - p$ не кратно 4.

Тогда существуют такие постоянная $M_1 > 0$ и номер $k_1 \in \mathbb{N}$, что для всех $k > k_1$ справедлива оценка

$$|\Delta_k^{(1)}(\alpha, \beta)| \geq M_1 \cdot e^{\pi k \beta}. \quad (6.1)$$

Доказательство. Используем представление (5.20). Очевидно,

$$\sqrt{\operatorname{ch}(2\mu_k \beta)} > \frac{1}{\sqrt{2}} e^{\mu_k \beta} \geq C_1 e^{\pi k \beta}, \quad (6.2)$$

где C_1 — некоторая положительная постоянная. Оценим значения $\sin(\xi_k - \mu_k \alpha) = \delta_k$. Имеем

$$|\delta_k| \geq \left| |z_k| - |\delta_k - z_k| \right|,$$

где $z_k = \sin \left[\frac{\pi}{4} - \left(\frac{\pi}{4} + \pi k \right) \alpha \right]$. Далее,

$$\begin{aligned} |\delta_k - z_k| &= \left| \sin(\xi_k - \mu_k \alpha) - \sin \left[\frac{\pi}{4} - \left(\frac{\pi}{4} + \pi k \right) \alpha \right] \right| = \\ &= \left| 2 \sin \frac{\xi_k - \mu_k \alpha - \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} \alpha + \pi k \alpha}{2} \cos \frac{\xi_k - \mu_k \alpha + \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} \alpha - \pi k \alpha}{2} \right| \leq \\ &\leq \left| \left(\frac{\pi}{4} + \pi k - \mu_k \right) \alpha + \xi_k - \frac{\pi}{4} \right| \leq \left| \left(\pi k + \frac{\pi}{4} - \mu_k \right) \alpha \right| \leq M_\alpha e^{-2\pi k}, \end{aligned}$$

где $M_\alpha > 0$ — некоторая постоянная, вообще говоря, зависящая от α , и эта оценка справедлива начиная с некоторого k_1 . Тогда можем оценить выражение $|z_k|$.

1. Пусть $\alpha \in \mathbb{N}$. В случае $\alpha = 2p$ имеем $|z_k| = \sqrt{2}/2$, в случае $\alpha = 4p - 1$ имеем $|z_k| = 1$, а в случае $\alpha = 4p - 3$ будет $|z_k| = 0$. Таким образом, в первых двух случаях справедлива оценка

$$|\Delta_k^{(1)}(\alpha, \beta)| \geq M_1 e^{\pi k \beta}.$$

2. Пусть $\alpha = p/q$, $p, q \in \mathbb{N}$, $(p, q) = 1$, $q \geq 2$; тогда

$$|z_k| = \left| \sin \left[\frac{\pi}{4} \left(1 - \frac{p}{q} \right) - \pi \frac{kp}{q} \right] \right|.$$

Разделим число kp на q с остатком: $kp = sq + r$, где $s, r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $0 \leq r < q$. Тогда

$$|z_k| = \left| \sin \frac{\pi(q - p - 4r)}{4q} \right|.$$

Если $q - p$ не кратно 4, то $|z_k| = \operatorname{const} > 0$ и с учетом (6.2) имеем

$$|\Delta_k^{(1)}(\alpha, \beta)| \geq M_1 k^2 \cdot e^{\pi k \beta}.$$

Если же $p - q$ кратно 4, то может оказаться, что $z_k = 0$. □

Лемма 4. Пусть выполнено одно из следующих условий:

- 1) β — любое натуральное число, кроме чисел вида $4p - 3$, $p \in \mathbb{N}$;
- 2) β — любое дробное число, т.е. $\beta = p/q$, где $p, q \in \mathbb{N}$, $(p, q) = 1$, $(q - p, 4) = 1$.

Тогда существуют такие постоянная $M_2 > 0$ и номер $k_2 \in \mathbb{N}$, что для всех $k > k_2$ справедлива оценка

$$|\Delta_k^{(2)}(\alpha, \beta)| \geq M_2 \cdot e^{\pi k \alpha}. \quad (6.3)$$

Приведенные в леммах 3 и 4 условия являются существенными, что доказывают следующие утверждения.

Лемма 5. Если α — любое натуральное число вида $4p - 3$, $p \in \mathbb{N}$, то существуют такие положительная постоянная M_3 и номер $k_3 \in \mathbb{N}$, что для всех $k > k_3$ при $0 < \beta \leq 1$ справедлива оценка

$$|\Delta_k^{(1)}(\alpha, \beta)| \leq M_3 e^{-\pi k \beta}. \quad (6.4)$$

Доказательство. Вместе с оценкой (6.2) справедлива и оценка

$$\sqrt{\text{ch}(2\mu_k \beta)} \leq C_2 e^{\pi k \beta}, \quad C_2 > 0.$$

Найдем асимптотическое представление для $\xi_k = \arctg(\text{th } \mu_k \beta)$. Так как

$$\mu_k \beta = \frac{\pi \beta}{4} + \beta \pi k + O(e^{-2\pi k}),$$

получим

$$\text{th}(\mu_k \beta) = 1 - 2 \exp\left(-\frac{\pi \beta}{2} - 2\beta \pi k + O(e^{-2\pi k})\right) + o(e^{-2\beta \pi k}) = 1 + O(e^{-2\beta \pi k});$$

тогда

$$\xi_k = \arctg(\text{th } \mu_k \beta) = \frac{\pi}{4} + O(e^{-2\beta \pi k}).$$

Поэтому при $\alpha = 4p - 3$ имеем

$$\begin{aligned} |\sin(\xi_k - \mu_k \alpha)| &= \left| \sin\left[\frac{\pi}{4} + O(e^{-2\beta \pi k}) - \left(\frac{\pi}{4} + \pi k + O(e^{-2\pi k})\right)(4p - 3)\right] \right| = \\ &= \left| \sin\left(O(e^{-2\beta \pi k}) + O(e^{-2\pi k})\right) \right| \leq \left| O(e^{-2\beta \pi k}) + O(e^{-2\pi k}) \right|. \end{aligned}$$

Таким образом, при $0 < \beta \leq 1$ будем иметь

$$|\sin(\xi_k - \mu_k \alpha)| \leq C_3 e^{-2\pi \beta k},$$

откуда и следует справедливость неравенства (6.3). $\square$

Лемма 6. Если α — любое дробное число, т.е. $\alpha = p/q$, где $p, q \in \mathbb{N}$, $(p, q) = 1$, число $q - p$ кратно 4, то существуют такие положительная постоянная M_3 и номер $k_3 \in \mathbb{N}$, что для бесконечного количества номеров, удовлетворяющих условию $k > k_3$, при $0 < \beta \leq 1$ справедлива оценка (6.4).

Доказательство. Пусть $q - p = 4t$, $t \in \mathbb{Z}$, т.е. $p = q - 4t$. Тогда

$$|\sin(\xi_k - \mu_k \alpha)| = \left| \sin\left[\pi t \frac{4k + 1}{q} + O(e^{-2\pi \beta k}) + O(e^{-2\pi k})\right] \right|.$$

Можно доказать, что число $(4k + 1)/q$ является целым для одного из чисел $k = 1, k = 2, \dots, k = q$. Кроме того, если число $(4k + 1)/q$ является целым при некотором $k = k_0$, то оно будет целым при $k = k_0 + q$, т.е. существует бесконечное множество таких чисел $k \in \mathbb{N}$ что

$$|\sin(\xi_k - \mu_k \alpha)| = \left| \sin\left[O(e^{-2\pi \beta k}) + O(e^{-2\pi k})\right] \right|.$$

Отсюда следует справедливость леммы. $\square$

Утверждения, аналогичные леммам 5 и 6, справедливы для таких же значений β .

Если выполнены условия лемм 3 и 4, оценки (6.1), (6.3) и условия (5.13), (5.14) при $k \leq k_0 = \max\{k_1, k_2\}$, то решение задачи (2.2)–(2.5) можно представить в виде суммы ряда Фурье

$$\begin{aligned} u(x, y) &= X_0(x)u_{01}(y) + X_{01}(x)u_0(y) + \sum_{k=1}^{\infty} u_k^{(1)}(y)X_k^{(1)}(x) + u_k^{(2)}(y)X_k^{(2)}(x) = \\ &= u_{01}(y) + X_{01}(x)u_0(y) + \sum_{k=1}^{\infty} u_k^{(1)}(y)X_k^{(1)}(x) + u_k^{(2)}(y)X_k^{(2)}(x). \end{aligned} \quad (6.5)$$

Определим условия на функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, при которых ряд (6.5) будет сходиться равномерно в области $\bar{D}$ и допускать почленное дифференцирование по x и y .

Подберем для ряда (6.5) мажорирующий ряд:

$$|u(x, y)| \leq |u_{01}(y)| + |u_0(y)| + \sum_{k=1}^{\infty} |u_k^{(1)}(y)| \cdot |X_k^{(1)}(x)| + |u_k^{(2)}(y)| \cdot |X_k^{(2)}(x)|. \quad (6.6)$$

Очевидно,

$$|u_{01}(y)| \leq C_{01}|\varphi_0|, \quad |u_0(y)| \leq C_{00}|\varphi_0|, \quad y \in [-\alpha, \beta],$$

где C_{01}, C_{00} — положительные постоянные.

Оценим выражения $|u_k^{(1)}(y)|, |u_k^{(2)}(y)|$. Рассмотрим следующие отношения:

$$\begin{aligned} P_k^{(1)}(y) &= \frac{\cos(\mu_k \alpha) \operatorname{ch}(\mu_k y) - \sin(\mu_k \alpha) \operatorname{sh}(\mu_k y)}{\mu_k \Delta_k^{(1)}(\alpha, \beta)}, \\ P_k^{(2)}(y) &= \frac{\operatorname{ch}(\mu_k \alpha) \cos(\mu_k y) + \operatorname{sh}(\mu_k \alpha) \sin(\mu_k y)}{\mu_k \Delta_k^{(2)}(\alpha, \beta)}, \\ Q_k^{(1)}(y) &= \frac{\operatorname{ch}(\mu_k(\beta - y))}{\mu_k \Delta_k^{(1)}(\alpha, \beta)}, \quad Q_k^{(2)}(y) = \frac{\cos(\mu_k(\beta - y))}{\mu_k \Delta_k^{(2)}(\alpha, \beta)}, \\ M_k^{(1)}(y) &= \frac{\cos(\mu_k(\alpha + y))}{\mu_k \Delta_k^{(1)}(\alpha, \beta)}, \quad M_k^{(2)}(y) = \frac{\operatorname{ch}(\mu_k(\alpha + y))}{\mu_k \Delta_k^{(2)}(\alpha, \beta)}, \\ N_k^{(1)}(y) &= \frac{\operatorname{sh}(\mu_k \beta) \sin(\mu_k y) - \operatorname{ch}(\mu_k \beta) \cos(\mu_k y)}{\mu_k \Delta_k^{(1)}(\alpha, \beta)}, \\ N_k^{(2)}(y) &= \frac{\cos(\mu_k \beta) \operatorname{ch}(\mu_k y) + \sin(\mu_k \beta) \operatorname{sh}(\mu_k y)}{\mu_k \Delta_k^{(2)}(\alpha, \beta)}. \end{aligned}$$

Лемма 7. Если выполнены условия (5.13), (5.14), (6.1), (6.3), то для достаточно больших k справедливы оценки

$$|P_k^{(j)}(y)| \leq \frac{C_1^{(j)}}{k}, \quad |(P_k^{(j)}(y))'| \leq C_2^{(j)}, \quad |(P_k^{(j)}(y))''| \leq C_3^{(j)} \cdot k, \quad (6.7)$$

$$|Q_k^{(j)}(y)| \leq \frac{C_4^{(j)}}{k}, \quad |(Q_k^{(j)}(y))'| \leq C_5^{(j)}, \quad |(Q_k^{(j)}(y))''| \leq C_6^{(j)} \cdot k, \quad (6.8)$$

$$|M_k^{(j)}(y)| \leq \frac{C_7^{(j)}}{k}, \quad |(M_k^{(j)}(y))'| \leq C_8^{(j)}, \quad |(M_k^{(j)}(y))''| \leq C_9^{(j)} \cdot k, \quad (6.9)$$

$$|N_k^{(j)}(y)| \leq \frac{C_{10}^{(j)}}{k}, \quad |(N_k^{(j)}(y))'| \leq C_{11}^{(j)}, \quad |(N_k^{(j)}(y))''| \leq C_{12}^{(j)} \cdot k, \quad (6.10)$$

где $C_l^{(j)}$ — положительные постоянные, $j = 1, 2$, $l = \overline{1, 12}$.

Доказательство. Справедливость оценок следует из неравенств (6.1) и (6.3). Докажем оценки (6.7):

$$\begin{aligned} |P_k^{(1)}(y)| &= \left| \frac{\cos(\mu_k \alpha) \operatorname{ch}(\mu_k y) - \sin(\mu_k \alpha) \operatorname{sh}(\mu_k y)}{\mu_k \Delta_k^{(1)}(\alpha, \beta)} \right| \leq \frac{|\operatorname{ch}(\mu_k y)| + |\operatorname{sh}(\mu_k y)|}{\mu_k M_1 e^{\pi k \beta}} \leq \frac{e^{\mu_k y}}{M_1 k e^{\pi k \beta}} \leq \frac{C_1^{(1)}}{k}, \\ |(P_k^{(1)}(y))'| &= \left| \frac{\cos(\mu_k \alpha) \operatorname{sh}(\mu_k y) - \sin(\mu_k \alpha) \operatorname{ch}(\mu_k y)}{\Delta_k^{(1)}(\alpha, \beta)} \right| \leq \frac{e^{\mu_k y}}{M_1 e^{\pi k \beta}} \leq C_2^{(1)}, \\ |(P_k^{(1)}(y))''| &= \mu_k^2 |P_k^{(1)}(y)| \leq C_3^{(1)} k. \end{aligned}$$

Аналогично доказываются оценки (6.8)–(6.10).

С учетом оценок (6.7)–(6.10) и неравенств $|X_k^{(j)}(x)| \leq \operatorname{const}$, $x \in [-1, 1]$, $j = 1, 2$, получим:

$$|u_k^{(j)}(y)| \cdot |X_k^{(j)}(x)| \leq C^{(j)} \left(|\varphi_k^{(1)}| + |\psi_k^{(1)}| \right), \quad j = 1, 2, \quad C^{(j)} > 0.$$

Таким образом, можем записать

$$|u(x, y)| \leq C_1 \left(|\varphi_0| + |\psi_0| + \sum_{k=1}^{\infty} \left(|\varphi_k^{(1)}| + |\psi_k^{(1)}| + |\varphi_k^{(2)}| + |\psi_k^{(2)}| \right) \right), \quad (x, y) \in \overline{D}, \quad (6.11)$$

где $C_1 = \max\{C^{(j)}, C_{00}, C_{01}\}$. Аналогичным образом можем получить оценки

$$|u_x(x, y)| \leq C_2 \left(|\varphi_0| + |\psi_0| + \sum_{k=1}^{\infty} k \left(|\varphi_k^{(1)}| + |\psi_k^{(1)}| + |\varphi_k^{(2)}| + |\psi_k^{(2)}| \right) \right), \quad (x, y) \in D, \quad C_2 > 0,$$

$$|u_{xx}(x, y)| \leq C_3 \left(|\varphi_0| + |\psi_0| + \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \left(|\varphi_k^{(1)}| + |\psi_k^{(1)}| + |\varphi_k^{(2)}| + |\psi_k^{(2)}| \right) \right), \quad (x, y) \in D, \quad C_3 > 0.$$

Такие же оценки справедливы и для частных производных u_y, u_{yy} . $\square$

Лемма 8. Пусть $\varphi(x), \psi(x) \in C^1[-1, 1] \cap C^4[-1, 0] \cap C^4[0, 1]$, причем

$$\begin{aligned} \varphi(-1) = \varphi(1) = \varphi'''(-1) = \varphi'''(1) = 0, \quad \psi(-1) = \psi(1) = \psi'''(-1) = \psi'''(1) = 0, \\ \varphi''(0+0) = -\varphi''(0-0), \quad \varphi'''(0+0) = -\varphi'''(0-0), \\ \psi''(0+0) = -\psi''(0-0), \quad \psi'''(0+0) = -\psi'''(0-0). \end{aligned}$$

Тогда справедливы соотношения

$$\varphi_k^{(1)} = \frac{p_k^{(1)}}{\mu_k^4}, \quad \varphi_k^{(2)} = \frac{p_k^{(2)}}{\mu_k^4}, \quad \psi_k^{(1)} = \frac{q_k^{(1)}}{\mu_k^4}, \quad \psi_k^{(2)} = \frac{q_k^{(2)}}{\mu_k^4},$$

где

$$p_k^{(j)} = \int_{-1}^1 \varphi^{IV}(x) Z_k^{(j)}(x) dx, \quad q_k^{(j)} = \int_{-1}^1 \psi^{IV}(x) Z_k^{(j)}(x) dx.$$

Для доказательства леммы следует проинтегрировать по частям четыре раза в интегралах равенств (5.8) и (5.9).

Можно доказать, что сходится ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \left(|p_k^{(1)}| + |q_k^{(1)}| + |p_k^{(2)}| + |q_k^{(2)}| \right),$$

откуда следует равномерная сходимость в $\overline{D}$ ряда (6.5) и рядов, полученных дифференцированием по переменным x и y , а ряды из производных второго порядка сходятся в замкнутых областях D_i , $i = \overline{1, 4}$.

Если при указанных в леммах 3 и 4 числах α и β и некоторых $k = k_1, k_2, \dots, k_l$, где $1 \leq k_1 < k_2 < \dots < k_l \leq k_0$, одно из выражений $\Delta_k^{(j)}(\alpha, \beta)$ обращается в нуль (пусть для определенности $\Delta_k^{(1)}(\alpha, \beta) = 0$ при этих k_i , $\Delta_k^{(2)}(\alpha, \beta) \neq 0$), то для разрешимости первой из систем (5.11) относительно $a_k^{(1)}$ и $b_k^{(1)}$ необходимо и достаточно выполнение условий

$$\varphi_{k_i}^{(1)} \cos(\mu_{k_i} \alpha) = \psi_{k_i}^{(1)} \operatorname{ch}(\mu_{k_i} \beta), \quad i = \overline{1, l}. \quad (6.12)$$

Тогда соответствующие частные решения при $k = k_1, k_2, \dots, k_l$ имеют вид:

$$\tilde{u}_k(x, y) = \begin{cases} \frac{\cos[\mu_k(x-1)]}{\cos \mu_k} \left(\operatorname{ch}(\mu_k y) + \frac{\varphi_k^{(1)} - \mu_k \operatorname{sh}(\mu_k \beta)}{\mu_k \operatorname{ch}(\mu_k \beta)} \operatorname{sh}(\mu_k y) \right), & (x, y) \in D_1, \\ \frac{\operatorname{ch}[\mu_k(x-1)]}{\cos \mu_k} \left(\cos(\mu_k y) + \frac{\varphi_k^{(1)} - \mu_k \operatorname{sh}(\mu_k \beta)}{\mu_k \operatorname{ch}(\mu_k \beta)} \sin(\mu_k y) \right), & (x, y) \in D_2, \\ \frac{\cos[\mu_k(x+1)]}{\operatorname{ch} \mu_k} \left(\cos(\mu_k y) + \frac{\varphi_k^{(1)} - \mu_k \operatorname{sh}(\mu_k \beta)}{\mu_k \operatorname{ch}(\mu_k \beta)} \sin(\mu_k y) \right), & (x, y) \in D_3, \\ \frac{\operatorname{ch}[\mu_k(x+1)]}{\operatorname{ch} \mu_k} \left(\operatorname{ch}(\mu_k y) + \frac{\varphi_k^{(1)} - \mu_k \operatorname{sh}(\mu_k \beta)}{\mu_k \operatorname{ch}(\mu_k \beta)} \operatorname{sh}(\mu_k y) \right), & (x, y) \in D_4. \end{cases} \quad (6.13)$$

Поэтому решение задачи (2.2)–(2.5) в этом случае определяется в виде суммы ряда

$$u(x, y) = u_{01}(y) + X_{01}(x)u_0(y) + \left(\sum_{k=1}^{k_1-1} + \sum_{k=k_1+1}^{k_2-1} + \dots + \sum_{k=k_{l-1}+1}^{k_l-1} + \sum_{k=k_l+1}^{\infty} \right) u_k^{(1)}(y) X_k^{(1)}(x) + \\ + \sum_{k=1}^{\infty} u_k^{(2)}(y) X_k^{(2)}(x) + \sum_{k=k_1, k_2, \dots, k_l} A_k \tilde{u}_k(x, y), \quad (6.14)$$

где A_k — произвольные коэффициенты, $\tilde{u}_k(x, y)$ определяются формулой (6.13), конечные суммы считаем равными нулю, если нижний предел суммирования больше верхнего.

Аналогичное решение строится в случае, когда при некоторых k будет $\Delta_k^{(2)}(\alpha, \beta) = 0$, $\Delta_k^{(1)}(\alpha, \beta) \neq 0$, или если оба знаменателя обращаются в нуль.

Теорема 3. Пусть $\varphi(x)$, $\psi(x)$ удовлетворяют условиям леммы 8 и выполнены оценки (6.1), (6.3) при $k > k_0$. Если при указанных в леммах 3 и 4 значениях α и β при всех $k = \overline{1, k_0}$ выполнены условия (5.13), (5.14), то существует единственное (с точностью до постоянного слагаемого) решение задачи (2.2)–(2.5) и оно определяется рядом (6.5).

Если $\Delta_k^{(1)}(\alpha, \beta) = 0$ и $\Delta_k^{(2)}(\alpha, \beta) \neq 0$ при $k = k_1, k_2, \dots, k_l \leq k_0$, то задача (2.2)–(2.5) разрешима только тогда, когда выполнены условия (6.12), и решение определяется в виде суммы ряда (6.14).

Очевидно, при указанных в леммах 5 и 6 значениях α или β решение задачи (2.2)–(2.5) нельзя построить в виде суммы ряда.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бахристова А. А. Задача Неймана для уравнения смешанного типа в прямоугольной области // Изв. вузов. Сер. мат. — 2009. — 413, № 11. — С. 12–19.
2. Берс Л. Математические вопросы дозвуковой и околозвуковой газовой динамики. — М.: ИЛ. 1961.
3. Бицадзе А. В. Некорректность задачи Дирихле для уравнений смешанного типа // Докл. АН СССР. — 1958. — 122, № 2. — С. 167–170.
4. Гималтдинова А. А. Задача Дирихле для уравнения Лаврентьева—Бицадзе с двумя линиями изменения типа в прямоугольной области // Докл. РАН. — 2015. — 460, № 3. — С. 260–265.
5. Гималтдинова А. А. Задача Неймана для уравнения Лаврентьева—Бицадзе с двумя линиями изменения типа в прямоугольной области // Докл. РАН. — 2016. — 466, № 1. — С. 7–11.

6. Гималтдинова А. А., Курман К. В. О полноте одной пары биортогонально сопряженных систем функций// Вестн. Самарск. гос. техн. ун-та. Сер. физ.-мат. наук. — 2015. — 19, № 1 (38). — С. 7–18.
7. Ильин В. А. Единственность и принадлежность W_2^1 классического решения смешанной задачи для самосопряженного гиперболического уравнения// Мат. заметки. — 1975. — 17, № 1. — С. 91–101.
8. Ломов И. С. Негладкие собственные функции в задачах математической физики// Диффер. уравн. — 2011. — 47, № 3. — С. 358–365.
9. Нахушев А. М. Критерий единственности задачи Дирихле для уравнения смешанного типа в цилиндрической области// Диффер. уравн. — 1970. — 6, № 1. — С. 190–191.
10. Сабитов К. Б. Задача Дирихле для уравнений смешанного типа в прямоугольной области// Докл. РАН. — 2007. — 413, № 1. — С. 23–26.
11. Сабитов К. Б., Акимов А. А. К теории аналога задачи Неймана для уравнений смешанного типа// Изв. вузов. Сер. мат. — 2001. — 10. — С. 73–80.
12. Сабитов К. Б., Бижкулова Г. Г., Гималтдинова А. А. К теории уравнений смешанного типа с двумя линиями изменения типа. — Уфа: Гилем, 2006.
13. Сабитов К. Б., Карамова А. А. Решение одной газодинамической задачи для уравнения смешанного типа с негладкой линией вырождения// Диффер. уравн. — 2002. — 37, № 1. — С. 111–116.
14. Сабитов К. Б., Карамова А. А., Шарафутдинова Г. Г. К теории уравнений смешанного типа с двумя линиями вырождения// Изв. вузов. Сер. мат. — 1999. — 11. — С. 70–80.
15. Сабитов К. Б., Шарафутдинова Г. Г. Задача Трикоми для уравнения смешанного типа с двумя перпендикулярными линиями вырождения// Диффер. уравн. — 2003. — 39, № 6. — С. 788–800.
16. Солдатов А. П. Задачи типа Дирихле для уравнения Лаврентьева—Бицадзе, I, II// Докл. РАН. — 1993. — 332, № 6. — С. 696–698; 333, № 1. — С. 16–18.
17. Франкль Ф. И. К теории сопел Лавала// Изв. АН СССР, сер. мат. — 1945. — 9. — С. 387–422.
18. Хачев М. М. О задаче Дирихле для одного уравнения смешанного типа// Диффер. уравн. — 1976. — 12, № 1. — С. 137–143.
19. Шабат Б. В. Примеры решения задачи Дирихле для уравнения смешанного типа// Докл. АН СССР. — 1957. — 112, № 3. — С. 386–389.
20. Cannon J. R. Dirichlet problem for an equation of mixed type with a discontinuous coefficient// Ann. Math. Pure Appl. — 1963. — 62. — С. 371–377.
21. Morawetz C. S. Uniqueness for the analogue of the Neuman problem for mixed equations// Michigan Math. J. — 1957. — 1. — С. 5–14.

А. А. Гималтдинова

Уфимский государственный нефтяной технический университет

E-mail: alfiragimaltdinova@mail.ru



ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ЛИУВИЛЛЕВСКОГО ТИПА СПЕЦИАЛЬНОГО КЛАССА

© 2017 г. А. В. ЖИБЕР, А. М. ЮРЬЕВА

Аннотация. В работе получены дифференциальные подстановки для специального класса уравнений лиувиллевого типа, упрощающие эти уравнения. Приведены необходимые и достаточные условия существования y -интеграла второго порядка. Исследован главный случай необходимых и достаточных условий существования y -интеграла.

Ключевые слова: x -интеграл, y -интеграл, уравнение лиувиллевого типа, дифференциальная подстановка.

AMS Subject Classification: 35Q51, 37K60

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение	17
2. Дифференциальные подстановки	18
3. Условия существования y -интеграла второго порядка	20
4. Случай (3.14), (3.15)	22
Список литературы	25

1. ВВЕДЕНИЕ

Основополагающие идеи в изучении проблемы интегрирования уравнений в частных производных гиперболического типа восходят к классическим работам Лапласа, Гурса, Вессьо и др. При этом понимание интегрирования как получения явной формулы для общего решения почти сразу же было вытеснено другими менее обременительными определениями. Например, метод Дарбу интегрирования гиперболического уравнения состоит в отыскании интегралов по каждому характеристическому направлению и последующему сведению его к двум обыкновенным дифференциальным уравнениям.

Для полной классификации нелинейных гиперболических уравнений

$$u_{xy} = f(x, y, u, u_x, u_y)$$

необходимо провести классификацию уравнений специального класса, которые были исследованы в [1], а именно, следующих уравнений:

$$u_{xy} = \frac{p - \varphi_u}{\varphi_{u_y}} u_x + \frac{q}{\varphi_{u_y}} \sqrt{u_x}. \quad (1.1)$$

Здесь p, q — функции переменных x, y, u , а φ — переменных x, y, u, u_y .

Исследование выполнено при поддержке гранта Российского научного фонда (проект №15-11-20007).

Авторы выражают благодарность О. В. Капцову за представленные материалы, в частности уравнений Лэне. Последние не были получены при классификации уравнений лиувиллевого типа в работе [1].

Так, в 1926 г. Лэне построил два уравнения (см. [2–4])

$$u_{xy} = \left(\frac{u_y}{u-x} + \frac{u_y}{u-y} \right) u_x + \frac{u_y}{u-x} \sqrt{u_x}, \quad (1.2)$$

$$u_{xy} = 2 \left[(u+Y)^2 + u_y + (u+Y) \sqrt{(u+Y)^2 + u_y} \right] \times \left[\frac{\sqrt{u_x} + u_x}{u-x} - \frac{u_x}{\sqrt{(u+Y)^2 + u_y}} \right], \quad Y = Y(y), \quad (1.3)$$

обладающие y -интегралом второго порядка $\bar{w} = \bar{w}(x, y, u, u_y, u_{yy})$ и x -интегралом третьего порядка $W = W(x, y, u, u_x, u_{xx}, u_{xxx})$ ($D\bar{w} = 0$, $\bar{D}W = 0$). Здесь D (соответственно, $\bar{D}$) — оператор полного дифференцирования по x (соответственно, по y).

Отметим, что уравнения (1.2) и (1.3) содержатся в классе уравнений (1.1). Действительно, при

$$q = \frac{1}{u-x}, \quad p = \frac{1}{u-x} + \frac{1}{u-y}, \quad \varphi = \ln u_y$$

уравнение (1.2) совпадает с уравнением (1.1), а при

$$p = q = \frac{1}{u-x}, \quad \varphi = \ln \left[(u+Y) + \sqrt{u_y + (u+Y)^2} \right]$$

уравнение (1.1) переходит в (1.3).

В настоящей работе получены необходимые и достаточные условия, при которых уравнения (1.1) обладают y -интегралом второго порядка, и проведен их частичный анализ.

2. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ПОДСТАНОВКИ

Лемма 2.1. *Если уравнение (1.1) обладает y -интегралом второго порядка, то функция φ не зависит от переменной x .*

Доказательство. Перепишем уравнение (1.1) следующим образом:

$$\varphi_{u_y} u_{xy} + \varphi_u u_x + \varphi_x = \varphi_x + p u_x + q \sqrt{u_x}.$$

При $p = h_u$ последнее уравнение примет вид

$$D[\varphi - h] = \frac{\partial}{\partial x} [\varphi - h] + q \sqrt{u_x}.$$

Следовательно, уравнение (1.1) можно записать в виде

$$D(r) = r_x + q \sqrt{u_x}, \quad r = \varphi - h. \quad (2.1)$$

Пусть уравнение (1.1) (соответственно, (2.1)) имеет y -интеграл второго порядка

$$\bar{W} = \bar{W}(x, y, u, u_y, u_{yy}), \quad D\bar{W} = 0.$$

Тогда, как известно, его можно представить в виде

$$\bar{W} = s(x, y, u, \bar{u}_1) \bar{u}_2 + l(x, y, u, \bar{u}_1). \quad (2.2)$$

Здесь $\bar{u}_1 = \bar{D}(u)$, $\bar{u}_2 = \bar{D}^2(u)$.

Перейдем от переменных $x, y, u, \bar{u}_1, \bar{u}_2$ к переменным $x, y, u, r, \bar{r}_1$, где $\bar{r}_1 = \bar{D}(r)$. Ясно, что интеграл (2.2) представим в следующей форме:

$$\bar{W} = \alpha(x, y, u, r) \bar{r}_1 + \beta(x, y, u, r). \quad (2.3)$$

Таким образом, согласно (2.1) и (2.3), имеем

$$D\bar{W} = D(\alpha) \bar{r}_1 + \alpha \bar{D}(r_x + q \sqrt{u_x}) + D\beta = [D(\alpha) \varphi_{u_y} + \alpha \varphi_{xu_y}] \bar{u}_2 + \dots = 0. \quad (2.4)$$

Здесь многоточием обозначены слагаемые, не содержащие переменной $\bar{u}_2$. Теперь из соотношения (2.4) получаем, что

$$D(\alpha) \varphi_{u_y} + \alpha \varphi_{xu_y} = 0$$

или

$$\left[\alpha_x + \alpha_u u_x + \alpha_r (r_x + q \sqrt{u_x}) \right] \varphi_y + \alpha \varphi_{xu_y} = 0.$$

Таким образом, $\alpha_u = \alpha_r = 0$ и, следовательно,

$$\alpha = \alpha(x, y), \quad \alpha_x \varphi_{u_y} + \alpha \varphi_{xu_y} = 0.$$

Итак, функция $\alpha \varphi_{u_y}$ не зависит от переменной x . Положим

$$\alpha \varphi_{u_y} = \mu_{u_y}(y, u, u_y),$$

т.е.

$$\alpha \varphi = \mu(y, u, u_y) + \kappa(x, y, u). \quad (2.5)$$

Теперь исходное уравнение (1.1) перепишем, учитывая формулу (2.5):

$$u_{xy} = \frac{p - \frac{1}{\alpha} \mu_u - \frac{1}{\alpha} \kappa_u}{\frac{1}{\alpha} \mu_{u_y}} + \frac{q}{\frac{1}{\alpha} \mu_{u_y}} \sqrt{u_x}. \quad (2.6)$$

Полагая

$$\tilde{p} = \alpha p - \kappa_u, \quad \tilde{q} = \alpha q,$$

получаем, что уравнение (2.6) примет вид

$$u_{xy} = \frac{\tilde{p} - \mu_u}{\mu_{u_y}} u_x + \frac{\tilde{q}}{\mu_{u_y}} \sqrt{u_x},$$

т.е. приходим к исходному уравнению с функцией φ ($\varphi = \mu$), не зависящей от переменной x . Лемма доказана. $\square$

Так как $\varphi_x = 0$, то $\alpha = \alpha(y)$ (см. (2.5)). Можно считать, что $\alpha(y) = 1$, т.е. y -интеграл второго порядка (2.3) представим в виде

$$\bar{W} = \bar{r}_1 + \beta(x, y, u, r).$$

Далее, согласно (2.1), имеем

$$D\bar{W} = \bar{D} \left[r_x + q \sqrt{u_x} \right] + \beta_x + \beta_u u_x + \beta_r \left(r_x + q \sqrt{u_x} \right) = 0$$

или

$$-\bar{D}h + \bar{D}(q) \sqrt{u_x} + \frac{1}{2} \frac{q}{\sqrt{u_x}} \left[\frac{p - \varphi_u}{\varphi_{u_y}} u_x + \frac{q}{\varphi_{u_y}} \sqrt{u_x} \right] + \beta_x + \beta_u u_x + \beta_r \left(r_x + q \sqrt{u_x} \right) = 0.$$

Отсюда следует, что коэффициент при переменной u_x равен нулю, т.е. $\beta_u = 0$. Следовательно, y -интеграл представим в виде

$$\bar{W} = \bar{r}_1 + \beta(x, y, r)$$

и поэтому дифференциальная подстановка

$$r = \varphi(y, u, u_x) - h(x, y, u) \quad (2.7)$$

решения уравнения (1.1) переводит в решения уравнения

$$D\bar{D}r + D\beta = 0. \quad (2.8)$$

Приведем дифференциальные подстановки (2.7) и уравнения (2.8) для уравнений Лэне (см. [2–4]). Дифференциальная подстановка

$$r = \ln \frac{u_y}{(u-x)(u-y)}$$

связывает уравнение (1.2) с уравнением Мутара

$$r_{xy} - \frac{1}{2} \frac{d}{dx} \left[e^r (y-x) \right],$$

а подстановка

$$r = \ln \left[\frac{u + Y(y) + \sqrt{u_y + (u + Y(y))^2}}{u-x} \right]$$

переводит решения уравнения (1.3) в решения уравнения

$$r_{xy} - \frac{d}{dx} [e^r (x - Y(y))] = 0.$$

3. УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ y -ИНТЕГРАЛА ВТОРОГО ПОРЯДКА

Получим условия, при которых уравнения (1.1) обладают y -интегралом второго порядка. Для этого введем обозначение

$$v = \varphi(y, u, u_y). \quad (3.1)$$

Из равенства (3.1) следует, что

$$u_y = \Phi(y, u, v), \quad (3.2)$$

а уравнение (1.1) можно записать следующим образом:

$$Dv = pu_1 + q\sqrt{u_1}; \quad (3.3)$$

здесь $u_1 = D(u)$. При этом y -интеграл можно представить в виде

$$\bar{W} = \bar{W}(x, y, u, v, \bar{v}_1). \quad (3.4)$$

Далее, из (3.2) с учетом (3.3) получаем соотношение

$$u_{xy} = \Phi_u u_1 + \Phi_v (pu_1 + q\sqrt{u_1}). \quad (3.5)$$

Теперь согласно (3.2), (3.3), (3.4), (3.5) равенство $D\bar{W} = 0$ принимает вид

$$\begin{aligned} D\bar{W} = \bar{W}_x + \bar{W}_u u_1 + \bar{W}_v (pu_1 + q\sqrt{u_1}) + \\ + \bar{W}_{\bar{v}_1} \left\{ (p_y + p_u \Phi) u_1 + p \left[\Phi_u u_1 + \Phi_v (pu_1 + q\sqrt{u_1}) \right] + \right. \\ \left. + (q_y + q_u \Phi) \sqrt{u_1} + \frac{q}{2\sqrt{u_1}} \left[\Phi_u u_1 + \Phi_v (pu_1 + q\sqrt{u_1}) \right] \right\} = 0. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Равенство (3.6) эквивалентно системе уравнений

$$L_1 \bar{W} = 0, \quad L_2 \bar{W} = 0, \quad L_3 \bar{W} = 0, \quad (3.7)$$

где

$$\begin{aligned} L_1 &= \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2} q^2 \Phi_v \frac{\partial}{\partial \bar{v}_1}, \\ L_2 &= \frac{\partial}{\partial u} + p \frac{\partial}{\partial v} + \left[p_y + p_u \Phi + p \Phi_u + p^2 \Phi_v \right] \frac{\partial}{\partial \bar{v}_1}, \\ L_3 &= \frac{\partial}{\partial v} + \left[\frac{3}{2} p \Phi_v + \frac{q_y}{q} + \frac{q_u}{q} \Phi + \frac{1}{2} \Phi_u \right] \frac{\partial}{\partial \bar{v}_1}. \end{aligned}$$

Выпишем условия совместности системы (3.7). Для этого введем оператор $\tilde{L}_2 = L_2 - pL_3$. Тогда условия того, что существует y -интеграл второго порядка (3.4), записываются следующим образом:

$$[L_1, \tilde{L}_2] = 0, \quad [L_1, L_3] = 0, \quad [\tilde{L}_2, L_3] = 0. \quad (3.8)$$

Нетрудно проверить, что система (3.8) эквивалентна следующей:

$$\Phi_{vv} = 3 \frac{p_x}{q^2} \Phi_v + \frac{2}{q^2} (\ln q)''_{xu} \Phi + \frac{2}{q^2} (\ln q)''_{xy}, \quad (3.9)$$

$$\left(\frac{1}{2} p_u + p \frac{q_u}{q} \right) \Phi_v + p \Phi_{vu} + (\ln q)''_{yu} + \frac{q_u}{q} \Phi_u + (\ln q)''_{uu} \Phi + \frac{1}{2} \Phi_{uu} + \frac{1}{2} p^2 \Phi_{vv} = 0, \quad (3.10)$$

$$p_{xy} - \frac{p_x q_y}{q} + \left(p_{ux} - \frac{p_x q_u}{q} \right) \Phi + \frac{1}{2} p_x \Phi_u + \left(\frac{1}{2} p p_x - q q_u \right) \Phi_v - \frac{1}{2} q^2 \Phi_{uv} - \frac{1}{2} p q^2 \Phi_{vv} = 0. \quad (3.11)$$

Итак, если выполнены соотношения (3.9)–(3.11), то уравнение (1.1) имеет y -интеграл второго порядка.

Рассмотрим уравнение (3.9). Положим

$$A = 3 \frac{p_x}{q^2}, \quad B = \frac{2}{q^2} (\ln q)''_{xu}, \quad C = \frac{2}{q^2} (\ln q)''_{xy}. \quad (3.12)$$

Тогда уравнение (3.9) примет вид

$$\Phi_{vv} = A\Phi_v + B\Phi + C, \quad \Phi = \Phi(y, u, v). \quad (3.13)$$

Из (3.13) следует, что если $A_x = 0$, то $B_x = 0$ и $C_x = 0$.

Пусть

$$A_x = 0, \quad B_x = 0, \quad C_x = 0. \quad (3.14)$$

Тогда

$$\Phi = -\frac{C}{B} + D(y, u)e^{S_1 v} + R(y, u)e^{S_2 v}, \quad (3.15)$$

если $\Delta = A^2 + 4B \neq 0$, $B \neq 0$, $S_{1,2} = (A \pm \sqrt{A^2 + 4B})/2$;

$$\Phi = -\frac{C}{A}v + D(y, u)e^{Av} + R(y, u) \quad (3.16)$$

при $B = 0$, $\Delta \neq 0$;

$$\Phi = \frac{4C}{A^2} + D(y, u)e^{\frac{A}{2}v} + R(y, u)ve^{\frac{A}{2}v} \quad (3.17)$$

при $\Delta = 0$, $AB \neq 0$;

$$\Phi = \frac{C}{2}v^2 + D(y, u) + R(y, u)v \quad (3.18)$$

при $A = 0$, $B = 0$.

Пусть теперь $A_x \neq 0$. Тогда

$$\frac{B_x}{A_x} = \tilde{p}(y, u), \quad \frac{C_x}{A_x} = \tilde{q}(y, u) \quad (3.19)$$

и либо

$$B = 0, \quad \tilde{q} = \frac{C}{A}, \quad \Phi = -\frac{C}{A}v + r(y, u), \quad (3.20)$$

либо

$$\tilde{p} \neq 0, \quad \Phi = S(y, u)e^{-\tilde{p}v} - \frac{\tilde{q}}{\tilde{p}}, \quad \tilde{p}^2 = -\tilde{p}A + B, \quad \frac{\tilde{q}}{\tilde{p}}B = C. \quad (3.21)$$

Отметим, что уравнения Лэне (1.2), (1.3) относятся к случаю (3.15). Именно, для уравнения (1.2)

$$\Phi = e^v, \quad A = 3, \quad B = -2, \quad C = 0, \quad S_1 = 2, \quad S_2 = 1, \quad D = 0, \quad R = 1,$$

а для уравнения (1.3)

$$\begin{aligned} \Phi &= e^{2v} - 2(u + Y(y))e^v, \quad A = 3, \quad B = -2, \quad C = 0, \\ S_1 &= 2, \quad S_2 = 1, \quad D = 1, \quad R = -2(u + Y(y)). \end{aligned}$$

В заключение приведем преобразование, которое позволяет упростить исследование системы уравнений (3.9)–(3.11). Положим

$$\alpha(y)p + \alpha(y)\kappa_u(y, u) = \tilde{p}, \quad \alpha(y)q = \tilde{q}, \quad \alpha(y)\varphi + \kappa = \tilde{\varphi}. \quad (3.22)$$

Тогда исходное уравнение (1.1) примет вид

$$u_{xy} = \frac{\tilde{p} - \tilde{\varphi}_u}{\tilde{\varphi}_{u_y}}u_x + \frac{\tilde{q}}{\tilde{\varphi}_{u_y}}\sqrt{u_x}. \quad (3.23)$$

Итак, при замене (3.22) уравнение (1.1) преобразуется в уравнение (3.23). Положим $\tilde{v} = \tilde{\varphi}$. Тогда

$$u_y = \Phi(y, u, v) = \tilde{\Phi}(y, u, \tilde{v}). \quad (3.24)$$

Таким образом, используя преобразования (3.22) и (3.24), функцию $\Phi(y, u, v)$ можно заменить на $\tilde{\Phi}(y, u, \tilde{v})$.

4. СЛУЧАЙ (3.14), (3.15)

В этом разделе исследуется основной вариант системы (3.9)–(3.11). Решение уравнения (3.9) определяется по формулам (3.12), (3.14) и (3.15). Уравнения (3.10) и (3.11) в этом случае эквивалентны следующей системе уравнений:

$$\left[\frac{1}{2}p_u + p\frac{q_u}{q} \right] DS_1 + p(DS_1)'_u + \frac{q_u}{q}D'_u + \frac{1}{2}D''_{uu} + (\ln q)''_{uu}D + \frac{1}{2}p^2DS_1^2 = 0, \quad (4.1)$$

$$pDS_1S'_{1u} + \frac{q_u}{q}DS'_{1u} + \frac{1}{2}[(DS'_{1u})'_u + D'_uS'_{1u}] = 0, \quad (4.2)$$

$$\frac{1}{2}DS'^2_{1u} = 0, \quad (4.3)$$

$$\left[\frac{1}{2}p_u + p\frac{q_u}{q} \right] RS_2 + p(RS_2)'_u + \frac{q_u}{q}R'_u + \frac{1}{2}R''_{uu} + (\ln q)''_{uu}R + \frac{1}{2}p^2RS_2^2 = 0, \quad (4.4)$$

$$pRS_2S'_{2u} + \frac{q_u}{q}RS'_{2u} + \frac{1}{2}[(RS'_{2u})'_u + R'_uS'_{2u}] = 0, \quad (4.5)$$

$$\frac{1}{2}RS'^2_{2u} = 0, \quad (4.6)$$

$$(\ln q)''_{yu} - \frac{q_u}{q} \left(\frac{C}{B} \right)'_u - \frac{1}{2} \left(\frac{C}{B} \right)''_{uu} - (\ln q)''_{uu} \frac{C}{B} = 0, \quad (4.7)$$

$$p_{xy} - \frac{p_x q_y}{q} - \left(p_{ux} - \frac{p_x q_u}{q} \right) \frac{C}{B} - \frac{1}{2} p_x \left(\frac{C}{B} \right)'_u = 0, \quad (4.8)$$

$$\left[p_{ux} - \frac{p_x q_u}{q} \right] D + \frac{1}{2} p_x D'_u + \left(\frac{1}{2} p p_x - q q_u \right) DS_1 - \frac{1}{2} q^2 (DS_1)'_u - \frac{1}{2} p q^2 DS_1^2 = 0, \quad (4.9)$$

$$\frac{1}{2} p_x DS'_{1u} - \frac{1}{2} q^2 DS_1 S'_{1u} = 0, \quad (4.10)$$

$$\left(p_{ux} - \frac{p_x q_u}{q} \right) R + \frac{1}{2} p_x R'_u + \left(\frac{1}{2} p p_x - q q_u \right) RS_2 - \frac{1}{2} q^2 (RS_2)'_u - \frac{1}{2} p q^2 RS_2^2 = 0, \quad (4.11)$$

$$\frac{1}{2} p_x RS'_{2u} - \frac{1}{2} q^2 RS_2 S'_{2u} = 0. \quad (4.12)$$

Уравнение (4.3) эквивалентно уравнению $DS'_{1u} = 0$, а (4.6) — уравнению $RS'_{2u} = 0$. Далее, так как

$$D_u S'^2_{1u} + 2DS'_{1u} S''_{1uu} = 0,$$

то $D_u S'^2_{1u} = 0$. Аналогично получаем, что $RS'^2_{2u} = 0$. Таким образом, соотношения (4.2), (4.5), (4.10) и (4.12) выполнены.

Перепишем оставшиеся уравнения (4.1), (4.3), (4.4), (4.6)–(4.9), (4.11) в порядке, удобном для дальнейшего их исследования:

$$DS'_{1u} = 0, \quad (4.13)$$

$$RS'_{2u} = 0, \quad (4.14)$$

$$\left(\frac{1}{2}p_u + p\frac{q_u}{q} \right) DS_1 + pD'_u S_1 + \frac{q_u}{q}D'_u + (\ln q)''_{uu}D + \frac{1}{2}D''_{uu} + \frac{1}{2}p^2DS_1^2 = 0, \quad (4.15)$$

$$\left(p_{ux} - \frac{p_x q_u}{q} \right) D + \frac{1}{2} p_x D'_u + \left(\frac{1}{2} p p_x - q q_u \right) DS_1 - \frac{1}{2} q^2 D'_u S_1 - \frac{1}{2} p q^2 DS_1^2 = 0, \quad (4.16)$$

$$\left(\frac{1}{2}p_u + p\frac{q_u}{q} \right) RS_2 + pR'_u S_2 + \frac{q_u}{q}R'_u + (\ln q)''_{uu}R + \frac{1}{2}R''_{uu} + \frac{1}{2}p^2RS_2^2 = 0, \quad (4.17)$$

$$\left[p_{ux} - \frac{p_x q_u}{q} \right] R + \frac{1}{2} p_x R'_u + \left(\frac{1}{2} p p_x - q q_u \right) R S_2 - \frac{1}{2} q^2 R'_u S_2 - \frac{1}{2} p q^2 R S_2^2 = 0, \quad (4.18)$$

$$(\ln q)''_{yu} - \left[(\ln q)'_u \frac{C}{B} \right]'_u - \frac{1}{2} \left(\frac{C}{B} \right)''_{uu} = 0, \quad (4.19)$$

$$p_{xy} - \frac{p_x q_y}{q} - \left(p_{ux} - \frac{p_x q_u}{q} \right) \frac{C}{B} - \frac{1}{2} p_x \left(\frac{C}{B} \right)'_u = 0. \quad (4.20)$$

Отметим, что в рассматриваемом случае (3.14), (3.15) выполняется соотношение $S_1 S_2 \neq 0$.

Согласно соотношениям (4.13) и (4.14) возможны следующие варианты:

$$S'_{1u} = 0, \quad S'_{2u} = 0, \quad R^2 + D^2 \neq 0; \quad (4.21)$$

$$D = 0, \quad R \neq 0, \quad S'_{2u} = 0; \quad (4.22)$$

$$R = 0, \quad D \neq 0, \quad S'_{1u} = 0. \quad (4.23)$$

В этом разделе условие (4.21) рассматривается при $R \neq 0$, $D \neq 0$; в противном случае, последнее является частным случаем варианта (4.22) или (4.23). В этом случае $S_1 = S_1(y)$ и $S_2 = S_2(y)$.

Далее, используя замену (3.22), а именно, $S_1 v + \ln D = 2\tilde{v}$ вместо формулы (3.15), получаем

$$\Phi = -\frac{C}{B} + e^{2v} + R(y, u) e^{S_2 v}, \quad (4.24)$$

т.е. $S_1 = 2$, $D = 1$. При этом соотношения (3.12) примут вид:

$$A(y) = 3 \frac{p_x}{q}, \quad B(y) = \frac{2}{q^2} \frac{\partial^2 \ln q}{\partial x \partial u}, \quad C(y, u) = \frac{2}{q^2} \frac{\partial^2 \ln q}{\partial x \partial y}. \quad (4.25)$$

Пусть $A \neq 0$, т.е. $p_x \neq 0$. Нетрудно проверить, что уравнения (4.19), (4.20) согласно формулам (3.24) сводятся к уравнению

$$\frac{A'(y)}{A(y)} - \frac{1}{2} \frac{B'(y)}{B(y)} = 0. \quad (4.26)$$

Далее, поскольку $D \equiv 1$, $S_1 = 2$, уравнения (4.15) и (4.16), примут вид

$$p_u + 2p \frac{q_u}{q} + (\ln q)''_{uu} + 2p^2 = 0, \quad (4.27)$$

$$p_{ux} - \frac{p_x q_u}{q} + p p_x - 2q q_u - 2p q^2 = 0. \quad (4.28)$$

Уравнение (4.28) в силу первого соотношения (4.25) сводится к уравнению

$$\left[\frac{A}{3} - 2 \right] [q_u + p q] = 0. \quad (4.29)$$

При $A \neq 6$ имеем соотношение (см. (4.29))

$$p = -\frac{q_u}{q}. \quad (4.30)$$

При этом равенство (4.27) справедливо.

Итак, при $A \neq 6$ уравнения (4.15) и (4.16) сводятся к (4.30).

При $A = 6$ соотношение (4.28) выполнено в силу (4.29), и поэтому уравнения (4.15) и (4.16) сводятся к уравнению (4.27).

Осталось исследовать уравнения (4.25) и (4.18). Из первого уравнения (4.25) дифференцированием по переменной u получаем, что

$$p_{xu} = 2 \frac{p_x q_u}{q},$$

и тогда уравнение (4.18) можно записать в виде

$$\left[(p_x - q^2 S_2) R \right]'_u + p S_2 (p_x - q^2 S_2) R = 0. \quad (4.31)$$

Уравнение (4.17) представимо следующим образом:

$$\left[\left(\frac{1}{2} p S_2 + \frac{q_u}{q} \right) R + \frac{1}{2} R_u \right]' + S_2 p \left[\left(\frac{1}{2} p S_2 + \frac{q_u}{q} \right) R + \frac{1}{2} R_u \right] = 0. \quad (4.32)$$

Если $p_x = q^2 S_2$, то уравнение (4.31) выполнено, и нетрудно показать, что

$$A = 3, \quad S_2 = 1, \quad B = -2.$$

Тогда, учитывая равенство (4.30), заключаем, что уравнение (4.32) эквивалентно следующему:

$$\frac{q_u}{q} R + R_u = S(x, y) q. \quad (4.33)$$

Решение уравнения (4.33) дается формулой

$$R = -S(x, y) \frac{q_x}{q^2} + \frac{H(x, y)}{q}, \quad (4.34)$$

так как второе уравнение (4.25) в рассматриваемом случае имеет вид

$$q^2 = -\frac{\partial^2 \ln q}{\partial x \partial u}.$$

Отметим, что для уравнения Лэне (1.3) соотношение (4.34) выполняется при $S = 2Y(y) + 2x$, $H = -2$.

Пусть $p_x \neq q^2 S_2$. Если $A \neq 6$, то справедливо равенство (4.30), и тогда уравнения (4.31) и (4.32) эквивалентны соответственно уравнениям

$$(p_x - q^2 S_2) R = \lambda(x, y) q^{S_2}, \quad (4.35)$$

$$\left(\frac{1}{2} p S_2 + \frac{q_u}{q} \right) R + \frac{1}{2} R_u = \mu(x, y) q^{S_2}. \quad (4.36)$$

Учитывая равенство (4.30) и первое равенство (4.25), получаем, что решение уравнений (4.35), (4.36) выражается формулой

$$R = h(x, y) q^{S_2-2}. \quad (4.37)$$

Пусть теперь $A = 6$. Так как $S_1 = 2$, то $B = -8$ и $S_2 = 4$. Далее, полагая $p_x = 2q^2$ (см. (4.25)) в уравнении (4.31), получаем, что

$$R = \frac{h(x, y) e^{-4a}}{q^2}, \quad a_u = p. \quad (4.38)$$

При этом равенство (4.32) выполнено. Наконец, согласно (4.25) и (4.27), для определения функций p и q имеем равенства

$$p = -\frac{1}{2} (\ln q)'_u + \lambda(y, u), \quad (\ln q)''_{xu} = -4q^2, \quad (\ln q)''_{uu} - (\ln q)'_u{}^2 + 2\lambda_u + 4\lambda^2 = 0. \quad (4.39)$$

Нетрудно показать, что при $p_x = 0$ исследуемый случай (4.21) ($RD \neq 0$) не реализуется.

Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Теорема 4.1. Пусть $S'_{1u} = 0$, $S'_{2u} = 0$, $RD \neq 0$ и выполнены условия существования у-интеграла второго порядка (4.13)–(4.20). Тогда

$$S_1 = 2, \quad D = 1, \quad \frac{A'(y)}{A(y)} - \frac{1}{2} \frac{B'(y)}{B(y)} = 0.$$

Если $A \neq 6$, то $p = -q_u/q$, и либо

$$A = 3, \quad S_2 = 1, \quad B = -2, \quad R = -S(x, y) \frac{q_x}{q^2} + \frac{H(x, y)}{q},$$

либо

$$p_x \neq q^2 S_2, \quad R = h(x, y) q^{S_2-2}.$$

При $A = 6$ справедливы соотношения (4.39) и равенства

$$B = -8, \quad S_2 = 4, \quad R = \frac{h(x, y)}{q^2} e^{-4a}, \quad a = p_u.$$

Отметим, что теорема 4.1 и формулы (4.25) позволяют определить класс уравнений (1.1), обладающих y -интегралами второго порядка в рассматриваемом случае.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Жибер А. В., Соколов В. В. Точно интегрируемые гиперболические уравнения лиувиллевого типа // Усп. мат. наук. — 2001. — 56, № 1 (337). — С. 63–106
2. Капцов О. В. Методы интегрирования уравнений с частными производными. — М: Физматлит, 2009.
3. Капцов О. В. О проблеме классификации Гурса // Программирование. — 2012. — 2. — С. 68–71.
4. Laine M. E. Sur l'application de la methode de Darboux aux equations $s = f(x, y, z, p, q)$ // Compt. Rend. V. — 1926. — 182. — С. 1126–1127.

А. В. Жибер

Институт математики с вычислительным центром Уфимского научного центра РАН

E-mail: zhiber@mail.ru

А. М. Юрьева

Башкирский государственный университет, Уфа

E-mail: yurievaam@mail.ru



НАЧАЛЬНО-ГРАНИЧНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ НЕОДНОРОДНЫХ ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ УРАВНЕНИЙ СМЕШАННОГО ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

© 2017 г. К. Б. САБИТОВ, С. Н. СИДОРОВ

Аннотация. Рассмотрена начально-граничная задача для трех классов неоднородных вырождающихся уравнений смешанного параболо-гиперболического типа: уравнения смешанного типа с вырождающейся гиперболической частью, для уравнения смешанного типа с вырождающейся параболической частью и для уравнения смешанного типа со степенным вырождением. В каждом случае установлен критерий единственности решения задачи. Решение построено в виде сумм рядов по системе собственных функций соответствующей одномерной спектральной задачи. Показано, что единственность решения и сходимость ряда зависят от отношения сторон прямоугольника из гиперболической части смешанной области. При обосновании существования решения задачи возникают малые знаменатели затрудняющие сходимость построенных рядов; в связи с этим установлены оценки об отделенности от нуля малых знаменателей с соответствующей асимптотикой, которые позволили при некоторых условиях относительно данных задачи доказать принадлежность построенного решения классу регулярных решений.

Ключевые слова: уравнение смешанного параболо-гиперболического типа, начально-граничная задача, спектральный метод, единственность, существование, ряд, малые знаменатели, равномерная сходимость.

AMS Subject Classification: 35M10, 35Q60

СОДЕРЖАНИЕ

1. Постановка начально-граничной задачи	26
2. Исследование задачи для уравнения с вырождающейся гиперболической частью . . .	29
3. Исследование задачи для уравнения с вырождающейся параболической частью . . .	41
4. Исследование задачи для уравнения со степенным вырождением на линии изменения типа	53
Список литературы	59

1. ПОСТАНОВКА НАЧАЛЬНО-ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧИ

Рассмотрим уравнение смешанного типа

$$L_{n,m}u = F(x, t) \quad (1.1)$$

в прямоугольной области

$$D = \left\{ (x, t) \mid 0 < x < l, -\alpha < t < \beta \right\};$$

здесь

$$L_{n,m}u = \begin{cases} t^n u_{xx} - u_t - b^2 t^n u, & t > 0, \\ (-t)^m u_{xx} - u_{tt} - b^2 (-t)^m u, & t < 0, \end{cases} \quad F(x, t) = \begin{cases} F_1(x, t), & t > 0, \\ F_2(x, t), & t < 0, \end{cases}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект Поволжье № 14-01-97003.

$n \geq 0, m \geq 0, b \geq 0, l > 0, \alpha > 0, \beta > 0$ — заданные действительные числа, $F_i(x, t)$, $i = 1, 2$, — известные функции. Поставим следующую задачу.

Начально-граничная задача. Найти функцию $u(x, t)$, удовлетворяющую следующим условиям:

$$u(x, t) \in C(\overline{D}) \cap C^1(D) \cap C_x^1(\overline{D}) \cap C_x^2(D_+) \cap C^2(D_-); \quad (1.2)$$

$$L_{n,m}u(x, t) = F(x, t), \quad (x, t) \in D_- \cup D_+; \quad (1.3)$$

$$u(0, t) = h_1(t), \quad u(l, t) = h_2(t), \quad -\alpha \leq t \leq \beta; \quad (1.4)$$

$$u(x, -\alpha) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (1.5)$$

где $F_1(x, t)$, $F_2(x, t)$, $\varphi(x)$, $h_1(t)$ и $h_2(t)$ — заданные достаточно гладкие функции, при этом

$$h_1(-\alpha) = \varphi(0), \quad h_2(-\alpha) = \varphi(l), \\ D_- = D \cap \{t < 0\}, \quad D_+ = D \cap \{t > 0\}.$$

Эту задачу рассмотрим для уравнения (1.1) в случае, когда выполнены следующие условия:

- 1) $n = 0, m > 0$ (уравнение с вырождающейся гиперболической частью);
- 2) $n > 0, m = 0$ (уравнение с вырождающейся параболической частью);
- 3) $n > 0, m > 0$ (уравнение со степенным вырождением на линии изменения типа), так как в каждом случае поставленная задача имеет свои особенности.

К одним из первых исследований задач сопряжения, когда на одной части области задано параболическое уравнение, на другой — гиперболическое уравнение, можно отнести работу [4] И. М. Гельфанда, в которой рассматривается пример, связанный с движением газа в канале, окруженном пористой средой, причем в канале движение газа описывается волновым уравнением, а вне его — уравнением диффузии. Я. С. Уфлянд свел задачу о распространении электрических колебаний в составных линиях, когда на участке полубесконечной линии пренебрегают потерями, а остальная часть линии рассматривается как кабель без утечки, к решению уравнения смешанного параболо-гиперболического типа (см. [25, 26]). Эта задача для более общего уравнения рассмотрена в монографиях [5, 6] Т. Д. Джураева.

О. А. Ладыженская и Л. Ступялис [12, 24] в многомерном пространстве рассмотрели начально-граничные краевые задачи на сопряжения для параболо-гиперболических уравнений, которые возникают при изучении задачи о движении проводящей жидкости в электромагнитном поле.

В работах Н. Ю. Капустина [8, 9] методами функционального анализа доказана однозначная разрешимость аналога задачи Трикоми в пространстве L_2 для уравнения типа (1.1) при $b = 0$, $n = 0$, $0 < m \leq 1$ и $F(x, t) \equiv 0$ в смешанной области, параболическая часть которой совпадает с D_+ , а гиперболическая часть представляет собой характеристический треугольник с основанием на линии вырождения.

Е. И. Моисеев и Н. Ю. Капустин [10, 11] методом спектрального анализа изучили задачи для параболо-гиперболических уравнений и соответствующие одномерные спектральные задачи в смешанной области, параболическая часть которой совпадает с D_+ , а гиперболическая часть совпадает с характеристическим треугольником с основанием на линии изменения типа.

Отметим, что задача (1.2)–(1.5) для однородного уравнения (1.1), т.е. когда $F_i(x, t) \equiv 0$, $i = 1, 2$, была изучена в [15, 16, 18, 19] в прямоугольной области D при $h_i(t) \equiv 0$, $i = 1, 2$, $l = 1$, $b \geq 0$, $n \geq 0$ и $m \geq 0$. В [22] для однородного уравнения (1.1) при $n > 0$ и $m > 0$ изучена нелокальная задача, в которой вместо условия (1.5) задано нелокальное условие $u(x, -\alpha) - u(x, \beta) = \psi(x)$, $0 \leq x \leq 1$.

Необходимость исследования задачи (1.2)–(1.5) для неоднородного уравнения (1.1) возникает в связи с решением проблемы И. М. Гельфанда, т.е. построением в явном виде решения задачи, и изучением обратных задач для уравнения (1.1) по отысканию сомножителей правой части $F_i(x, t) = f_i(x)g_i(t)$, $i = 1, 2$, либо зависящих от x , либо зависящих от t и граничных функций $h_1(t)$, $h_2(t)$ и $\varphi(x)$. В [20, 21, 23] были изучены обратные задачи по отысканию функций $u(x, t)$ и $f_i(x)$, когда $g_i(t) \equiv 1$.

В данной работе для каждого указанного выше класса уравнений установлен критерий единственности задачи. Решение задачи построено в явной форме в виде суммы ряда по системе собственных функций соответствующей одномерной спектральной задачи. При обосновании сходимости построенных рядов возникают малые знаменатели, затрудняющие сходимость этих рядов. В связи с этим для доказательства равномерной сходимости рядов установлены оценки об отдаленности от нуля малых знаменателей с соответствующей асимптотикой, которые позволили доказать существование регулярного решения, т.е. в классе функций (1.2) и (1.3).

Не теряя общности, в постановке задачи (1.2)–(1.5) можно положить

$$h_1(t) = h_2(t) \equiv 0, \quad -\alpha \leq t \leq \beta, \quad \varphi(x) \equiv 0, \quad 0 \leq x \leq l.$$

Действительно, аналогично [18] вместо функции $u(x, t)$ введем новую функцию

$$v(x, t) = u(x, t) - z(x, t) - w(x, t), \quad (1.6)$$

где

$$z(x, t) = h_1(t) + [h_2(t) - h_1(t)] \frac{x}{l}, \quad (1.7)$$

$$w(x, t) = -\frac{t\varphi(x)}{\alpha} + \frac{t}{\alpha l} [\varphi(0)(l - x) + x\varphi(l)]. \quad (1.8)$$

Функция $v(x, t)$ удовлетворяет однородным граничным условиям:

$$v(0, t) = u(0, t) - z(0, t) - w(0, t) = h_1(t) - h_1(t) + \frac{t\varphi(0)}{\alpha} - \frac{t\varphi(0)}{\alpha} = 0, \quad (1.9)$$

$$v(l, t) = u(l, t) - z(l, t) - w(l, t) = h_2(t) - h_2(t) + \frac{t\varphi(l)}{\alpha} - \frac{t\varphi(l)}{\alpha} = 0, \quad (1.10)$$

$$\begin{aligned} v(x, -\alpha) &= u(x, -\alpha) - z(x, -\alpha) - w(x, -\alpha) = \\ &= \varphi(x) - h_1(-\alpha) - [h_2(-\alpha) - h_1(-\alpha)] \frac{x}{l} - \varphi(x) + \varphi(0) \frac{l - x}{l} + \varphi(l) \frac{x}{l} = 0, \end{aligned} \quad (1.11)$$

так как $h_1(-\alpha) = \varphi(0)$, $h_2(-\alpha) = \varphi(l)$.

Подставляя (1.6)–(1.8) в уравнение (1.1), имеем

$$L_{n,m}v(x, t) = G(x, t), \quad (1.12)$$

где

$$G(x, t) = \begin{cases} G_1(x, t) = F_1(x, t) - Lz - Lw, & t > 0, \\ G_2(x, t) = F_2(x, t) - Lz - Lw, & t < 0, \end{cases}$$

$$\begin{aligned} G_1(x, t) &= F_1(x, t) - \frac{x - l}{l} [h_1'(t) + b^2 t^n h_1(t)] + \frac{x}{l} [h_2'(t) + b^2 t^n h_2(t)] + \\ &+ \frac{1}{\alpha} [t^{n+1} \varphi''(x) - (1 + b^2 t^{n+1}) \varphi(x)] + \frac{(1 + b^2 t^{n+1})}{\alpha l} [\varphi(0)(l - x) + x\varphi(l)], \end{aligned} \quad (1.13)$$

$$\begin{aligned} G_2(x, t) &= F_2(x, t) - \frac{x - l}{l} [h_1''(t) + b^2 (-t)^m h_1(t)] + \frac{x}{l} [h_2''(t) + b^2 (-t)^m h_2(t)] - \\ &- \frac{(-t)^{m+1}}{\alpha} [\varphi''(x) - b^2 \varphi(x)] - \frac{b^2 (-t)^{m+1}}{\alpha l} [\varphi(0)(l - x) + x\varphi(l)]. \end{aligned} \quad (1.14)$$

Поэтому в дальнейшем вместо задачи (1.2)–(1.5) будем изучать задачу (1.9)–(1.12) в классе функций (1.2):

$$v(x, t) \in C(\overline{D}) \cap C^1(D) \cap C_x^1(\overline{D}) \cap C_x^2(D_+) \cap C^2(D_-). \quad (1.15)$$

2. ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ С ВЫРОЖДАЮЩЕЙСЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ ЧАСТЬЮ

В этом разделе рассмотрим задачу (1.2)–(1.5) для уравнения смешанного типа с вырождающейся гиперболической частью:

$$L_{0,m}u = F(x, t), \quad (2.1)$$

где

$$L_{0,m}u = \begin{cases} u_{xx} - u_t - b^2u, & t > 0, \\ (-t)^m u_{xx} - u_{tt} - b^2(-t)^m u, & t < 0. \end{cases}$$

2.1. Формальное построение решения задачи с нулевыми граничными условиями.

Решение задачи (1.9)–(1.12), (1.15) при $n = 0$ и $m > 0$, следуя [19, 22], будем искать в виде суммы ряда по собственным функциям соответствующей одномерной спектральной задачи:

$$v(x, t) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) \sin \mu_k x, \quad \mu_k = \frac{\pi k}{l}; \quad (2.2)$$

здесь $T_k(t)$ — пока не известные функции, которые формально определяются по формуле

$$T_k(t) = \sqrt{\frac{2}{l}} \int_0^l v(x, t) \sin \mu_k x \, dx \quad (2.3)$$

и в силу (1.11) удовлетворяют условию

$$T_k(-\alpha) = 0. \quad (2.4)$$

Следуя [18, с. 51], рассмотрим вспомогательные функции

$$T_{k,\varepsilon}(t) = \sqrt{\frac{2}{l}} \int_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} v(x, t) \sin \mu_k x \, dx, \quad (2.5)$$

где ε — достаточно малое положительное число. Дифференцируя равенство (2.5) по t при $t > 0$ один раз, а при $t < 0$ — два раза и учитывая уравнение (1.12), где правые части $G_1(x, t)$ и $G_2(x, t)$ будем предполагать непрерывными соответственно на замкнутых областях $\overline{D}_+$ и $\overline{D}_-$, получим

$$\begin{aligned} T'_{k,\varepsilon}(t) &= \sqrt{\frac{2}{l}} \int_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} v_t \sin \mu_k x \, dx = \sqrt{\frac{2}{l}} \int_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} [v_{xx} - b^2 v - G_1(x, t)] \sin \mu_k x \, dx = \\ &= -b^2 T_{k,\varepsilon}(t) - \sqrt{\frac{2}{l}} \int_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} G_1(x, t) \sin \mu_k x \, dx + \sqrt{\frac{2}{l}} \int_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} v_{xx} \sin \mu_k x \, dx, \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$\begin{aligned} T''_{k,\varepsilon}(t) &= \sqrt{\frac{2}{l}} \int_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} v_{tt} \sin \mu_k x \, dx = \sqrt{\frac{2}{l}} \int_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} [(-t)^m v_{xx} - b^2 (-t)^m v - G_2(x, t)] \sin \mu_k x \, dx = \\ &= -b^2 (-t)^m T_{k,\varepsilon}(t) - \sqrt{\frac{2}{l}} \int_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} G_2(x, t) \sin \mu_k x \, dx + (-t)^m \sqrt{\frac{2}{l}} \int_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} v_{xx} \sin \mu_k x \, dx. \end{aligned} \quad (2.7)$$

В интегралах, содержащих производные v_{xx} , проинтегрируем по частям два раза и затем перейдем к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$ с учетом граничных условий (1.9) и (1.10); получим дифференциальные уравнения относительно коэффициентов $T_k(t)$ ряда (2.2):

$$T'_k(t) + \lambda_k^2 T_k(t) = g_{1k}(t), \quad t > 0, \quad (2.8)$$

$$T''_k(t) + \lambda_k^2 (-t)^m T_k(t) = g_{2k}(t), \quad t < 0, \quad (2.9)$$

где $\lambda_k^2 = b^2 + \mu_k^2$,

$$g_{ik}(t) = -\sqrt{\frac{2}{l}} \int_0^l G_i(x, t) \sin \mu_k x \, dx, \quad i = 1, 2. \quad (2.10)$$

Общее решение уравнения (2.8) определяется по формуле

$$T_k(t) = a_k e^{-\lambda_k^2 t} + \int_0^t g_{1k}(s) e^{-\lambda_k^2(t-s)} \, ds, \quad t > 0, \quad (2.11)$$

где a_k — произвольная постоянная.

Рассмотрим уравнение (2.9). В [19, 22] построено общее решение соответствующего однородного уравнения:

$$\tilde{T}_k(t) = c_k \sqrt{-t} J_{1/(2q)}(p_k(-t)^q) + d_k \sqrt{-t} J_{-1/(2q)}(p_k(-t)^q), \quad (2.12)$$

где c_k и d_k — произвольные постоянные, $J_{1/(2q)}(z)$ и $J_{-1/(2q)}(z)$ — функции Бесселя первого рода, $p_k = \lambda_k/q$, $q = (m+2)/2$. Тогда на основании формулы (2.12) методом вариации найдем общее решение уравнения (2.9):

$$T_k(t) = \tilde{T}_k(t) + W_k(t), \quad (2.13)$$

где

$$W_k(t) = \frac{\pi}{2q \sin \frac{\pi}{2q}} \int_t^0 g_{2k}(s) \sqrt{s} W(s, t) \, ds, \quad (2.14)$$

$$W(s, t) = J_{1/(2q)}(p_k(-t)^q) J_{-1/(2q)}(p_k(-s)^q) - J_{-1/(2q)}(p_k(-t)^q) J_{1/(2q)}(p_k(-s)^q).$$

Справедливо следующее утверждение.

Лемма 2.1. *Функция $W_k(t)$ является решением неоднородного уравнения (2.9) и удовлетворяет нулевым начальным условиям:*

$$W_k(0) = W'_k(0) = 0.$$

Доказательство проводится непосредственной проверкой на основании (2.14).

Для функций (2.11) и (2.13) в силу (1.15) выполнены условия склеивания

$$T_k(0+0) = T_k(0-0), \quad T'_k(0+0) = T'_k(0-0), \quad k \in \mathbb{N}. \quad (2.15)$$

Из формулы (2.13) на основании асимптотического представления функции Бесселя

$$J_\nu(z) \sim \frac{1}{\Gamma(1+\nu)} \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \quad \text{при } z \rightarrow 0, \quad (2.16)$$

где $\Gamma(\cdot)$ — гамма-функция (см. [3, с. 102], [17, с. 307]), найдем

$$\lim_{t \rightarrow 0-0} T_k(t) = d_k \left(\frac{p_k}{2}\right)^{-1/(2q)} \bigg/ \left(-\frac{1}{2q}\right) \Gamma\left(-\frac{1}{2q}\right). \quad (2.17)$$

На основании известных формул дифференцирования цилиндрических функций (см. [3, с. 20], [17, с. 305])

$$\frac{d}{dz}(z^\nu J_\nu(z)) = z^\nu J_{\nu-1}(z), \quad \frac{d}{dz}(z^\nu J_{-\nu}(z)) = -z^\nu J_{1-\nu}(z)$$

предварительно вычислим

$$T'_k(t) = \lambda_k(-t)^{q-1/2} \left[-c_k J_{1/(2q)-1}(p_k(-t)^q) + d_k J_{1-1/(2q)}(p_k(-t)^q) \right] + W'_k(t). \quad (2.18)$$

В силу формул (2.18), (2.16) и леммы 2.1 имеем

$$\lim_{t \rightarrow 0-0} T'_k(t) = -\lambda_k c_k \left(\frac{p_k}{2}\right)^{1/(2q)-1} \frac{1}{\Gamma(1/(2q))} = \frac{-2q c_k}{\Gamma(1/(2q))} \left(\frac{p_k}{2}\right)^{1/(2q)}. \quad (2.19)$$

Поэтому функции (2.13) с учетом пределов (2.17), (2.19) удовлетворяют условиям (2.15) только тогда, когда

$$c_k = a_k \lambda_k^2 \gamma_{1/(2q)}(k) - g_{1k}(0+0) \gamma_{1/(2q)}(k), \quad d_k = a_k \gamma_{-1/(2q)}(k),$$

где

$$\gamma_{1/(2q)}(k) = \frac{1}{2q} \Gamma\left(\frac{1}{2q}\right) \left(\frac{2}{p_k}\right)^{1/(2q)}, \quad \gamma_{-1/(2q)}(k) = -\frac{1}{2q} \Gamma\left(-\frac{1}{2q}\right) \left(\frac{2}{p_k}\right)^{-1/(2q)}. \quad (2.20)$$

Тогда в силу последних равенств функции (2.11) и (2.13) принимают вид

$$T_k(t) = \begin{cases} a_k e^{-\lambda_k^2 t} + \int_0^t g_{1k}(s) e^{-\lambda_k^2(t-s)} ds, & t > 0, \\ a_k \left[\lambda_k^2 \gamma_{1/(2q)}(k) \sqrt{-t} J_{1/(2q)}(p_k(-t)^q) + \gamma_{-1/(2q)}(k) \sqrt{-t} J_{-1/(2q)}(p_k(-t)^q) \right] - \\ - g_{1k}(0+0) \gamma_{1/(2q)}(k) \sqrt{-t} J_{1/(2q)}(p_k(-t)^q) + W_k(t), & t < 0. \end{cases} \quad (2.21)$$

Для нахождения коэффициентов a_k функцию (2.21) удовлетворим граничному условию (2.4). В результате будем иметь

$$a_k \left[\lambda_k^2 \gamma_{1/(2q)}(k) \sqrt{\alpha} J_{1/(2q)}(p_k \alpha^q) + \gamma_{-1/(2q)}(k) \sqrt{\alpha} J_{-1/(2q)}(p_k \alpha^q) \right] = \\ = g_{1k}(0+0) \gamma_{1/(2q)}(k) \sqrt{\alpha} J_{1/(2q)}(p_k \alpha^q) - W_k(-\alpha). \quad (2.22)$$

Из равенства (2.22) при условии, что при всех $k \in \mathbb{N}$

$$\Delta_1(k) = \lambda_k^2 \gamma_{1/(2q)}(k) \sqrt{\alpha} J_{1/(2q)}(p_k \alpha^q) + \gamma_{-1/(2q)}(k) \sqrt{\alpha} J_{-1/(2q)}(p_k \alpha^q) \neq 0, \quad (2.23)$$

находим

$$a_k = \frac{g_{1k}(0+0) \gamma_{1/(2q)}(k) \sqrt{\alpha} J_{1/(2q)}(p_k \alpha^q) - W_k(-\alpha)}{\Delta_1(k)}. \quad (2.24)$$

Таким образом, нами формально решение задачи (1.9)–(1.12), (1.15) построено в виде суммы ряда (2.2), так как коэффициенты его при условии (2.23) однозначно построены и они определяются по формулам (2.21) и (2.24).

2.2. Единственность решения задачи. Пусть $v(x, t)$ — решение задачи (1.9)–(1.12), (1.15) и $G_1(x, t) = G_2(x, t) \equiv 0$, и выполнены условия (2.23) при всех $k \in \mathbb{N}$. Тогда в силу формул (2.14), (2.24) и (2.21) заключаем, что $a_k \equiv 0$ и $T_k(t) \equiv 0$ при любом $k \in \mathbb{N}$ и $t \in [-\alpha, \beta]$. Отсюда в силу формулы (2.3) при всех $t \in [-\alpha, \beta]$ и $k \in \mathbb{N}$ получим

$$\int_0^l v(x, t) \sin \mu_k x dx = 0. \quad (2.25)$$

Из равенств (2.25) в силу полноты системы синусов $\{\sqrt{2/l} \sin \mu_k x\}_{k \geq 1}$ в пространстве $L_2[0, l]$ следует, что $v(x, t) = 0$ почти всюду на $[0, l]$ при любом $t \in [-\alpha, \beta]$. Поскольку функция $v(x, t)$ непрерывна на $\overline{D}$, то $v(x, t) \equiv 0$ в $\overline{D}$.

Пусть при некоторых α, l, b, m и $k = s \in \mathbb{N}$ нарушено условие (2.23), т.е. $\Delta_1(s) = 0$. Тогда однородная задача (1.9)–(1.12), (1.15) имеет ненулевое решение

$$v_s(x, t) = \begin{cases} c_s e^{-\lambda_s^2 t} \sin \mu_s x, & t > 0, \\ c_s \left[\lambda_s^2 \sqrt{-t} \gamma_{1/(2q)}(s) J_{1/(2q)}(p_s(-t)^q) + \right. \\ \left. + \sqrt{-t} \gamma_{-1/(2q)}(s) J_{-1/(2q)}(p_s(-t)^q) \right] \sin \mu_s x, & t < 0, \end{cases} \quad (2.26)$$

где $c_s \neq 0$ — произвольная постоянная. В самом деле, построенная функция (2.26) в силу равенства $\Delta_1(s) = 0$ удовлетворяет условиям (1.9)–(1.12), (1.15). Принадлежность классу (1.15) следует из того, что на основании асимптотической формулы (2.16) имеем

$$\lim_{t \rightarrow 0+0} v_s(x, t) = \sin \pi s x = \lim_{t \rightarrow 0-0} v_s(x, t) = \\ = \sin \pi s x \lim_{t \rightarrow 0-0} \left[\lambda_s^2 \sqrt{-t} \gamma_{1/(2q)}(s) J_{1/(2q)}(p_s(-t)^q) + \sqrt{-t} \gamma_{-1/(2q)}(s) J_{-1/(2q)}(p_s(-t)^q) \right] =$$

$$= \sin \pi s x \lim_{t \rightarrow 0-0} (\lambda_s^2 t + 1) = \sin \pi s x;$$

$$\lim_{t \rightarrow 0+0} \frac{\partial u_s(x, t)}{\partial t} = -\lambda_s^2 \sin \pi s x = \lim_{t \rightarrow 0-0} \frac{\partial u_s(x, t)}{\partial t} = -\lambda_s^2 \sin \pi s x.$$

Условия (1.9)–(1.11) также выполняются, так как

$$v_s(x, -\alpha) = \left[\lambda_s^2 \sqrt{\alpha} \gamma_{1/(2q)}(s) J_{1/(2q)}(p_s \alpha^q) + \sqrt{\alpha} \gamma_{-1/(2q)}(s) J_{-1/(2q)}(p_s \alpha^q) \right] \sin \pi s x = \Delta_1(s) \sin \pi s x = 0.$$

Из построения функции (2.26) следует, что $v_s(x, t)$ на множестве $D_- \cup D_+$ является решением уравнения (1.1) при $G_i(x, t) \equiv 0$.

Естественно возникает вопрос о нулях выражения $\Delta_1(k)$. Справедлива следующая лемма.

Лемма 2.2. *При любых фиксированных $b \geq 0$ и $k \in \mathbb{N}$ уравнение $\Delta_1(k) = 0$ имеет счетное множество нулей относительно $\alpha_{ql} = \alpha_q/l = \alpha^q/(q l)$.*

Доказательство. Аналогично [22], существование нулей $\Delta_1(k)$ относительно α_{ql} следует из того, что функции $J_{1/(2q)}(\lambda_k l z)$ и $J_{-1/(2q)}(\lambda_k l z)$, $z = \alpha_{ql}$, являются линейно независимыми решениями уравнения Бесселя

$$y''(z) + \frac{1}{z} y'(z) + \left[(\lambda_k l)^2 - \left(\frac{1}{2qz} \right)^2 \right] y(z) = 0. \quad (2.27)$$

Отсюда следует, что функции $J_{1/(2q)}(\lambda_k l z)$ и $\Delta_1(k)$ также являются линейно независимыми решениями уравнения (2.27). Из общей теории линейных дифференциальных уравнений (см. [14, с. 317]) известно, что нули двух линейно независимых решений уравнения Бесселя строго чередуются, т.е. на интервале между любыми последовательными нулями любого из этих решений содержится ровно один нуль другого решения. Функция $J_{1/(2q)}(\lambda_k l z)$ имеет счетное множество положительных нулей. Тогда функции $\Delta_1(k)$ также имеет счетное множество положительных нулей относительно $\alpha_{ql} = z$. $\square$

Таким образом, нами установлен следующий критерий единственности решения задачи (1.9)–(1.12), (1.15).

Теорема 2.1. *Если существует решение задачи (1.9)–(1.12), (1.15), то оно единственно только тогда, когда выполнены условия (2.23) при всех $k \in \mathbb{N}$.*

2.3. Обоснование существования решения задачи с нулевыми граничными условиями. Формально решение задачи (1.9)–(1.12), (1.15) построено в виде суммы ряда (2.2), коэффициенты которого находятся по формулам (2.21) и (2.24). Поскольку $\Delta_1(k)$ входит в знаменатель коэффициентов ряда (2.2) и, как показано выше, уравнение $\Delta_1(k) = 0$ имеет относительно α_{ql} счетное множество нулей, то возникает проблема малых знаменателей (см. [1, 2, 13]). Поэтому для обоснования сходимости ряда (2.2) надо показать существование чисел α , l , m и b , при которых значение $\Delta_1(k)$ отделено от нуля.

Лемма 2.3. *Пусть выполнено одно из условий:*

- 1) $\alpha_{ql} = \alpha^q/(q l)$ — любое натуральное число;
- 2) $\alpha_{ql} = p/t$ — любое дробное число, где p и t — взаимно простые натуральные числа и $r/t \neq (3q+1)/(4q)$ при $r = \overline{1, t-1}$.

Тогда существуют такие положительные постоянные $k_0 \in \mathbb{N}$ и C_0 , что при любых $k > k_0$ и фиксированных $b \geq 0$ справедлива оценка

$$\left| k^{-1-\lambda} \Delta_1(k) \right| \geq C_0 > 0, \quad \lambda = \frac{1}{2} - \frac{1}{2q}. \quad (2.28)$$

Доказательство. Представим $k^{-1-\lambda} \Delta_1(k)$ в виде

$$k^{-1-\lambda} \Delta_1(k) = A_{1k} + A_{2k}, \quad (2.29)$$

где

$$A_{1k} = k^{-1-\lambda} \lambda_k^2 \sqrt{\alpha} \gamma_{1/(2q)}(k) J_{1/(2q)}(\lambda_k \alpha_q), \quad A_{2k} = k^{-1-\lambda} \sqrt{\alpha} \gamma_{-1/(2q)}(k) J_{-1/(2q)}(\lambda_k \alpha_q).$$

На основании асимптотической формулы

$$J_\nu(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos\left(z - \frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4}\right) + O(z^{-5/2}), \quad z \rightarrow \infty, \quad (2.30)$$

для функции Бесселя, справедливой при $k > k_1$, где k_1 — достаточно большое натуральное число (см. [3, с. 98]), имеем

$$A_{1k} = A_k \sin\left(\pi k \alpha_{ql} \tilde{\lambda}_k + \pi \frac{q-1}{4q}\right) + O(k^{-2}); \quad (2.31)$$

здесь

$$A_k = k^{-1-\lambda} \lambda_k^{3/2} \sqrt{\alpha} \gamma_{1/(2q)}(k) \sqrt{\frac{2}{\pi \alpha_q}}, \quad \tilde{\lambda}_k = \sqrt{1 + \left(\frac{bl}{\pi k}\right)^2}.$$

В случае $b > 0$ выражение $\tilde{\lambda}_k$, которое зависит от bl , при условии

$$\frac{bl}{\pi} < 1 \quad \text{или} \quad k > \frac{bl}{\pi} = k_2 \quad (2.32)$$

можно представить в виде

$$\tilde{\lambda}_k = \left[1 + \left(\frac{bl}{\pi k}\right)^2\right]^{1/2} = 1 + \theta_k; \quad (2.33)$$

при этом для θ_k справедлива оценка

$$\frac{3}{8} \left(\frac{bl}{\pi k}\right)^2 < \theta_k < \frac{1}{2} \left(\frac{bl}{\pi k}\right)^2 \quad (2.34)$$

(см. [18, с. 55]). Тогда соотношение (2.31) с учетом (2.33) принимает вид

$$A_{1k} = A_k \sin\left(\pi k \alpha_{ql} + \alpha_{ql} \tilde{\theta}_k + \pi \frac{q-1}{4q}\right) + O(k^{-2}) = A_{1k}^{(1)} + A_{1k}^{(2)}, \quad \tilde{\theta}_k = \pi k \theta_k. \quad (2.35)$$

Отметим, что последовательность A_k ограничена и отделена от нуля, так как

$$\lim_{k \rightarrow \infty} A_k = A = 2^{-\lambda} \pi^{1/2+\lambda} \alpha^{1/2-q/2} q^{-\lambda} l^{-1-\lambda} \Gamma\left(\frac{1}{2q}\right) > 0.$$

В дальнейшем рассмотрим $A_{1k}^{(1)}$. Пусть $\alpha_{ql} = p/t$ — дробное число. Разделим kp на t с остатком: $kp = st + r$, $0 \leq r < t$, $s, r \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$. Тогда выражение $A_{1k}^{(1)}$ оценим следующим образом:

$$|A_{1k}^{(1)}| = A_k \left| \sin\left(\pi \frac{r}{t} + \frac{p}{t} \tilde{\theta}_k + \pi \frac{q-1}{4q}\right) \right| > \frac{A}{2} \left| \sin\left(\pi \frac{r}{t} + \pi \frac{q-1}{4q}\right) \right| = C_1 \geq 0,$$

так как в силу оценки (2.34) существует конечный предел

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |A_{1k}^{(1)}| = C_1.$$

Здесь и далее C_i — положительные постоянные, зависящие, вообще говоря, от α , β , b и m . Теперь потребуем, чтобы постоянная C_1 была больше нуля, а это возможно только тогда, когда

$$\pi \frac{r}{t} + \pi \frac{q-1}{4q} \neq \pi d \quad \text{или} \quad \frac{r}{t} + \frac{q-1}{4q} \neq d, \quad d \in \mathbb{N},$$

или

$$\frac{1}{q} \neq 1 - 4d + 4\frac{r}{t}. \quad (2.36)$$

Если число q иррационально, то неравенство (2.36) при всех r , t и d имеет место. Рассмотрим случай, когда q — рациональное число. Пусть $t = 1$, т.е. в этом случае $\alpha_{ql} = p$ — натуральное число, поэтому $r = 0$, и тогда неравенство (2.36) выполняется при всех $q > 1$ и $d \in \mathbb{N}$. Если $t \geq 2$, то в силу оценки

$$0 < \frac{r}{t} + \frac{q-1}{4q} < 1 + \frac{1}{4}$$

неравенство (2.36) имеет место при всех $d \geq 2$. Если $d = 1$, то можно подобрать такое число r/t , что нарушается условие (2.36), т.е. выполняется равенство

$$\frac{r}{t} = \frac{3q+1}{4q}. \quad (2.37)$$

Действительно, можно подобрать число r/t , такое, что выполняется равенство (2.37), когда q — рациональное число. Если q — натуральное число, то положим $t = 4q$, а в качестве r примем число $r = 3q + 1$, так как $r = 3q + 1 < t = 4q$.

Пусть $q = q_1/q_2$, $q_1, q_2 \in \mathbb{N}$, $(q_1, q_2) = 1$. при этом $q_1 > q_2$. В этом случае уравнение (2.37) принимает вид

$$\frac{r}{t} = \frac{3q_1 + q_2}{4q_1}. \quad (2.38)$$

В качестве t возьмем $4q_1$, а за $r = 3q_1 + q_2$. Тогда соотношение (2.38) становится верным равенством и

$$r = 3q_1 + q_2 < t = 4q_1 \iff q_2 < q_1.$$

По условию этот случай исключается.

Итак, при указанных α_{ql} существуют такие $k_2 \in \mathbb{N}$ и $C_1 > 0$, что при всех $k > k_3$

$$\left| A_{1k}^{(1)} \right| > \frac{1}{2} C_1 = C_2. \quad (2.39)$$

Поскольку выражения $A_{1k}^{(2)}$ и A_{2k} являются бесконечно малыми при $k \rightarrow \infty$, то существует такое $k_4 \in \mathbb{N}$, что при всех $k > k_3$ справедливы неравенства

$$\left| A_{1k}^{(2)} \right| < \frac{C_2}{3}, \quad \left| A_{2k} \right| < \frac{C_2}{3}. \quad (2.40)$$

Тогда из представления (2.29) на основании оценок (2.39) и (2.40) получим

$$\left| k^{-1-\lambda} \Delta_1(k) \right| \geq \left| A_{1k}^{(1)} \right| - \left| A_{1k}^{(2)} \right| - \left| A_{2k} \right| > \frac{C_2}{3} = C_0 > 0$$

при $k > k_0 = \max\{k_1, k_2, k_3, k_4\}$.

Пусть $b = 0$. Тогда $\tilde{\lambda}_k \equiv 1$ и $\theta_k \equiv 0$, и рассуждая аналогично получим оценку (2.28). $\square$

Замечание 2.1. Отметим, что условие

$$\frac{r}{t} \neq \frac{3q+1}{4q} \quad \text{при некотором } r = \overline{1, t-1}, \quad t \in \mathbb{N}, \quad (2.41)$$

в лемме 2.3 существенно, так как в противном случае оценка (2.28) не имеет места.

Действительно, пусть нарушается условие (2.41). Тогда последовательность $A_{1k}^{(1)}$ является бесконечно малой:

$$\left| A_{1k}^{(1)} \right| = A_k \left| \sin \theta_k \frac{p}{t} \right| \leq C_3 |\theta_k| \leq \frac{C_3}{k}.$$

С другой стороны, при больших k в силу неравенства

$$|\sin x| \geq \frac{2}{\pi} |x|, \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2},$$

получим

$$\left| A_{1k}^{(1)} \right| = A_k \left| \sin \theta_k \frac{p}{t} \right| \geq C_4 |\theta_k| \geq \frac{C_4}{k}.$$

В этом случае вместо оценки (2.28) можно получить другую, более слабую оценку.

Лемма 2.4. Пусть $\alpha_{ql} = p/t$ — дробное число, где p и t — взаимно простые натуральные числа, и $r/t = (3q+1)/(4q)$ при некотором $r = \overline{1, t-1}$. Тогда существуют такие положительные постоянные $k_0 \in \mathbb{N}$ и C_0 , что при любых $k > k_0$ и фиксированных $b \geq 0$ справедлива оценка

$$\left| k^{-\lambda} \Delta_1(k) \right| \geq C_0 > 0, \quad \lambda = 1/2 - 1/(2q). \quad (2.42)$$

Покажем, что сумма $v(x, t)$ ряда (2.2) удовлетворяет условиям (1.12) и (1.15).

Лемма 2.5. При любых $t \in [-\alpha, 0)$ и больших k справедливы оценки

$$|W_k(t)| \leq C_5 k^{-1+\lambda} \|g_{2k}\|_C, \quad |W'_k(t)| \leq C_6 k^\lambda \|g_{2k}\|_C, \quad |W''_k(t)| \leq C_7 k^{1+\lambda} \|g_{2k}\|_C, \quad (2.43)$$

где

$$\|g_{2k}\|_C = \max_{-\alpha \leq t \leq 0} |g_{2k}(t)|.$$

Доказательство. Рассмотрим равенство (2.14), которое перепишем в следующем виде:

$$\begin{aligned} W_k(t) = & \frac{\pi}{2q \sin \frac{\pi}{2q}} \sqrt{-t} J_{1/(2q)}(p_k(-t)^q) \int_t^0 g_{2k}(s) \sqrt{-s} J_{-1/(2q)}(p_k(-s)^q) ds - \\ & - \frac{\pi}{2q \sin \frac{\pi}{2q}} \sqrt{-t} J_{-1/(2q)}(p_k(-t)^q) \int_t^0 g_{2k}(s) \sqrt{-s} J_{1/(2q)}(p_k(-s)^q) ds. \end{aligned} \quad (2.44)$$

Выполнив в этих интегралах замену $(-s)^q = x$, имеем

$$J_{\pm} = \int_t^0 g_{2k}(s) \sqrt{-s} J_{\pm 1/(2q)}(p_k(-s)^q) ds = -\frac{1}{q} \int_0^{(-t)^q} g_{2k}(-x^{1/q}) x^{3/(2q)-1} J_{\pm 1/(2q)}(p_k x) dx.$$

Заменив в интеграле J_+ функцию $J_{1/(2q)}(p_k x)$ ее интегральным представлением (см. [3, с. 93])

$$J_{\nu}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi} \Gamma(1/2 - \nu)} \left(\frac{2}{z}\right)^{\nu} \int_1^{\infty} (t^2 - 1)^{-\nu-1/2} \sin zt dt, \quad -\frac{1}{2} < \nu < \frac{1}{2}, \quad (2.45)$$

получим

$$J_+ = \frac{2}{q \sqrt{\pi} \Gamma(1/2 - 1/(2q))} \left(\frac{2}{p_k}\right)^{1/(2q)} \int_0^{(-t)^q} g_{2k}(-x^{1/q}) x^{1/q-1} \int_1^{\infty} (t^2 - 1)^{-1/(2q)-1/2} \sin p_k x t dt dx.$$

Отсюда получим оценку

$$|J_+| \leq \tilde{C}_1 \frac{\|g_{2k}\|_C}{p_k^{1/(2q)}}, \quad (2.46)$$

где $\tilde{C}_i$ — положительные постоянные.

Аналогично, заменив в интеграле J_- функцию $J_{-1/(2q)}(p_k x)$ ее интегральным представлением

$$J_{\nu}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi} \Gamma(1/2 + \nu)} \left(\frac{z}{2}\right)^{\nu} \int_0^1 (1 - t^2)^{\nu-1/2} \cos zt dt, \quad \nu > -\frac{1}{2}, \quad (2.47)$$

получим

$$J_- = \frac{2}{q \sqrt{\pi} \Gamma(1/2 - 1/(2q))} \left(\frac{p_k}{2}\right)^{-1/(2q)} \int_0^{(-t)^q} g_{2k}(-x^{1/q}) x^{1/q-1} \int_0^1 (1 - t^2)^{-1/(2q)-1/2} \cos p_k x t dt dx.$$

Отсюда находим

$$|J_-| \leq \tilde{C}_2 \frac{\|g_{2k}\|_C}{p_k^{1/(2q)}}. \quad (2.48)$$

Тогда при достаточно больших k на основании асимптотической формулы (2.30) и оценок (2.46) и (2.48) из соотношения (2.44) имеем

$$|W_k(t)| \leq C_9 k^{-1/2-1/(2q)} \|g_{2k}\|_C = C_9 k^{-1+\lambda} \|g_{2k}\|_C. \quad (2.49)$$

Тогда из (2.49) следует справедливость первой оценки (2.43).

Из (2.44) найдем

$$\begin{aligned}
W'_k(t) = & -p_k q \frac{\pi}{2q \sin \frac{\pi}{2q}} (-t)^{q-1/2} J_{1/(2q)-1}(p_k(-t)^q) \int_t^0 g_{2k}(s) J_{-1/(2q)}(p_k(-s)^q) \sqrt{-s} ds - \\
& - p_k q \frac{\pi}{2q \sin \frac{\pi}{2q}} (-t)^{q-1/2} J_{1-1/(2q)}(p_k(-t)^q) \int_t^0 g_{2k}(s) J_{1/(2q)}(p_k(-s)^q) \sqrt{-s} ds. \quad (2.50)
\end{aligned}$$

Из равенства (2.50) на основании асимптотической формулы (2.30) и оценок (2.46) и (2.48) получим неравенство

$$|W'_k(t)| \leq \tilde{C}_3 k^\lambda \|g_{2k}\|_C,$$

из которого следует вторая оценка из (2.43).

Нетрудно заметить, что при любом $t \in [-\alpha, 0]$

$$W''_k(t) = -(p_k q)^2 (-t)^{2q-2} W_k(t) + g_{2k}(t).$$

Отсюда непосредственно вытекает третья оценка из (2.43). $\square$

Лемма 2.6. *Если выполнены условия леммы 2.3, то при всех $k > k_0$ справедливы следующие оценки:*

$$\begin{aligned}
|T_k(t)| & \leq M_1 \left[k^{-2} \|g_{1k}\|_C + k^{-2} \|g_{2k}\|_C \right], & t \in [0, \beta], \\
|T'_k(t)| & \leq M_2 \left[\|g_{1k}\|_C + \|g_{2k}\|_C \right], & t \in [0, \beta], \\
|T_k(t)| & \leq M_3 \left[k^{-1/q} \|g_{1k}\|_C + k^{-1/q} \|g_{2k}\|_C \right], & t \in [-\alpha, 0], \\
|T'_k(t)| & \leq M_4 \left[k^\lambda \|g_{1k}\|_C + k^\lambda \|g_{2k}\|_C \right], & t \in [-\alpha, 0], \\
|T''_k(t)| & \leq M_5 \left[k^{2-1/q} \|g_{1k}\|_C + k^{2-1/q} \|g_{2k}\|_C \right], & t \in [-\alpha, 0],
\end{aligned}$$

где

$$\|g_{1k}\|_C = \max_{0 \leq t \leq \beta} |g_{1k}(t)|$$

и M_i — положительные постоянные, зависящие от α , β , b и m .

Доказательство. При больших k имеем:

$$\gamma_{1/(2q)}(k) = O(k^{-1/(2q)}), \quad \gamma_{-1/(2q)}(k) = O(k^{1/(2q)}), \quad p_k = O(k).$$

Предварительно с учетом леммы 2.3, асимптотической оценки (2.30) и леммы 2.5 оценим выражение (2.24):

$$\begin{aligned}
|a_k| & \leq \frac{|g_{1k}(0+0)| \cdot |\gamma_{1/(2q)}(k)| \sqrt{\alpha} |J_{1/(2q)}(p_k \alpha^q)| + |W_k(-\alpha)|}{|\Delta_1(k)|} \leq \\
& \leq \frac{\tilde{C}_4 |g_{1k}(t)| k^{-1+\lambda} + \tilde{C}_5 k^{-1+\lambda} \|g_{2k}\|_C}{k^{1+\lambda} C_0} \leq \tilde{C}_6 k^{-2} \|g_{1k}\|_C + \tilde{C}_7 k^{-2} \|g_{2k}\|_C. \quad (2.51)
\end{aligned}$$

Оценим выражение $T_k(t)$ из (2.21) при $t \in [0, \beta]$. В силу (2.51) получаем

$$\begin{aligned}
|T_k(t)| & \leq |a_k| + \left| \int_0^t g_{1k}(s) e^{-\lambda_k^2(t-s)} ds \right| \leq \\
& \leq \tilde{C}_8 k^{-2} \|g_{1k}\|_C + \tilde{C}_9 k^{-2} \|g_{2k}\|_C + \frac{1}{\lambda_k^2} \max_{0 \leq t \leq \beta} |g_{1k}(t)| \leq M_1 \left[k^{-2} \|g_{1k}\|_C + k^{-2} \|g_{2k}\|_C \right].
\end{aligned}$$

Аналогично получим оценку для $T'_k(t)$, когда $t \in [0, \beta]$:

$$|T'_k(t)| = \left| -\lambda_k^2 a_k e^{-\lambda_k^2 t} + g_{1k}(t) \right| \leq$$

$$\leq \tilde{C}_{10}\|g_{1k}\|_C + \tilde{C}_{11}\|g_{2k}\|_C + \max_{0 \leq t \leq \beta} |g_{1k}(t)| \leq M_2 \left[\|g_{1k}\|_C + \|g_{2k}\|_C \right].$$

Теперь на основании формулы (2.21) оценим выражение $T_k(t)$ при $t \leq 0$. Используя интегральные представления (2.45), (2.47) и лемму 2.5, получаем

$$\begin{aligned} |T_k(t)| &\leq |a_k| \lambda_k^2 |\gamma_{1/(2q)}(k) \sqrt{-t} J_{1/(2q)}(p_k(-t)^q)| + |a_k| |\gamma_{-1/(2q)}(k) \sqrt{-t} J_{-1/(2q)}(p_k(-t)^q)| + \\ &\quad + \max_{0 \leq t \leq \beta} |g_{1k}(t)| |\gamma_{1/(2q)}(k) \sqrt{-t} J_{-1/(2q)}(p_k(-t)^q)| + |W_k(t)| \leq \\ &\leq \tilde{C}_{12} k^{-1/q} \|g_{1k}\|_C + \tilde{C}_{13} k^{-1/q} \|g_{2k}\|_C + \tilde{C}_{14} k^{-2} \|g_{1k}\|_C + \tilde{C}_{15} k^{-2} \|g_{2k}\|_C + \\ &\quad + \tilde{C}_{16} k^{-1/q} \|g_{1k}\|_C + \tilde{C}_{17} k^{-1+\lambda} \|g_{2k}\|_C \leq M_3 \left[k^{-1/q} \|g_{1k}\|_C + k^{-1/q} \|g_{2k}\|_C \right]. \end{aligned} \quad (2.52)$$

Вычислим $T'_k(t)$ из (2.21) при $t < 0$:

$$\begin{aligned} T'_k(t) &= a_k \lambda_k^3 \gamma_{1/(2q)}(k) (-t)^{q-1/2} J_{1/(2q)-1}(p_k(-t)^q) \\ &\quad + a_k \lambda_k \gamma_{-1/(2q)}(k) (-t)^{q-1/2} J_{-1/(2q)}(p_k(-t)^q) + \\ &\quad + g_{1k}(0+0) \gamma_{1/(2q)}(k) (-t)^{q-1/2} J_{1/(2q)-1}(p_k(-t)^q) - W'_k(t). \end{aligned}$$

Тогда с учетом оценки (2.51), асимптотических представлений (2.16), (2.30) и леммы 2.5 имеем

$$\begin{aligned} |T'_k(t)| &\leq \tilde{C}_{18} k^{-2} \|g_{1k}\|_C k^3 k^{-1+\lambda} + \tilde{C}_{19} k^{-2} \|g_{2k}\|_C k^3 k^{-1+\lambda} + \\ &\quad + \tilde{C}_{20} k^{-2} \|g_{1k}\|_C k^2 + \tilde{C}_{21} k^{-2} \|g_{2k}\|_C k^2 + \tilde{C}_{22} \|g_{1k}\|_C k^{-1+\lambda} + \tilde{C}_{23} k^\lambda \|g_{2k}\|_C \leq \\ &\leq M_4 \left[k^\lambda \|g_{1k}\|_C + k^\lambda \|g_{2k}\|_C \right]. \end{aligned}$$

Поскольку

$$T''_k(t) = -\lambda_k^2 (-t)^m T_k(t) + g_{2k}(t),$$

то на основании оценки (2.52) получим

$$|T''_k(t)| \leq M_5 \left[k^{2-1/q} \|g_{1k}\|_C + k^{2-1/q} \|g_{2k}\|_C \right].$$

Лемма доказана. $\square$

Лемма 2.7. Если выполнены условия леммы 2.4, то при всех $k > k_0$ справедливы следующие оценки:

$$\begin{aligned} |T_k(t)| &\leq M_6 \left[k^{-1} \|g_{1k}\|_C + k^{-1} \|g_{2k}\|_C \right], & t \in [0, \beta], \\ |T'_k(t)| &\leq M_7 \left[k \|g_{1k}\|_C + k \|g_{2k}\|_C \right], & t \in [0, \beta], \\ |T_k(t)| &\leq M_8 \left[k^{1-1/q} \|g_{1k}\|_C + k^{1-1/q} \|g_{2k}\|_C \right], & t \in [-\alpha, 0], \\ |T'_k(t)| &\leq M_9 \left[k^{1+\lambda} \|g_{1k}\|_C + k^{1+\lambda} \|g_{2k}\|_C \right], & t \in [-\alpha, 0], \\ |T''_k(t)| &\leq M_{10} \left[k^{3-1/q} \|g_{1k}\|_C + k^{3-1/q} \|g_{2k}\|_C \right], & t \in [-\alpha, 0]. \end{aligned}$$

Доказательство аналогично доказательству леммы 2.6.

Пусть выполнены условия леммы 2.3. Формально из (2.2) почленным дифференцированием составим ряды:

$$\begin{aligned} v_t(x, t) &= \sqrt{\frac{2}{l}} \sum_{k=1}^{+\infty} T'_k(t) \sin \mu_k x = \\ &= -\sqrt{\frac{2}{l}} \sum_{k=1}^{+\infty} (\lambda_k^2 T_k(t) - g_{1k}(t)) \sin \mu_k x = \end{aligned}$$

$$= -\sqrt{\frac{2}{l}} \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k^2 T_k(t) \sin \mu_k x + G_1(x, t), \quad t > 0, \quad (2.53)$$

$$v_{xx}(x, t) = -\sqrt{\frac{2}{l}} \sum_{k=1}^{+\infty} \mu_k^2 T_k(t) \sin \mu_k x, \quad (2.54)$$

$$v_t(x, t) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sum_{k=1}^{+\infty} T'_k(t) \sin \mu_k x, \quad t < 0, \quad (2.55)$$

$$\begin{aligned} v_{tt}(x, t) &= \sqrt{\frac{2}{l}} \sum_{k=1}^{+\infty} T''_k(t) \sin \mu_k x = \\ &= -\sqrt{\frac{2}{l}} \sum_{k=1}^{+\infty} (\lambda_k^2 T_k(t) - g_{2k}(t)) \sin \mu_k x = \\ &= -\sqrt{\frac{2}{l}} \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k^2 T_k(t) \sin \mu_k x + G_2(x, t), \quad t > 0. \end{aligned} \quad (2.56)$$

Ряды (2.2) и (2.53)–(2.56) в силу леммы 2.6 мажорируются рядом

$$M_{11} \sum_{k=k_0+1}^{+\infty} k^{2-1/q} \|g_{1k}\|_C + k^{2-1/q} \|g_{2k}\|_C. \quad (2.57)$$

Лемма 2.8. Пусть выполнены следующие условия:

$$\begin{aligned} G_1(x, t) &\in C(\overline{D}_+) \cap C_{x,t}^{2+\nu,0}(\overline{D}_+), \quad 1 - \frac{1}{q} < \nu < 1, \\ G_1(0, t) &= G_1(l, t) = 0, \quad G''_{1xx}(0, t) = G''_{1xx}(l, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq \beta; \\ G_2(x, t) &\in C(\overline{D}_-) \cap C_{x,t}^{2+\nu,0}(\overline{D}_-), \quad \frac{1}{2q} < \mu < 1, \\ G_2(0, t) &= G_2(l, t) = 0, \quad G''_{2xx}(0, t) = G''_{2xx}(l, t) = 0, \quad -\alpha \leq t \leq 0. \end{aligned}$$

Тогда справедливы оценки

$$|g_{1k}(t)| < \frac{M_{12}}{k^{2+\nu}}, \quad |g_{2k}(t)| < \frac{M_{13}}{k^{2+\nu}}.$$

Доказательство. Интегрируя дважды по частям при $i = 1$ и $i = 2$ соответственно в интеграле формулы (2.10), с учетом условий леммы, получим представления

$$g_{ik}(t) = \sqrt{\frac{2}{l}} \frac{1}{\mu_k^2} \int_0^l G''_{ixx}(x, t) \sin \mu_k x \, dx, \quad i = 1, 2.$$

Отсюда на основании оценки скорости убывания коэффициентов ряда Фурье функции, удовлетворяющей условию Гельдера с показателем α (см. [7, с. 81]), получим требуемые оценки. $\square$

Тогда в силу леммы 2.8 ряд (2.57) оценивается рядом

$$M_{14} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^{\nu+1/q}}. \quad (2.58)$$

Из сходимости ряда (2.58) в силу признака Вейерштрасса следует, что ряды (2.2), (2.53) и (2.55) сходятся равномерно на $\overline{D}$, а ряды (2.54) и (2.56) — на соответствующих замкнутых областях $\overline{D}_+$ и $\overline{D}_-$. Поэтому функция $v(x, t)$, определенная рядом (2.2), удовлетворяет условиям задачи (1.9)–(1.12), (1.15).

Если для чисел α_{ql} из леммы 2.3 при некоторых

$$k = s = k_1, k_2, \dots, k_m, \quad 1 \leq k_1 < k_2 < \dots < k_m \leq k_0,$$

где k_i , $i = \overline{1, m}$, и m — заданные натуральные числа, $\Delta_1(s) = 0$, то для разрешимости задачи (1.9)–(1.12), (1.15) необходимо и достаточно, чтобы

$$g_{1s}(0+0)\gamma_{1/(2q)}(s)\sqrt{\alpha}J_{1/(2q)}(p_s\alpha^q) + W_s(-\alpha) = 0, \quad s = k_1, k_2, \dots, k_m. \quad (2.59)$$

В этом случае решение задачи (1.9)–(1.12), (1.15) определяется в виде суммы ряда

$$v(x, t) = \sqrt{\frac{2}{l}} \left(\sum_{k=1}^{k_1-1} + \dots + \sum_{k=k_{m-1}+1}^{k_m-1} + \sum_{k=k_m+1}^{+\infty} \right) T_k(t) \sin \mu_k x + \sqrt{\frac{2}{l}} \sum_s T_s(t) \sin \mu_s x, \quad (2.60)$$

где в последней сумме s принимает значения $k_1, k_2, \dots, k_m$. Здесь $T_s(t)$ определяется по формуле (2.21), где k нужно заменить на s , и a_s — произвольная постоянная, отличная от нуля; если в конечных суммах в правой части (2.60) верхний предел меньше нижнего, то их следует считать нулями.

Таким образом, доказано следующее утверждение.

Теорема 2.2. Пусть выполнены условия леммы 2.3 и функции $G_i(x, t)$, $i = 1, 2$, удовлетворяют условиям леммы 2.8. Если $\Delta_1(k) \neq 0$ при $k = \overline{1, k_0}$, то существует единственное решение задачи (1.9) – (1.12), (1.15), определяемое рядом (2.2), коэффициенты которого выражаются формулами (2.21) и (2.24); если $\Delta_1(k) = 0$ при некоторых $k = k_1, k_2, \dots, k_m \leq k_0$, то задача (1.9)–(1.12), (1.15) разрешима только тогда, когда выполнены условия (2.59), и решение в этом случае определяется в виде суммы ряда (2.60).

Пусть выполнены условия леммы 2.4. Ряды (2.2) и (2.53)–(2.56) в силу леммы 2.7 мажорируются рядом

$$M_{15} \sum_{k=k_0+1}^{+\infty} k^{3-1/q} \|g_{1k}\|_C + k^{3-1/q} \|g_{2k}\|_C. \quad (2.61)$$

Лемма 2.9. Пусть выполнены следующие условия:

$$\begin{aligned} G_1(x, t) &\in C(\overline{D}_+) \cap C_{x,t}^{3+\nu, 0}(\overline{D}_+), \quad G_2(x, t) \in C(\overline{D}_-) \cap C_{x,t}^{3+\nu, 0}(\overline{D}_-), \quad 1 - \frac{1}{q} < \nu < 1, \\ G_1(0, t) &= G_1(l, t) = 0, \quad G''_{1xx}(0, t) = G''_{1xx}(l, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq \beta, \\ G_2(0, t) &= G_2(l, t) = 0, \quad G''_{2xx}(0, t) = G''_{2xx}(l, t) = 0, \quad -\alpha \leq t \leq 0. \end{aligned}$$

Тогда справедливы оценки

$$|g_{1k}(t)| < \frac{M_{16}}{k^{3+\nu}}, \quad |g_{2k}(t)| < \frac{M_{17}}{k^{3+\nu}}.$$

При выполнении условий леммы 2.9 ряд (2.57) оценивается рядом

$$M_{18} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^{\nu+1/q}}. \quad (2.62)$$

В силу сходимости ряда (2.62) ряды (2.2), (2.53) и (2.55) сходятся равномерно на $\overline{D}$, а ряды (2.54) и (2.56) — на соответствующих замкнутых областях $\overline{D}_+$ и $\overline{D}_-$. Следовательно, функция $v(x, t)$, определенная рядом (2.2), удовлетворяет условиям задачи (1.9) – (1.12), (1.15).

Теорема 2.3. Пусть выполнены условия леммы 2.4 и функции $G_i(x, t)$, $i = 1, 2$, удовлетворяют условиям леммы 2.9. Если $\Delta_1(k) \neq 0$ при $k = \overline{1, k_0}$, то существует единственное решение задачи (1.9)–(1.12), (1.15), определяемое рядом (2.2), коэффициенты которого задаются формулами (2.21) и (2.24); если $\Delta_1(k) = 0$ при некоторых $k = k_1, k_2, \dots, k_m \leq k_0$, то задача (1.9)–(1.12), (1.15) разрешима только тогда, когда выполнены условия (2.59), и решение в этом случае определяется в виде суммы ряда (2.60).

2.4. Построение решения задачи с ненулевыми граничными условиями. На основании теорем 2.2 и 2.3 и формул (1.6)–(1.8) нетрудно найти решение задачи (1.2)–(1.5). Предварительно на основании равенств (1.12) и (1.13) вычислим условия-равенства леммы 2.8:

$$\begin{aligned}
 F_1(0, t) - h_1'(t) - b^2 h_1(t) - \frac{1}{\alpha} \varphi''(0) &= F_1(l, t) - h_2'(t) - b^2 h_2(t) - \frac{1}{\alpha} \varphi''(l) = 0, \\
 F_{1xx}''(0, t) - \frac{1}{\alpha} \varphi^{IV}(0) + \frac{1+b^2 t}{\alpha} \varphi''(0) &= \\
 &= F_{1xx}''(l, t) - \frac{1}{\alpha} \varphi^{IV}(l) + \frac{1+b^2 t}{\alpha} \varphi''(l) = 0, \quad 0 \leq t \leq \beta, \quad (2.63) \\
 F_2(0, t) + h_1''(t) + b^2(-t)^m h_1(t) \frac{t}{\alpha} \varphi''(0) &= F_2(l, t) + h_2''(t) + b^2(-t)^m h_2(t) - \frac{t}{\alpha} \varphi''(l) = 0, \\
 F_{2xx}''(0, t) - \frac{(-t)^{m+1}}{\alpha} \varphi^{IV}(0) + \frac{b^2(-t)^{m+1}}{\alpha} \varphi''(0) &= \\
 &= F_{2xx}''(l, t) - \frac{(-t)^{m+1}}{\alpha} \varphi^{IV}(l) + \frac{b^2(-t)^{m+1}}{\alpha} \varphi''(l) = 0, \quad -\alpha \leq t \leq 0. \quad (2.64)
 \end{aligned}$$

Теорема 2.4. Пусть выполнены условия леммы 2.3, условия

$$\begin{aligned}
 F_1(x, t) &\in C(\overline{D}_+) \cap C_{x,t}^{2+\nu,0}(\overline{D}_+), \quad F_2(x, t) \in C(\overline{D}_-) \cap C_{x,t}^{2+\nu,0}(\overline{D}_-), \quad 1 - \frac{1}{q} < \nu < 1, \\
 \varphi(x) &\in C^{4+\nu}[0, l], \quad h_1(t) \in C^1[0, \beta], \quad h_2(t) \in C^2[-\alpha, 0],
 \end{aligned}$$

а также имеют место равенства (2.63) и (2.64). Если $\Delta_1(k) \neq 0$ при $k = \overline{1, k_0}$, то существует единственное решение задачи (1.2)–(1.5), которое определяется по формуле

$$u(x, t) = v(x, t) + z(x, t) + w(x, t), \quad (2.65)$$

где функции $v(x, t)$, $z(x, t)$ и $w(x, t)$ задаются соответственно формулами (2.2), (1.7) и (1.8); если $\Delta_1(k) = 0$ при некоторых $k = k_1, k_2, \dots, k_m \leq k_0$, то задача (1.2)–(1.5) разрешима только тогда, когда выполнены условия (2.59), и решение в этом случае определяется по формуле (2.65), где функция $v(x, t)$ определяется рядом (2.60).

На основании равенств (1.12) и (1.13) вычислим условия-равенства леммы 2.9:

$$\begin{aligned}
 F_{1xxx}'''(0, t) - \frac{1}{\alpha} \varphi^V(0) + \frac{1+b^2 t}{\alpha} \varphi'''(0) &= \\
 &= F_{1xxx}'''(l, t) - \frac{1}{\alpha} \varphi^V(l) + \frac{1+b^2 t}{\alpha} \varphi'''(l) = 0, \quad 0 \leq t \leq \beta; \quad (2.66) \\
 F_{2xxx}'''(0, t) - \frac{(-t)^{m+1}}{\alpha} \varphi^V(0) + \frac{b^2(-t)^{m+1}}{\alpha} \varphi'''(0) &= \\
 &= F_{2xxx}'''(l, t) - \frac{(-t)^{m+1}}{\alpha} \varphi^V(l) + \frac{b^2(-t)^{m+1}}{\alpha} \varphi'''(l) = 0, \quad -\alpha \leq t \leq 0. \quad (2.67)
 \end{aligned}$$

Теорема 2.5. Пусть выполнены условия леммы 2.4, условия

$$\begin{aligned}
 F_1(x, t) &\in C(\overline{D}_+) \cap C_{x,t}^{3+\nu,0}(\overline{D}_+), \quad F_2(x, t) \in C(\overline{D}_-) \cap C_{x,t}^{3+\nu,0}(\overline{D}_-), \quad 1 - \frac{1}{q} < \nu < 1, \\
 \varphi(x) &\in C^{5+\nu}[0, l], \quad h_1(t) \in C^1[0, \beta], \quad h_2(t) \in C^2[-\alpha, 0],
 \end{aligned}$$

а также имеют место равенства (2.66) и (2.67). Если $\Delta_1(k) \neq 0$ при $k = \overline{1, k_0}$, то существует единственное решение задачи (1.2)–(1.5), которое определяется по формуле (2.65), где функции $v(x, t)$, $z(x, t)$ и $w(x, t)$ задаются соответственно формулами (2.2), (1.7) и (1.8); если $\Delta_1(k) = 0$ при некоторых $k = k_1, k_2, \dots, k_m \leq k_0$, то задача (1.2)–(1.5) разрешима только тогда, когда выполнены условия (2.59), и решение в этом случае определяется по формуле (2.65), где функция $v(x, t)$ определяется рядом (2.60).

3. ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ С ВЫРОЖДАЮЩЕЙСЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ ЧАСТЬЮ

В этом разделе рассмотрим задачу (1.2)–(1.5) для уравнения смешанного типа с вырождающейся параболической частью, т.е. для уравнения

$$L_{n,0}u = F(x, t), \quad (3.1)$$

где

$$L_{n,0}u = \begin{cases} t^n u_{xx} - u_t - b^2 t^n u, & t > 0, \\ u_{xx} - u_{tt} - b^2 u, & t < 0. \end{cases}$$

3.1. Формальное построение решения задачи с нулевыми граничными условиями. Решение задачи (1.9)–(1.12), (1.15), будем искать в виде суммы ряда по собственным функциям соответствующей одномерной спектральной задачи:

$$v(x, t) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) \sin \mu_k x, \quad \mu_k = \frac{\pi k}{l}, \quad (3.2)$$

где $T_k(t)$ — неизвестные функции, определяемые по формуле

$$T_k(t) = \sqrt{\frac{2}{l}} \int_0^l v(x, t) \sin \mu_k x \, dx \quad (3.3)$$

и в силу (1.11) удовлетворяющие граничному условию

$$T_k(-\alpha) = 0. \quad (3.4)$$

Рассмотрим вспомогательные функции

$$T_{k,\varepsilon}(t) = \sqrt{\frac{2}{l}} \int_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} v(x, t) \sin \mu_k x \, dx, \quad (3.5)$$

где ε — достаточно малое положительное число. Дифференцируя равенство (3.5) по t при $t > 0$ один раз, а при $t < 0$ — два раза и учитывая уравнение (1.12), получим

$$\begin{aligned} T'_{k,\varepsilon}(t) &= \sqrt{\frac{2}{l}} \int_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} v_t \sin \mu_k x \, dx = \sqrt{\frac{2}{l}} \int_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} [t^n v_{xx} - b^2 t^n v - G_1(x, t)] \sin \mu_k x \, dx = \\ &= -b^2 t^n T_{k,\varepsilon}(t) - \sqrt{\frac{2}{l}} \int_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} G_1(x, t) \sin \mu_k x \, dx + t^n \sqrt{\frac{2}{l}} \int_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} v_{xx} \sin \mu_k x \, dx, \end{aligned} \quad (3.6)$$

$$\begin{aligned} T''_{k,\varepsilon}(t) &= \sqrt{\frac{2}{l}} \int_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} v_{tt} \sin \mu_k x \, dx = \sqrt{\frac{2}{l}} \int_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} [v_{xx} - b^2 v - G_2(x, t)] \sin \mu_k x \, dx = \\ &= -b^2 T_{k,\varepsilon}(t) - \sqrt{\frac{2}{l}} \int_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} G_2(x, t) \sin \mu_k x \, dx + \sqrt{\frac{2}{l}} \int_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} v_{xx} \sin \mu_k x \, dx. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Выполняя интегрирование по частям два раза в интегралах, содержащих производные v_{xx} , и переходя затем к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$ с учетом граничных условий (1.9) и (1.10), получим дифференциальные уравнения относительно коэффициентов $T_k(t)$ ряда (3.2):

$$T'_k(t) + \lambda_k^2 t^n T_k(t) = g_{1k}(t), \quad t > 0, \quad (3.8)$$

$$T''_k(t) + \lambda_k^2 T_k(t) = g_{2k}(t), \quad t < 0, \quad (3.9)$$

где $\lambda_k^2 = b^2 + \mu_k^2$, а $g_{ik}(t)$ определяются по формуле (2.10).

Дифференциальные уравнения (3.8) и (3.9) имеют общие решения

$$T_k(t) = \begin{cases} a_k e^{-\lambda_k^2 t^{n+1}/(n+1)} + \int_0^t g_{1k}(s) e^{-\lambda_k^2 (t^{n+1}/(n+1) - s^{n+1}/(n+1))} ds, & t > 0, \\ c_k \cos \lambda_k t + d_k \sin \lambda_k t - \frac{1}{\lambda_k} \int_t^0 g_{2k}(s) \sin [\lambda_k(t-s)] ds, & t < 0. \end{cases} \quad (3.10)$$

По условию (1.2) решение $u(x, t)$ принадлежит классу $C(\overline{D}) \cap C^1(D)$; тогда для функций (3.10) выполнены условия склеивания

$$T_k(0+0) = T_k(0-0), \quad T'_k(0+0) = T'_k(0-0), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Функции (3.10) удовлетворяют условиям сопряжения только тогда, когда

$$a_k = c_k, \quad d_k = \frac{1}{\lambda_k} g_{1k}(0+0).$$

Подставляя найденные значения a_k и d_k в (3.10), получим

$$T_k(t) = \begin{cases} a_k e^{-\lambda_k^2 t^{n+1}/(n+1)} + \int_0^t g_{1k}(s) e^{-\lambda_k^2 (t^{n+1}/(n+1) - s^{n+1}/(n+1))} ds, & t > 0, \\ a_k \cos \lambda_k t + \frac{g_{1k}(0+0)}{\lambda_k} \sin \lambda_k t - \frac{1}{\lambda_k} \int_t^0 g_{2k}(s) \sin [\lambda_k(t-s)] ds, & t < 0. \end{cases} \quad (3.11)$$

Подчинив функции (3.11) граничным условиям (3.4), найдем

$$a_k \cos \lambda_k t = \frac{g_{1k}(0+0)}{\lambda_k} \sin \lambda_k \alpha - \frac{1}{\lambda_k} \int_{-\alpha}^0 g_{2k}(s) \sin [\lambda_k(s+\alpha)] ds = w_k. \quad (3.12)$$

Из равенства (3.12) при условии, что при

$$\Delta_2(k) = \cos \lambda_k \alpha \neq 0 \quad (3.13)$$

при всех $k \in \mathbb{N}$, находим

$$a_k = \frac{w_k}{\Delta_2(k)}. \quad (3.14)$$

Таким образом, мы формально построили решение задачи (1.9)–(1.12), (1.15) в виде суммы ряда (3.2), поскольку его коэффициенты при условии (3.13) однозначно определяются по формулам (3.11) и (3.14).

3.2. Единственность решения задачи. Пусть $v(x, t)$ — решение задачи (1.9)–(1.12), (1.15), $G_1(x, t) = G_2(x, t) \equiv 0$ и выполнены условия (3.13) при всех $k \in \mathbb{N}$. Тогда в силу формул (3.14) и (3.11) имеем $a_k \equiv 0$ и $T_k(t) \equiv 0$ при любом $k \in \mathbb{N}$ и $t \in [-\alpha, \beta]$. Отсюда в силу формулы (3.3), справедливой при всех $t \in [-\alpha, \beta]$ и $k \in \mathbb{N}$, получим

$$\int_0^l v(x, t) \sin \mu_k x dx = 0. \quad (3.15)$$

Из равенств (3.15) в силу полноты системы синусов $\{\sqrt{2/l} \sin \mu_k x\}_{k \geq 1}$ в пространстве $L_2[0, l]$ следует, что $v(x, t) = 0$ почти всюду на $[0, l]$ при любом $t \in [-\alpha, \beta]$. Поскольку функция $v(x, t)$ непрерывна на $\overline{D}$, то $v(x, t) \equiv 0$ в $\overline{D}$.

Пусть при некоторых α, l, b, m и $k = s \in \mathbb{N}$ нарушено условие (3.13), т.е. $\Delta_2(s) = 0$. Тогда однородная задача (1.2)–(1.5) (где $G_i(x, t) \equiv 0, i = 1, 2$) имеет ненулевое решение

$$v_s(x, t) = \begin{cases} c_s e^{-\lambda_s^2 t^{n+1}/(n+1)} \sin \mu_s x, & t > 0, \\ c_s \cos \lambda_s t \sin \mu_s x, & t < 0, \end{cases} \quad (3.16)$$

где $c_s \neq 0$ — произвольная постоянная.

Также как и в п. 2.2, покажем, что построенная функция (3.16) в силу равенства $\Delta_2(s) = 0$ удовлетворяет условиям (1.2)–(1.5) (где $\varphi(x) \equiv 0, h_1(y) = h_2(y) \equiv 0, F_i(x, t) \equiv 0, i = 1, 2$). Принадлежность классу (1.2) следует из того, что на основании асимптотической формулы (2.16) имеем

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0+0} v_s(x, t) &= \sin \mu_s x = \lim_{t \rightarrow 0-0} v_s(x, t) = \sin \mu_s x, \\ \lim_{t \rightarrow 0+0} \frac{\partial v_s(x, t)}{\partial t} &= - \lim_{t \rightarrow 0+0} \lambda_s^2 t^n \sin \mu_s x = 0, \\ \lim_{t \rightarrow 0-0} \frac{\partial v_s(x, t)}{\partial t} &= - \lim_{t \rightarrow 0-0} \lambda_s \sin \lambda_s t \sin \mu_s x = 0. \end{aligned}$$

Условия (1.4) и (1.5) при $h_1(t) = h_2(t) \equiv 0$ и $\varphi(x) \equiv 0$ также выполняются, поскольку

$$v_s(x, -\alpha) = \cos \lambda_s \alpha \sin \pi s x = \Delta_2(s) \sin \pi l x = 0.$$

Из построения функции (3.16) следует, что $v_s(x, t)$ на множестве $D_- \cup D_+$ является решением уравнения (3.1) при $G_i(x, t) \equiv 0$.

Представим выражение $\Delta_2(k)$ в виде

$$\Delta_2(k) = \cos \pi k \tilde{\alpha} \tilde{\lambda}_k, \quad (3.17)$$

где $\tilde{\alpha} = \alpha/l, \tilde{\lambda}_k = \sqrt{1 + (bl/\pi k)^2}$. Уравнение $\Delta_2(k) = 0$ имеет счетное множество нулей относительно $\tilde{\alpha}$, которые определяются по формуле

$$\tilde{\alpha} = \frac{1}{2k\tilde{\lambda}_k} + \frac{n}{k\tilde{\lambda}_k}, \quad k, n \in \mathbb{N}. \quad (3.18)$$

Таким образом, нами установлен следующий критерий единственности решения задачи (1.9)–(1.12), (1.15).

Теорема 3.1. *Если существует решение задачи (1.9)–(1.12), (1.15), то оно единственно только тогда, когда выполнены условия (3.13) при всех $k \in \mathbb{N}$.*

3.3. Обоснование существования решения задачи с нулевыми граничными условиями. Поскольку выражение $\Delta_2(k)$ при указанных выше значениях (3.18) параметра $\tilde{\alpha}$ может обратиться в нуль, то необходимо установить оценки об отделенности от нуля $\Delta_2(k)$ с соответствующей асимптотикой.

Лемма 3.1. *Если $b = 0$ и $\tilde{\alpha}$ является произвольным натуральным числом, то существует такая постоянная C_0 , что при всех $k \in \mathbb{N}$*

$$|\Delta_2(k)| = C_0 > 0. \quad (3.19)$$

Доказательство. При $b = 0$ имеем $\tilde{\lambda}_k \equiv 1$, и из равенства (3.17) при $\tilde{\alpha} = p \in \mathbb{N}$ вытекает справедливость оценки (3.19) при всех $k \in \mathbb{N}$. $\square$

Лемма 3.2. *Если $b \geq 0$ и $\tilde{\alpha} = p/t$ является произвольным рациональным числом, где $p/t \notin \mathbb{N}$, $(p, t) = 1$, и $t \neq 2r + 2$ или $t \neq 2r$ при некотором $r = \overline{1, t-1}$, то существуют такие положительные постоянные C_0 и k_0 , ($k_0 \in \mathbb{N}$), что при всех $k > k_0$ справедлива оценка*

$$|\Delta_2(k)| \geq C_0 > 0. \quad (3.20)$$

Доказательство. Пусть $b > 0$ и $\tilde{\alpha} = p/t$, $(p, t) = 1$. Разделим kp на t с остатком: $kp = st + r$, $s, r \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, $0 \leq r < t$, после чего представлению (3.17) придадим вид

$$\Delta_2(k) = \cos \left(\frac{\pi r}{t} + \tilde{\alpha} \tilde{\theta}_k \right). \quad (3.21)$$

Пусть $r = 0$. В этом случае выражение $\tilde{\lambda}_k$, которое зависит от bl , при условии (2.32) можно представить в виде (2.33); при этом для θ_k справедлива оценка (2.34). Тогда соотношение (3.21) принимает вид

$$\Delta_2(k) = \cos \tilde{\alpha} \tilde{\theta}_k. \quad (3.22)$$

Поскольку последовательность $\tilde{\theta}_k$ в силу оценки (2.34) является бесконечно малой при $k \rightarrow \infty$, то существует такое число $k_2 \in \mathbb{N}$, что при всех $k > k_2$

$$0 < \tilde{\alpha} \tilde{\theta}_k \leq \frac{C_1}{k}. \quad (3.23)$$

Тогда на основании (3.22) и (3.23) получим

$$|\Delta_2(k)| > \cos \frac{C_1}{k} > C_0 > 0 \quad (3.24)$$

при $k \geq \max\{k_1, k_2\}$.

Пусть теперь $r > 0$. Тогда ясно, что $1 \leq r \leq t - 1$, $t \geq 2$. Предположим, что существует такое число $k_2 \in \mathbb{N}$, что при всех $k > k_2$

$$0 < \tilde{\alpha} \tilde{\theta}_k \leq \frac{C_1}{k} < \frac{\pi}{t}, \quad t \geq 2, \quad (3.25)$$

где C_i — положительные постоянные, зависящие, вообще говоря, от α , β , b и n . Справедливо неравенство

$$0 < \frac{\pi r}{t} + \tilde{\alpha} \tilde{\theta}_k < \frac{\pi(t-1)}{t} + \frac{\pi}{t} = \pi.$$

Рассмотрим случай, когда $t = 2t_1 - 1$, $t_1 \in \mathbb{N}$, $1 \leq r \leq 2t_1 - 2$. Равенство (3.21) перепишем в следующем виде:

$$\Delta_2(k) = \cos \left(\frac{\pi r}{2t_1 - 1} + \tilde{\alpha} \tilde{\theta}_k \right). \quad (3.26)$$

Тогда на основании неравенства (3.25) возможны два случая:

$$(1) \quad 0 < \frac{\pi r}{2t_1 - 1} + \tilde{\alpha} \tilde{\theta}_k < \frac{\pi}{2}, \quad (2) \quad \frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi r}{2t_1 - 1} + \tilde{\alpha} \tilde{\theta}_k < \pi.$$

В первом случае

$$|\Delta_2(k)| > \cos \left(\frac{\pi r}{2t_1 - 1} + \frac{\pi}{2t_1 - 1} \right) = \cos \left(\frac{\pi(r+1)}{2t_1 - 1} \right) = C_2 \geq 0. \quad (3.27)$$

Потребуем, чтобы постоянная C_2 была больше нуля. Это возможно только тогда, когда

$$\frac{\pi(r+1)}{2t_1 - 1} \neq \frac{\pi}{2}(2s - 1), \quad s \in \mathbb{N}.$$

Отсюда получим

$$2r + 2 \neq (2t_1 - 1)(2s - 1), \quad s \in \mathbb{N}. \quad (3.28)$$

В левой части равенства (3.28) стоит четное число, а в правой — нечетное. Следовательно $C_2 > 0$.

Во втором случае

$$|\Delta_2(k)| = \left| \cos \left(\frac{\pi r}{2t_1 - 1} + \tilde{\alpha} \tilde{\theta}_k \right) \right| > \left| \cos \left(\frac{\pi r}{2t_1 - 1} \right) \right| = C_3 \geq 0. \quad (3.29)$$

Аналогично случаю, рассмотренному выше, потребуем, чтобы постоянная C_3 была больше нуля. Это возможно только тогда, когда

$$\frac{\pi r}{2t_1 - 1} \neq \frac{\pi}{2}(2s - 1), \quad s \in \mathbb{N}.$$

Отсюда получим

$$2r \neq (2t_1 - 1)(2s - 1), \quad s \in \mathbb{N}. \quad (3.30)$$

В левой части равенства (3.30) стоит четное число, а в правой — нечетное. Следовательно $C_3 > 0$.

Теперь рассмотрим случай, когда $t = 2t_1$. Тогда (3.21) принимает вид

$$\Delta_2(k) = \cos \left(\frac{\pi r}{2t_1} + \tilde{\alpha} \tilde{\theta}_k \right). \quad (3.31)$$

Здесь также возможны два случая:

$$(1) \quad 0 < \frac{\pi r}{2t_1} + \tilde{\alpha} \tilde{\theta}_k < \frac{\pi}{2}, \quad (2) \quad \frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi r}{2t_1} + \tilde{\alpha} \tilde{\theta}_k < \pi.$$

В первом случае справедливо неравенство

$$|\Delta_2(k)| > \cos \left(\frac{\pi r}{2t_1} + \frac{\pi}{2t_1} \right) = \cos \left(\frac{\pi(r+1)}{2t_1} \right) > 0 \quad (3.32)$$

при условии

$$\frac{r+1}{2t_1} \neq \frac{1}{2}(2s-1) \quad \text{или} \quad \frac{r+1}{t} \neq s - \frac{1}{2}, \quad s \in \mathbb{N}. \quad (3.33)$$

Так как $2 \leq r+1 \leq t$, то неравенство (3.33) имеет место при $s = 1$, т.е. когда

$$\frac{r+1}{t} \neq \frac{1}{2} \quad \text{или} \quad r \neq \frac{t}{2} - 1. \quad (3.34)$$

Во втором случае справедливо неравенство

$$|\Delta_2(k)| = \left| \cos \left(\frac{\pi r}{2t_1} + \tilde{\alpha} \tilde{\theta}_k \right) \right| > \left| \cos \left(\frac{\pi r}{2t_1} \right) \right| > 0 \quad (3.35)$$

при условии

$$\frac{r}{2t_1} \neq \frac{1}{2}(2s-1) \quad \text{или} \quad \frac{r}{t} \neq s - \frac{1}{2}, \quad s \in \mathbb{N}. \quad (3.36)$$

Так как $1 \leq r \leq t-1$, то неравенство (3.36) имеет место при $s = 1$, т.е. когда

$$\frac{r}{t} \neq \frac{1}{2} \quad \text{или} \quad r \neq \frac{t}{2}. \quad (3.37)$$

Если $b = 0$, то $\tilde{\lambda}_k \equiv 1$ и $\theta_k \equiv 0$, и рассуждая аналогично, получим оценку (3.20). $\square$

Замечание 3.1. Отметим, что условия (3.34) и (3.37) в лемме 3.2 существенны, так как в противном случае оценка (3.20) не имеет места.

Действительно, пусть при некотором $r = \overline{1, t-1}$ нарушено условие (3.34), т.е. $(r+1)/t = 1/2$. Перепишем (3.31) в следующем виде:

$$\Delta_2(k) = \cos \left(\frac{\pi(r+1)}{2t_1} - \frac{\pi}{2t_1} + \tilde{\alpha} \tilde{\theta}_k \right) = \cos \left(\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2t_1} - \tilde{\alpha} \tilde{\theta}_k \right) \right) = \sin \left(\frac{\pi}{2t_1} - \tilde{\alpha} \tilde{\theta}_k \right). \quad (3.38)$$

В силу известного неравенства

$$\sin x \geq \frac{2}{\pi}x, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}, \quad (3.39)$$

на основании (3.38) и (3.25) получим

$$|\Delta_2(k)| > \frac{2}{\pi} \left(\frac{\pi}{t_1} - \frac{C_1}{k} \right) \geq \frac{C_4}{k}.$$

Если нарушено условие (3.37), т.е. $r/t = 1/2$, тогда основании (3.38) и (3.39) имеем

$$|\Delta_2(k)| = \left| \cos \left(\frac{\pi r}{2} + \tilde{\alpha} \tilde{\theta}_k \right) \right| = \sin \tilde{\alpha} \tilde{\theta}_k \geq \frac{2}{\pi} \tilde{\alpha} \tilde{\theta}_k > \frac{3\tilde{\alpha}}{4} \frac{(bl)^2}{k} = \frac{C_5}{k}. \quad (3.40)$$

Таким образом, доказано следующее утверждение.

Лемма 3.3. Если $b \geq 0$ и $\tilde{\alpha} = p/t$ является произвольным рациональным числом, где $p/t \notin \mathbb{N}$, $(p, t) = 1$, и $(r+1)/t = 1/2$ или $r/t = 1/2$ при некотором $1 \leq r \leq t-1$, то существуют такие положительные постоянные C_0 и k_0 , ($k_0 \in \mathbb{N}$), что при всех $k > k_0$ справедлива оценка

$$|\Delta_2(k)| \geq \frac{C_0}{k} > 0. \quad (3.41)$$

Пусть теперь число $\tilde{\alpha}$ иррационально. В этом случае соотношение (3.17) представим в виде

$$\begin{aligned} |\Delta_2(k)| &= \left| \cos \left(\pi k \tilde{\alpha} + \tilde{\alpha} \tilde{\theta}_k \right) \right| = \left| \sin \left(\pi k \tilde{\alpha} + \frac{\pi}{2} + \tilde{\alpha} \tilde{\theta}_k \right) \right| = \\ &= \left| \sin \left(\pi k \tilde{\alpha} + \frac{\pi}{2} - \pi m + \tilde{\alpha} \tilde{\theta}_k \right) \right| = \left| \sin \left[\pi k \left(\tilde{\alpha} - \frac{2m-1}{2k} \right) + \tilde{\alpha} \tilde{\theta}_k \right] \right| \\ &= \left| \sin \left[\frac{\pi k}{2} \left(2\tilde{\alpha} - \frac{n}{k} \right) + \tilde{\alpha} \tilde{\theta}_k \right] \right|, \end{aligned} \quad (3.42)$$

где $\tilde{\theta}_k = \pi k \theta_k$, $n = 2m-1$, $m, n \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{N}$.

Отметим, что для всякого $k \in \mathbb{N}$ существует такое $n \in \mathbb{N}$, что

$$\left| 2\tilde{\alpha} - \frac{n}{k} \right| < \frac{1}{k}. \quad (3.43)$$

Для этого достаточно положить

$$n = \begin{cases} [2\tilde{\alpha}k], & \text{если } [2\tilde{\alpha}k] \text{ нечетно,} \\ [\tilde{\alpha}k] + 1, & \text{если } [2\tilde{\alpha}k] \text{ четно;} \end{cases}$$

здесь $[\tilde{\alpha}k]$ — целая часть иррационального числа $2\tilde{\alpha}k$.

Число n возьмем таким, чтобы в силу неравенства (3.43) выполнялось неравенство

$$\left| \frac{\pi k}{2} \left(2\tilde{\alpha} - \frac{n}{k} \right) \right| < \frac{\pi}{2}. \quad (3.44)$$

Если $2\tilde{\alpha}$ является иррациональным алгебраическим числом степени 2, то в силу теоремы Лиувилля (см. [27, с. 60]) существует такое положительное число δ , зависящее от $\tilde{\alpha}$, что при любых целых n и k , $k > 0$, выполняется неравенство

$$\left| 2\tilde{\alpha} - \frac{n}{k} \right| \geq \frac{\delta}{k^2}. \quad (3.45)$$

В силу оценки (2.34) имеем

$$0 < \tilde{\alpha} \tilde{\theta}_k < \frac{\tilde{\alpha} (bl)^2}{2 \pi k} = \frac{C_6}{k}, \quad (3.46)$$

где постоянная C_6 удовлетворяет условию

$$C_6 = \frac{\tilde{\alpha}}{2\pi} (bl)^2 < \frac{\pi}{2}. \quad (3.47)$$

Тогда на основании неравенств (3.44) и (3.46) возможны два случая:

$$\begin{aligned} (1) \quad & \frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi k}{2} \left(2\tilde{\alpha} - \frac{n}{k} \right) + \tilde{\alpha} \tilde{\theta}_k < \frac{\pi}{2} + \frac{C_6}{k} < \pi, \\ (2) \quad & -\frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi k}{2} \left(2\tilde{\alpha} - \frac{n}{k} \right) + \tilde{\alpha} \tilde{\theta}_k < \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

В первом случае

$$\left| \sin \left[\frac{\pi k}{2} \left(2\tilde{\alpha} - \frac{n}{k} \right) + \tilde{\alpha} \tilde{\theta}_k \right] \right| \geq \sin \left(\frac{\pi}{2} + \frac{C_6}{k} \right) = \cos \frac{C_6}{k} \geq \frac{C_7}{k}. \quad (3.48)$$

Во втором случае с учетом неравенства (3.45) имеем

$$\left| \sin \left[\frac{\pi k}{2} \left(2\tilde{\alpha} - \frac{n}{k} \right) + \tilde{\alpha} \tilde{\theta}_k \right] \right| > \frac{2}{\pi} \left| \frac{\pi k}{2} \left(2\tilde{\alpha} - \frac{n}{k} \right) + \tilde{\alpha} \tilde{\theta}_k \right| \geq$$

$$\geq k \left| 2\tilde{\alpha} - \frac{n}{k} \right| - \frac{2}{\pi} |\tilde{\alpha} \tilde{\theta}_k| \geq \frac{\delta}{k} - \frac{2}{\pi} \frac{C_6}{k} = \frac{1}{k} \left(\delta - \frac{2C_6}{\pi} \right). \quad (3.49)$$

Теперь потребуем, чтобы постоянные α , l , b и δ удовлетворяли неравенству

$$\delta - \tilde{\alpha} \left(\frac{bl}{\pi} \right)^2 > 0, \quad (3.50)$$

которое, например, при малых l всегда имеет место. Тем не менее уточним число δ из оценки (3.50). По условию $2\tilde{\alpha}$ является алгебраическим числом степени два. Тогда оно является корнем многочлена второй степени $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ с целыми коэффициентами, причем $a_2 > 0$. Тогда

$$f(x) = (x - 2\tilde{\alpha})f_1(x), \quad (3.51)$$

где $f_1(x) = a_2x + a_22\tilde{\alpha} + a_1$; пусть при этом $f_1(2\tilde{\alpha}) > 0$, т.е. $a_1 + 2a_2\tilde{\alpha} > 0$. Тогда существует такая окрестность $(2\tilde{\alpha} - \varepsilon, 2\tilde{\alpha} + \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, что $f_1(x) > 0$. Пусть n и k — произвольная пара натуральных чисел; если $|2\tilde{\alpha} - n/k| < \varepsilon$, то $f_1(n/k) > 0$. Тогда из равенства (3.51) при $x = n/k$ имеем

$$\frac{n}{k} - 2\tilde{\alpha} = \frac{f(n/k)}{f_1(n/k)} = \frac{k^2a_0 + a_1kn + a_2n^2}{n^2f_1(n/k)}. \quad (3.52)$$

Числитель дроби (3.52) является целым числом, отличным от нуля. Следовательно, этот числитель по абсолютной величине не меньше единицы. Обозначим через M верхнюю грань функции $f_1(x)$ на интервале $(2\tilde{\alpha} - \varepsilon, 2\tilde{\alpha} + \varepsilon)$. Тогда из равенства (3.52) получим

$$\left| 2\tilde{\alpha} - \frac{n}{k} \right| \geq \frac{1}{k^2M}. \quad (3.53)$$

В случае же $|2\tilde{\alpha} - n/k| \geq \varepsilon$ тем более, так как $k \geq 1$, имеем

$$\left| 2\tilde{\alpha} - \frac{n}{k} \right| \geq \frac{\varepsilon}{k^2}. \quad (3.54)$$

Тогда из оценок (3.53) и (3.54) находим оценку (3.45):

$$\left| 2\tilde{\alpha} - \frac{n}{k} \right| \geq \frac{\delta}{k^2}, \quad \delta = \min \left\{ \varepsilon, \frac{1}{M} \right\}.$$

Теперь вычислим δ через коэффициенты многочлена $f(x)$. Выберем ε так, чтобы

$$f_1(2\tilde{\alpha} - \varepsilon) = 2a_22\tilde{\alpha} - a_2\varepsilon + a_1 \geq 0.$$

Отсюда найдем условие

$$\varepsilon \leq 4\tilde{\alpha} + \frac{a_1}{a_2} = \frac{4\tilde{\alpha}a_2 + a_1}{a_2}.$$

Положим

$$\varepsilon = \frac{4\tilde{\alpha}a_2 + a_1}{a_2\tilde{l}}, \quad \tilde{l} \geq 1.$$

Далее найдем

$$M = f_1(2\tilde{\alpha} + \varepsilon) = 2a_22\tilde{\alpha} + a_2\varepsilon + a_1 = 2a_22\tilde{\alpha} + \frac{4\tilde{\alpha}a_2 + a_1}{\tilde{l}} + a_1 = \frac{\tilde{l} + 1}{\tilde{l}}(2a_22\tilde{\alpha} + a_1)$$

и δ из условия $\varepsilon = 1/M$. Отсюда получим уравнение относительно $\tilde{l}$:

$$a_2\tilde{l}^2 - (4\tilde{\alpha}a_2 + a_1)^2\tilde{l} - (4\tilde{\alpha}a_2 + a_1)^2 = 0,$$

решение которого имеет вид

$$\tilde{l} = \frac{(4\tilde{\alpha}a_2 + a_1)^2 + (4\tilde{\alpha}a_2 + a_1)\sqrt{(4\tilde{\alpha}a_2 + a_1)^2 + 4a_2}}{2a_2}. \quad (3.55)$$

Тогда число δ находится по формуле

$$\delta = \frac{2}{4\tilde{\alpha}a_2 + a_1 + \sqrt{(4\tilde{\alpha}a_2 + a_1)^2 + 4a_2}} \quad (3.56)$$

при условии, когда правая часть равенства (3.55) не меньше единицы. Это условие выполнено, когда

$$4\tilde{\alpha}a_2 + a_1 \geq \sqrt{\frac{a_2}{2}}. \quad (3.57)$$

Если, например, $a_2 = 1$, $a_1 = 0$, т.е. $2\tilde{\alpha}$ является решением уравнения $x^2 - d = 0$, $d \in \mathbb{N}$, $\sqrt{d} \notin \mathbb{N}$, $2\tilde{\alpha} = \sqrt{d}$, то $\tilde{l} > 2$ и δ определяется по формуле

$$\delta = \frac{1}{2\tilde{\alpha} + \sqrt{4\tilde{\alpha}^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{d} + \sqrt{d+1}}.$$

Тогда, например, при $b = 0$, $l \leq 1$ и $\tilde{\alpha} = \sqrt{d}$, где $d = 2, 3, 5, 6, 7$ и 8 , выполняются условия (3.47), (3.50) и (3.57).

Таким образом, на основании (3.48) и (3.49) приходим к следующему утверждению.

Лемма 3.4. Пусть $\tilde{\alpha}$ — иррациональное алгебраическое число степени 2, $bl < \pi$ и выполнены условия (3.47) и (3.50), где δ определяется по формуле (3.56) при условии (3.57). Тогда существует такая положительная постоянная C_0 , зависящая от α , l и b , что при всех $k \in \mathbb{N}$ имеет место оценка

$$|\Delta_2(k)| > \frac{C_0}{k}. \quad (3.58)$$

Лемма 3.5. Пусть $\tilde{\alpha}$ — иррациональное алгебраическое число степени $n \geq 2$ и $b = 0$. Тогда существует такая положительная постоянная C_0 , зависящая от α и l , что при всех $k \in \mathbb{N}$ справедливы оценки

$$|\Delta_2(k)| > \frac{C_0}{k} \quad \text{при } n = 2, \quad (3.59)$$

$$|\Delta_2(k)| > \frac{C_0}{k^{1+\varepsilon}} \quad \text{при } n > 2, \varepsilon > 0. \quad (3.60)$$

Доказательство. Пусть число $\tilde{\alpha}$ является иррациональным числом и $b = 0$. Тогда выражение для $\Delta_2(k)$ в силу (3.42) примет вид

$$|\Delta_2(k)| = |\cos \pi k \tilde{\alpha}| = \left| \sin \frac{\pi k}{2} \left(2\tilde{\alpha} - \frac{n}{k} \right) \right|. \quad (3.61)$$

Если $2\tilde{\alpha}$ является иррациональным алгебраическим числом степени 2, то в силу теоремы Ливилля (см. [27, с. 60]) существует такое положительное число δ , зависящее от $\tilde{\alpha}$, что при любых целых n и k , $k > 0$, выполняется неравенство (3.45). Тогда на основании (3.61) в силу (3.45) будем иметь

$$|\Delta_2(k)| = |\cos \pi k \tilde{\alpha}| = \left| \sin \frac{\pi k}{2} \left(2\tilde{\alpha} - \frac{n}{k} \right) \right| > k \left| 2\tilde{\alpha} - \frac{n}{k} \right| \geq \frac{C_0}{k}.$$

Теперь рассмотрим случай, когда $n > 2$. В силу теоремы Рота (см. [28, с. 98]) для любого алгебраического числа $2\tilde{\alpha}$ степени $n > 2$ и произвольного положительного числа $\varepsilon > 0$ найдется такое положительное число $\delta > 0$, что при любых целых n , k ($k > 0$) будет иметь место неравенство

$$\left| 2\tilde{\alpha} - \frac{n}{k} \right| \geq \frac{\delta}{k^{2+\varepsilon}}. \quad (3.62)$$

Тогда на основании неравенства (3.62) получим

$$|\Delta_2(k)| = |\cos \pi k \tilde{\alpha}| = \left| \sin \frac{\pi k}{2} \left(2\tilde{\alpha} - \frac{n}{k} \right) \right| > k \left| 2\tilde{\alpha} - \frac{n}{k} \right| \geq \frac{C_0}{k^{1+\varepsilon}}.$$

Лемма доказана. $\square$

Лемма 3.6. Если выполнены условия леммы 3.1, то при всех $k \in \mathbb{N}$ справедливы следующие оценки:

$$|T_k(t)| \leq M_1 \left[k^{-1} \|g_{1k}\|_C + k^{-1} \|g_{2k}\|_C \right], \quad t \in [0, \beta], \quad (3.63)$$

$$|T'_k(t)| \leq M_2 [k \|g_{1k}\|_C + k \|g_{2k}\|_C], \quad t \in [0, \beta], \quad (3.64)$$

$$|T_k(t)| \leq M_3 [k^{-1} \|g_{1k}\|_C + k^{-1} \|g_{2k}\|_C], \quad t \in [-\alpha, 0], \quad (3.65)$$

$$|T'_k(t)| \leq M_4 [\|g_{1k}\|_C + \|g_{2k}\|_C], \quad t \in [-\alpha, 0], \quad (3.66)$$

$$|T''_k(t)| \leq M_5 [k \|g_{1k}\|_C + k \|g_{2k}\|_C], \quad t \in [-\alpha, 0], \quad (3.67)$$

где

$$\|g_{1k}\|_C = \max_{0 \leq t \leq \beta} |g_{1k}(t)|, \quad \|g_{2k}\|_C = \max_{-\alpha \leq t \leq 0} |g_{2k}(t)|$$

и M_i — положительные постоянные, зависящие от α , β , b и m .

Лемма 3.7. Если выполнены условия леммы 3.2, то при всех $k > k_0$ справедливы оценки (3.63)–(3.67).

Эти оценки устанавливаются на основе неравенства (3.20), которое имеет место при всех $k > k_0$.

Лемма 3.8. Если выполнены условия леммы 3.3, то при всех $k > k_0$ справедливы следующие оценки:

$$|T_k(t)| \leq M_6 [\|g_{1k}\|_C + \|g_{2k}\|_C], \quad t \in [0, \beta], \quad (3.68)$$

$$|T'_k(t)| \leq M_7 [k^2 \|g_{1k}\|_C + k^2 \|g_{2k}\|_C], \quad t \in [0, \beta], \quad (3.69)$$

$$|T_k(t)| \leq M_8 [\|g_{1k}\|_C + \|g_{2k}\|_C], \quad t \in [-\alpha, 0], \quad (3.70)$$

$$|T'_k(t)| \leq M_9 [k \|g_{1k}\|_C + k \|g_{2k}\|_C], \quad t \in [-\alpha, 0], \quad (3.71)$$

$$|T''_k(t)| \leq M_{10} [k^2 \|g_{1k}\|_C + k^2 \|g_{2k}\|_C], \quad t \in [-\alpha, 0]. \quad (3.72)$$

Лемма 3.9. Если выполнены условия леммы 3.4, то при всех $k \in \mathbb{N}$ справедливы оценки (3.68)–(3.72).

Лемма 3.10. Если выполнены условия леммы 3.5, то при всех $k \in \mathbb{N}$ и $n = 2$ справедливы оценки (3.68)–(3.72), а при $n > 2$ — следующие оценки:

$$|T_k(t)| \leq M_{11} [k^\varepsilon \|g_{1k}\|_C + k^\varepsilon \|g_{2k}\|_C], \quad t \in [0, \beta],$$

$$|T'_k(t)| \leq M_{12} [k^{2+\varepsilon} \|g_{1k}\|_C + k^{2+\varepsilon} \|g_{2k}\|_C], \quad t \in [0, \beta],$$

$$|T_k(t)| \leq M_{13} [k^\varepsilon \|g_{1k}\|_C + k^\varepsilon \|g_{2k}\|_C], \quad t \in [-\alpha, 0],$$

$$|T'_k(t)| \leq M_{14} [k^{1+\varepsilon} \|g_{1k}\|_C + k^{1+\varepsilon} \|g_{2k}\|_C], \quad t \in [-\alpha, 0],$$

$$|T''_k(t)| \leq M_{15} [k^{2+\varepsilon} \|g_{1k}\|_C + k^{2+\varepsilon} \|g_{2k}\|_C], \quad t \in [-\alpha, 0].$$

Пусть выполнены условия леммы 3.1. Формально из (3.2) почленным дифференцированием составим ряды:

$$\begin{aligned} v_t(x, t) &= \sqrt{\frac{2}{l}} \sum_{k=1}^{+\infty} T'_k(t) \sin \mu_k x = \\ &= -\sqrt{\frac{2}{l}} \sum_{k=1}^{+\infty} (\lambda_k^2 T_k(t) - g_{1k}(t)) \sin \mu_k x = \\ &= -\sqrt{\frac{2}{l}} \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k^2 T_k(t) \sin \mu_k x + G_1(x, t), \quad t > 0, \end{aligned} \quad (3.73)$$

$$v_{xx}(x, t) = -\sqrt{\frac{2}{l}} \sum_{k=1}^{+\infty} \mu_k^2 T_k(t) \sin \mu_k x, \quad (3.74)$$

$$v_t(x, t) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sum_{k=1}^{+\infty} T'_k(t) \sin \mu_k x, \quad t < 0, \quad (3.75)$$

$$\begin{aligned} v_{tt}(x, t) &= \sqrt{\frac{2}{l}} \sum_{k=1}^{+\infty} T''_k(t) \sin \mu_k x = \\ &= -\sqrt{\frac{2}{l}} \sum_{k=1}^{+\infty} (\lambda_k^2 T_k(t) - g_{2k}(t)) \sin \mu_k x = \\ &= -\sqrt{\frac{2}{l}} \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k^2 T_k(t) \sin \mu_k x + G_2(x, t), \quad t > 0. \end{aligned} \quad (3.76)$$

Ряды (3.2) и (3.73)–(3.76) в силу леммы 3.6 мажорируются рядом

$$M_{16} \sum_{k=k_0+1}^{+\infty} k \|g_{1k}\|_C + k \|g_{2k}\|_C. \quad (3.77)$$

Лемма 3.11. Пусть выполнены следующие условия:

$$\begin{aligned} G_1(x, t) &\in C(\overline{D}_+) \cap C_{x,t}^{2,0}(\overline{D}_+), \quad G_2(x, t) \in C(\overline{D}_-) \cap C_{x,t}^{2,0}(\overline{D}_-), \\ G_1(0, t) &= G_1(l, t) = 0, \quad G''_{1xx}(0, t) = G''_{1xx}(l, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq \beta, \\ G_2(0, t) &= G_2(l, t) = 0, \quad G''_{2xx}(0, t) = G''_{2xx}(l, t) = 0, \quad -\alpha \leq t \leq 0. \end{aligned}$$

Тогда справедливы представления

$$g_{1k}(t) = -\frac{1}{\mu_k^2} \int_0^l G'''_{1xx}(x, t) \sin \mu_k x \, dx = \frac{g_{1k}^{(2)}(t)}{\mu_k^2}, \quad (3.78)$$

$$g_{2k}(t) = -\frac{1}{\mu_k^2} \int_0^l G'''_{2xx}(x, t) \sin \mu_k x \, dx = \frac{g_{2k}^{(2)}(t)}{\mu_k^2} \quad (3.79)$$

и

$$\sum_{k=1}^{+\infty} |g_{1k}^{(2)}(t)|^2 \leq \|g_1^{(2)}(x, t)\|_{L_2[0,l]}^2, \quad \sum_{k=1}^{+\infty} |g_{2k}^{(2)}(t)|^2 \leq \|g_2^{(2)}(x, t)\|_{L_2[0,l]}^2, \quad -\alpha \leq t \leq \beta. \quad (3.80)$$

Тогда в силу леммы 3.9 ряд (3.77) оценивается рядом

$$M_{17} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} \left[\|g_{1k}^{(2)}\|_C + \|g_{2k}^{(2)}\|_C \right]. \quad (3.81)$$

Из сходимости ряда (3.81) в силу признака Вейерштрасса следует, что ряды (3.2), (3.73) и (3.75) сходятся равномерно на $\overline{D}$, а ряды (3.74) и (3.76) — на соответствующих замкнутых областях $\overline{D}_+$ и $\overline{D}_-$. Поэтому функция $v(x, t)$, определенная рядом (3.2), удовлетворяет условиям задачи (1.9)–(1.12), (1.15).

Итак, доказано следующее утверждение.

Теорема 3.2. Если функции $G_i(x, t)$, $i = 1, 2$, удовлетворяют условиям леммы 3.11 и выполнены условия леммы 3.1, то существует единственное решение задачи (1.9)–(1.12), (1.15) и оно определяется рядом (3.2).

Если для чисел $\tilde{\alpha}$ из леммы 3.2 при некоторых $k = s = k_1, k_2, \dots, k_m$, где $1 \leq k_1 < k_2 < \dots < k_m \leq k_0$, $k_i, i = \overline{1, m}$, m — заданные натуральные числа, выполняется равенство $\Delta_2(s) = 0$, то для разрешимости задачи (1.9)–(1.12), (1.15) необходимо и достаточно, чтобы

$$\frac{g_{1k}(0+0)}{\lambda_k} \sin \lambda_k \alpha - \frac{1}{\lambda_k} \int_{-\alpha}^0 g_{2k}(t) \sin [\lambda_k(t + \alpha)] dt = 0, \quad s = k_1, k_2, \dots, k_m. \quad (3.82)$$

В этом случае решение задачи (1.9)–(1.12), (1.15) определяется в виде суммы ряда

$$v(x, t) = \sqrt{\frac{2}{l}} \left(\sum_{k=1}^{k_1-1} + \dots + \sum_{k=k_{m-1}+1}^{k_m-1} + \sum_{k=k_m+1}^{+\infty} \right) T_k(t) \sin \mu_k x + \sqrt{\frac{2}{l}} \sum_p T_s(t) \sin \mu_s x, \quad (3.83)$$

где в последней сумме s принимает значения $k_1, k_2, \dots, k_m$; $T_s(t)$ здесь определяется по формуле (3.11), где k надо заменить на s , и a_s — произвольная постоянная, отличная от нуля; если в конечных суммах в правой части (3.83) верхний предел меньше нижнего, то их следует считать нулями.

Таким образом, доказано следующее утверждение.

Теорема 3.3. Пусть выполнены условия леммы 3.2 и функции $G_i(x, t)$, $i = 1, 2$, удовлетворяют условиям леммы 3.11. Если $\Delta_2(k) \neq 0$ при $k = \overline{1, k_0}$, то существует единственное решение задачи (1.9)–(1.12), (1.15), которое определяется рядом (3.2), коэффициенты которого задаются формулами (3.11) и (3.14); если $\Delta_2(k) = 0$ при некоторых $k = k_1, k_2, \dots, k_m \leq k_0$, то задача (1.9)–(1.12), (1.15) разрешима только тогда, когда выполнены условия (3.82) и решение в этом случае определяется в виде суммы ряда (3.83).

Пусть выполнены условия леммы 3.3. Ряды (3.2) и (3.73)–(3.76) в силу леммы 3.8 мажорируются рядом

$$M_{18} \sum_{k=k_0+1}^{+\infty} k^2 \|g_{1k}\|_C + k^2 \|g_{2k}\|_C. \quad (3.84)$$

Лемма 3.12. Пусть выполнены следующие условия:

$$\begin{aligned} G_1(x, t) &\in C(\overline{D}_+) \cap C_{x,t}^{3,0}(\overline{D}_+), \quad G_2(x, t) \in C(\overline{D}_-) \cap C_{x,t}^{3,0}(\overline{D}_-), \\ G_1(0, t) &= G_1(l, t) = 0, \quad G_{1xx}''(0, t) = G_{1xx}''(l, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq \beta, \\ G_2(0, t) &= G_2(l, t) = 0, \quad G_{2xx}''(0, t) = G_{2xx}''(l, t) = 0, \quad -\alpha \leq t \leq 0. \end{aligned}$$

Тогда справедливы представления

$$g_{1k}(t) = -\frac{1}{\mu_k^3} \int_0^l G_{1xxx}'''(x, t) \cos \mu_k x dx = -\frac{g_{1k}^{(3)}(t)}{\mu_k^3}, \quad (3.85)$$

$$g_{2k}(t) = -\frac{1}{\mu_k^3} \int_0^l G_{2xxx}'''(x, t) \cos \mu_k x dx = -\frac{g_{2k}^{(3)}(t)}{\mu_k^3}, \quad (3.86)$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} |g_{1k}^{(3)}(t)|^2 \leq \|g_1^{(3)}(x, t)\|_{L_2[0,l]}^2, \quad \sum_{k=1}^{+\infty} |g_{2k}^{(3)}(t)|^2 \leq \|g_2^{(3)}(x, t)\|_{L_2[0,l]}^2, \quad -\alpha \leq t \leq \beta. \quad (3.87)$$

Тогда в силу леммы 3.12 ряд (3.84) оценивается рядом

$$M_{19} \sum_{k=k_0+1}^{+\infty} \frac{1}{k} \left[\|g_{1k}^{(3)}\|_C + \|g_{2k}^{(3)}\|_C \right]. \quad (3.88)$$

Поскольку ряд (3.88) сходится, то ряды (3.2), (3.73) и (3.75) сходятся равномерно на $\overline{D}$, а ряды (3.74) и (3.76) — на соответствующих замкнутых областях $\overline{D}_+$ и $\overline{D}_-$. Значит, функция $v(x, t)$, определенная рядом (3.2), удовлетворяет условиям задачи (1.9)–(1.12), (1.15).

Итак, доказаны следующие утверждения.

Теорема 3.4. Пусть выполнены условия леммы 3.3 и функции $G_i(x, t)$, $i = 1, 2$, удовлетворяют условиям леммы 3.12. Если $\Delta_2(k) \neq 0$ при $k = \overline{1, k_0}$, то существует единственное решение задачи (1.9)–(1.12), (1.15), которое определяется рядом (3.2); если $\Delta_2(k) = 0$ при некоторых $k = k_1, k_2, \dots, k_m \leq k_0$, то задача (1.9)–(1.12), (1.15) разрешима только тогда, когда выполнены условия (3.82), и решение в этом случае определяется в виде суммы ряда (3.83).

Теорема 3.5. Если функции $G_i(x, t)$, $i = 1, 2$, удовлетворяют условиям леммы 3.12 и выполнены условия леммы 3.4, то существует единственное решение задачи (1.9)–(1.12), (1.15) и оно определяется рядом (3.2).

Пусть выполнены условия леммы 3.5. Ряды (3.2) и (3.73)–(3.76) в силу леммы 3.10 мажорируются рядом

$$M_{20} \sum_{k=k_0+1}^{+\infty} k^{2+\varepsilon} \|g_{1k}\|_C + k^{2+\varepsilon} \|g_{2k}\|_C. \quad (3.89)$$

Лемма 3.13. Пусть выполнены следующие условия:

$$\begin{aligned} G_1(x, t) &\in C(\overline{D}_+) \cap C_{x,t}^{3+\nu,0}(\overline{D}_+), \quad G_2(x, t) \in C(\overline{D}_-) \cap C_{x,t}^{3+\nu,0}(\overline{D}_-), \quad \varepsilon < \nu < 1, \\ G_1(0, t) &= G_1(l, t) = 0, \quad G''_{1xx}(0, t) = G''_{1xx}(l, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq \beta, \\ G_2(0, t) &= G_2(l, t) = 0, \quad G''_{2xx}(0, t) = G''_{2xx}(l, t) = 0, \quad -\alpha \leq t \leq 0. \end{aligned}$$

Тогда

$$|g_{1k}(t)| \leq \frac{M_7}{k^{3+\nu}}, \quad |g_{2k}(t)| \leq \frac{M_8}{k^{3+\nu}}. \quad (3.90)$$

Теорема 3.6. Пусть выполнены условия леммы 3.5 и функции $G_i(x, t)$, $i = 1, 2$, удовлетворяют условиям леммы 3.13. Тогда существует единственное решение задачи (1.9)–(1.12), (1.15) и оно определяется рядом (3.2).

3.4. Построение решения задачи с ненулевыми граничными условиями. На основании теорем 3.2–3.6 и формул (1.6)–(1.8) нетрудно найти решение задачи (1.2)–(1.5). Предварительно на основании равенств (1.12) и (1.13) вычислим условия-равенства леммы 3.11:

$$F_1(0, t) - h'_1(t) - b^2 t^n h_1(t) - \frac{1}{\alpha} \varphi''(0) = F_1(l, t) - h'_2(t) - b^2 t^n h_2(t) - \frac{1}{\alpha} \varphi''(l) = 0,$$

$$\begin{aligned} F''_{1xx}(0, t) - \frac{1}{\alpha} \varphi^{IV}(0) + \frac{1 + b^2 t^{n+1}}{\alpha} \varphi''(0) = \\ = F''_{1xx}(l, t) - \frac{1}{\alpha} \varphi^{IV}(l) + \frac{1 + b^2 t^{n+1}}{\alpha} \varphi''(l) = 0, \quad 0 \leq t \leq \beta; \end{aligned} \quad (3.91)$$

$$F_2(0, t) + h''_1(t) + b^2 h_1(t) \frac{t}{\alpha} \varphi''(0) = F_2(l, t) + h''_2(t) + b^2 h_2(t) - \frac{t}{\alpha} \varphi''(l) = 0,$$

$$\begin{aligned} F''_{2xx}(0, t) - \frac{t}{\alpha} \varphi^{IV}(0) + \frac{b^2 t}{\alpha} \varphi''(0) = \\ = F''_{2xx}(l, t) - \frac{t}{\alpha} \varphi^{IV}(l) + \frac{b^2 t}{\alpha} \varphi''(l) = 0, \quad -\alpha \leq t \leq 0. \end{aligned} \quad (3.92)$$

Теорема 3.7. Пусть выполнены условия леммы 3.1, условия

$$\begin{aligned} F_1(x, t) &\in C(\overline{D}_+) \cap C_{x,t}^{2,0}(\overline{D}_+), \quad F_2(x, t) \in C(\overline{D}_-) \cap C_{x,t}^{2,0}(\overline{D}_-), \\ \varphi(x) &\in C^4[0, l], \quad h_1(t) \in C^1[0, \beta], \quad h_2(t) \in C^2[-\alpha, 0] \end{aligned}$$

и имеют место равенства (3.91) и (3.92). Тогда существует единственное решение задачи (1.2)–(1.5) и оно определяется по формуле (2.65), где функции $v(x, t)$, $z(x, t)$ и $w(x, t)$ определяются соответственно формулами (3.2), (1.7) и (1.8).

Аналогично устанавливаются теоремы существования решения задачи (1.2)–(1.5) при выполнении соответствующих лемм 3.2–3.5.

4. ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СО СТЕПЕННЫМ ВЫРОЖДЕНИЕМ НА ЛИНИИ ИЗМЕНЕНИЯ ТИПА

Рассмотрим задачу (1.2)–(1.5) для уравнения смешанного типа (1.1) со степенным вырождением.

4.1. Формальное построение решения задачи с нулевыми граничными условиями. Решение задачи (1.9)–(1.12), (1.15), аналогично разделам 2 и 3, будем искать в виде суммы ряда по собственным функциям соответствующей одномерной спектральной задачи

$$v(x, t) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) \sin \mu_k x, \quad \mu_k = \frac{\pi k}{l}, \quad (4.1)$$

где коэффициенты $T_k(t)$ определяются по формуле

$$T_k(t) = \sqrt{\frac{2}{l}} \int_0^l v(x, t) \sin \mu_k x \, dx \quad (4.2)$$

и удовлетворяют граничным условиям

$$T_k(-\alpha) = 0, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (4.3)$$

Введем вспомогательные функции

$$T_{k,\varepsilon}(t) = \sqrt{\frac{2}{l}} \int_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} v(x, t) \sin \mu_k x \, dx, \quad (4.4)$$

где ε — достаточно малое положительное число. Дифференцируя равенство (4.4) по t при $t > 0$ один раз, а при $t < 0$ — два раза и учитывая уравнение (1.1), получим

$$\begin{aligned} T'_{k,\varepsilon}(t) &= \sqrt{\frac{2}{l}} \int_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} v_t \sin \mu_k x \, dx = \sqrt{\frac{2}{l}} \int_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} [t^n v_{xx} - b^2 t^n v - G_1(x, t)] \sin \mu_k x \, dx = \\ &= -b^2 t^n T_{k,\varepsilon}(t) - \sqrt{\frac{2}{l}} \int_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} G_1(x, t) \sin \mu_k x \, dx + t^n \sqrt{\frac{2}{l}} \int_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} v_{xx} \sin \mu_k x \, dx, \end{aligned} \quad (4.5)$$

$$\begin{aligned} T''_{k,\varepsilon}(t) &= \sqrt{\frac{2}{l}} \int_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} v_{tt} \sin \mu_k x \, dx = \sqrt{\frac{2}{l}} \int_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} [(-t)^m v_{xx} - b^2 (-t)^m v - G_2(x, t)] \sin \mu_k x \, dx = \\ &= -b^2 (-t)^m T_{k,\varepsilon}(t) - \sqrt{\frac{2}{l}} \int_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} G_2(x, t) \sin \mu_k x \, dx + (-t)^m \sqrt{\frac{2}{l}} \int_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} v_{xx} \sin \mu_k x \, dx. \end{aligned} \quad (4.6)$$

В интегралах, содержащих производные v_{xx} , выполним двукратное интегрирование по частям и затем перейдем к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$ с учетом граничных условий (1.9) и (1.10). Получим дифференциальные уравнения относительно коэффициентов $T_k(t)$ ряда (4.1):

$$T'_k(t) + \lambda_k^2 t^n T_k(t) = g_{1k}(t), \quad t > 0, \quad (4.7)$$

$$T''_k(t) + \lambda_k^2 (-t)^m T_k(t) = g_{2k}(t), \quad t < 0, \quad (4.8)$$

где $\lambda_k^2 = b^2 + \mu_k^2$, а $g_{ik}(t)$ определяются по формуле (2.10).

Дифференциальные уравнения (4.7) и (4.8) имеют общие решения

$$T_k(t) = \begin{cases} a_k e^{-\lambda_k^2 t^{n+1}/(n+1)} + \int_0^t g_{1k}(s) e^{-\lambda_k^2 (t^{n+1}/(n+1) - s^{n+1}/(n+1))} ds, & t > 0, \\ c_k \sqrt{-t} J_{1/(2q)}(p_k(-t)^q) + d_k \sqrt{-t} J_{-1/(2q)}(p_k(-t)^q) + W_k(t), & t < 0, \end{cases} \quad (4.9)$$

где $W_k(t)$ определяется по формуле (2.14); отметим, что для $W_k(t)$ справедлива лемма 2.1.

По условию (1.15) решение $v(x, t)$ принадлежит классу $C(\overline{D}) \cap C^1(D)$; тогда для функций (4.9) выполнены условия склеивания:

$$T_k(0+0) = T_k(0-0), \quad T'_k(0+0) = T'_k(0-0), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Функции (4.9) удовлетворяют условиям сопряжения только тогда, когда

$$d_k = a_k \gamma_{-1/(2q)}(k), \quad c_k = -g_{1k}(0+0) \gamma_{1/(2q)}(k).$$

Подставляя найденные значения c_k и d_k в (4.9), получим

$$T_k(t) = \begin{cases} a_k e^{-\lambda_k^2 t^{n+1}/(n+1)} + \int_0^t g_{1k}(s) e^{-\lambda_k^2 (t^{n+1}/(n+1) - s^{n+1}/(n+1))} ds, & t > 0, \\ a_k \gamma_{-1/(2q)}(k) \sqrt{-t} J_{-1/(2q)}(p_k(-t)^q) - \\ - g_{1k}(0+0) \gamma_{1/(2q)}(k) \sqrt{-t} J_{1/(2q)}(p_k(-t)^q) + W_k(t), & t < 0. \end{cases} \quad (4.10)$$

Теперь для нахождения коэффициентов a_k воспользуемся граничным условием (4.3):

$$a_k \gamma_{-1/(2q)}(k) \sqrt{\alpha} J_{-1/(2q)}(p_k \alpha^q) = g_{1k}(0+0) \gamma_{1/(2q)}(k) \sqrt{\alpha} J_{1/(2q)}(p_k \alpha^q) - W_k(-\alpha) = w_{3k}. \quad (4.11)$$

Из равенства (4.11) при условии, что

$$\Delta_3(k) = \gamma_{-1/(2q)}(k) \sqrt{\alpha} J_{-1/(2q)}(p_k \alpha^q) \neq 0 \quad (4.12)$$

при всех $k \in \mathbb{N}$, находим

$$a_k = \frac{w_{3k}}{\Delta_3(k)}. \quad (4.13)$$

Таким образом, мы формально построили решение задачи (1.9)–(1.12), (1.15) в виде суммы ряда (4.1), так как коэффициенты его при условии (4.12) однозначно определяются по формулам (4.10) и (4.13).

4.2. Единственность решения задачи. Пусть $v(x, t)$ — решение задачи (1.9)–(1.12), (1.15) и $G_1(x, t) = G_2(x, t) \equiv 0$, и выполнены условия (4.12) при всех $k \in \mathbb{N}$. Тогда $a_k \equiv 0$ и $T_k \equiv 0$. Отсюда в силу формулы (4.2) при всех $t \in [-\alpha, \beta]$ и $k \in \mathbb{N}$, получим

$$\int_0^l v(x, t) \sin \mu_k x \, dx = 0. \quad (4.14)$$

Из равенств (4.14) в силу полноты системы синусов $\{\sqrt{2/l} \sin \mu_k x\}_{k \geq 1}$ в пространстве $L_2[0, l]$ следует, что $v(x, t) = 0$ почти всюду на $[0, l]$ при любом $t \in [-\alpha, \beta]$. Поскольку функция $v(x, t)$ непрерывна на $\overline{D}$, то $v(x, t) \equiv 0$ в $\overline{D}$.

Пусть при некоторых α, l, b, m и $k = s \in \mathbb{N}$ нарушено условие (4.12), т.е. $\Delta_3(s) = 0$. Тогда однородная задача (1.9)–(1.12), (1.15) (где $G_i(x, t) \equiv 0, i = 1, 2$) имеет ненулевое решение

$$v_s(x, t) = \begin{cases} c_s e^{-\lambda_s^2 t^{n+1}/(n+1)} \sin \mu_s x, & t > 0, \\ c_s \gamma_{-1/(2q)}(s) \sqrt{-t} J_{-1/(2q)}(p_s(-t)^q) \sin \mu_s x, & t < 0, \end{cases} \quad (4.15)$$

где $c_s \neq 0$ — произвольная постоянная.

Отсюда следует критерий единственности решения задачи (1.9)–(1.12), (1.15).

Теорема 4.1. *Если существует решение задачи (1.9)–(1.12), (1.15), то оно единственно только тогда, когда выполнены условия (4.12) при всех $k \in \mathbb{N}$.*

4.3. Обоснование существования решения задачи с нулевыми граничными условиями. Выражение $\Delta_3(k)$ при каждом k имеет счетное множество нулей относительно α_{ql} . Для обоснования существования решения задачи (1.9)–(1.12), (1.15) необходимо показать существование таких чисел α , β , b , t и n , что при достаточно больших k выражение $\Delta_3(k)$ отделено от нуля с соответствующей асимптотикой.

Лемма 4.1. *Предположим, что выполнено одно из следующих условий:*

- 1) $\alpha_{ql} = \alpha^q/(ql)$ — любое натуральное число;
- 2) $\alpha_{ql} = p/t$ — любое дробное число, где p и t — взаимно простые натуральные числа и $r/t \neq (3q-1)/(4q)$ при $r = \overline{1, t-1}$.

Тогда существуют такие положительные постоянные $k_0 \in \mathbb{N}$ и C_0 , что при любых $k > k_0$ и фиксированных $\beta > 0$, $b \geq 0$, $t > 0$ и $n > 0$ справедлива оценка

$$|k^\lambda \Delta_3(k)| \geq C_0 > 0, \quad \lambda = \frac{1}{2} - \frac{1}{2q}. \quad (4.16)$$

Доказательство. Проводя аналогичные рассуждения как и в доказательстве леммы 2.3, при $k > k_1$, где k_1 — достаточно большое натуральное число, имеем

$$\Delta_3(k) = B_k \sin \left(\pi k \alpha_{ql} \tilde{\lambda}_k + \pi \frac{q+1}{4q} \right) + O(k^{-2}), \quad (4.17)$$

где

$$B_k = k^\lambda p_k^{-1/2} \sqrt{\alpha} \gamma_{-1/(2q)}(k) \sqrt{\frac{2}{\pi \alpha_q}}, \quad \tilde{\lambda}_k = \sqrt{1 + \left(\frac{bl}{\pi k} \right)^2}.$$

В случае $b > 0$ выражение $\tilde{\lambda}_k$, которое зависит от bl , при условии (2.32) можно представить в виде (2.33). Тогда соотношение (4.17) с учетом (2.33) принимает вид

$$\Delta_3(k) = B_k \sin \left(\pi k \alpha_{ql} + \alpha_{ql} \tilde{\theta}_k + \pi \frac{q+1}{4q} \right) + O(k^{-2}) = B_{1k} + B_{2k}, \quad \tilde{\theta}_k = \pi k \theta_k. \quad (4.18)$$

Отметим, что последовательность B_k ограничена и отделена от нуля, поскольку

$$\lim_{k \rightarrow \infty} B_k = B = 2^{-\lambda} \pi^{1/2+\lambda} \alpha^{1/2-q/2} q^{-\lambda} l^{-1-\lambda} \Gamma \left(\frac{1}{2q} \right) > 0.$$

В дальнейшем рассмотрим B_{1k} . Пусть $\alpha_{ql} = p/t$ — дробное число. Разделим kp на t с остатком: $kp = st + r$, $0 \leq r < t$, $s, r \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$. Тогда выражение B_{1k} можно оценить следующим образом:

$$|B_{1k}^{(1)}| = B_k \left| \sin \left(\pi \frac{r}{t} + \pi \frac{p}{t} \tilde{\theta}_k + \pi \frac{q+1}{4q} \right) \right| > \frac{B}{2} \left| \sin \left(\pi \frac{r}{t} + \pi \frac{q+1}{4q} \right) \right| = C_1 \geq 0,$$

так как в силу оценки (2.34) существует конечный предел

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |B_{1k}^{(1)}| = 2C_1,$$

где C_i — положительные постоянные, зависящие, вообще говоря, от α , β , b и t .

Теперь потребуем, чтобы постоянная C_1 была больше нуля; это возможно только тогда, когда

$$\pi \frac{r}{t} + \pi \frac{q+1}{4q} \neq \pi d \quad \text{или} \quad \frac{r}{t} + \frac{q+1}{4q} \neq d, \quad d \in \mathbb{N},$$

или

$$\frac{1}{q} \neq 1 - 4d + 4\frac{r}{t}. \quad (4.19)$$

Если число q иррационально, то неравенство (4.19) при всех r , t и d имеет место. Рассмотрим случай, когда q — рациональное число. Пусть $t = 1$, т.е. в этом случае $\alpha_{ql} = p$ — натуральное

число и потому $r = 0$; тогда неравенство (4.19) выполняется при всех $q > 1$ и $d \in \mathbb{N}$. Если $t \geq 2$, то в силу оценки

$$\frac{1}{4} < \frac{r}{t} + \frac{q-1}{4q} < 1 + \frac{1}{2}$$

неравенство (4.19) имеет место при всех $d \geq 2$. Если $d = 1$, то можно подобрать такое число r/t , что нарушается условие (4.19), т.е. выполняется равенство

$$\frac{r}{t} = \frac{3q-1}{4q}. \quad (4.20)$$

Действительно можно подобрать такое число r/t , что выполняется равенство (4.20), когда q — рациональное число. Если q — натуральное число, то положим $t = 4q$, а за r примем число $r = 3q - 1$, так как $r = 3q - 1 < t = 4q$.

Пусть $q = q_1/q_2$, $q_1, q_2 \in \mathbb{N}$, $(q_1, q_2) = 1$; при этом $q_1 > q_2$. В этом случае уравнение (4.20) принимает вид

$$\frac{r}{t} = \frac{3q_1 - q_2}{4q_1}. \quad (4.21)$$

Положим $t = 4q_1$ и $r = 3q_1 - q_2$. Тогда соотношение (4.21) становится верным равенством и $r = 3q_1 - q_2 < t = 4q_1 \Leftrightarrow q_2 < q_1$. По условию этот случай исключается.

Итак, при указанных α_{ql} существуют такие $k_2 \in \mathbb{N}$ и $C_1 > 0$, что при всех $k > k_3$

$$|B_{1k}| > \frac{1}{2}C_1 = C_2. \quad (4.22)$$

Поскольку выражение B_{2k} является бесконечно малой при $k \rightarrow \infty$, то существует такое $k_3 \in \mathbb{N}$, что при всех $k > k_3$ справедливы неравенства

$$|B_{2k}| < \frac{C_2}{2}. \quad (4.23)$$

Тогда из представления (4.18) на основании оценок (2.39) и (2.40), получим

$$|k^\lambda \Delta_3(k)| \geq |B_{1k}| - |B_{2k}| > \frac{C_2}{2} = C_0 > 0$$

при $k > k_0 = \max\{k_1, k_2, k_3\}$.

Пусть $b = 0$. Тогда $\tilde{\lambda}_k \equiv 1$, $\theta_k \equiv 0$. Рассуждая аналогично, получим оценку (4.16). $\square$

Замечание 4.1. Отметим, что условие

$$\frac{r}{t} \neq \frac{3q-1}{4q} \quad \text{при некотором } r = \overline{1, t-1}, t \in \mathbb{N}, \quad (4.24)$$

в лемме 4.1 существенно: аналогично замечанию 2.1 можно показать, что в противном случае оценка (4.16) не имеет места.

Лемма 4.2. Пусть $\alpha_{ql} = p/t$ — любое дробное число, где p и t — взаимно простые натуральные числа и $r/t = (3q-1)/(4q)$ при некотором $r = \overline{1, t-1}$. Тогда существуют такие положительные постоянные $k_0 \in \mathbb{N}$ и C_0 , что при любых $k > k_0$ и фиксированных $b \geq 0$ справедлива оценка

$$|k^{1+\lambda} \Delta_3(k)| \geq C_0 > 0, \quad \lambda = \frac{1}{2} - \frac{1}{2q}. \quad (4.25)$$

Лемма 4.3. Если выполнены условия леммы 4.1, то при всех $k > k_0$ справедливы следующие оценки:

$$\begin{aligned} |T_k(t)| &\leq M_1 \left[k^{-1/q} \|g_{1k}\|_C + k^{-1/q} \|g_{2k}\|_C \right], & t \in [0, \beta], \\ |T'_k(t)| &\leq M_2 \left[k^{2-1/q} \|g_{1k}\|_C + k^{2-1/q} \|g_{2k}\|_C \right], & t \in [0, \beta], \\ |T_k(t)| &\leq M_3 \left[k^{-1/q} \|g_{1k}\|_C + k^{-1/q} \|g_{2k}\|_C \right], & t \in [-\alpha, 0], \\ |T'_k(t)| &\leq M_4 \left[k^{1+2\lambda} \|g_{1k}\|_C + k^{1+2\lambda} \|g_{2k}\|_C \right], & t \in [-\alpha, 0], \end{aligned}$$

$$|T_k''(t)| \leq M_5 \left[k^{2-1/q} \|g_{1k}\|_C + k^{2-1/q} \|g_{2k}\|_C \right], \quad t \in [-\alpha, 0],$$

где

$$\|g_{1k}\|_C = \max_{0 \leq t \leq \beta} |g_{1k}(t)|, \quad \|g_{2k}\|_C = \max_{-\alpha \leq t \leq 0} |g_{2k}(t)|$$

и M_i — положительные постоянные, зависящие от α , β , b и m .

Лемма 4.4. Если выполнены условия леммы 4.1, то при всех $k > k_0$ справедливы следующие оценки:

$$\begin{aligned} |T_k(t)| &\leq M_6 \left[k^{1-1/q} \|g_{1k}\|_C + k^{1-1/q} \|g_{2k}\|_C \right], \quad t \in [0, \beta], \\ |T_k'(t)| &\leq M_7 \left[k^{3-1/q} \|g_{1k}\|_C + k^{3-1/q} \|g_{2k}\|_C \right], \quad t \in [0, \beta], \\ |T_k(t)| &\leq M_8 \left[k^{1-1/q} \|g_{1k}\|_C + k^{1-1/q} \|g_{2k}\|_C \right], \quad t \in [-\alpha, 0], \\ |T_k'(t)| &\leq M_9 \left[k^{2+2\lambda} \|g_{1k}\|_C + k^{2+2\lambda} \|g_{2k}\|_C \right], \quad t \in [-\alpha, 0], \\ |T_k''(t)| &\leq M_{10} \left[k^{3-1/q} \|g_{1k}\|_C + k^{3-1/q} \|g_{2k}\|_C \right], \quad t \in [-\alpha, 0], \end{aligned}$$

где M_i — положительные постоянные, зависящие от α , β , b и m .

Доказательство лемм 4.3 и 4.4 проводится аналогично доказательству леммы 2.7.

Пусть выполнены условия леммы 4.1. Формально из (4.1) почленным дифференцированием составим ряды

$$\begin{aligned} v_t(x, t) &= \sqrt{\frac{2}{l}} \sum_{k=1}^{+\infty} T_k'(t) \sin \mu_k x = \\ &= -\sqrt{\frac{2}{l}} \sum_{k=1}^{+\infty} (\lambda_k^2 T_k(t) - g_{1k}(t)) \sin \mu_k x = \\ &= -\sqrt{\frac{2}{l}} \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k^2 T_k(t) \sin \mu_k x + G_1(x, t), \quad t > 0, \end{aligned} \tag{4.26}$$

$$v_{xx}(x, t) = -\sqrt{\frac{2}{l}} \sum_{k=1}^{+\infty} \mu_k^2 T_k(t) \sin \mu_k x, \tag{4.27}$$

$$v_t(x, t) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sum_{k=1}^{+\infty} T_k'(t) \sin \mu_k x, \quad t < 0, \tag{4.28}$$

$$\begin{aligned} v_{tt}(x, t) &= \sqrt{\frac{2}{l}} \sum_{k=1}^{+\infty} T_k''(t) \sin \mu_k x = \\ &= -\sqrt{\frac{2}{l}} \sum_{k=1}^{+\infty} (\lambda_k^2 T_k(t) - g_{2k}(t)) \sin \mu_k x = \\ &= -\sqrt{\frac{2}{l}} \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k^2 T_k(t) \sin \mu_k x + G_2(x, t), \quad t > 0. \end{aligned} \tag{4.29}$$

Ряды (4.1) и (4.26)–(4.29) в силу леммы 4.3 мажорируются рядом

$$M_{11} \sum_{k=k_0+1}^{+\infty} k^{2-1/q} \|g_{1k}\|_C + k^{2-1/q} \|g_{2k}\|_C. \tag{4.30}$$

Лемма 4.5. Пусть выполнены следующие условия:

$$\begin{aligned} G_1(x, t) &\in C(\overline{D}_+) \cap C_{x,t}^{2+\nu,0}(\overline{D}_+), \quad G_2(x, t) \in C(\overline{D}_-) \cap C_{x,t}^{2+\nu,0}(\overline{D}_-), \quad 1 - \frac{1}{q} < \nu < 1, \\ G_1(0, t) &= G_1(l, t) = 0, \quad G''_{1xx}(0, t) = G''_{1xx}(l, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq \beta, \\ G_2(0, t) &= G_2(l, t) = 0, \quad G''_{2xx}(0, t) = G''_{2xx}(l, t) = 0, \quad -\alpha \leq t \leq 0. \end{aligned}$$

Тогда справедливы оценки

$$|g_{1k}(t)| < \frac{M_{12}}{k^{2+\nu}}, \quad |g_{2k}(t)| < \frac{M_{13}}{k^{2+\nu}}.$$

В силу леммы 4.5 ряд (4.30) оценивается рядом

$$M_{14} \sum_{k=k_0+1}^{+\infty} \frac{1}{k^{\nu+1/q}}. \quad (4.31)$$

Поскольку ряд (4.31) сходится, тогда ряды (4.1), (4.26) и (4.28) сходятся равномерно на $\overline{D}$, а ряды (4.27) и (4.29) — на соответствующих замкнутых областях $\overline{D}_+$ и $\overline{D}_-$. Поэтому функция $v(x, t)$, определенная рядом (4.1), удовлетворяет условиям задачи (1.9)–(1.12), (1.15).

Если для чисел α_{ql} из леммы 4.1 при некоторых $k = s = k_1, k_2, \dots, k_m$, где $1 \leq k_1 < k_2 < \dots < k_m \leq k_0$, $k_i, i = \overline{1, m}$, m — заданные натуральные числа, выполняется равенство $\Delta_3(s) = 0$, то для разрешимости задачи (1.9)–(1.12), (1.15) необходимо и достаточно, чтобы

$$g_{1s}(0+0)\gamma_{1/(2q)}(s)\sqrt{\alpha}J_{1/(2q)}(p_s\alpha^q) + W_s(\alpha) = 0, \quad s = k_1, k_2, \dots, k_m. \quad (4.32)$$

В этом случае решение задачи (1.9)–(1.12), (1.15) определяется в виде суммы ряда

$$v(x, t) = \sqrt{\frac{2}{l}} \left(\sum_{k=1}^{k_1-1} + \dots + \sum_{k=k_{m-1}+1}^{k_m-1} + \sum_{k=k_m+1}^{+\infty} \right) T_k(t) \sin \mu_k x + \sqrt{\frac{2}{l}} \sum_s T_s(t) \sin \mu_s x, \quad (4.33)$$

где в последней сумме l принимает значения $k_1, k_2, \dots, k_m$. Здесь $T_s(t)$ определяется по формуле (4.10), где k надо заменить на s , a_s — произвольная постоянная, отличная от нуля. Если в конечных суммах в правой части (4.33) верхний предел меньше нижнего, то их следует считать нулями.

Таким образом, доказано следующее утверждение.

Теорема 4.2. Пусть выполнены условия леммы 4.1 и функции $G_i(x, t)$, $i = 1, 2$, удовлетворяют условиям леммы 4.4. Если $\Delta_3(k) \neq 0$ при $k = \overline{1, k_0}$, то существует единственное решение задачи (1.9)–(1.12), (1.15), которое определяется рядом (4.1), коэффициенты которого задаются формулами (4.10) и (4.13); если $\Delta_3(k) = 0$ при некоторых $k = k_1, k_2, \dots, k_m \leq k_0$, то задача (1.9)–(1.12), (1.15) разрешима только тогда, когда выполнены условия (4.32) и решение в этом случае определяется в виде суммы ряда (4.33).

Пусть выполнены условия леммы 4.2. Ряды (4.1) и (4.26)–(4.29) в силу леммы 4.4 мажорируются рядом

$$M_{15} \sum_{k=k_0+1}^{+\infty} k^{3-1/q} \|g_{1k}\|_C + k^{3-1/q} \|g_{2k}\|_C. \quad (4.34)$$

Лемма 4.6. Пусть выполнены следующие условия:

$$\begin{aligned} G_1(x, t) &\in C(\overline{D}_+) \cap C_{x,t}^{3+\nu,0}(\overline{D}_+), \quad G_2(x, t) \in C(\overline{D}_-) \cap C_{x,t}^{3+\nu,0}(\overline{D}_-), \quad 1 - \frac{1}{q} < \nu < 1, \\ G_1(0, t) &= G_1(l, t) = 0, \quad G''_{1xx}(0, t) = G''_{1xx}(l, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq \beta, \\ G_2(0, t) &= G_2(l, t) = 0, \quad G''_{2xx}(0, t) = G''_{2xx}(l, t) = 0, \quad -\alpha \leq t \leq 0. \end{aligned}$$

Тогда справедливы представления

$$|g_{1k}(t)| < \frac{M_{16}}{k^{3+\nu}}, \quad |g_{2k}(t)| < \frac{M_{17}}{k^{3+\nu}}.$$

В силу леммы 4.6 ряд (4.34) оценивается рядом

$$M_{18} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^{\nu+1/q}}. \quad (4.35)$$

В силу сходимости ряда (4.35) ряды (4.1), (4.26) и (4.28) сходятся равномерно на $\overline{D}$, а ряды (4.27) и (4.29) — на соответствующих замкнутых областях $\overline{D}_+$ и $\overline{D}_-$. Тогда функция $v(x, t)$, определенная рядом (4.1), удовлетворяет условиям задачи (1.9)–(1.12), (1.15).

Теорема 4.3. Пусть выполнены условия леммы 4.2 и функции $G_i(x, t)$, $i = 1, 2$, удовлетворяют условиям леммы 4.6. Если $\Delta_3(k) \neq 0$ при $k = \overline{1, k_0}$, то существует единственное решение задачи (1.9)–(1.12), (1.15), которое определяется рядом (4.1); если $\Delta_3(k) = 0$ при некоторых $k = k_1, k_2, \dots, k_m \leq k_0$, то задача (1.9)–(1.12), (1.15) разрешима только тогда, когда выполнены условия (4.32), и решение в этом случае определяется в виде суммы ряда (4.33).

4.4. Построение решения задачи с ненулевыми граничными условиями. На основании теорем 4.2, 4.3 и формул (1.6)–(1.8) нетрудно построить решение задачи (1.2)–(1.5). Пусть для определенности выполнены условия теоремы 4.2. Предварительно на основании равенств (1.12) и (1.13) вычислим условия-равенства леммы 4.5:

$$\begin{aligned} F_1(0, t) - h_1'(t) - b^2 t^n h_1(t) - \frac{1}{\alpha} \varphi''(0) &= F_1(l, t) - h_2'(t) - b^2 t^n h_2(t) - \frac{1}{\alpha} \varphi''(l) = 0, \\ F_{1xx}''(0, t) - \frac{1}{\alpha} \varphi^{IV}(0) + \frac{1 + b^2 t^{n+1}}{\alpha} \varphi''(0) &= \\ &= F_{1xx}''(l, t) - \frac{1}{\alpha} \varphi^{IV}(l) + \frac{1 + b^2 t^{n+1}}{\alpha} \varphi''(l) = 0, \quad 0 \leq t \leq \beta; \quad (4.36) \\ F_2(0, t) + h_1''(t) + b^2 (-t)^m h_1(t) \frac{t}{\alpha} \varphi''(0) &= F_2(l, t) + h_2''(t) + b^2 (-t)^m h_2(t) - \frac{t}{\alpha} \varphi''(l) = 0, \\ F_{2xx}''(0, t) - \frac{(-t)^{m+1}}{\alpha} \varphi^{IV}(0) + \frac{b^2 (-t)^{m+1}}{\alpha} \varphi''(0) &= \\ &= F_{2xx}''(l, t) - \frac{(-t)^{m+1}}{\alpha} \varphi^{IV}(l) + \frac{b^2 (-t)^{m+1}}{\alpha} \varphi''(l) = 0, \quad -\alpha \leq t \leq 0. \quad (4.37) \end{aligned}$$

Теорема 4.4. Пусть выполнены условия леммы 4.1, выполнены условия

$$\begin{aligned} F_1(x, t) &\in C(\overline{D}_+) \cap C_{x,t}^{2+\nu,0}(\overline{D}_+), \quad F_2(x, t) \in C(\overline{D}_-) \cap C_{x,t}^{2+\nu,0}(\overline{D}_-), \quad 1 - \frac{1}{q} < \nu < 1, \\ \varphi(x) &\in C^{4+\nu}[0, l], \quad h_1(t) \in C^1[0, \beta], \quad h_2(t) \in C^2[-\alpha, 0] \end{aligned}$$

и имеют место равенства (4.36) и (4.37). Если $\Delta_1(k) \neq 0$ при $k = \overline{1, k_0}$, то существует единственное решение задачи (1.2)–(1.5), которое определяется по формуле (2.65), где функции $v(x, t)$, $z(x, t)$ и $w(x, t)$ задаются соответственно формулами (4.1), (1.7) и (1.8); если $\Delta_1(k) = 0$ при некоторых $k = k_1, k_2, \dots, k_m \leq k_0$, то задача (1.2)–(1.5) разрешима только тогда, когда выполнены условия (4.32), и решение в этом случае определяется по формуле (2.65), где функция $v(x, t)$ определяется рядом (4.33).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Арнольд В. И. Малые знаменатели // Изв. РАН. Сер. мат. — 1961. — 25. — С. 21–86.
2. Арнольд В. И. Малые знаменатели и проблемы устойчивости движения в классической и небесной механике // Усп. мат. наук. — 1963. — 18, № 6 (114). — С. 91–192.
3. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. — М.: Наука, 1974.
4. Гельфанд И. М. Некоторые вопросы анализа и дифференциальных уравнений // Усп. мат. наук. — 1959. 14, № 3. — С. 3–19.
5. Джусраев Т. Д. Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанно-составного типов. — Ташкент: Фан, 1979.

6. Джурев Т. Д., Сопуев А., Мамажанов М. Краевые задачи для уравнений парабола-гиперболического типа. — Ташкент: Фан, 1986.
7. Зигмунд А. Тригонометрические ряды. — М.: Мир, 1965.
8. Капустин Н. Ю. Задача Трикоми для парабола-гиперболического уравнения с вырождающейся гиперболической частью, I // Диффер. уравн. — 1987. — 23, № 1. — С. 72–78.
9. Капустин Н. Ю. Задача Трикоми для парабола-гиперболического уравнения с вырождающейся гиперболической частью, II // Диффер. уравн. — 1988. — 24, № 8. — С. 1379–1386.
10. Капустин Н. Ю. Задачи для парабола-гиперболических уравнений и соответствующие спектральные вопросы с параметром в граничных точках / Автореферат дис. докт. физ.-мат. наук. — М.: МГУ, 2012.
11. Капустин Н. Ю., Моисеев Е. И. О спектральной задаче из теории парабола-гиперболического уравнения теплопроводности // Докл. РАН. — 1997. — 352, № 4. — С. 451.
12. Ладыженская О. А., Ступялис Л. Об уравнениях смешанного типа // Вестн. ЛГУ. Сер. мат., мех. астр. — 1965. — 19, № 4. — С. 38–46.
13. Ломов И. С. Малые знаменатели в аналитической теории вырождающихся дифференциальных уравнений // Диффер. уравн. — 1993. — 29, № 12. — С. 2079–2089.
14. Сабитов К. Б. Функциональные, дифференциальные и интегральные уравнения. — М.: Высшая школа, 2005.
15. Сабитов К. Б. Задача Трикоми для уравнения смешанного парабола-гиперболического типа в прямоугольной области // Мат. заметки. — 2009. — 86, № 2. — С. 273–279.
16. Сабитов К. Б. Начально-граничная задача для парабола-гиперболического уравнения со степенным вырождением на переходной линии // Диффер. уравн. — 2011. — 47, № 1. — С. 1–8.
17. Сабитов К. Б. Уравнения математической физики. — М.: Физматлит, 2013.
18. Сабитов К. Б. Прямые и обратные задачи для уравнений смешанного парабола-гиперболического типа. — Уфа: Гилем, 2015.
19. Сабитов К. Б., Разманова Л. Х. Начально-граничная задача для уравнения смешанного парабола-гиперболического типа в прямоугольной области // Диффер. уравн. — 2008. — 44, № 9. — С. 1175–1181.
20. Сабитов К. Б., Сафин Э. М. Обратная задача для уравнения смешанного парабола-гиперболического типа в прямоугольной области // Изв. вузов. Сер. мат. — 2010. — 56, № 4. — С. 55–62.
21. Сабитов К. Б., Сафин Э. М. Обратная задача для уравнения смешанного парабола-гиперболического типа // Мат. заметки. — 2010. — 87, № 6. — С. 907–918.
22. Сабитов К. Б., Сидоров С. Н. Об одной нелокальной задаче для вырождающегося парабола-гиперболического уравнения // Диффер. уравн. — 2014. — 50, № 3. — С. 356–365.
23. Сабитов К. Б., Сидоров С. Н. Обратная задача для вырождающегося парабола-гиперболического уравнения с нелокальным граничным условием // Изв. вузов. Сер. мат. — 2015. — 1. — С. 46–59.
24. Ступялис Л. Начально-краевые задачи для уравнений смешанного типа // Тр. МИАН СССР. — 1975. — 27. — С. 115–145.
25. Уфлянд Я. С. К вопросу о распространении колебаний в составных электрических линиях // Инж.-физ. ж. — 1964. — 7, № 1. — С. 89–92.
26. Уфлянд Я. С., Лозановская И. Т. Об одном классе задач математической физики со смешанным спектром собственных значений // Докл. АН СССР. — 1965. — 164, № 5. — С. 1005–1007.
27. Хинчин А. Я. Цепные дроби. — М.: Наука, 1978.
28. Шидловский А. Б. Диофантовы приближения и трансцендентные числа. — М.: Изд. МГУ, 1982.

К. Б. Сабитов

Институт прикладных исследований Республики Башкортостан, Стерлитамак

E-mail: sabitov_fmf@mail.ru

С. Н. Сидоров

Институт прикладных исследований Республики Башкортостан, Стерлитамак

E-mail: stsid@mail.ru



НЕКОММУТАТИВНАЯ ГЕОМЕТРИЯ И АНАЛИЗ

© 2017 г. А. Г. СЕРГЕЕВ

Аннотация. Одной из главных задач некоммутативной геометрии является перевод основных понятий анализа, топологии и дифференциальной геометрии на язык банаховых алгебр. В этом обзоре мы приводим целый ряд результатов подобного рода, уделяя особое внимание некоммутативной интерпретации понятий дифференциала и интеграла. Главными источниками сведений по некоммутативной геометрии служили для нас книги *Connes A. Noncommutative Geometry* (London–San Diego: Academic Press, 1994) и *Gracia-Bondia J. M., Varilly J. C., Figueroa H. Elements of Noncommutative Geometry* (Boston–Basel–Berlin: Birkhäuser, 2001).

Ключевые слова: C^* -алгебра, след Диксмье, вычет Водзицки, дифференциальная градуированная алгебра, цикл, фредгольмов модуль, коцикл Черна.

AMS Subject Classification: 47L30

СОДЕРЖАНИЕ

1. Некоммутативный интеграл	62
1.1. Идеалы в алгебре компактных операторов	62
1.2. След Диксмье	65
1.3. Вычет Водзицки псевдодифференциального оператора	67
2. Некоммутативное дифференциальное исчисление	70
2.1. Универсальная дифференциальная алгебра	70
2.2. Циклы и фредгольмовы модули	73
2.3. Связности	76
2.4. Когомологии Хохшильда	79
Список литературы	81

Одной из главных задач некоммутативной геометрии является перевод основных понятий анализа, топологии и дифференциальной геометрии на язык банаховых алгебр. В этом обзоре мы приводим целый ряд результатов подобного рода, уделяя особое внимание некоммутативной интерпретации понятий дифференциала и интеграла. Главными источниками сведений по некоммутативной геометрии служили для нас книги [4, 5].

Раздел 1 посвящен некоммутативному интегралу на C^* -алгебрах, роль которого играет след. В случае алгебры $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ компактных операторов в гильбертовом пространстве имеется обычное понятие следа, принимающего конечные значения на ядерных операторах. Однако с точки зрения приложений более важное значение имеет другой след, введенный Диксмье. Он определен на более широком идеале $\mathcal{L}^{1,\infty}$ в алгебре $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ и на ядерных операторах равен нулю. Теорема Конна устанавливает связь следа Диксмье с вычетом Водзицки для классических псевдодифференциальных операторов.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 16-01-00117, 16-52-12012), программы поддержки научных школ НШ-9110.2016.1 и программы Президиума РАН «Нелинейная динамика».

Раздел 2 посвящен некоммутативному дифференциальному исчислению на алгебрах. Для каждой алгебры с единицей строится универсальная дифференциальная алгебра над ней, являющаяся универсальным объектом в категории дифференциальных градуированных алгебр (DG-алгебр). Наиболее интересный класс DG-алгебр образуют циклы, иначе говоря, DG-алгебры с интегралом. Цикл можно построить по любому фредгольмову модулю над C^* -алгеброй A .

При помощи понятия универсальной DG-алгебры, можно определить некоммутативные аналоги связности и кривизны. Для интерпретации топологических объектов естественно использовать язык кохомологий Хохшильда. В частности, характер Черна цикла над алгеброй A трактуется как циклический коцикл Хохшильда над этой алгеброй.

1. НЕКОММУТАТИВНЫЙ ИНТЕГРАЛ

В п. 1.1 приводятся основные сведения об идеалах в алгебре компактных операторов, действующих в гильбертовом пространстве. В терминах сингулярных чисел компактного оператора T строится функция $\sigma_N(T)$ и вводится идеал $\mathcal{L}^{1,\infty}$, играющие важную роль в определении следа Диксмье. Это определение дается в п. 1.2, где также изучаются свойства указанного следа.

В следующем п. 1.3 определяется вычет Водзицки для классических псевдодифференциальных операторов на компактном римановом многообразии и устанавливается его связь со следом Диксмье (теорема Конна о следе).

1.1. Идеалы в алгебре компактных операторов. Первым шагом в построении некоммутативной версии анализа на C^* -алгебрах, как и в классическом анализе, является введение понятия «бесконечно малых» элементов. Их роль в алгебре ограниченных линейных операторов в гильбертовом пространстве играют компактные операторы, порядок «малости» которых определяется скоростью убывания их сингулярных чисел. Основной целью данного раздела является исследование поведения указанных чисел и определяемые этим поведением идеалы в алгебре компактных операторов.

Пусть T — компактный оператор в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ и $|T| = \sqrt{T^*T}$. Обозначим через $\{\mu_n(T)\}$ последовательность *сингулярных чисел* (s -чисел) оператора T , задаваемых собственными числами оператора $|T|$, упорядоченными по убыванию:

$$\mu_0(T) \geq \mu_1(T) \geq \dots,$$

так что $\mu_n(T) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Сингулярные числа оператора T находятся по *принципу минимакса*, а именно, по формуле

$$\mu_n(T) = \inf_E \left\{ \|T|E^\perp\| : \dim E = n \right\},$$

так что $\mu_n(T)$ совпадает с нижней гранью норм сужений оператора T на ортогональные дополнения к различным n -мерным подпространствам $E \subset \mathcal{H}$. На самом деле эта нижняя грань достигается на подпространстве E_n , порожденном первыми n собственными векторами оператора $|T|$, отвечающими собственным значениям $\mu_0, \dots, \mu_{n-1}$.

Иначе можно определить $\mu_n(T)$ как расстояние от оператора T до подпространства Fin_n операторов ранга $\leq n$. А именно,

$$\mu_n(T) = \inf_R \left\{ \|T - R\| : R \in \text{Fin}_n \right\}.$$

Сингулярные числа оператора T обладают следующими свойствами (см. [1]).

Свойства s -чисел.

- 1) $|\mu_n(T_1) - \mu_n(T_2)| \leq \|T_1 - T_2\|$, т.е. функционал $\mu_n(T)$ непрерывен по T в равномерной топологии при любом n .
- 2) $\mu_{n+m}(T_1 + T_2) \leq \mu_n(T_1) + \mu_m(T_2)$, где мы пользуемся вложением $\text{Fin}_n + \text{Fin}_m \subset \text{Fin}_{n+m}$.
- 3) $\mu_{n+m}(T_1 T_2) \leq \mu_n(T_1) + \mu_m(T_2)$.
- 4) Так как $\mu_0(T) = \|T\|$, то

$$\mu_n(T_1 T_2) \leq \mu_n(T_1) \|T_2\|, \quad \mu_n(T_1 T_2) \leq \|T_1\| \mu_n(T_2).$$

Определение 1. Пусть T — компактный оператор в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. Будем говорить, что T принадлежит пространству $\mathcal{L}^p = \mathcal{L}^p(\mathcal{H})$, $1 \leq p < \infty$, если

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mu_n(T)^p < \infty.$$

Пространство $\mathcal{L}^p$ является идеалом в алгебре $\mathcal{K} = \mathcal{K}(\mathcal{H})$ компактных операторов и в алгебре $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\mathcal{H})$ ограниченных линейных операторов, действующих в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$.

Особую роль играет класс $\mathcal{L}^1$ *ядерных операторов*, наделенный нормой

$$\|T\|_1 := \operatorname{Tr} |T| = \sum_{n=0}^{\infty} \mu_n(T) = \sum_{n=0}^{\infty} (u_n, Tu_n),$$

где $\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$ — ортонормированный базис в $\mathcal{H}$. (Заметим, что это определение не зависит от выбора ортонормированного базиса в $\mathcal{H}$.)

Введем величину, которая играет важную роль в последующем:

$$\sigma_N(T) := \sum_{n=0}^{N-1} \mu_n(T).$$

Ее можно определить иначе:

$$\sigma_N(T) = \sup_E \left\{ \|TP_E\|_1 : \dim E = N \right\},$$

где P_E — ортогональный проектор на подпространство E , а верхняя грань достигается снова на подпространстве E_N , порожденном первыми N собственными векторами оператора T .

Из последнего определения вытекает, что σ_N удовлетворяет неравенству треугольника

$$\sigma_N(T_1 + T_2) \leq \sigma_N(T_1) + \sigma_N(T_2)$$

и, следовательно, задает *норму* на $\mathcal{K}$.

Приведем еще одно, необходимое для дальнейшего, определение этой величины:

$$\sigma_N(T) = \inf \left\{ \|R\|_1 + N\|S\| : R, S \in \mathcal{K}, R + S = T \right\}.$$

Оно позволяет распространить определение σ_N как функции натурального параметра N на произвольные неотрицательные значения $\lambda \in [0, \infty)$, полагая

$$\sigma_\lambda(T) = \inf \left\{ \|R\|_1 + \lambda\|S\| : R, S \in \mathcal{K}, R + S = T \right\}.$$

Можно показать, что функция $\sigma_\lambda(T)$ обладает следующими свойствами:

- 1) $\sigma_\lambda(T)$ кусочно линейна и выпукла; более того, если $\lambda = N + t$ с $0 \leq t < 1$, так что $N = [\lambda]$, то

$$\sigma_\lambda(T) = (1 - t)\sigma_N(T) + t\sigma_{N+1}(T);$$

- 2) $\sigma_\lambda(S + T) \leq \sigma_\lambda(S) + \sigma_\lambda(T)$;
- 3) $\sigma_{\lambda+\mu}(S + T) \geq \sigma_\lambda(S) + \sigma_\mu(T)$.

Из двух последних свойств вытекает, что имеет место неравенство, выполняющееся для произвольных компактных положительных операторов S, T :

$$\sigma_\lambda(S + T) \leq \sigma_\lambda(S) + \sigma_\lambda(T) \leq \sigma_{2\lambda}(S + T).$$

Это свойство субаддитивности функционала $\sigma_\lambda(T)$ на конусе положительных компактных операторов сыграет важную роль при определении следа Диксмье в следующем пункте.

Помимо идеалов $\mathcal{L}^p$ введем еще интерполяционные идеалы $\mathcal{L}^{p,q}$.

Определение 2. Определим $\mathcal{L}^{p,q} = \mathcal{L}^{p,q}(\mathcal{H})$ при $1 < p < \infty$, $1 \leq q < \infty$, как интерполирующее пространство между $\mathcal{K}$ и $\mathcal{L}^1$. Именно, будем говорить, что оператор $T \in \mathcal{L}^{p,q}$, если

$$\sum_{N=1}^{\infty} N^{(\alpha-1)q-1} \sigma_N(T)^q < \infty,$$

где $\alpha = 1/p$. Дополним это определение при $q = \infty$, полагая, что $T \in \mathcal{L}^{p,\infty}$, если последовательность чисел $\{N^{\alpha-1}\sigma_N(T)\}_{N=1}^\infty$ ограничена.

Имеет место следующее утверждение.

Предложение 1. *Каждое из введенных пространств $\mathcal{L}^{p,q}$ является двусторонним идеалом в алгебре $\mathcal{K}$ компактных операторов. При $p_1 < p_2$ и при $p_1 = p_2$, $q_1 < q_2$ имеются включения*

$$\mathcal{L}^{p_1,q_1} \subset \mathcal{L}^{p_2,q_2}.$$

Рассмотрим подробнее некоторые конкретные примеры пространств $\mathcal{L}^{p,q}$.

Пространство $\mathcal{L}^{p,p}$, $1 \leq p < \infty$, совпадает с введенным ранее пространством $\mathcal{L}^p$, норма на котором задается формулой

$$\|T\|_p = (\text{Tr } |T|^p)^{1/p} = \left[\sum_{n=0}^{\infty} \mu_n(T)^p \right]^{1/p}.$$

Пространство $\mathcal{L}^{p,\infty}$, $1 < p < \infty$, состоит из компактных операторов T , для которых

$$\sigma_N(T) = O(N^{1-\alpha}), \quad \text{т.е.} \quad \mu_n(T) = O(n^{-\alpha}).$$

На этом пространстве имеется естественная норма

$$\|T\|_{p,\infty} = \sup_N \frac{1}{N^{1-\alpha}} \sigma_N(T).$$

Пространство $\mathcal{L}^{p,1}$ состоит из компактных операторов T , для которых сходится ряд

$$\sum_{N=1}^{\infty} N^{\alpha-2} \sigma_N(T),$$

что эквивалентно сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha-1} \mu_{n-1}(T).$$

Между этими пространствами имеются следующие вложения:

$$\mathcal{L}^{p-} \equiv \mathcal{L}^{p,1} \subset \mathcal{L}^p \equiv \mathcal{L}^{p,p} \subset \mathcal{L}^{p,\infty} \equiv \mathcal{L}^{p+}.$$

До сих пор мы определили пространства $\mathcal{L}^{p,q}$ для $1 < p < \infty$, $1 \leq q < \infty$. Дополним их определение при $p = 1$, $q = \infty$, полагая

$$\mathcal{L}^{1,\infty} = \{T \in \mathcal{K} : \sigma_N(T) = O(\log N)\}$$

и наделяя это пространство нормой

$$\|T\|_{1,\infty} = \sup_{N \geq 2} \frac{\sigma_N(T)}{\log N}.$$

Конечность этой нормы влечет соотношение на s -числа оператора T вида $\mu_n(T) = O(1/n)$. Пространство $\mathcal{L}^{1,\infty}$ является идеалом, двойственным к идеалу

$$\mathcal{L}^{\infty,1} = \left\{ T \in \mathcal{K} : \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_n(T)}{n} < \infty \right\}.$$

Как было указано выше, для ядерных операторов $T \in \mathcal{L}^1$ определен след, задаваемый суммой s -чисел этого оператора. Именно след будет в дальнейшем играть роль некоммутативного интеграла, однако с точки зрения приложений класс ядерных операторов слишком узок, поэтому в следующем пункте мы дадим другое определение следа, называемого следом Диксмье, имеющего смысл для более широкого класса операторов $T \in \mathcal{L}^{1,\infty}$.

1.2. След Диксмье. Пусть T — положительный оператор, принадлежащий идеалу $\mathcal{L}^{1,\infty}$. Нам хотелось бы определить его след по формуле

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\log N} \sum_{n=0}^{N-1} \mu_n(T) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\sigma_N(T)}{\log N}. \quad (1)$$

При этом возникают два вопроса:

- 1) Существует ли предел в формуле (1) для всех операторов $T \in \mathcal{L}^{1,\infty}$?
- 2) Является ли функционал, задаваемый формулой (1), линейным?

Заметим, что решение вопроса о линейности указанного функционала тесно связано с ответом на вопрос о существовании предела в формуле (1). Действительно, для установления линейности нам необходимо сравнить величину

$$\gamma_N = \frac{\sigma_N(T_1 + T_2)}{\log N}$$

с суммой величин

$$\alpha_N = \frac{\sigma_N(T_1)}{\log N} \quad \text{и} \quad \beta_N = \frac{\sigma_N(T_2)}{\log N}.$$

Из неравенства треугольника для $\sigma_N(T)$ вытекает, что $\gamma_N \leq \alpha_N + \beta_N$, а из отмеченного в п. 1.1 неравенства $\sigma_N(T_1) + \sigma_N(T_2) \leq \sigma_{2N}(T_1 + T_2)$ вытекает, что

$$\alpha_N + \beta_N \leq \frac{\log(2N)}{\log N} \gamma_N.$$

Так как

$$\frac{\log(2N)}{\log N} \rightarrow 1 \quad \text{при} \quad N \rightarrow \infty,$$

мы видим, что существование предела в формуле (1) обеспечивает нам линейность функционала, задаваемого этой формулой.

Переходя к вопросу о существовании указанного предела, заметим, что для любого $T \in \mathcal{L}^{1,\infty}$ последовательность чисел

$$\left\{ \frac{\sigma_N(T)}{\log N} \right\}$$

ограничена.

Это позволяет нам рассмотреть вопрос о существовании предела в формуле (1) в следующей, более общей постановке. А именно, будем искать на пространстве $\ell^\infty(\mathbb{N})$ ограниченных последовательностей $a = \{a_n\}_{n=1}^\infty$ линейную форму

$$\ell \equiv \text{Lim}_\omega,$$

удовлетворяющую следующим условиям:

- 1) $\text{Lim}_\omega a \geq 0$, если все $a_n \geq 0$;
- 2) $\text{Lim}_\omega a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$, если предел справа существует;
- 3) $\text{Lim}_\omega(a_1, a_1, a_2, a_2, a_3, a_3, \dots) = \text{Lim}_\omega \{a_n\}$.

Единственным нетривиальным условием является последнее, которое трактуется как *асимптотическая масштабная инвариантность*. Для того чтобы пояснить происхождение данного термина, перейдем от последовательностей $\{a_n\}$ к функциям вещественного параметра, как мы уже делали это в случае функции σ_N . А именно, построим по последовательности $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ ограниченную функцию $f_a(\lambda)$ на положительной вещественной полуоси, задаваемую следующим образом: если $\lambda = N + t$ с $0 \leq t < 1$, т.е. $[\lambda] = N$, то положим

$$f_a(\lambda) = (1 - t)a_N + ta_{N+1}.$$

Тем самым, введенная функция $f_a(\lambda)$ является кусочно линейной.

Заменяем теперь функцию $f(\lambda) \equiv f_a(\lambda)$ ее *чезаровским средним*

$$(Mf)(\lambda) = \frac{1}{\log \lambda} \int_3^\lambda \frac{f(t)}{t} dt.$$

Это среднее на ограниченных функциях f обладает следующим свойством асимптотической масштабной инвариантности:

$$|M(S_\mu f)(\lambda) - MF(\lambda)| \rightarrow 0 \quad \text{при } \lambda \rightarrow +\infty,$$

где $(S_\mu f)(\lambda) := f(\mu\lambda)$ для любого $\mu > 0$. Возвращаясь к свойству 3) масштабной инвариантности, заметим, что последовательности $\tilde{a} = (a_1, a_1, a_2, a_2, a_3, a_3, \dots)$ отвечает функция $f_{\tilde{a}} = S_{1/2}(f_a)$.

Попытаемся теперь сформулировать более точно, какого рода предел мы хотели бы получить на пространстве $C_b(R_+)$ ограниченных непрерывных функций на полуоси $R_+ := [1, \infty)$. Поскольку нас интересуют только пределы указанных функций на бесконечности, рассмотрим вместо пространства $C_b(R_+)$ его фактор $B_\infty := C_b(R_+)/C_0(R_+)$ по подпространству $C_0(R_+)$ функций, обращающихся в нуль на бесконечности.

Фиксируем положительную линейную форму ω на пространстве $C_b(R_+)$ такую, что $\omega = 0$ на подпространстве $C_0(R_+)$ и $\omega(1) = 1$. Иными словами, ω есть *состояние* на C^* -алгебре B_∞ . Мы можем рассматривать $\omega(f)$ как «обобщенный предел» функции $f \in C_b(R_+)$ на бесконечности. По форме ω мы можем определить предел $\text{Lim}_\omega(a)$ последовательности $a \in \ell^\infty(\mathbb{N})$, равный

$$\text{Lim}_\omega(a) := \omega(Mf_a).$$

Итак, мы приходим к следующему определению.

Определение 3. Для любого состояния ω на C^* -алгебре $B_\infty = C_b(R_+)/C_0(R_+)$ определим *след Диксмье* положительного оператора $T \in \mathcal{L}^{1,\infty}$ по формуле

$$\text{Tr}_\omega(T) = \text{Lim}_\omega \frac{\sigma_\lambda(T)}{\log \lambda}.$$

Свойства следа Диксмье.

- 1) *Аддитивность*: $\text{Tr}_\omega(T_1 + T_2) = \text{Tr}_\omega(T_1) + \text{Tr}_\omega(T_2)$.
- 2) *Положительность*: след Диксмье можно продолжить на весь идеал $\mathcal{L}^{1,\infty}$ так, чтобы свойство $\text{Tr}_\omega(T) \geq 0$ выполнялось на положительных операторах $T \in \mathcal{L}^{1,\infty}$.
- 3) *Унитарная инвариантность*: $\text{Tr}_\omega(UTU^*) = \text{Tr}_\omega(T)$ для любого унитарного оператора U .
- 4) *Коммутативность*: для любого ограниченного оператора $S \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ и любого $T \in \mathcal{L}^{1,\infty}$ справедливо равенство $\text{Tr}_\omega(ST) = \text{Tr}_\omega(TS)$.
- 5) След $\text{Tr}_\omega(T)$ равен нулю на подпространстве $\mathcal{L}_0^{1,\infty}$, совпадающем с замыканием по норме $\|\cdot\|_{1,\infty}$ пространства Fin операторов конечного ранга. В частности, этот след равен нулю на всех ядерных операторах из пространства $\mathcal{L}^1$.

В общем случае след Tr_ω зависит от выбора состояния ω .

Определение 4. Будем называть оператор $T \in \mathcal{L}^{1,\infty}$ *измеримым*, если существует предел

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{\sigma_\lambda(T)}{\log \lambda} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sigma_n(T)}{\log n}.$$

В этом случае след Диксмье $\text{Tr}_\omega(T)$ не зависит от ω , поэтому будем обозначать его через

$$\text{Tr}^+ T = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{\sigma_\lambda(T)}{\log \lambda}.$$

Пример 1. Приведем в качестве примера формулу для следа оператора Лапласа на сфере S^n , наделенной стандартной метрикой. Собственные числа этого оператора равны $l(l+n-1)$, где l — целое неотрицательное число, и имеют кратность

$$m_l = \binom{l+n}{n} - \binom{l+n-2}{n}.$$

Оператор $\Delta^{-n/2}$ измерим, а его след Диксмье равен

$$\mathrm{Tr}^+ \Delta^{-n/2} = \frac{2}{n!}.$$

1.3. Вычет Водзицки псевдодифференциального оператора. Важность введенного следа Диксмье объясняется тем, что он корректно определен для широкого класса псевдодифференциальных операторов и совпадает в этом случае с вычетом Водзицки. (В этом пункте мы предполагаем известными основные свойства псевдодифференциальных операторов, с которыми можно познакомиться по книгам [2, 3].)

Прежде чем перейти к определению указанного вычета, приведем несколько вспомогательных фактов об однородных функциях и формах на кокасательном расслоении гладкого многообразия.

Пусть M — гладкое компактное многообразие размерности $n > 1$ и T^*M — его кокасательное расслоение с локальными координатами (x, ξ) , где $x = (x_1, \dots, x_n)$ — локальные координаты на M , а $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$ — координаты в слое T_x^*M . Обозначим через σ_ξ дифференциальную $(n-1)$ -форму на $\mathbb{R}^n \setminus 0$ вида

$$\sigma_\xi := \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} \xi_j d\xi_1 \wedge \dots \wedge \widehat{d\xi_j} \wedge \dots \wedge d\xi_n,$$

где знак $\widehat{}$ над $d\xi_j$ означает, что этот член должен быть пропущен. Форма σ_ξ совпадает с внутренним произведением

$$\sigma_\xi = E \lrcorner d^n \xi$$

формы объема

$$d^n \xi = d\xi_1 \wedge \dots \wedge d\xi_n$$

и эйлерова векторного поля

$$E = \sum_{j=1}^n \xi_j \partial / \partial \xi_j.$$

Свойство 1. Для любой однородной функции $p_{-n}(\xi)$ порядка однородности $-n$ форма $p_{-n}\sigma_\xi$ на пространстве $\mathbb{R}^n \setminus 0$ замкнута.

Из этого свойства следует, что в интеграле вида

$$\int_{S^{n-1}} p_{-n} |\sigma_\xi|$$

можно заменить интегрирование по единичной сфере S^{n-1} интегралом по любому гомологичному циклу и, в частности, по любому сечению расслоения $\mathbb{R}^n \setminus 0 \rightarrow S^{n-1}$.

Напомним, что по теореме Эйлера для однородных функций f степени однородности λ имеет место тождество

$$\frac{1}{n+\lambda} \sum_{j=1}^n \frac{\partial(\xi_j f)}{\partial \xi_j} = \frac{1}{n+\lambda} (nf + Ef) = f.$$

При $\lambda = -n$ это утверждение теряет смысл и заменяется следующим свойством.

Свойство 2. Интеграл

$$\int_{S^{n-1}} p_{-n} |\sigma_\xi|$$

обращается в нуль в том и только в том случае, когда функция p_{-n} является суммой производных.

Для формулировки теоремы Водзицки нам понадобится еще понятие плотности на многообразии. В случае вещественного векторного пространства V размерности n *плотностью* на V называется непрерывное отображение $\lambda: V^n \rightarrow \mathbb{R}$, обладающее свойством

$$\lambda(Av_1, \dots, Av_n) = |\det A| \lambda(v_1, \dots, v_n)$$

для всех $v_1, \dots, v_n \in V$, $A \in \text{End } V$. Если ω — форма объема на V , то она определяет плотность $|\omega|$ на V по формуле

$$|\omega|(v_1, \dots, v_n) := |\omega(v_1, \dots, v_n)|.$$

Точно так же на произвольном римановом многообразии M с римановой метрикой g существует единственная плотность $|\nu_g|$, принимающая значение 1 на всех ортонормированных базисах касательных пространств $T_x M$, $x \in M$. Если $v_1, \dots, v_n \in T_x M$, то

$$|\nu_g|(v_1, \dots, v_n) = |\det(g_x(v_i, v_j))|^{1/2}.$$

Такую плотность естественно называть *римановой*.

Пользуясь римановой плотностью, можно ввести понятие интеграла, являющегося линейной формой на M , инвариантной относительно диффеоморфизмов и совпадающей с интегралом Лебега на локальных картах.

Перейдем теперь к определению вычета Водзицки. Напомним, что *классическим псевдодифференциальным оператором* на компактном многообразии M называется линейный оператор P , символ которого имеет локальные выражения вида

$$p(x, \xi) \sim \sum_{k=0}^{\infty} p_{d-k}(x, \xi),$$

где функция $p_{d-k}(x, \xi)$ однородна по ξ степени $d - k$. Обозначим пространство таких операторов через $\Psi^d(M)$.

Теорема 1 (М. Водзицки). *Пусть на гладком компактном многообразии M размерности n задан классический псевдодифференциальный оператор P . Тогда на M существует плотность $\text{res}_x P$, локальные выражения которой имеют вид*

$$\text{res}_x P = \left(\int_{|\xi|=1} p_{-n}(x, \xi) |\sigma_\xi| \right) |d^n x|.$$

Интеграл от этой плотности называется вычетом Водзицки оператора P :

$$\text{Res } P := \int_M \text{res}_x P.$$

Доказательство. Формула замены переменных в псевдодифференциальных операторах показывает, что под действием диффеоморфизма $\varphi : U \rightarrow V$ из области $U \subset \mathbb{R}^n$ на область $V \subset \mathbb{R}^n$ псевдодифференциальный оператор $P \in \Psi^d(U)$ преобразуется в псевдодифференциальный оператор $\varphi_* P \in \Psi^d(V)$. При этом символ $p(x, \xi)$ оператора P переходит в символ $p_\varphi(x, \xi) =: \tilde{p}(x, \xi)$ оператора $\varphi_* P$, задаваемый формулой

$$\tilde{p}(x, {}^t\psi'(x)\eta) = \sum_{\alpha} c_{\alpha}(x, \eta) \partial_{\eta}^{\alpha} p(\psi(x), \eta),$$

в которой

$$\xi = {}^t\psi'(x)\eta, \quad \psi := \varphi^{-1}, \quad c_0(x, \eta) = 1,$$

а другие коэффициенты $c_{\alpha}(x, \eta)$ являются полиномами по η . Это означает, в частности, что коэффициент $\tilde{p}_{-n}(x, {}^t\psi'(x)\eta)$ отличается от коэффициента $p_{-n}(\psi(x), \eta)$ на сумму членов, являющихся производными по ξ .

Посмотрим теперь, как изменяется интеграл

$$\int_{|\xi|=1} p_{-n}(x, \xi) |\sigma_\xi|$$

под действием невырожденных линейных замен по переменной ξ и фиксированном x . Пусть такая замена задается отображением h . Нетрудно видеть, что

$$h^* \sigma_\xi = (\det h) \sigma_{h\xi}.$$

Заметим, что интеграл по сфере $S = \{\xi : |\xi| = 1\}$ от формы $p_{-n}|\sigma_\xi|$ совпадает (с точностью до знака) с интегралом от этой формы по образу $h(S)$:

$$\int_S p_{-n}(x, \xi)|\sigma_\xi| = \pm \int_{h(S)} p_{-n}(x, \xi),$$

поскольку $h(S)$ гомологично S (знак $+$ отвечает случаю, когда h сохраняет ориентацию, знак $-$ ставится в противоположном случае). Поэтому

$$\int_S p_{-n}(x, \xi)|\sigma_\xi| = \pm \int_S h^*(p_{-n}(x, \xi)|\sigma_\xi|) = |\det h| \int_S p_{-n}(x, h\xi)|\sigma_{h\xi}|.$$

Полагая $y := \psi(x)$, $\xi = {}^t\psi'(x)\eta$, получим следующую формулу для преобразованного вычета:

$$\begin{aligned} \int_{|\xi|=1} \tilde{p}(x, \xi)|\sigma_\xi||d^n x| &= |\det \psi'(x)| \int_{|\eta|=1} \tilde{p}_{-n}(x, {}^t\psi'(x)\eta)|\sigma_\eta||d^n x| = \\ &= \int_{|\eta|=1} \tilde{p}_{-n}(x, {}^t\psi'(x)\eta)|\sigma_\eta||d^n y| = \int_{|\eta|=1} p_{-n}(y, \eta)|\sigma_\eta||d^n y|, \end{aligned}$$

где мы воспользовались тем, что циклы $|\xi| = 1$ и $|\eta| = 1$ гомологичны друг другу при фиксированном x и члены, состоящие из производных, не дают вклада в последний интеграл. Из приведенной выкладки следует, что плотность $\text{res}_x P$ корректно определена, так что интеграл от нее не зависит от выбора локальных координат. $\square$

Вычислим в качестве примера вычет Водзицки для оператора Лапласа на компактном римановом многообразии.

Пример 2. Пусть $P = \Delta$ есть оператор Лапласа—Бельтрами на компактном римановом n -мерном многообразии (M, g) . Тогда

$$\text{Res } \Delta^{-n/2} = \Omega_n,$$

где $\Omega_n = 2\pi^{n/2}/\Gamma(n/2)$ — площадь поверхности сферы S^{n-1} .

Действительно, так как Δ — оператор второго порядка, то $\Delta^{-n/2}$ имеет порядок $-n$, а его главный символ имеет вид $(g^{ij}(x)\xi_i\xi_j)^{-n/2}$, где (g_{ij}) — метрический тензор многообразия M , (g^{ij}) — матрица, обратная к (g_{ij}) . После замены $y = \psi(x)$, $\xi = {}^t\psi'(x)\eta$, в которой $\psi'(x) = (\det g)^{1/2}$, главный символ превратится в $|\eta|^{-n}$, а плотность вычета будет равна

$$\text{res}_x P = \Omega_n |d^n y| = \Omega_n \det \psi'(x) |d^n x| = \Omega_n |\nu_g|,$$

где $|\nu_g|$ — риманова плотность. Отсюда следует, что $\text{Res } \Delta^{-n/2} = \Omega_n$.

Обозначим через $\mathcal{P}(M)$ фактор-алгебру классических псевдодифференциальных операторов на многообразии M по идеалу сглаживающих классических операторов. Еще одна теорема Водзицки (доказательство которой можно найти в [5, теорема 7.6]) утверждает, на алгебре $\mathcal{P}(M)$ (при $n > 1$) существует единственный след (с точностью до умножения на ненулевую константу), задаваемый вычетом Водзицки. Тем самым, вычет Водзицки должен совпадать (с точностью до константы) с введенным ранее следом Диксмье.

Это утверждение составляет содержание *теоремы Конна о следе*.

Теорема 2. Пусть P — эллиптический псевдодифференциальный оператор порядка $-n$ на компактном римановом многообразии (M, g) . Тогда оператор P принадлежит пространству $\mathcal{L}^{1,\infty}$ и измерим, а его след Диксмье связан с вычетом Водзицки формулой

$$\text{Tr}^+ P = \frac{1}{n(2\pi)^n} \text{Res } P.$$

Доказательство этой теоремы можно найти в оригинальной монографии Конна [4] и в книге [5, теорема 7.18]. Из нее вытекает следующее утверждение.

Следствие 1. Для произвольной гладкой функции $a \in C^\infty(M)$ имеет место равенство

$$\int_M a(x) |\nu_g| = \frac{n(2\pi)^n}{\Omega_n} \text{Tr}^+(a \Delta_g^{-n/2}).$$

Доказательство. Действительно, $a\Delta^{-n/2}$ — псевдодифференциальный оператор порядка $-n$ с главным символом $a_{-n}(x, \xi) := a(x)(g^{ij}\xi_i\xi_j)^{-n/2}$, поэтому (см. пример 2) плотность вычета Водзицки для него имеет вид

$$\text{res}_x(a\Delta^{-n/2}) = \Omega_n a(x) |\nu_g|.$$

Следовательно, левая часть доказываемого равенства совпадает с $\Omega_n^{-1} \text{Res}(a\Delta^{-n/2})$. Теперь утверждение вытекает из теоремы о следе. $\square$

2. НЕКОММУТАТИВНОЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

В п. 2.1 для произвольной алгебры A с единицей строится универсальная дифференциальная алгебра $\Omega^\bullet A$. Эта алгебра тесно связана с другим важным объектом некоммутативного дифференциального исчисления — циклом, иначе говоря, дифференциальной градуированной алгеброй с интегралом, определение которого дается в п. 2.2. Цикл можно построить по любому фредгольмову модулю над C^* -алгеброй A ; соответствующая конструкция приводится в п. 2.2.

Пункт 2.3 посвящен связностям в модулях над алгебрами. Приводятся примеры различных связностей, в том числе римановой связности и связности Леви-Чивита. Дается определение кривизны связности и формулы для ее вычисления. В заключение вводится характер Черна проектора в матричной алгебре над коммутативной алгеброй и перечисляются его основные свойства.

Пункт 2.4 посвящен когомологиям Хохшильда алгебры A . Главный результат — интерпретация характера Черна цикла над алгеброй A как циклического коцикла Хохшильда над A .

2.1. Универсальная дифференциальная алгебра. Пусть $\mathcal{E}$ — бимодуль над алгеброй A с единицей 1_A .

Определение 5. Дифференцированием алгебры A со значениями в бимодуле $\mathcal{E}$ называется линейное отображение $D : A \rightarrow \mathcal{E}$, удовлетворяющее правилу Лейбница

$$D(ab) = (Da)b + a(Db).$$

Из этого определения сразу следует, что $D(1_A) = 0$, поскольку $D(1_A) = 2D(1_A)$.

Обозначим множество всех дифференцирований алгебры A со значениями в $\mathcal{E}$ через $\text{Der}(A, \mathcal{E})$. Любой элемент $s \in \mathcal{E}$ определяет дифференцирование из $\text{Der}(A, \mathcal{E})$ по формуле

$$(\text{ad } s)a := sa - as.$$

Такое дифференцирование называется *внутренним*.

Пространство $\text{Der}(A) \equiv \text{Der}(A, A)$ дифференцирований алгебры A является алгеброй Ли, поскольку коммутатор двух дифференцирований снова является дифференцированием.

Построим бимодуль $\Omega^1 A$ вместе с дифференцированием $d : A \rightarrow \Omega^1 A$, который обладает следующим универсальным свойством: для любого дифференцирования D алгебры A со значениями в бимодуле $\mathcal{E}$ найдется единственный морфизм бимодулей $i : \Omega^1 A \rightarrow \mathcal{E}$, делающий следующую диаграмму коммутативной:

$$\begin{array}{ccc} & & \Omega^1 A \\ & \nearrow d & \downarrow i \\ A & \xrightarrow{D} & \mathcal{E} \end{array}$$

Иначе говоря, линейное отображение

$$\text{Hom}_A(\Omega^1 A, \mathcal{E}) \rightarrow \text{Der}(A, \mathcal{E}), \quad \varphi \mapsto \varphi \circ d,$$

должно быть изоморфизмом.

Конструкция бимодуля $\Omega^1 A$. Пусть $A \otimes A$ — тензорное произведение алгебры A на себя, рассматриваемое как A -бимодуль с действием элементов из A , задаваемым на простых тензорах формулами:

$$\begin{aligned} a(b \otimes c) &\equiv (a \otimes 1_A)(b \otimes c) = (ab) \otimes c, \\ (a \otimes b)c &\equiv (a \otimes b)(1_A \otimes c) = a \otimes (bc). \end{aligned}$$

Определим дифференцирование $d : A \rightarrow A \otimes A$ алгебры A со значениями в $A \otimes A$ формулой

$$da := 1_A \otimes a - a \otimes 1_A$$

(далее мы опускаем нижний индекс A в обозначении 1_A там, где это не приводит к недоразумению). Тогда

$$d(ab) = 1 \otimes (ab) - (ab) \otimes 1 = a \otimes b - (ab) \otimes 1 + 1 \otimes (ab) - a \otimes b = a db + (da)b,$$

поскольку

$$\begin{aligned} a db &= a(1 \otimes b) - a(b \otimes 1) = (a \otimes 1)(1 \otimes b) - (a \otimes 1)(b \otimes 1) = a \otimes b - (ab) \otimes 1, \\ (da)b &= (1 \otimes a)b - (a \otimes 1)b = (1 \otimes a)(1 \otimes b) - (a \otimes 1)(1 \otimes b) = 1 \otimes (ab) - a \otimes b. \end{aligned}$$

Поэтому d действительно является дифференцированием алгебры A со значениями в $A \otimes A$.

Обозначим через $\Omega^1 A$ подмодуль в $A \otimes A$, порожденный элементами вида $a db$. Он совпадает с ядром отображения

$$m : A \otimes A \rightarrow A, \quad a \otimes b \mapsto ab.$$

Действительно, если элемент $\sum_k a_k \otimes b_k \in A \otimes A$ принадлежит $\text{Ker } m$, т.е. $\sum_k a_k b_k = 0$, то

$$\sum_k a_k \otimes b_k = \sum_k a_k(1 \otimes b_k - b_k \otimes 1) = \sum_k a_k db_k,$$

откуда и следует указанное утверждение.

Введем на $\Omega^1 A$ структуру A -бимодуля, полагая

$$a(b dc) := (ab)dc, \quad (a db)c := a d(bc) - (ab)dc.$$

Построенный бимодуль называется *бимодулем универсальных 1-форм над алгеброй A* .

Предположим теперь, что $\mathcal{E}$ — произвольный бимодуль над алгеброй A и $D : A \rightarrow \mathcal{E}$ — дифференцирование алгебры A со значениями в $\mathcal{E}$. Определим отображение $i : \Omega^1 A \rightarrow \mathcal{E}$, полагая его равным

$$i(a \otimes b) := a(Db)$$

на простых тензорах из $A \otimes A$ и сужая затем на $\Omega^1 A \subset A \otimes A$. Указанное отображение является морфизмом A -бимодулей, откуда следует, что бимодуль $\Omega^1 A$ действительно обладает универсальным свойством, отмеченным в начале этого пункта.

Дифференциальная градуированная алгебра.

Определение 6. Дифференциальная градуированная алгебра (DG-алгебра) $(R^\bullet, \delta)$ — это ассоциативная алгебра

$$R^\bullet = \bigoplus_{n=0}^{\infty} R^n,$$

наделенная градуированным произведением, т.е. произведением, обладающим свойством

$$R^m \cdot R^n \subseteq R^{m+n},$$

и дифференциалом δ , т.е. линейным отображением, удовлетворяющим следующим условиям:

- 1) δ является отображением степени $+1$, т.е. переводит $R^n \rightarrow R^{n+1}$;
- 2) $\delta^2 = 0$;
- 3) δ является *нечетным дифференцированием*, т.е. удовлетворяет правилу Лейбница вида

$$\delta(\omega^n \eta) = (\delta \omega^n) \eta + (-1)^n \omega^n \delta \eta,$$

где $\omega^n \in R^n$.

Наша цель состоит в том, чтобы построить DG-алгебру

$$\Omega^\bullet A = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \Omega^n A$$

с дифференциалом d , первые два слагаемых которой суть $\Omega^0 A = A$, $\Omega^1 A$ определено выше, а дифференциал d продолжает построенное выше дифференцирование из алгебры A в $\Omega^1 A$. Кроме того, мы хотим, чтобы указанная DG-алгебра обладала следующим универсальным свойством: если $(R^\bullet, \delta)$ — другая DG-алгебра, то любой гомоморфизм алгебр $\psi : A \rightarrow R^0$ должен продолжаться до гомоморфизма алгебр $\psi : \Omega^\bullet A \rightarrow R^\bullet$ степени нуль, сплетающего дифференциалы d и δ .

Обозначим через $\bar{A}$ факторалгебру $\bar{A} := A/\mathbb{C}$ и через $\bar{a}$ — образ элемента $a \in A$ при проекции в $\bar{A}$. Введенный ранее бимодуль $\Omega^1 A$ можно отождествить с

$$\Omega^1 A \cong A \otimes \bar{A}$$

посредством отображения $a \otimes \bar{b} \mapsto a db$. Это отождествление определено корректно, поскольку $d(1_A) = 0$. Если ввести в $A \otimes \bar{A}$ левое и правое умножение на элементы $c \in A$ по формулам

$$\begin{aligned} c(a_0 \otimes \bar{a}_1) &= (ca_0) \otimes \bar{a}_1, \\ (a_0 \otimes \bar{a}_1)c &= a_0 \otimes \bar{a}_1 c - (a_0 a_1) \otimes \bar{c}, \end{aligned}$$

то отображение $A \otimes \bar{A} \rightarrow \Omega^1 A$ станет изоморфизмом бимодулей, поскольку

$$\begin{aligned} c(a_0 \otimes \bar{a}_1) &= (ca_0) \otimes \bar{a}_1 \mapsto (ca_0) \otimes da_1, \\ (a_0 \otimes \bar{a}_1)c &= a_0 \otimes \bar{a}_1 c - (a_0 a_1) \otimes \bar{c} \mapsto a_0 \otimes da_1 c - (a_0 a_1) \otimes dc = (a_0 a_1 c) \otimes \bar{c}. \end{aligned}$$

Положим теперь по определению

$$\Omega^2 A := \Omega^1 A \otimes_A \Omega^1 A = (A \otimes \bar{A}) \otimes_A (A \otimes \bar{A}) = A \otimes \bar{A} \otimes \bar{A}.$$

Более общим образом, определим

$$\Omega^n A := \underbrace{\Omega^1 A \otimes_A \cdots \otimes_A \Omega^1 A}_{n \text{ раз}},$$

так что

$$\Omega^n A = A \otimes \bar{A}^{\otimes n}.$$

Дифференциал $d : A \otimes \bar{A}^{\otimes n} \rightarrow A \otimes \bar{A}^{\otimes(n+1)}$ задается сдвигом

$$d(a_0 \otimes \bar{a}_1 \otimes \cdots \otimes \bar{a}_n) := 1_A \otimes \bar{a}_0 \otimes \bar{a}_1 \otimes \cdots \otimes \bar{a}_n.$$

Тогда $d^2 = 0$, поскольку $\bar{1}_A = 0$ в алгебре $\bar{A}$.

Отождествляя, как и выше, $A \otimes \bar{A}^{\otimes n}$ с $(\Omega^1 A)^{\otimes n}$, будем иметь

$$a_0 \otimes \bar{a}_1 \otimes \cdots \otimes \bar{a}_n = a_0 da_1 \dots da_n.$$

Введем на $\Omega^\bullet A$ структуру A -бимодуля. Умножение слева задается очевидным образом:

$$c(a_0 da_1 \dots da_n) = (ca_0) da_1 \dots da_n.$$

Чтобы определить умножение справа, воспользуемся правилом Лейбница $da \cdot b = d(ab) - a db$. Тогда

$$\begin{aligned} (a_0 da_1 \dots da_n)c &= a_0 da_1 \dots da_{n-1} d(a_n c) - a_0 da_1 \dots da_{n-1} a_n dc = \dots = \\ &= (-1)^n (a_0 a_1) da_2 \dots da_n c + \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^{n-j} a_0 a_1 \dots d(a_j a_{j+1}) \dots da_n dc + a_0 da_1 \dots da_{n-1} d(a_n c). \end{aligned}$$

Наконец, определим произведение в $\Omega^\bullet A$, полагая

$$(a_0 da_1 \dots da_n)(b_0 db_1 \dots db_m) := (a_0 da_1 \dots da_n \cdot b_0) db_1 \dots db_m.$$

Тем самым, $\Omega^\bullet A$ становится DG-алгеброй, называемой *универсальной DG-алгеброй* над алгеброй A .

Отметим следующие полезные формулы:

$$\begin{aligned} d(a_0 da_1 \dots da_n) &= 1_A da_0 da_1 \dots da_n = da_0 da_1 \dots da_n, \\ a_0[d, a_1] \dots [d, a_n] \cdot 1_A &= a_0 da_1 \dots da_n. \end{aligned}$$

Первая из них перефразирует определение дифференциала с учетом отождествления $A \otimes \bar{A}^{\otimes n}$ с $(\Omega^1 A)^{\otimes n}$, а для доказательства второй заметим, что

$$\begin{aligned} [d, a_n] \cdot 1_A &= da_n - a_n d1_A = da_n, \\ [d, a_{n-1}]da_n &= d(a_{n-1} da_n) = da_{n-1}da_n \end{aligned}$$

и т. д. по индукции.

Проверим свойство универсальности построенной DG-алгебры $\Omega^\bullet A$. Пусть задана другая DG-алгебра $(R^\bullet, \delta)$ и гомоморфизм алгебр $\psi : A \rightarrow R^0$. Тогда его продолжение до морфизма $\psi : \Omega^\bullet A \rightarrow R^\bullet$ задается формулой

$$\psi(a_0 da_1 \dots da_n) := \psi(a_0) \delta(\psi(a_1)) \dots \delta(\psi(a_n)).$$

2.2. Циклы и фредгольмовы модули.

Определение 7. Циклом размерности n называется DG-алгебра

$$\Omega^\bullet = \bigoplus_{k=0}^n \Omega^k,$$

заданная вместе с *интегралом* $\int$, т.е. линейным отображением $\int : \Omega^\bullet \rightarrow \mathbb{C}$, удовлетворяющим следующим условиям:

- 1) $\int \omega^k = 0$ при $k < n$;
- 2) $\int d\omega^{n-1} = 0$;
- 3) $\int \omega^k \omega^l = (-1)^{kl} \int \omega^l \omega^k$.

Циклом над алгеброй A называется цикл $(\Omega^\bullet, d, \int)$ вместе с гомоморфизмом $A \rightarrow \Omega^0$.

Стандартными примерами циклов размерности n могут служить комплекс де Рама над n -мерным гладким компактным многообразием и алгебра гладких матричных функций на $\mathbb{R}^n$ с подходящим условием роста на бесконечности, интеграл в которой равен $\int \omega^n := \int \text{Tr } \omega^n$. Менее тривиальные примеры строятся с помощью фредгольмовых модулей, к определению которых мы переходим.

Циклы, определяемые фредгольмовыми модулями.

Определение 8. Нечетным фредгольмовым модулем над C^* -алгеброй A называется инволютивное представление σ алгебры A в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, наделенное оператором симметрии, т.е. линейным оператором S , удовлетворяющим условиям $S = S^*$, $S^2 = I$ и

$$[S, \sigma(a)] \in \mathcal{K}(\mathcal{H}) \quad \text{для всех } a \in A.$$

Четный фредгольмов модуль задается представлением $\sigma = \sigma^0 \oplus \sigma^1$ алгебры A в $\mathbb{Z}_2$ -градуированном гильбертовом пространстве $\mathcal{H} = \mathcal{H}^0 \oplus \mathcal{H}^1$ с нечетным оператором симметрии S , удовлетворяющим тем же условиям, что и в нечетном случае.

Фредгольмов модуль $(A, \mathcal{H}, S)$ порождает цикл над алгеброй A с $\Omega^0 = A$, а оператор S задает $\mathbb{Z}_2$ -градуировку на алгебре ограниченных линейных операторов $\mathcal{L}(\mathcal{H})$. Действительно, мы можем записать произвольный линейный оператор T в виде

$$T = T_+ + T_-, \quad \text{где } T_\pm = \frac{T \pm STS}{2}.$$

Тогда

$$(TR)_+ = T_+ R_+ + T_- R_- \quad \text{и} \quad (TR)_- = T_+ R_- + T_- R_+.$$

Кроме того,

$$T = T_+ \iff T = STS \quad \text{и} \quad T = T_- \iff T + STS = 0.$$

Для того, чтобы определить интеграл, нам придется на рассматриваемые фредгольмовы модули дополнительное условие *суммируемости* порядка n :

$$[S, \sigma(a)] \in \mathcal{L}^{n+1}(\mathcal{H});$$

при этом число n будет предполагаться нечетным для нечетных фредгольмовых модулей и четным для четных фредгольмовых модулей.

Дифференциалы. Предполагая условие суммируемости выполненным, определим *дифференциал*, полагая

$$da = i[S, \sigma(a)] = 2iS\sigma(a)_-$$

для $a \in A$. Мы будем опускать далее знак σ , так что последняя формула будет записываться в виде

$$da = i[S, a] = 2iSa_-.$$

Иначе говоря, дифференциал d выбирает S -нечетную часть элемента a , и условие суммируемости можно теперь переписать в виде $da \in \mathcal{L}^{n+1}$.

Множитель i введен для того, чтобы дифференциал d коммутировал с инволюцией:

$$d(a^*) = (da)^*,$$

где справа стоит эрмитово сопряжение.

Имея дифференциал d , можно ввести и *дифференциалы высших порядков*. Для этого рассмотрим пространство 1-форм на алгебре ограниченных линейных операторов $\mathcal{L}(\mathcal{H})$. Таковыми будем называть операторы вида $a_0 da_1$, где $a_0, a_1 \in A$, и их линейные комбинации. Дифференциал второго порядка на 1-формах определяется формулой

$$d(a_0 da_1) = i[S, a_0 da_1] = i[S, a_0]i[S, a_1] = da_0 da_1.$$

Заметим, что в этой формуле, также как и в последующих, под коммутатором всегда подразумевается суперкоммутатор, так что коммутатор $[S, a_0 da_1]$ на самом деле является антикоммутатором, поскольку $a_0 da_1$ есть 1-форма.

Из приведенного определения следует, что

$$d(a_0 da_1) = 2iS(a_0 da_1)_+,$$

т.е. дифференциал 2-го порядка, в отличие от дифференциала 1-го порядка, выбирает S -четную часть формы $a_0 da_1$, принадлежащую $\mathcal{L}^{n+1} \cdot \mathcal{L}^{n+1} \subset \mathcal{L}^{(n+1)/2}$, в то время как S -нечетная часть формы $a_0 da_1$, равная $(a_0)_+(da_1)_- = (a_0)_+ da_1$, принадлежит $\mathcal{L}^{n+1}$. (В дальнейшем мы будем опускать приставку S , говоря о четности или нечетности форм.)

Более общим образом, рассмотрим пространство k -форм Ω^k , порождаемое операторами вида

$$a = a_0 da_1 \dots da_k, \quad a_0, a_1, \dots, a_k \in A.$$

Если $k = 2r$, т.е. $a \in \Omega^{2r}$, то

$$a_+ \in \mathcal{L}^{(n+1)/2r}, \quad a_- \in \mathcal{L}^{(n+1)/(2r+1)}.$$

В случае, если $k = 2r - 1$, т.е. $a \in \Omega^{2r-1}$, будем иметь

$$a_+ \in \mathcal{L}^{(n+1)/2r}, \quad a_- \in \mathcal{L}^{(n+1)/(2r-1)}.$$

Произведение форм совпадает с их композицией, а дифференциал задается формулой

$$d(a_0 da_1 \dots da_k) = i[S, a_0 da_1] = i[S, a_0]i[S, a_1] \dots i[S, a_k] = da_0 da_1 \dots da_k.$$

Отсюда вытекает общая формула

$$d\omega = i[S, \omega], \quad \omega \in \Omega^\bullet.$$

Интеграл. Перейдем теперь к определению интеграла. Введем прежде всего *условный след* оператора $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, полагая

$$\mathrm{Tr}' T := \mathrm{Tr} T_+.$$

Заметим, что $\mathrm{Tr}' T = \mathrm{Tr} T$, если $T \in \mathcal{L}^1$, благодаря цикличности обычного следа.

Предположим сначала, что n нечетно. Тогда $(\omega^n)_+ \in \mathcal{L}^{1+1/n} \subset \mathcal{L}^1$, поэтому определен интеграл

$$\int \omega^n := \mathrm{Tr}' \omega^n = -\frac{i}{2} \mathrm{Tr}(S d\omega^n).$$

Второе равенство в этой формуле вытекает из следующей цепочки равенств:

$$S d\omega^n = iS[S, \omega^n] = iS(S\omega^n + \omega^n S) = i(\omega^n + S\omega^n S) = 2i(\omega^n)_+.$$

Для форм ω^k с $k < n$ положим по определению $\int \omega^k = 0$.

Покажем, что построенный интеграл обладает свойствами, перечисленными в определении 7. Во-первых,

$$\int d\omega^{n-1} = -\frac{i}{2} \mathrm{Tr}(S d^2 \omega^{n-1}) = 0.$$

Во-вторых, рассмотрим формы ω^k, ω^l с $k + l = n$. Допустим для определенности, что k нечетно, а l четно. Тогда

$$\begin{aligned} \int \omega^k \omega^l &= -\frac{i}{2} \mathrm{Tr}(S d(\omega^k \omega^l)) = \\ &= -\frac{i}{2} \mathrm{Tr}(S d\omega^k \omega^l - S\omega^k d\omega^l) = -\frac{i}{2} \mathrm{Tr}(-d\omega^l S\omega^k - \omega^l S d\omega^k) = \\ &= -\frac{i}{2} \mathrm{Tr}(S d\omega^l \omega^k + S\omega^l d\omega^k) = -\frac{i}{2} \mathrm{Tr}(S d(\omega^l \omega^k)) = \int \omega^l \omega^k. \end{aligned}$$

В третьем равенстве мы воспользовались свойством цикличности: $\mathrm{Tr}(TR) = \mathrm{Tr}(RT)$ для операторов $T \in \mathcal{L}^p, R \in \mathcal{L}^q$ с $1/p + 1/q = 1$. В нашем случае $p = k/(n+1), q = (l+1)/(n+1)$.

Пусть теперь n четно и снова $k + l = n$. Тогда $(\omega^n)_- \in \mathcal{L}^1$. Обозначим через χ оператор градуировки на $\mathcal{H}$, собственные (± 1) -подпространства которого совпадают соответственно с $\mathcal{H}^0$ и $\mathcal{H}^1$. Определим интеграл в этом случае как

$$\int \omega^n := \mathrm{Tr}'(\chi \omega^n) = -\frac{i}{2} \mathrm{Tr}(\chi S d\omega^n)$$

и положим: $\int \omega^k = 0$ для форм ω^k с $k < n$. Свойство замкнутости снова очевидно:

$$\int d\omega^{n-1} = -\frac{i}{2} \mathrm{Tr}(\chi S d^2 \omega^{n-1}) = 0,$$

а свойство перестановочности

$$\int \omega^k \omega^l = (-1)^{kl} \int \omega^l \omega^k$$

проверяется так же, как и выше, с учетом равенства $\chi \omega^k = (-1)^k \omega^k \chi$.

Примеры операторов симметрии.

Пример 3 (преобразование Гильберта). Преобразованием Гильберта функции $h \in L^2(\mathbb{R})$, заданной на вещественной оси, называется интеграл вида

$$Sh(x) := \frac{i}{\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_{|t| > \varepsilon} \frac{h(x-t)}{t} dt =: \frac{i}{\pi} \mathrm{P. V.} \int_{\mathbb{R}} \frac{h(x-t)}{t} dt.$$

Преобразование Фурье этой функции совпадает с

$$\mathcal{F}(Sh)(\xi) = (\mathrm{sgn} \xi) \mathcal{F}h(\xi).$$

Преобразование Гильберта является единственным линейным ограниченным оператором в $L^2(\mathbb{R})$, коммутирующим со сдвигами и растяжениями.

Пример 4 (операторы Рисса). Операторы Рисса являются многомерными аналогами преобразования Гильберта. Операторы Рисса R_j , $1 \leq j \leq n$, действуют в $L^2(\mathbb{R}^n)$ по формуле

$$R_j h(x) := \frac{2i}{\Omega_{n+1}} \text{P.V.} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{t_j h(x-t)}{|t|^{n+1}} dt,$$

где Ω_{n+1} — объем единичной сферы S^n , равный

$$\Omega_{n+1} = \frac{2\pi^{(n+1)/2}}{\Gamma(\frac{n+1}{2})}.$$

Преобразование Фурье этой функции равно

$$\mathcal{F}(R_j h)(\xi) = \frac{\xi_j}{|\xi|} \mathcal{F}h(\xi).$$

Операторы Рисса также коммутируют со сдвигами и растяжениями, причем

$$\sum_{j=1}^n R_j^2 = 1.$$

Фредгольмов модуль, ассоциированный с операторами Рисса, строится по набору $(N \times N)$ -матриц $\gamma_1, \dots, \gamma_n$, удовлетворяющих условию

$$\gamma_i \gamma_j + \gamma_j \gamma_i = 2\delta_{ij}.$$

Указанные матрицы γ_j являются матрицами Дирака, порождающими спинорное представление алгебры Клиффорда $\text{Cl}^{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n)$ в пространстве $\mathbb{C}^N$, где $N = 2^{[n/2]}$. Имея указанный набор матриц γ_j , мы можем определить оператор симметрии по формуле

$$S := \sum_{j=1}^n \gamma_j R_j.$$

Например, если в случае $n = 1$ мы положим $\gamma_1^{(1)} = 1$, то для всех нечетных n мы можем определить наборы функций $\gamma_j^{(n)}$ по индукции, полагая

$$\gamma_j^{(n)} := \begin{pmatrix} 0 & \gamma_j^{(n-2)} \\ \gamma_j^{(n-2)} & 0 \end{pmatrix}, \quad j = 1, \dots, n-2, \quad \gamma_{n-1}^{(n)} := \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_n^{(n)} := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

В частности, при $n = 3$ получаем матрицы Паули. При четных n полагаем

$$\gamma_j^{(n)} := \gamma_j^{(n+1)}, \quad j = 1, \dots, n.$$

2.3. Связности.

Определение 9. Пусть $\mathcal{E}$ — правый A -модуль над алгеброй A . Рассмотрим правый A -модуль $\mathcal{E} \otimes_A \Omega^1 A$. Связностью на $\mathcal{E}$ называется линейное отображение

$$\nabla : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E} \otimes_A \Omega^1 A,$$

удовлетворяющее правилу Лейбница:

$$\nabla(sa) = (\nabla s)a + s \otimes da,$$

где $s \in \mathcal{E}$, $a \in A$.

Оператор, задаваемый связностью ∇ , однозначно продолжается до оператора степени $+1$ на всей градуированной алгебре $\mathcal{E} \otimes_A \Omega^\bullet A$ по формуле

$$\nabla(s \otimes \omega) = \nabla s \otimes \omega + s \otimes d\omega,$$

где $s \in \mathcal{E}$, $\omega \in \Omega^\bullet A$, и мы отождествляем $(\mathcal{E} \otimes_A \Omega^1 A) \otimes_A \Omega^n A$ с $\mathcal{E} \otimes_A \Omega^{n+1} A$.

Рассматривая $\mathcal{E} \otimes_A \Omega^\bullet A$ как правый $\Omega^\bullet A$ -модуль, придем к правилу Лейбница вида

$$\nabla(\sigma\omega) = (\nabla\sigma)\omega + (-1)^k \sigma d\omega,$$

где $\sigma \in \mathcal{E} \otimes_A \Omega^k A$, $\omega \in \Omega^\bullet A$.

Переходя к конкретным примерам связностей, заметим, прежде всего, что на тензорном произведении двух A -модулей $\mathcal{E}$ и $\mathcal{F}$ над коммутативной алгеброй A , наделенных соответственно связностями $\nabla^\mathcal{E}$ и $\nabla^\mathcal{F}$, можно определить связность, являющуюся тензорным произведением связностей $\nabla^\mathcal{E}$ и $\nabla^\mathcal{F}$. Эта связность определяется формулой

$$\nabla^{\mathcal{E} \otimes_A \mathcal{F}} := \nabla^\mathcal{E} \otimes 1_\mathcal{F} + 1_\mathcal{E} \otimes \nabla^\mathcal{F}.$$

Пример 5 (связность в A^n). Обозначим через A^n свободный A -модуль, состоящий из столбцов с компонентами из A . Тогда $A^n \otimes_A \Omega^1 A$ отождествляется с $(\Omega^1 A)^n$; при этом

$$d^t(a_1 \dots a_n) := {}^t(da_1 \dots da_n).$$

Если ∇ — связность на A^n , то $\nabla - d$ является A -линейным отображением из A^n в $(\Omega^1 A)^n$, поэтому ∇ можно записать в виде

$$\nabla = d + \alpha,$$

где α — $(n \times n)$ -матрица с компонентами из $\Omega^1 A$. Если $\{u_j\}_{j=1}^n$ — стандартный базис в A^n , то $du_j = 0$, поэтому

$$\nabla u_j = \sum_{i=1}^n u_i \alpha_{ij}.$$

Замена базиса

$$\{u_j\}_{j=1}^n \mapsto \{\tilde{u}_j\}_{j=1}^n,$$

задаваемая матрицей $b = (b_{ij})$ по формуле

$$\tilde{u}_j = \sum_{i=1}^n u_i b_{ij},$$

приводит к замене матрицы α матрицей $\tilde{\alpha}$, равной

$$\tilde{\alpha} = b^{-1} \alpha b + b^{-1} db.$$

Пример 6 (связность Леви-Чивита). Пусть модуль $\mathcal{E}$ имеет вид $\mathcal{E} = eA^n$, где e — идемпотент в алгебре $\text{Mat}_n(A)$, т.е. такой элемент $e \in \text{Mat}_n(A)$, что $e^2 = e$. Тогда связность ∇ в этом модуле может быть задана композицией

$$\mathcal{E} \xrightarrow{i} A^n \xrightarrow{d} A^n \otimes_A \Omega^1 A \xrightarrow{e} \mathcal{E} \otimes_A \Omega^1 A,$$

где $i : \mathcal{E} \hookrightarrow A^n$. Отождествляя $\mathcal{E}$ с подмодулем в A^n , будем записывать введенную связность в виде

$$\nabla s = e ds.$$

Построенная связность называется *связностью Леви-Чивита*.

Пример 7 (эрмитовы связности). Если $\mathcal{E}$ является C^* -модулем, наделенным скалярным произведением $(\cdot, \cdot)$, то естественно пользоваться связностями ∇ , совместимыми с этим скалярным произведением, т.е. удовлетворяющими соотношению

$$(\nabla s, t) + (s, \nabla t) = d(s, t)$$

для всех $s, t \in \mathcal{E}$. При этом предполагается, что скалярное произведение $(\cdot, \cdot)$ продолжено на $\mathcal{E} \otimes_A \Omega^1 A$ как полуторалинейное спаривание со значениями в $\Omega^1 A$ по формуле

$$(s, t \otimes a db) := (s, t) a db.$$

В случае связности Леви-Чивита это означает, что соответствующий идемпотент e должен быть самосопряженным оператором, т.е. проектором.

Разность $\nabla = \nabla_1 - \nabla_2$ двух эрмитовых связностей на $\mathcal{E}$ принадлежит пространству гомоморфизмов $\text{Hom}_A(\mathcal{E}, \mathcal{E} \otimes_A \Omega^1 A)$ и является косэрмитовым отображением, т.е.

$$(\nabla s, t) + (s, \nabla t) = 0.$$

Если $\mathcal{E} \cong pA^m$, где p — проектор в $\text{Mat}_m(A)$, то

$$pA^m \otimes_A \Omega^1 A \otimes_A {}^m A p = p \text{Mat}_m(\Omega^1 A) p.$$

Инволюция на $\Omega^1 A$ задается формулой

$$(a db)^* := d(b^*)a^* = d(b^*a^*) - b^*da^*.$$

Поэтому косоэрмитов оператор $\alpha \in \text{Hom}_A(\mathcal{E}, \mathcal{E} \otimes_A \Omega^1 A)$ можно отождествить с матрицей $\alpha \in \text{Mat}_m(\Omega^1 A)$, составленной из 1-форм, так что

$$\alpha = p\alpha = \alpha p = p\alpha p,$$

где $\alpha^* = -\alpha$. Эрмитова связность ∇ будет при этом записываться в виде $\nabla = pd + \alpha$, где α удовлетворяет выписанным выше условиям.

Кривизна. Рассмотрим линейное отображение

$$\nabla^2 : \mathcal{E} \otimes_A \Omega^\bullet A \rightarrow \mathcal{E} \otimes_A \Omega^{\bullet+2} A.$$

Оно удовлетворяет соотношению

$$\nabla^2(s\omega) = \nabla(\nabla s \omega + s d\omega) = (\nabla^2 s)\omega - \nabla s d\omega + \nabla s d\omega + s d^2\omega = (\nabla^2 s)\omega,$$

которое означает, что ∇^2 является гомоморфизмом $(\Omega^\bullet A)$ -модулей и полностью определяется своим сужением на $\mathcal{E}$. Указанный гомоморфизм называется *кривизной* связности ∇ и обозначается через K_∇ .

Вычислим кривизну связности $d + \alpha$ в свободном модуле A^n . Имеем

$$K_\nabla s = \nabla(ds + \alpha s) = d^2s + d(\alpha s) + \alpha ds + \alpha^2 s = d\alpha s - \alpha ds + \alpha ds + \alpha^2 s = (d\alpha + \alpha^2)s.$$

Пример 8. Пусть $\mathcal{E}_0$ и $\mathcal{E}_1$ — проективные модули над коммутативной алгеброй A , наделенные связностями ∇_0 и ∇_1 соответственно с кривизнами K_0 и K_1 . Тогда на A -модуле $\text{Hom}_A(\mathcal{E}_0, \mathcal{E}_1)$ имеется ассоциированная связность ∇ , задаваемая формулой

$$(\nabla T)s := \nabla_1(Ts) - T(\nabla_0 s)$$

с кривизной

$$\nabla^2 T = K_1 T - T K_0.$$

В частности, любая связность ∇ на $\mathcal{E}$ в случае коммутативной алгебры A порождает связность в $\text{End}_A \mathcal{E}$, задаваемую формулой

$$\nabla T := \nabla \circ T - T \circ \nabla.$$

Характер Черна. Пусть M — гладкое компактное многообразие и $E \rightarrow M$ — векторное расслоение над M . Обозначим через $\Gamma^\infty(M, E) \equiv \Gamma^\infty(E)$ модуль гладких сечений этого расслоения. Поскольку это расслоение можно вложить в качестве прямого слагаемого в тривиальное векторное расслоение ранга N над M , то указанный модуль можно представить в виде $p[C^\infty(M)]^N$, где p — проектор в свободном модуле $[C^\infty(M)]^N$.

Наделим M римановой метрикой g и обозначим через R кривизну этой метрики. Если $s \in \Gamma^\infty(E)$ — гладкое сечение расслоения $E \rightarrow M$, т.е. $ps = s$, то

$$Rs = (\nabla_g)^2 s = (pd)(pd)s = p dp ds.$$

Дифференцируя соотношение $p^2 = p$, получим: $p dp + dp p = dp$, откуда

$$p dp = dp(1 - p), \quad dp p = (1 - p)dp,$$

так что $p dp p = 0$. Если $s = ps$, то $ds = dp s + p ds$, откуда $dp s = (1 - p)ds$.

Из этих соотношений получаем

$$Rs = p dp ds = dp(1 - p)ds = dp dp s = dp dp ps.$$

Следовательно,

$$R = dp dp p = dp(1 - p)dp = p dp dp.$$

Определение 10. *Характером Черна* проектора $p \in \text{Mat}_m(A)$ над коммутативной алгеброй A называется величина

$$\text{ch } p := \text{Tr}(\exp R) = \sum_{k=0}^{\infty} \text{ch}_{2k}(p) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \text{tr } p(dp)^{2k}.$$

В случае, когда алгебра A совпадает с $C^\infty(M)$, мы можем рассматривать dp как матрицу, составленную из 1-форм, т.е. $dp \in \text{Mat}_N(\Omega^1(M))$, так что каждый член $\text{ch}_{2k}(p) \in \Omega^{2k}(M)$ и, в частности, сумма в определении характера является конечной. Заметим, что в этом случае характер Черна является классом когомологий де Рама многообразия M .

2.4. Когомологии Хохшильда.

Определение 11. n -Коцепь Хохшильда на алгебре A — это $(n+1)$ -линейный функционал на алгебре A или n -линейная форма на A со значениями в двойственном пространстве A^* . Заметим, что A^* является A -бимодулем относительно операции

$$\varphi \in A^* \mapsto (b\varphi c)(a) := \varphi(cab).$$

Кограничный оператор b является двойственным к граничному оператору на гомологиях:

$$b_n \varphi(a_0, \dots, a_{n+1}) = \sum_{j=0}^n (-1)^j \varphi(a_0, \dots, a_j a_{j+1}, \dots, a_{n+1}) + (-1)^{n+1} \varphi(a_{n+1} a_0, \dots, a_n).$$

Когомологии полученного коцепного комплекса называются *когомологиями Хохшильда* алгебры A и обозначаются через $HH^\bullet(A)$ или $H^\bullet(A, A^*)$.

В частности, 0-коцикл τ на алгебре A совпадает со следом, поскольку $\tau \in A^* = \text{Hom}(A, \mathbb{C})$ и

$$\tau(a_0 a_1) - \tau(a_1 a_0) =: b_1 \tau(a_0, a_1) = 0.$$

Более общим образом, можно определить когомологии Хохшильда алгебры A со значениями в произвольном A -бимодуле $\mathcal{E}$. Для этого обозначим через $C^n(A, \mathcal{E})$ векторное пространство n -линейных отображений $\varphi : A^n \rightarrow \mathcal{E}$, рассматриваемое как A -бимодуль относительно операции

$$(b\varphi c)(a_1, \dots, a_n) := b\varphi(a_1, \dots, a_n)c,$$

где $b, c \in A$. Кограничное отображение в этом случае задается формулой

$$\begin{aligned} b_n \varphi(a_1, \dots, a_{n+1}) &= a_1 \varphi(a_2, \dots, a_{n+1}) + \\ &+ \sum_{j=0}^n (-1)^j \varphi(a_1, \dots, a_j a_{j+1}, \dots, a_{n+1}) + (-1)^{n+1} \varphi(a_1, \dots, a_n) a_{n+1}. \end{aligned}$$

Определение 12. n -Коцепь φ на алгебре A называется *циклической*, если $\lambda\varphi = \varphi$, где

$$\lambda\varphi(a_0, \dots, a_n) := (-1)^n \varphi(a_n, a_0, \dots, a_{n-1}).$$

Например, циклический 1-коцикл φ удовлетворяет соотношениям

$$\varphi(a_0, a_1) = -\varphi(a_1, a_0), \quad \varphi(a_0 a_1, a_2) - \varphi(a_0, a_1 a_2) + \varphi(a_2 a_0, a_1) = 0,$$

а циклическая 1-кограница $\varphi = b\psi$ определяется равенством

$$\varphi(a_0, a_1) = b\psi(a_0, a_1) = \psi([a_0, a_1]),$$

т.е. является линейной функцией от коммутатора.

Характер Черна цикла.

Определение 13. Предположим, что задан n -мерный цикл $(\Omega^\bullet, d, \int)$ над алгеброй A . Его *характером Черна* называется $(n+1)$ -линейный функционал на A , определяемый формулой

$$\tau(a_0, \dots, a_n) := \int a_0 da_1 \dots da_n.$$

Заметим прежде всего, что τ является коциклом, т.е. $b\tau = 0$. Действительно,

$$\begin{aligned} \int \sum_{j=0}^n (-1)^j a_0 da_1 \dots d(a_j a_{j+1}) \dots da_{n+1} + (-1)^{n+1} \int a_{n+1} a_0 da_1 \dots da_n = \\ = (-1)^n \int (a_0 da_1 \dots da_n) a_{n+1} + (-1)^{n+1} \int (a_{n+1} a_0 da_1 \dots da_n) = 0, \end{aligned}$$

поскольку

$$\int a\omega^n = \int \omega^n a$$

для любых $a \in A$, $\omega^n \in \Omega^n$.

Далее заметим, что коцикл τ является циклическим, поскольку

$$\begin{aligned} \tau(a_0, a_1, \dots, a_n) &= (-1)^{n-1} \int da_n a_0 da_1 \dots da_{n-1} = \\ &= (-1)^n \int a_n da_0 da_1 \dots da_{n-1} = (-1)^n \tau(a_n, a_0, \dots, a_{n-1}). \end{aligned}$$

Кроме того,

$$\tau(1, a_1, \dots, a_n) = \int da_1 \dots da_n = 0.$$

Предложение 2. $(n+1)$ -Линейный функционал $\tau : A^{n+1} \rightarrow \mathbb{C}$, обращающийся в нуль на $\mathbb{C} \oplus A^n$, является циклическим n -коциклом тогда и только тогда, когда он совпадает с характером Черна некоторого n -мерного цикла над A .

Доказательство. Мы уже показали, что характер Черна n -мерного цикла над A обладает указанными свойствами. Обратно, если $(n+1)$ -линейный функционал $\tau : A^{n+1} \rightarrow \mathbb{C}$ является циклическим коциклом, обращаясь в нуль на $\mathbb{C} \oplus A^n$, то мы можем построить n -мерный цикл над A , для которого указанный коцикл будет характером Черна, следующим образом.

Пусть $\Omega^\bullet = \bigoplus_{k=0}^n \Omega^k A$ с универсальным дифференциалом d на $\Omega^k A$ при $k < n$. Дополним это определение при $k = n$, полагая $d|\Omega^n A = 0$. Определим далее интеграл

$$\int : \Omega^n A \rightarrow \mathbb{C}, \quad \int a_0 da_1 \dots da_n := \tau(a_0, a_1, \dots, a_n).$$

Мы докажем, что этот интеграл действительно задает характер Черна, если убедимся в том, что $(\Omega^\bullet, d, \int)$ является n -мерным циклом над A .

Имеем $\Omega^n A = A \otimes \bar{A}^{\otimes n}$, откуда следует, что форма $a_0 da_1 \dots da_n$ не изменится, если заменить какой-либо из элементов a_j , $1 \leq j \leq n$, на $a_j + \lambda_j 1_A$, $\lambda_j \in \mathbb{C}$. Для того, чтобы показать, что введенный интеграл корректно определен, нужно проверить, что $\tau(a_0, a_1, \dots, a_n) = 0$, если один из элементов $a_j = 1$. Но это вытекает из соотношения $\tau(1, a_1, \dots, a_n) = 0$, выполненного по условию и цикличности τ . Это же соотношение показывает, что $\int da_1 \dots da_n = 0$ (замкнутость $\int$).

Остается проверить свойство перестановочности:

$$\int \omega^k \omega^{n-k} = (-1)^{k(n-k)} \int \omega^{n-k} \omega^k.$$

Рассмотрим сначала случай, когда $k = n$; при этом $\omega^0 =: a \in A$. Справедливо соотношение

$$\omega^n a - a \omega^n = [\omega^n, a] = (-1)^n b(\omega^n da).$$

Так как $b\tau = 0$, то отсюда следует, что

$$\int \omega^n a = \int a \omega^n.$$

Далее, если $\omega^{n-1} \in \Omega^{n-1}A$ и $da \in \Omega^1A$, то

$$\begin{aligned} \omega^{n-1} da - (-1)^{n-1} d\omega^{n-1} a &= [\omega^{n-1}, da] = \\ &= (-1)^{n-1} (d[\omega^{n-1}, a] - [d\omega^{n-1}, a]) = (-1)^{n-1} d[\omega^{n-1}, a] + b(d\omega^{n-1} da). \end{aligned}$$

Так как $b\tau = 0$ и интеграл $\int$ замкнут, то

$$\int \omega^{n-1} da = (-1)^{n-1} \int da \omega^{n-1}.$$

Пользуясь последовательно двумя разобранными случаями, нетрудно показать, что и в общем случае

$$\begin{aligned} \int \omega^{n-k} a_0 da_1 \dots da_k &= (-1)^{n-1} \int da_k \omega^{n-k} da_1 \dots da_{k-1} = \dots = \\ &= (-1)^{k(n-1)} \int a_0 da_1 \dots da_k \omega^{n-k} = (-1)^{k(n-k)} \int a_0 da_1 \dots da_k \omega^{n-k}. \end{aligned}$$

Предложение доказано. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Сергеев А. Г.* Лекции по функциональному анализу. — М: МИАН, 2014.
2. *Тейлор М.* Псевдодифференциальные операторы. — М: Мир, 1985.
3. *Хермандер Л.* Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. — М: Мир 1986.
4. *Connes A.* Noncommutative Geometry. — London–San Diego: Academic Press, 1994.
5. *Gracia-Bondia J. M., Varilly J. C., Figueroa H.* Elements of Noncommutative Geometry. — Boston–Basel–Berlin: Birkhäuser, 2001.

А. Г. Сергеев

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, Москва

E-mail: sergeev@mi.ras.ru



ОБ АНАЛИТИЧЕСКИХ В СЕКТОРЕ РАЗРЕШАЮЩИХ СЕМЕЙСТВАХ ОПЕРАТОРОВ СИЛЬНО ВЫРОЖДЕННЫХ ЭВОЛЮЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ ВЫСОКОГО И ДРОБНОГО ПОРЯДКОВ

© 2017 г. В. Е. ФЕДОРОВ, Е. А. РОМАНОВА

Аннотация. В работе исследован класс линейных эволюционных уравнений дробного порядка, вырождающихся на ядре оператора при производной и его относительно присоединенных векторах. Показано, что в отличие от случая вырожденных уравнений первого порядка и уравнений дробного порядка со слабым вырождением — только на ядре оператора при производной — в рассмотренном случае семейство аналитических в секторе операторов не обращается в нуль на относительно корневом линейале оператора при производной, имеет на нем особенность в нуле и в итоге не определяет решение сильно вырожденного уравнения дробного порядка. Для случая сильно вырожденного уравнения целого порядка это не так, однако поведение семейства разрешающих операторов в нуле не поддается исследованию известными методами.

Ключевые слова: вырожденное эволюционное уравнение, дифференциальное уравнение дробного порядка, аналитическое в секторе разрешающее семейство операторов, начально-краевая задача.

AMS Subject Classification: 34G10, 34A08, 35R11

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение	82
2. Класс пар операторов $\mathcal{H}^\alpha(\theta_0, a_0, p)$	84
3. Расщепления пространств и действия операторов	88
4. Аналитические семейства операторов	90
5. Выводы	94
6. Пример сильно вырожденного уравнения	94
Список литературы	96

1. ВВЕДЕНИЕ

В работе исследуется дробное дифференциальное уравнение

$$D_t^\alpha Lu(t) = Mu(t), \quad t > 0, \quad (1)$$

с операторами L , M , действующими из банахова пространства $\mathfrak{U}$ в банахово пространство $\mathfrak{V}$. Здесь D_t^α — дробная производная Капуто (см. [12]). Предполагается, что $\ker L \neq \{0\}$, поэтому уравнение называется вырожденным. Мы будем различать случаи слабого вырождения, когда оператор L не имеет M -присоединенных векторов, и сильного вырождения, когда такие векторы существуют. Присутствующий далее в условиях на операторы L , M параметр $p \in \mathbb{N} \equiv \mathbb{N} \cup \{0\}$ означает наибольшую длину цепочек M -присоединенных векторов оператора L и поэтому характеризует степень вырождения уравнения (1).

Работа выполнена при поддержке Лаборатории квантовой топологии Челябинского государственного университета (грант Правительства РФ № 14.Z50.31.0020).

Такие уравнения в случае ограниченности L -спектра оператора M исследовались в [8–10, 13]. Показано, что в этом случае существует аналитическое во всей плоскости разрешающее семейство операторов уравнения (1). При условии (L, p) -ограниченности оператора M исследованы вопросы однозначной разрешимости неоднородного уравнения.

Объектом интереса в данной работе является аналитическое в секторе разрешающее семейство операторов. Меньшая регулярность разрешающего семейства (не во всей плоскости, а в секторе) допускает возможность рассмотрения уравнения (1) с неограниченным L -спектром оператора M , расположенным в секторе $\{\mu \in \mathbb{C} : |\arg(\mu - a)| \geq \theta, \mu = a\}$ при некоторых $a \geq 0$, $\theta \in (\pi/2, \pi)$. Именно такая ситуация обычно возникает в случаях, когда L и M дифференциальные операторы по пространственным переменным и порядок оператора M больше.

В невырожденном случае, когда $\mathfrak{U} = \mathfrak{V}$, $L = I$, при $\alpha = 1$ теорема Соломыка–Иосиды (см. [1, 5]) утверждает, что необходимым и достаточным условием существования аналитической в секторе разрешающей полугруппы уравнения $\dot{u}(t) = Mu(t)$ является секториальность оператора M (см. по этому поводу также [3]). Я. Прюсс [14] обобщил этот результат на случай невырожденных интегральных уравнений Вольтерра, в том числе на случай невырожденного уравнения (1) дробного порядка $\alpha > 0$. Вырожденное уравнение (1) первого порядка исследовано в [4, 7], где было показано, что при $\alpha = 1$, $p \in \mathbb{N}_0$ семейство операторов

$$\left\{ U_\alpha(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \mu^{\alpha-1} (\mu^\alpha L - M)^{-1} L e^{\mu t} d\mu \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}) : \left| \arg(t - a_0) \right| < \theta_0 - \frac{\pi}{2}, t \neq a_0 \right\}, \quad (2)$$

$\Gamma = \{\mu \in \mathbb{C} : |\arg(\mu - a_0 - 1)| = \theta, \mu = a_0 + 1\}$, при условии сильной (L, p) -секториальности оператора M с константами $a_0 \in \mathbb{R}$, $\theta_0 \in (\pi/2, \pi)$ является экспоненциально ограниченным, имеет в качестве сильного предела в нуле проектор на фазовое пространство уравнения (1) вдоль M -корневого линеала оператора L и является разрешающим семейством операторов для уравнения (1), т.е. единственное решение задачи Коши $u(0) = u_0$ для него имеет вид $u(t) = U_1(t)u_0$ при всех u_0 из фазового пространства уравнения.

В [11] показано, что все то же верно в случае $\alpha > 0$, $p = 0$ при условии рефлексивности пространств $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$; при этом аналогом сильной (L, p) -секториальности оператора M является условие $(L, M) \in \mathcal{H}^\alpha(a_0, \theta_0, 0)$.

В данной работе рассмотрено уравнение (1) в случае, когда $(L, M) \in \mathcal{H}^\alpha(a_0, \theta_0, p)$ при $p \in \mathbb{N}$, а банаховы пространства $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$ рефлексивны. Показано, что при $\alpha = m \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ семейство (2) при $t > 0$ также задает решение соответствующего уравнения (1), однако исследовать его поведение в нуле методами работ [4, 7, 11] не представляется возможным. В случае сильно вырожденного уравнения ($p \in \mathbb{N}$) с дробным $\alpha > 0$ ситуация еще хуже: семейство операторов (6) не определяет решение уравнения (1) даже при $t > 0$. Объясняется это тем, что, как известно, сам вид разрешающих операторов (2) получен методами теории преобразования Лапласа (см. [14]). Однако при дробном $\alpha > 0$ подынтегральная функция в (2) имеет точку ветвления в нуле, что в сильно вырожденном случае приводит к появлению особенности при $t = 0$ у сужения операторов $U_\alpha(t)$ на M -корневой линеал оператора L . Тем самым, техника преобразования Лапласа оказывается в таком случае неприменимой. В случае же дробного $\alpha > 0$, $p = 0$, рассмотренном в [11], в силу отсутствия M -присоединенных векторов оператора L слагаемые с особенностями исчезают.

В разделе 2 введено определение класса $\mathcal{H}^\alpha(a_0, \theta_0, p)$ пар операторов, доказаны некоторые свойства таких пар. В разделе 3 при условии $(L, M) \in \mathcal{H}^\alpha(a_0, \theta_0, p)$ показано представление рефлексивных банаховых пространств $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$ в виде прямых сумм ядер и замыканий образов правой и левой (L, p) -резольвент оператора M соответственно. В разделе 4 исследованы свойства семейств операторов (2). Раздел 5 содержит описание качественной стороны полученных результатов. В разделе 6 приведен пример начально-краевой задачи, представимой в виде задачи Коши для сильно вырожденного уравнения (1) с парой операторов $(L, M) \in \mathcal{H}^\alpha(a_0, \theta_0, 1)$.

2. КЛАСС ПАР ОПЕРАТОРОВ $\mathcal{H}^\alpha(\theta_0, a_0, p)$

Доказательство большинства утверждений данного параграфа, кроме теоремы 2.1, необходимых для дальнейшего изложения результатов, могут быть найдены в [6].

Для банаховых пространств $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$ обозначим через $\mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{V})$ банахово пространство линейных непрерывных операторов из $\mathfrak{U}$ в $\mathfrak{V}$. Множество замкнутых линейных операторов с плотной в $\mathfrak{U}$ областью определения, действующих в пространство $\mathfrak{V}$, обозначим через $\mathcal{Cl}(\mathfrak{U}; \mathfrak{V})$. Если $\mathfrak{V} = \mathfrak{U}$, то обозначения сократятся до $\mathcal{L}(\mathfrak{U})$ и $\mathcal{Cl}(\mathfrak{U})$ соответственно.

Пусть заданы операторы $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{V})$, $\ker L \neq \{0\}$, $M \in \mathcal{Cl}(\mathfrak{U}; \mathfrak{V})$ с областью определения $D_M \subset \mathfrak{U}$. Множество точек $\mu \in \mathbb{C}$, для которых оператор $\mu L - M : D_M \rightarrow \mathfrak{V}$ биективен, т.е. $(\mu L - M)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{V}; \mathfrak{U})$, назовем *L-резольвентным множеством* $\rho^L(M)$ оператора M . Множество $\mathbb{C} \setminus \rho^L(M) \equiv \sigma^L(M)$ называется *L-спектром* оператора M .

Пусть $\lambda, \mu \in \rho^L(M)$; тогда очевидны тождества

$$\begin{aligned} M(\mu L - M)^{-1} &= \mu L(\mu L - M)^{-1} - I, \quad (\mu L - M)^{-1}Mu = \mu(\mu L - M)^{-1}Lu - u, \quad u \in D_M, \\ (\lambda L - M)(\mu L - M)^{-1} &= I + (\lambda - \mu)L(\mu L - M)^{-1}, \\ (\mu L - M)^{-1}(\lambda L - M)u &= u + (\lambda - \mu)(\mu L - M)^{-1}Lu, \quad u \in D_M, \\ (\mu L - M)^{-1} - (\lambda L - M)^{-1} &= (\lambda - \mu)(\lambda L - M)^{-1}L(\mu L - M)^{-1}. \end{aligned} \quad (3)$$

Из них, в частности, следует, что для $\mu \in \rho^L(M)$ выполняются включения

$$(\mu L - M)^{-1}M \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}), \quad M(\mu L - M)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{V}).$$

При этом имеется в виду переход к замыканиям операторов в случае необходимости.

Упорядоченное множество $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots\} \subset \mathfrak{U}$ назовем *цепочкой M-присоединенных векторов* вектора $\varphi_0 \in \ker L$, если

$$L\varphi_{k+1} = M\varphi_k, \quad k = 0, 1, \dots, \quad \varphi_l \notin \ker L, \quad l = 1, 2, \dots$$

Цепочка конечна, если существует такой M -присоединенный вектор φ_p , что либо $\varphi_p \notin D_M$, либо $M\varphi_p \notin \operatorname{im} L$. Мощность конечной цепочки называется ее *длиной*. Порядковый номер M -присоединенного вектора, под которым он входит в цепочку, назовем *высотой* этого вектора. Соответствующий цепочке вектор $\varphi_0 \in \ker L$ при необходимости также будем включать в эту цепочку и называть его M -присоединенным вектором высоты 0.

Замечание 2.1. Определение подразумевает, что все векторы цепочки, кроме, может быть, последнего в случае ее конечной длины, лежат в D_M .

Оператор-функции

$$R_\mu^L(M) = (\mu L - M)^{-1}L, \quad L_\mu^L(M) = L(\mu L - M)^{-1}$$

называются правой и левой L -резольвентами оператора M соответственно.

Лемма 2.1. Вектор $\varphi \neq 0$ является M -присоединенным вектором высоты не более $l \in \mathbb{N}_0$ оператора L если выполняется любое из следующих двух условий:

- (i) $(R_\mu^L(M))^{l+1}\varphi = 0$ для всех $\mu \in \rho^L(M)$;
- (ii) для любого $\mu \in \rho^L(M)$ существует такой вектор $\varphi_0 \in \ker L \setminus \{0\}$, что $(R_\mu^L(M))^l\varphi = \varphi_0$.

Подразумевая, что $p \in \mathbb{N}_0$, $\mu = (\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_p) \in (\rho^L(M))^{p+1}$, введем операторы

$$R_{(\mu,p)}^L(M) = \prod_{k=0}^p R_{\mu_k}^L(M), \quad L_{(\mu,p)}^L(M) = \prod_{k=0}^p L_{\mu_k}^L(M),$$

называемые в дальнейшем правой и левой (L, p) -резольвентами соответственно.

Лемма 2.2. Пусть $p \in \mathbb{N}_0$, $\lambda_k, \mu_k \in \rho^L(M)$, $k = 0, 1, \dots, p$. Тогда

- (i) $\operatorname{im} R_{(\lambda,p)}^L(M) = \operatorname{im} R_{(\mu,p)}^L(M)$, $\operatorname{im} L_{(\lambda,p)}^L(M) = \operatorname{im} L_{(\mu,p)}^L(M)$;

- (ii) $\ker R_{(\mu,p)}^L(M)$ является линейной оболочкой всех M -присоединенных векторов оператора L высоты, не большей p , и

$$\ker L_{(\lambda,p)}^L(M) = \left\{ M\varphi : \varphi \in D_M \cap \ker R_{(\mu,p)}^L \right\}.$$

Под степенью комплексного числа в случае необходимости далее всегда подразумевается главная ветвь многозначной функции.

Определение 2.1. Пусть $p \in \mathbb{N}_0$, $\alpha > 0$. Будем говорить, что пара операторов (L, M) принадлежит классу $\mathcal{H}^\alpha(\theta_0, a_0, p)$, если

- (i) существуют такие константы $a_0 \geq 0$ и $\theta_0 \in (\pi/2, \pi)$, что для всех

$$\lambda \in S_{a_0, \theta_0} \equiv \left\{ \mu \in \mathbb{C} : |\arg(\mu - a_0)| < \theta_0, \mu \neq a_0 \right\}$$

выполняется включение $\lambda^\alpha \in \rho^L(M)$;

- (ii) при всех $a > a_0$, $\theta \in (\pi/2, \theta_0)$ существует такая константа $K(a, \theta) > 0$, что при любых $\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_p \in S_{a, \theta}$

$$\max \left\{ \|R_{(\mu,p)}^L(M)\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{U})}, \|L_{(\mu,p)}^L(M)\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{V})} \right\} \leq \frac{K(a, \theta)}{\prod_{k=0}^p |\mu_k^{\alpha-1}(\mu_k - a)|}.$$

Замечание 2.2. Если существует оператор $L^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{V}; \mathfrak{U})$, то

$$(L, M) \in \mathcal{H}^\alpha(\theta_0, a_0, 0) \iff L^{-1}M \in \mathcal{A}_\alpha(\theta_0, a_0)$$

(см. [12]) или, что равносильно, $ML^{-1} \in \mathcal{A}_\alpha(\theta_0, a_0)$. При $\alpha = 1$ это означает секториальность оператора $L^{-1}M$ (см. [2, 5]).

Замечание 2.3. Класс $\mathcal{H}^\alpha(\theta_0, a_0, 0)$ пар операторов (L, M) в [11] назван классом $\mathcal{H}^\alpha(\theta_0, a_0)$.

Замечание 2.4. Оператор M (L, p) -секториален (см. [4, 7]) тогда и только тогда, когда $(L, M) \in \mathcal{H}^1(\theta_0, a_0, p)$.

Пусть $\mu \in \rho^L(M)$. Введем обозначения

$$\ker(R_\mu^L(M))^{p+1} = \mathfrak{U}^0, \quad \ker(L_\mu^L(M))^{p+1} = \mathfrak{V}^0.$$

Через $\mathfrak{U}^k$ ($\mathfrak{V}^k$) будем обозначать замыкание линеала $\text{im}(R_\mu^L(M))^{p+k}$ (соответственно, линеала $\text{im}(L_\mu^L(M))^{p+k}$) в норме пространства $\mathfrak{U}$ (соответственно, $\mathfrak{V}$) при $k \in \mathbb{N}$, а через $\tilde{\mathfrak{U}}$ ($\tilde{\mathfrak{V}}$) — замыкание линеала $\mathfrak{U}^0 \dot{+} \text{im}(R_\mu^L(M))^{p+1}$ (соответственно, $\mathfrak{V}^0 \dot{+} \text{im}(L_\mu^L(M))^{p+1}$) в норме $\mathfrak{U}$ (соответственно, $\mathfrak{V}$). Символ L_k будет обозначать сужение оператора L на $\mathfrak{U}^k$, а M_k — сужение M на $D_{M_k} = D_M \cap \mathfrak{U}^k$, $k = 0, 1$. Очевидно следующее утверждение.

Лемма 2.3. Имеет место действие операторов $L_0 \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^0; \mathfrak{V}^0)$, $M_0 : D_{M_0} \rightarrow \mathfrak{V}^0$.

Для $R > 0$, $\lambda \in \mathbb{C}$ введем обозначение

$$B_R(\lambda) = \left\{ \mu \in \mathbb{C} : |\mu - \lambda| < R \right\}.$$

Перечислим и докажем важные свойства пар операторов класса $\mathcal{H}^\alpha(\theta_0, a_0, p)$.

Теорема 2.1. Пусть $\alpha > 0$, $p \in \mathbb{N}_0$, $(L, M) \in \mathcal{H}^\alpha(\theta_0, a_0, p)$. Тогда справедливы следующие утверждения:

- (i) длины всех цепочек M -присоединенных векторов оператора L ограничены числом p ;
- (ii) $\ker R_{(\mu,p)}^L(M) \cap \text{im } R_{(\mu,p)}^L(M) = \{0\}$;
- (iii) $\ker L_{(\mu,p)}^L(M) \cap \text{im } L_{(\mu,p)}^L(M) = \{0\}$;
- (iv) существует оператор $M_0^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{V}^0; \mathfrak{U}^0)$;
- (v) операторы $H = M_0^{-1}L_0$, $J = L_0M_0^{-1}$ нильпотентны степени не больше p ;

(vi) при любом $b \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} ((n-b)R_n^L(M))^{p+1}u &= u \quad \forall u \in \mathfrak{U}^1, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} ((n-b)L_n^L(M))^{p+1}f &= f \quad \forall f \in \mathfrak{V}^1; \end{aligned}$$

(vii) $\widetilde{\mathfrak{U}} = \mathfrak{U}^0 \oplus \mathfrak{U}^1$, $\widetilde{\mathfrak{V}} = \mathfrak{V}^0 \oplus \mathfrak{V}^1$;

(viii) $\mathfrak{U}^k = \mathfrak{U}^1$, $\mathfrak{V}^k = \mathfrak{V}^1$, $k \in \mathbb{N}$;

(ix) при некоторых $C, R > 0$ выполняется неравенство

$$\max \left\{ \|R_{\mu^\alpha}^L(M)\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{U})}, \|L_{\mu^\alpha}^L(M)\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{V})} \right\} \leq C|\mu|^{\alpha(p-1)} \quad \forall \mu \in S_{a,\theta} \setminus B_R(0).$$

Доказательство. (i) Возьмем M -присоединенный вектор φ высоты $p+1$ оператора L . Тогда в силу леммы 2.1 при $\mu \in S_{a,\theta}$

$$(R_{\mu^\alpha}^L(M))^{p+1}\varphi = \varphi_0 \in \ker L \setminus \{0\}.$$

Отсюда при $a > a_0$, $\theta \in (\pi/2, \theta_0)$

$$\|\varphi_0\|_{\mathfrak{U}} \leq \left\| (R_{\mu^\alpha}^L(M))^{p+1} \right\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{U})} \|\varphi\|_{\mathfrak{U}} \leq \frac{K(a, \theta) \|\varphi\|_{\mathfrak{U}}}{|\mu^{\alpha-1}(\mu - a)|^{p+1}}.$$

В пределе при $|\mu| \rightarrow \infty$ получаем $\varphi_0 = 0$, противоречие.

(ii) Если $u \in \ker R_{(\mu,p)}^L(M) \cap \text{im } R_{(\mu,p)}^L(M)$, то при некотором $v \in \mathfrak{U}$ имеем $u = (R_\mu^L(M))^{p+1}v$, $\mu \in \rho^L(M)$; тогда $v \in \ker (R_\mu^L(M))^{2p+2}$. Следовательно, в силу леммы 2.1, v — M -присоединенный вектор оператора L высоты не больше $2p+1$. Но векторов высоты больше p в условиях теоремы не существует, поэтому в силу леммы 2.2(ii)

$$\ker (R_\mu^L(M))^{2p+2} = \ker (R_\mu^L(M))^{p+1}, \quad u = (R_\mu^L(M))^{p+1}v = 0.$$

(iii) Для $f \in \ker L_{(\mu,p)}^L(M) \cap \text{im } L_{(\mu,p)}^L(M)$ существует такое $g \in \mathfrak{V}$, что $f = (L_\mu^L(M))^{p+1}g$, $\mu \in \rho^L(M)$. Тогда $g \in \ker (L_\mu^L(M))^{2p+2}$ и существует

$$\varphi \in D_M \cap \ker (R_\mu^L(M))^{2p+2} = D_M \cap \ker (R_\mu^L(M))^{p+1},$$

при котором $g = M\varphi$. Поэтому $g \in \ker (L_\mu^L(M))^{p+1}$ и $f = 0$.

(iv) Если $\ker M_0 \neq \{0\}$, то существует вектор $\varphi \in \ker M_0 \setminus \{0\}$. Так как $\varphi \in \ker R_{(\mu,p)}^L(M)$, по лемме 2.2 φ — M -присоединенный вектор высоты $l \leq p$ оператора L . В силу леммы 2.1 при $\mu \in \rho^L(M)$ найдется такой $\varphi_0 \in \ker L \setminus \{0\}$, что $(R_\mu^L(M))^l \varphi = \varphi_0$. Вектор φ_0 не лежит в ядре оператора M_0 , иначе $\rho^L(M) = \emptyset$. С другой стороны,

$$M_0 \varphi_0 = M(R_\mu^L(M))^l \varphi = (L_\mu^L(M))^l M \varphi = 0,$$

противоречие. Поэтому $\ker M_0 = \{0\}$ и оператор M_0 инъективен. Из определения подпространства $\mathfrak{V}^0$ и леммы 2.2(ii) вытекает сюръективность оператора M_0 .

(v) Возьмем любой вектор $\varphi \in \mathfrak{U}^0$. Тогда $\varphi = \varphi_l$ — M -присоединенный вектор оператора L высоты $l \leq p$. Нетрудно заметить, что $H\varphi_l = \varphi_{l-1}$ — предыдущий M -присоединенный вектор в цепочке. Далее, при $k \leq l$ имеем

$$H^k \varphi_l = \varphi_{l-k}, \quad H^l \varphi_l = \varphi_0 \in \ker L, \quad H^{l+1} \varphi_l = 0.$$

Поскольку высота M -присоединенного вектора $\varphi \in \mathfrak{U}^0$ не может быть больше p , то $H^{p+1} = 0$, что и требовалось. Кроме того, $J^{p+1} = M_0 H^{p+1} M_0^{-1} = 0$.

(vi) Пусть $u \in \text{im } (R_\mu^L(M))^{p+1}$; тогда $u = (R_{\lambda^\alpha}^L(M))^{p+1}v$ для некоторых $\lambda \in S_{a,\theta}$ и $v \in \mathfrak{U}$ в силу леммы 2.2(i). Далее,

$$\begin{aligned} ((n-b)R_n^L(M))^{p+1}u &= (I + (nL - M)^{-1}(M - bL))^{p+1}u = \\ &= \sum_{k=0}^{p+1} C_{p+1}^k ((nL - M)^{-1}(M - bL))^k (R_{\lambda^\alpha}^L(M))^{p+1}v = u + w, \end{aligned}$$

где

$$w = \sum_{k=1}^{p+1} C_{p+1}^k (R_n^L(M))^k (R_{\lambda^\alpha}^L(M))^{p+1-k} ((\lambda^\alpha L - M)^{-1}(M - bL))^k v.$$

Из определения класса $\mathcal{H}^\alpha(a_0, \theta_0, p)$ следует, что при $a \geq a_0$, $\theta \in (\pi/2, \theta_0)$

$$\|w\|_{\mathfrak{U}} \leq K(a, \theta) \sum_{k=1}^{p+1} \frac{C_{p+1}^k \left\| ((\lambda^\alpha L - M)^{-1}(M - bL))^k v \right\|_{\mathfrak{U}}}{\left[n^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} \left(n^{\frac{1}{\alpha}} - a \right) \right]^k |\lambda^{\alpha-1}(\lambda - a)|^{p+1-k}}.$$

Выражение в правой части последнего неравенства стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$. Отсюда следует, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} ((n - b)R_n^L(M))^{p+1} u = u$$

для любого $u \in \text{im } R_{(\mu, p)}^L(M)$. Из того, что этот линейал плотен в $\mathfrak{U}^1$, а семейство операторов

$$\left\{ ((n - b)R_n^L(M))^{p+1} : n \in (a^\alpha, +\infty) \cap \mathbb{N} \right\}$$

ограничено в $\mathcal{L}(\mathfrak{U})$ согласно определению класса $\mathcal{H}^\alpha(a_0, \theta_0, p)$, получим первую часть утверждения (vi). Утверждение про левые (L, p) -резольвенты на подпространстве $\mathfrak{V}^1$ доказывается аналогично.

При этом операторы

$$\tilde{P} = s\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} ((n - b)R_n^L(M))^{p+1}, \quad \tilde{Q} = s\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} ((n - b)L_n^L(M))^{p+1}$$

являются непрерывными как пределы в сильной топологии ограниченных в $\mathcal{L}(\mathfrak{U})$ и в $\mathcal{L}(\mathfrak{V})$ соответственно последовательностей непрерывных операторов. Нетрудно заметить, что в силу доказанного они являются проекторами вдоль $\mathfrak{U}^0$ на $\mathfrak{U}^1$ и вдоль $\mathfrak{V}^0$ на $\mathfrak{V}^1$ соответственно. Это и означает справедливость утверждения (vii).

(viii) Очевидно, что $\mathfrak{U}^k \subset \mathfrak{U}^1$. Возьмем $u \in \mathfrak{U}^1$; тогда существует последовательность $\{u_n\} \subset \text{im}(R_\mu^L(M))^{p+1}$, сходящаяся к u . Рассмотрим последовательность

$$\{v_n = (nR_n^L(M))^{m(p+1)} u_n\},$$

которая при достаточно большом $m \in \mathbb{N}$ лежит в $\text{im}(R_\mu^L(M))^{p+k}$. При натуральных $n > a^\alpha$

$$\begin{aligned} \|v_n - u\|_{\mathfrak{U}} &\leq \left\| (nR_n^L(M))^{m(p+1)} (u_n - u) \right\|_{\mathfrak{U}} + \\ &+ \sum_{l=1}^m \left\| (nR_n^L(M))^{(l-1)(p+1)} ((nR_n^L(M))^{p+1} u - u) \right\|_{\mathfrak{U}} \leq \\ &\leq K^m \left(\frac{n}{n^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} (n^{\frac{1}{\alpha}} - a)} \right)^{m(p+1)} \|u_n - u\|_{\mathfrak{U}} + \\ &+ \sum_{l=1}^m K^{l-1} \left(\frac{n}{n^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} (n^{\frac{1}{\alpha}} - a)} \right)^{(l-1)(p+1)} \left\| (nR_n^L(M))^{p+1} u - u \right\|_{\mathfrak{U}}. \end{aligned}$$

Последнее выражение стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$ в силу утверждения (vi) данной теоремы. Отсюда следует, что $\mathfrak{U}^1 \subset \mathfrak{U}^k$.

(ix) При $p = 0$ утверждение сразу следует из определения класса $\mathcal{H}^\alpha(\theta_0, a_0, p)$. Пусть $p \in \mathbb{N}$. Зафиксируем $\beta \in S_{a, \theta}$. Домножим псевдорезольвентное тождество (3)

$$R_{\mu^\alpha}^L(M) = R_{\beta^\alpha}^L(M) + (\beta^\alpha - \mu^\alpha) R_{\mu^\alpha}^L(M) R_{\beta^\alpha}^L(M)$$

на $(\beta^\alpha - \mu^\alpha)R_{\beta^\alpha}^L(M)$ и, опять используя это тождество и следующее из него коммутирование правых L -резольвент, получим

$$R_{\mu^\alpha}^L(M) = R_{\beta^\alpha}^L(M) + (\beta^\alpha - \mu^\alpha) \left[R_{\beta^\alpha}^L(M) \right]^2 + (\beta^\alpha - \mu^\alpha)^2 R_{\mu^\alpha}^L(M) \left[R_{\beta^\alpha}^L(M) \right]^2.$$

По индукции доказывается равенство

$$R_{\mu^\alpha}^L(M) = \sum_{k=0}^{n-1} (\beta^\alpha - \mu^\alpha)^k \left[R_{\beta^\alpha}^L(M) \right]^{k+1} + (\beta^\alpha - \mu^\alpha)^n R_{\mu^\alpha}^L(M) \left[R_{\beta^\alpha}^L(M) \right]^n. \quad (4)$$

Возьмем $n = p$. Тогда

$$\begin{aligned} \|R_{\mu^\alpha}^L(M)\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{U})} &\leq \\ &\leq \sum_{k=0}^{p-1} (|\beta|^\alpha + |\mu|^\alpha)^k \left\| [R_{\beta^\alpha}^L(M)]^{k+1} \right\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{U})} + \frac{(|\beta|^\alpha + |\mu|^\alpha)^p K(a, \theta)}{|\beta^{\alpha-1}(\beta - a)|^p |\mu^{\alpha-1}(\mu - a)|} \leq C |\mu|^{\alpha(p-1)} \end{aligned}$$

при достаточно больших $C, R > 0$. $\square$

3. РАСЩЕПЛЕНИЯ ПРОСТРАНСТВ И ДЕЙСТВИЯ ОПЕРАТОРОВ

Теорема 3.1. Пусть банахово пространство $\mathfrak{U}$ ($\mathfrak{V}$) рефлексивно и $(L, M) \in \mathcal{H}_\alpha(\theta_0, a_0, p)$. Тогда

$$\mathfrak{U} = \mathfrak{U}^0 \oplus \mathfrak{U}^1 \quad (\mathfrak{V} = \mathfrak{V}^0 \oplus \mathfrak{V}^1).$$

Доказательство. Возьмем вектор $u \in \mathfrak{U}$. Из условия $(L, M) \in \mathcal{H}_\alpha(\theta_0, a_0, p)$ следует, что для $a > a_0$

$$\left\{ (kR_k^L(M))^{p+1}u : k \in \mathbb{N}, k > a^\alpha \right\}$$

— ограниченная последовательность в $\mathfrak{U}$. Из рефлексивности пространства $\mathfrak{U}$ следует, что она содержит подпоследовательность $\{(k_n R_{k_n}^L(M))^{p+1}u\}$, слабо сходящуюся к некоторому $v \in \mathfrak{U}$. Из замкнутости линейного подпространства $\mathfrak{U}^1$ следует его слабая замкнутость, поэтому $v \in \mathfrak{U}^1$.

Пусть $v_n = (k_n R_{k_n}^L(M))^{p+1}u - v$, тогда

$$w\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = 0.$$

Рассмотрим предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (R_\mu^L(M))^{p+1}v_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (k_n R_{k_n}^L(M))^{p+1}(R_\mu^L(M))^{p+1}u - (R_\mu^L(M))^{p+1}v = (R_\mu^L(M))^{p+1}(u - v) \quad (5)$$

согласно теореме 2.1(vii) при $b = 0$. Для любого u^* из сопряженного пространства $\mathfrak{U}^* = \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathbb{C})$ имеем

$$u^*((R_\mu^L(M))^{p+1}v_n) \equiv v^*(v_n),$$

где v^* также принадлежит $\mathfrak{U}^*$. Следовательно, в силу (5)

$$w\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} (R_\mu^L(M))^{p+1}v_n = 0 = (R_\mu^L(M))^{p+1}(u - v),$$

поэтому $u - v \in \mathfrak{U}^0$.

Таким образом, для произвольного $u \in \mathfrak{U}$ имеем $u = z + v$, где $z = u - v \in \mathfrak{U}^0$, $v \in \mathfrak{U}^1$. Для пространства $\mathfrak{V}$ теорема доказывается аналогично. $\square$

Замечание 3.1. Подобное утверждение при $\alpha = 1$, $p = 0$ доказано в работе А. Яги [15]. Для $\alpha = 1$, $p \in \mathbb{N}$ оно доказано в [6], при $\alpha > 0$, $p = 0$ — в [11].

Следствие 3.1. Если банахово пространство $\mathfrak{U}$ ($\mathfrak{V}$) рефлексивно, $(L, M) \in \mathcal{H}_\alpha(\theta_0, a_0, p)$, то

$$\tilde{\mathfrak{U}} = \mathfrak{U} \quad (\tilde{\mathfrak{V}} = \mathfrak{V}).$$

В соответствии с доказательством теоремы 2.1 операторы

$$P = s\text{-}\lim_{\mu \rightarrow +\infty} (\mu R_\mu^L(M))^{p+1}, \quad Q = s\text{-}\lim_{\mu \rightarrow +\infty} (\mu L_\mu^L(M))^{p+1}$$

являются соответственно проекторами вдоль $\mathfrak{U}^0$ на подпространство $\mathfrak{U}^1$ и вдоль $\mathfrak{V}^0$ на подпространство $\mathfrak{V}^1$.

Следствие 3.2. Пусть банаховы пространства $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{V}$ рефлексивны и при этом пара операторов $(L, M) \in \mathcal{H}_\alpha(\theta_0, a_0, p)$. Тогда справедливы следующие утверждения:

- (i) $LPu = QLu$ для всех $u \in \mathfrak{U}$;
- (ii) $Pu \in D_M$ и $MPu = QMu$ для всех $u \in D_M$.

Доказательство. Для $u \in D_M$ из замкнутости оператора M и существования пределов

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (nR_n^L(M))^{p+1}u = Pu, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} M(nR_n^L(M))^{p+1}u = \lim_{n \rightarrow +\infty} (nL_n^L(M))^{p+1}Mu = QMu$$

следует утверждение (ii). Утверждение (i) доказывается аналогично. $\square$

Следствие 3.3. Пусть банаховы пространства $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{V}$ рефлексивны, $(L, M) \in \mathcal{H}_\alpha(\theta_0, a_0, p)$. Тогда

- (i) $L_1, M_1 \in \mathcal{Cl}(\mathfrak{U}^1; \mathfrak{V}^1)$;
- (ii) существует оператор $L_1^{-1} \in \mathcal{Cl}(\mathfrak{V}^1; \mathfrak{U}^1)$;
- (iii) $M_0 \in \mathcal{Cl}(\mathfrak{U}^0; \mathfrak{V}^0)$ непрерывно обратим.

Доказательство. Вложения $\text{im } L_k \subset \mathfrak{V}^k$, $\text{im } M_k \subset \mathfrak{V}^k$, $k = 0, 1$, вытекают из предыдущего следствия. Покажем, что замыкание $\overline{D_{M_1}}$ совпадает с $\mathfrak{U}^1$. В силу следствия 3.2(ii) для каждого $u_n \in D_M$ имеем $Pu_n \in D_{M_1}$. Так как линейал D_M плотен в пространстве $\mathfrak{U}$, для каждого $u \in \mathfrak{U}$, в частности для $u = Pu \in \mathfrak{U}^1$, существует последовательность $\{u_n\} \subset D_M$, сходящаяся к u . Поэтому

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Pu_n = Pu = u,$$

что означает плотность D_{M_1} в $\mathfrak{U}^1$.

Плотность множества D_{M_0} в пространстве $\mathfrak{U}^0$ может быть доказана аналогично с помощью проектора $I - P$. Непрерывная обратимость оператора $M_0 : D_{M_0} \rightarrow \mathfrak{U}^0$ доказана в теореме 2.1(iv).

Оператор L_1 инъективен, так как $\ker L \subset \mathfrak{U}^0$, при этом

$$(L_\mu^L(M))^{p+1} = (L_\mu^{L_1}(M_1))^{p+1}Q.$$

Следовательно,

$$\text{im}(L_\mu^L(M))^{p+1} = \text{im}(L_\mu^{L_1}(M_1))^{p+1} \subset \text{im } L_1, \quad \mathfrak{V}^1 \subset \overline{\text{im } L_1}.$$

Поэтому образ $\text{im } L_1$ плотен в $\mathfrak{V}^1$ и L_1^{-1} плотно определен. Он является замкнутым как обратный к замкнутому оператору. $\square$

Введем обозначения

$$S = L_1^{-1}M_1 : D_S \rightarrow \mathfrak{U}^1, \quad D_S = \left\{ u \in D_{M_1} : M_1u \in \text{im } L_1 \right\},$$

$$T = M_1L_1^{-1} : D_T \rightarrow \mathfrak{V}^1, \quad D_T = \left\{ v \in \text{im } L_1 : L_1^{-1}v \in D_{M_1} \right\}.$$

Лемма 3.1. Пусть банаховы пространства $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{V}$ рефлексивны, $(L, M) \in \mathcal{H}_\alpha(\theta_0, a_0, p)$. Тогда линейал D_S плотен в $\mathfrak{U}^1$, а D_T плотен в $\mathfrak{V}^1$.

Доказательство. Для $u = (R_\mu^{L_1}(M_1))^{p+1}z$, где $z \in \mathfrak{U}$, имеем

$$M_1u = L_1(\mu u - (R_\mu^{L_1}(M_1))^p z).$$

Таким образом, D_S содержит $\text{im}(R_\mu^{L_1}(M_1))^{p+1}$ и поэтому плотно в $\mathfrak{U}^1$.

Для любого $v \in \mathfrak{V}^1$ найдется последовательность $\{v_n\} \subset \text{im } L_1$, сходящаяся к v . Поэтому

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (nL_n^{L_1}(M_1))^{p+1}v_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (nL_n^{L_1}(M_1))^{p+1}(v_n - v) + \lim_{n \rightarrow \infty} (nL_n^{L_1}(M_1))^{p+1}v = v;$$

следовательно, множество $(L_\mu^{L_1}(M_1))^{p+1}[\text{im } L_1] \subset \text{im } L_1$ плотно в $\mathfrak{V}^1$. Но для $u \in \mathfrak{U}$ имеем

$$L_1^{-1}(L_\mu^{L_1}(M_1))^{p+1}L_1u = (R_\mu^{L_1}(M_1))^{p+1}u \in D_{M_1}.$$

Тем самым линейал D_T плотен в $\mathfrak{V}^1$. $\square$

Лемма 3.2. Пусть банаховы пространства $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{V}$ рефлексивны, $(L, M) \in \mathcal{H}_\alpha(\theta_0, a_0, p)$. Тогда

- (i) $S \in \mathcal{Cl}(\mathfrak{U}^1)$;
- (ii) если $L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{V}^1; \mathfrak{U}^1)$ или $M_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{V}^1; \mathfrak{U}^1)$, то $T \in \mathcal{Cl}(\mathfrak{V}^1)$.

Доказательство. Пусть $\{u_n\} \subset D_S$ сходится к $u \in \mathfrak{U}^1$, а $\{Su_n\}$ сходится к $w \in \mathfrak{U}^1$. Тогда

$$L_1Su_n = M_1u_n \rightarrow L_1w, \quad n \rightarrow \infty.$$

Из замкнутости оператора M_1 следует, что $u \in D_{M_1}$, $M_1u = L_1w$, $Su = w$. Утверждение (ii) доказывается аналогично. $\square$

4. АНАЛИТИЧЕСКИЕ СЕМЕЙСТВА ОПЕРАТОРОВ

Лемма 4.1. Пусть $(L, M) \in \mathcal{H}^\alpha(\theta_0, a_0, p)$, $\Gamma = \partial S_{a_0, \theta_0} + 1$. Тогда определены и аналитически продолжимы в сектор

$$\Sigma_{\theta_0} = \left\{ \tau \in \mathbb{C} : |\arg \tau| < \theta_0 - \frac{\pi}{2}, \tau \neq 0 \right\}$$

семейства операторов

$$\left\{ U_\alpha(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \mu^{\alpha-1} R_{\mu^\alpha}^L(M) e^{\mu t} d\mu \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}) : t > 0 \right\}, \quad (6)$$

$$\left\{ V_\alpha(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \mu^{\alpha-1} L_{\mu^\alpha}^L(M) e^{\mu t} d\mu \in \mathcal{L}(\mathfrak{V}) : t > 0 \right\}. \quad (7)$$

Для любых $a > a_0$, $\theta \in (\pi/2, \theta_0)$, $n \in \mathbb{N}_0$ существует такое $C_n = C_n(a, \theta)$, что для каждого

$$\tau \in \Sigma_\theta = \left\{ \tau \in \mathbb{C} : |\arg \tau| < \theta - \frac{\pi}{2}, \tau \neq 0 \right\}$$

имеем

$$\|U_\alpha^{(n)}(\tau)\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{U})} \leq \frac{C_n(a, \theta) e^{a \operatorname{Re} \tau}}{|\tau|^{n+mp}}, \quad \|V_\alpha^{(n)}(\tau)\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{V})} \leq \frac{C_n(a, \theta) e^{a \operatorname{Re} \tau}}{|\tau|^{n+mp}}. \quad (8)$$

Замечание 4.1. Из вида операторов $U_\alpha(t)$, $V_\alpha(t)$ для всех $\tau \in \Sigma_{\theta_0}$ следуют соотношения

$$LU_\alpha(\tau) = V_\alpha(\tau)L, \quad MU_\alpha(\tau)u = V_\alpha(\tau)Mu$$

для $u \in D_M$.

Доказательство. Утверждение об аналитичности семейств операторов (6) и (7) доказывается так же, как аналогичное утверждение из [11, теорема 2] для случая $p = 0$; при этом используется теорема 2.1(ix). Докажем неравенства (8).

Пусть $n \in \mathbb{N}_0$, $\theta \in (\pi/2, \theta_0)$, $a > a_0$, $\beta > a_0$, $\delta = \theta_0 - \theta$, $\varepsilon > 0$. Возьмем контур

$$\Gamma_1 = \left\{ \nu \in \mathbb{C} : \nu = \varepsilon - |x| - ix \operatorname{tg} \left(\frac{\pi + \delta}{2} \right), x \in \mathbb{R} \right\},$$

обозначим $-\operatorname{tg}(\pi/2 + \delta/2) = h_1$. Для $\tau \in \Sigma_\theta$, $a_1 = (a_0 + a)/2$ построим контур

$$\Gamma_\tau = \left\{ \mu \in \mathbb{C} : \mu = a_1 + \nu \tau^{-1}, \nu \in \Gamma_1 \right\}.$$

Можно заметить, что $\Gamma_\tau \subset S_{a_1, \theta + \delta/2}$. Действительно, для $\mu \in \Gamma_\tau$ имеем

$$|\arg(\mu - a_1)| = |\arg(\nu \tau^{-1})| = |\arg \nu - \arg \tau| \leq |\arg \nu| + |\arg \tau| < \theta + \frac{\delta}{2}.$$

При этом нетрудно показать, что интеграл

$$\int_{\Gamma_\tau} \mu^{n+m-1} R_{\mu^m}^L(M) e^{\mu\tau} d\mu = \int_{\Gamma} \lambda^{n+m-1} R_{\lambda^m}^L(M) e^{\lambda\tau} d\lambda = 2\pi i U_m^{(n)}(\tau)$$

сходится, поскольку $\mu\tau = a_1\tau + \nu$, $|\arg \nu| \in (\pi/2, \pi)$. Равенство интегралов при этом имеет место в силу аналитичности подынтегральной функции на множестве S_{a_0, θ_0} .

Применяя тождество (4) и учитывая, что $|\beta| \leq |\mu|$ при выборе $\varepsilon > \beta/\sin(\theta + \delta/2)$, имеем

$$U_m^{(n)}(\tau) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\tau} \mu^{n+m-1} (\beta^m - \mu^m)^p R_{\mu^m}^L(M) [R_{\beta^m}^L(M)]^p e^{\mu\tau} d\mu,$$

$$\|U_m^{(n)}(\tau)\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{U})} \leq \frac{2^{p-1} K(a_1, \theta + \frac{\delta}{2})}{\pi |\beta^{m-1}(\beta - a_1)|^p} \int_{\Gamma_\tau} |\mu|^{n+mp} \frac{|e^{\mu\tau}|}{|\mu - a_1|} |d\mu|.$$

Сделаем замену $\mu = a_1 + \nu\tau^{-1}$, после которой правая часть последнего неравенства примет вид

$$\begin{aligned} & \frac{2^{p-1} K(a_1, \theta + \frac{\delta}{2}) e^{a_1 \operatorname{Re} \tau}}{\pi |\beta^{m-1}(\beta - a_1)|^p |\tau|^{n+mp}} \int_{\Gamma_1} |a_1\tau + \nu|^{n+mp} \frac{|e^\nu|}{|\nu|} |d\nu| \leq \\ & \leq \frac{2^{p-1} K(a_1, \theta + \frac{\delta}{2}) e^{a \operatorname{Re} \tau}}{\pi |\beta^{m-1}(\beta - a_1)|^p |\tau|^{n+mp}} \int_{\Gamma_1} e^{(a_1-a) \operatorname{Re} \tau} |a_1\tau + \nu|^{n+mp} \frac{|e^\nu|}{|\nu|} |d\nu| \leq \frac{C_n(a, \theta) e^{a \operatorname{Re} \tau}}{|\tau|^{n+mp}}. \end{aligned}$$

Здесь использован тот факт, что

$$e^{(a_1-a) \operatorname{Re} \tau} |a_1\tau + \nu|^{n+mp} \leq e^{(a_1-a) \operatorname{Re} \tau} \left(a_1 \operatorname{Re} \tau \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2(\theta - \pi/2)} + |\nu| \right)^{n+mp} \leq |\nu|^{n+mp}$$

для всех $\tau \in \Sigma_\theta$ при $|\nu| \geq \frac{(n+mp)(a_0+a)\sqrt{1+\operatorname{tg}^2(\theta-\pi/2)}}{a-a_0}$, а значит, на всем Γ_1 , если выбрать достаточно большое $\varepsilon > 0$. Поэтому

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_1} e^{(a_1-a) \operatorname{Re} \tau} |a_1\tau + \nu|^{n+mp} \frac{|e^\nu|}{|\nu|} |d\nu| & \leq \int_{\Gamma_1} |\nu|^{n+mp-1} |e^\nu| |d\nu| = \\ & = c_1 \int_0^\infty ((\varepsilon - x)^2 + h_1^2 x^2)^{(n+mp-1)/2} e^{\varepsilon-x} dx. \end{aligned}$$

Лемма доказана. □

Введем обозначения

$$U_{\alpha,0}(t) = U_\alpha(t)|_{\mathfrak{U}^0}, \quad U_{\alpha,1}(t) = U_\alpha(t)|_{\mathfrak{U}^1}, \quad V_{\alpha,1}(t) = V_\alpha(t)|_{\mathfrak{V}^1}, \quad t > 0.$$

Рассмотрим уравнение

$$LD_t^m u(t) = Mu(t), \quad t > 0. \quad (9)$$

Функция $u \in C(\mathbb{R}_+; D_M) \cap C^m(\mathbb{R}_+; \mathfrak{U})$ называется его решением, если при всех $t > 0$ выполняется тождество (9). Здесь и далее

$$\mathbb{R}_+ = \{a \in \mathbb{R} : a > 0\}, \quad \overline{\mathbb{R}}_+ = \mathbb{R}_+ \cup \{0\},$$

D_t^m при $m \in \mathbb{N}$ — обычный оператор дифференцирования.

Теорема 4.1. Пусть банаховы пространства $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$ рефлексивны, m — натуральное число и $(L, M) \in \mathcal{H}_m(\theta_0, a_0, p)$. Тогда при $t > 0$

$$U_m(t) = U_{m,1}(t)P = PU_m(t), \quad V_m(t) = V_{m,1}(t)Q = QV_m(t).$$

При этом для $u_0 \in D_M$ функция $u(t) = U_m(t)u_0$ является решением уравнения (9).

Доказательство. При $u_0 \in \mathfrak{U}$ рассмотрим функцию $u(t) = U_m(t)u_0$. Имеем

$$\begin{aligned} U_m(t)(I - P)u_0 &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \mu^{m-1} (\mu^m H - I)^{-1} H e^{\mu t} d\mu (I - P)u_0 = \\ &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \sum_{k=1}^p \mu^{mk-1} H^k e^{\mu t} d\mu (I - P)u_0. \end{aligned}$$

Возьмем контур $\Gamma_R = \Gamma_{R,1} \cup \Gamma_{R,2}$, где $\Gamma_{R,1}$ — часть исходного контура $\Gamma \cap B_R(0)$, замкнутая слева дугой окружности $S_R(0) = \{\mu \in \mathbb{C} : |\mu| = R\}$ и обходимая против часовой стрелки, а $\Gamma_{R,2}$ — оставшаяся часть исходного контура, объединенная с той же частью окружности $S_R(0)$, проходимой в противоположном направлении. Тогда при $k \in \mathbb{N}$ в силу теоремы Коши

$$\int_{\Gamma} \mu^{mk-1} e^{\mu t} d\mu = \int_{\Gamma_{R,1}} \mu^{mk-1} e^{\mu t} d\mu + \int_{\Gamma_{R,2}} \mu^{mk-1} e^{\mu t} d\mu = \int_{\Gamma_{R,2}} \mu^{mk-1} e^{\mu t} d\mu \rightarrow 0$$

при $R \rightarrow \infty$. Поэтому

$$U_m(t)u_0 = U_m(t)Pu_0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \mu^{m-1} (\mu^m I - S)^{-1} e^{\mu t} d\mu Pu_0.$$

Далее, при $u_0 \in D_M$, $t > 0$

$$\begin{aligned} LD_t^m U_m(t)u_0 &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \mu^{2m-1} LR_{\mu^m}^L(M) e^{\mu t} d\mu u_0 = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \mu^{m-1} e^{\mu t} d\mu L u_0 + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \mu^{m-1} L_{\mu^m}^L(M) e^{\mu t} d\mu M u_0 = MU_m(t)u_0, \end{aligned}$$

где учтена сходимость интегралов вследствие теоремы 2.2(ix) и замкнутость оператора M . $\square$

Введем оператор дробного интегрирования порядка $\beta > 0$

$$J_t^\beta v(t) = \int_0^t \frac{(t-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} v(s) ds.$$

Пусть $m \in \mathbb{N}$, $m-1 < \alpha \leq m$. Производная Капуто задается равенством (см. [12])

$$D_t^\alpha v(t) = D_t^m J_t^{m-\alpha} \left(v(t) - \sum_{k=0}^{m-1} v^{(k)}(0) \frac{t^k}{k!} \right).$$

При дробном $\alpha > 0$ рассмотрим уравнение

$$LD_t^\alpha u(t) = Mu(t), \quad t > 0. \quad (10)$$

Функция $u \in C(\mathbb{R}_+; D_M) \cap C^{m-1}(\overline{\mathbb{R}_+}; \mathfrak{U})$, для которой

$$J_t^{m-\alpha} \left(v(t) - \sum_{k=0}^{m-1} v^{(k)}(0) \frac{t^k}{k!} \right) \in C^m(\mathbb{R}_+; \mathfrak{U}),$$

называется его решением, если при всех $t > 0$ выполняется тождество (10).

Лемма 4.2. Пусть банаховы пространства $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$ рефлексивны, $\alpha \in \mathbb{R}_+ \setminus \mathbb{N}$, пара операторов $(L, M) \in \mathcal{H}_\alpha(\theta_0, a_0, p)$. Тогда при $t > 0$

$$\begin{aligned} U_\alpha(t) &= U_{\alpha,1}(t)P + \sum_{k=1}^p \frac{G^k(I - P)}{\Gamma(1 - \alpha k) t^{\alpha k}}, \quad U_\alpha(t)[\ker L] = \{0\}, \\ V_\alpha(t) &= V_{\alpha,1}(t)Q + \sum_{k=1}^p \frac{J^k(I - Q)}{\Gamma(1 - \alpha k) t^{\alpha k}}, \quad V_\alpha(t)M[\ker L] = \{0\}. \end{aligned}$$

При $u_0 \in \mathfrak{U}^0 \setminus \ker L$ производная Капуто порядка $\alpha > 0$ для функции $u(t) = U_{\alpha,0}(t)u_0$ не определена.

Доказательство. При $u_0 \in \mathfrak{U}^0$ рассмотрим функцию $u(t) = U_{\alpha}(t)u_0$. Имеем, как и в предыдущем доказательстве,

$$U_{\alpha}(t)u_0 = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \sum_{k=1}^p \mu^{\alpha k-1} H^k e^{\mu t} d\mu u_0.$$

Пусть $\varepsilon > a_0$ и

$$\Gamma = \left\{ \mu \in \mathbb{C} : \mu = \varepsilon - |x| - ix \operatorname{tg} \theta, \ x \in \mathbb{R} \right\}.$$

Возьмем контур

$$\Gamma_{R,\rho} = \Gamma_{R,1} \cup \Gamma_{R,2} \cup \gamma_{R,\rho} \cup \gamma_{\rho},$$

где

$$\begin{aligned} \Gamma_{R,1} &= \Gamma \cap B_R(\varepsilon), \quad \Gamma_{R,2} = \left\{ \mu \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \mu = \varepsilon + R \cos \theta \right\} \cap B_R(\varepsilon), \\ \gamma_{R,\rho} &= \left\{ \mu \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \mu \in [\varepsilon - R, -\rho], \arg \mu = \pi \right\} \cup \left\{ \mu \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \mu \in [-\rho, \varepsilon - R], \arg \mu = -\pi \right\}, \\ \gamma_{\rho} &= \left\{ \rho e^{i\varphi}, \varphi \in (-\pi, \pi) \right\}, \end{aligned}$$

где все контуры обходятся так, что в итоге замкнутый контур $\Gamma_{R,\rho}$ обходится в положительном направлении. Тогда при $k \in \mathbb{N}$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma \setminus \Gamma_{R,\rho}} \mu^{\alpha k-1} e^{\mu t} d\mu = 0, \quad \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_{R,2}} \mu^{\alpha k-1} e^{\mu t} d\mu = 0, \quad \lim_{\rho \rightarrow 0+} \int_{\gamma_{\rho}} \mu^{\alpha k-1} e^{\mu t} d\mu = 0,$$

поэтому

$$\int_{\Gamma} \mu^{\alpha k-1} e^{\mu t} d\mu = \lim_{\substack{R \rightarrow \infty \\ \rho \rightarrow 0+}} \int_{\Gamma_{R,\rho}} \mu^{\alpha k-1} e^{\mu t} d\mu - \lim_{\substack{R \rightarrow \infty \\ \rho \rightarrow 0+}} \int_{\gamma_{R,\rho}} \mu^{\alpha k-1} e^{\mu t} d\mu$$

и по теореме Коши

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \mu^{\alpha k-1} e^{\mu t} d\mu &= - \lim_{\substack{R \rightarrow \infty \\ \rho \rightarrow 0+}} \int_{\gamma_{R,\rho}} \mu^{\alpha k-1} e^{\mu t} d\mu = \\ &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^0 (-x)^{\alpha k-1} e^{\pi i(\alpha k-1)} e^{xt} dx - \frac{1}{2\pi i} \int_0^{-\infty} (-x)^{\alpha k-1} e^{-\pi i(\alpha k-1)} e^{xt} dx = \\ &= -\frac{\sin(\pi(\alpha k-1))}{\pi} \int_0^{+\infty} x^{\alpha k-1} e^{-xt} dx = \frac{\sin(\pi \alpha k) \Gamma(\alpha k)}{\pi t^{\alpha k}} = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha k) t^{\alpha k}}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$U_{\alpha}(t)u_0 = - \sum_{k=1}^p \frac{H^k u_0}{\Gamma(1-\alpha k) t^{\alpha k}}$$

и первое равенство для операторов $U_{\alpha}(t)$ из утверждения леммы доказано. Другие равенства для них следуют из него. Равенства для $V_{\alpha}(t)$ доказываются аналогично. $\square$

5. ВЫВОДЫ

Ранее в [4, 7] было показано, что при $\alpha = 1$, $p \in \mathbb{N}_0$ семейство операторов (6) обладает следующими свойствами:

- (i) семейство (6) экспоненциально ограничено, т.е. при всех $\theta \in (\pi/2, \theta_0)$, $a > a_0$ существует такое $C(a, \theta) > 0$, что для каждого $t \in \Sigma_{\theta-\pi/2}$ имеет место неравенство

$$\|U_1(t)\| \leq C(a, \theta)e^{a \operatorname{Re} t};$$

- (ii) $s\text{-}\lim_{t \rightarrow 0+} U_1(t) = P$;

- (iii) семейство (6) является разрешающим для уравнения $D_t^1 Lu(t) = Mu(t)$, т.е. единственное решение задачи Коши $u(0) = u_0$ для него имеет вид $u(t) = U_1(t)u_0$ при всех u_0 из фазового пространства уравнения $\mathfrak{U}^1$.

При этом параметр $p \in \mathbb{N}_0$ характеризует степень вырожденности соответствующего уравнения: чем он больше, тем шире подпространство вырождения $\mathfrak{U}^0$ уравнения, дополнительное к фазовому пространству, тем более длинные цепочки M -присоединенных векторов оно содержит помимо ядра $\ker L$ оператора L .

В [11] показано, что все то же верно в случае $\alpha > 0$, $p = 0$, если пространства $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$ рефлексивны.

Теорема 4.1 в данном случае показывает, что в случае $\alpha = m \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, $p \in \mathbb{N}$ семейство (6) при $t > 0$ по-прежнему задает решение соответствующего уравнения (9), однако лемма 4.1 не позволяет судить о его поведении в нуле, свойства (ii) и тем более (iii) доказать не удастся. Полугрупповым свойством, использованным в [4, 7] для доказательства этих свойств при $\alpha = 1$, семейство (6) в данном случае не обладает. Ссылка на результаты теории разрешающих семейств операторов (см. [14]) в невырожденном случае $\mathfrak{U} = \mathfrak{V}$, $L = I$ после доказательства теоремы о расщеплении 3.1, использованная в [11], в данном случае невозможна из-за более сложного вида оценок на операторы при определении класса $\mathcal{H}^\alpha(\theta_0, a_0, p)$ пар операторов при $p \in \mathbb{N}$.

Но оказывается, что при дробных $\alpha > 0$, $p \in \mathbb{N}$ ситуация еще хуже: семейство операторов (6) вообще не дает решения соответствующего однородного уравнения $D_t^\alpha Lu(t) = Mu(t)$ ни в какой точке $t > 0$, как это следует из леммы 4.2. Объясняется это тем, что, как известно, сама формула операторов решения (6) получена методами теории преобразования Лапласа (см. [14]). Однако в случае дробного $\alpha > 0$ подынтегральная функция в ней имеет точку ветвления в нуле и, как результат, сужение соответствующего интеграла на подпространство $\mathfrak{U}^0$ имеет особенность при $t = 0$. Тем самым, техника преобразования Лапласа оказывается в таком случае неприменимой, а потому неприменимы и операторы вида (6) для построения решения соответствующего однородного уравнения. В случае же дробного $\alpha > 0$ при $p = 0$, рассмотренном в [11], в силу отсутствия M -присоединенных векторов слагаемые с особенностями исчезают.

6. ПРИМЕР СИЛЬНО ВЫРОЖДЕННОГО УРАВНЕНИЯ

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ — ограниченная область с гладкой границей $\partial\Omega$. Рассмотрим начально-краевую задачу

$$\frac{\partial^k x_i}{\partial t^k}(s, t_0) = x_{ik}(s), \quad k = 0, 1, \dots, m-1, \quad s \in \Omega, \quad i = 1, 2, 3, \quad (11)$$

$$x_i(s, t) = 0, \quad (s, t) \in \partial\Omega \times \mathbb{R}_+, \quad i = 1, 2, 3, \quad (12)$$

$$\begin{aligned} D_t^\alpha x_1(s, t) &= \Delta x_1(s, t), & (s, t) &\in \Omega \times \mathbb{R}_+, \\ D_t^\alpha x_3(s, t) &= \Delta x_2(s, t), & (s, t) &\in \Omega \times \mathbb{R}_+, \\ 0 &= \Delta x_3(s, t), & (s, t) &\in \Omega \times \mathbb{R}_+, \end{aligned} \quad (13)$$

где $m \in \mathbb{N}$, $m-1 < \alpha \leq m$.

Пусть A — оператор Лапласа с областью определения $H_0^2(\Omega) = \{z \in H^2(\Omega) : z(s) = 0, s \in \partial\Omega\} \subset L_2(\Omega)$, $\{\varphi_k\}$ — ортонормированная в $L_2(\Omega)$ система его собственных функций, соответствующая собственным значениям $\{\lambda_k\}$ оператора A , занумерованным в порядке их невозрастания с учетом кратности.

Редуцируем задачу (11)–(13) к задаче Коши $u(0) = u_0$ для уравнения $D_t^\alpha Lu(t) = Mu(t)$, выбрав пространства

$$\mathcal{X} = \mathcal{Y} = (L_2(\Omega))^3, \quad (14)$$

и операторы

$$L = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(\mathcal{X}; \mathcal{Y}), \quad D_M = (H_0^2(\Omega))^3, \quad M = \begin{pmatrix} \Delta & 0 & 0 \\ 0 & \Delta & 0 \\ 0 & 0 & \Delta \end{pmatrix} \in \mathcal{Cl}(\mathcal{X}; \mathcal{Y}). \quad (15)$$

Сформулируем две леммы, доказанные в [11].

Лемма 6.1. Пусть $\alpha > 1$ и выполняются условия

$$\exists \theta_1 \in (\pi/2, \pi) \quad \exists a_1 \geq 0 \quad \forall \mu \in S_{a_1, \theta_1} \quad \mu^\alpha \in \rho^L(M),$$

$$\exists C_1 > 0 \quad \forall \mu \in S_{a_1, \theta_1} \quad \max \left\{ \|R_{\mu^\alpha}^L(M)\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{U})}, \|L_{\mu^\alpha}^L(M)\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{V})} \right\} \leq \frac{C_1}{|\mu^\alpha - a_1|}.$$

Тогда существуют такие $\theta_0 \in (\pi/2, \theta_1)$, $a_0 \geq a_1$, $a_0 > 1$, что $(L, M) \in \mathcal{H}_\alpha(\theta_0, a_0, 0)$.

Лемма 6.2. Пусть $\alpha \in (0, 1)$ и выполняются условия

$$\exists \theta_1 \in (\pi/2, \pi) \quad \exists a_0 \in [0, 1) \quad \forall \mu \in S_{a_0, \theta_1} \quad \mu^\alpha \in \rho^L(M),$$

$$\exists C_1 > 0 \quad \forall \mu \in S_{a_0, \theta_1} \quad \max \left\{ \|R_{\mu^\alpha}^L(M)\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{U})}, \|L_{\mu^\alpha}^L(M)\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{V})} \right\} \leq \frac{C_1}{|\mu^\alpha - a_0|}.$$

Тогда существует такое $\theta_0 \in (\pi/2, \theta_1)$, что $(L, M) \in \mathcal{H}_\alpha(\theta_0, a_0, 0)$.

Лемма 6.3. Пусть заданы пространства (14) и операторы (15). Тогда $(L, M) \in \mathcal{H}^\alpha(\theta_0, a_0, 1)$ при некоторых $a_0 \geq 0$, $\theta_0 \in (\pi/2, \pi)$; при этом проекторы имеют вид

$$P = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (16)$$

Доказательство. При $\mu \neq \lambda_k^{-1}$, $k \in \mathbb{N}$ имеем

$$(\mu L - M)^{-1} = \sum_{k=1}^{\infty} \langle \cdot, \varphi_k \rangle \varphi_k \begin{pmatrix} (\mu - \lambda_k)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda_k^{-1} & -\mu \lambda_k^{-2} \\ 0 & 0 & -\lambda_k^{-1} \end{pmatrix},$$

Поэтому в силу отрицательности λ_k , $k \in \mathbb{N}$, при $\mu > 0$ оператор $(\mu L - M)^{-1} : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}$ ограничен,

$$R_\mu^L(M) = L_\mu^L(M) = \sum_{k=1}^{\infty} \langle \cdot, \varphi_k \rangle \varphi_k \begin{pmatrix} (\mu - \lambda_k)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda_k^{-1} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (17)$$

$$R_{\mu_0}^L(M) R_{\mu_1}^L(M) = L_{\mu_0}^L(M) L_{\mu_1}^L(M) = \sum_{k=1}^{\infty} \langle \cdot, \varphi_k \rangle \varphi_k \begin{pmatrix} (\mu_0 - \lambda_k)^{-1} (\mu_1 - \lambda_k)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (18)$$

Из этих равенств следует, что при определении класса $\mathcal{H}^\alpha(a_0, \theta_0, p)$ нельзя выбрать $p = 0$, так как нормы операторов (17) не могут быть оценены через отрицательные степени μ .

Рассмотрим при фиксированном $k \in \mathbb{N}$ числовую резольвенту $R_\mu = (\mu - \lambda_k)^{-1}$. Для $\alpha \in (1, 2)$, $\varepsilon = \pi/\alpha - \pi/2$ выберем $\theta_1 = \pi/\alpha - \varepsilon/\alpha$, принадлежащее по построению интервалу $(\pi/2, \pi)$. В силу того, что $\lambda_k \in \mathbb{R}$, получим при $|\arg \mu| < \theta_1$ неравенство

$$\frac{1}{|\mu^\alpha - \lambda_k|} \leq \frac{\sin^{-1} \varepsilon}{|\mu|}.$$

Поэтому по лемме 6.1 найдутся $\theta_0 \in (\pi/2, \theta_1)$, $a_0 > 1$, для которых при всех $\theta \in (\pi/2, \theta_0)$, $a > a_0$ существует такое $K(a, \theta)$, что

$$\frac{1}{|\mu^\alpha - \lambda_k|} \leq \frac{K(a, \theta)}{|\mu^{\alpha-1}(\mu - a)|}.$$

Проведенные рассуждения справедливы сразу для всех $k \in \mathbb{N}$, что влечет необходимые оценки на нормы операторов (18).

Аналогичные рассуждения для $\alpha \in (0, 1)$ можно провести с использованием леммы 6.2. При $\alpha = 1$ соответствующие неравенства очевидны. Тем самым для всех $\alpha \in (0, 2)$ имеем $(L, M) \in \mathcal{H}^\alpha(\theta_0, a_0, 1)$ при некоторых $a_0 \geq 0$, $\theta_0 \in (\pi/2, \pi)$.

В равенствах (18) возьмем $\mu_0 = \mu_1 = n$, домножим их на n^2 и в пределе при $n \rightarrow \infty$ получим проекторы (16), а следовательно, и равенства

$$\mathcal{X}^1 = \mathcal{Y}^1 = L_2(\Omega) \times \{0\} \times \{0\}, \quad \mathcal{X}^0 = \mathcal{Y}^0 = \{0\} \times L_2(\Omega) \times L_2(\Omega), \quad H = \begin{pmatrix} 0 & A^{-1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad H^2 = 0.$$

Лемма доказана. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Иосида К. Функциональный анализ. — М: Мир, 1967.
2. Клемент Ф., Хейманс Х., Ангелент С., ван Дуйн К., де Пахтер Б. Однопараметрические полугруппы. — М.: Мир, 1992.
3. Костин В. А. К теореме Соломыка—Иосиды для аналитических полугрупп // Алгебра и анализ. — 1999. — 11, № 1. — С. 118–140.
4. Свиридюк Г. А., Федоров В. Е. О единицах аналитических полугрупп операторов с ядрами // Сиб. мат. ж. — 1998. — 39, № 3. — С. 604–616.
5. Соломяк М. З. Применение теории полугрупп к исследованию дифференциальных уравнений в пространствах Банаха // Докл. АН СССР. — 1958. — 122, № 5. — С. 766–769.
6. Федоров В. Е. Вырожденные сильно непрерывные полугруппы операторов // Алгебра и анализ. — 2000. — 12, № 3. — С. 173–200.
7. Федоров В. Е. Голоморфные разрешающие полугруппы уравнений соболевского типа в локально выпуклых пространствах // Мат. сб. — 2004. — 195, № 8. — С. 131–160.
8. Федоров В. Е., Гордиевских Д. М. Разрешающие операторы вырожденных эволюционных уравнений с дробной производной по времени // Изв. вузов. Мат. — 2015. — 1. — С. 71–83.
9. Федоров В. Е., Гордиевских Д. М. Решения начально-краевых задач для некоторых вырожденных систем уравнений дробного порядка по времени // Изв. Иркут. гос. ун-та. Сер. мат. — 2015. — 12. — С. 12–22.
10. Федоров В. Е., Гордиевских Д. М., Плеханова М. В. Уравнения в банаховых пространствах с вырожденным оператором под знаком дробной производной // Диффер. уравн. — 2015. — 51, № 10. — С. 1367–1375.
11. Федоров В. Е., Романова Е. А., Дебуш А. Аналитические в секторе разрешающие семейства операторов вырожденных эволюционных уравнений дробного порядка // Сиб. ж. чист. прикл. мат. — 2016. — 16, № 2. — С. 93–107.
12. Bajlekova E. G. Fractional evolution equations in Banach spaces / Ph.D. thesis. — Eindhoven Univ. of Technology, 2001.
13. Fedorov V. E., Nazhimov R. R., Gordievskikh D. M. Initial-value problem for a class of fractional order inhomogeneous equations in Banach spaces // AIP Conf. Proc. — 2016. — 1759. — 020008.
14. Prüss J. Evolutionary integral equations and applications. — Basel: Springer, 1993.
15. Yagi A. Generation theorem of semigroup for multivalued linear operators // Osaka J. Math. — 1991. — 28. — С. 385–410.

В. Е. Федоров

Челябинский государственный университет;

Южно-Уральский государственный университет, Челябинск

E-mail: kar@cсу.ru

Е. А. Романова

Челябинский государственный университет

E-mail: linux_21@mail.ru



ВИХРЕВЫЕ УСТАНОВИВШИЕСЯ ПЛОСКИЕ ЭНТРОПИЙНЫЕ ТЕЧЕНИЯ ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА

© 2017 г. С. В. ХАБИРОВ

Аннотация. Найдены все решения подмодели вихревых установившихся плоских баротропных энтропийных течений идеального газа. Движения возможны либо по прямым при постоянном давлении, либо по концентрическим окружностям. Проведена групповая классификация модели плоских вихревых энтропийных небаротропных течений. Рассмотрены инвариантные подмодели и дана физическая интерпретация некоторых из решений.

Ключевые слова: вихревые течения газа, групповой анализ, оптимальные системы подалгебр, инвариантные решения.

AMS Subject Classification: 37N10, 76N15, 76U05

1. Введение. Для модели идеального газа инвариантная подмодель двумерных установившихся течений хорошо известна (см. [1, 2]). Множество точных решений найдено и расчетов краевых задач проведено для безвихревых изоэнтропических течений. Безвихревые течения с переменной энтропией возможны только по концентрическим окружностям (см. [1]). Потенциальные изоэнтропические течения за ударной волной становятся вихревыми и с переменной энтропией. Оказывается вихревые установившиеся плоские баротропные неизоэнтропические течения идеального газа происходят либо по прямым линиям при постоянном давлении, либо по концентрическим окружностям. В работе проведена групповая классификация плоских вихревых энтропийных небаротропных течений по произвольной функции в интеграле Бернулли и по уравнению состояния. Есть шесть случаев расширения допускаемой алгебры Ли. При этом расширенная алгебра может быть пятимерной. Оптимальная система неподобных одномерных подалгебр классифицирует инвариантные решения. В одном из случаев групповой классификации рассмотрены все инвариантные подмодели. Для некоторых инвариантных решений дана физическая интерпретация движения газа: разворот вихревого потока, вихревое течение по концентрическим окружностям с особенностью вихря и плотности на логарифмической спирали, неточечный источник с радиальным растеканием на бесконечности, вихревое спиральное растекание с окружности.

2. Баротропные течения. Плоская инвариантная подмодель идеального газа — инвариантная подмодель на подалгебре переносов по времени и по одной из пространственных декартовых координат модели движения идеального газа (см. [1]):

$$Du + \rho^{-1}p_x = 0, \quad Dv + \rho^{-1}p_y = 0, \quad Dw = 0, \quad (u\rho)_x + (v\rho)_y = 0, \quad DS = 0, \quad (1)$$

где $D = u\partial_x + v\partial_y$; u, v, w — декартовы координаты скорости, ρ — плотность, S — энтропия, p — давление. Уравнение состояния задается равенством $p = f(\rho, S)$. Баротропные движения газа определяются равенством $p = h(\rho)$, что переопределяет систему уравнений (1). Из уравнения состояния и последнего уравнения системы (1) следуют равенства $D\rho = 0$, $u_x + v_y = 0$. Значит, можно ввести функцию тока $u = -\psi_y$, $v = \psi_x$; при этом выполняется равенство $D\psi = 0$. Система

(1) имеет интегралы

$$\begin{aligned} S = S(\psi), \quad w = w(\psi), \quad \rho = \rho(\psi), \quad p = p(\psi), \quad \psi_x^2 + \psi_y^2 = q^2(\psi), \\ \omega = v_x - u_y = \Delta\psi = \Omega(\psi) = qq' + \rho^{-1}p'. \end{aligned} \quad (2)$$

Решение переопределенной системы (2) удобно искать в виде

$$\psi_x = q \cos \vartheta, \quad \psi_y = q \sin \vartheta.$$

Перекрестное дифференцирование приводит к уравнению

$$\vartheta_x \cos \vartheta + \vartheta_y \sin \vartheta = 0, \quad (3)$$

которое имеет общее решение с произвольной функцией g

$$x \sin \vartheta - y \cos \vartheta = g(\vartheta). \quad (4)$$

Отсюда определяются производные

$$\vartheta_x = \Delta^{-1} \sin \vartheta, \quad \vartheta_y = -\Delta^{-1} \cos \vartheta, \quad \Delta = g' - x \cos \vartheta - y \sin \vartheta.$$

Последнее уравнение в (2) принимает вид

$$1 = (q' - q^{-1}\Omega)(g' - x \cos \vartheta - y \sin \vartheta). \quad (5)$$

Равенства (4), (5) для нахождения ϑ и ψ в полярных координатах $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$ принимают вид

$$g(\vartheta) = r \sin(\vartheta - \varphi), \quad 1 = (q' - q^{-1}\Omega)(g' - r \cos(\vartheta - \varphi)). \quad (6)$$

Функцию ψ можно также найти из равенства

$$d\psi = \psi_x dx + \psi_y dy,$$

которое с учетом (4) записывается в виде

$$q^{-1}d\psi = d(r \cos(\vartheta - \varphi)) + g(\vartheta)d\vartheta.$$

После интегрирования с учетом (6) следует условие совместности

$$\int q^{-1}d\psi + q(qq' - \Omega)^{-1} = g'(\vartheta) + \int g(\vartheta)d\vartheta. \quad (7)$$

Из условия совместности (7) получаем, что возможны два случая.

1⁰. $\vartheta = \vartheta(\psi)$. Из равенства (3) следует, что $\vartheta = \vartheta_0$ — постоянная. Функция ψ определяется следующим образом:

$$\psi = \Psi(s), \quad s = x \cos \vartheta_0 + y \sin \vartheta_0 \quad \Rightarrow \quad \Psi' = q(\Psi), \quad \Psi'' = qq'.$$

Последнее уравнение в (2) дает

$$\Omega(\psi) = \Delta\psi = \Psi'' = qq' + \rho^{-1}p',$$

так что $p = p_0$ — постоянная. Таким образом, получается изобарическая простая волна

$$u = -\Psi' \sin \vartheta_0, \quad v = \Psi' \cos \vartheta_0, \quad w = w(s), \quad \rho = \rho(s), \quad \psi = \Psi(s)$$

с прямыми линиями уровня и с прямыми линиями тока.

2⁰. Величины ψ , ϑ независимы. Тогда уравнение (7) записано с разделенными переменными, что приводит к равенствам

$$g'' + g = 0 \quad \Rightarrow \quad g = r_0 \sin(\vartheta - \vartheta_0),$$

$$\Omega = q(q' + Q^{-1}), \quad Q = \int q^{-1}d\psi \quad \Rightarrow \quad \rho = QQ'p'.$$

Из уравнений (4) и (5) следуют равенства

$$\begin{aligned} \tan \vartheta &= \frac{r \sin \phi - r_0 \sin \vartheta_0}{r \cos \phi - r_0 \cos \vartheta_0}, \\ Q(\phi) &= \sqrt{r^2 - 2rr_0 \cos(\phi - \vartheta_0) + r_0^2}. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что линия тока $\psi = \psi_0$ задается равенством

$$r^2 - 2rr_0 \cos(\phi - \vartheta_0) + r_0^2 = Q(\psi_0)^2$$

или в декартовых координатах

$$(x - r_0 \cos \vartheta_0)^2 + (y - r_0 \sin \vartheta_0)^2 = Q(\psi_0)^2.$$

Уравнение задает концентрические окружности.

3. Групповая классификация небаротропных течений. Для системы (1) функция тока ψ вводится по формулам

$$u = \rho^{-1} \psi_y, \quad v = -\rho^{-1} \psi_x.$$

Справедливы интегралы энтропии, одной декартовой координаты скорости и Бернулли:

$$S = S(\psi), \quad w = w(\psi), \quad \rho^{-2}(\psi_x^2 + \psi_y^2) + 2i = b(\psi)^2, \quad \rho i_\rho = f_\rho.$$

Вихрь вычисляется по формуле

$$\omega = v_x - u_y = -\rho^{-1} \Delta \psi + \rho^{-2}(\rho_x \psi_x + \rho_y \psi_y).$$

Система (1) для функции тока, плотности и вихря принимает вид

$$\begin{aligned} \psi_x^2 + \psi_y^2 &= \rho^2(b^2 - 2i), \\ \rho \Delta \psi &= \rho_x \psi_x + \rho_y \psi_y - \rho^2 \omega, \\ \rho(\psi_y \omega_x - \psi_x \omega_y) &= (f_\psi + \omega)(\psi_y \rho_x - \psi_x \rho_y) \end{aligned} \quad (8)$$

с точностью до преобразования эквивалентности $S(\psi) \rightarrow \psi$, $f(\rho, S(\psi)) \rightarrow f(\rho, \psi)$. Простейшие преобразования эквивалентности системы (8) задаются операторами

$$\begin{aligned} X_1 &= \partial_x, \quad X_2 = \partial_y, \quad X_3 = y\partial_x - x\partial_y, \quad Y_4 = x\partial_x + y\partial_y + \psi\partial_\psi - \omega\partial_\omega, \\ Y_5 &= \partial_\psi, \quad Y_6 = \partial_i + b^{-1}\partial_b, \quad Y_7 = \psi\partial_\psi + b\partial_b + 2i\partial_i + \omega\partial_\omega + 2f\partial_f, \\ Y_8 &= \rho\partial_\rho - \omega\partial_\omega - b\partial_b - 2i\partial_i - f\partial_f, \quad Y_9 = \partial_f. \end{aligned}$$

Допускаются также отражения

$$\begin{aligned} (1) \quad & x \rightarrow -x, \quad y \rightarrow -y; \\ (2) \quad & \psi \rightarrow -\psi, \quad \omega \rightarrow -\omega, \quad \rho \rightarrow -\rho. \end{aligned}$$

Теорема 1. Ядро допускаемых алгебр трехмерно, $L_3 = \{X_1, X_2, X_3\}$. Расширение алгебры происходит в следующих случаях:

Случай 1⁰:

$$\begin{aligned} f &= \rho \alpha(\psi); \\ Y_5 &= \zeta_0 \left(\partial_\psi + \left(\frac{b^2}{2\alpha} \right)' \rho \partial_\rho \right) + \left[\omega \frac{\alpha'}{2\alpha} \zeta_0 - \rho \left(\frac{b^2}{2\alpha} - \ln \rho \right) \alpha \left(\frac{\alpha'}{\alpha} \zeta_0 \right)' \right] \partial_\omega, \\ X_4 &= x\partial_x + y\partial_y + \zeta_1(\psi) \left(\partial_\psi + \left(\frac{b^2}{2\alpha} \right)' \rho \partial_\rho \right) + \left[\omega \left(-1 + \frac{\alpha'}{2\alpha} \zeta_1 \right) - \rho \left(\frac{b^2}{2\alpha} - \ln \rho \right) \alpha \left(\frac{\alpha'}{\alpha} \zeta_1 \right)' \right] \partial_\omega, \\ &\text{где} \\ \zeta_0 &= \sqrt{\alpha} \exp(b^2/2\alpha), \quad \zeta_1 = \zeta_0 \int \zeta_0^{-1} d\psi; \end{aligned}$$

Случай 2⁰:

$$\begin{aligned} f &= \alpha(\psi)\rho + \beta(\psi), \quad \beta' \int \zeta_0^{-1} d\psi = m\sqrt{\alpha}, \quad m \neq 0, \quad \zeta_2 = m\beta'^{-1} e^{b^2/2\alpha}, \\ X_4 &= x\partial_x + y\partial_y + \alpha\zeta_2 \left(\partial_\psi + \left(\frac{b^2}{2\alpha} \right)' \rho \partial_\rho \right) + \left[\omega(-1 + \alpha'\zeta_2) - \rho \left(\frac{b^2}{2\alpha} - \ln \frac{\rho}{\rho_0} \right) \alpha(\alpha'\zeta_2)' \right] \partial_\omega; \end{aligned}$$

Случай 3⁰:

$$f = \alpha(\psi)\rho + \beta(\psi), \quad \zeta(\psi) = \sqrt{\alpha}e^{b^2/2\alpha}, \quad \alpha = n\beta'^2,$$

$$Y_5 = \zeta \left(\partial_\psi + \left(\frac{b^2}{2\alpha} \right)' \rho \partial_\rho \right) + \left[\omega \frac{\alpha'}{2\alpha} \zeta - \rho(b^2 - 2\alpha \ln \rho) \left(\frac{\alpha'}{2\alpha} \zeta \right)' \right] \partial_\omega;$$

Случай 4⁰:

$$f = F(I), \quad I = \rho b^2, \quad c' = b,$$

$$X_4 = x\partial_x + y\partial_y + b^{-1}c(\partial_\psi - 2b^{-1}b'\rho\partial_\rho) +$$

$$+ \left[\omega(b^{-2}b'c - 1) + \rho \left(1 - 2 \int F' I^{-1} dI \right) (b^{-1}c(2b'^2 - bb'') - bb') \right] \partial_\omega,$$

$$Y_5 = b^{-1} \left[\partial_\psi - 2b^{-1}b'\rho\partial_\rho + \left(\omega b^{-1}b' + \rho \left(1 - 2 \int F' I^{-1} dI \right) (2b'^2 - bb'') \right) \partial_\omega \right];$$

Случай 5⁰:

$$f = c^\alpha F(I), \quad I = \rho c^{-\alpha} c'^2, \quad c' = b \quad \left(\alpha = 0, \quad f = -\gamma \ln c + F(I) \right),$$

$$X_4 = (\alpha - 1)(x\partial_x + y\partial_y) + \frac{c}{c'}\partial_\psi + \left(-2\frac{cc''}{c'^2} + \alpha \right) \rho \partial_\rho +$$

$$+ \left[\omega(\alpha - 1 + \frac{cc''}{c'^2}) - \rho \left(1 - 2 \int F' \frac{dI}{I} \right) ((cc'')' - 2\frac{cc''^2}{c'}) \right] \partial_\omega;$$

Случай 6⁰:

$$f = e^{-c}F(I), \quad I = \rho b^2 e^c, \quad c = \epsilon \int b d\psi, \quad \epsilon = 0, 1 \quad (f = \gamma c + F(I), \quad \epsilon = 0),$$

$$X_4 = \epsilon(x\partial_x + y\partial_y) + \frac{1}{b}\partial_\psi - \left(\epsilon + \frac{2b'}{b^2} \right) \rho \partial_\rho + \left[\omega \left(\frac{b'}{b^2} - \epsilon \right) + \rho \left(1 - 2 \int F' \frac{dI}{I} \right) \left(\frac{2b'^2}{b} - b'' \right) \right] \partial_\omega.$$

Доказательство. Будем искать допускаемый оператор системы (8) в виде

$$X = \xi \partial_x + \eta \partial_y + \zeta^\psi \partial_\psi + \zeta^\rho \partial_\rho + \zeta^\omega \partial_\omega. \quad (9)$$

Продолжение оператора на производные, входящие в систему (8), действие продолженным оператором на уравнения системы, выделение независимых производных и расщепление по независимым производным дает определяющие уравнения для координат оператора (9) (см. [3]). Решение определяющих уравнений имеет вид

$$\xi = kx + ly + C_1, \quad \eta = -lx + ky + C_2,$$

$$\zeta^\psi = \zeta^\psi(\psi), \quad \zeta^\rho = \rho R(\psi),$$

$$\zeta^\omega = \omega(\zeta_\psi^\psi - R - 2k) + \rho(b^2 - 2i)(R_\psi - \zeta_{\psi\psi}^\psi),$$

где k, l, C_1, C_2 — постоянные. Постоянным l, C_1, C_2 отвечает ядро допускаемых алгебр. Остаются определяющие соотношения

$$Rf_\rho + 2i(R + k - \zeta_\psi^\psi) + \zeta^\psi i_\psi = b^2(R + k - \zeta_\psi^\psi) + \zeta^\psi b b_\psi, \quad (10)$$

$$f_\psi(2k + R - \zeta_\psi^\psi) + 2\rho f_\rho(R_\psi - \zeta_{\psi\psi}^\psi) + f_{\psi\psi}\zeta^\psi + R\rho f_{\psi\rho} = 0. \quad (11)$$

Дифференцирование (10) по ρ и по ψ , дифференцирование (11) по ρ и последующее сравнение полученных равенств приводит к соотношению

$$f_{\rho\rho}(R_\psi - 2\zeta_{\psi\psi}^\psi) = 0.$$

Отсюда следует альтернатива: либо $f = \alpha(\psi)\rho + \beta(\psi)$, либо $f_{\rho\rho} \neq 0$, $R = 2\zeta_\psi^\psi + R_0$, где R_0 — постоянная.

В первом случае альтернативы из (10), (11) следуют соотношения

$$\begin{aligned}\zeta^\psi &= \alpha^{1/2} \exp(b^2/2\alpha) \left(C + k \int \alpha^{-1/2} \exp(-b^2/2\alpha) d\psi \right), \quad \zeta^\rho = 2^{-1} \rho \zeta^\psi (b^2/\alpha)', \\ \zeta^\omega &= \omega \left(-k + \alpha' (2\alpha)^{-1} \zeta^\psi \right) - \rho (b^2 - 2\alpha \ln \rho) \left(\alpha' (2\alpha)^{-1} \zeta^\psi \right)', \\ (2\beta'' - \alpha' \alpha^{-1} \beta') \alpha^{1/2} \exp(b^2/2\alpha) \left(C + k \int \alpha^{-1/2} \exp(-b^2/2\alpha) d\psi \right) + 2k\beta' &= 0.\end{aligned}$$

Если $\beta = 0$, то получаем случай 1⁰ теоремы, а если $k = 0$ — то случай 3⁰; иначе получается случай 2⁰.

Во втором случае альтернативы из (10) и (11) следуют выражения

$$\begin{aligned}\zeta^\psi &= b^{-1} (D - (R_0 + k) \int b d\psi), \quad \zeta^\rho = -\rho (R_0 + 2k + 2b'b^{-1} \zeta^\psi), \\ \zeta^\omega &= -\omega (k + b'b^{-1} \zeta^\psi) + \rho (1 - 2ib^{-2}) (\zeta^\psi (2b'^2 - bb'') + bb' (R_0 + k)), \\ (2k + R_0) (f - \rho f_\rho) + b^{-1} \left(D - (R_0 + k) \int b d\psi \right) (f_\psi - 2\rho f_\rho b' b^{-1}) &= M,\end{aligned}$$

где R_0, D, k, M — постоянные. Так как $f_{\rho\rho} \neq 0$, то число независимых параметров не превышает 2. При двух независимых параметрах получается случай 4⁰ теоремы; случай 5⁰ получается при $D = 0$, а случай 6⁰ — при $D \neq 0$.

Допускаемые системой (8) алгебры разлагаются в полупрямые суммы трехмерного идеала и двумерные подалгебры (или одномерные подалгебры в случае отсутствия Y_5 или X_4):

$$L_5 = \{X_1, X_2, X_3\} \dot{\oplus} \{X_4, Y_5\}.$$

Ненулевые коммутаторы базисных операторов таковы:

$$[X_1, X_3] = -X_2, \quad [X_2, X_3] = X_1, \quad [X_1, X_4] = X_1, \quad [X_2, X_4] = X_2, \quad [Y_5, X_4] = Y_5.$$

По таблице коммутаторов вычисляются внутренние автоморфизмы алгебры (преобразования инвариантных координат не приводятся; см. [3])

$$\begin{aligned}(1) \quad & x^{1'} = x^4 a_1 + x^1, \quad x^{2'} = -x^3 a_1 + x^2; \\ (2) \quad & x^{1'} = x^3 a_2 + x^1, \quad x^{2'} = x^4 a_2 + x^2; \\ (3) \quad & x^{1'} = x^1 \cos a_3 - x^2 \sin a_3, \quad x^{2'} = x^1 \sin a_3 + x^2 \cos a_3; \\ (4) \quad & x^{1'} = x^1 a_4, \quad x^{2'} = x^2 a_4, \quad x^{5'} = x^5 a_4; \\ (5) \quad & x^{5'} = x^4 a_5 + x^5.\end{aligned}$$

Неподобные одномерные подалгебры получены с помощью внутренних автоморфизмов

$$X_3 + \alpha X_4, \quad X_3 + Y_5, \quad X_1 + \alpha Y_5, \quad X_4, \quad Y_5,$$

где α — инвариант автоморфизмов. Оптимальная система одномерных подалгебр классифицирует инвариантные решения (см. [3]). $\square$

4. Инвариантные подмодели. На одномерных подалгебрах строятся инвариантные подмодели. Для этого вычисляются инварианты подалгебры. Инварианты, содержащие функции, назначаются новыми функциями от инварианта, содержащего только независимые переменные. Подстановка представления в систему (8) дает подмодель. Рассматриваются инвариантные подмодели для случая 4⁰ групповой классификации.

Подадгебра $X_1 + \alpha Y_5$ задает представление инвариантного решения

$$\int b d\psi = \alpha x + B(y), \quad \rho = b^{-2} I(y), \quad \omega = b \Omega(y) - I b^{-1} b' \left(1 - 2 \int F' I^{-1} dI \right).$$

Из (8) следует подмодель

$$\begin{aligned} B'^2 + \alpha^2 &= I^2(1 - 2 \int F' I^{-1} dI), \\ IB'' - I'B' + I^2\Omega &= 0, \quad \Omega = CI, \end{aligned}$$

где C — постоянная интегрирования.

Решение подмодели имеет параметрический вид

$$\begin{aligned} y(I) &= C^{-1} \int \frac{F'I^2 - \alpha^2}{I^4 H} dI, \quad B = C^{-1} \int \frac{F'I^2 - \alpha^2}{I^3} dI, \\ H^2 &= 1 - \alpha^2 I^{-2} - 2 \int F' I^{-1} dI \geq 0 \quad \Rightarrow \quad I \geq \alpha, \quad 0 < F'(\alpha) < 1. \end{aligned}$$

Линии тока $\psi = \text{const}$ в окрестности точки $I = \alpha$ ведут себя как параболы $x = 2^{-1} C y^2 + \text{const}$. Существует интервал $\alpha < I < \beta$, в котором

$$1 - \alpha^2 I^{-2} - 2 \int_{\alpha}^I F' I^{-1} dI > 0.$$

Течение определено в области $|y| < y(\beta)$ и задает разворот потока.

Подалгебре X_4 соответствует инвариантное решение

$$\int b d\psi = xB(J), \quad J = \frac{y}{x} \quad \rho b^2 = I(J), \quad \omega = \frac{b\Omega(J)}{\int b d\psi} - \frac{Ib'}{b} \left(1 - 2 \int F' I^{-1} dI \right).$$

Из (8) следует подмодель

$$\begin{aligned} (B - JB')^2 + B'^2 &= I^2 \left(1 - 2 \int F' I^{-1} dI \right) = q^2, \\ (J^2 + 1)(B'I^{-1})' + JBI^{-2}I' + \Omega B^{-1} &= 0, \quad \Omega = CI. \end{aligned}$$

Замена $B = B_1 \sqrt{1 + J^2}$, $\sigma = \arctan J$ приводит к автономной системе

$$B_{1\sigma}^2 + B_1^2 = q^2, \quad B_1 B_{1\sigma\sigma} - B_1 B_{1\sigma} I^{-1} I_{\sigma} + B_1^2 + C I^2 = 0,$$

которая сводится к линейному уравнению в плоскости значений функций (плоскость годографа).

Подалгебра $X_3 + \alpha X_4$ задает инвариантное решение в полярной системе координат $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$:

$$\begin{aligned} \int b d\psi &= rB(J), \quad J = r e^{\alpha\varphi}, \quad \rho b^2 = I(J), \\ \omega &= \frac{b\Omega(J)}{\int b d\psi} - \frac{Ib'}{b} \left(1 - 2 \int F' I^{-1} dI \right). \end{aligned}$$

В полярной системе координат система (8) принимает вид

$$\begin{aligned} \psi_r^2 + r^{-2} \psi_{\varphi}^2 &= \rho^2 (b^2 - 2i), \quad i = b^2 \int F' I^{-1} dI, \\ \rho \left(\psi_{rr} + r^{-2} \psi_{\varphi\varphi} + r^{-1} \psi_r \right) &= \psi_r \rho_r + r^{-2} \psi_{\varphi} \rho_{\varphi} - \rho^2 \omega, \\ \rho \left(\psi_{\varphi} \omega_r - \psi_r \omega_{\varphi} \right) &= (f_{\psi} + \omega) \left(\psi_{\varphi} \rho_r - \psi_r \rho_{\varphi} \right). \end{aligned}$$

Инвариантная подмодель с переменной $s = \ln J$ такова:

$$\begin{aligned} \Omega &= CI, \quad (B + B_s)^2 + \alpha^2 B_s^2 = q^2(I), \\ (\alpha^2 + 1)(IB_{ss} - I_s B_s) + 2IB_s - BI_s + IB + CI^3 B^{-1} &= 0. \end{aligned}$$

При $B = \text{const}$ газ двигается по окружностям с особенностью вихря и плотности на логарифмической спирали.

Подалгебра $X_3 + Y_5$ задает инвариантное решение в полярной системе координат:

$$\int b d\psi + \varphi = B(r), \quad \rho b^2 = I(r),$$

$$\omega = b\Omega(r) - b'b^{-1}I^{-1}q^2, \quad q^2 = I^2 \left(1 - 2 \int F' I^{-1} dI \right).$$

Подмодель имеет вид

$$\Omega = CI, \quad B'^2 + r^{-2} = q^2, \quad I(B'' + r^{-1}B') = I'B' - CI^3.$$

При $C = 0$ имеются два решения (K — постоянная):

$$(1) \quad r^2 = q^{-2}(1 + K^2 I^2), \quad B = -\arctan(KI) + K \int_0^I q^{-1} I F' dI,$$

$$q^2 = I^2 \left(1 - 2 \int_0^I F' I^{-1} dI \right), \quad 0 < I < I_m;$$

$$(2) \quad r^2 = q^{-2}(1 + K^2 I^2), \quad B = -\arctan(KI) + K \int_{I_m}^I q^{-1} I F' dI,$$

$$q^2 = I^2 \left(1 - 2 \int_{I_m}^I F' I^{-1} dI \right), \quad I_m < I < I_1, \quad 2^{-1} = \int_{I_m}^{I_1} F' I^{-1} dI.$$

Для первого решения $r \rightarrow \infty$ при $I \rightarrow 0$, точка $I = I_m$ — стационарная для функции $r(I)$:

$$1 - 2 \int_0^{I_m} F'(I) I^{-1} dI = F'(I_m)(1 + K^2 I_m^2), \quad r_m = r(I_m) = I_m^{-1} F'(I_m)^{-1/2}.$$

При $I \rightarrow 0$ линия тока $\psi = \psi_0$ приближается к лучу

$$r = K(\varphi_0(\psi_0) - \varphi)^{-1}, \quad \omega \rightarrow 0.$$

При $I \rightarrow I_m$ линия тока исходит с окружности $r = r_m$

$$\varphi \simeq B_0(r^2 - r_m^2) + \varphi_1(\psi_0), \quad B_0 = K r_m F'(I_m) I_m^3,$$

$$\omega \rightarrow b^{-1} b'(\psi_0) I_m F'(I_m) (1 + K^2 I_m^2).$$

Решение описывает движение из неточечного кругового источника с радиальным растеканием на бесконечности.

Для второго решения область определения задается равенствами

$$2^{-1} = \int_{I_m}^{I_1} F' I^{-1} dI, \quad 1 = F'(I_m)(1 + K^2 I_m^2).$$

При $I \rightarrow I_m$ линия тока исходит с той же окружности по такой же закономерности, как в первом решении. При $I \rightarrow I_1$ линия тока ведет себя как логарифмическая спираль:

$$r = \exp \frac{\varphi - \varphi_2(\psi_0)}{2K I_1}, \quad \omega \rightarrow -b^{-1} b'(\psi_0) I_m;$$

получается спиральное растекание с окружности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Овсянников Л. В. Лекции по основам газовой динамики. — М.: Наука, 1981.
2. Черный Г. Г. Газовая динамика. — М.: Наука, 1988.
3. Хабиров С. В., Чиркунов Ю. А. Элементы симметричного анализа дифференциальных уравнений механики сплошной среды. — Новосибирск: НГТУ, 2012.

С. В. Хабиров

Институт механики им. Р. Р. Мавлютова Уфимского научного центра РАН

E-mail: habirov@anrb.ru



НОВЫЕ СЛУЧАИ ИНТЕГРИРУЕМЫХ СИСТЕМ С ДИССИПАЦИЕЙ НА КАСАТЕЛЬНОМ РАССЛОЕНИИ К МНОГОМЕРНОЙ СФЕРЕ

© 2017 г. М. В. ШАМОЛИН

Аннотация. Во многих задачах многомерной динамики возникают системы, пространствами положений которых являются сферы конечной размерности. Соответственно, фазовыми пространствами таких систем становятся касательные расслоения к данным сферам. В работе изучаются неконсервативные силовые поля в динамике многомерного твердого тела, при наличии которых системы обладают полным набором первых интегралов, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций и являющихся, вообще говоря, трансцендентными функциями своих переменных. При этом вводится дополнительная зависимость момента неконсервативной силы от тензора угловой скорости.

Ключевые слова: динамическая система, диссипация, трансцендентный первый интеграл, интегрируемость.

AMS Subject Classification: 34Cxx, 37E10, 37N05

СОДЕРЖАНИЕ

1. Предварительные сведения	104
2. Динамика на $so(n)$ и $\mathbb{R}^n$	105
3. Задача о движении со следящей силой	106
4. Случай зависимости момента неконсервативных сил от угловой скорости	110
Список литературы	116

1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Ранее в [18, 20] автором уже была показана полная интегрируемость уравнений плоскопараллельного движения тела в сопротивляющейся среде в условиях струйного обтекания, когда у системы динамических уравнений существует первый интеграл, являющийся трансцендентной (в смысле теории функций комплексного переменного, имеющей существенно особые точки) функцией квазискоростей. Тогда предполагалось, что все взаимодействие среды с телом сосредоточено на той части поверхности тела, которая имеет форму (одномерной) пластины.

Позднее плоская задача была обобщена на пространственный (трехмерный) случай, при этом у системы динамических уравнений существует полный набор трансцендентных первых интегралов (см. [12, 14, 17, 19, 21]). Здесь уже предполагалось, что все взаимодействие среды с телом сосредоточено на той части поверхности тела, которая имеет форму плоского (двумерного) диска.

В данной работе результаты относятся к случаю, когда все взаимодействие среды с телом сосредоточено на той части поверхности тела, которая имеет форму $(n - 1)$ -мерного диска, при этом силовое воздействие сосредоточено в направлении, которое перпендикулярно данному диску (см. [15, 16, 22, 23, 25, 26]). Вводится дополнительная зависимость момента неконсервативной силы от тензора угловой скорости.

2. ДИНАМИКА НА $\mathfrak{so}(n)$ И $\mathbb{R}^n$

Конфигурационным пространством свободного n -мерного твердого тела является прямое произведение пространства $\mathbb{R}^n$ (определяющего координаты центра масс тела) на группу его вращений $\mathrm{SO}(n)$ (определяющую вращение тела вокруг центра масс)

$$\mathbb{R}^n \times \mathrm{SO}(n) \quad (2.1)$$

и имеет размерность $n + n(n-1)/2 = n(n+1)/2$. Соответственно, размерность фазового пространства равна $n(n+1)$.

В частности, если Ω — тензор угловой скорости n -мерного твердого тела (он является тензором второго ранга, см. [3–5]), $\Omega \in \mathfrak{so}(n)$, то та часть динамических уравнений движения, которая отвечает алгебре Ли $\mathfrak{so}(n)$, имеет следующий вид (см. [1, 2, 6, 7, 9]):

$$\dot{\Omega}\Lambda + \Lambda\dot{\Omega} + [\Omega, \Omega\Lambda + \Lambda\Omega] = M, \quad (2.2)$$

где

$$\Lambda = \mathrm{diag}\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}, \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{-I_1 + I_2 + \dots + I_n}{2}, & \lambda_2 &= \frac{I_1 - I_2 + I_3 + \dots + I_n}{2}, \dots, \\ \lambda_{n-1} &= \frac{I_1 + \dots + I_{n-2} - I_{n-1} + I_n}{2}, & \lambda_n &= \frac{I_1 + \dots + I_{n-1} - I_n}{2}, \end{aligned}$$

$M = M_F$ — момент внешних сил $\mathbf{F}$, действующих на тело в $\mathbb{R}^n$, спроектированный на естественные координаты в алгебре Ли $\mathfrak{so}(n)$, $[\cdot, \cdot]$ — коммутатор в $\mathfrak{so}(n)$. При этом, очевидно, для любых $i, j = 1, \dots, n$, выполнены следующие равенства:

$$\lambda_i - \lambda_j = I_j - I_i. \quad (2.4)$$

При вычислении момента внешней силы, действующей на тело, необходимо построить отображение

$$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathfrak{so}(n), \quad (2.5)$$

переводящее пару векторов $(\mathbf{DN}, \mathbf{F}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ из $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ в некоторый элемент из алгебры Ли $\mathfrak{so}(n)$, где $\mathbf{DN} = \{\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n\}$, $\mathbf{F} = \{F_1, F_2, \dots, F_n\}$, $\mathbf{F}$ — внешняя сила, действующая на тело (здесь $\mathbf{DN}$ — вектор, идущий из начала D координат системы $Dx_1 \dots x_n$ в точку N приложения силы). При этом строится соответствующая вспомогательная матрица

$$\begin{pmatrix} \delta_1 & \delta_2 & \dots & \delta_n \\ F_1 & F_2 & \dots & F_n \end{pmatrix}. \quad (2.6)$$

Всевозможные миноры второго порядка (а их в точности $n(n-1)/2$ штук) со знаком данной матрицы суть координаты момента $(\mathbf{DN}, \mathbf{F})$ силы $\mathbf{F}$, а сам момент отождествляется с некоторым элементом алгебры Ли $\mathfrak{so}(n)$.

Поскольку введена упорядоченность координат $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ на алгебре Ли $\mathfrak{so}(n)$, то можно ввести такую же упорядоченность и для вычисления момента $(\mathbf{DN}, \mathbf{F})$ силы $\mathbf{F}$ (см. [9, 25–27]). Полученное упорядоченное множество из $n(n-1)/2$ величин будем называть координатами момента $(\mathbf{DN}, \mathbf{F})$ силы $\mathbf{F}$.

Исследуемые в дальнейшем динамические системы, вообще говоря, неконсервативны и являются динамическими системами с переменной диссипацией с нулевым средним (см. [18, 20]). Нам потребуется исследовать часть основного уравнения динамики, а именно, в данном случае уравнение Ньютона, которое в данном случае представляет собой уравнение движения центра масс — та часть динамических уравнений движения, которая отвечает пространству $\mathbb{R}^n$:

$$m\mathbf{w}_C = \mathbf{F}, \quad (2.7)$$

где $\mathbf{w}_C$ — ускорение центра масс C тела, m — его масса. При этом в силу многомерной формулы Ривальса (которую в данном случае несложно вывести операторным методом) справедливы следующие равенства:

$$\mathbf{w}_C = \mathbf{w}_D + \Omega^2 \mathbf{DC} + E \mathbf{DC}, \quad \mathbf{w}_D = \dot{\mathbf{v}}_D + \Omega \mathbf{v}_D, \quad E = \dot{\Omega}, \quad (2.8)$$

где $\mathbf{w}_D$ — ускорение точки D , $\mathbf{F}$ — внешняя сила, действующая на тело (в нашем случае $\mathbf{F} = \mathbf{S}$), E — тензор углового ускорения (тензор второго ранга).

Предположим, что положение тела Θ в евклидовом пространстве $\mathbb{E}^n$ определяется функциями, которые являются циклическими в следующем смысле: обобщенная сила $\mathbf{F}$ и ее момент $(D\mathbf{N}, \mathbf{F})$ зависят лишь от обобщенных скоростей (квазискоростей) и не зависят от положения тела в пространстве. Тогда система уравнений (2.2), (2.7) на многообразии $\mathbb{R}^n \times \mathfrak{so}(n)$ определяет замкнутую систему динамических уравнений движения свободного n -мерного твердого тела под действием внешней силы $\mathbf{F}$. Данная система отделяется от кинематической части уравнений движения на многообразии (2.1) и может быть исследована самостоятельно.

3. ЗАДАЧА О ДВИЖЕНИИ СО СЛЕДЯЩЕЙ СИЛОЙ

3.1. Динамическая часть уравнений движения. Рассмотрим движение однородного динамически симметричного твердого тела с «передним торцом» $((n-1)$ -мерным диском, взаимодействующим со средой, заполняющей n -мерное пространство) в поле силы сопротивления $\mathbf{S}$ в условиях квазистационарности (см. [10, 11, 30]).

Пусть $(v, \alpha, \beta_1, \dots, \beta_{n-2})$ — (обобщенные) сферические координаты вектора скорости некоторой характерной точки D твердого тела (D — центр $(n-1)$ -мерного диска, лежащий на оси динамической симметрии тела), Ω — тензор угловой скорости тела, $Dx_1 \dots x_n$ — система координат, связанная с телом, при этом ось симметрии CD совпадает с осью Dx_1 (C — центр масс), а оси $Dx_2, Dx_3, \dots, Dx_n$ лежат в гиперплоскости диска, $I_1, I_2, I_3 = I_2, \dots, I_n = I_2$, m — инерционно-массовые характеристики.

Примем следующие разложения в проекциях на оси системы координат $Dx_1 \dots x_n$ ($D\mathbf{C} = \{-\sigma, 0, \dots, 0\}$):

$$\mathbf{v}_D = v \mathbf{i}_v(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_{n-2}), \quad (3.1)$$

где

$$\mathbf{i}_v(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_{n-2}) = \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \cos \beta_1 \\ \sin \alpha \sin \beta_1 \cos \beta_2 \\ \vdots \\ \sin \alpha \sin \beta_1 \dots \sin \beta_{n-3} \cos \beta_{n-2} \\ \sin \alpha \sin \beta_1 \dots \sin \beta_{n-2} \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

— орт вектора $\mathbf{v}$.

Примем также разложение для функции воздействия среды на n -мерное тело: $\mathbf{S} = \{-S, 0, \dots, 0\}$, т.е. в данном случае $\mathbf{F} = \mathbf{S}$.

Тогда нетрудно получить часть динамических уравнений движения тела (в том числе, и в случае аналитических функций Чаплыгина, см. [10, 11]), описывающую движение центра масс и соответствующую пространству $\mathbb{R}^n$; при этом касательные силы воздействия среды на $(n-1)$ -мерный диск отсутствуют.

Вспомогательная матрица для вычисления момента силы сопротивления примет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & x_{2N} & \dots & x_{nN} \\ -S & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.3)$$

что позволяет получить часть динамических уравнений движения тела, описывающую движение вокруг центра масс и соответствующую алгебре Ли $\mathfrak{so}(n)$.

Таким образом, фазовым пространством системы в общем случае является пространство $\mathbb{R}^1 \times \mathbb{S}^{n-1} \times \mathfrak{so}(n)$.

3.2. Следствия динамической симметрии. Отметим, что рассматриваемая система в силу имеющейся динамической симметрии

$$I_2 = \dots = I_n \quad (3.4)$$

обладает циклическими первыми интегралами

$$\omega_{k_1} \equiv \omega_{k_1}^0 = \text{const}, \quad \dots, \omega_{k_s} \equiv \omega_{k_s}^0 = \text{const}, \quad s = \frac{(n-1)(n-2)}{2}; \quad (3.5)$$

здесь $k_1 = 1, \dots, k_s$ — некоторые s неповторяющихся чисел из множества $W_1 = \{1, 2, \dots, n(n-1)/2\}$. Рассмотрим набор (3.5) первых интегралов на нулевых уровнях:

$$\omega_{k_1}^0 = \dots = \omega_{k_s}^0 = 0. \quad (3.6)$$

Ненулевым же компонент $\omega_{r_1}, \dots, \omega_{r_p}$ тензора Ω осталось $p = n(n-1)/2 - (n-1)(n-2)/2 = n-1$ штук (здесь $r_1, \dots, r_p$ — оставшиеся p чисел из множества W_1 , отличных от $k_1, \dots, k_s$).

3.3. Неинтегрируемая связь и выбор следящей силы. Если же рассматривается более общая задача о движении тела при наличии некоторой следящей силы $\mathbf{T}$, лежащей на прямой $CD = Dx_1$ и обеспечивающей во все время движения выполнение равенства

$$v \equiv \text{const} \quad (3.7)$$

(см. [28, 29]), то в системе (2.2), (2.7) вместо F_1 будет стоять величина $T - s(\alpha)v^2$, $\sigma = DC$.

В результате соответствующего выбора величины T следящей силы можно формально добиться выполнения равенства (3.7) во все время движения. Действительно, формально выражая величину T в силу системы (2.2), (2.7) получим при $\cos \alpha \neq 0$, $n > 2$:

$$T = T_v(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_{n-2}, \Omega) = m\sigma(\omega_{r_1}^2 + \dots + \omega_{r_p}^2) + s(\alpha)v^2 \left[1 - \frac{m\sigma}{(n-2)I_2} \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \Gamma_v \left(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_{n-2}, \frac{\Omega}{v} \right) \right], \quad (3.8)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_v \left(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_{n-2}, \frac{\Omega}{v} \right) &= |\mathbf{r}_N| = (\mathbf{r}_N, \mathbf{i}_N(\beta_1, \dots, \beta_{n-2})) = \\ &= 0 \cdot \cos \frac{\pi}{2} + \sum_{s=2}^n x_{sN} \left(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_{n-2}, \frac{\Omega}{v} \right) i_{sN}(\beta_1, \dots, \beta_{n-2}). \end{aligned} \quad (3.9)$$

Здесь $i_{sN}(\beta_1, \dots, \beta_{n-2})$, $s = 1, \dots, n$ ($i_{1N}(\beta_1, \dots, \beta_{n-2}) \equiv 0$) — компоненты орта вектора $\mathbf{r}_N = \{0, x_{2N}, \dots, x_{nN}\}$ на $(n-2)$ -мерной сфере $\mathbb{S}^{n-2}\{\beta_1, \dots, \beta_{n-2}\}$, заданной равенством $\alpha = \pi/2$, как экваториальном сечении соответствующей $(n-1)$ -мерной сферы $\mathbb{S}^{n-1}\{\alpha, \beta_1, \dots, \beta_{n-2}\}$ (заданной равенством (3.7)), а именно:

$$\begin{aligned} \mathbf{i}_N(\beta_1, \dots, \beta_{n-2}) &= \begin{pmatrix} 0 \\ i_{2N}(\beta_1, \dots, \beta_{n-2}) \\ i_{3N}(\beta_1, \dots, \beta_{n-2}) \\ \vdots \\ i_{n-1N}(\beta_1, \dots, \beta_{n-2}) \\ i_{nN}(\beta_1, \dots, \beta_{n-2}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos \beta_1 \\ \sin \beta_1 \cos \beta_2 \\ \vdots \\ \sin \beta_1 \dots \sin \beta_{n-3} \cos \beta_{n-2} \\ \sin \beta_1 \dots \sin \beta_{n-2} \end{pmatrix} = \\ &= \mathbf{i}_v \left(\frac{\pi}{2}, \beta_1, \dots, \beta_{n-2} \right) \end{aligned} \quad (3.10)$$

(см. (3.2)). При получении равенства (3.8) используются условия (3.5)–(3.7).

3.4. Редукции в системе. Данную процедуру можно рассматривать с двух позиций. Во-первых, произошло преобразование системы при помощи наличия в системе следящей силы (управления), обеспечивающей рассмотрение интересующего нас класса движений (3.7). Во-вторых, можно трактовать ее как процедуру, позволяющую понизить порядок системы. Действительно, рассматриваемая система в результате действий (выполнение равенств (3.7), (3.5), (3.6)) порождает независимую систему порядка

$$\frac{n(n+1)}{2} - \frac{(n-1)(n-2)}{2} - 1 = 2(n-1). \quad (3.11)$$

3.5. Новые квазискорости в системе. Введем новые квазискорости в рассматриваемой системе. Для этого преобразуем величины $\omega_{r_1}, \dots, \omega_{r_{n-1}}$ посредством композиции следующих $n-2$ поворотов:

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_{n-1} \end{pmatrix} = T_{n-2,n-1}(-\beta_1) \circ T_{n-3,n-2}(-\beta_2) \circ \dots \circ T_{1,2}(-\beta_{n-2}) \begin{pmatrix} \omega_{r_1} \\ \omega_{r_2} \\ \vdots \\ \omega_{r_{n-1}} \end{pmatrix}, \quad (3.12)$$

где матрицы $T_{k,k+1}(\beta)$, $k = 1, \dots, n-2$, отличаются от единичной матрицы лишь наличием минора второго порядка $M_{k,k+1}$:

$$T_{k,k+1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M_{k,k+1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.13)$$

$$M_{k,k+1} = \begin{pmatrix} m_{k,k} & m_{k,k+1} \\ m_{k+1,k} & m_{k+1,k+1} \end{pmatrix}, \quad m_{k,k} = m_{k+1,k+1} = \cos \beta, \quad m_{k+1,k} = -m_{k,k+1} = \sin \beta.$$

3.6. Системы нормального вида. На многообразии

$$O'_1 = \left\{ (\alpha, \beta_1, \dots, \beta_{n-2}, \omega_{r_1}, \dots, \omega_{r_{n-1}}) \in \mathbb{R}^{2(n-1)} : \right. \\ \left. \alpha = \frac{\pi}{2}k, \beta_1 = \pi l_1, \dots, \beta_{n-2} = \pi l_{n-2}, k, l_1, \dots, l_{n-2} \in \mathbb{Z} \right\} \quad (3.14)$$

нельзя однозначно разрешить систему относительно $\dot{\alpha}, \dot{\beta}_1, \dots, \dot{\beta}_{n-2}$. Таким образом, формально на многообразии (3.14) происходит нарушение теоремы единственности. Более того, при четном k и любых $l_1, \dots, l_{n-2}$ неопределенность возникает по причине вырождения сферических координат $(v, \alpha, \beta_1, \dots, \beta_{n-2})$, а при нечетном k происходит явное нарушение теоремы единственности, поскольку при этом одно уравнение вырождается. Из этого следует, что рассматриваемая система вне и только вне многообразия (3.14) может быть приведена к следующему виду ($n > 2$):

$$\dot{\alpha} = -z_{n-1} + \frac{\sigma v}{(n-2)I_2} \frac{s(\alpha)}{\cos \alpha} \Gamma_v \left(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_{n-2}, \frac{\Omega}{v} \right), \quad (3.15)$$

$$\dot{z}_{n-1} = \frac{v^2}{(n-2)I_2} s(\alpha) \Gamma_v \left(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_{n-2}, \frac{\Omega}{v} \right) - \left(z_1^2 + \dots + z_{n-2}^2 \right) \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + \\ + \frac{\sigma v}{(n-2)I_2} \frac{s(\alpha)}{\sin \alpha} \left\{ \sum_{s=1}^{n-2} (-1)^s z_{n-1-s} \Delta_{v,s} \left(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_{n-2}, \frac{\Omega}{v} \right) \right\}, \quad (3.16)$$

$$\dot{z}_{n-2} = z_{n-2} z_{n-1} \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + \left(z_1^2 + \dots + z_{n-3}^2 \right) \frac{\cos \alpha \cos \beta_1}{\sin \alpha \sin \beta_1} + \\ + \frac{\sigma v}{(n-2)I_2} \frac{s(\alpha)}{\sin \alpha} \left\{ z_{n-1} \Delta_{v,1} \left(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_{n-2}, \frac{\Omega}{v} \right) + \right. \\ \left. + \sum_{s=2}^{n-2} (-1)^{s+1} z_{n-1-s} \Delta_{v,s} \left(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_{n-2}, \frac{\Omega}{v} \right) \frac{\cos \beta_1}{\sin \beta_1} \right\} - \\ - \frac{v^2}{(n-2)I_2} s(\alpha) \Delta_{v,1} \left(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_{n-2}, \frac{\Omega}{v} \right), \quad (3.17)$$

$$\begin{aligned} \dot{z}_{n-3} = & \left(z_1^2 + \dots + z_{n-4}^2 \right) \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \frac{1}{\sin \beta_1} \frac{\cos \beta_2}{\sin \beta_2} + \\ & + \frac{\sigma v}{(n-2)I_2} \frac{s(\alpha)}{\sin \alpha} \left\{ \Delta_{v,2} \left(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_{n-2}, \frac{\Omega}{v} \right) \left[-z_{n-1} + z_{n-2} \frac{\cos \beta_1}{\sin \beta_1} \right] + \right. \\ & + \sum_{s=3}^{n-2} (-1)^s z_{n-1-s} \Delta_{v,s} \left(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_{n-2}, \frac{\Omega}{v} \right) \frac{1}{\sin \beta_1} \frac{\cos \beta_2}{\sin \beta_2} \left. \right\} + \\ & + \frac{v^2}{(n-2)I_2} s(\alpha) \Delta_{v,2} \left(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_{n-2}, \frac{\Omega}{v} \right), \quad (3.18) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{z}_1 &= \dot{\beta}_{n-2} \left(-\omega_{r_1} \sin \beta_{n-2} + \omega_{r_2} \cos \beta_{n-2} \right) + \\
&+ (-1)^n \frac{v^2}{(n-2)I_2} s(\alpha) \Delta_{v,n-2} \left(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_{n-2}, \frac{\Omega}{v} \right) = \\
&= z_1 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \left\{ \sum_{s=1}^{n-2} (-1)^{s+1} z_{n-s} \frac{\cos \beta_{s-1}}{\sin \beta_1 \dots \sin \beta_{s-1}} \right\} + \\
&+ \frac{\sigma v}{(n-2)I_2} \frac{s(\alpha)}{\sin \alpha} (-1)^{n+1} \Delta_{v,n-2} \left(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_{n-2}, \frac{\Omega}{v} \right) \times \\
&\times \left\{ \sum_{s=2}^{n-1} (-1)^s z_{n+1-s} \frac{\cos \beta_{s-1}}{\sin \beta_1 \dots \sin \beta_{s-1}} \right\} + \\
&+ (-1)^n \frac{v^2}{(n-2)I_2} s(\alpha) \Delta_{v,n-2} \left(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_{n-2}, \frac{\Omega}{v} \right), \quad (3.19)
\end{aligned}$$

$$\dot{\beta}_1 = z_{n-2} \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + \frac{\sigma v}{(n-2)I_2} \frac{s(\alpha)}{\sin \alpha} \Delta_{v,1} \left(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_{n-2}, \frac{\Omega}{v} \right), \quad (3.20)$$

$$\dot{\beta}_2 = -z_{n-3} \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha \sin \beta_1} + \frac{\sigma v}{(n-2)I_2} \frac{s(\alpha)}{\sin \alpha \sin \beta_1} \Delta_{v,2} \left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \frac{\Omega}{v} \right), \quad (3.21)$$

$$\begin{aligned} \dot{\beta}_{n-2} = & (-1)^{n+1} z_1 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha \sin \beta_1 \dots \sin \beta_{n-3}} + \\ & + \frac{\sigma v}{(n-2)I_2} \frac{s(\alpha)}{\sin \alpha \sin \beta_1 \dots \sin \beta_{n-2}} \Delta_{v,n-2} \left(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_{n-2}, \frac{\Omega}{v} \right), \quad (3.22) \end{aligned}$$

где

[illegible]

а функция $\Gamma_v(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_{n-2}, \Omega/v)$ представляется в виде (3.9). Здесь и далее зависимость от групп переменных $(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_{n-2}, \Omega/v)$ понимается как сложная зависимость от $(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_{n-2}, z_1/v, \dots, z_{n-1}/v)$.

3.7. Замечания о распределении индексов. В правой части системы (3.15)–(3.22) после общего множителя

$$\frac{\sigma v}{(n-2)I_2 \cos \alpha} \frac{s(\alpha)}{\cos \alpha}$$

величины $\Delta_{v,s}(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_{n-2}, \Omega/v)$, $s = 1, \dots, n-2$, входят линейным образом (и всегда ровно $(n-2)$ штуки). Так, например, в уравнении (3.16) (с левой частью $\dot{z}_{n-1}$) функции (3.23) входят со всеми индексами s от 1 до $n-2$ (по одному разу каждый индекс), т.е.

$$1 \ 2 \ 3 \ 4 \ \dots \ n-2. \quad (3.24)$$

Далее, в уравнениях (3.17)–(3.19), появление набора функций (3.23) происходит по-другому. Так, например, в уравнение для $\dot{z}_{n-2}$ по-прежнему входит набор функций (3.23) с индексами (3.24), в то время как в уравнение для $\dot{z}_{n-3}$ входит уже набор с индексами

$$2 \ 2 \ 3 \ 4 \ \dots \ n-2, \quad (3.25)$$

т.е. функция $\Delta_{v,2}(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_{n-2}, \Omega/v)$ уже повторяется дважды.

Каково же общее распределение индексов? Оно дается следующей таблицей 1.

ТАБЛИЦА 1. Общее распределение индексов набора функций (3.23)

Левая часть (3.15)–(3.22)	Распределение индексов s набора (3.23)					
$\dot{z}_{n-2}$	1	2	3	4	...	$n-2$
$\dot{z}_{n-3}$	2	2	3	4	...	$n-2$
$\dot{z}_{n-4}$	3	3	3	4	...	$n-2$
$\dot{z}_{n-5}$	4	4	4	4	...	$n-2$
...	...	...	...	...	...	...
$\dot{z}_1$	$n-2$	$n-2$	$n-2$	$n-2$	...	$n-2$

Так, минор (1) первого порядка в левом верхнем углу таблицы 1 соответствует случаю $n = 3$ и указывает на присутствие в динамических уравнениях лишь функции (3.23) при $s = 1$. Там же минор второго порядка

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

соответствует случаю $n = 4$ и указывает на присутствие в динамических уравнениях функций (3.23) при $s = 1, 2$. Там же минор третьего порядка

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

соответствует случаю $n = 5$ и указывает на присутствие в динамических уравнениях функций (3.23) при $s = 1, 2, 3$ и т. д.

4. СЛУЧАЙ ЗАВИСИМОСТИ МОМЕНТА НЕКОНСЕРВАТИВНЫХ СИЛ ОТ УГЛОВОЙ СКОРОСТИ

4.1. Введение зависимости от угловой скорости. Данный раздел посвящен исследованию случая движения при наличии зависимости момента действующих сил от тензора угловой скорости. Введем такую зависимость с более общих позиций.

Пусть $x = (x_{1N}, \dots, x_{nN})$ — координаты точки N приложения неконсервативной силы (воздействия среды) на $(n-1)$ -мерный диск, $Q = (Q_1, \dots, Q_n)$ — компоненты, не зависящие от тензора угловой скорости. Будем вводить зависимость функций $(x_{1N}, \dots, x_{nN})$ от тензора угловой скорости лишь линейным образом, поскольку само данное введение априори не очевидно (см. [18, 20]).

Примем следующую зависимость: $x = Q + R$, где $R = (R_1, \dots, R_n)$ — вектор-функция, содержащая компоненты тензора угловой скорости. При этом зависимость функции R от компонент тензора угловой скорости — гироскопическая:

$$R = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_n \end{pmatrix} = -\frac{1}{v}\Omega h, \quad h = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix}. \quad (4.1)$$

Здесь Ω — тензор угловой скорости, $(h_1, \dots, h_n)$ — некоторые положительные параметры (ср. [5–7]).

Теперь, применительно к нашей задаче, поскольку $x_{1N} \equiv 0$,

$$x_{2N} = Q_2 - h_1 \frac{\omega_{r_{n-1}}}{v}, \quad x_{3N} = Q_3 + h_1 \frac{\omega_{r_{n-2}}}{v}, \quad \dots, \quad x_{nN} = Q_n + (-1)^{n+1} h_1 \frac{\omega_{r_1}}{v}. \quad (4.2)$$

Здесь $\omega_{r_1}, \dots, \omega_{r_{n-1}}$ — оставшиеся (вообще говоря, ненулевые) компоненты тензора угловой скорости Ω .

4.2. Приведенная система. Подобно выбору аналитических функций Чаплыгина (см. [10, 11]), пользуясь (3.10), имеем:

$$Q = R(\alpha) \mathbf{i}_N, \quad (4.3)$$

а динамические функции $s, x_{2N}, \dots, x_{nN}$ примем в виде

$$s(\alpha) = B \cos \alpha, \quad \mathbf{r}_N = Q - \frac{1}{v}\Omega h, \quad R(\alpha) = A \sin \alpha, \quad A, B > 0, \quad (4.4)$$

убеждающем нас в том, что в рассматриваемой системе присутствует дополнительный демпфирующий (а в некоторых областях фазового пространства и разгоняющий) момент неконсервативной силы (т.е. присутствует зависимость момента от компонент тензора угловой скорости), причем $h_2 = \dots = h_n$ в силу динамической симметрии тела. При этом функции

$$\Gamma_v \left(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_{n-2}, \frac{\Omega}{v} \right), \quad \Delta_{v,s} \left(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_{n-2}, \frac{\Omega}{v} \right), \quad s = 1, \dots, n-2,$$

входящие в систему (3.15)–(3.22), примут следующий вид:

$$\begin{aligned} \Gamma_v \left(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_{n-2}, \frac{\Omega}{v} \right) &= A \sin \alpha - \frac{h_1}{v} z_{n-1}, \\ \Delta_{v,1} \left(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_{n-2}, \frac{\Omega}{v} \right) &= \frac{h_1}{v} z_{n-2}, \quad \dots, \quad \Delta_{v,n-2} \left(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_{n-2}, \frac{\Omega}{v} \right) = (-1)^{n+1} \frac{h_1}{v} z_1. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Тогда, благодаря неинтегрируемой связи (3.7), вне и только вне многообразия (3.14) динамическая часть уравнений движения (система (3.15)–(3.22)) примет вид аналитической системы. Введем далее безразмерные переменные, параметры и дифференцирование следующим образом:

$$\begin{aligned} z_k &\mapsto n_0 v z_k, \quad k = 1, \dots, n-1, \quad n_0^2 = \frac{AB}{(n-2)I_2} \quad (n > 2), \\ b &= \sigma n_0, \quad H_1 = \frac{B h_1}{(n-2)I_2 n_0}, \quad \langle \cdot \rangle = n_0 v \langle' \rangle, \end{aligned} \quad (4.6)$$

приведем систему (3.15)–(3.22) к виду

$$\alpha' = -(1 + b H_1) z_{n-1} + b \sin \alpha, \quad (4.7)$$

$$z'_{n-1} = \sin \alpha \cos \alpha - (1 + b H_1) \left(z_1^2 + \dots + z_{n-2}^2 \right) \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - H_1 z_{n-1} \cos \alpha, \quad (4.8)$$

$$z'_{n-2} = (1 + b H_1) z_{n-2} z_{n-1} \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + (1 + b H_1) \left(z_1^2 + \dots + z_{n-3}^2 \right) \frac{\cos \alpha \cos \beta_1}{\sin \alpha \sin \beta_1} - H_1 z_{n-2} \cos \alpha, \quad (4.9)$$

$$z'_{n-3} = (1 + bH_1)z_{n-3}z_{n-1}\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - (1 + bH_1)z_{n-3}z_{n-2}\frac{\cos \alpha \cos \beta_1}{\sin \alpha \sin \beta_1} - \\ - (1 + bH_1)\left(z_1^2 + \dots + z_{n-4}^2\right)\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}\frac{1}{\sin \beta_1}\frac{\cos \beta_2}{\sin \beta_2} - H_1z_{n-3}\cos \alpha, \quad (4.10)$$

.....

$$z'_1 = (1 + bH_1)z_1\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}\left\{\sum_{s=1}^{n-2}(-1)^{s+1}z_{n-s}\frac{\cos \beta_{s-1}}{\sin \beta_1 \dots \sin \beta_{s-1}}\right\} - H_1z_1\cos \alpha, \quad (4.11)$$

$$\beta'_1 = (1 + bH_1)z_{n-2}\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \quad (4.12)$$

$$\beta'_2 = -(1 + bH_1)z_{n-3}\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha \sin \beta_1}, \quad (4.13)$$

.....

$$\beta'_{n-3} = (-1)^n(1 + bH_1)z_2\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha \sin \beta_1 \dots \sin \beta_{n-4}}, \quad (4.14)$$

$$\beta'_{n-2} = (-1)^{n+1}(1 + bH_1)z_1\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha \sin \beta_1 \dots \sin \beta_{n-3}}. \quad (4.15)$$

Видно, что в системе (4.7)–(4.15) порядка $2(n-1)$, которую можно рассматривать на касательном расслоении $T_*\mathbb{S}^{n-1}\{z_{n-1}, \dots, z_1; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_{n-2}\}$ $(n-1)$ -мерной сферы $\mathbb{S}^{n-1}\{\alpha, \beta_1, \dots, \beta_{n-2}\}$, образовалась независимая система (4.7)–(4.14) порядка $2n-3$ на своем $(2n-3)$ -мерном многообразии.

Теорема 4.1. Система (2.2), (2.7) при условиях (3.7), (3.5), (3.6) редуцируется к динамической системе (3.15)–(3.22) на касательном расслоении $T_*\mathbb{S}^{n-1}\{z_{n-1}, \dots, z_1; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_{n-2}\}$ $(n-1)$ -мерной сферы $\mathbb{S}^{n-1}\{\alpha, \beta_1, \dots, \beta_{n-2}\}$. В частности, при условии (4.4) — к системе (4.7)–(4.15).

4.3. Полный список инвариантных соотношений при любом конечном n . Для полного интегрирования системы (4.7)–(4.15) порядка $2(n-1)$ необходимо знать, вообще говоря, $2n-3$ независимых первых интегралов. Но рассматриваемые системы имеют такие симметрии, которые позволяют снизить достаточное количество первых интегралов до n для интегрирования систем.

Действительно, после замены переменных

$$w_{n-1} = z_{n-1}, \quad w_{n-2} = \sqrt{z_1^2 + \dots + z_{n-2}^2}, \quad w_{n-3} = \frac{z_2}{z_1}, \quad w_{n-4} = \frac{z_3}{\sqrt{z_1^2 + z_2^2}}, \quad \dots, \\ w_2 = \frac{z_{n-3}}{\sqrt{z_1^2 + \dots + z_{n-4}^2}}, \quad w_1 = \frac{z_{n-2}}{\sqrt{z_1^2 + \dots + z_{n-3}^2}}, \quad (4.16)$$

система (4.7)–(4.15) распадается следующим образом:

$$\alpha' = -(1 + bH_1)w_{n-1} + b\sin \alpha, \quad (4.17)$$

$$w'_{n-1} = \sin \alpha \cos \alpha - (1 + bH_1)w_{n-2}^2\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - H_1w_{n-1}\cos \alpha, \quad (4.18)$$

$$w'_{n-2} = (1 + bH_1)w_{n-2}w_{n-1}\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - H_1w_{n-2}\cos \alpha, \quad (4.19)$$

$$\begin{cases} w'_s = d_s(w_{n-1}, \dots, w_1; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_{n-2})\frac{1 + w_s^2 \cos \beta_s}{w_s \sin \beta_s}, \\ \beta'_s = d_s(w_{n-1}, \dots, w_1; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_{n-2}), \quad s = 1, \dots, n-3, \end{cases} \quad (4.20)$$

$$\beta'_{n-2} = d_{n-2}(w_{n-1}, \dots, w_1; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_{n-2}), \quad (4.21)$$

Итак, уравнение (4.29) имеет следующий первый интеграл:

$$\frac{(1 + bH_1)(u_2^2 + u_1^2) - (b + H_1)u_2 + 1}{u_1} = C_1 = \text{const}, \quad (4.31)$$

который в прежних переменных выглядит следующим образом:

$$\Theta_1(w_{n-1}, w_{n-2}; \alpha) = \frac{(1 + bH_1)(w_{n-1}^2 + w_{n-2}^2) - (b + H_1)w_{n-1} \sin \alpha + \sin^2 \alpha}{w_{n-2} \sin \alpha} = C_1 = \text{const}. \quad (4.32)$$

Замечание 4.1. Рассмотрим систему (4.17)–(4.19) с переменной диссипацией с нулевым средним (см. [18, 20]), становящейся консервативной при $b = H_1$:

$$\begin{aligned} \alpha' &= -(1 + b^2)w_{n-1} + b \sin \alpha, \\ w'_{n-1} &= \sin \alpha \cos \alpha - (1 + b^2)w_{n-2}^2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - bw_{n-1} \cos \alpha, \\ w'_{n-2} &= (1 + b^2)w_{n-2}w_{n-1} \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - bw_{n-2} \cos \alpha. \end{aligned} \quad (4.33)$$

Она обладает двумя аналитическими первыми интегралами вида

$$(1 + b^2)(w_{n-1}^2 + w_{n-2}^2) - 2bw_{n-1} \sin \alpha + \sin^2 \alpha = C_1^* = \text{const}, \quad (4.34)$$

$$w_{n-2} \sin \alpha = C_2^* = \text{const}. \quad (4.35)$$

Очевидно, что отношение двух первых интегралов (4.34), (4.35) также является первым интегралом системы (4.33). Но при $b \neq H_1$ каждая из функций

$$(1 + bH_1)(w_{n-1}^2 + w_{n-2}^2) - (b + H_1)w_{n-1} \sin \alpha + \sin^2 \alpha \quad (4.36)$$

и (4.35) по отдельности не является первым интегралом системы (4.17)–(4.19). Однако отношение функций (4.36), (4.35) является первым интегралом системы (4.17)–(4.19) при любых b, H_1 .

Далее, найдем явный вид дополнительного первого интеграла системы третьего порядка (4.17)–(4.19). Для этого преобразуем для начала инвариантное соотношение (4.31) при $u_1 \neq 0$ следующим образом:

$$\left(u_2 - \frac{b + H_1}{2(1 + bH_1)}\right)^2 + \left(u_1 - \frac{C_1}{2(1 + bH_1)}\right)^2 = \frac{(b - H_1)^2 + C_1^2 - 4}{4(1 + bH_1)^2}. \quad (4.37)$$

Видно, что параметры данного инвариантного соотношения должны удовлетворять условию

$$(b - H_1)^2 + C_1^2 - 4 \geq 0, \quad (4.38)$$

и фазовое пространство системы (4.17)–(4.19) расслаивается на семейство поверхностей, задаваемых равенством (4.37).

Таким образом, в силу соотношения (4.31) первое уравнение системы (4.28) примет вид

$$\tau \frac{du_2}{d\tau} = \frac{2(1 + bH_1)u_2^2 - 2(b + H_1)u_2 + 2 - C_1 U_1(C_1, u_2)}{b - (1 + bH_1)u_2}, \quad (4.39)$$

где

$$\begin{aligned} U_1(C_1, u_2) &= \frac{1}{2(1 + bH_1)} \left\{ C_1 \pm U_2(C_1, u_2) \right\}, \\ U_2(C_1, u_2) &= \sqrt{C_1^2 - 4(1 + bH_1) \left(1 - (b + H_1)u_2 + (1 + bH_1)u_2^2 \right)}; \end{aligned} \quad (4.40)$$

при этом постоянная интегрирования C_1 выбирается из условия (4.38).

Поэтому квадратура для поиска дополнительного первого интеграла системы (4.17)–(4.19) примет вид

$$\int \frac{d\tau}{\tau} = \int \frac{(b - (1 + bH_1)u_2) du_2}{2 \left(1 - (b + H_1)u_2 + (1 + bH_1)u_2^2 \right) - C_1 \{ C_1 \pm U_2(C_1, u_2) \} / (2(1 + bH_1))}. \quad (4.41)$$

Левая часть (с точностью до аддитивной постоянной), очевидно, равна $\ln |\sin \alpha|$. Если

$$u_2 - \frac{b + H_1}{2(1 + bH_1)} = r_1, \quad b_1^2 = (b - H_1)^2 + C_1^2 - 4, \quad (4.42)$$

то правая часть равенства (4.41) примет вид

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{4} \int \frac{d(b_1^2 - 4(1 + bH_1)r_1^2)}{(b_1^2 - 4(1 + bH_1)r_1^2) \pm C_1 \sqrt{b_1^2 - 4(1 + bH_1)r_1^2}} - \\ & - (b - H_1)(1 + bH_1) \int \frac{dr_1}{(b_1^2 - 4(1 + bH_1)r_1^2) \pm C_1 \sqrt{b_1^2 - 4(1 + bH_1)r_1^2}} = \\ & = -\frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{b_1^2 - 4(1 + bH_1)r_1^2}}{C_1} \pm 1 \right| \pm \frac{b - H_1}{2} I_1, \end{aligned} \quad (4.43)$$

где

$$I_1 = \int \frac{dr_3}{\sqrt{b_1^2 - r_3^2}(r_3 \pm C_1)}, \quad r_3 = \sqrt{b_1^2 - 4(1 + bH_1)r_1^2}. \quad (4.44)$$

При вычислении интеграла (4.44) возможны три случая.

I. $|b - H_1| > 2$:

$$\begin{aligned} I_1 = & -\frac{1}{2\sqrt{(b - H_1)^2 - 4}} \ln \left| \frac{\sqrt{(b - H_1)^2 - 4} + \sqrt{b_1^2 - r_3^2}}{r_3 \pm C_1} \pm \frac{C_1}{\sqrt{(b - H_1)^2 - 4}} \right| + \\ & + \frac{1}{2\sqrt{(b - H_1)^2 - 4}} \ln \left| \frac{\sqrt{(b - H_1)^2 - 4} - \sqrt{b_1^2 - r_3^2}}{r_3 \pm C_1} \mp \frac{C_1}{\sqrt{(b - H_1)^2 - 4}} \right| + \text{const}; \end{aligned} \quad (4.45)$$

II. $|b - H_1| < 2$:

$$I_1 = \frac{1}{\sqrt{4 - (b - H_1)^2}} \arcsin \frac{\pm C_1 r_3 + b_1^2}{b_1(r_3 \pm C_1)} + \text{const}; \quad (4.46)$$

III. $|b - H_1| = 2$:

$$I_1 = \mp \frac{\sqrt{b_1^2 - r_3^2}}{C_1(r_3 \pm C_1)} + \text{const}. \quad (4.47)$$

Возвращаясь к переменной

$$r_1 = \frac{w_{n-1}}{\sin \alpha} - \frac{b + H_1}{2(1 + bH_1)}, \quad (4.48)$$

имеем окончательный вид для величины I_1 :

I. $|b - H_1| > 2$:

$$\begin{aligned} I_1 = & -\frac{1}{2\sqrt{(b - H_1)^2 - 4}} \ln \left| \frac{\sqrt{(b - H_1)^2 - 4} \pm 2(1 + bH_1)r_1}{\sqrt{b_1^2 - 4(1 + bH_1)^2 r_1^2} \pm C_1} \pm \frac{C_1}{\sqrt{(b - H_1)^2 - 4}} \right| + \\ & + \frac{1}{2\sqrt{(b - H_1)^2 - 4}} \ln \left| \frac{\sqrt{(b - H_1)^2 - 4} \mp 2(1 + bH_1)r_1}{\sqrt{b_1^2 - 4(1 + bH_1)^2 r_1^2} \pm C_1} \mp \frac{C_1}{\sqrt{(b - H_1)^2 - 4}} \right| + \text{const}; \end{aligned} \quad (4.49)$$

II. $|b - H_1| < 2$:

$$I_1 = \frac{1}{\sqrt{4 - (b - H_1)^2}} \arcsin \frac{\pm C_1 \sqrt{b_1^2 - 4(1 + bH_1)^2 r_1^2} + b_1^2}{b_1(\sqrt{b_1^2 - 4(1 + bH_1)^2 r_1^2} \pm C_1)} + \text{const}; \quad (4.50)$$

III. $|b - H_1| = 2L$

$$I_1 = \mp \frac{2(1 + bH_1)r_1}{C_1(\sqrt{b_1^2 - 4(1 + bH_1)^2 r_1^2} \pm C_1)} + \text{const}. \quad (4.51)$$

Итак, мы нашли дополнительный первый интеграл для системы третьего порядка (4.17)–(4.19) и имеем полный набор первых интегралов, являющихся трансцендентными функциями своих фазовых переменных.

Замечание 4.2. В выражение найденного первого интеграла формально необходимо вместо C_1 подставить левую часть первого интеграла (4.31). Тогда полученный дополнительный первый интеграл имеет следующий вид:

$$\Theta_2(w_{n-1}, w_{n-2}; \alpha) = \ln |\sin \alpha| + G_2 \left(\sin \alpha, \frac{w_{n-1}}{\sin \alpha}, \frac{w_{n-2}}{\sin \alpha} \right) = C_2 = \text{const}. \quad (4.52)$$

Итак, найдены два первых интеграла (4.32), (4.52) независимой системы третьего порядка (4.17)–(4.19). Осталось указать по одному первому интегралу для систем (4.20) (их всего $n - 3$), и дополнительный первый интеграл, «привязывающий» уравнение (4.21).

Действительно, искомые первые интегралы примут вид

$$\Theta_{s+2}(w_s; \beta_s) = \frac{\sqrt{1 + w_s^2}}{\sin \beta_s} = C''_{s+2} = \text{const}, \quad s = 1, \dots, n - 3, \quad (4.53)$$

$$\Theta_n(w_{n-3}, \dots, w_1; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_{n-2}) = C''_n = \text{const}; \quad (4.54)$$

при этом в левую часть равенства (4.54) вместо C_{n-2} , C_{n-1} необходимо подставить интегралы (4.53) при $s = n - 4$ и $s = n - 3$.

Теорема 4.2. Система (4.17)–(4.21) порядка $2(n - 1)$ обладает достаточным количеством (n) независимых первых интегралов (4.32), (4.52), (4.53), (4.54).

Итак, в рассматриваемом случае система динамических уравнений (2.2), (2.7) при условии (4.4) имеет $1 + (n - 1)(n - 2)/2 + n = (n^2 - n + 4)/2$, $n > 2$, инвариантных соотношений: имеют-ся аналитическая неинтегрируемая связь вида (3.7), циклические первые интегралы вида (3.5), (3.6), первый интеграл вида (4.32), также имеется первый интеграл, выражающийся соотношениями (4.45)–(4.52), являющийся трансцендентной функцией фазовых переменных (также в смысле комплексного анализа) и выражающийся через конечную комбинацию элементарных функций, наконец, трансцендентные первые интегралы вида (4.53), (4.54) (см. [8, 9, 13, 24]).

Теорема 4.3. Система (2.2), (2.7) при условиях (3.7), (4.4), (3.5), (3.6) обладает полным набором инвариантных соотношений, состоящим из $(n^2 - n + 4)/2$, $n > 2$, соотношений, n из которых являются трансцендентными функциями с точки зрения комплексного анализа. При этом все соотношения выражаются через конечную комбинацию элементарных функций.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Арнольд В. И., Козлов В. В., Нейшадт А. И. Математические аспекты классической и небесной механики. — М.: ВИНТИ, 1985.
2. Бурбаки Н. Группы и алгебры Ли. — М.: Мир, 1972.
3. Георгиевский Д. В., Шамолин М. В. Кинематика и геометрия масс твердого тела с неподвижной точкой в $\mathbb{R}^n$ // Докл. РАН. — 2001. — 380, № 1. — С. 47–50.
4. Георгиевский Д. В., Шамолин М. В. Обобщенные динамические уравнения Эйлера для твердого тела с неподвижной точкой в $\mathbb{R}^n$ // Докл. РАН. — 2002. — 383, № 5. — С. 635–637.
5. Георгиевский Д. В., Шамолин М. В. Первые интегралы уравнений движения обобщенного гироскопа в $\mathbb{R}^n$ // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. Мех. — 2003. — № 5. — С. 37–41.
6. Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т. Современная геометрия. Методы и приложения. — М.: Наука, 1979.
7. Козлов В. В. Интегрируемость и неинтегрируемость в гамильтоновой механике // Усп. мат. наук. — 1983. — 38, № 1. — С. 3–67.
8. Пуанкаре А. О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями. — М.-Л.: ОГИЗ, 1947.
9. Трофимов В. В., Шамолин М. В. Геометрические и динамические инварианты интегрируемых гамильтоновых и диссипативных систем // Фундам. прикл. мат. — 2010. "16, № 4. — С. 3–229.
10. Чаплыгин С. А. О движении тяжелых тел в несжимаемой жидкости // В кн.: Полн. собр. соч. Т. 1. — Л.: Изд-во АН СССР, 1933. — С. 133–135.
11. Чаплыгин С. А. Избранные труды. — М.: Наука, 1976.
12. Шамолин М. В. Об интегрируемом случае в пространственной динамике твердого тела, взаимодействующего со средой // Изв. РАН. Мех. тв. тела. — 1997. — № 2. — С. 65–68.

13. Шамолин М. В. Об интегрируемости в трансцендентных функциях// Усп. мат. наук. — 1998. — 53, № 3. — С. 209–210.
14. Шамолин М. В. Новые интегрируемые по Якоби случаи в динамике твердого тела, взаимодействующего со средой// Докл. РАН. — 1999. — 364, № 5. — С. 627–629.
15. Шамолин М. В. Интегрируемость по Якоби в задаче о движении четырехмерного твердого тела в сопротивляющейся среде// Докл. РАН. — 2000. — 375, № 3. — С. 343–346.
16. Шамолин М. В. Об одном интегрируемом случае уравнений динамики на $\mathfrak{so}(4) \times \mathbb{R}^4$ // Усп. мат. наук. — 2005. 60, № 6. — С. 233–234.
17. Шамолин М. В. Случай полной интегрируемости в пространственной динамике твердого тела, взаимодействующего со средой, при учете вращательных производных момента сил по угловой скорости// Докл. РАН. — 2005. — 403, № 4. — С. 482–485.
18. Шамолин М. В. Методы анализа динамических систем с переменной диссипацией в динамике твердого тела. — М.: Экзамен, 2007.
19. Шамолин М. В. Случай полной интегрируемости в динамике на касательном расслоении двумерной сферы// Усп. мат. наук. — 2007. — 62, № 5. — С. 169–170.
20. Шамолин М. В. Динамические системы с переменной диссипацией: подходы, методы, приложения// Фундам. прикл. мат. — 2008. — 14, № 3. — С. 3–237.
21. Шамолин М. В. Новые интегрируемые случаи в динамике тела, взаимодействующего со средой, при учете зависимости момента силы сопротивления от угловой скорости// Прикл. мат. мех. — 2008. — 72, № 2. — С. 273–287.
22. Шамолин М. В. Классификация случаев полной интегрируемости в динамике симметричного четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле// Совр. мат. прилож. — 2009. — 65. — С. 132–142.
23. Шамолин М. В. Новые случаи полной интегрируемости в динамике динамически симметричного четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле// Докл. РАН. — 2009. — 425, № 3. — С. 338–342.
24. Шамолин М. В. Новые случаи интегрируемости в пространственной динамике твердого тела// Докл. РАН. — 2010. — 431, № 3. — С. 339–343.
25. Шамолин М. В. Случай полной интегрируемости в динамике четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле// Усп. мат. наук. — 2010. — 65, № 1. — С. 189–190.
26. Шамолин М. В. Новый случай интегрируемости в динамике четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле// Докл. РАН. — 2011. — 437, № 2. — С. 190–193.
27. Шамолин М. В. Полный список первых интегралов в задаче о движении четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле при наличии линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2011. — 440, № 2. — С. 187–190.
28. Шамолин М. В. Новый случай интегрируемости в динамике четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле при наличии линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2012. — 444, № 5. — С. 506–509.
29. Шамолин М. В. Новый случай интегрируемости в пространственной динамике твердого тела, взаимодействующего со средой, при учете линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2012. — 442, № 4. — С. 479–481.
30. Шамолин М. В. Сопоставление случаев полной интегрируемости в динамике двумерного, трехмерного и четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле// Совр. мат. прилож. — 2012. — 76. — С. 84–99.

М. В. Шамолин

Институт механики МГУ им. М. В. Ломоносова, Москва

E-mail: shamolin@rambler.ru



МОДЕЛИРОВАНИЕ ВНУТРЕННЕЙ СТРУКТУРЫ ТРОПИЧЕСКИХ ЦИКЛОНОВ: УРАВНЕНИЕ ПОТОКА НА ТРАЕКТОРИИ ВЕТРА

© 2017 г. Х. ФУДЖИТА ЯШИМА

Аннотация. Рассмотрена система уравнений, описывающая движение воздуха внутри тропических циклонов, включая следствия конденсации водяного пара. Исследована система нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений на траектории ветра на плоскости радиальных и вертикальных переменных. Доказана однозначная разрешимость системы дифференциальных уравнений на удобном для моделирования тропических циклонов отрезке.

Ключевые слова: тропический циклон, движение воздуха, конденсация водяного пара, уравнение переноса, априорные оценки, однозначная разрешимость.

AMS Subject Classification: 86A10, 76N10

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение	118
2. Система уравнений с частными производными	119
3. Система уравнений на траекториях ветра	120
4. О существовании и единственности решения	122
5. Замечания	130
Список литературы	130

1. ВВЕДЕНИЕ

Хорошо известно, что главной причиной образования и развития тропических циклонов (ТЦ) является конденсация водяного пара, которая посредством скрытой теплоты нагревает воздух и вызывает его восходящее движение. Многие исследования посвящены моделированию ТЦ, основывающемуся на описании этого процесса (см. [4–6, 8] и т. д.). К сожалению, модель, описывающая в совершенстве внутреннюю структуру ТЦ с механическими и термодинамическими процессами, еще не построена.

В данной работе предлагается система уравнений, описывающая движение воздуха внутри ТЦ, включая следствие конденсации водяного пара. В предположении осевой симметрии и отсутствия вязкости и теплопроводности записываются уравнения для радиальной, касательной и вертикальной компонент скорости ветра, температуры и плотности воздуха, в которых независимыми переменными служат расстояние r от центра ТЦ и высота z . Если считать радиальную и вертикальную компоненты компонентами скорости переноса на плоскости (r, z) , то можно рассмотреть систему уравнений переноса. Во второй части статьи будет рассмотрена система обыкновенных дифференциальных уравнений на траектории и доказана теорема о существовании и единственности решения на достаточно длинном отрезке, что позволит использовать решение для изучения явлений в тропосфере как ТЦ. Для формулировки уравнений на траектории была использована идея работы [7].

2. СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

Пусть (r, ϑ, z) — цилиндрические координаты. Обозначаем через v_r , v_ϑ и v_z радиальную, касательную и вертикальную компоненты скорости, а через ϱ и T — плотность и температуру. В предположении осевой симметрии и отсутствии вязкости и теплопроводности нетрудно вывести из основных уравнений гидродинамики (см. [2]) систему уравнений с частными производными для движения воздуха в ТЦ:

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial(r \varrho v_r)}{\partial r} + \frac{\partial(\varrho v_z)}{\partial z} = -H_{tr}, \quad (2.1)$$

$$\varrho \left(\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{1}{r} v_\vartheta^2 + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} \right) = -R_1 \frac{\partial(\varrho T)}{\partial r} + l_0 \varrho v_\vartheta - \varepsilon_1(z) v_r, \quad (2.2)$$

$$\varrho \left(\frac{\partial v_\vartheta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\vartheta}{\partial r} + \frac{1}{r} v_\vartheta v_r + v_z \frac{\partial v_\vartheta}{\partial z} \right) = -l_0 \varrho v_r - \varepsilon_1(z) v_\vartheta, \quad (2.3)$$

$$\varrho \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = -R_1 \frac{\partial(\varrho T)}{\partial z} - g(\varrho + \Sigma), \quad (2.4)$$

$$\varrho c_v \left(\frac{\partial T}{\partial t} + v_r \frac{\partial T}{\partial r} + v_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) = -R_1 \varrho T \left(\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r} v_r + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) + L_{tr} H_{tr}, \quad (2.5)$$

где R_1 — газовая постоянная, g — ускорение силы тяжести, c_v — удельная теплоемкость при постоянном объеме, $l_0 = 2|\omega| \sin \varphi_0$, ω — угловая скорость вращения Земли, φ_0 — широта центра ТЦ, $\varepsilon_1(z)$ — коэффициент трения с поверхностью моря, L_{tr} — скрытая теплота, H_{tr} — количество фазового перехода водяного пара, Σ — количество жидкой и твердой воды.

Предполагаем, что H_{tr} задается выражением

$$H_{tr} = \left(\bar{\pi}_{vs}(T) \frac{d}{dz} \log \varrho - \frac{d}{dz} \bar{\pi}_{vs}(t) \right) [v_z]^+ \quad (2.6)$$

(см. [7]), где $\bar{\pi}_{vs}(T)$ — плотность насыщенного водяного пара при температуре T . Поскольку нам будет нужно использовать свойства функции $\bar{\pi}_{vs}(T)$, фиксируем здесь ее вид:

$$\bar{\pi}_{vs}(T) = \frac{1}{R_1 T} E_0 \cdot 10^{\frac{7.63(T-273.15)}{T-31.25}}, \quad E_0 = 6,107 \text{ мбар} \quad (2.7)$$

(см. [3]). Кроме того, для того, чтобы не усложнять рассуждение, в этой работе считаем L_{tr} положительной постоянной. Коэффициент трения $\varepsilon_1(z)$ неотрицателен и при больших z близок к нулю. Напомним также, что газовая постоянная R_1 и удельная теплоемкость $c_v = \frac{5}{2} R_1$ достаточно велики (см. [1]).

Определим область, в которой рассматривается система уравнений (2.1)–(2.5). Для моделирования ТЦ удобно рассматривать область

$$\Omega = \left\{ (r, \vartheta, z) \in \mathbb{R}_+ \times [0, 2\pi[\times \mathbb{R} \mid (r, z) \in \Gamma_{r,z}, 0 \leq \vartheta < 2\pi \right\}, \quad (2.8)$$

$$\Gamma_{r,z} = \left\{ (r, z) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \mid 0 < z < \bar{z}_1, \Lambda_0(z) < r < \Lambda_1 \right\}, \quad (2.9)$$

$$0 < \Lambda_0(z) < \Lambda_1 < \infty \quad \forall z \in [0, \bar{z}_1].$$

Здесь через $\bar{z}_1$ и Λ_1 обозначены высота и радиус активной зоны ТЦ, а область $\mathcal{O} = \{0 \leq r < \Lambda_0(z)\}$ соответствует зоне глаза. Например, можно взять

$$\Lambda_0(0) = 10 \text{ км}, \quad \Lambda_1 = 200 \text{ км}, \quad \bar{z}_1 = 12 \text{ км};$$

так как вопрос об определении зоны глаза является одной из наиболее важных задач моделирования ТЦ, оставим функцию $\Lambda_0(z)$ не вполне определенной.

Для того чтобы определить краевые условия, предположим, что

$$v_r \leq 0 \quad \text{на } \Gamma_-^{(1)}, \quad v_r \geq 0 \quad \text{на } \Gamma_+^{(1)}, \quad (2.10)$$

где

$$\Gamma_-^{(1)} = \left\{ r = \Lambda_1, 0 < z < \bar{\zeta} \right\}, \quad \Gamma_+^{(1)} = \left\{ r = \Lambda_1, \bar{\zeta} < z < \bar{z}_1 \right\}, \quad (2.11)$$

с некоторым $\bar{\zeta}$, $0 < \bar{\zeta} < \bar{z}_1$.

Однако решить систему уравнений (2.1)–(2.5) в Ω (или в другой области) весьма трудно. Поэтому рассмотрим приближенную проблему, полученную разделением временной эволюции и пространственной структуры; этот метод использовался в [7]. Введем параметр $\alpha(t)$ и положим

$$v_r(t, r, z) = \alpha(t)w_r(t; r, z), \quad v_\vartheta(t, r, z) = \alpha(t)w_\vartheta(t; r, z), \quad v_z(t, r, z) = \alpha(t)w_z(t; r, z). \quad (2.12)$$

Предположим, что

$$\frac{\partial w_r}{\partial t} \approx 0, \quad \frac{\partial w_z}{\partial t} \approx 0, \quad \frac{\partial w_\vartheta}{\partial t} \approx 0, \quad \frac{\partial \varrho}{\partial t} \approx 0, \quad \frac{\partial T}{\partial t} \approx 0. \quad (2.13)$$

Будем изучать систему уравнений для пространственной структуры, а для временной эволюции ограничиваемся упоминанием возможной постановки задачи. Для $\alpha(t)$ можно предложить уравнение

$$M_1 \frac{d}{dt} \alpha(t) = 2\pi \Lambda_1 \left[\int_0^{\bar{\zeta}} [p_{ex}(z) - p_{in}(z)] dz + \int_{\bar{\zeta}}^{\bar{z}_1} [p_{in}(z) - p_{ex}(z)] dz \right] - g \Sigma_1(t), \quad (2.14)$$

где $p_{ex}(z)$ и $p_{in}(z)$ — внешнее и внутреннее давления, M_1 — масса воздуха в области Ω , $\Sigma_1(t)$ — масса жидкой и твердой воды в Ω . Для $\Sigma_1(t)$ можно взять выражение

$$\Sigma_1(t) = \int_{\Gamma_{r,z}} 2\pi r \Sigma(t; r, z) dr dz = \int_0^t \varphi(t-s) \int_{\Gamma_{r,z}} 2\pi r H_{tr}(s; r, z) dr dz ds, \quad (2.15)$$

где $\varphi(\tau)$ представляет собой вероятность того, что капли (или кусочки льда) остаются в атмосфере в течение времени τ после их создания.

Для пространственной структуры, полагая

$$H_{tr} = h_{tr}[\alpha(t)w_z]^+, \quad h_{tr} = \bar{\pi}_{vs}(t) \frac{d}{dz} \log \varrho - \frac{d}{dz} \bar{\pi}_{vs}(T) \quad (2.16)$$

и предполагая, что $\alpha(t) > 0$, имеем

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(r\varrho w_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(r\varrho w_z)}{\partial z} = -h_{tr}[w_z]^+, \quad (2.17)$$

$$\varrho \alpha^2(t) \left(w_r \frac{\partial w_r}{\partial r} - \frac{1}{r} w_\vartheta^2 + w_z \frac{\partial w_r}{\partial z} \right) = -R_1 \frac{\partial}{\partial r} (\varrho T) + l_0 \varrho \alpha(t) w_\vartheta - \varepsilon_1(z) \alpha(t) w_r, \quad (2.18)$$

$$\varrho \alpha(t) \left(w_r \frac{\partial w_\vartheta}{\partial r} + \frac{1}{r} w_\vartheta w_r + w_z \frac{\partial w_\vartheta}{\partial z} \right) = -l_0 \varrho w_r - \varepsilon_1(z) w_\vartheta, \quad (2.19)$$

$$\varrho \alpha^2(t) \left(w_r \frac{\partial w_z}{\partial r} + w_z \frac{\partial w_z}{\partial z} \right) = -R_1 \frac{\partial}{\partial z} (\varrho T) - g \varrho, \quad (2.20)$$

$$\varrho c_v \left(w_r \frac{\partial T}{\partial r} + w_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) = -R_1 \varrho T \left(\frac{\partial w_r}{\partial r} + \frac{1}{r} w_r + \frac{\partial w_z}{\partial z} \right) + L_{tr} h_{tr}[w_z]^+. \quad (2.21)$$

Так как при фиксированном t функции w_r , w_ϑ , w_z , ϱ , T зависят только от (r, z) , можно (и удобно) рассмотреть систему уравнений (2.17)–(2.21) в области $\Gamma_{r,z}$. Требуется также задать краевые условия на границе области $\Gamma_{r,z}$ и кроме обычных условий выбрать условия входа на $\Gamma_-^{(1)}$ или условия выхода на $\Gamma_+^{(1)}$.

3. СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ НА ТРАЕКТОРИЯХ ВЕТРА

Отметим, что каждое из уравнений (2.17)–(2.21) содержит член переноса

$$w_r \frac{\partial}{\partial r} \cdot + w_z \frac{\partial}{\partial z} \cdot.$$

Если положить

$$q_r = \frac{w_r}{\sqrt{w_r^2 + w_z^2}}, \quad q_z = \frac{w_z}{\sqrt{w_r^2 + w_z^2}}$$

и определить функцию $\gamma(s) = (\gamma_r(s), \gamma_z(s))$ соотношениями

$$\frac{d}{ds}\gamma_r(s) = q_r(\gamma(s)), \quad \frac{d}{ds}\gamma_z(s) = q_z(\gamma(s)),$$

то получим

$$w_r \frac{\partial}{\partial r} \varphi(r, z) + w_z \frac{\partial}{\partial z} \varphi(r, z) = w \frac{d}{ds} \varphi(\gamma(s)) \equiv w \frac{d}{ds} \varphi(s). \quad (3.1)$$

Конечно, в уравнениях (2.17)–(2.21) функции q_r , q_z , а потому и $\gamma(s)$ неизвестны. Нас интересует также система уравнений на траекториях $\gamma(s)$, определенных заданными функциями q_r , q_z . Так как $\alpha(t)$ играет только роль параметра в (2.17)–(2.21), будем писать просто α . Если предположить, что $\varrho(s) > 0$, $w(s) > 0$ и $q_z(s) \geq 0$ и преобразуем уравнения (2.17)–(2.21) с помощью (3.1), то на $\gamma = \gamma(s)$ имеем систему уравнений для неизвестных функций ϱ , T , w_ϑ и w :

$$\alpha \left(\frac{dw_\vartheta(s)}{ds} + \frac{q_r(s)}{r(s)} w_\vartheta(s) \right) = -l_0 q_r(s) - \frac{\varepsilon_1(z(s))}{\varrho(s)w(s)} w_\vartheta(s), \quad (3.2)$$

$$\frac{d}{ds} (w(s) \varrho(s) r(s) J(s)) = -q_z(s) w(s) h_{tr}(s) r(s) J(s), \quad (3.3)$$

$$\varrho(s) c_v \left(\frac{dT(s)}{ds} \right) - R_1 T(s) \left(\frac{d\varrho(s)}{ds} \right) = (R_1 T(s) + L_{tr}) q_z(s) h_{tr}(s), \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned} \alpha^2 \varrho(s) \left(w(s) \frac{dw(s)}{ds} - \frac{q_r(s)}{r(s)} w_\vartheta(s)^2 \right) = & -R_1 \frac{d}{ds} (\varrho(s) T(s)) + \\ & + q_r(s) \alpha \varrho(s) l_0 w_\vartheta(s) - \left[\varepsilon_1(z(s)) \alpha q_r(s)^2 w(s) + q_z(s) g \varrho(s) \right], \end{aligned} \quad (3.5)$$

где

$$r(s) = \gamma_r(s), \quad z(s) = \gamma_z(s),$$

а $2\pi r(s) J(s)$ представляет «секцию» кривой $\gamma(s)$, т.е. если $q \in C^1(\Gamma_{r,z}; \mathbb{R}^2)$, то

$$J(s) = \exp \left(\int_0^s \nabla \cdot q(s') ds' \right).$$

Уравнения (2.17)–(2.21) содержали неизвестные функции w_r и w_z . В системе (3.2)–(3.5) неизвестная функция w соответствует $\sqrt{w_r^2 + w_z^2}$, но $q_r w$ и $q_z w$, которые должны соответствовать w_r и w_z , не являются независимыми.

Для того чтобы изучать систему уравнений (3.2)–(3.5), предположим, что $\gamma(\cdot) = (\gamma_r(\cdot), \gamma_z(\cdot))$ — кривая класса $C^2([0, \tilde{s}_1]; \mathbb{R}^2)$, где $\tilde{s}_1 > 0$. Используем обозначение

$$q_r(s) = \frac{\gamma_r(s)}{ds}, \quad q_z(s) = \frac{\gamma_z(s)}{ds}, \quad \sqrt{q_r(s)^2 + q_z(s)^2} = 1 \quad \forall s \in [0, \tilde{s}_1].$$

Предположим, что

$$\min_{s \in [0, \tilde{s}_1]} \gamma_r(s) > 0, \quad \frac{\gamma_z(s)}{ds} = q_z(s) \geq 0 \quad \forall s \in [0, \tilde{s}_1], \quad \gamma_z(0) = z(0) \geq 0. \quad (3.6)$$

Для доказательства однозначной разрешимости удобно предположить, что $\gamma(\tilde{s}_1)$ не очень велико (см. выше (4.17)). Однако это только рабочая гипотеза, а существование решения будет доказано на отрезке $[0, \bar{s}_1]$, где $\bar{s}_1 \in]0, \tilde{s}_1]$.

Рассмотрим систему уравнений (3.2)–(3.5) на $\gamma = \gamma(s)$ с начальными условиями

$$w_\vartheta(0) = w_{\vartheta,0}, \quad \varrho(0) = \varrho_0 > 0, \quad T(0) = T_0 > 0, \quad w(0) = w_0 > 0. \quad (3.7)$$

Нам интересны случаи значений начальных условий, в частности, ϱ_0 и T_0 , которые действительно могут находиться в окрестности ТЦ. Поэтому, в дальнейшем, если потребуется, введем некоторые ограничения на их значения.

4. О СУЩЕСТВОВАНИИ И ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ

4.1. Близкие к решению функции. Для того, чтобы доказать существование и единственность решения системы уравнений (3.2)–(3.5), сначала обсудим функции $\varrho_{hs}^*(z)$ и $T_{hs}^*(z)$, которые представляют собой гидростатическое распределение плотности и температуры влажного воздуха с фазовым переходом водяного пара. Можно определять функции $\varrho_{hs}^*(z)$ и $T_{hs}^*(z)$, которые имеют значения ϱ_0 и T_0 в $z = \gamma_z(0) \equiv z_0$. Действительно, они определяются системой уравнений

$$\varrho_{hs}^* c_v \frac{dT_{hs}^*}{dz} - R_1 T_{hs}^* \frac{d\varrho_{hs}^*}{dz} = \left(R_1 T_{hs}^* + L_{tr} \right) \left(\bar{\pi}_{vs}(T_{hs}^*) \frac{d}{dz} \log \varrho_{hs}^* - \frac{d}{dz} \bar{\pi}_{vs}(T_{hs}^*) \right), \quad (4.1)$$

$$R_1 \frac{d}{dz} (\varrho_{hs}^* T_{hs}^*) = -g \varrho_{hs}^* \quad (4.2)$$

и условиями

$$\varrho_{hs}^*(z_0) = \varrho_0, \quad T_{hs}^*(z_0) = T_0. \quad (4.3)$$

Вычисление показывает, что если ϱ_0 и T_0 имеют нормальные значения (например $z_0 = 0$, $T_0 \approx 300$ К, $\varrho_0 \approx 1200$ г/см³), $\varrho_{hs}^*(z)$ и $T_{hs}^*(z)$ существуют (и $\varrho_{hs}^*(z) > 0$, $T_{hs}^*(z) > 0$) на промежутке $[0, z_1^*]$, где $z_1^* > 35$ км, а вертикальная структура ТЦ достигает не более 18 км.

Положив

$$h_{tr}^*(z) = \bar{\pi}_{vs}(T_{hs}^*(z)) \frac{d}{dz} \log \varrho_{hs}^*(z) - \frac{d}{dz} \bar{\pi}_{vs}(T_{hs}^*(z)), \quad (4.4)$$

определим функцию $\tilde{U}$, удовлетворяющую уравнению

$$\frac{d}{ds} \log(\tilde{U} r J) = -\frac{q_z h_{tr}^*(z)}{\varrho_{hs}^*} \equiv \tilde{f}_1 \quad \text{на} \quad \gamma = \{\gamma(s) \mid 0 \leq s \leq \tilde{s}_1\} \quad (4.5)$$

и начальному условию (при $s = 0$)

$$\tilde{U}(0) = \varrho_0 w_0. \quad (4.6)$$

Определим на γ также функцию $\tilde{w}_\vartheta$, которая является решением задачи Коши

$$\frac{d}{ds} \tilde{w}_\vartheta = -\left(\frac{q_r}{r} + \frac{\varepsilon_1(z)}{\alpha \tilde{U}} \right) \tilde{w}_\vartheta - \frac{l_0 q_r}{\alpha}, \quad \tilde{w}_\vartheta(0) = w_{\vartheta,0}. \quad (4.7)$$

Пусть

$$\tilde{V}(s) = R_1 \varrho_0 T_0 + \int_0^s \tilde{g}_1(s') ds', \quad \tilde{w}(s) = \log \frac{T_0^{c_v}}{\varrho_0^{R_1}} + \int_0^s \tilde{h}_1(s') ds', \quad (4.8)$$

где

$$\tilde{g}_1 = -\alpha^2 \tilde{U} \frac{d}{ds} \left(\frac{\tilde{U}}{\varrho_{hs}^*} \right) + \alpha^2 \varrho_{hs}^* \frac{q_r}{r} \tilde{w}_\vartheta^2 + \alpha q_r \varrho_{hs}^* l_0 \tilde{w}_\vartheta - \varepsilon_1(z) \alpha q_r^2 \frac{\tilde{U}}{\varrho_{hs}^*}, \quad (4.9)$$

$$\tilde{h}_1 = \frac{R_1 T_{hs}^* + L_{tr}}{\varrho_{hs}^* T_{hs}^*} q_z h_{tr}^*. \quad (4.10)$$

Определим функции $\tilde{\varrho}$, $\tilde{T}$, $\tilde{w}$, удовлетворяющие соотношениям

$$\tilde{U}(s) = \tilde{\varrho}(s) \tilde{w}(s), \quad \tilde{V}(s) = R_1 \tilde{\varrho}(s) \tilde{T}(s) + g \int_0^s q_z(s') \tilde{\varrho}(s') ds', \quad \tilde{w}(s) = \log \frac{\tilde{T}(s)^{c_v}}{\tilde{\varrho}(s)^{R_1}}. \quad (4.11)$$

Действительно, из третьего уравнения (4.11) вытекает, что

$$\tilde{\varrho}(s) = e^{-\tilde{w}(s)/R_1} \tilde{T}(s)^{c_v/R_1}. \quad (4.12)$$

Подставляя это равенство во второе уравнение (4.11), получим

$$R_1 e^{-\tilde{w}(s)/R_1} \tilde{T}(s)^{\frac{R_1 + c_v}{R_1}} + g \int_0^s q_z(s') e^{-\tilde{w}(s)/R_1} \tilde{T}(s')^{\frac{c_v}{R_1}} ds' = \tilde{V}(s).$$

Поэтому, полагая

$$\tilde{y}(s) = e^{-\tilde{w}(s)/R_1} \tilde{T}(s)^{\frac{R_1+c_v}{R_1}},$$

находим

$$\frac{d}{ds} \tilde{y}(s) = -\frac{g}{R_1} q_z(s) e^{-\tilde{w}(s)/(R_1+c_v)} \tilde{y}(s)^{\frac{c_v}{R_1+c_v}} + \frac{\tilde{g}_1(s)}{R_1}, \quad \tilde{y}(0) = \varrho_0 T_0. \quad (4.13)$$

Предположим, что на $[0, \tilde{s}_1]$ существует решение $\tilde{y}(s)$ задачи Коши (4.13). Таким образом, можно определить

$$\tilde{T}(s) = e^{\tilde{w}(s)/(R_1+c_v)} \tilde{y}(s)^{\frac{R_1}{R_1+c_v}},$$

и тогда $\tilde{\varrho}(s)$ и $\tilde{w}(s)$ определяются соотношением (4.12) и первым равенством (4.11).

4.2. Априорные оценки. Введем семейство расстояний

$$\kappa(\varphi_1, \varphi_2)(s) = \max \left(\sup_{0 \leq s' \leq s} |\varphi_1(s') - \varphi_2(s')|, \sup_{0 \leq s' \leq s} \left| \frac{d}{ds'} \varphi_1(s') - \frac{d}{ds'} \varphi_2(s') \right| \right) \quad (4.14)$$

для $0 \leq s \leq \tilde{s}_1$ и запишем

$$\kappa_{\tilde{\varrho}}(s) = \kappa(\tilde{\varrho}, \varrho_{hs}^*)(s), \quad \kappa_{\tilde{T}}(s) = \kappa(\tilde{T}, T_{hs}^*)(s), \quad \kappa_{\tilde{w}}(s) = \kappa \left(\tilde{w}, \frac{\tilde{U}}{\varrho_{hs}^*} \right)(s), \quad (4.15)$$

$$\mathcal{A}_\kappa(s) = \left\{ (\varrho, T, w) \mid \kappa(\varrho, \tilde{\varrho})(s') \leq \kappa_{\tilde{\varrho}}(s'), \kappa(T, \tilde{T})(s') \leq \kappa_{\tilde{T}}(s'), \kappa(w, \tilde{w})(s') \leq \kappa_{\tilde{w}}(s') \right\}. \quad (4.16)$$

Предположим, что если $(\varrho, T, w) \in \mathcal{A}_\kappa(\tilde{s}_1)$, то

$$\varrho(s) \geq \frac{1}{2} \tilde{\varrho}(s), \quad T(s) \geq \frac{1}{2} \tilde{T}(s), \quad w(s) \geq \frac{1}{2} \tilde{w}(s) \quad \forall s \in [0, \tilde{s}_1]. \quad (4.17)$$

Предположение (4.17) формально очень ограничительно, однако, как было указано выше, мы в настоящей работе предполагаем выполненным условие (4.17), которое не ограничивает полезных для моделирования ТЦ уравнений. На самом деле в доказательстве существования решения системы (3.2)–(3.5) будем использовать тот факт, что решение $(w_\vartheta, \varrho, T, w)$ будет так близко к $(\tilde{w}_\vartheta, \tilde{\varrho}, \tilde{T}, \tilde{w})$, что $(\varrho, T, w) \in \mathcal{A}_\kappa(s)$. Действительно, установим следующие априорные оценки решения.

Предположение (а). На отрезке $[0, s]$ ($s \in]0, \tilde{s}_1]$) существует решение $(w_\vartheta, \varrho, T, w)$ системы (3.2)–(3.5) с начальными условиями (3.7), причем $(\varrho, T, w) \in \mathcal{A}_\kappa(s)$.

Для решения $(w_\vartheta, \varrho, T, w)$ нашей задачи положим

$$U(s) = \varrho(s)w(s), \quad V(s) = R_1 \varrho(s)T(s) + g \int_0^s q_z(s') \varrho(s') ds', \quad w(s) = \log \frac{T(s)^{c_v}}{\varrho(s)^{R_1}}. \quad (4.18)$$

Из (3.3)–(3.5) и (4.5), (4.8) вытекает, что U, V, W удовлетворяют уравнениям

$$\frac{d}{ds} (\log U - \log \tilde{U}) = f_1 - \tilde{f}_1, \quad \frac{d}{ds} (V - \tilde{V}) = g_1 - \tilde{g}_1, \quad \frac{d}{ds} (W - \tilde{w}) = h_1 - \tilde{h}_1, \quad (4.19)$$

где

$$f_1 = -\frac{q_z}{\varrho} h_{tr}, \quad g_1 = -\alpha^2 U \frac{d}{ds} w + \alpha^2 \varrho \frac{q_r}{r} w_\vartheta^2 + \alpha q_r \varrho l_0 w_\vartheta - \varepsilon_1(z) \alpha q_r^2 w, \quad h_1 = \frac{R_1 T + L_{tr}}{\varrho T} q_z h_{tr}, \quad (4.20)$$

а $\tilde{f}_1, \tilde{g}_1, \tilde{h}_1$ — определенные в (4.5), (4.9), (4.10) функции; видно, что

$$\log U(0) - \log \tilde{U}(0) = 0, \quad V(0) - \tilde{V}(0) = 0, \quad W(0) - \tilde{w}(0) = 0.$$

Для функций $\varphi = \varphi(\varrho, T, w)$ будем использовать также обозначение

$$[\varphi]_\kappa(s) = \sup_{\substack{(\varrho, T, w) \in \mathcal{A}_\kappa(s), \\ s' \in [0, s]}} |\varphi(\varrho, T, w)(s')|. \quad (4.21)$$

Лемма 1. В предположении (а) имеем

$$\left| w_{\vartheta}(s) - \tilde{w}_{\vartheta}(s) \right| \leq \int_0^s \Phi_{\vartheta} \left(\varrho_{hs}^* \kappa_{\tilde{w}} + [w]_{\kappa} \kappa_{\tilde{\varrho}} \right) ds', \quad (4.22)$$

$$\begin{aligned} \left| \frac{d}{ds} w_{\vartheta}(s) - \frac{d}{ds} \tilde{w}_{\vartheta}(s) \right| &\leq \frac{2\varepsilon_1(z) \tilde{w}_{\vartheta}}{\alpha \tilde{U}} \left[\frac{1}{\varrho w} \right]_{\kappa} \left(\varrho_{hs}^* \kappa_{\tilde{w}} + [w]_{\kappa} \kappa_{\tilde{\varrho}} \right) + \\ &+ \left(\frac{|q_r|}{r} + \frac{\varepsilon_1(z)}{\alpha} \left[\frac{1}{\varrho w} \right]_{\kappa} \right) \int_0^s \Phi_{\vartheta} \left(\varrho_{hs}^* \kappa_{\tilde{w}} + [w]_{\kappa} \kappa_{\tilde{\varrho}} \right) ds', \end{aligned} \quad (4.23)$$

где

$$\Phi_{\vartheta} = \frac{2\varepsilon_1(z) \tilde{w}_{\vartheta}}{\alpha \tilde{U}} \left[\frac{1}{\varrho w} \right]_{\kappa} \exp \left(- \int_{s'}^s \left(\frac{q_r}{r} + \frac{\varepsilon_1(z)}{\alpha [\varrho w]_{\kappa}} \right) ds'' \right).$$

Доказательство. Замечаем, что из (3.2), (3.7), (4.7) следует

$$w_{\vartheta}(s) - \tilde{w}_{\vartheta}(s) = \frac{1}{\alpha} \int_0^s \varepsilon_1(z) \left(\frac{1}{\tilde{U}} - \frac{1}{\varrho w} \right) \tilde{w}_{\vartheta} \exp \left(- \int_{s'}^s \left(\frac{q_r}{r} + \frac{\varepsilon_1(z)}{\alpha \varrho w} \right) ds'' \right) ds'. \quad (4.24)$$

Итак, неравенства (4.22) и (4.23) вытекают из (4.24) и предположения (а). $\square$

Лемма 2. Если положить

$$y(s) = e^{-w(s)/R_1} T(s)^{\frac{R_1 + c_v}{R_1}},$$

то в предположении (а) имеем

$$\left| y(s)^{\frac{R_1}{R_1 + c_v}} - \tilde{y}(s)^{\frac{R_1}{R_1 + c_v}} \right| \leq \frac{1}{R_1 + c_v} \int_0^s \Pi_y(s') ds', \quad (4.25)$$

$$\left| \frac{d}{ds} y(s)^{\frac{R_1}{R_1 + c_v}} - \frac{d}{ds} \tilde{y}(s)^{\frac{R_1}{R_1 + c_v}} \right| \leq \frac{\Pi_y(s)}{R_1 + c_v}, \quad (4.26)$$

где

$$\begin{aligned} \Pi_y(s) &= \frac{g \varrho_0^{\frac{R_1}{R_1 + c_v}} q_z(s)}{(R_1 + c_v) T_0^{\frac{c_v}{R_1 + c_v}}} \int_0^s \left(\varphi_h^{\varrho} \kappa_{\tilde{\varrho}} + \varphi_h^T \kappa_{\tilde{T}} \right) ds' + \\ &+ \frac{c_v |\tilde{g}_1|}{R_1 + c_v} \left[\frac{1}{\varrho T} \right]_{\kappa}^{\frac{c_v}{R_1 + c_v}} \left(\left[\frac{1}{\varrho} \right]_{\kappa} \kappa_{\tilde{\varrho}} + \left[\frac{1}{T} \right]_{\kappa} \kappa_{\tilde{T}} \right) + \\ &+ \left[\frac{1}{\varrho T} \right]_{\kappa}^{\frac{c_v}{R_1 + c_v}} \left(\Phi_g^w \kappa_{\tilde{w}} + \Phi_g^{\varrho} \kappa_{\tilde{\varrho}} + \Phi_g^1 \int_0^s \Phi_{\vartheta} \left(\varrho_{hs}^* \kappa_{\tilde{w}} + [w]_{\kappa} \kappa_{\tilde{\varrho}} \right) ds' + \right. \\ &\quad \left. + \Phi_g^2 \left(\int_0^s \Phi_{\vartheta} \left(\varrho_{hs}^* \kappa_{\tilde{w}} + [w]_{\kappa} \kappa_{\tilde{\varrho}} \right) ds' \right)^2 \right), \end{aligned}$$

а Φ_g^w , Φ_g^{ϱ} , φ_h^{ϱ} , φ_h^T , $\tilde{g}_1$, Φ_g^1 — функции, определенные в (4.28), (4.29), (4.9).

Доказательство. Аналогично (4.13) имеем

$$\frac{d}{ds} y(s) = -\frac{g}{R_1} q_z(s) e^{-w(s)/(R_1 + c_v)} y(s)^{\frac{c_v}{R_1 + c_v}} + \frac{g_1(s)}{R_1}, \quad y(0) = \varrho_0 T_0;$$

ПОЭТОМУ

$$\begin{aligned} y(s)^{\frac{R_1}{R_1+c_v}} - \tilde{y}(s)^{\frac{R_1}{R_1+c_v}} = & -\frac{g}{R_1+c_v} \int_0^s q_z(s') \frac{\varrho_0^{\frac{R_1}{R_1+c_v}}}{T_0^{\frac{c_v}{R_1+c_v}}} \left(\exp\left(-\frac{H_1(s')}{R_1+c_v}\right) - \exp\left(-\frac{\tilde{h}_1(s')}{R_1+c_v}\right) \right) ds' + \\ & + \frac{1}{R_1+c_v} \int_0^s \left[y(s')^{\frac{-c_v}{R_1+c_v}} \left(g_1(s') - \tilde{g}_1(s') \right) + \tilde{g}_1(s') \left(y(s')^{\frac{-c_v}{R_1+c_v}} - \tilde{y}(s')^{\frac{-c_v}{R_1+c_v}} \right) \right] ds', \end{aligned} \quad (4.27)$$

где

$$H_1(s) = \int_0^s h_1(s') ds', \quad \tilde{h}_1(s) = \int_0^s \tilde{h}_1(s') ds'.$$

Из (4.9) и (4.20) следует, что

$$\begin{aligned} & \left| g_1(s) - \tilde{g}_1(s) \right| \leq \\ & \leq \Phi_g^w \kappa_{\tilde{w}} + \Phi_g^{\varrho} \kappa_{\tilde{\varrho}} + \Phi_g^1 \int_0^s \Phi_{\vartheta} \left(\varrho_{hs}^* \kappa_{\tilde{w}} + [w]_{\kappa} \kappa_{\tilde{\varrho}} \right) ds' + \Phi_g^2 \left(\int_0^s \Phi_{\vartheta} \left(\varrho_{hs}^* \kappa_{\tilde{w}} + [w]_{\kappa} \kappa_{\tilde{\varrho}} \right) ds' \right)^2, \end{aligned} \quad (4.28)$$

где

$$\begin{aligned} \Phi_g^w &= 2 \left(\alpha^2 \left[\left| \frac{dw}{ds} \right| \right]_{\kappa} \varrho_{hs}^* + \alpha^2 \tilde{U} + \alpha \varepsilon_1(z) |q_r|^2 \right), \\ \Phi_g^{\varrho} &= 2 \left(\alpha^2 \left[\left| \frac{dw}{ds} \right| \right]_{\kappa} [w]_{\kappa} + \alpha^2 \frac{|q_r|}{r} \left| \tilde{w}_{\vartheta} \right|^2 + \alpha l_0 |q_r| \left| \tilde{w}_{\vartheta} \right| \right), \\ \Phi_g^1 &= 2\alpha^2 [\varrho]_{\kappa} \frac{|q_r|}{r} \left| \tilde{w}_{\vartheta} \right| + \alpha l_0 |q_r| [\varrho]_{\kappa}, \quad \Phi_g^2 = \alpha^2 [\varrho]_{\kappa} \frac{|q_r|}{r}. \end{aligned}$$

С другой стороны, из (2.16), (4.4), (4.10) и (4.20) с учетом соотношения

$$q_z \frac{d}{dz} = \frac{d}{ds}$$

находим

$$\left| \exp\left(-\frac{H_1(s)}{R_1+c_v}\right) - \exp\left(-\frac{\tilde{h}_1(s)}{R_1+c_v}\right) \right| \leq \frac{2 \exp\left(\frac{[-H_1]_{\kappa}}{R_1+c_v}\right)}{R_1+c_v} \int_0^s \left(\varphi_h^{\varrho} \kappa_{\tilde{\varrho}} + \varphi_h^T \kappa_{\tilde{T}} \right) ds', \quad (4.29)$$

где

$$\begin{aligned} \varphi_h^{\varrho} &= h_{tr}^* \left[\frac{1}{\varrho^2} \right]_{\kappa} \left(R_1 + L_{tr} \left[\frac{1}{T} \right]_{\kappa} \right) + \left(R_1 \left[\frac{1}{\varrho} \right]_{\kappa} + L_{tr} \left[\frac{1}{\varrho T} \right]_{\kappa} \right) [\bar{\pi}_{vs}(t)]_{\kappa} \left(\left[\frac{1}{\varrho} \right]_{\kappa} + \left[\frac{1}{\varrho^2} \right]_{\kappa} \left| \frac{d\varrho_{hs}^*}{ds} \right| \right), \\ \varphi_h^T &= L_{tr} \left[\frac{1}{T^2} \right]_{\kappa} \left[\frac{1}{\varrho} \right]_{\kappa} h_{tr}^* + \left(R_1 \left[\frac{1}{\varrho} \right]_{\kappa} + L_{tr} \left[\frac{1}{\varrho T} \right]_{\kappa} \right) \times \\ & \quad \times \left(\left[\frac{d\bar{\pi}_{vs}(t)}{dT} \right]_{\kappa} \left(1 + \left[\left| \frac{d \log \varrho}{ds} \right| \right]_{\kappa} \right) + \left[\frac{d^2 \bar{\pi}_{vs}(t)}{dT^2} \right]_{\kappa} \left| \frac{dT_{hs}^*}{ds} \right| \right). \end{aligned}$$

Используя соотношения $y(s) = \varrho(s)T(s)$, $\tilde{y}(s) = \tilde{\varrho}(s)\tilde{T}(s)$, из (4.27), (4.28), (4.29) получим (4.25) и (4.26). $\square$

Лемма 3. В предположении (а) имеем

$$\left| T(s) - \tilde{T}(s) \right| \leq \frac{1}{R_1 + c_v} \Psi_T^0(\kappa_{\tilde{\varrho}}, \kappa_{\tilde{T}}, \kappa_{\tilde{w}})(s), \quad (4.30)$$

$$\left| \frac{d}{ds} T(s) - \frac{d}{ds} \tilde{T}(s) \right| \leq \frac{1}{R_1 + c_v} \Psi_T^1(\kappa_{\tilde{\varrho}}, \kappa_{\tilde{T}}, \kappa_{\tilde{w}})(s), \quad (4.31)$$

$$\left| \varrho(s) - \tilde{\varrho}(s) \right| \leq \frac{1}{R_1 + c_v} \Psi_{\varrho}^0(\kappa_{\tilde{\varrho}}, \kappa_{\tilde{T}}, \kappa_{\tilde{w}})(s), \quad (4.32)$$

$$\left| \frac{d}{ds} \varrho(s) - \frac{d}{ds} \tilde{\varrho}(s) \right| \leq \frac{1}{R_1 + c_v} \Psi_{\varrho}^1(\kappa_{\tilde{\varrho}}, \kappa_{\tilde{T}}, \kappa_{\tilde{w}})(s), \quad (4.33)$$

$$\left| w(s) - \tilde{w}(s) \right| \leq \frac{1}{R_1 + c_v} \Psi_w^0(\kappa_{\tilde{\varrho}}, \kappa_{\tilde{T}}, \kappa_{\tilde{w}})(s) + \psi_w^0(\kappa_{\tilde{\varrho}}, \kappa_{\tilde{T}}, \kappa_{\tilde{w}})(s), \quad (4.34)$$

$$\left| \frac{d}{ds} w(s) - \frac{d}{ds} \tilde{w}(s) \right| \leq \frac{1}{R_1 + c_v} \Psi_w^1(\kappa_{\tilde{\varrho}}, \kappa_{\tilde{T}}, \kappa_{\tilde{w}})(s) + \psi_w^1(\kappa_{\tilde{\varrho}}, \kappa_{\tilde{T}}, \kappa_{\tilde{w}})(s), \quad (4.35)$$

где

$$\begin{aligned} \Psi_T^0(\kappa_{\tilde{\varrho}}, \kappa_{\tilde{T}}, \kappa_{\tilde{w}})(s) &= \frac{\tilde{T}^{\frac{c_v}{R_1+c_v}}}{\tilde{\varrho}^{\frac{R_1}{R_1+c_v}}} \int_0^s \Pi_y ds' + \\ &+ 2 \left(\frac{[\varrho T]_{\kappa}}{\varrho_0} \right)^{\frac{R_1}{R_1+c_v}} T_0^{\frac{c_v}{R_1+c_v}} \exp \left(\frac{[H_1]_{\kappa}}{R_1 + c_v} \right) \int_0^s \left(\varphi_h^{\varrho} \kappa_{\tilde{\varrho}} + \varphi_h^T \kappa_{\tilde{T}} \right) ds', \end{aligned} \quad (4.36)$$

$$\begin{aligned} \Psi_T^1(\kappa_{\tilde{\varrho}}, \kappa_{\tilde{T}}, \kappa_{\tilde{w}})(s) &= \frac{|\tilde{h}_1| \exp \left(\frac{\tilde{w}}{R_1+c_v} \right)}{R_1 + c_v} \int_0^s \Pi_y ds' + \exp \left(\frac{\tilde{w}}{R_1 + c_v} \right) \Pi_y + \\ &+ \frac{2R_1}{R_1 + c_v} \left[\frac{1}{\varrho T} \right]_{\kappa}^{\frac{c_v}{R_1+c_v}} \left([\varrho]_{\kappa} \left[\left| \frac{dT}{ds} \right| \right]_{\kappa} + [T]_{\kappa} \left[\left| \frac{d\varrho}{ds} \right| \right]_{\kappa} \right) \times \\ &\times \frac{T_0^{\frac{c_v}{R_1+c_v}}}{\varrho_0^{\frac{R_1}{R_1+c_v}}} \exp \left(\frac{[H_1]_{\kappa}}{R_1 + c_v} \right) \int_0^s \left(\varphi_h^{\varrho} \kappa_{\tilde{\varrho}} + \varphi_h^T \kappa_{\tilde{T}} \right) ds' + \\ &+ 2 \left(\frac{[\varrho T]_{\kappa}}{\varrho_0} \right)^{\frac{R_1}{R_1+c_v}} T_0^{\frac{c_v}{R_1+c_v}} \exp \left(\frac{[H_1]_{\kappa}}{R_1 + c_v} \right) \left(\varphi_h^{\varrho} \kappa_{\tilde{\varrho}} + \varphi_h^T \kappa_{\tilde{T}} + \frac{|\tilde{h}_1|}{R_1 + c_v} \int_0^s \left(\varphi_h^{\varrho} \kappa_{\tilde{\varrho}} + \varphi_h^T \kappa_{\tilde{T}} \right) ds' \right), \end{aligned} \quad (4.37)$$

$$\begin{aligned} \Psi_{\varrho}^0(\kappa_{\tilde{\varrho}}, \kappa_{\tilde{T}}, \kappa_{\tilde{w}})(s) &= \frac{\varrho_0^{\frac{R_1}{R_1+c_v}}}{T_0^{\frac{c_v}{R_1+c_v}}} \exp \left(\frac{[-H_1]_{\kappa}}{R_1 + c_v} \right) \times \\ &\times \left(\frac{c_v}{R_1} [\varrho T]_{\kappa}^{\frac{c_v-R_1}{R_1+c_v}} \int_0^s \Pi_y ds' + 2\tilde{y}^{\frac{c_v}{R_1+c_v}} \int_0^s \left(\varphi_h^{\varrho} \kappa_{\tilde{\varrho}} + \varphi_h^T \kappa_{\tilde{T}} \right) ds' \right), \end{aligned} \quad (4.38)$$

$$\begin{aligned} \Psi_{\varrho}^1(\kappa_{\tilde{\varrho}}, \kappa_{\tilde{T}}, \kappa_{\tilde{w}})(s) &= \frac{\varrho_0^{\frac{R_1}{R_1+c_v}}}{T_0^{\frac{c_v}{R_1+c_v}}} \exp\left(\frac{[-H_1]_{\kappa}}{R_1+c_v}\right) \times \\ &\times \left(\frac{c_v}{R_1} \left([\varrho T]_{\kappa}^{\frac{c_v-R_1}{R_1+c_v}} \Pi_y + \left(\frac{c_v-R_1}{R_1} [\varrho T]_{\kappa}^{\frac{c_v-2R_1}{R_1+c_v}} \left| \frac{d}{ds} \tilde{y}^{\frac{R_1}{R_1+c_v}} \right| + \frac{[h_1]_{\kappa}}{R_1+c_v} [\varrho T]_{\kappa}^{\frac{c_v-R_1}{R_1+c_v}} \right) \int_0^s \Pi_y ds' \right) + \right. \\ &\left. + 2 \left(\left| \frac{d}{ds} \tilde{y}^{\frac{R_1}{R_1+c_v}} \right| + \frac{[\tilde{h}_1][\varrho T]_{\kappa}^{\frac{c_v}{R_1+c_v}}}{R_1+c_v} \right) \int_0^s \left(\varphi_h^{\varrho} \kappa_{\tilde{\varrho}} + \varphi_h^T \kappa_{\tilde{T}} \right) ds' + 2[\varrho T]_{\kappa}^{\frac{c_v}{R_1+c_v}} \left(\varphi_h^{\varrho} \kappa_{\tilde{\varrho}} + \varphi_h^T \kappa_{\tilde{T}} \right) \right), \quad (4.39) \end{aligned}$$

$$\Psi_w^0(\kappa_{\tilde{\varrho}}, \kappa_{\tilde{T}}, \kappa_{\tilde{w}})(s) = \frac{\varrho_0 r(0) J(0)}{r(s) J(s)} w_0 \frac{e^{\tilde{F}_1}}{\tilde{\varrho}} \left[\frac{1}{\varrho} \right]_{\kappa} \Psi_{\varrho}^0(s), \quad (4.40)$$

$$\begin{aligned} \psi_w^0(\kappa_{\tilde{\varrho}}, \kappa_{\tilde{T}}, \kappa_{\tilde{w}})(s) &= 2 \frac{\varrho_0 r(0) J(0)}{r(s) J(s)} w_0 e^{[F_1]_{\kappa}} \left[\frac{1}{\varrho} \right]_{\kappa} \times \\ &\times \left(\left(\left(2 \left[\frac{1}{\varrho^3} \right]_{\kappa} \left[\left| \frac{d\varrho}{ds} \right| \right]_{\kappa} + \left[\frac{1}{\varrho^2} \right]_{\kappa} \right) \left[\bar{\pi}_{vs}(t) \right]_{\kappa} + \left[\frac{1}{\varrho^2} \right]_{\kappa} \left[\left| \frac{dT}{ds} \right| \right]_{\kappa} \left[\frac{d}{dT} \bar{\pi}_{vs}(t) \right]_{\kappa} \right) \kappa_{\tilde{\varrho}} + \\ &+ \left(\left(\left[\frac{1}{\varrho^2} \right]_{\kappa} \left[\left| \frac{d\varrho}{ds} \right| \right]_{\kappa} + \left[\frac{1}{\varrho} \right]_{\kappa} \right) \left[\frac{d}{dT} \bar{\pi}_{vs}(t) \right]_{\kappa} + \left[\frac{1}{\varrho} \right]_{\kappa} \left[\left| \frac{dT}{ds} \right| \right]_{\kappa} \left[\frac{d^2}{dT^2} \bar{\pi}_{vs}(t) \right]_{\kappa} \right) \kappa_{\tilde{T}}, \quad (4.41) \end{aligned}$$

$$\Psi_w^1(\kappa_{\tilde{\varrho}}, \kappa_{\tilde{T}}, \kappa_{\tilde{w}})(s) = \left(\left| \frac{d}{ds} \log(rJ) \right| + \left| \frac{d}{ds} \log \tilde{\varrho} \right| + \left[\left| \frac{d}{ds} \log \varrho \right| \right]_{\kappa} + |\tilde{f}_1| \right) \Psi_w^0(s), \quad (4.42)$$

$$\psi_w^1(\kappa_{\tilde{\varrho}}, \kappa_{\tilde{T}}, \kappa_{\tilde{w}})(s) = \left(\left| \frac{d}{ds} \log(rJ) \right| + \left[\left| \frac{d}{ds} \log \varrho \right| \right]_{\kappa} + |\tilde{f}_1| + 1 \right) \psi_w^0(s), \quad (4.43)$$

$$F_1(s) = \int_0^s f_1(s') ds', \quad \tilde{F}_1(s) = \int_0^s \tilde{f}_1(s') ds'. \quad (4.44)$$

Доказательство. Принимая во внимание определения $y(s)$ и $\tilde{y}(s)$ и соотношения для $W(s)$ и $\tilde{w}(s)$, имеем

$$\begin{aligned} T(s) - \tilde{T}(s) &= \exp\left(\frac{\tilde{w}(s)}{R_1+c_v}\right) \left(y(s)^{\frac{R_1}{R_1+c_v}} - \tilde{y}(s)^{\frac{R_1}{R_1+c_v}} \right) + \\ &+ \left(\frac{\varrho(s)T(s)}{\varrho_0} \right)^{\frac{R_1}{R_1+c_v}} T_0^{\frac{c_v}{R_1+c_v}} \left(\exp\left(\frac{H_1(s)}{R_1+c_v}\right) - \exp\left(\frac{\tilde{h}_1(s)}{R_1+c_v}\right) \right). \end{aligned}$$

Поэтому, согласно (4.11) и (4.25) и с помощью аналогичного (4.29) неравенства получим (4.30), (4.36). Кроме того, имеем

$$\begin{aligned} \frac{dT}{ds} - \frac{d\tilde{T}}{ds} &= \frac{\exp\left(\frac{\tilde{w}}{R_1+c_v}\right) \tilde{h}_1}{R_1+c_v} \left(y^{\frac{R_1}{R_1+c_v}} - \tilde{y}^{\frac{R_1}{R_1+c_v}} \right) + \exp\left(\frac{\tilde{w}(s)}{R_1+c_v}\right) \left(\frac{d}{ds} y^{\frac{R_1}{R_1+c_v}} - \frac{d}{ds} \tilde{y}^{\frac{R_1}{R_1+c_v}} \right) + \\ &+ \left(\frac{d}{ds} (\varrho T)^{\frac{R_1}{R_1+c_v}} \right) \frac{T_0^{\frac{c_v}{R_1+c_v}}}{\varrho_0^{\frac{R_1}{R_1+c_v}}} \left(\exp\left(\frac{H_1}{R_1+c_v}\right) - \exp\left(\frac{\tilde{h}_1}{R_1+c_v}\right) \right) + \\ &+ \left(\frac{\varrho T}{\varrho_0} \right)^{\frac{R_1}{R_1+c_v}} \frac{T_0^{\frac{c_v}{R_1+c_v}}}{R_1+c_v} \left(\exp\left(\frac{H_1}{R_1+c_v}\right) h_1 - \exp\left(\frac{\tilde{h}_1}{R_1+c_v}\right) \tilde{h}_1 \right). \end{aligned}$$

Отсюда аналогично выводу неравенства (4.30) следует (4.31), (4.37).

Так как

$$y(s) = e^{W(s)/c_v} \varrho(s) \frac{R_1 + c_v}{c_v}, \quad \tilde{y}(s) = e^{\tilde{w}(s)/c_v} \tilde{\varrho}(s) \frac{R_1 + c_v}{c_v},$$

для ϱ и $\tilde{\varrho}$ имеем

$$\begin{aligned} \varrho(s) - \tilde{\varrho}(s) &= \frac{\varrho_0 \frac{R_1}{R_1 + c_v}}{T_0 \frac{c_v}{R_1 + c_v}} \left[\left(y(s) \frac{c_v}{R_1 + c_v} - \tilde{y}(s) \frac{c_v}{R_1 + c_v} \right) \exp \left(-\frac{H_1(s)}{R_1 + c_v} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \tilde{y}(s) \frac{c_v}{R_1 + c_v} \left(\exp \left(-\frac{H_1(s)}{R_1 + c_v} \right) - \exp \left(-\frac{\tilde{h}_1(s)}{R_1 + c_v} \right) \right) \right], \\ \frac{d\varrho}{ds} - \frac{d\tilde{\varrho}}{ds} &= \frac{\varrho_0 \frac{R_1}{R_1 + c_v}}{T_0 \frac{c_v}{R_1 + c_v}} \left[\frac{c_v e^{-\frac{H_1}{R_1 + c_v}}}{R_1} + \left(y \frac{c_v - R_1}{R_1 + c_v} \left(\frac{d}{ds} y \frac{R_1}{R_1 + c_v} - \frac{d}{ds} \tilde{y} \frac{R_1}{R_1 + c_v} \right) + \right. \right. \\ &\quad \left. + \left(y \frac{c_v - R_1}{R_1 + c_v} - \tilde{y} \frac{c_v - R_1}{R_1 + c_v} \right) \frac{d}{ds} \tilde{y} \frac{R_1}{R_1 + c_v} \right) + \left(y \frac{c_v}{R_1 + c_v} - \tilde{y} \frac{c_v}{R_1 + c_v} \right) \exp \left(-\frac{H_1}{R_1 + c_v} \right) \frac{-h_1}{R_1 + c_v} + \\ &\quad + \left(\exp \left(-\frac{H_1}{R_1 + c_v} \right) - \exp \left(-\frac{\tilde{h}_1}{R_1 + c_v} \right) \right) \frac{d}{ds} \tilde{y} \frac{c_v}{R_1 + c_v} + \\ &\quad \left. + \tilde{y} \frac{c_v}{R_1 + c_v} \left(\exp \left(-\frac{H_1}{R_1 + c_v} \right) \frac{-h_1}{R_1 + c_v} - \exp \left(-\frac{\tilde{h}_1}{R_1 + c_v} \right) \frac{-\tilde{h}_1}{R_1 + c_v} \right) \right]. \end{aligned}$$

Замечаем, что имеем

$$y(s) \frac{c_v}{R_1 + c_v} - \tilde{y}(s) \frac{c_v}{R_1 + c_v} = \frac{c_v}{R_1} \tilde{y}(s) \frac{c_v - R_1}{R_1 + c_v} \left(y(s) \frac{R_1}{R_1 + c_v} - \tilde{y}(s) \frac{R_1}{R_1 + c_v} \right)$$

с промежуточным значением $\tilde{y}(s)$ между $y(s)$ и $\tilde{y}(s)$ и аналогично для $y \frac{c_v - R_1}{R_1 + c_v} - \tilde{y} \frac{c_v - R_1}{R_1 + c_v}$. Используя лемму 2 и вспоминая определения h_1 и $\tilde{h}_1$ (см. (4.20), (4.10)), получим (4.32), (4.33), (4.38), (4.39).

Для того чтобы получить (4.34) и (4.35), из (3.3), (4.5), (4.11), (4.44) выведем

$$w(s) - \tilde{w}(s) = \frac{\varrho_0 r(0) J(0)}{r(s) J(s)} w_0 \left(\frac{e^{\tilde{F}_1}}{\varrho \tilde{\varrho}} (\tilde{\varrho} - \varrho) + \frac{1}{\varrho} (e^{F_1} - e^{\tilde{F}_1}) \right),$$

$$\begin{aligned} \frac{dw}{ds} - \frac{d\tilde{w}}{ds} &= \varrho_0 r(0) J(0) w_0 \left(\frac{e^{\tilde{F}_1}}{\varrho \tilde{\varrho}} (\tilde{\varrho} - \varrho) + \frac{1}{\varrho} (e^{F_1} - e^{\tilde{F}_1}) \right) \frac{d}{ds} \frac{1}{rJ} + \\ &\quad + \frac{\varrho_0 r(0) J(0)}{r(s) J(s)} w_0 \left[e^{\tilde{F}_1} (\tilde{\varrho} - \varrho) \left(\frac{\tilde{f}_1}{\varrho \tilde{\varrho}} + \frac{d}{ds} \frac{1}{\varrho \tilde{\varrho}} \right) + (e^{F_1} - e^{\tilde{F}_1}) \frac{d}{ds} \frac{1}{\varrho} + \frac{1}{\varrho} (e^{F_1} f_1 - e^{\tilde{F}_1} \tilde{f}_1) \right]. \end{aligned}$$

Принимая во внимание определения (2.16), (4.4), (4.20), (4.5), из которых следует

$$\begin{aligned} f_1 - \tilde{f}_1 &= \left(\frac{1}{\varrho_{hs}^* 2} - \frac{1}{\varrho^2} \right) \pi_{vs}(t) \frac{d\varrho}{ds} + \frac{1}{\varrho_{hs}^* 2} (\pi_{vs}(T_{hs}^*) - \pi_{vs}(t)) \frac{d\varrho}{ds} + \\ &\quad + \frac{1}{\varrho_{hs}^* 2} \pi_{vs}(T_{hs}^*) \left(\frac{d\varrho_{hs}^*}{ds} - \frac{d\varrho}{ds} \right) + \left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_{hs}^*} \right) \frac{d\pi_{vs}(t)}{dT} \frac{dT}{ds} + \\ &\quad + \frac{1}{\varrho_{hs}^*} \left(\frac{d\pi_{vs}(t)}{dT} - \frac{d\pi_{vs}(T_{hs}^*)}{dT} \right) \frac{dT}{ds} + \frac{1}{\varrho_{hs}^*} \frac{d\pi_{vs}(T_{hs}^*)}{dT} \left(\frac{dT}{ds} - \frac{dT_{hs}^*}{ds} \right), \end{aligned}$$

получим (4.34), (4.35), (4.40)–(4.43). $\square$

4.3. Теорема существования и единственности.

Теорема 1. Пусть $0 < \bar{s}_1 \leq \tilde{s}_1$. Предположим, что выполняется условие (4.17), а $\tilde{g}_1(0) \neq 0$ ($\tilde{g}_1(\cdot)$ является определенной в (4.9) функцией). Если существует число $\bar{\varepsilon}_0$, $0 < \bar{\varepsilon}_0 < 1$, удовлетворяющее соотношениям

$$\max \left(\Psi_{\varrho}^0(\kappa_{\tilde{\varrho}}, \kappa_{\tilde{T}}, \kappa_{\tilde{w}})(s), \Psi_{\varrho}^1(\kappa_{\tilde{\varrho}}, \kappa_{\tilde{T}}, \kappa_{\tilde{w}})(s) \right) \leq (R_1 + c_v)(1 - \bar{\varepsilon}_0)\kappa_{\tilde{\varrho}}(s), \quad (4.45)$$

$$\max \left(\Psi_T^0(\kappa_{\tilde{\varrho}}, \kappa_{\tilde{T}}, \kappa_{\tilde{w}})(s), \Psi_T^1(\kappa_{\tilde{\varrho}}, \kappa_{\tilde{T}}, \kappa_{\tilde{w}})(s) \right) \leq (R_1 + c_v)(1 - \bar{\varepsilon}_0)\kappa_{\tilde{T}}(s), \quad (4.46)$$

$$\max \left(\frac{\Psi_w^0(\kappa_{\tilde{\varrho}}, \kappa_{\tilde{T}}, \kappa_{\tilde{w}})(s)}{R_1 + c_v} + \psi_w^0(\kappa_{\tilde{\varrho}}, \kappa_{\tilde{T}}, \kappa_{\tilde{w}})(s), \frac{\Psi_w^1(\kappa_{\tilde{\varrho}}, \kappa_{\tilde{T}}, \kappa_{\tilde{w}})(s)}{R_1 + c_v} + \psi_w^1(\kappa_{\tilde{\varrho}}, \kappa_{\tilde{T}}, \kappa_{\tilde{w}})(s) \right) \leq (1 - \bar{\varepsilon}_0)\kappa_{\tilde{w}}(s), \quad (4.47)$$

для любых $s \in [0, \bar{s}_1]$, то на отрезке $[0, \bar{s}_1]$ существует единственное решение системы уравнений (3.2)–(3.5) с начальными условиями (3.7).

Доказательство. Рассмотрим системы дифференциальных уравнений для (ϱ, T, w) и $(\tilde{\varrho}, \tilde{T}, \tilde{w})$ и выраженную через s систему уравнений для $\left(\varrho_{hs}^*, T_{hs}^*, \frac{\tilde{U}}{\varrho_{hs}^*} \right)$ при $s = 0$. Известно, что

$$\varrho(0) = \tilde{\varrho}(0) = \varrho_{hs}^*(0) = \varrho_0, \quad T(0) = \tilde{T}(0) = T_{hs}^*(0) = T_0, \quad w(0) = \tilde{w}(0) = \frac{\tilde{U}(0)}{\varrho_{hs}^*(0)} = w_0 \quad (4.48)$$

(см. (4.3), (4.6), (4.8), (4.11)); здесь

$$\varrho_{hs}^*(0) = \varrho_{hs}^*(z(0)), \quad T_{hs}^*(0) = T_{hs}^*(z(0)).$$

Используя выражения (2.16), (4.20), (4.9) для $h_{tr}(s)$, $g_1(s)$, $\tilde{g}_1(s)$, при $s = 0$ имеем

$$\begin{aligned} w_0 \frac{d\varrho}{ds} + \varrho_0 \frac{dw}{ds} &= w_0 \frac{d\tilde{\varrho}}{ds} + \varrho_0 \frac{d\tilde{w}}{ds} = w_0 \frac{d\varrho_{hs}^*}{ds} + \varrho_0 \frac{d}{ds} \frac{\tilde{U}}{\varrho_{hs}^*} = -w_0 \varrho_0 \frac{d}{ds} \log(rJ) \Big|_{s=0} - q_z(0) w_0 h_{tr}(0), \\ -R_1 T_0 \frac{d\varrho}{ds} + c_v \varrho_0 \frac{dT}{ds} &= -R_1 T_0 \frac{d\tilde{\varrho}}{ds} + c_v \varrho_0 \frac{d\tilde{T}}{ds} = -R_1 T_0 \frac{d\varrho_{hs}^*}{ds} + c_v \varrho_0 \frac{dT_{hs}^*}{ds} = (R_1 T_0 + L_{tr}) q_z(0) h_{tr}(0), \\ R_1 T_0 \frac{d\varrho}{ds} + R_1 \varrho_0 \frac{dT}{ds} &= R_1 T_0 \frac{d\tilde{\varrho}}{ds} + R_1 \varrho_0 \frac{d\tilde{T}}{ds} = -q_z(0) g \varrho_0 + g_1(0) = -q_z(0) g \varrho_0 + \tilde{g}_1(0), \\ R_1 T_0 \frac{d\varrho_{hs}^*}{ds} + R_1 \varrho_0 \frac{dT_{hs}^*}{ds} &= -q_z(0) g \varrho_0. \end{aligned}$$

Отсюда получится

$$\frac{d\varrho}{ds} \Big|_{s=0} = \frac{d\tilde{\varrho}}{ds} \Big|_{s=0}, \quad \frac{dT}{ds} \Big|_{s=0} = \frac{d\tilde{T}}{ds} \Big|_{s=0}, \quad \frac{dw}{ds} \Big|_{s=0} = \frac{d\tilde{w}}{ds} \Big|_{s=0}. \quad (4.49)$$

С другой стороны, имеем

$$\begin{aligned} w_0 \frac{d}{ds} (\tilde{\varrho} - \varrho_{hs}^*) \Big|_{s=0} + \varrho_0 \frac{d}{ds} \left(\tilde{w} - \frac{\tilde{U}}{\varrho_{hs}^*} \right) \Big|_{s=0} &= 0, \\ -R_1 T_0 \frac{d}{ds} (\tilde{\varrho} - \varrho_{hs}^*) \Big|_{s=0} + c_v \varrho_0 \frac{d}{ds} (\tilde{T} - T_{hs}^*) \Big|_{s=0} &= 0, \\ R_1 T_0 \frac{d}{ds} (\tilde{\varrho} - \varrho_{hs}^*) \Big|_{s=0} + R_1 \varrho_0 \frac{d}{ds} (\tilde{T} - T_{hs}^*) \Big|_{s=0} &= \tilde{g}_1(0). \end{aligned}$$

Решив эту систему, получим

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{\varrho}}{ds}\Big|_{s=0} - \frac{d\varrho_{hs}^*}{ds}\Big|_{s=0} &= \frac{c_v \tilde{g}_1(0)}{R_1 T_0 (R_1 + c_v)}, \quad \frac{d\tilde{T}}{ds}\Big|_{s=0} - \frac{dT_{hs}^*}{ds}\Big|_{s=0} = \frac{\tilde{g}_1(0)}{(R_1 + c_v) \varrho_0}, \\ \frac{d\tilde{w}}{ds}\Big|_{s=0} - \frac{d}{ds} \left(\frac{\tilde{U}}{\varrho_{hs}^*} \right) \Big|_{s=0} &= - \frac{c_v w_0 \tilde{g}_1(0)}{R_1 \varrho_0 T_0 (R_1 + c_v)}. \end{aligned} \quad (4.50)$$

Так как предполагалось, что $\tilde{g}_1(0) \neq 0$, из (4.49) и (4.50) следует, что существует такое $s_\varepsilon > 0$, что на отрезке $[0, s_\varepsilon]$ выполняется предположение (а). Следовательно, в силу леммы 3 и соотношений (4.45)–(4.45) можно продолжить решение $(w_\vartheta, \varrho, T, w)$ до $\bar{s}_1$.

Единственность следует из единственности локального решения. Теорема доказана. $\square$

5. ЗАМЕЧАНИЯ

В неравенствах (4.30)–(4.35) мы записывали $\dots \leq \frac{1}{R_1 + c_v} \Psi_T^0$ и т. д. Действительно, газовая постоянная R_1 и удельная теплоемкость c_v достаточно велики, а ψ_w^0 и ψ_w^1 содержат элементы $\frac{\pi_{vs}(t)}{\varrho}$, или $\frac{1}{\varrho} \frac{d\pi_{vs}(t)}{dT}$, или $\frac{1}{\varrho} \frac{d^2\pi_{vs}(t)}{dT^2}$, которые являются достаточно малыми по сравнению с другими элементами. Таким образом, в рассмотрении конкретных уравнений моделирования ТЦ нетрудно получить оценки (4.45)–(4.47).

В [7] изучалась численная модель простейшего случая: $w_\vartheta \equiv 0$, $q_r \equiv 0$, $q_z \equiv 1$, т.е. случая, когда γ является вертикальным отрезком. Используя аналогичный метод разностных схем, мы сделали попытки вычисления на адекватной для моделирования ТЦ кривой γ и получили результаты, соответствующие ожиданию.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кикоин А. К., Кикоин И. К. Молекулярная физика. М.: Наука, 1976.
2. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Гидродинамика/ Курс Теоретическая физика. Т. 6. — М.: Наука, 1986.
3. Матвеев Л. Т. Основы общей метеорологии. Физика атмосферы. — СПб.: Гидрометеиздат, 2000.
4. Хаин А. П. Математическое моделирование тропических циклонов. — Л.: Гидрометеиздат, 1984.
5. Cotton W., Bryan G., van den Heever S. Storm and cloud dynamics. — Academic Press, 2011.
6. Emanuel K. A. An air-sea interaction theory for tropical cyclones. Part I: Steady-state maintenance// J. Atmos. Sci. — 1986. — 43. — С. 585–604.
7. Ghomrani S., Marín Antuña J., Fujita Yashima H. Un modelo de la subida del aire ocasionada por la condensación del vapor y su cálculo numérico// Rev. Cuba Fís. — 2015. — 32. — С. 3–8.
8. Holland G. J. The maximum potential intensity of tropical cyclones// J. Atmos. Sci. — 1997. — 54. — С. 2519–2541.

H. Fujita Yashima

Ecole Normale Supérieure de Constantine, Algérie

E-mail: hisaofujitayashima@qq.com