

ISSN 0233-6723



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ

СОВРЕМЕННАЯ
МАТЕМАТИКА
И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Тематические
обзоры

Том 136



Москва 2017

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Главный редактор:

Р. В. Гамкрелидзе (Математический институт им. В. А. Стеклова РАН)

Заместители главного редактора:

А. В. Овчинников (МГУ им. М. В. Ломоносова)

В. Л. Попов (Математический институт им. В. А. Стеклова РАН)

Члены редколлегии:

А. А. Аграчёв (Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, SISSA)

Е. С. Голод (МГУ им. М. В. Ломоносова)

А. Б. Жижченко (Отделение математических наук РАН)

Е. П. Кругова (ВИНИТИ РАН)

А. В. Михалёв (МГУ им. М. В. Ломоносова)

И. Ю. Никольская (ВИНИТИ РАН)

Н. Х. Розов (МГУ им. М. В. Ломоносова)

М. В. Шамолин (Институт механики МГУ им. М. В. Ломоносова)

Ответственные редакторы:

И. А. Жлябинкова

Н. Ю. Селиванова

Редактор-составитель:

А. Н. Панов (Самарский национальный исследовательский университет имени академика С. П. Королёва)

Научный редактор:

С. С. Акбаров

ISSN 0233–6723

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ВСЕРОССИЙСКИЙ ИНСТИТУТ
НАУЧНОЙ И ТЕХНИЧЕСКОЙ ИНФОРМАЦИИ
(ВИНИТИ РАН)

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ

СЕРИЯ
СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА
И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

ТЕМАТИЧЕСКИЕ ОБЗОРЫ

Том 136

ТРУДЫ СЕМИНАРА
ПО АЛГЕБРЕ И ГЕОМЕТРИИ
САМАРСКОГО УНИВЕРСИТЕТА



Москва 2017

СОДЕРЖАНИЕ

ПБВ-вырождение: алгебра, геометрия и комбинаторика (<i>Е. Б. Фейгин</i>)	3
Суперхарактеры унитарных и разрешимых групп (<i>А. Н. Панов</i>)	31
Игры с упорядоченными исходами (<i>В. В. Розен</i>)	56
Супералгебры Ли и системы Калоджеро—Мозера—Сазерленда (<i>А. Н. Сергеев</i>)	72
Эта-функция Дедекинда в современных исследованиях (<i>Г. В. Воскресенская</i>)	103



ПБВ-ВЫРОЖДЕНИЕ: АЛГЕБРА, ГЕОМЕТРИЯ И КОМБИНАТОРИКА

© 2017 г. Е. Б. ФЕЙГИН

Аннотация. Приведен обзор недавних результатов в теории вырождений Пуанкаре—Биркгофа—Витта неприводимых представлений простых алгебр Ли. Описываются алгебраические, геометрические и комбинаторные аспекты этой теории.

Ключевые слова: алгебры Ли, многообразия флагов, ПБВ-вырождение.

AMS Subject Classification: 17B10

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение	3
2. ПБВ-фильтрация	5
3. Вырожденные многообразия флагов	9
4. Комбинаторика	22
Список литературы	28

1. ВВЕДЕНИЕ

Фильтрация Пуанкаре—Биркгофа—Витта на универсальной обертывающей алгебре $U(\mathfrak{g})$ играет очень важную роль в теории Ли. В частности, присоединенная градуированная алгебра для ПБВ-фильтрации изоморфна симметрической алгебре двойственного пространства $\mathfrak{g}^*$ (см. [36]). Этот факт имеет много приложений, например, позволяет описать мономиальный базис в универсальной обертывающей алгебре. Еще одно важное следствие — это существование различных мономиальных базисов в модулях старшего веса. Для модулей Верма берется ПБВ-базис алгебры порождающих операторов. При изучении неприводимых конечномерных представлений возникает нетривиальная задача найти подходящее подмножество ПБВ-базиса, которое дает базис неприводимого модуля.

Наш основной подход состоит в описании индуцированной ПБВ-фильтрации на модулях старшего веса алгебры Ли $\mathfrak{g}$. А именно, мы фиксируем разложение Картана $\mathfrak{g} = \mathfrak{n} \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_-$ и рассматриваем ПБВ-фильтрацию F_s на универсальной обертывающей алгебре для $\mathfrak{n}_-$. Пусть V — это $\mathfrak{g}$ -модуль старшего веса с вектором старшего веса v . В частности, $V = U(\mathfrak{n}_-)v$. Возрастающая ПБВ-фильтрация на универсальной обертывающей алгебре дает фильтрацию на V : $F_0v \subset F_1v \subset F_2v \subset \dots$. Очевидно, фильтрация исчерпывает весь модуль и, следовательно, мы можем рассмотреть присоединенный градуированный модуль V^a того же размера, что и V . При изучении градуированных пространств V^a возникают несколько естественных вопросов:

- (i) Какая группа и алгебра Ли действует на V^a ?
- (ii) Каков q -характер V^a , соответствующий индуцированной ПБВ-фильтрации?
- (iii) Как описать V^a в терминах образующих и соотношениями?

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда и Немецкого научно-исследовательского сообщества (проект РФ-DFG 16-41-01013).

- (iv) Можно ли описать геометрические объекты, отвечающие ПБВ-градуированным пространствам?

Цель работы — частично ответить на эти вопросы. Во-первых, напомним, что $\mathfrak{gr}(\mathfrak{n}_-)$ изоморфна симметрической алгебре. Следовательно, на присоединенном градуированном пространстве V^a действует кольцо полиномов от образующих Шевалле f_α нильпотентной алгебры $\mathfrak{n}_-$. Более того, модуль V^a цикличесок по отношению к этому действию с образом вектора v в качестве циклического вектора (заметим, что противоположная борелевская алгебра также действует на V^a). Таким образом, естественно задать вопрос, можно ли описать аннулятор V^a . Более точно, для данного доминантного целочисленного веса λ алгебры $\mathfrak{g}$ обозначим через V_λ соответствующий конечномерный неприводимый $\mathfrak{g}$ -модуль старшего веса. Пусть I_λ — такой идеал кольца полиномов $\mathbb{C}[f_\alpha]_\alpha$, что $V_\lambda^a \simeq \mathbb{C}[f_\alpha]_\alpha / I_\lambda$. Мы даем описываем I_λ для алгебр Ли типов A и C (см. [30, 31, 32]). Аналогичное описание для типа G_2 было дано Горницким в [1]. Некоторые частичные результаты для ортогональных алгебр были найдены в [5, 39].

Оказалось, что ключевую роль при описании аннулирующих идеалов играет задача нахождения мономиальных базисов модулей V_λ^a . Для типов A и C такие мономиальные базисы можно описать явно в терминах комбинаторики некоторых многогранников, предложенных Винбергом (см. [53]). Определяющие неравенства этих многогранников описываются в терминах путей Дика. Отличительная черта мономиальных базисов градуированных модулей состоит в том, что те же самые мономы, примененные к вектору старшего веса в неприводимых $\mathfrak{g}$ -модулях, также дают базис. Важное свойство таких базисов состоит в том, что порядок множителей в мономах не играет роли и может быть зафиксирован произвольно.

Напомним, что каждому доминантному интегральному весу λ можно поставить в соответствие обобщенное многообразие флагов $\mathcal{F}_\lambda$ (см. [47, 35]). Многообразие определено как G -орбита прямой старшего веса в проективном пространстве $\mathbb{P}(V_\lambda)$. Точнее, многообразие зависит не от самого веса λ , а только от класса регулярности λ , т.е. от множества ненулевых коэффициентов в разложении λ в линейную комбинацию фундаментальных весов. Обобщенные многообразия флагов являются однородными пространствами G/P для параболических подгрупп $P \subset G$. Важность обобщенных многообразий флагов объясняется тем, что их геометрические свойства могут быть использованы для описания алгебраических и комбинаторных структур на V_λ . Связь работает и в противоположном направлении: класс обобщенных многообразий флагов включает главные классические объекты, такие как грассманианы и классические (симплектические, ортогональные) многообразия флагов; используя теоретико-представленческие свойства V_λ , можно получить дополнительную информацию об обобщенных многообразиях флагов.

Как мы упоминали выше, алгебра Ли $\mathfrak{n}_-$, действующая циклически на V_λ , заменяется на абелев аналог $\mathfrak{n}_-^a$ после перехода к присоединенному градуированному модулю. Алгебра Ли $\mathfrak{n}_-^a$ изоморфна $\mathfrak{n}_-$ как векторное пространство, но скобка становится нулевой. Группа Ли N_-^a алгебры Ли $\mathfrak{n}_-^a$ — это прямая сумма $\dim \mathfrak{n}_-$ копий аддитивной группы поля $\mathbb{G}_m$. Мы определяем ПБВ-вырожденное многообразие флагов $\mathcal{F}_\lambda^a$ как замыкание N_-^a орбиты прямой циклического вектора в проективном пространстве $\mathbb{P}(V_\lambda^a)$. Оказывается что эти многообразия — вырождения обобщенных многообразий флагов. В отличие от классической теории, многообразия $\mathcal{F}_\lambda^a$ в общем случае имеют особенности. Возникает несколько естественных вопросов:

- (i) Каковы алгебро-геометрические и топологические свойства вырожденных многообразий флагов?
- (ii) Можно ли эти многообразия описать явно?
- (iii) Можно ли описать координатные кольца $\mathcal{F}_\lambda^a$?
- (iv) Каково множество неподвижных точек действия тора в $\mathcal{F}_\lambda^a$?

Мы получаем явное описание вырожденных многообразий флагов для типов A и C в терминах цепочек подпространств (см. [25, 24, 27, 28, 29]) и показываем, что вырождение классических многообразий в ПБВ-вырожденные — плоское (см. [25, 43]). Также показано, что однородное координатное кольцо $\mathcal{F}_\lambda^a$ может быть естественно отождествлено с прямой суммой двойственных к модулям V_μ^a . Более того, мы выводим ПБВ-аналог соотношений Плюккера. Заметим, что в [12, 13]

было показано, что вырожденные многообразия флагов для типов A и C изоморфны многообразиям Шуберта для больших групп.

Классические многообразия флагов и многообразия Шуберта могут быть разложены в несвязное объединение аффинных клеток. Мы показываем, что для вырожденных многообразий флагов число этих клеток — нормализованные медианные числа Дженочки. Это позволяет вывести различные формулы для эйлеровой характеристики и полиномов Пуанкаре вырожденных многообразий флагов. Наконец, заметим, что отождествление многообразий $\mathcal{F}_\lambda^a$ в типе A со специальными колчанными грассманианами позволяет распространить результаты из теории Ли на более общий случай (см. [8, 9, 10, 11]).

Наконец, заметим, что ПБВ-вырождение можно изучать в контексте аффинных алгебр Каца—Мули и алгебр токов. Частичные результаты в этом направлении получены в [14, 15, 16, 23, 22, 33]. Заметим также, что теория торических вырождений многообразий флагов хорошо развита (см., например, [7, 38, 48]).

Работа организована следующим образом. В разделе 2 описаны теоретико-представленческие аспекты ПБВ-вырождения. Раздел 3 посвящен геометрии ПБВ-вырожденных многообразий флагов. Раздел 4 содержит комбинаторную часть результатов.

2. ПБВ-ФИЛЬТРАЦИЯ

2.1. Тип A . Пусть R^+ — множество положительных корней $\mathfrak{sl}_{n+1}$. Пусть $\alpha_i, \omega_i, i = 1, \dots, n$, обозначают простые корни и фундаментальные веса. Все корни $\mathfrak{sl}_{n+1}$ являются суммами вида $\alpha_{p,q} = \alpha_p + \alpha_{p+1} + \dots + \alpha_q$ для некоторых $1 \leq p \leq q \leq n$. В частности, $\alpha_i = \alpha_{i,i}$.

Пусть $\mathfrak{sl}_{n+1} = \mathfrak{n}^+ \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}^-$ — картановское разложение. Рассмотрим возрастающую фильтрацию на универсальной обертывающей алгебре $U(\mathfrak{n}^-)$:

$$U(\mathfrak{n}^-)_s = \text{span}\{x_1 \dots x_l : x_i \in \mathfrak{n}^-, l \leq s\};$$

в частности, $U(\mathfrak{n}^-)_0 = \mathbb{C} \cdot 1$.

Для доминантного интегрального веса $\lambda = m_1\omega_1 + \dots + m_n\omega_n$ обозначим через $V(\lambda)$ соответствующий неприводимый $\mathfrak{sl}_{n+1}$ -модуль старшего веса с вектором старшего веса v_λ . Так как $V(\lambda) = U(\mathfrak{n}^-)v_\lambda$, имеем возрастающую фильтрацию $V(\lambda)_s$ на $V(\lambda)$:

$$V(\lambda)_s = U(\mathfrak{n}^-)_s v_\lambda.$$

Назовем эту фильтрацию *ПБВ-фильтрацией* и изучим присоединенное градуированное пространство $\text{gr } V(\lambda)$. В следующей лемме мы описываем операторы, действующие на $\text{gr } V(\lambda)$. Пусть $S(\mathfrak{n}^-)$ обозначает симметрическую алгебру $\mathfrak{n}^-$.

Лемма 2.1. *Действие $U(\mathfrak{n}^-)$ на $V(\lambda)$ индуцирует структуру $S(\mathfrak{n}^-)$ -модуля на $\text{gr } V(\lambda)$ и*

$$\text{gr}(V(\lambda)) = S(\mathfrak{n}^-)v_\lambda.$$

Действие $U(\mathfrak{n}^+)$ на $V(\lambda)$ индуцирует структуру $U(\mathfrak{n}^+)$ -модуля на $\text{gr } V(\lambda)$.

Доказательство. Первое утверждение очевидно из определения фильтраций $U(\mathfrak{n}^-)_s$ и $V(\lambda)_s$. Из включения $U(\mathfrak{n}^+)V(\lambda)_s \hookrightarrow V(\lambda)_s$ следует второе утверждение. $\square$

Наши цели:

- (i) описать $\text{gr } V(\lambda)$ как $S(\mathfrak{n}^-)$ -модуль, т.е. описать такой идеал $I(\lambda) \hookrightarrow S(\mathfrak{n}^-)$, что $\text{gr } V(\lambda) \simeq S(\mathfrak{n}^-)/I(\lambda)$;
- (ii) найти базис $\text{gr } V(\lambda)$.

Описание идеала будет дано ниже. Для описания базиса напомним определения путей Дика.

Определение 2.1. *Путь Дика* (или просто *путь*) — это последовательность

$$\mathbf{p} = (\beta(0), \beta(1), \dots, \beta(k)), \quad k \geq 0,$$

положительных корней, удовлетворяющая следующим условиям:

- (i) если $k = 0$, то $\mathbf{p}$ имеет вид $\mathbf{p} = (\alpha_i)$ для некоторого простого вида α_i ;
- (ii) если $k \geq 1$, то

- (а) первый и последний элемент — простые корни; точнее, $\beta(0) = \alpha_i$ и $\beta(k) = \alpha_j$ для некоторых $1 \leq i < j \leq n$;
- (б) промежуточные элементы удовлетворяют следующему рекурсивному правилу: если $\beta(s) = \alpha_{p,q}$, то следующий элемент в последовательности имеет вид $\beta(s+1) = \alpha_{p,q+1}$ или $\beta(s+1) = \alpha_{p+1,q}$.

Пример 2.1. Пример пути для $\mathfrak{sl}_6$:

$$\mathbf{p} = (\alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4, \alpha_3 + \alpha_4, \alpha_4, \alpha_4 + \alpha_5, \alpha_5).$$

Для мульти-показателей $\mathbf{s} = \{s_\beta\}_{\beta > 0}$, $s_\beta \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, положим

$$f^{\mathbf{s}} = \prod_{\beta \in R^+} f_\beta^{s_\beta} \in S(\mathfrak{n}^-).$$

Определение 2.2. Для интегрального доминантного $\mathfrak{sl}_{n+1}$ -веса $\lambda = \sum_{i=1}^n m_i \omega_i$ обозначим через

$S(\lambda)$ множество всех таких мульти-показателей $\mathbf{s} = (s_\beta)_{\beta \in R^+} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^{R^+}$, что для всех путей Дика $\mathbf{p} = (\beta(0), \dots, \beta(k))$ выполняется соотношение

$$s_{\beta(0)} + s_{\beta(1)} + \dots + s_{\beta(k)} \leq m_i + m_{i+1} + \dots + m_j, \quad (1)$$

где $\beta(0) = \alpha_i$ и $\beta(k) = \alpha_j$.

Верна следующая теорема.

Теорема 2.1. Множество $f^{\mathbf{s}} v_\lambda$, $\mathbf{s} \in S(\lambda)$, дает базис $\text{gr } V(\lambda)$.

Следствие 2.1. Имеем

$$\dim V(\lambda) = \#S(\lambda) = \text{множество целочисленных точек в многограннике } P(\lambda).$$

Из определения неравенств для многогранника $P(\lambda)$ очевидно, что для двух доминантных интегральных весов λ, μ имеем $P(\lambda) + P(\mu) \subseteq P(\lambda + \mu)$, и, следовательно, для интегральных весов $S(\lambda) + S(\mu) \subseteq S(\lambda + \mu)$. На самом деле имеется и обратное включение.

Предложение 2.1. $S(\lambda) + S(\mu) = S(\lambda + \mu)$.

В качестве интересного приложения получаем комбинаторную формулу для характера представления $V(\lambda)$. Пусть P — решетка весов; для $\mathbf{s} \in S(\lambda)$ определим вес

$$\text{wt}(\mathbf{s}) := \sum_{1 \leq j \leq k \leq n} s_{j,k} \alpha_{j,k}.$$

Пусть $S(\lambda)^\mu$ обозначает подмножество таких элементов, что $\mu = \lambda - \text{wt}(\mathbf{s})$, и пусть

$$S(\lambda)^\mu := \#\{\mathbf{s} \in S(\lambda) \mid \mu = \lambda - \text{wt}(\mathbf{s})\}$$

— число элементов в этом множестве.

Предложение 2.2.

$$\text{char } V(\lambda) = \sum_{\mu \in P} S(\lambda)_\mu e^\mu.$$

Преимущество такого подхода в том, что он дает комбинаторную формулу для градуированного характера. Напомним, что $\text{gr } V(\lambda)$ несет дополнительную градуировку $V(\lambda)^\mu$ на $V(\lambda)$:

$$\text{gr } V(\lambda)^\mu = \bigoplus_{s \geq 0} \text{gr}_s V(\lambda)^\mu = \bigoplus_{s \geq 0} V(\lambda)_s^\mu / V(\lambda)_{s-1}^\mu.$$

Градуированный характер весового пространства — это полином

$$p_{\lambda,\mu}(q) := \sum_{s \geq 0} \left(\dim V(\lambda)_s^\mu / V(\lambda)_{s-1}^\mu \right) q^s$$

и градуированный характер $V(\lambda)$

$$\text{char}_q(V(\lambda)) = \sum_{\mu \in P} p_{\lambda, \mu}(q) e^{\mu}.$$

Имеется естественное понятие *степени* мульти-показателей.

Определение 2.3.

$$\deg(\mathbf{s}) := \sum_{1 \leq j \leq k \leq n} s_{j,k}.$$

Известен следующий факт.

Следствие 2.2.

$$p_{\lambda, \mu}(q) = \sum_{\mathbf{s} \in S(\lambda)^\mu} q^{\deg \mathbf{s}}, \quad \text{char}_q(V(\lambda)) = \sum_{\mathbf{s} \in S(\lambda)} e^{\lambda - \text{wt}(\mathbf{s})} q^{\deg(\mathbf{s})}.$$

Заметим, что $\text{gr } V(\lambda) = S(\mathfrak{n}^-)v_\lambda$ — циклический $S(\mathfrak{n}^-)$ -модуль, так что

$$\text{gr } V(\lambda) \simeq S(\mathfrak{n}^-)/I(\lambda)$$

для некоторого идеала $I(\lambda) \subset S(\mathfrak{n}^-)$. Например, для любого положительного корня α степень $f_\alpha^{(\lambda, \alpha)+1}$ корневого вектора $f_\alpha \in \mathfrak{n}_{-\alpha}^-$ принадлежит $I(\lambda)$, так как $f_\alpha^{(\lambda, \alpha)+1}v_\lambda = 0$ в $V(\lambda)$. Чтобы описать $I(\lambda)$ явно, рассмотрим действие противоположной подалгебры $\mathfrak{n}^+$ на $V(\lambda)$. Легко видеть, что $\mathfrak{n}^+V(\lambda)_s \hookrightarrow V(\lambda)_s$, так что получаем структуру и $U(\mathfrak{n}^+)$ -модуля на $\text{gr } V(\lambda)$. Верна следующая теорема.

Теорема 2.2. $I(\lambda) = S(\mathfrak{n}^-) \left(U(\mathfrak{n}^+) \circ \text{span}\{f_\alpha^{(\lambda, \alpha)+1}, \alpha > 0\} \right)$.

Эту теорему нужно понимать как коммутативный аналог хорошо известного описания $V(\lambda)$ как фактора

$$V(\lambda) \simeq U(\mathfrak{n}^-)/\langle f_\alpha^{(\lambda, \alpha)+1}, \alpha > 0 \rangle$$

(см., например, [36, 45]).

2.2. Симплектический случай. Пусть R^+ — множество положительных корней $\mathfrak{sp}_{2n}$. Для $\alpha \in R^+$ фиксируем ненулевой элемент $f_\alpha \in \mathfrak{n}_{-\alpha}^-$. Пусть α_i, ω_i $i = 1, \dots, n$, — простые корни и фундаментальные веса. Все положительные корни $\mathfrak{sp}_{2n}$ могут быть разделены на две группы:

$$\begin{aligned} \alpha_{i,j} &= \alpha_i + \alpha_{i+1} + \dots + \alpha_j, \quad 1 \leq i \leq j \leq n, \\ \alpha_{i,\bar{j}} &= \alpha_i + \alpha_{i+1} + \dots + \alpha_n + \alpha_{n-1} + \dots + \alpha_j, \quad 1 \leq i \leq j \leq n \end{aligned}$$

(заметим, что $\alpha_{i,n} = \alpha_{i,\bar{n}}$). Мы будем использовать следующие короткие обозначения:

$$\alpha_i = \alpha_i, \quad \alpha_{\bar{i}} = \alpha_{i,\bar{i}}, \quad f_{i,j} = f_{\alpha_{i,j}}, \quad f_{i,\bar{j}} = f_{\alpha_{i,\bar{j}}}.$$

Зафиксируем следующий порядок на множестве индексов $J = \{1, \dots, n, \overline{n-1}, \dots, \bar{1}\}$:

$$1 < 2 < \dots < n-1 < n < \overline{n-1} < \dots < \bar{1}.$$

Пусть $\mathfrak{sp}_{2n} = \mathfrak{n}^+ \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}^-$ — картановское разложение. Рассмотрим возрастающую фильтрацию на универсальной обертывающей алгебре $U(\mathfrak{n}^-)$:

$$U(\mathfrak{n}^-)_s = \text{span}\{x_1 \dots x_l : x_i \in \mathfrak{n}^-, l \leq s\};$$

например, $U(\mathfrak{n}^-)_0 = \mathbb{C} \cdot 1$.

Для доминантного интегрального веса $\lambda = m_1\omega_1 + \dots + m_n\omega_n$ пусть $V(\lambda)$ — соответствующий неприводимый $\mathfrak{sp}_{2n}$ -модуль старшего веса с вектором старшего веса v_λ . Так как $V(\lambda) = U(\mathfrak{n}^-)v_\lambda$, получаем возрастающую фильтрацию $V(\lambda)_s$ на $V(\lambda)$:

$$V(\lambda)_s = U(\mathfrak{n}^-)_s v_\lambda.$$

Назовем эту фильтрацию ПБВ-фильтрацией и изучим соответствующее присоединенное градуированное пространство $\text{gr } V(\lambda)$.

Лемма 2.2. Действие $U(\mathfrak{n}^-)$ на $V(\lambda)$ индуцирует структуру $S(\mathfrak{n}^-)$ -модуля на $\text{gr } V(\lambda)$ и

$$\text{gr}(V(\lambda)) = S(\mathfrak{n}^-)v_\lambda.$$

Действие $U(\mathfrak{n}^+)$ на $V(\lambda)$ индуцирует структуру $U(\mathfrak{n}^+)$ -модуля на $\text{gr } V(\lambda)$.

Наши цели:

- (i) описать $\text{gr } V(\lambda)$ как $S(\mathfrak{n}^-)$ -модуль, т.е. описать такой идеал $I(\lambda) \hookrightarrow S(\mathfrak{n}^-)$, что $\text{gr } V(\lambda) \simeq S(\mathfrak{n}^-)/I(\lambda)$;
- (ii) найти базис $\text{gr } V(\lambda)$.

Для того чтобы описать базис, введем понятия симплектического пути Дика.

Определение 2.4. Симплектический путь Дика — это последовательность

$$\mathbf{p} = (p(0), p(1), \dots, p(k)), \quad k \geq 0,$$

положительных корней, удовлетворяющая следующим условиям:

- (a) первый корень простой, $p(0) = \alpha_i$ для некоторого $1 \leq i \leq n$;
- (b) последний элемент — или простой корень, или старший корень; конкретнее, $p(k) = \alpha_j$ или $p(k) = \alpha_{\bar{j}}$ для некоторых $i \leq j \leq n$;
- (c) промежуточные элементы подчиняются следующему правилу: если $p(s) = \alpha_{r,q}$, где $r, q \in J$, то следующий элемент последовательности имеет вид $p(s+1) = \alpha_{r,q+1}$ или $p(s+1) = \alpha_{r+1,q}$, где $x+1$ означает наименьший элемент J , больший x .

Приведем пример пути Дика для $\mathfrak{sp}_8$, расположив положительные корни в форме треугольника. На этой диаграмме путь Дика — это путь в ориентированном графе, начинающийся с простого корня и заканчивающийся в одной из граничных вершин:

$$\begin{array}{cccccccc} \alpha_{1,1} & \rightarrow & \alpha_{1,2} & \rightarrow & \alpha_{1,3} & \rightarrow & \alpha_{1,4} & \rightarrow & \alpha_{1,\bar{3}} & \rightarrow & \alpha_{1,\bar{2}} & \rightarrow & \alpha_{1,\bar{1}} \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & \alpha_{2,2} & \rightarrow & \alpha_{2,3} & \rightarrow & \alpha_{2,4} & \rightarrow & \alpha_{2,\bar{3}} & \rightarrow & \alpha_{2,\bar{2}} & & \\ & & & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\ & & & & \alpha_{3,3} & \rightarrow & \alpha_{3,4} & \rightarrow & \alpha_{3,\bar{3}} & & & & \\ & & & & & & \downarrow & & & & & & \\ & & & & & & \alpha_{4,4} & & & & & & \end{array}$$

Обозначим через $\mathbb{D}$ множество путей Дика. Для доминантного веса $\lambda = \sum_{i=1}^n m_i \omega_i$ пусть $P(\lambda) \subset \mathbb{R}_{\geq 0}^{n^2}$ — многогранник

$$P(\lambda) := \left\{ (s_\alpha)_{\alpha > 0} \left| \forall \mathbf{p} \in \mathbb{D} : \begin{array}{l} \text{если } p(0) = \alpha_i, p(k) = \alpha_j, \\ \text{то } s_{p(0)} + \dots + s_{p(k)} \leq m_i + \dots + m_j; \\ \text{если } p(0) = \alpha_i, p(k) = \alpha_{\bar{j}}, \\ \text{то } s_{p(0)} + \dots + s_{p(k)} \leq m_i + \dots + m_n \end{array} \right. \right\}, \quad (2)$$

и пусть $S(\lambda)$ — множество целочисленных точек в $P(\lambda)$.

Для мульти-показателя $\mathbf{s} = \{s_\beta\}_{\beta > 0}$, $s_\beta \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, обозначим через $f^{\mathbf{s}}$ элемент

$$f^{\mathbf{s}} = \prod_{\beta \in R^+} f_\beta^{s_\beta} \in S(\mathfrak{n}^-).$$

Теорема 2.3. Множество $f^{\mathbf{s}}v_\lambda$, $\mathbf{s} \in S(\lambda)$, дает базис $\text{gr } V(\lambda)$.

Напомним, что $\text{gr } V(\lambda) = S(\mathfrak{n}^-)v_\lambda$ — циклический $S(\mathfrak{n}^-)$ -модуль. В частности,

$$\text{gr } V(\lambda) \simeq S(\mathfrak{n}^-)/I(\lambda)$$

для некоторого идеала $I(\lambda) \subset S(\mathfrak{n}^-)$. Чтобы описать $I(\lambda)$ явно, используем обозначения

$$\begin{aligned}\alpha_{i,j} &= \alpha_i + \alpha_{i+1} + \dots + \alpha_j, \quad 1 \leq i \leq j \leq n, \\ \alpha_{i,\bar{j}} &= \alpha_i + \alpha_{i+1} + \dots + \alpha_n + \alpha_{n-1} + \dots + \alpha_j, \quad 1 \leq i \leq j \leq n.\end{aligned}$$

Рассмотрим действие противоположной алгебры $\mathfrak{n}^+$ на $V(\lambda)$. Легко видеть, что $\mathfrak{n}^+V(\lambda)_s \hookrightarrow V(\lambda)_s$, так что мы получаем и структуру $U(\mathfrak{n}^+)$ -модуля на $\text{gr } V(\lambda)$.

Теорема 2.4. *Идеал $I(\lambda)$ как $S(\mathfrak{n}^-)$ -модуль порожден подпространством*

$$U(\mathfrak{n}^+) \circ \text{span} \left\{ f_{\alpha_{i,j}}^{(\lambda, \alpha_{i,j})+1}, \quad 1 \leq i \leq j \leq n-1, \quad f_{\alpha_{i,\bar{i}}}^{(\lambda, \alpha_{i,n})+1}, \quad 1 \leq i \leq n \right\}.$$

3. ВЫРОЖДЕННЫЕ МНОГООБРАЗИЯ ФЛАГОВ

3.1. Классический случай. Пусть Q и P — корневая и весовая решетка $\mathfrak{h}^*$: P порождена ω_i , Q порождена α_i . Введем обозначения

$$Q_{\pm} = \bigoplus_{i=1}^l \pm \mathbb{Z}_{\geq 0} \alpha_i, \quad P_{\pm} = \bigoplus_{i=1}^l \pm \mathbb{Z}_{\geq 0} \omega_i, \quad \mathbb{Z}_{\geq 0} = \{n \in \mathbb{Z} : n \geq 0\}.$$

Пусть $(\cdot, \cdot)$ — форма Киллинга на $\mathfrak{h}^*$. В частности, имеем $(\alpha_i, \omega_j) = \delta_{i,j}$.

Рассмотрим весовое разложение

$$\mathfrak{n} = \bigoplus_{\alpha \in Q_+} \mathfrak{n}_{\alpha}, \quad \mathfrak{n}^- = \bigoplus_{\alpha \in Q_+} \mathfrak{n}_{-\alpha},$$

где $\mathfrak{n}_{\alpha}$ и $\mathfrak{n}_{-\alpha}$ — одномерные пространства, порожденные элементами e_{α} и f_{α} . Имеем

$$[h, e_{\alpha}] = \alpha(h)e_{\alpha}, \quad [h, f_{\alpha}] = -\alpha(h)f_{\alpha}, \quad h \in \mathfrak{h}.$$

Элементы e_{α_i} и f_{α_i} обозначим соответственно через e_i и f_i . Тогда e_{α} , f_{α} , $\alpha \in Q_+$, и $h_i = [e_i, f_i]$ образуют базис Шевалле алгебры $\mathfrak{g}$.

Пусть G — простая группа Ли с алгеброй Ли $\mathfrak{g}$. Пусть B , H , N и N^- — борелевская, картановская и унитарные подгруппы G . Соответствующие алгебры Ли — это $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{n}$ и $\mathfrak{n}^-$. Каждое пространство V_{λ} , $\lambda \in P_+$ оснащено естественной структурой G -модуля. Таким образом, G действует на проективизации $\mathbb{P}(V_{\lambda})$. (Обобщенное) многообразие флагов $\mathcal{F}_{\lambda} \hookrightarrow \mathbb{P}(V_{\lambda})$ определяется как G -орбита прямой $\mathbb{C}v_{\lambda}$. Каждое многообразие $\mathcal{F}_{\lambda}$ изоморфно фактору G по параболической подгруппе, оставляющей точку $\mathbb{C}v_{\lambda} \in \mathbb{P}(V_{\lambda})$ неподвижной.

Напомним основные конструкции теории многообразий флагов в случае $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n$. Наш главный источник — [35, ч. III] (подход в духе теории Ли см. в [47]).

Пусть $1 \leq d_1 < \dots < d_s \leq n-1$ — упорядоченный набор чисел. Тогда для любых положительных целых $a_1, \dots, a_s$ многообразие $\mathcal{F}_{a_1\omega_{d_1} + \dots + a_s\omega_{d_s}}$ изоморфно многообразию частичных флагов

$$\mathcal{F}(d_1, \dots, d_s) = \{V_1 \hookrightarrow V_2 \hookrightarrow \dots \hookrightarrow V_s \hookrightarrow \mathbb{C}^n : \dim V_i = d_i\}.$$

В частности, если $s = 1$, то $\mathcal{F}(d)$ — грассманиан $\text{Gr}(d, n)$, а для $s = n-1$ $\mathcal{F}(1, \dots, n-1)$ — многообразие полных флагов. Напомним, что

$$V_{\omega_d} = \Lambda^d(V_{\omega_1}) = \Lambda^d(\mathbb{C}^n)$$

и вложение $\text{Gr}(d, n) \hookrightarrow \mathbb{P}(\Lambda^d V_{\omega_1})$ определяется так: подпространство с базисом $w_1, \dots, w_d$ отображается в $\mathbb{C}w_1 \wedge \dots \wedge w_d$. Для последовательности $d_1, \dots, d_s$ имеются вложения:

$$\mathcal{F}(d_1, \dots, d_s) \hookrightarrow \text{Gr}(d_1, n) \times \dots \times \text{Gr}(d_s, n) \hookrightarrow \mathbb{P}(V_{\omega_{d_1}}) \times \dots \times \mathbb{P}(V_{\omega_{d_s}}).$$

Композиция этих вложений называется плюккеровым вложением. Образ описывается явно в терминах соотношений Плюккера. А именно, пусть $v_1, \dots, v_n$ — базис $\mathbb{C}^n = V_{\omega_1}$. Тогда получаем базис v_J пространства V_{ω_d} , $v_J = v_{j_1} \wedge \dots \wedge v_{j_d}$, помечаемый последовательностями $J = (1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_d \leq n)$.

$\dots < j_d \leq n$). Пусть $X_J \in V_{\omega_d}^*$ — двойственный базис; теми же символами обозначим координаты вектора $v \in V_{\omega_d}$: $X_J = X_J(v)$. Образ вложения

$$\mathcal{F}(d_1, \dots, d_s) \hookrightarrow \bigtimes_{i=1}^s \mathbb{P}(V_{\omega_{d_i}})$$

определяется соотношениями Плюккера. Эти соотношения нумеруются парами чисел $p \geq q$, $p, q \in \{d_1, \dots, d_s\}$, числом k , $1 \leq k \leq q$, и парой последовательностей $L = (l_1, \dots, l_p)$, $J = (j_1, \dots, j_q)$, $1 \leq l_\alpha, j_\beta \leq n$. Соответствующее соотношение обозначается $R_{L,J}^k$ и задается следующим образом:

$$R_{L,J}^k = X_L X_J - \sum_{1 \leq r_1 < \dots < r_k \leq p} X_{L'} X_{J'}, \quad (3)$$

где L' , J' получаются из L , J заменой k -наборов $(l_{r_1}, \dots, l_{r_k})$ и $(j_1, \dots, j_k)$ в L и J соответственно, т.е.,

$$J' = (l_{r_1}, \dots, l_{r_k}, j_{k+1}, \dots, j_q), \quad L' = (l_1, \dots, l_{r_1-1}, j_1, l_{r_1+1}, \dots, l_{r_2-1}, j_2, \dots, l_p).$$

Заметим, что для любого $\sigma \in S_d$ мы предполагаем выполненным равенство

$$X_{j_{\sigma(1)}, \dots, j_{\sigma(d)}} = (-1)^\sigma X_{j_1, \dots, j_d}$$

в (3). Обозначим идеал, порожденный всеми $R_{L,J}^k$, через $I(d_1, \dots, d_s)$. Важным фактом является то, что этот идеал прост.

Напомним, что координатное кольцо $\mathcal{F}(d_1, \dots, d_s)$ — это фактор-кольцо

$$Q(d_1, \dots, d_s) = \mathbb{C}[X_{j_1, \dots, j_d}] / I(d_1, \dots, d_s),$$

где переменные $X_{j_1, \dots, j_d}$ помечены $d = d_1, \dots, d_s$ и $1 \leq j_1 < \dots < j_d \leq n$.

Кольцо $Q(d_1, \dots, d_s)$ можно описать и двумя другими способами. Во-первых, напомним, что для любого $\lambda, \mu \in P^+$ имеет место вложение $\mathfrak{g}$ -модулей

$$V_{\lambda+\mu} \hookrightarrow V_\lambda \otimes V_\mu, \quad v_{\lambda+\mu} \mapsto v_\lambda \otimes v_\mu.$$

Следовательно, получаем двойственные сюръективные отображения $V_\lambda^* \otimes V_\mu^* \rightarrow V_{\lambda+\mu}^*$, которые определяют алгебру

$$\bar{Q}(d_1, \dots, d_s) = \bigoplus_{\lambda = m_1 \omega_{d_1} + \dots + m_s \omega_{d_s}} V_\lambda^*.$$

Тогда имеем изоморфизм алгебр $\bar{Q}(d_1, \dots, d_s) \simeq Q(d_1, \dots, d_s)$.

Можно также вложить кольцо $Q(d_1, \dots, d_s)$ в кольцо полиномов (и, таким образом, показать что $I(d_1, \dots, d_s)$ прост). А именно, пусть $Z_{i,j}$, $1 \leq i, j \leq n$, — множество переменных. Тогда отображение

$$X_{j_1, \dots, j_d} \mapsto \det(Z_{l, j_k})_{1 \leq l, k \leq d} \quad (4)$$

индуцирует вложение

$$Q(d_1, \dots, d_s) \hookrightarrow \mathbb{C}[Z_{i,j}]_{1 \leq i, j \leq n}.$$

Кольцо $Q(d_1, \dots, d_s)$ имеет базис, описываемый в терминах полустандартных таблиц. Точнее, для разбиения $\lambda = (\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_{n-1} \geq 0)$ за Y_λ обозначим соответствующую диаграмму Юнга. Например, $Y_{(7,5,4,2,2)}$ имеем следующую диаграмму:

Мы нумеруем строки и столбцы Y_λ сверху вниз и слева направо. Таким образом, ячейки Y_λ помечены парами (i, j) . Через μ_j мы обозначаем длину j -го столбца.

Таблица T формы λ — это заполнение Y_λ числами $T_{i,j} \in \{1, \dots, n\}$. Число $T_{i,j}$ вписано в клетку в i -й строке и в j -м столбце. Числа $T_{i,j}$ подчиняются следующему условию: из $i_1 < i_2$ следует $T_{i_1, j} < T_{i_2, j}$. Таблица называется полустандартной если, кроме того, из $j_1 < j_2$ следует $T_{i, j_1} \leq T_{i, j_2}$.

Пусть $P^+(d_1, \dots, d_s) = \mathbb{Z}_{+}\omega_{d_1} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_{+}\omega_{d_s}$. Тогда мы имеем естественное разложение

$$Q(d_1, \dots, d_s) = \bigoplus_{\lambda \in P^+(d_1, \dots, d_s)} Q_{\lambda}(d_1, \dots, d_s) = \bigoplus_{\lambda \in P^+(d_1, \dots, d_s)} V_{\lambda}^*.$$

Напомним, что весу $\lambda = \sum_{i=1}^{n-1} m_i \omega_i$ можно сопоставить разбиение

$$(m_1 + \dots + m_{n-1}, m_2 + \dots + m_{n-1}, \dots, m_{n-1}),$$

которое мы обозначаем тем же символом λ .

Наконец, для таблицы T формы λ мы определяем элемент

$$X_T = \prod_{j=1}^{\lambda_1} X_{T_{1,j}, \dots, T_{\mu_j, j}}$$

(заметим, что из $\lambda \in P^+(d_1, \dots, d_s)$ следует $\mu_j \in \{d_1, \dots, d_s\}$ для всех j). Тогда элементы X_T , помеченные полустандартными таблицами формы λ , дают базис $Q(d_1, \dots, d_s)$.

3.2. Абелевы вырождения. Рассмотрим ПВВ-фильтрацию на модуле старшего веса V_{λ} . Пространство V_{λ} снабжено возрастающей фильтрацией F_s :

$$F_0 = \mathbb{C}v_{\lambda}, \quad F_s = \text{span} \left\{ x_1 \dots x_k v_{\lambda} : k \leq s, x_i \in \mathfrak{n}^- \right\}.$$

Другими словами, $F_{s+1} = F_s + \mathfrak{n}^- F_s$. Обозначаем через V_{λ}^a присоединенное градуированное пространство

$$V_{\lambda}^a = F_0 \oplus \bigoplus_{s=1}^{\infty} F_s / F_{s-1}. \quad (5)$$

Имеем

$$V_{\lambda}^a = \bigoplus_{s \geq 0} V_{\lambda}^a(s), \quad V_{\lambda}^a(s) = F_s / F_{s-1}.$$

Элемент $x \in V_{\lambda}^a(s)$ называется однородным ПВВ-степени s .

Опишем алгебру Ли и группу Ли, действующие на V_{λ}^a .

Определение 3.1. Алгебра Ли $\mathfrak{g}^a$ изоморфна $\mathfrak{g}$ как векторное пространство, и скобка $[\cdot, \cdot]^a$ задана следующими формулами:

$$\begin{aligned} [h, f_{\alpha}]^a &= -\alpha(h)f_{\alpha}, & [h, e_{\alpha}]^a &= \alpha(h)e_{\alpha}, & [h, h_1]^a &= 0 & \forall h, h_1 \in \mathfrak{h}, \quad \alpha \in Q_+, \\ [f_{\alpha}, f_{\beta}]^a &= 0, & [e_{\alpha}, e_{\beta}]^a &= [e_{\alpha}, e_{\beta}] & \forall \alpha, \beta \in Q_+, \\ [e_{\alpha}, f_{\beta}]^a &= \begin{cases} [e_{\alpha}, f_{\beta}], & \text{если } \beta - \alpha \in Q_+, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases} \end{aligned}$$

Непосредственно проверяется что $[\cdot, \cdot]^a$ удовлетворяет тождеству Якоби. Буква a обозначает абелевость, т.к. алгебра $\mathfrak{n}^-$ абелева со скобкой $[\cdot, \cdot]^a$. Мы опускаем a в обозначении $[\cdot, \cdot]^a$, если ясно о $\mathfrak{g}$ или $\mathfrak{g}^a$ идет речь.

Замечание 3.1. Алгебра Ли $\mathfrak{g}^a$ — это полупрямая сумма борелевской алгебры $\mathfrak{b}$ и абелева радикала $(\mathfrak{n}^-)^a$, изоморфного $\mathfrak{n}^-$ как векторное пространство. Действие $\mathfrak{b}$ на $(\mathfrak{n}^-)^a$ может быть описано следующим образом. Алгебра Ли $\mathfrak{g}$ естественно снабжена структурой присоединенного $\mathfrak{b}$ -модуля и $\mathfrak{b} \hookrightarrow \mathfrak{g}$ — это подмодуль. Следовательно, мы получаем структуру фактор- $\mathfrak{b}$ -модуля на пространстве $(\mathfrak{n}^-)^a \simeq \mathfrak{g}/\mathfrak{b}$.

Замечание 3.2. Алгебру Ли $\mathfrak{g}^a$ можно рассматривать как вырождение $\mathfrak{g}$. Действительно, пусть $c_{\alpha,\beta}^{++}$, $c_{\alpha,\beta}^{--}$ и $c_{\alpha,\beta}^{+-}$ — структурные константы $\mathfrak{g}$, т.е.

$$\begin{aligned} [e_\alpha, e_\beta] &= c_{\alpha,\beta}^{++} e_{\alpha+\beta}, & [f_\alpha, f_\beta] &= c_{\alpha,\beta}^{--} f_{\alpha+\beta}, \\ [e_\alpha, f_\beta] &= c_{\alpha,\beta}^{+-} f_{\beta-\alpha}, & \beta - \alpha \in Q_+, & [e_\alpha, f_\beta] = c_{\alpha,\beta}^{+-} e_{\alpha-\beta}, & \alpha - \beta \in Q_+, \\ [e_\alpha, f_\alpha] &= h_\alpha \in \mathfrak{h}. \end{aligned}$$

Пусть $\mathfrak{g}(\varepsilon)$ — подалгебра $\mathfrak{g}$, порожденная элементами $e_\alpha(\varepsilon) = e_\alpha$, $f_\alpha(\varepsilon) = \varepsilon f_\alpha$, $\alpha \in Q_+$ и $\mathfrak{h}$. Очевидно, $\mathfrak{g}(\varepsilon) = \mathfrak{g}$ для любого $\varepsilon \neq 0$. Тогда имеем

$$\begin{aligned} [e_\alpha(\varepsilon), e_\beta(\varepsilon)] &= c_{\alpha,\beta}^{++} e_{\alpha+\beta}(\varepsilon), & [f_\alpha(\varepsilon), f_\beta(\varepsilon)] &= \varepsilon c_{\alpha,\beta}^{--} f_{\alpha+\beta}(\varepsilon), \\ [e_\alpha(\varepsilon), f_\beta(\varepsilon)] &= c_{\alpha,\beta}^{+-} f_{\beta-\alpha}(\varepsilon), & \beta - \alpha \in Q_+, \\ [e_\alpha(\varepsilon), f_\beta(\varepsilon)] &= \varepsilon c_{\alpha,\beta}^{+-} e_{\alpha-\beta}(\varepsilon), & \alpha - \beta \in Q_+, \\ [e_\alpha(\varepsilon), f_\alpha(\varepsilon)] &= \varepsilon h_\alpha. \end{aligned}$$

В пределе $\varepsilon \rightarrow 0$, коммутационные соотношения выше дают соотношения из определения 3.1.

Опишем группу Ли G^a , которая соответствует $\mathfrak{g}^a$. Пусть $M = \dim \mathfrak{n}$ и $\mathbb{G}_a$ — аддитивная группа поля $\mathbb{C}$. Группа Ли $\mathbb{G}_a^M$ может быть естественно отождествлена группой Ли абелевой алгебры Ли $(\mathfrak{n}^-)^a \hookrightarrow \mathfrak{g}^a$. Заметим, что B действует на $\mathfrak{g}$ через ограничение присоединенного G -действия. Так как $\mathfrak{b} \hookrightarrow \mathfrak{g}$ B -инвариантна, получаем структуру B -модуля на векторном пространстве $(\mathfrak{n}^-)^a \simeq \mathfrak{g}/\mathfrak{b}$.

Определение 3.2. Группа Ли G^a — полупрямое произведение $\mathbb{G}_a^M \rtimes B$ нормальной подгруппы $\mathbb{G}_a^M$ и борелевской подгруппы B . Действие сопряжениями B на $\mathbb{G}_a^M$ индуцировано действием B на $(\mathfrak{n}^-)^a$, заданным выше.

Следующее утверждение простое, но важное для нас. Рассмотрим градуированные модули

$$V_\lambda^a = F_0 \oplus \bigoplus_{s \geq 1} F_s / F_{s-1}$$

(см. (5)).

Предложение 3.1. Для любого $\lambda \in P_+$ структура $\mathfrak{g}$ -модуля на V_λ индуцирует структуры $\mathfrak{g}^a$ - и G^a -модулей на V_λ^a .

Доказательство. Действие алгебры Ли $\mathfrak{n}^-$ на V_λ индуцирует действие абелевой алгебры $(\mathfrak{n}^-)^a \hookrightarrow \mathfrak{g}^a$ на V_λ^a . Действительно, для любого $\alpha \in Q_+$ имеем $f_\alpha F_s \hookrightarrow F_{s+1}$. Следовательно, получаем действие операторов f_α на градуированном пространстве V_λ^a , отображениях F_s / F_{s-1} в F_{s+1} / F_s . Из определения F_s получаем, что все эти операторы коммутируют. Теперь рассмотрим действие $\mathfrak{b}$ на V_λ . Так как $x F_s \hookrightarrow F_s$ для любого $x \in \mathfrak{b}$, получаем действие $\mathfrak{b}$ на градуированном пространстве V_λ^a , отображающее каждое F_s / F_{s-1} в себя. Теперь легко видеть, что действие абелевой $(\mathfrak{n}^-)^a$ и $\mathfrak{b}$ удовлетворяет соотношениям из определения 3.1. Следовательно, получаем структуру $\mathfrak{g}^a$ -модуля на V_λ^a . Группа G^a действует на V_λ^a экспонентами операторов из $\mathfrak{g}^a$. $\square$

Замечание 3.3. Пространство V_λ^a — циклический модуль над универсальной обертывающей алгеброй $(\mathfrak{n}^-)^a \hookrightarrow \mathfrak{g}^a$ и, таким образом, может быть отождествлен с фактором алгебры полиномов от переменных f_α , $\alpha \in Q_+$ по некоторому идеалу $I(\lambda)$:

$$V_\lambda^a \simeq \mathbb{C}[f_\alpha]_{\alpha \in Q_+} / I(\lambda).$$

Операторы $e_\alpha \in \mathfrak{n}$ действуют на этом факторе как дифференциальные операторы. Идеал для типа A был описан в [30].

Пример 3.1. Пусть $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n$, $\lambda = \omega_d$, $1 \leq d \leq n-1$, и v_J — базис модуля $V_{\omega_d} = \Lambda^d(\mathbb{C}^n)$. Для набора $J = (j_1, \dots, j_d)$ определим ПБВ-степень J по формуле

$$\deg J = \#\{r : j_r > d\}. \quad (6)$$

Тогда s -я компонента ПБВ-фильтрации F_s порождена векторами v_J для $\deg J \leq s$. Следовательно, образы элементов v_J для $\deg J = s$ определяют базис $F_s/F_{s-1} \hookrightarrow V_{\omega_d}^a$. Обозначим эти образы через v_J^a и координаты (двойственный базис) через X_J^a .

Действие $\mathfrak{g}^a$ на $V_{\omega_d}^a$ может быть выписано явно. А именно, для $1 \leq i \leq j < n$ пусть $\alpha_{i,j} = \alpha_i + \dots + \alpha_j$ — положительные корни $\mathfrak{sl}_n$ и пусть $f_{i,j} = f_{\alpha_{i,j}}$, $e_{i,j} = e_{\alpha_{i,j}}$. Тогда легко видеть, что

$$\begin{aligned} f_{i,j}v_J^a &= \begin{cases} \sum_{r=1}^d \delta_{i,j_r} v_{j_1, \dots, j_{r-1}, j+1, j_{r+1}, \dots, j_d}^a, & \text{если } i \leq d, j \geq d, \\ 0 & \text{в противном случае;} \end{cases} \\ e_{i,j}v_J^a &= \begin{cases} \sum_{r=1}^d \delta_{j+1, j_r} v_{j_1, \dots, j_{r-1}, i, j_{r+1}, \dots, j_d}^a, & \text{если } d < i \leq j \text{ или } i \leq j < d, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases} \end{aligned} \quad (7)$$

Заметим, что $V_{\omega_d}^a$ не изоморфно $\Lambda^d(V_{\omega_1}^a)$.

Представления V_λ^a for $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n$ были изучены в [30]. В частности, была доказана следующая лемма.

Лемма 3.1. Пусть $\lambda, \mu \in P_+$. Тогда

$$V_{\lambda+\mu}^a \simeq U(\mathfrak{g}^a)(v_\lambda \otimes v_\mu) \hookrightarrow V_\lambda^a \otimes V_\mu^a$$

как $\mathfrak{g}^a$ -модули.

Определим теперь вырожденные многообразия флагов $\mathcal{F}_\lambda^a$. Пусть $[v_\lambda] \in \mathbb{P}(V_\lambda^a)$ — прямая $\mathbb{C}v_\lambda$.

Определение 3.3. Многообразие $\mathcal{F}_\lambda^a \hookrightarrow \mathbb{P}(V_\lambda^a)$ — это замыкание G^a -орбиты $[v_\lambda]$,

$$\mathcal{F}_\lambda^a = \overline{G^a[v_\lambda]} = \overline{\mathbb{G}^M v_\lambda} \hookrightarrow \mathbb{P}(V_\lambda^a).$$

Заметим, что орбита $G[v_\lambda] \hookrightarrow \mathbb{P}(V_\lambda)$ совпадает с собственным замыканием, а орбита $G^a[v_\lambda]$ — нет. Более подробно, так как борелевская подгруппа B сохраняет $[v_\lambda]$, орбита $G^a[v_\lambda] = \mathbb{G}_a^M[v_\lambda]$ — это аффинное пространство $\mathbb{C}^{M_\lambda}$, где

$$M_\lambda = \#\{\alpha \in Q_+ : (\lambda, \alpha) > 0\}.$$

Действительно,

$$\mathbb{G}_a^M[v_\lambda] = \left\{ \exp \left(\sum_{\alpha \in Q_+} c_\alpha f_\alpha \right) [v_\lambda], c_\alpha \in \mathbb{C} \right\}.$$

Так как $f_\alpha v_\lambda = 0$, если и только если $(\lambda, \alpha) = 0$, мы получаем $\mathbb{G}_a^M[v_\lambda] \simeq \mathbb{C}^{M_\lambda}$.

Замечание 3.4. Многообразие $\mathcal{F}_\lambda^a$ является $\mathbb{G}_a^{M_\lambda}$ -эквивариантной компактификацией аффинного пространства $\mathbb{C}^{M_\lambda}$. Другими словами, $\mathcal{F}_\lambda^a$ — это так называемые $\mathbb{G}_a^M$ -многообразия (см. [44, 3, 4]).

3.3. Соотношения Плюккера, координатные кольца и ПБВ-таблицы: вырожденный случай. Положим $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n$ и рассмотрим многообразия $\mathcal{F}_{\omega_d}^a$.

Лемма 3.2. $\mathcal{F}_{k\omega_d}^a \simeq \mathcal{F}_{k\omega_d}$ для всех $d = 1, \dots, n-1$, $k \geq 0$.

Доказательство. Заметим, что для фиксированного d элементы f_α для $(\alpha, \omega_d) \neq 0$ попарно коммутируют в $\mathfrak{sl}_n$. Следовательно,

$$\mathcal{F}_{\omega_d} = \overline{\left\{ \exp \left(\sum_{\alpha: (\alpha, \omega_d) \neq 0} c_\alpha f_\alpha \right) [v_{\omega_d}], c_\alpha \in \mathbb{C} \right\}} \simeq \mathcal{F}_{\omega_d}^a. \quad \square$$

Замечание 3.5. Причина, по которой лемма 3.2 верна для всех фундаментальных весов, заключается в том, что все ω_d коминускульны для типа A (радикал, соответствующий каждому ω_d , абелев). Это неверно в общем случае для других типов, так что для общей алгебры Ли $\mathfrak{g}$ многообразия $\mathcal{F}_{\omega_d}$ и $\mathcal{F}_{\omega_d}^a$ не совпадают для всех d .

Вследствие леммы 3.1 имеем следующую реализацию многообразий $\mathcal{F}_{\lambda}^a$.

Предложение 3.2. Для $\lambda \in P_+$ пусть $1 \leq d_1 < \dots < d_s < n$ — множество всех таких чисел d , что $(\lambda, \alpha_d) \neq 0$. Тогда

$$\mathcal{F}_{\lambda}^a \simeq \overline{\mathbb{G}_a^M([v_{\omega_{d_1}}] \times \dots \times [v_{\omega_{d_s}}])} \hookrightarrow \mathrm{Gr}(d_1, n) \times \dots \times \mathrm{Gr}(d_s, n).$$

Замечание 3.6. В силу того, что все f_{α} коммутируют в V_{λ}^a , имеем

$$\begin{aligned} \exp \left(\sum_{\alpha \in Q_+} c_{\alpha} f_{\alpha} \right) ([v_{\omega_{d_1}}] \times \dots \times [v_{\omega_{d_s}}]) \\ = \exp \left(\sum_{\alpha: (\alpha, \omega_{d_1}) \neq 0} c_{\alpha} f_{\alpha} \right) [v_{\omega_{d_1}}] \times \dots \times \exp \left(\sum_{\alpha: (\alpha, \omega_{d_s}) \neq 0} c_{\alpha} f_{\alpha} \right) [v_{\omega_{d_s}}]. \end{aligned} \quad (8)$$

Формула выполняется для вырожденной ситуации и не верна в классическом случае. Причина в том, что операторы f_{α} с $(\alpha, \lambda) = 0$ действуют тривиально на V_{λ}^a , но не на самом V_{λ} .

Введем обозначение

$$\mathcal{F}^a(d_1, \dots, d_s) = \mathcal{F}_{\omega_{d_1} + \dots + \omega_{d_s}}^a, \quad 1 \leq d_1 < \dots < d_s < n.$$

Определение 3.4. Пусть $I^a(d_1, \dots, d_s)$ — идеал в кольце полиномов от $X_{j_1, \dots, j_d}^a$, $d = d_1, \dots, d_s$, $1 \leq j_1 < \dots < j_d < n$, порожденный элементами $R_{L, J}^{k; a}$, приведенными ниже. Элементы занумерованы парой чисел $p \geq q$, $p, q \in \{d_1, \dots, d_s\}$, целым числом k , $1 \leq k \leq q$, и наборами $L = (l_1, \dots, l_p)$, $J = (j_1, \dots, j_q)$, которые являются произвольными подмножествами $\{1, \dots, n\}$. Порождающие элементы задаются формулами

$$R_{L, J}^{k; a} = X_{l_1, \dots, l_p}^a X_{j_1, \dots, j_q}^a - \sum_{1 \leq r_1 < \dots < r_k \leq p} X_{l'_1, \dots, l'_p}^a X_{j'_1, \dots, j'_q}^a, \quad (9)$$

где слагаемые в $R_{L, J}^{k; a}$ — это такие слагаемые $R_{L, J}^k$ из (3) (с обозначением a , для точности), что

$$\{l_{r_1}, \dots, l_{r_k}\} \cap \{q+1, \dots, p\} = \emptyset. \quad (10)$$

Замечание 3.7. Начальное слагаемое $X_{l_1, \dots, l_p}^a X_{j_1, \dots, j_q}^a$ так же должно удовлетворять условию (10), т.е. отсутствует в $R_{L, J}^{k; a}$, если $\{j_1, \dots, j_k\} \cap \{q+1, \dots, p\} \neq \emptyset$.

Замечание 3.8. Запишем соотношение $R_{L, J}^k$ в виде $\sum_i X_{L^{(i)}} X_{J^{(i)}}$. Тогда $R_{L, J}^{k; a}$ равно сумме таких слагаемых $X_{L^{(i_0)}} X_{J^{(i_0)}}$, что сумма ПБВ-степеней (6) $\deg L^{(i_0)} + \deg J^{(i_0)}$ минимальна среди всех сумм $\deg L^{(i)} + \deg J^{(i)}$ (заметим, что параметр d в (6) равен p для $L^{(i)}$ и равен q для $J^{(i)}$). На самом деле, среди чисел $l_1, \dots, l_p$ существует по крайней мере один такой k -набор $l_{r_1}, \dots, l_{r_k}$, $r_1 < \dots < r_k$, что

$$\{l_{r_1}, \dots, l_{r_k}\} \cap \{q+1, \dots, p\} = \emptyset.$$

Следовательно, без потери общности можем считать, что

$$\{j_1, \dots, j_k\} \cap \{q+1, \dots, p\} = \emptyset.$$

Теперь предположим, что пара (L', J') получается из (L, J) заменой $(l_{r_1}, \dots, l_{r_k})$ и $(j_1, \dots, j_k)$. Тогда

$$\deg L' + \deg J' = \deg L + \deg J + \#\{i : q+1 \leq l_{r_i} \leq p\}.$$

Следовательно, чтобы получить $R_{L, J}^{k; a}$ из $R_{L, J}^k$, нужно выбрать слагаемые минимальной ПБВ-степени.

Из замечания 3.8 вытекает следующее утверждение.

Следствие 3.1. Идеал $I^a(d_1, \dots, d_s)$ однороден относительно ПБВ-степени.

Разберем несколько примеров.

Пример 3.2. Пусть $s = 1$. Тогда $I^a(d) = I(d)$, так как нет таких чисел l , что $d + 1 \leq l \leq d$, и, следовательно, $R_{L,J}^{k;a} = R_{L,J}^k$ (с точностью до обозначений a в переменных X_J).

Пример 3.3. Пусть $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_3$. Тогда единственный нетривиальный идеал — $I^a(1, 2)$. Он порожден единственным элементом

$$R_{(1,2),(3)}^{1;a} = X_{1,2}^a X_3^a + X_{2,3}^a X_1^a.$$

Заметим, что

$$R_{(1,2),(3)}^1 = X_{1,2} X_3 - X_{1,3} X_2 + X_{2,3} X_1.$$

Среднее слагаемое в $R_{(1,2),(3)}^{1;a}$ отсутствует, потому что

$$\deg(1, 2) + \deg(3) = \deg(2, 3) + \deg(1) = 1, \text{ но } \deg(1, 3) + \deg(2) = 2,$$

или, эквивалентно, потому что 2 удовлетворяет $1 + 1 \leq 2 \leq 2$ (здесь $q = 1, p = 2$).

Пример 3.4. Пусть $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_4$. Рассмотрим идеал $I^a(1, 2)$. Этот идеал порожден следующими элементами:

$$\begin{aligned} R_{(1,2),(3)}^{1;a} &= X_{1,2}^a X_3^a + X_{2,3}^a X_1^a, & R_{(1,2),(4)}^{1;a} &= X_{1,2}^a X_4^a + X_{2,4}^a X_1^a, \\ R_{(1,3),(4)}^{1;a} &= X_{1,3}^a X_4^a - X_{1,4}^a X_3^a + X_{3,4}^a X_1^a, & R_{(2,3),(4)}^{1;a} &= X_{2,3}^a X_4^a - X_{2,4}^a X_3^a, \\ R_{(1,2),(3,4)}^{1;a} &= X_{1,2}^a X_{3,4}^a - X_{1,3}^a X_{2,4}^a + X_{2,3}^a X_{1,4}^a. \end{aligned}$$

Заметим, что соотношение $R_{(1,2),(3,4)}^{1;a}$ в точности то же, что определяет грассманиан $\text{Gr}(2, 4)$.

Пример 3.5. Для произвольного n рассмотрим идеал $I^a(1, n-1)$. Идеал порожден единственным элементом

$$R_{(1,\dots,n-1),(n)}^{1;a} = X_{1,\dots,n-1}^a X_n^a - (-1)^n X_{2,\dots,n}^a X_1^a.$$

В классическом случае соотношение задается так:

$$R_{(1,\dots,n-1),(n)}^1 = \sum_{i=1}^n (-1)^{n-i} X_{1,\dots,\hat{i},\dots,n} X_i.$$

Теорема 3.1. Многообразие $\mathcal{F}^a(d_1, \dots, d_s) \hookrightarrow \bigtimes_{i=1}^s \mathbb{P}(\Lambda^{d_i} \mathbb{C}^n)$ определяется идеалом $I^a(d_1, \dots, d_s)$.

Пример 3.6. Пусть $s = 2, d_1 = 1, d_2 = n-1$. Многообразие $\mathcal{F}^a(1, n-1)$ вложено в произведение

$$\mathbb{P}^{n-1} \times \mathbb{P}^{n-1} = \mathbb{P}(V_{\omega_1}^a) \times \mathbb{P}(V_{\omega_{n-1}}^a).$$

Элементы f_α , которые действуют нетривиально на $V_{\omega_1}^a$, — это $f_{1,i}$, $i = 1, \dots, n-1$; они действуют следующим образом:

$$f_{1,i} v_j^a = \delta_{1,j} v_{i+1}^a.$$

Похожим образом элементы f_α , действующие на $V_{\omega_{n-1}}^a$, — это $f_{i,n-1}$, $i = 1, \dots, n-1$, и они действуют по правилу

$$f_{i,n-1} v_{1,\dots,\hat{j},\dots,n}^a = (-1)^{n-i+1} \delta_{j,n} v_{1,\dots,\hat{i},\dots,n}^a.$$

Следовательно, координаты точки

$$\exp \left(\sum_{i=1}^{n-1} c_{1,i} f_{1,i} + \sum_{i=1}^{n-1} c_{i,n-1} f_{i,n-1} \right) ([v_{\omega_1}] \otimes [v_{\omega_{n-1}}])$$

даются выражением

$$X_1^a = 1, \quad X_i^a = c_{1,i-1} \quad (i > 1), \quad X_{1,\dots,n-1}^a = 1, \quad X_{1,\dots,\hat{i},\dots,n}^a = (-1)^{n-i+1} c_{i,n-1}.$$

Поэтому открытая орбита $\mathcal{F}^a(1, n-1)$ — это следующее множество точек произведения двух открытых пространств:

$$\left[v_1^a + \sum_{i=2}^n c_{1,i-1} v_i^a \right] \times \left[v_{1,\dots,n-1}^a + \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{n-i-1} c_{i,n-1} v_{1,\dots,\hat{i},\dots,n}^a \right].$$

Следовательно, замыкание открытой клетки определено единственным алгебраическим соотношением

$$X_{1,\dots,n-1}^a X_n^a - (-1)^n X_{2,\dots,n}^a X_1^a = 0,$$

которое согласуется с примером 3.5. Напомним, что классическое многообразие $\mathcal{F}(1, n-1)$ задается единственным соотношением $R_{(1,\dots,n-1),(n)}^1$.

Оказывается, что наше вырождение плоское.

Предложение 3.3. *Многообразия $\mathcal{F} = \mathcal{F}(d_1, \dots, d_s)$ и $\mathcal{F}^a = \mathcal{F}^a(d_1, \dots, d_s)$ могут быть соединены плоским семейством $\mathcal{F}^t$ так, что $\mathcal{F}^0 \simeq \mathcal{F}^a$ и $\mathcal{F}^t \simeq \mathcal{F}$, если $t \neq 0$.*

Определим фактор-алгебру

$$Q^a(d_1, \dots, d_s) = \mathbb{C}[X_{i_1, \dots, i_d}^a] / I^a(d_1, \dots, d_s),$$

где переменные $X_{i_1, \dots, i_d}^a$ занумерованы наборами $1 \leq i_1 < \dots < i_d \leq n$, $d = d_1, \dots, d_s$.

Теорема 3.2. *Алгебра $Q^a(d_1, \dots, d_s)$ изоморфна алгебре*

$$\bigoplus_{\lambda \in P^+(d_1, \dots, d_s)} (V_\lambda^a)^*,$$

где умножение

$$(V_\lambda^a)^* \otimes (V_\mu^a)^* \rightarrow (V_{\lambda+\mu}^a)^*$$

индуцировано вложением

$$V_{\lambda+\mu}^a \hookrightarrow V_\lambda^a \otimes V_\mu^a$$

(см. лемму 3.1).

Отметим, что идеал I^a прост. Как и в классическом случае, это следует из реализации фактор-алгебры как подалгебры алгебры полиномов. В классическом случае основную роль играло понятие полустандартной таблицы. Здесь мы приводим ПБВ-версию.

Напомним, что для разбиения $\lambda = (\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_{n-1} \geq 0)$ мы обозначаем через Y_λ соответствующую диаграмму Юнга, а через μ_j — длину j -го столбца.

Определение 3.5. ПБВ-таблица формы λ — это заполнение $T_{i,j}$ диаграммы Юнга Y_λ номерами $1, \dots, n$. Число $T_{i,j} \in \{1, \dots, n\}$ записано в клетку (i, j) . Заполнение $T_{i,j}$ должно удовлетворять следующим требованиям:

- (i) если $T_{i,j} \leq \mu_j$, то $T_{i,j} = i$;
- (ii) если $i_1 < i_2$ и $T_{i_1,j} \neq i_1$, то $T_{i_1,j} > T_{i_2,j}$.

Заметим, что $T_{i,j} \geq i$ для любой пары i, j .

Определение 3.6. Полустандартная ПБВ-таблица формы λ — это ПБВ-таблица формы λ , которая удовлетворяет следующему условию: для любого $j > 1$ и любого i существует такое $i_1 \geq i$, что $T_{i_1,j-1} \geq T_{i,j}$.

Обозначим множество полустандартных ПБВ-таблиц формы λ через ST_λ^a .

Полустандартные ПБВ-таблицы формы λ параметризуют базис V_λ^a . В частности, справедливо следующее утверждение.

Предложение 3.4. *Число стандартных ПБВ-таблиц равно $\dim V_\lambda$.*

Пример 3.7. Пусть $\lambda = \underbrace{(1, \dots, 1)}_d$. Тогда каждый набор $1 \leq i_1 < \dots < i_d \leq n$ дает полустандартную ПБВ-таблицу формы (d) .

Пример 3.8. Пусть $\lambda = (k)$ — одночастичное разбиение. Тогда полустандартная ПБВ-таблица формы λ имеет следующий вид:

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline n & \dots & n & & \dots & 2 & \dots & 2 & 1 & \dots & 1 \\ \hline \end{array}$$

Здесь число $i = 1, \dots, n$ появляется a_i раз, $a_i \geq 0$ и $\sum_{i=1}^n a_i = k$. В частности, число полустандартных ПБВ-таблиц равно $\dim S^k(\mathbb{C}^n) = \dim V_{k\omega_1}$.

Пример 3.9. Пусть $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_3$, $\lambda = (2, 1)$. Тогда список полустандартных ПБВ-таблиц имеет следующий вид:

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 1 \\ \hline 2 & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 2 & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 1 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline 3 & 1 \\ \hline 2 & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline 3 & 2 \\ \hline 2 & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline 3 & 3 \\ \hline 2 & \\ \hline \end{array}.$$

Пример 3.10. Пусть $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_3$ и $\lambda = (m_1 + m_2, m_2)$ — произвольное разбиение. Тогда полустандартная ПБВ-таблица может быть описана следующим образом. Фиксируем $k_1, k_2, k_3, k_4 \geq 0$ так, чтобы $k_1 + k_2 \leq m_2$, $k_3 + k_4 \leq m_1$ и $k_3 = 0$, если $k_1 + k_2 \neq m_2$. Тогда таблица задается следующим образом:

$$\begin{aligned} T_{1,1} &= \dots = T_{1,k_1} = T_{1,k_1+k_2+1} = \dots = T_{1,m_2} = T_{1,m_2+k_3+k_4+1} = \dots = T_{1,m_1+m_2} = 1, \\ T_{1,m_2+k_3+1} &= \dots = T_{1,m_2+k_3+k_4} = T_{2,k_2+1} = \dots = T_{2,m_2} = 2, \\ T_{2,1} &= \dots = T_{2,k_1} = T_{1,k_1+1} = \dots = T_{1,k_1+k_2} = T_{1,m_2+1} = \dots = T_{m_2+1+k_3} = 3. \end{aligned}$$

Легко можно показать, что число таких таблиц равно $(m_1 + 1)(m_2 + 1)(m_1 + m_2 + 1)/2$, что совпадает с размерностью $V_{m_1\omega_1+m_2\omega_2}$.

По ПБВ-таблице T построим элемент D_T^a кольца $\mathbb{C}[Z_{i,j}]$, $i < j$. Сначала предположим, что имеется набор чисел $1 \leq i_1 < \dots < i_d \leq n$. Пусть $m \leq d$ — это такое число, что $i_m \leq d$ и $i_{m+1} > d$. Тогда $D_{i_1, \dots, i_d}^a$ — это определитель матрицы $D_{\alpha, \beta}^a$, $\alpha, \beta = 1, \dots, d$,

$$D_{\alpha, \beta}^a = \begin{cases} Z_{\alpha, i_\beta}, & \text{если } \alpha \neq i_1, \dots, i_m \text{ и } \beta > m, \\ 0, & \text{если } \alpha \neq i_1, \dots, i_m \text{ и } \beta \leq m, \\ 1, & \text{если } \alpha = i_\beta \text{ } (\beta \leq m), \\ 0, & \text{если } \alpha = i_1, \dots, i_m \text{ и } \alpha \neq i_\beta. \end{cases} \quad (11)$$

Теперь предположим, что задан столбец попарно различных чисел высоты d . Тогда существует такая перестановка $\sigma \in S_d$, что в σT элементы расположены по возрастанию. Пусть $D_T^a = (-1)^\sigma D_{\sigma T}^a$. Если λ состоит более чем из одного столбца, то D_T^a — это произведение полиномов, соответствующих столбцам.

Предложение 3.5. Для любого соотношения $R_{L,J}^{k;a}$ выполняется равенство $R_{L,J}^{k;a}(D_{i_1, \dots, i_d}^a) = 0$.

Предложение 3.6. Зафиксируем разбиение λ . Полиномы D_T^a , $T \in ST_\lambda^a$, линейно независимы.

Для таблицы T формы λ определим элемент $X_T^a \in Q^a(d_1, \dots, d_s)$ по формуле

$$X_T^a = \prod_{j=1}^{\lambda_1} X_{T_{1,j}}^a \dots X_{T_{\mu_j,j}}^a.$$

Предложение 3.6 позволяет доказать следующую теорему.

Теорема 3.3. Элементы X_T^a , $T \in ST_\lambda^a$, образуют базис $Q^a(d_1, \dots, d_s)$.

3.4. Клеточное разбиение. Мы явно опишем образ $\mathcal{F}_\lambda^a$ внутри произведения грассманианов и построим клеточное разбиение вырожденных многообразий флагов. Начнем со случая $\lambda = \omega_d$.

Напомним, что $\mathcal{F}_{\omega_d}^a \simeq \mathcal{F}_{\omega_d} \simeq \text{Gr}(d, n)$. Для возрастающего набора $L = (l_1 < \dots < l_d)$ положим

$$p_L = \text{span}(v_{l_1}, \dots, v_{l_d}) \in \text{Gr}(d, n).$$

Подпространство p_L является T -инвариантным. Пусть k — такое число, что $l_k \leq d < l_{k+1}$.

Предложение 3.7. Орбита $G^a \cdot p_L$ является аффинной клеткой, а $\text{Gr}(d, n)$ — дизъюнктивным объединением таких клеток.

Замечание 3.9. Орбита $G^a \cdot p_L$ может быть отождествлена с некоторой клеткой $B \cdot p_J$ в обычном клеточном разложении $\text{Gr}(d, n)$. А именно, определим J следующим образом:

$$J = (l_{k+1} - d, l_{k+2} - d, \dots, l_d - d, l_1 - d + n, l_2 - d + n, \dots, l_k - d + n).$$

Тогда отображение

$$\psi : V \rightarrow V, \quad \psi(v_i) = v_{[i-d]_+}, \quad i = 1, \dots, n,$$

переводит $G^a \cdot p_L$ в $B \cdot p_J$.

Пример 3.11. Пусть $n = 9$, $d = 4$ и $L = (2, 3, 6, 7)$ (т.е. $k = 2$). Тогда элементы $G^a \cdot p_L$ могут быть отождествлены со следующими матрицами (строки матрицы образуют базис соответствующего подпространства):

$$\begin{pmatrix} * & * & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ * & * & 0 & 0 \\ * & * & * & * \end{pmatrix};$$

здесь $*$ обозначает произвольный элемент и, следовательно, число звездочек совпадает с размерностью клетки.

Зафиксируем числа $d_1, \dots, d_s$ и будем писать $\mathcal{F}^a$ вместо $\mathcal{F}^a(d_1, \dots, d_s)$. Пусть $v_1, \dots, v_n$ — некоторый базис $V \simeq \mathbb{C}^n$. Для $1 \leq i < j \leq n$ определим проекции $\text{pr}_{i+1,j} : V \rightarrow V$ по формуле

$$\text{pr}_{i+1,j} \left(\sum_{l=1}^n c_l v_l \right) = \sum_{l=1}^i c_l v_l + \sum_{l=j+1}^n c_l v_l.$$

Теорема 3.4. Многообразие $\mathcal{F}^a \hookrightarrow \text{Gr}(d_1, n) \times \dots \times \text{Gr}(d_s, n)$ образовано всеми такими наборами $V_1, \dots, V_s$, $V_l \in \text{Gr}(d_l, n)$, что для всех $1 \leq l < m \leq s$

$$\text{pr}_{d_l+1, d_m} V_l \hookrightarrow V_m. \quad (12)$$

Замечание 3.10. Легко видеть, что множество условий (12) эквивалентно множеству условий с $m = l + 1$, т.е. множеству

$$\text{pr}_{d_l+1, d_{l+1}} V_l \hookrightarrow V_{l+1}, \quad l = 1, \dots, s-1. \quad (13)$$

Пример 3.12. Пусть $\lambda = \omega_1 + \omega_{n-1}$, т.е. $s = 2$, $d_1 = 1$, $d_2 = n - 1$. Тогда образ $\mathcal{F}^a(1, n-1)$ в $\text{Gr}(1, n) \times \text{Gr}(n-1, n)$ образован всеми такими парами V_1, V_2 , что $\text{pr}_{2, n-1} V_1 \hookrightarrow V_2$. Так как $\text{pr}_{2, n-1} V_1 \hookrightarrow \text{span}(v_1, v_n)$, образ вложения $\mathcal{F}^a(1, n-1) \hookrightarrow \mathbb{P}^{n-1} \times \mathbb{P}^{n-1}$ образован единственным соотношением

$$X_1^a X_{2, \dots, n}^a + (-1)^{n-1} X_n^a X_{1, \dots, n-1}^a = 0.$$

Следствие 3.2. Пусть $I^1, \dots, I^s$, $I^l \subset \{1, \dots, n\}$ — такие наборы, что мощность I^l равна d_l . Точка $p_{I^1} \times \dots \times p_{I^s}$ принадлежит $\mathcal{F}^a$ в том и только том случае, когда

$$I^l \setminus \{d_l + 1, \dots, d_{l+1}\} \subset I^{l+1}. \quad (14)$$

Пример 3.13. Рассмотрим случай полных флагов: $s = n - 1$, $d_l = l$. Пусть $\mathrm{pr}_l = \mathrm{pr}_{l,l}$. Тогда вложение $\mathcal{F}^a$ в произведение грассманианов определяется условиями

$$\mathrm{pr}_{l+1} V_l \hookrightarrow V_{l+1}, \quad l = 1, \dots, n - 2, \quad (15)$$

и условия (14) принимают вид $I^l \setminus \{l + 1\} \subset I^{l+1}$ для $l = 1, \dots, n - 2$.

Опишем клетки для $\mathcal{F}^a$. Напомним что клетки разбиения грассманиана даются G^a -орбитами неподвижных точек действия тора. Однако это не верно для общего случая $\mathcal{F}_\lambda^a$. Более того, множество G^a -орбит может быть бесконечным. Простейший пример следующий.

Пример 3.14. Пусть $n = 4$, $\lambda = \omega_1 + \omega_3$. Тогда $\mathcal{F}_\lambda^a$ вложено в $\mathbb{P}^3 \times \mathbb{P}^3$ (два грассманиана для $\mathfrak{sl}_4$) с координатами $(x_1 : x_2 : x_3 : x_4)$ и $(x_{123} : x_{124} : x_{133} : x_{234})$. Многообразие $\mathcal{F}_{\omega_1 + \omega_3}^a$ определяется единственным соотношением

$$x_1 x_{234} - x_4 x_{123} = 0.$$

Следовательно, $\mathcal{F}_{\omega_1 + \omega_3}^a$ содержит произведение $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$, определяемое уравнением $x_1 = x_{123} = 0$. Заметим, что подгруппа $\mathbb{G}_a^6$ группы G^a действует тривиально на $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$ (ПБВ-степень в обоих случаях V_{ω_1} и V_{ω_3} максимум 1). Следовательно, остается действие борелевской подгруппы. Пусть w_1, w_2, w_3, w_4 и $w_{123}, w_{124}, w_{134}, w_{234}$ — стандартные базисы в V_{ω_1} и V_{ω_3} . Группа B действует на пространстве, порожденном w_2, w_3, w_4 (соответственно, $w_{124}, w_{134}, w_{234}$) как на факторе векторного представления (соответственно, двойственного векторному представлению) по $\mathbb{C}w_1$ (соответственно, $\mathbb{C}w_{123}$). Легко видеть, что соответствующее B -действие на $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$ имеет бесконечно много орбит.

В следующем предложении мы описываем клеточное разбиение для $\mathcal{F}^a = \mathcal{F}^a(d_1, \dots, d_s)$.

Предложение 3.8. Пусть $\mathbf{I} = (I^1, \dots, I^s)$ — множество наборов, удовлетворяющих условию (14). Тогда существует клеточное разложение

$$\mathcal{F}^a = \bigsqcup_{\mathbf{I}} C_{\mathbf{I}}, \quad \text{где } C_{\mathbf{I}} = (G^a \cdot p_{I^1} \times \dots \times G^a \cdot p_{I^s}) \cap \mathcal{F}^a.$$

Другими словами, клетка — это пересечение вырожденного многообразия флагов, вложенного в произведение грассманианов, с произведением соответствующих клеток в $\mathrm{Gr}(d_i, n)$.

3.5. Разрешение особенностей.

3.5.1. Конструкция. Определим разрешение особенностей R_n вырожденных многообразий полных флагов $\mathcal{F}_n^a$ типа A (симплектические аналоги изучаются в [28, 29]). Пусть $W_{i,j} \subset W$ — линейная оболочка векторов $w_1, \dots, w_i, w_{j+1}, \dots, w_n$.

Определение 3.7. Многообразие R_n состоит из наборов $\mathbf{V}$ пространств $V_{i,j} \subset W$, $1 \leq i \leq j \leq n - 1$, удовлетворяющих следующим условиям:

- (1) $\dim V_{i,j} = i$,
- (2) $V_{i,j} \subset W_{i,j}$,
- (3) $\mathrm{pr}_{j+1} V_{i,j} \subset V_{i,j+1} \subset V_{i+1,j+1}$ для всех $1 \leq i \leq j \leq n - 2$.

Замечание 3.11. Так как пространство $V_{i,j}$ вложено в $W_{i,j}$, условие $\mathrm{pr}_{j+1} V_{i,j} \subset V_{i,j+1}$ эквивалентно условию

$$V_{i,j} \subset V_{i,j+1} \oplus \mathbb{C}w_{j+1}.$$

Замечание 3.12. Мы будем отождествлять пары (i, j) с положительными корнями алгебры Ли $\mathfrak{sl}_n$, $(i, j) \rightarrow \alpha_{i,j}$, и рассматривать пространство $V_{i,j}$ как отвечающее корню $\alpha_{i,j}$, т.е. $V_{\alpha_{i,j}} = V_{i,j}$.

Заметим, что R_n естественно вложено в произведение грассманианов

$$R_n \hookrightarrow \prod_{1 \leq i \leq j \leq n-1} \mathrm{Gr}(i, W_{i,j}),$$

где $\text{Gr}(i, W_{i,j})$ — грассманиан i -мерных подпространств в $W_{i,j}$. Определим отображение

$$\pi_n : R_n \rightarrow \prod_{i=1}^{n-1} \text{Gr}(i, n)$$

по формуле

$$\mathbf{V} = (V_{i,j})_{1 \leq i \leq j \leq n-1} \mapsto (V_{1,1}, \dots, V_{n-1,n-1}). \quad (16)$$

Предложение 3.9. *Образом π_n является $\mathcal{F}_n^a$. Многообразие R_n гладко, а отображение $\pi_n : R_n \rightarrow \mathcal{F}_n^a$ является бирациональным изоморфизмом.*

Замечание 3.13. Многообразие R_n может быть построено как башня последовательных $\mathbb{P}^1$ -расслоений $\rho_k : R_n(k) \rightarrow R_n(k-1)$, $k = 1, \dots, n(n-1)/2$, где $R_n(0) = pt$.

Теперь рассмотрим случай многообразий частичных флагов $\mathcal{F}_{\mathbf{d}}^a$ (напомним, что $\mathbf{d} = (d_1, \dots, d_k)$). Пусть $P_{(d_1, \dots, d_k)} = P_{\mathbf{d}}$ — подмножество множества положительных корней $\mathfrak{sl}_n$, соответствующих радикалу параболической подалгебры, определенной простыми корнями $\alpha_{d_1}, \dots, \alpha_{d_k}$, т.е.

$$P_{\mathbf{d}} = \left\{ \alpha_{i,j} : \exists l : (\alpha_{i,j}, \omega_{d_l}) > 0 \right\}.$$

Иногда рассматриваем $P_{\mathbf{d}}$ как подмножество $\mathbb{N}^2$, отождествляя $\alpha_{i,j}$ с парой (i, j) . Пусть $R_{\mathbf{d}}$ — образ отображения

$$\prod_{(i,j) \in P_{\mathbf{d}}} \xi_{i,j} : R_n \rightarrow \prod_{(i,j) \in P_{\mathbf{d}}} \text{Gr}(i, W_{i,j}).$$

Точнее, $R_{\mathbf{d}}$ — многообразие наборов $V_{i,j} \subset W$ с $(i, j) \in P_{\mathbf{d}}$, удовлетворяющих условиям

$$(1) \dim V_{i,j} = i;$$

$$(2) V_{i,j} \subset W_{i,j};$$

$$(3) \text{pr}_{j+1} V_{i,j} \subset V_{i,j+1}, \text{ если } (i, j), (i, j+1) \in P_{\mathbf{d}};$$

$$(4) V_{i,j+1} \subset V_{i+1,j+1}, \text{ если } (i, j+1), (i+1, j+1) \in P_{\mathbf{d}}$$

(см. определение 3.7. Очевидно, R_n сюръективно отображается в $R_{\mathbf{d}}$ забыванием всех $V_{i,j}$, кроме тех, для которых $(i, j) \in P_{\mathbf{d}}$.

Предложение 3.10. *Для любого $\mathbf{d}$ многообразие $R_{\mathbf{d}}$ гладко, а естественное отображение $R_{\mathbf{d}} \rightarrow \mathcal{F}_{\mathbf{d}}^a$ забывания всех недиагональных $(i \neq j)$ подпространств $V_{i,j}$ — это разрешение особенностей (бирациональный изоморфизм).*

3.5.2. Клеточное разбиение R_n . В этой части мы строим клеточное разбиение R_n , которое совместимо с клеточным разбиением $\mathcal{F}_n^a$ (т.е. отображение π_n является клеточным).

Лемма 3.3. *Группа G^a естественно действует на каждом $\text{Gr}(i, W_{i,j})$. Число G^a -орбит конечно, а орбиты нумеруются неподвижными точками действия тора. Каждая орбита является аффинной клеткой.*

Заметим, что неподвижные точки действия тора в грассманиане i -мерных подпространств $W_{i,j}$ нумеруются наборами

$$S = (l_1 < \dots < l_i) \subset \{1, \dots, i, j+1, \dots, n\}.$$

Обозначаем соответствующую точку через $p(S)$, а соответствующую орбиту $G^a \cdot p(S) \subset \text{Gr}(i, W_{i,j})$ — через $C(S)$.

Напомним, что R_n вложено в $\prod_{1 \leq i \leq j \leq n-1} \text{Gr}(i, W_{i,j})$. Группа G^a действует на этом произведении через действие на каждом сомножителе.

Лемма 3.4. *Многообразие R_n инвариантно по отношению к этому действию, а отображение $\pi_n : R_n \rightarrow \mathcal{F}_n^a$ является G^a -эквивариантным.*

Пусть $\mathbf{S} = (S_{i,j})_{1 \leq i \leq j \leq n-1}$ — такой набор множеств, что $\#S_{i,j} = i$ и $S_{i,j} \subset \{1, \dots, i, j+1, \dots, n\}$. Назовем такой набор *допустимым*, если

$$S_{i-1,j} \subset S_{i,j} \subset S_{i,j+1} \cup \{j+1\}. \quad (17)$$

Лемма 3.5. $p(\mathbf{S}) = \prod_{1 \leq i \leq j \leq n-1} p(S_{i,j})$ принадлежит R_n тогда и только тогда, когда набор $\mathbf{S}$ является допустимым. Если точка $p = \prod_{1 \leq i \leq j < n} p_{i,j}$, $p_{i,j} \in C(S_{i,j})$ принадлежит R_n , то набор $\mathbf{S} = (S_{i,j})$ допустим.

Введем обозначение для допустимых наборов $\mathbf{S}$:

$$C(\mathbf{S}) = R_n \cap \prod_{1 \leq i \leq j \leq n-1} C(S_{i,j}).$$

Тогда имеем разложение

$$R_n = \bigcup_{\text{допустимые } \mathbf{S}} C(\mathbf{S}).$$

Докажем, что $C(\mathbf{S})$ — аффинная клетка, и вычислим ее размерность.

Для числа l , $-n < l \leq n$, положим $\bar{l} = l$, если $l > 0$ и $\bar{l} = l+n$ в противном случае, т.е. $1 \leq \bar{l} \leq n$.

Теорема 3.5. $C(\mathbf{S})$ является аффинной клеткой для любого допустимого $\mathbf{S}$. Отображение π_n клеточное, $C(\mathbf{S}) \rightarrow C(S_{1,1}, \dots, S_{n-1,n-1})$.

Следствие 3.3. Для допустимого $\mathbf{S}$ размерность клетки $C(\mathbf{S})$ равна сумме $n(n-1)/2$ слагаемых $g_{i,j}$ занумерованных парами $1 \leq i \leq j \leq n-1$. Каждое слагаемое равно 0 или 1 по следующему правилу:

- (i) Пусть $i = 1$, $j = n-1$. Если $S_{1,n} = (1)$, то $g_{1,n-1} = 1$; в противном случае $g_{1,n-1} = 0$.
- (ii) Пусть $i = 1$ и $S_{1,j} = (l)$. Если $l \neq j+1$, то $g_{i,j} = 1$; в противном случае $g_{i,j} = 0$.
- (iii) Пусть $j = n-1$ и $\{l\} = S_{i,n-1} \setminus S_{i-1,n-1}$. Если $l = i$, то $g_{i,j} = 1$; в противном случае $g_{i,j} = 0$.
- (iv) Пусть $i > 1$ и $j < n-1$.
 - Если $j+1 \notin S_{i,j}$, то $g_{i,j} = 1$.
 - Если $j+1 \in S_{i,j}$, то полагаем $l = S_{i,j} \setminus S_{i-1,j}$, $m = S_{i,j+1} \setminus S_{i,j}$; если $\overline{l-j} > \overline{m-j}$, то $g_{i,j} = 1$; в противном случае $g_{i,j} = 0$.

Доказательство следует из явной конструкции координат на $C(\mathbf{S})$. □

Следствие 3.4. Относительная размерность $\dim C(\mathbf{S}) - \dim C(S_{i,i})_{i=1}^{n-1}$ равна сумме $(n-1)(n-2)/2$ слагаемых $h_{i,j}$, занумерованных парами $1 \leq i < j \leq n-1$. Каждое слагаемое равно 0 или 1 по следующему правилу. Пусть $l = S_{i,j} \setminus S_{i,j-1}$, $m = S_{i+1,j} \setminus S_{i,j}$. Тогда $h_{i,j} = 0$ если и только если $\overline{m-j} < \overline{l-j}$ и $j \in S_{i,j-1}$.

Наконец, заметим что теорема 3.5, как и следствия 3.3 и 3.4, имеют очевидные параболические аналоги. А именно, будем называть набор $\mathbf{S} = (S_{i,j})_{(i,j) \in P_{\mathbf{d}}}$ $\mathbf{d}$ -допустимым, если условие (17) выполняется, как только соответствующие пары индексов лежат в $P_{\mathbf{d}}$. Тогда верно следующее утверждение.

Предложение 3.11.

- (1) $R_{\mathbf{d}}$ является несвязным объединением клеток

$$\bigsqcup_{\mathbf{d}\text{-допустимые } \mathbf{S}} \left(R_{\mathbf{d}} \cap \prod_{(i,j) \in P_{\mathbf{d}}} C(S_{i,j}) \right).$$

- (2) Отображение $R_{\mathbf{d}} \rightarrow \mathcal{F}_{\mathbf{d}}^a$ клеточное.
- (3) Размерности и относительные размерности равны сумме $g_{i,j}$ и $h_{i,j}$ из следствий 3.3 и 3.4 для $(i,j) \in P_{\mathbf{d}}$.

4. КОМБИНАТОРИКА

Нормализованные медианные числа Дженокки h_n , $n = 0, 1, 2, \dots$ образуют последовательность, начинающуюся с 1, 1, 2, 7, 38, 295. Эти числа могут быть определены многими разными способами (см. [6, 18, 17, 37, 46, 50, 22]). Напомним некоторые из определений.

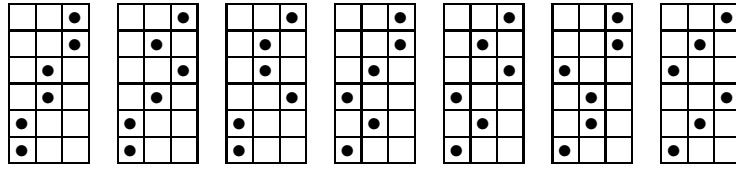
4.1. Нормализованные медианные числа Дженокки: определения.

4.1.1. Конфигурации Деллака. Самое старое определение было дано Деллаком в [17]. Рассмотрим прямоугольник с n столбцами и $2n$ строками. Он содержит $n \times 2n$ клеток, занумерованных парами (l, j) , где $l = 1, \dots, n$ — номер столбца, $j = 1, \dots, 2n$ — номер строки. Конфигурация Деллака D — это подмножество клеток, удовлетворяющих следующим условиям:

- (i) каждый столбец содержит ровно две клетки из D ,
- (ii) каждая строка содержит ровно одну клетку из D ,
- (iii) если клетка (l, j) принадлежит D , то $l \leq j \leq n + l$.

Пусть DC_n — множество таких конфигураций. Тогда число элементов DC_n равно h_n .

Перечислим все конфигурации Деллака для $n = 3$. Клетки в конфигурации мы помечаем точками.



4.1.2. Треугольник Зайделя. Треугольник Зайделя [49] состоит из чисел $g_{k,n}$, где $n = 1, 2, \dots$ и $1 \leq k \leq (n+1)/2$, удовлетворяющих соотношениям $g_{1,1} = 1$ и

$$g_{k,2n} = \sum_{i \geq k} g_{i,2n-1}, \quad g_{k,2n+1} = \sum_{i \leq k} g_{i,2n}.$$

Числа $g_{n,2n-1}$ называются числами Дженокки первого рода, а числа $H_{2n-1} = g_{1,2n}$ — числами Дженокки второго рода (или медианными числами Дженокки). Барски [6] и Дюмон [18] доказали, что число H_{2n+1} делится на 2^n . Нормализованные медианные числа Дженокки h_n определяются как соответствующие отношения: $h_n = H_{2n+1}/2^n$.

							155	155
					17	17	155	310
		3	3	17	34	138	448	
	1	1	3	6	14	48	104	552
1	1	1	2	2	8	8	56	608

4.1.3. Перестановки. В [46] Креверас предложил другое описание чисел h_n . А именно, перестановка $\sigma \in S_{2n+2}$ называется *нормализованной перестановкой Дюмона второго рода*, если выполняются следующие условия:

- (i) $\sigma(k) < k$, если k четно,
- (ii) $\sigma(k) > k$, если k нечетно,
- (iii) $\sigma^{-1}(2k) < \sigma^{-1}(2k+1)$ при $k = 1, \dots, n$.

Согласно Креверасу, число таких перестановок равно h_n (см. также [22, предложение 3.3]).

Пример 4.1. Пусть $n = 3$. Элементы $PD2N_3$ для $n = 3$ имеют следующий вид:

$$(41627385), \quad (61427385), \quad (41526387), \quad (41627583), \\ (61427583), \quad (21637485), \quad (21436587).$$

4.1.4. А ля $n!$. Пусть $\mathbf{I} = (I_1, I_2, \dots, I_{n-1})$ — набор подмножеств $\{1, \dots, n\}$. Назовем такой набор *допустимым*, если $\#I_l = l$ для всех l и

$$I_l \subset I_{l+1} \cup \{l+1\}, \quad l = 1, \dots, n-2. \quad (18)$$

Тогда число допустимых наборов равно нормализованному медианному числу Дженокки h_n .

Замечание 4.1. Если заменить (18) на $I_l \subset I_{l+1}$, то, очевидно, число допустимых наборов равно $n!$.

Пример 4.2. Пусть $n = 3$. Пары I^1, I^2 для $n = 3$ следующие:

$$\begin{aligned} &\{(2), (13)\}, \quad \{(2), (23)\}, \quad \{(2), (12)\}, \quad \{(3), (13)\}, \\ &\{(3), (23)\}, \quad \{(1), (13)\}, \quad \{(1), (12)\}. \end{aligned}$$

Допустимые наборы визуально можно представлять следующим образом. Рассмотрим ориентированный граф Γ с множеством вершин (l, j) , $1 \leq l \leq n-1$, $1 \leq j \leq n$. Две вершины (l_1, j_1) и (l_2, j_2) соединены стрелкой $(l_1, j_1) \rightarrow (l_2, j_2)$, если и только если $j_1 = j_2$, $l_2 = l_1 + 1$, $l_2 \neq j_2$ (заметим, что в [9] такой граф встречался как колчан коэффициентов). Для $n = 5$ граф таков:

$$\begin{aligned} &(1, 5) \longrightarrow (2, 5) \longrightarrow (3, 5) \longrightarrow (4, 5) \\ &(1, 4) \longrightarrow (2, 4) \longrightarrow (3, 4) \quad (4, 4) \\ &(1, 3) \longrightarrow (2, 3) \quad (3, 3) \longrightarrow (4, 3) \\ &(1, 2) \quad (2, 2) \longrightarrow (3, 2) \longrightarrow (4, 2) \\ &(1, 1) \longrightarrow (2, 1) \longrightarrow (3, 1) \longrightarrow (4, 1) \end{aligned}$$

Набору $\mathbf{I} = (I_1, \dots, I_{n-1})$ с $\#I_l = l$ для всех l мы ставим в соответствие подмножество $S_{\mathbf{I}}$ вершин Γ по формуле

$$S_{\mathbf{I}} = \{(l, j) : j \in I_l\}.$$

Тогда $\mathbf{I}$ допустим в том и только том случае, если $S_{\mathbf{I}}$ замкнуто в Γ , т.е. если $p \in S_{\mathbf{I}}$ и $p \rightarrow q$ — стрелка в Γ , то $q \in S_{\mathbf{I}}$.

4.1.5. *Эйлерова характеристика.* Допустимые наборы нумеруют клетки в вырожденных многообразиях флагов $\mathcal{F}_n^a$ (см. [22]). Напомним, что $\mathcal{F}_n^a$ состоят из наборов $(V_1, \dots, V_{n-1})$ подпространств данного n -мерного пространства W , удовлетворяющих приведенным ниже условиям. Пусть $w_1, \dots, w_n$ — базис W и $\text{pr}_k : W \rightarrow W$ — проекция вдоль w_k на $\text{span}(w_i : i \neq k)$:

$$\text{pr}_k\left(\sum_{i=1}^n c_i w_i\right) = \sum_{i \neq k} c_i w_i.$$

Определение 4.1. Набор $(V_1, \dots, V_{n-1})$ подпространств $V_k \subset W$ принадлежит $\mathcal{F}_n^a$ тогда и только тогда, когда $\dim V_k = k$ для всех k и

$$\text{pr}_{k+1} V_k \subset V_{k+1}, \quad k = 1, \dots, n-2.$$

Напомним (см., например, [35]), что классические многообразия флагов $\mathcal{F}_n$ состоят из наборов $(V_1 \subset \dots \subset V_{n-1})$ последовательно вложенных подпространств W , где $\dim V_k = k$ для всех k . На этих многообразиях действует тор $T = (\mathbb{C}^*)^n$. Действие индуцировано с естественного действия T на W :

$$(a_1, \dots, a_n) \cdot (c_1 w_1 + \dots + c_n w_n) = a_1 c_1 w_1 + \dots + a_n c_n w_n.$$

Многообразия $\mathcal{F}_n$ обладают несколькими важными свойствами:

- (1) $\mathcal{F}_n$ могут быть разложены в несвязное объединение комплексных (четномерных действительных) клеток. Каждая клетка содержит в точности одну T -неподвижную точку;

- (2) T -неподвижные точки в $\mathcal{F}_n$ нумеруются перестановками из S_n . неподвижная точка $p(\sigma)$, соответствующая $\sigma \in S_n$, определяется как

$$p(\sigma) = \left(\text{span}(w_{\sigma(1)}), \text{span}(w_{\sigma(1)}, w_{\sigma(2)}), \dots, \text{span}(w_{\sigma(1)}, \dots, w_{\sigma(n-1)}) \right);$$

- (3) (действительная) размерность клетки, содержащей $p(\sigma)$, равна $2l(\sigma)$ (удвоенной длине перестановки).

В частности, эйлерова характеристика $\mathcal{F}_n$ равна $n!$. Вырожденные многообразия флагов $\mathcal{F}_n^a$ также обладают свойством (1). Тем не менее, T -неподвижные точки нумеруются другим множеством: число неподвижных точек в $\mathcal{F}_n^a$ равно числу допустимых наборов. А именно, допустимый набор $\mathbf{I}$ определяет точку

$$p(\mathbf{I}) = (V_1, \dots, V_{n-1}), \quad V_k = \text{span}(w_i : i \in I_k). \quad (19)$$

Любая такая точка принадлежит $\mathcal{F}_n^a$ и T -неподвижна, а все T -неподвижные точки в $\mathcal{F}_n^a$ имеют такой вид.

Следствие 4.1. *Эйлерова характеристика $\mathcal{F}_n^a$ равна h_n :*

$$\chi(\mathcal{F}_n^a) = h_n.$$

4.1.6. *Два треугольника.* Представим еще одно комбинаторное описание чисел h_n , полученное в [8] из теории представлений колчанов.

Предложение 4.1. *Нормализованное медианное число Дженокки h_{n+1} равно числу пар наборов неотрицательных целых $(r_{i,j}), (m_{i,j})$, $1 \leq i \leq j \leq n$, подчиняющихся следующим условиям для всех $k = 1, \dots, n$:*

$$\sum_{i=k}^n r_{k,i} \leq 1, \quad \sum_{j=1}^k m_{j,k} \leq 1, \quad \sum_{i \leq k \leq j} r_{i,j} = \sum_{i \leq k \leq j} m_{i,j}.$$

4.1.7. *Явная формула.* Имеется следующая явная формула для чисел h_n (см. [8]):

$$h_n = \sum_{f_0, \dots, f_n \geq 0} \prod_{k=1}^{n-1} \binom{1+f_{k-1}}{f_k} \prod_{k=1}^n \binom{1+f_{k+1}}{f_k}, \quad (20)$$

где $f_0 = f_n = 0$. Эта формула может быть переписана как взвешенная сумма путей Моцкина. А именно, пусть M_n — множество путей Моцкина, начинающихся в $(0, 0)$ и заканчивающихся в $(n, 0)$. Для пути Моцкина $\mathbf{f} = (f_0, \dots, f_n) \in M_n$, где $f_0 = f_n = 0$, пусть $l(\mathbf{f})$ — число «подъемов» ($f_{i+1} = f_i + 1$) плюс число «спусков» ($f_{i+1} = f_i - 1$). Тогда получаем

$$h_n = \sum_{\mathbf{f} \in M_n} \frac{\prod_{k=0}^n (1+f_k)^2}{2^{l(\mathbf{f})}}. \quad (21)$$

4.1.8. *Формула Вьенно.* Приведем представление в виде бесконечной дроби для производящей функции (ненормализованных) медианных чисел Дженокки H_{2n-1} согласно Вьенно (см. [51, 52, 18, 21]):

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} H_{2n-1} x^n = \frac{1}{1 - \frac{1^2 x}{1 - \frac{1^2 x}{1 - \frac{2^2 x}{1 - \frac{2^2 x}{\dots}}}}}$$

4.2. q -версии. В литературе можно найти несколько q -версий медианных чисел Дженокки (см. [41, 41, 54]). Ниже мы кратко напомним определение полиномов Хана—Зенга. В нашем подходе нормализованные медианные числа Дженокки возникают как эйлеровы характеристики вырожденных многообразий флагов. Отсюда мы получаем естественные q -аналоги, определяемые полиномами Пуанкаре $\mathcal{F}_n^a$. Ниже мы даем как комбинаторное описание, так и явную формулу для этих полиномов.

4.2.1. Полиномы Хана—Зенга. Рассмотрим полиномы $C_n(x, q)$ от двух переменных, определенные как $C_1(x, q) = 1$ и

$$C_n(x, q) = (1 + qx) \frac{(1 + qx)C_{n-1}(1 + qx, q) - xC_{n-1}(x, q)}{1 + qx - x}, \quad n \geq 2.$$

Введем обозначение

$$\bar{c}_n(q) = \frac{C_n(1, q)}{(1 + q)^{n-1}}, \quad n \geq 1,$$

Хан и Зенг доказали, что эти полиномы удовлетворяют соотношению $\bar{c}_n(1) = h_{n-1}$ (см. [41, (17)]). Следовательно, можно рассматривать $\bar{c}_n(q)$ как q -аналоги нормализованных медианных чисел Дженокки.

4.2.2. Статистика на конфигурациях Деллака. Для конфигурации Деллака $D \in DC_n$ (см. п. 4.1) определим длину $l(D)$ конфигурации D как количество таких пар $(l_1, j_1), (l_2, j_2)$, что обе клетки (l_1, j_1) и (l_2, j_2) лежат в D и $l_1 < l_2, j_1 > j_2$. Это определение аналогично определению длины перестановки. Заметим, что в классическом случае комплексная размерность клетки в многообразии флагов, соответствующем перестановке σ , равна числу таких пар $j_1 < j_2$, что $\sigma(j_1) > \sigma(j_2)$, что равно длине перестановки σ (см. свойство (3) многообразий $\mathcal{F}_n$).

Предложение 4.2. Действительная размерность клетки $\mathcal{F}_n^a$, содержащей точку $p(\mathbf{I})$ (см. (19)), равна $2l(D)$. Таким образом, полином Пуанкаре $h_n(t) = P_{\mathcal{F}_n^a}(t)$ равен

$$h_n(t) = \sum_{D \in DC_n} t^{2l(D)}.$$

Так как полиномы $h_n(t)$ не содержат нечетных степеней t , удобно ввести новую переменную $q = t^2$ и положить $h_n(q) = P_{\mathcal{F}_n^a}(q^{1/2})$. Первые четыре полинома $h_n(q)$ имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} h_1(q) &= 1, & h_2(q) &= 1 + q, & h_3(q) &= 1 + 2q + 3q^2 + q^3, \\ h_4(q) &= 1 + 3q + 7q^2 + 10q^3 + 10q^4 + 6q^5 + q^6. \end{aligned}$$

В общем случае степень $h_n(q)$ равна $n(n-1)/2$. Очевидно, $h_n(1) = h_n$.

4.2.3. Явная формула. Пусть $m \geq n \geq 0$. Тогда q -биномиальный (гауссов) коэффициент $\binom{m}{n}_q$ определяется как

$$\binom{m}{n}_q = \frac{m_q!}{n_q!(m-n)_q!}, \quad m_q! = \prod_{i=1}^m \frac{1 - q^i}{1 - q}.$$

Следующая формула получена в [8] из геометрии колчаных грассманианов.

Предложение 4.3. Полином Пуанкаре вырожденного многообразия флагов $\mathcal{F}_n^a$ равен

$$\sum_{f_1, \dots, f_{n-1} \geq 0} q^{\sum_{k=1}^{n-1} (k-f_k)(1-f_k+f_{k+1})} \prod_{k=1}^{n-1} \binom{1+f_{k-1}}{f_k}_q \prod_{k=1}^{n-1} \binom{1+f_{k+1}}{f_k}_q \quad (22)$$

(полагаем $f_0 = f_n = 0$).

Такого рода формулы обычно называются фермионными: суммы произведений q -биномиальных коэффициентов умноженных на некоторые степени q . Геометрически формула (22) получается следующим образом. Многообразия $\mathcal{F}_n^a$ могут быть разрезаны на непересекающиеся куски так, что каждый кусок расслоен над произведением нескольких грассманианов со слоем изоморфным аффинному пространству. Так как полином Пуанкаре грассманиана — это q -биномиальный коэффициент, получаем приведенную выше формулу.

4.3. Производящая функция и бесконечная дробь. Получим явное выражение производящей функции полиномов Пуанкаре $h_n(q)$ в виде бесконечной дроби и докажем, что они совпадают с q -версиями нормализованных медианных чисел Дженокки, определенных в [41, 42].

Заметим, что формулу (22) можно рассматривать как сумму по множеству M_n путей Моцкина $\mathbf{f} = (f_0, f_1, \dots, f_n)$, начинающихся в $(0, f_0) = (0, 0)$ и заканчивающихся в $(n, f_n) = (n, 0)$.

Сначала напомним формализм взвешенных производящих функций путей Моцкина по Флажолле (см. [34]). Пусть α_n, β_n и $\gamma_n, n \geq 0$ — последовательности комплексных чисел, называемых весами. Для неотрицательного целого k определим $w(k, k) = \gamma_k, w(k, k+1) = \alpha_k$ и $w(k, k-1) = \beta_{k-1}$ (если $k \geq 1$). Обозначаем через $\alpha_\bullet$ всю последовательность $(\alpha_k)_{k=0}^\infty$ (аналогично для $\beta_\bullet$ и $\gamma_\bullet$). Взвешенная производящая функция путей Моцкина определяется по формуле

$$F(s; \alpha_\bullet, \beta_\bullet, \gamma_\bullet) = \sum_{n \geq 0} s^n \sum_{\mathbf{f} \in M_n} \prod_{k=0}^{n-1} w(f_k, f_{k+1}).$$

Следующий результат принадлежит Флажолле [34].

Теорема 4.1. *Взвешенная производящая функция путей Моцкина представляется в виде бесконечной дроби*

$$F(s; \alpha_\bullet, \beta_\bullet, \gamma_\bullet) = \frac{1}{1 - \gamma_0 s - \frac{\alpha_0 \beta_0 s^2}{1 - \gamma_1 s - \frac{\alpha_1 \beta_1 s^2}{1 - \gamma_2 s - \dots}}}.$$

Применим этот формализм к нашей ситуации. Формулу (22) можно переписать в виде

$$h_n(q) = q^{n(n-1)/2} \sum_{\mathbf{f} \in M_n} q^{\sum_{k=1}^{n-1} f_k(f_k - f_{k+1} - 2)} \prod_{k=1}^{n-1} \binom{1 + f_{k-1}}{f_k}_q \prod_{k=1}^{n-1} \binom{1 + f_{k+1}}{f_k}_q. \quad (23)$$

Введем три последовательности весов:

$$\alpha_m(q) = q^{-3m} \binom{m+2}{2}_q, \quad \beta_m(q) = q^{-m-1} \binom{m+2}{2}_q, \quad \gamma_m(q) = q^{-2m} \binom{m+1}{1}_q$$

и используя их, определим $w(f_k, f_{k+1})$. Тогда из формулы (23) получаем

$$q^{-n(n-1)/2} h_n(q) = \sum_{\mathbf{f} \in M_n} \prod_{k=0}^{n-1} w(f_k, f_{k+1}). \quad (24)$$

Чтобы использовать теорему Флажолле, надо избавиться от множителя $q^{n(n-1)/2}$ в (24). Введем обозначение

$$\tilde{h}_n(q) = q^{n(n-1)/2} h_n(q^{-1})$$

(заметим, что степень $h_n(q)$ в точности равна $n(n-1)/2$). Пусть

$$\tilde{h}(q, s) = \sum_{n \geq 0} \tilde{h}_n(q) s^n.$$

Заметим, что

$$\gamma_m(q) = \binom{m+1}{1}_{q^{-1}}, \quad \alpha_m(q) \beta_m(q) = q^{-1} \binom{m+2}{2}_{q^{-1}}.$$

Используя теорему 4.1, приходим к следующему утверждению.

Теорема 4.2. Производящая функция $\tilde{h}(q, s)$ может быть записана в виде

$$\tilde{h}(q, s) = \frac{1}{1 - s - \frac{qs^2}{1 - \binom{2}{1}_q s - \frac{q\binom{3}{2}_q s^2}{1 - \binom{3}{1}_q s - \frac{q\binom{4}{2}_q s^2}{1 - \binom{4}{1}_q s - \dots}}}} \quad (25)$$

Доказательство следует из (24) и теоремы Флажолле.

Следствие 4.2.

$$\tilde{h}(q, s) = \frac{1}{1 - \frac{s}{1 - \frac{qs}{1 - \frac{\binom{3}{2}_q s}{1 - \frac{q\binom{3}{2}_q s}{1 - \frac{\binom{4}{2}_q s}{1 - \frac{q\binom{4}{2}_q s}{1 - \dots}}}}}}}. \quad (26)$$

Доказательство следует из следующей формулы из [21, лемма 2]:

$$\frac{c_0}{1 - c_1 s - \frac{c_1 c_2 s^2}{1 - (c_2 + c_3)s - \frac{c_3 c_4 s^2}{1 - (c_4 + c_5)s - \dots}}} = \frac{c_0}{1 - \frac{c_1 s}{1 - \frac{c_2 s}{1 - \frac{c_3 s}{1 - \dots}}}.$$

Для случая $q = 1$ получаем формулу (21) для нормализованных медианных чисел Дженочки.

Следствие 4.3. Число h_n равно взвешенной сумме по множеству M_n путей Моцкина

$$\sum_{\mathbf{f} \in M_n} \prod_{k=0}^{n-1} w(f_k, f_{k+1})$$

с весами $w(\cdot, \cdot)$, определенными по формуле

$$\alpha_m = \frac{(m+1)(m+2)}{2} = \beta_m, \quad \gamma_m = (m+1)^2.$$

Производящая функция $\sum_{n \geq 0} h_n s^n$ представляется в виде бесконечной дроби

$$\frac{1}{1 - \frac{s}{1 - \frac{s}{1 - \frac{3s}{1 - \frac{3s}{1 - \frac{6s}{1 - \frac{6s}{1 - \frac{10s}{1 - \dots}}}}}}}}}. \quad (27)$$

Следствие 4.4. $\tilde{h}_n(q) = \bar{c}_{n+1}(q)$.

Доказательство. Формула (18) в [41] дает представление в виде бесконечной дроби для полиномов $\bar{c}_n(q)$. Сравнивая эту формулу с (26) и используя равенства

$$\begin{aligned}\binom{2n}{2}_q &= (1 + q^2 + q^4 + \dots + q^{2n-2})(1 + q + q^2 + \dots + q^{2n-2}), \\ \binom{2n+1}{2}_q &= (1 + q^2 + q^4 + \dots + q^{2n-2})(1 + q + q^2 + \dots + q^{2n}),\end{aligned}$$

заключаем, что $\tilde{h}_n(q) = \bar{c}_{n+1}(q)$. $\square$

Выведем также формулу Вьенно для производящей функции для (ненормализованных) медианных чисел Дженокки H_{2n+1} (см. [18, 21, 51, 52]):

Следствие 4.5.

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} H_{2n-1} s^n = \frac{1}{1 - \frac{1^2 s}{1 - \frac{1^2 s}{1 - \frac{2^2 s}{1 - \frac{2^2 s}{\dots}}}}}.$$

Доказательство. Напомним, что $H_{2n+1} = 2^n h_n$. Следовательно, имеем

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} H_{2n-1} s^n = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} h_n 2^n s^{n+1} = 1 + s \sum_{n=0}^{\infty} h_n (2s)^n.$$

При подстановке $q = 1$ в формулу (25), получаем, что производящая функция (ненормализованных) медианных чисел Дженокки представляется в виде

$$1 + \frac{s}{1 - 2s - \frac{4s^2}{1 - 2 \cdot 4s - \frac{4 \cdot 3^2 s^2}{1 - 2 \cdot 9s - \frac{4 \cdot 6^2 s^2}{1 - 2 \cdot 16s - \frac{4 \cdot 10^2 s^2}{1 - 2 \cdot 25s - \dots}}}}}.$$

Наконец, используем формулу из [21, лемма 2]:

$$c_0 + \frac{c_0 c_1 s}{1 - (c_1 + c_2)s - \frac{c_2 c_3 s^2}{1 - (c_3 + c_4)s - \frac{c_4 c_5 s^2}{1 - \dots}}} = \frac{c_0}{1 - \frac{c_1 s}{1 - \frac{c_2 s}{1 - \frac{c_3 s}{1 - \dots}}}.$$

Формула доказана. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Горницкий А. А. Существенные сигнатуры и канонические базисы неприводимых представлений группы $G2$ // Мат. заметки. — 2015. — 97, № 1. — С. 35–47.
2. Andrews G. The Theory of Partitions. — Cambridge Univ. Press, 1998.
3. Arzhantsev I. Flag varieties as equivariant compactifications of $\mathbb{G}_a^n$ // Proc. Am. Math. Soc. — 2011. — 139, № 3. — С. 783–786.
4. Arzhantsev I., Sharoiko E. Hassett–Tschinkel correspondence: modality and projective hypersurfaces // J. Algebra. — 2011. — 348, № 1. — С. 217–232.
5. Backhaus T., Kus D. The PBW filtration and convex polytopes in type B / arXiv:1504.06522.

6. *Barsky D.* Congruences pour les nombres de Genocchi de 2e espèce/ Groupe d'étude d'Analyse ultramétrique, 8e année. — 1980/81. — № 34.
7. *Caldero P.* Toric degenerations of Schubert varieties// Transform. Groups. — 2002. — 7, № 1. — C. 51–60.
8. *Cerulli Irelli G., Feigin E., Reineke M.* Quiver Grassmannians and degenerate flag varieties// Algebra Number Theory. — 2012. — 6, № 1. — C. 165–194.
9. *Cerulli Irelli G., Feigin E., Reineke M.* Degenerate flag varieties: moment graphs and Schröder numbers// J. Alg. Combin. — 2013. — 38, № 1. — C. 159–189.
10. *Cerulli Irelli G., Feigin E., Reineke M.* Desingularization of quiver Grassmannians for Dynkin quivers// Adv. Math. — 2013. — 245. — C. 182–207.
11. *Cerulli Irelli G., Feigin E., Reineke M.* Homological approach to the Hernandez–Leclerc construction and quiver varieties// Represent. Theory. — 2014. — 18. — C. 1–14.
12. *Cerulli Irelli G., Lanini M.* Degenerate flag varieties of types A and C are Schubert varieties// Int. Math. Res. Not. — 2015. — 15. — C. 6353–6374.
13. *Cerulli Irelli G., Lanini M., Littelmann P.* Degenerate flag varieties and Schubert varieties: a characteristic free approach/ [arxiv:1502.04590](https://arxiv.org/abs/1502.04590).
14. *Cherednik I., Feigin E.* Extremal part of the PBW-filtration and E-polynomials// Adv. Math. — 2015. — 282. — C. 220–264.
15. *Cherednik I., Orr D.* Nonsymmetric difference Whittaker functions// Math. Z. — 2015. — 279, № 3. — C. 879–938.
16. *Cherednik I., Orr D.* One-dimensional nil-DAHA and Whittaker functions// Transform. Groups. — 2013. — 18, № 1. — C. 23–59.
17. *Dellac H.* Problem 1735// L'Intermédiaire des Mathématiciens. — 1900. — 7. — C. 9–10.
18. *Dumont D.* Interprétations combinatoires des nombres de Genocchi// Duke Math. J. — 1974. — 41. — C. 305–318.
19. *Dumont D., Randrianarivony A.* Dérangements et nombres de Genocchi// Discr. Math. — 1994. — 132. — C. 37–49.
20. *Dumont D., Viennot G.* A combinatorial interpretation of the Seidel generation of Genocchi numbers// Disc. Math. — 1980. — 6. — C. 77–87.
21. *Dumont D., Zeng J.* Further results on Euler and Genocchi numbers// Aequat. Math. — 1994. — 47. — C. 31–42.
22. *Feigin E.* The PBW filtration, Demazure modules and toroidal current algebras// SIGMA. — 2008. — 4. — C. 070.
23. *Feigin E.* The PBW filtration// Represent. Theory. — 2009. — 13. — C. 165–181.
24. *Feigin E.* Degenerate flag varieties and the median Genocchi numbers// Math. Res. Lett. — 2011. — 18, № 6. — C. 1–16.
25. *Feigin E.* $\mathbb{G}_a^M$ degeneration of flag varieties// Select. Math. — 2012. — 18, № 3. — C. 513–537.
26. *Feigin E.* The median Genocchi numbers, Q-analogues and continued fractions// Eur. J. Combin. — 2012. — 33. — C. 1913–1918.
27. *Feigin E.* Degenerate SL_n : representations and flag varieties// Funct. Anal. Appl. — 2014. — 48, № 1. — C. 59–71.
28. *Feigin E., Finkelberg M.* Degenerate flag varieties of type A: Frobenius splitting and BWB theorem// Math. Z. — 2013. — 275, №№ 1–2. — C. 55–77.
29. *Feigin E., Finkelberg M., Littelmann P.* Symplectic degenerate flag varieties// Can. J. Math. — 2014. — 66, № 6. — C. 1250–1286.
30. *Feigin E., Fourier G., Littelmann P.* PBW-filtration and bases for irreducible modules in type A_n // Transform. Groups. — 2011. — 16, № 1. — C. 71–89.
31. *Feigin E., Fourier G., Littelmann P.* PBW filtration and bases for symplectic Lie algebras// Int. Math. Res. Not. — 2011. — 24. — C. 5760–5784.
32. *Feigin E., Fourier G., Littelmann P.* PBW-filtration over $\mathbb{Z}$ and compatible bases for $V_{\mathbb{Z}}(\lambda)$ in type A_n and C_n // in: Symmetries, Integrable Systems and Representations. — Springer-Verlag, 2013. — 40. — C. 35–63.
33. *Feigin E., Makedonskyi I.* Nonsymmetric Macdonald polynomials, Demazure modules and PBW filtration// J. Combin. Theory, Ser. A. — 2015. — C. 60–84.
34. *Flajolet P.* Combinatorial aspects of continued fractions// Proc. Colloq. “Combinatorics-79.” — Montreal: Univ. Montreal, 1979. — Part II; Ann. Discr. Math. — 1980. — 9. — C. 217–222.
35. *Fulton W.* Young tableaux, with applications to representation theory and geometry. — Cambridge Univ. Press, 1997.

36. *Fulton W., Harris J.* Representation Theory. A First Course/ Grad. Texts Math. — New York: Springer, 1991. — 129.
37. *Gessel I.* Applications of the classical umbral calculus// Algebra Universalis. — 2003. — 49. — С. 397–434.
38. *Gonciulea N., Lakshmibai V.* Degenerations of flag and Schubert varieties to toric varieties// Transform. Groups. — 1996. — 1, № 3. — С. 215–248.
39. *Gornitskii A. A.* Essential signatures and canonical bases for irreducible representations of D_4 / [arXiv:1507.07498](https://arxiv.org/abs/1507.07498).
40. *Haiman M., Haglund J., Loehr N.* A combinatorial formula for non-symmetric Macdonald polynomials// Am. J. Math. — 2008. — 130, № 2. — С. 359–383.
41. *Han G.-N., Zeng J.* On a q -sequence that generalizes the median Genocchi numbers// Ann. Sci. Math. Québec. — 1999. — 23. — С. 63–72.
42. *Han G., Zeng J.* q -Polynomes de Gandhi et statistique de Denert// Discr. Math. — 1999. — 205, №№ 1–3. — С. 119–143.
43. *Hartshorne R.* Algebraic Geometry/ Grad. Texts Math. — Springer-Verlag, 1977. — 52.
44. *Hassett B., Tschinkel Yu.* Geometry of equivariant compactifications of $\mathbb{G}_a^n$ // Int. Math. Res. Not. — 1999. — 20. — С. 1211–1230.
45. *Joseph A.* On the Demazure character formula// Ann. Sci. Ecole Norm. Super. (4) — 1985. — 18, № 3. — С. 389–419.
46. *Kreweras G.* Sur les permutations comptées par les nombres de Genocchi de 1-ière et 2-ième espèce// Eur. J. Combinatorics. — 1997. — 18. — С. 49–58.
47. *Kumar S.* Kac–Moody groups, their flag varieties and representation theory/ Progr. Math. — Boston: Birkhäuser. 2002. — 204.
48. *Lakshmibai V.* Degenerations of flag varieties to toric varieties// C. R. Acad. Sci. Paris. — 1995. — 321. — С. 1229–1234.
49. *Seidel L.* Über eine einfache Entstehungsweise der Bernoullischen Zahlen und einiger verwandten Reihen// Münch. Akad. Wiss. Math. Phys. Cl. Sitzungsber. 4. — 1877. — С. 157–187.
50. *Sloane N. J. A.* Sequence A000366/ n-Line Encyclopedia of Integer Sequences; <http://oeis.org>.
51. *Viennot G.* Interprétations combinatoires des nombres d’Euler et de Genocchi// Semin. Number Theory, 1981/1982. — Talence: Univ. Bordeaux I, 1982. — № 11.
52. *Viennot G.* Une théorie combinatoire des polynômes orthogonaux généraux/ Note de conf. — Université du Québec a Montreal, 1983.
53. *Vinberg E.* On some canonical bases of representation spaces of simple Lie algebras/ Conference talk, Bielefeld, 2005.
54. *Zeng J., Zhou J.* A q -analog of the Seidel generation of Genocchi numbers// Eur. J. Combin. — 2006. — 27. — С. 364–381.

Е. Б. Фейгин

Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»

E-mail: evgfeig@gmail.com



СУПЕРХАРАКТЕРЫ УНИПОТЕНТНЫХ И РАЗРЕШИМЫХ ГРУПП

© 2017 г. А. Н. ПАНОВ

Аннотация. Понятие теории суперхарактеров конечной группы было введено П. Диаконисом и И. Айзексом в 2008 г. В статье делается обзор основных положений общей теории, излагается построение теории суперхарактеров для алгебра групп и теории базисных характеров для унитарной группы над конечным полем. Основываясь на своих предыдущих работах, автор строит теорию суперхарактеров для конечных групп треугольного типа. В статье получена характеристика алгебры Хопфа суперхарактеров треугольной группы над конечным полем.

Ключевые слова: представления групп, теория суперхарактеров, суперклассы, алгебра Хопфа, метод орбит.

AMS Subject Classification: 20C05, 20F16

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение	31
2. Суперхарактеры и суперклассы	33
3. Суперхарактеры конечных унитарных групп	36
4. Алгебра Хопфа суперхарактеров унитарной группы	41
5. Суперхарактеры конечных разрешимых групп	44
6. Алгебра Хопфа суперхарактеров треугольной группы	51
Список литературы	54

1. ВВЕДЕНИЕ

Традиционно основной задачей теории представлений конечных групп является следующая задача: для данной конечной группы требуется найти все ее неприводимые представления (характеры). Выяснилось, что для некоторых конечных групп эта задача чрезвычайно сложна, ее решение до сих пор не найдено и нет никаких подходов к ее решению в общем случае. Главным примером такой группы является унитарная группа $UT_n = UT(n, Fq)$ над конечным полем из q элементов. Эта группа является унитарной матричной группой, и известно, что для таких групп применим метод орбит А. А. Кириллова (см. [1, 26, 25]). Согласно этому методу существует взаимно однозначное соответствие между неприводимыми представлениями и орбитами коприсоединенного представления. Это соответствие сыграло важную роль в теории представлений, поскольку в терминах коприсоединенных орбит можно получить решение задачи разложения представлений, полученных ограничением и индуцированием из неприводимых представлений. Кроме этого, характер неприводимого представления может быть напрямую вычислен как некоторая сумма по элементам коприсоединенной орбиты (формула Кириллова). Однако классифицировать коприсоединенные орбиты не легче, чем неприводимые представления. Разумнее говорить о том, что метод орбит устанавливает эквивалентность категорий, а не дает решение задачи о классификации неприводимых представлений.

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда и Немецкого научно-исследовательского сообщества (проект РФФИ-DFG 16-41-01013).

В серии работ [7, 8, 9, 10] 1995–2003 гг. К. Андре разработал теорию базисных характеров унитарной группы UT_n . Хотя базисные характеры не являются неприводимыми, система базисных характеров имеет много общих черт с системой неприводимых характеров: эти характеры попарно дизъюнкты, постоянны на некоторой системе подмножеств (системе базисных подмножеств в UT_n), число базисных характеров равно числу базисных подмножеств, что позволяет составить квадратную таблицу значений (таблицу базисных характеров). При этом каждое базисное подмножество в UT_n является объединением классов сопряженных элементов. Системе базисных характеров однозначно соответствует разбиение сопряженного пространства ut_n^* на подмножества, которые Андре называет базисными подмножествами в ut_n^* (своего рода аналог метода орбит). В отличие от неприводимых характеров базисные характеры допускают явное описание в терминах базисных подмножеств в системе положительных корней для серии A_n . Отметим, что Андре определял базисное подмножество в ut_n^* как сумму элементарных коприсоединенных орбит. Этот подход, по видимому, универсален и годится для других серий простых алгебр Ли, однако труден для вычислений. Как отметил в своей диссертации Нинг Ян [29], для серии A_n базисные подмножества в ut_n^* совпадают с орбитами двойного лево-правого действия группы UT_n .

В [20] П. Диаконис и И. Айзекс ввели понятие теории суперхарактеров произвольной конечной группы. В определение теории суперхарактеров положены в качестве аксиом свойства базисных характеров унитарной группы. Грубо говоря, построить теорию суперхарактеров для заданной конечной группы означает предъявить такую систему дизъюнктивных характеров (суперхарактеров) $\chi_1, \dots, \chi_m$ и такое разбиение группы на подмножества (суперклассы) $K_1, \dots, K_m$, что суперхарактеры постоянны на суперклассах. Основная цель — построить теорию суперхарактеров, дающую наилучшее приближение теории неприводимых характеров. В [20] П. Диаконис и И. Айзекс построили теорию суперхарактеров алгебра групп, частным случаем которой является теория базисных характеров для UT_n .

Исследованию различных теорий суперхарактеров были посвящены многие работы. Отметим некоторые из них: суперхарактеры абелевых групп и приложения в теории чисел [18, 21], супериндукция для алгебра групп [34, 35, 27], теория суперхарактеров для силовских подгрупп в ортогональной и симплектической группах над конечным полем [13], приложения к задаче случайных блужданий на группах [15], теория суперхарактеров для полупрямых произведений [23], описание алгебры Хопфа суперхарактеров унитарной группы [6, 17]. Обзор литературы по этой теме можно найти в [6]. Большинство из перечисленных работ посвящены либо общим вопросам теории суперхарактеров, либо построению и изучению теорий суперхарактеров для унитарных групп, близких к UT_n . Одной из основных проблем является расширение этого списка, построение подходящей теории суперхарактеров таких групп, как параболические подгруппы в группах Шевалле. Отметим, что метод Макки для описания неприводимых представлений полупрямых произведений, по-видимому, не переносится на суперхарактеры, что является здесь основным препятствием. Общий подход из [23] дает довольно грубую теорию суперхарактеров, которую можно улучшить в примерах.

Большая часть этой работы представляет собой обзор. Следуя работе [20] П. Диакониса и И. Айзекса, мы изложим общие вопросы теорий суперхарактеров и построим теорию суперхарактеров алгебра групп (см. разделы 2 и 3). Мы также осветим теорию базисных характеров К. Андре и дадим характеристику алгебры Хопфа суперхарактеров унитарной группы по работе [6] (см. разделы 3 и 4). В разделе 5 мы изложим, следуя [3, 31, 32], теорию суперхарактеров конечных групп треугольного типа. В разделе 6 будет приведена характеристика алгебры Хопфа суперхарактеров треугольной группы в терминах алгебры Хопфа частично симметрических функций от некоммутирующих переменных.

2. СУПЕРХАРАКТЕРЫ И СУПЕРКЛАССЫ

Пусть G — конечная группа, $1 \in G$ — единичный элемент группы, $\text{Irr}(G)$ — множество неприводимых характеров (представлений) группы G . Предположим, что заданы два разбиения

$$\text{Irr}(G) = X_1 \cup \dots \cup X_m, \quad X_i \cap X_j = \emptyset, \quad (2.1)$$

$$G = K_1 \cup \dots \cup K_m, \quad K_i \cap K_j = \emptyset. \quad (2.2)$$

Заметим, что число компонент в разложении должно быть одинаково. Каждому X_i сопоставим характер группы G по формуле

$$\sigma_i = \sum_{\psi \in X_i} \psi(1)\psi. \quad (2.3)$$

Определение 2.1. Говорят, что два разбиения $\mathcal{X} = \{X_i\}$ и $\mathcal{K} = \{K_j\}$ задают теорию суперхарактеров группы G , если каждый характер σ_i постоянен на каждом K_j . В этом случае $\{\sigma_i\}$ называют суперхарактерами, а $\{K_j\}$ — суперклассами. Таблицу значений $\{\sigma_i(K_j)\}$ называют таблицей суперхарактеров.

Для построения конкретных примеров теорий суперхарактеров важно следующее предложение.

Предложение 2.1 (см. [20, лемма 2.1]). Пусть задана система дизъюнктивных характеров $\mathfrak{Ch} = \{\chi_1, \dots, \chi_m\}$ и разбиение $\mathcal{K} = \{K_1, \dots, K_m\}$ группы G . Предположим, что каждый характер χ_i постоянен на каждом K_j . Обозначим через X_i носитель характера χ_i (т.е. множество неприводимых компонент χ_i). Тогда следующие два условия эквивалентны:

- 1) $\{1\} \in \mathcal{K}$;
- 2) система подмножеств $\mathcal{X} = \{X_i\}$ задает разбиение $\text{Irr}(G)$; разбиения $\mathcal{X}$ и $\mathcal{K}$ задают теорию суперхарактеров группы G .

Более того, каждый χ_i константой отличается от суперхарактера σ_i . Упрощая язык, будем в дальнейшем называть элементы из $\{\chi_i\}$ суперхарактерами.

Замечание 2.1. Напомним, что характеры дизъюнктивны (т.е. состоят их носители не пересекаются) тогда и только тогда, когда они ортогональны.

Доказательство. Предположим, что выполнено условие 1). Всякая система дизъюнктивных характеров линейно независима. Число характеров из $\mathfrak{Ch}$ равно числу элементов в $\mathcal{K}$. Поэтому $\mathfrak{Ch}$ является базисом в пространстве комплекснозначных функций на группе G , постоянных на подмножествах из $\mathcal{K}$. Регулярный характер $\rho(g)$ равен $|G|$ при $g = 1$ и равен 0 при $g \neq 1$. Так как $\{1\} \in \mathcal{K}$, то $\rho(g)$ постоянен на подмножествах из $\mathcal{K}$. Имеем

$$\rho = \sum_{i=1}^m a_i \chi_i, \quad \text{где } a_i \in \mathbb{C}.$$

С другой стороны, каждый неприводимый характер входит в разложение ρ с кратностью, равной своей степени. Поэтому каждый неприводимый характер входит в разложение ровно одного из χ_i и $a_i \chi_i = \sigma_i$, $a_i \in \mathbb{Q}^*$, что доказывает 2).

Предположим, что выполнено условие 2). Единица группы попадает в ровно одно из подмножеств $\mathcal{K}$, скажем в K_1 . Так как характеры χ_i постоянны на суперклассах, то $\chi_i(g) = \chi_i(1)$ для любого $g \in K_1$ и $1 \leq i \leq m$. Из условия 2) получаем, что $\rho(g) = \rho(1)$ и, следовательно, $g = 1$ и $K_1 = \{1\}$. $\square$

Следствие 2.1. Система суперхарактеров $\mathfrak{Ch} = \{\chi_i\}$ однозначно с точностью до постоянных множителей определяется по разбиению $\{X_i\}$.

Приведем несколько примеров теорий суперхарактеров.

Пример 2.1. Система неприводимых характеров $\{\chi_i\}$ и система классов сопряженных элементов $\{K_i\}$.

Пример 2.2. Два суперхарактера $\chi_1 = 1_G$, $\chi_2 = \rho - 1_G$ (здесь ρ — характер регулярного представления) и два суперкласса $K_1 = \{1\}$, $K_2 = G \setminus \{1\}$. Таблица суперхарактеров имеет вид

	χ_1	χ_2
K_1	1	$ G - 1$
K_2	1	-1

Пример 2.3. Рассмотрим циклическую группу $G = C_4$ 4-го порядка. Ниже приведены таблица неприводимых характеров и одна из возможных таблиц суперхарактеров.

	χ_0	χ_1	χ_2	χ_3
1	1	1	1	1
g	1	i	-1	-i
g^2	1	-1	1	-1
g^3	1	-i	-1	i

	χ_0	$\chi_1 + \chi_3$	χ_2
1	1	2	1
$\{g, g^3\}$	1	0	-1
g^2	1	-2	1

Пример 2.4. Если группа Γ действует на G и $\text{Irr}(G)$ согласованно, $\chi^a(g^a) = \chi(g)$, то две системы

$$\chi^\Gamma = \sum_{a \in \Gamma} \chi^a, \quad K^\Gamma = \bigcup_{a \in \Gamma} K^a,$$

где χ (соответственно, K) пробегает множество представителей Γ -орбит в $\text{Irr}(G)$ (соответственно, классов сопряженных элементов в G), задают теорию суперхарактеров группы G . Частный случай рассмотрен в предыдущем примере: группа $\Gamma = \mathbb{Z}_2$; образующий элемент действует на G и $\text{Irr}(G)$ возведением в третью степень.

Для конечных групп малых порядков можно перечислить все теории суперхарактеров. В [19] показано, что существует равно три группы, допускающие ровно две теории суперхарактеров, — это циклическая группа Z_3 , симметрическая группа S_3 и простая группа $\text{Sp}(6, 2)$. Различные примеры теорий суперхарактеров содержатся в [16].

Перейдем к изложению общих утверждений о суперхарактерах и суперклассах.

Лемма 2.1. Если $\{X_1, \dots, X_m\}$ — разбиение $\text{Irr}(G)$ и $\{K_1, \dots, K_t\}$ — разбиение G , причем каждый σ_i , $1 \leq i \leq m$, постоянен на каждом K_j , $1 \leq j \leq t$, то $m \leq t$.

Доказательство. Система характеров $\{\sigma_i\}$ линейно независима и содержится в пространстве всех комплекснозначных функций на G , постоянных на $\{K_j\}$, размерность которого равна t . $\square$

Для любого подмножества $K \subseteq G$ введем обозначение

$$\widehat{K} = \sum_{g \in K} g.$$

Центр $Z(\mathbb{C}G)$ групповой алгебры $\mathbb{C}G$ является прямой суммой

$$Z(\mathbb{C}G) = \bigoplus_{\psi \in \text{Irr}(G)} \mathbb{C}e_\psi,$$

где $\{e_\psi\}$ — система примитивных идемпотентов. Примитивный идемпотент e_ψ , ассоциированный с неприводимым характером ψ , определяется по формуле

$$e_\psi = \frac{\psi(1)}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\psi(g)} g.$$

Каждому подмножеству $X \subseteq \text{Irr}(G)$ поставим в соответствие центральный идемпотент

$$f_X = \sum_{\psi \in X} e_\psi. \quad (2.4)$$

Предложение 2.2 (см. [20]). Пусть разбиения $\mathcal{X}$ и $\mathcal{K}$ задают теорию суперхарактеров и $f_i = f_{X_i}$. Тогда система $\{\widehat{K_j} : 1 \leq j \leq m\}$ образует базис в подалгебре

$$A(\mathcal{X}, \mathcal{K}) = \text{span}\{f_i : 1 \leq i \leq m\}.$$

Доказательство. Прямые вычисления приводят к равенству

$$f_i = \sum_{\psi \in X_i} e_\psi = \sum_{\psi \in X_i} \frac{\psi(1)}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\psi(g)} g = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \left(\sum_{\psi \in X_i} \psi(1) \overline{\psi(g)} \right) g = \frac{1}{|G|} \sum_{j=1}^m \overline{\sigma_i(K_j)} \widehat{K_j}. \quad (2.5)$$

Поскольку системы элементов $\{f_i\}$ и $\{\widehat{K_j}\}$ равномощны и линейно независимы, то они линейно порождают одно и то же подпространство. $\square$

Следствие 2.2. Если разбиения $\mathcal{X}$ и $\mathcal{K}$ задают теорию суперхарактеров, то каждое K_j инвариантно относительно сопряжения (т.е. распадается в объединение классов сопряженных элементов).

Доказательство. Из предложения 2.2 вытекает, что элементы $\{\widehat{K_j}\}$ содержатся в центре групповой алгебры $\mathbb{C}G$. $\square$

Следствие 2.3 (см. [20]). В теории суперхарактеров разбиения $\mathcal{X}$ и $\mathcal{K}$ однозначно определяют друг друга.

Доказательство. 1) Разбиение (2.1) множества $\text{Irr}(G)$ определяет отношение эквивалентности на группе G , для которого $x \sim y$, если $\sigma_i(x) = \sigma_i(y)$ для любого $1 \leq i \leq m$. Это отношение определяет разбиение $\mathcal{K}^0$ группы G . Напомним, что $\{\sigma_i\}$ — базис в пространстве комплекснозначных функций, постоянных на разбиении $\mathcal{K}$. Разбиение $\mathcal{K}$ более мелкое, чем $\mathcal{K}^0$. Поэтому $m = |\mathcal{K}| \geq |\mathcal{K}^0|$. С другой стороны, согласно лемме 2.1, $|\mathcal{K}^0| \geq |\mathcal{X}| = m$. Следовательно, $|\mathcal{K}^0| = m$ и $\mathcal{K}^0 = \mathcal{K}$.

2) Разбиение (2.2) группы G определяет подалгебру $\text{span}\{\widehat{K_j}\} = \text{span}\{f_i\}$. Базис, состоящий из системы ортогональных идемпотентов, определяется в ней однозначно. Поэтому разбиение $\mathcal{X}$ однозначно определяется по $\mathcal{K}$. $\square$

Предложение 2.3 (см. [20]). Главный характер¹ 1_G является суперхарактером.

Доказательство. Допустим противное. Пусть $1_G \in X_1$ и $X_1 \neq \{1_G\}$. Тогда разбиение $\mathcal{X}^0$, которое отличается от $\mathcal{X}$ тем, что $X_1 = \{1_G\} \cup (X_1 \setminus \{1_G\})$, образует пару $(\mathcal{X}^0, \mathcal{K})$, удовлетворяющую условиям предложения 2.1. Однако $|\mathcal{X}^0| > |\mathcal{K}|$. Это противоречит лемме 2.1. $\square$

Предложение 2.4 (см. [20]). Пусть $\tau \in \text{Aut}(\mathbb{C})$. Тогда для любой теории суперхарактеров $(\mathcal{X}, \mathcal{K})$ автоморфизм τ действует перестановками в разбиении $\mathcal{X}$.

Доказательство. Система $\mathcal{X}^\tau = \{X_i^\tau\}$ является разбиением $\text{Irr}(G)$. Пары $(\mathcal{X}, \mathcal{K})$ и $(\mathcal{X}^\tau, \mathcal{K})$ задают две теории суперхарактеров с общим $\mathcal{K}$. Из предложения 2.3 следует, что $\mathcal{X} = \mathcal{X}^\tau$. $\square$

Предложение 2.5 (см. [20]). Пусть $(r, |G|) = 1$. Тогда биекция $g \rightarrow g^r$ переставляет суперклассы.

Доказательство. Биекция $g \rightarrow g^r$ переводит разбиение $\mathcal{K}$ в новое разбиение $\mathcal{K}^r = \{K_i^r\}$. Рассмотрим первообразный корень ϵ степени $|G|$ из единицы и такой автоморфизм τ поля $\mathbb{C}$, что $\tau(\epsilon) = \epsilon^r$. Из предыдущего предложения вытекает, что τ действует перестановкой на разбиении $\mathcal{X}$ и $\sigma_i(K_j^r) = \sigma_i^\tau(K_j)$. Пары $(\mathcal{X}, \mathcal{K})$ и $(\mathcal{X}, \mathcal{K}^r)$ задают две теории суперхарактеров с общим $\mathcal{X}$. Из предложения 2.3 следует, что $\mathcal{K} = \mathcal{K}^r$. $\square$

Следствие 2.4. Разбиение $\mathcal{K}$ совпадает с разбиением $\mathcal{K}^{-1} = \{K_j^{-1}\}$.

Определение 2.2. Пусть A — подалгебра в $\mathbb{C}G$. Подалгебру A называют подалгеброй Шура, если существует такое разбиение $\mathcal{K} = \{K_i\}$ группы G , что

- 1) $\widehat{K_i} \in A$ — базис в A ,
- 2) $\{1\} \in \mathcal{K}$,
- 3) $\mathcal{K}^{-1} = \mathcal{K}$.

¹Напомним, что главный характер — это характер, тождественно равный единице.

Теорема 2.1 (см. [23]). *Отображение $(\mathcal{X}, \mathcal{K}) \rightarrow A(\mathcal{X}, \mathcal{K})$ устанавливает взаимно однозначное соответствие между множеством теорий суперхарактеров и множеством подалгебр Шура, содержащихся в центре $Z(\mathbb{C}G)$ групповой алгебры.*

Доказательство. Из предложения 2.2 и следствия 2.4 вытекает, что $A(\mathcal{X}, \mathcal{K})$ — подалгебра Шура, содержащаяся в $Z(\mathbb{C}G)$. Покажем, что верно и обратное. Пусть A — подалгебра Шура в $Z(\mathbb{C}G)$. Алгебра $Z(\mathbb{C}G)$ является прямой суммой нескольких копий $\mathbb{C}$. Подалгебра A содержит 1 и также является прямой суммой нескольких копий поля $\mathbb{C}$. Существует такое разбиение $\mathcal{X} = \{X_i\}$ множества $\text{Irr}(G)$, что система идемпотентов $\{f_i\}$ (см. (2.4)) является базисом в A . Базисы $\{f_i\}$ и $\{\hat{K}_i\}$ состоят из одинакового числа элементов. Поэтому $|\mathcal{X}| = |\mathcal{K}|$. Из формул (2.5) вытекает, что $\sigma_i(K_j) = \text{const}$. Разбиения $(\mathcal{X}, \mathcal{K})$ задают теорию суперхарактеров на группе G и $A = A(\mathcal{X}, \mathcal{K})$. $\square$

Заметим, что в доказательстве второй части этой теоремы условие 3) из определения подалгебр Шура не используется. Поэтому всякая подалгебра, содержащаяся в $Z(\mathbb{C}G)$ и удовлетворяющая условиям 1) и 2), является подалгеброй Шура.

Следующая теорема является аналогом утверждения для неприводимых характеров.

Теорема 2.2 (см. [20]). *Пусть χ — суперхарактер, K — суперкласс. Тогда $\frac{\chi(g)|K|}{\chi(1)}$ — целое алгебраическое число.*

Изложим конструкцию $*$ -произведения суперхарактеров из [23], которая играет важную роль при построении различных теорий суперхарактеров. Пусть G — конечная группа, N — нормальная подгруппа в G , $\pi : G \rightarrow G/N$ — естественная проекция.

Теорию суперхарактеров $(\mathcal{X}, \mathcal{K})$ группы называют G -инвариантной, если действие G на N и $\text{Irr}(N)$ сохраняет разбиения $\mathcal{X}$ и $\mathcal{K}$. Отметим, что в теории суперхарактеров разбиения G и $\text{Irr}(G)$ однозначно определяют друг друга (см. предложение 2.3). Поэтому достаточно потребовать инвариантность одного из двух разбиений ($\mathcal{X}$ или $\mathcal{K}$).

Пусть задана G -инвариантная теория суперхарактеров $(\mathcal{X}, \mathcal{K})$ группы N , где $\text{Irr}(N) = X_1 \cup \dots \cup X_m$, причем $X_1 = \{1_N\}$, и $N = K_1 \cup \dots \cup K_m$. Пусть задана произвольная теория суперхарактеров $(\mathcal{Y}, \mathcal{L})$ фактор-группы G/N , где

$$\text{Irr}(G/N) = Y_1 \cup \dots \cup Y_k, \quad G/N = L_1 \cup \dots \cup L_k,$$

причем $L_1 = \{1\}$. Для любого подмножества $X \subset \text{Irr}(N)$ обозначим через $\text{Ind}(X, G)$ сумму индуцированных характеров $\text{Ind}(\psi, G)$, где $\psi \in X$. Рассмотрим разбиения

$$\text{Irr}(G) = \text{supp}(\text{Ind}(X_2, G)) \cup \dots \cup \text{supp}(\text{Ind}(X_m, G)) \cup Y_1 \cup \dots \cup Y_k, \quad (2.6)$$

$$G = K_1 \cup \dots \cup K_m \cup \pi^{-1}(L_2) \cup \dots \cup \pi^{-1}(L_k). \quad (2.7)$$

Теорема 2.3 (см. [23]). *Разбиения (2.6) и (2.7) задают теорию суперхарактеров группы G .*

Эту теорию суперхарактеров называют $*$ -произведением теорий суперхарактеров $(\mathcal{X}, \mathcal{K})$ группы N и $(\mathcal{Y}, \mathcal{L})$ фактор-группы G/N . Отметим, что эта теория суперхарактеров является довольно грубой. В некоторых работах конструкция $*$ -произведения подвергалась модификации, чтобы построить более тонкую теорию суперхарактеров.

3. СУПЕРХАРАКТЕРЫ КОНЕЧНЫХ УНИПОТЕНТНЫХ ГРУПП

3.1. Теория суперхарактеров алгебра групп. Теория суперхарактеров для алгебра групп была построена П. Дяконисом и И. Айзексом в [20]. По определению, *алгебра групп* — это группа вида $G = 1 + J$, где J — ассоциативная конечномерная нильпотентная алгебра над конечным полем $\mathbb{F}_q$. *Суперкласс* произвольного элемента $1 + x$ определяется как $1 + \omega$, где ω — лево-правая $G \times G$ -орбита элемента $x \in J$. Определены также правое и левое действия группы G на сопряженном пространстве J^* по формулам $\lambda g(x) = \lambda(gx)$ и $g\lambda(x) = \lambda(xg)$. Пусть $G_{\lambda, \text{right}}$ — стабилизатор для $\lambda \in J^*$ относительно правого действия G в J^* .

Зафиксируем нетривиальный характер $t \rightarrow \varepsilon^t$ аддитивной группы поля $\mathbb{F}_q$ со значением в мультипликативной группе $\mathbb{C}^*$. Функция

$$\xi : G_{\lambda, \text{right}} \rightarrow \mathbb{C}^*, \quad \xi_\lambda(g) = \varepsilon^{\lambda(g-1)},$$

является линейным характером (одномерным представлением) группы $G_{\lambda, \text{right}}$. Действительно, если $g_1 = 1 + x_1$ и $g_2 = 1 + x_2$ — два элемента из $G_{\lambda, \text{right}}$, то $\lambda(x_1 x_2) = 0$ и

$$\begin{aligned} \xi_\lambda(g_1 g_2) &= \xi_\lambda(1 + x_1 + x_2 + x_1 x_2) = \varepsilon^{\lambda(x_1 + x_2 + x_1 x_2)} = \\ &= \varepsilon^{\lambda(x_1)} \varepsilon^{\lambda(x_2)} \varepsilon^{\lambda(x_1 x_2)} = \varepsilon^{\lambda(x_1)} \varepsilon^{\lambda(x_2)} = \xi_\lambda(g_1) \xi_\lambda(g_2). \end{aligned}$$

Суперхарактером алгебра группы G называют индуцированный характер

$$\chi_\lambda = \text{Ind}(\xi_\lambda, G_{\lambda, \text{right}}, G). \quad (3.1)$$

Теорема 3.1 (см. [20]). Системы суперхарактеров $\{\chi_\lambda\}$ и суперклассов $\{1 + GxG\}$, где λ и x пробегают системы представителей $G \times G$ -орбит в J^* и J соответственно, определяют теорию суперхарактеров для группы G .

Таким образом, характеры из системы $\{\chi_\lambda\}$ попарно дизъюнкты. Проблема классификации неприводимых представлений сводится к задаче разложения суперхарактеров в сумму неприводимых компонент. Этот вопрос остается открытым. Представляет интерес следующий результат.

Теорема 3.2 (см. [12]). $(\chi_\lambda, \chi_\lambda) = |G\lambda \cap \lambda G|$.

Доказательство. Представление с характером χ_λ реализуется в пространстве

$$V_\lambda = \left\langle f_\mu(1 + x) = \varepsilon^{\mu(x)} : \mu \in G\lambda \right\rangle$$

по формуле $T_g f(s) = f(sg)$, т.е. представление с характером χ_λ является подпредставлением в правом регулярном представлении группы G в пространстве комплекснозначных функций $\mathbb{C}[G]$. Представление в пространстве $\mathbb{C}[G]$ вполне приводимо; $\mathbb{C}[G]$ раскладывается в прямую сумму V_λ и дополнения V'_λ . Всякий $\phi \in \text{Hom}_G(V_\lambda, V_\lambda)$ продолжается до сдвигающего оператора $\tilde{\phi}$ в пространстве $\mathbb{C}[G]$, равного нулю на V'_λ . Тогда $\tilde{\phi}$ — линейная комбинация операторов левого сдвига $L_g f(s) = f(gs)$ на группе G . Оператор левого сдвига на $a \in G$ сохраняет подпространство V_λ тогда и только тогда, когда $\lambda a \in G\lambda$. Поэтому $|\text{Hom}_G(V_\lambda, V_\lambda)| = |G\lambda \cap \lambda G|$. $\square$

Напомним формулу А. А. Кириллова для неприводимых характеров. По всякому элементу $\lambda \in J^*$ можно построить неприводимый характер Ψ_λ алгебра группы $G = 1 + J$ (см. [1]), который вычисляется по формуле

$$\Psi_\lambda(1 + x) = \frac{1}{\sqrt{|\Omega^*|}} \sum_{\mu \in \Omega^*} \varepsilon^{\mu(x)}, \quad (3.2)$$

где Ω^* — коприсоединенная орбита для $\lambda \in J^*$. Отметим, что эта формула верна, если характеристика поля достаточно велика (см. [1, 25]).

Функции, определяемые формулой (3.2), называют *функциями Кириллова*. Число функций Кириллова равно числу неприводимых представлений (этот факт вытекает из [20, Lemma 4.1]), однако в общем случае эти множества не совпадают. Простейший пример: группа $\text{UT}(n, \mathbb{F}_q)$, $n \geq 13$, для $\text{char}(\mathbb{F}_q) = 2$ (см. [24]).

В [20] был получен аналог формулы (3.2) для суперхарактеров алгебра групп:

$$\chi_\lambda(1 + x) = \frac{1}{n(\lambda)} \sum_{\mu \in G\lambda G} \varepsilon^{\mu(x)}, \quad (3.3)$$

в которой χ_λ — суперхарактер, ассоциированный с $\lambda \in J^*$, и $n(\lambda)$ — число правых G -орбит в $G\lambda G$. Эта формула верна над конечным полем произвольной характеристики.

Константа $n(\lambda)$ представляет интерес и по другой причине. Напомним, что есть еще стандартный суперхарактер σ_λ , который является суммой неприводимых составляющих χ_λ с кратностями, равными их степеням (см. предложение 2.1). Суперхарактер χ_λ константой отличается от σ_λ . Оказывается, что эта константа совпадает с $n(\lambda)$, точнее $n(\lambda)\chi_\lambda = \sigma_\lambda$ (см. [20]).

В этой же работе [20] была доказана другая версия формулы (3.3) в виде

$$\chi_\lambda(1 + x) = \frac{|\lambda G|}{|GxG|} \sum_{y \in GxG} \varepsilon^{\lambda(y)}. \quad (3.4)$$

Перейдем к рассмотрению вопросов ограничения и индуцирования в теории суперхарактеров алгебра групп. Пусть $G = 1 + J$ — алгебра группа. Если J' — произвольная подалгебра в J , то подгруппа $G' = 1 + J'$ называется *алгебра подгруппой* в G . В [20] доказано, что ограничение суперхарактера χ_λ на алгебра подгруппу G' является суммой суперхарактеров подгруппы G' с неотрицательными целыми коэффициентами.

Пусть ϕ — суперкласс-функция на G' (т.е. функция постоянная на суперклассах в G'). Продолжим ϕ до функции $\dot{\phi}$ на G , полагая равной нулю вне G' . По определению, *супериндуция* для ϕ — это функция $\text{SInd } \phi$ на группе G , определенная формулой

$$\text{SInd } \phi(1 + x) = \frac{1}{|G| \cdot |G'|} \sum_{a,b \in G} \dot{\phi}(1 + axb).$$

Легко видеть, что $\text{SInd } \phi(1 + x)$ — суперкласс-функция на группе G . Скалярное произведение на группе G (и G') определяется обычным образом:

$$(f_1, f_2) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} f_1(g) \overline{f_2(g)}. \quad (3.5)$$

Следующая теорема — аналог теоремы Фробениуса для суперхарактеров алгебра групп.

Теорема 3.3 (см. [20]). *Пусть ϕ — суперкласс-функция на G' и ψ — суперкласс-функция на G . Тогда $(\text{SInd } \phi, \psi) = (\phi, \text{Res } \psi)$.*

3.2. Теория базисных характеров для унитарной группы. Важнейшим примером алгебра группы является унитарная группа $\text{UT}_n = \text{UT}(n, \mathbb{F}_q)$, состоящая из верхнетреугольных матриц с элементами из поля $\mathbb{F}_q$ и единицами по диагонали. Ее алгебра Ли $\mathfrak{ut}_n = \mathfrak{ut}(n, \mathbb{F}_q)$ состоит из строго треугольных матриц и является на самом деле ассоциативной алгеброй. Очевидно, что $\text{UT}_n = 1 + \mathfrak{ut}_n$ — алгебра группа. Теория базисных характеров, созданная К. Андре (см. [7, 8, 9]), является частным случаем теории суперхарактеров алгебра групп П. Дякониса и И. Айзекса (см. [20]).

Введем несколько определений. *Корнем* будем называть любую пару натуральных чисел (i, j) , где $1 \leq i, j \leq n$ и $i \neq j$. Корень (i, j) называется *положительным* (соответственно, *отрицательным*), если $i < j$ (соответственно, если $i > j$). Число i назовем *номером строки* корня $\alpha = (i, j)$ (обозначение $i = \text{row}(\alpha)$), а j — *номером столбца* (обозначение $j = \text{col}(\alpha)$). Алгебра Ли $\mathfrak{ut}_n$ имеет базис из матричных единиц $\{E_\alpha : \alpha > 0\}$.

Следуя К. Андре, подмножество D в множестве положительных корней назовем *базисным подмножеством*, если в каждой строке и в каждом столбце имеется не более одного корня из D . Другое названия для D — *подмножество типа расстановки ладей*. Пусть задано отображение $\phi : D \rightarrow \mathbb{F}_q^*$. Назовем пару (D, ϕ) *допустимой парой*, если D — базисное подмножество.

Любой допустимой паре (D, ϕ) поставим в соответствие элемент алгебры Ли $\mathfrak{ut}_n$ вида

$$X_{D,\phi} = \sum_{\alpha \in D} \phi(\alpha) E_\alpha.$$

Сопряженное пространство $\mathfrak{ut}_n^*$ имеет базис $\{E_\alpha^* : \alpha > 0\}$, двойственный к $\{E_\alpha : \alpha > 0\}$. Обозначим через $\lambda_{D,\phi}$ элемент сопряженного пространства вида

$$\lambda_{D,\phi} = \sum_{\alpha \in D} \phi(\alpha) E_\alpha^*.$$

Теорема 3.4 (см. [20, 29]). *Пусть $G = \text{UT}_n$. Справедливы следующие утверждения.*

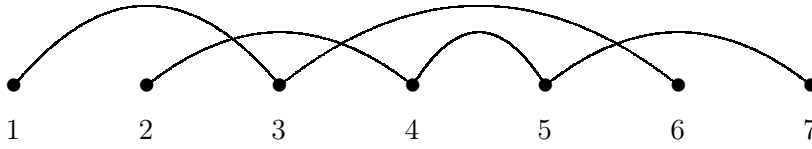
- 1) *Каждая лево-правая орбита группы $G \times G$ в $\mathfrak{ut}_n$ содержит ровно один элемент вида $X_{D,\phi}$ (обозначим орбиту через $\mathcal{O}(D, \phi)$).*
- 2) *В каждом суперклассе в группе $G = \text{UT}_n$ содержится ровно один элемент вида $1 + X_{D,\phi}$ (обозначим суперкласс через $K_{D,\phi}$).*
- 3) *Каждая лево-правая орбита группы $G \times G$ в $\mathfrak{ut}_n^*$ содержит ровно один элемент вида $\lambda_{D,\phi}$ (обозначим орбиту через $\mathcal{O}^*(D, \phi)$).*

Группа G разбивается на суперклассы $\{K_{D,\phi}\}$, а $\mathfrak{ut}_n^*$ — на лево-правые орбиты $\{\mathcal{O}(D,\phi)\}$. Следуя схеме из раздела 3.1, построим суперхарактер $\chi_{D,\phi}$ по паре (D,ϕ) . В работах Андре эти суперхарактеры называются *базисными характерами*, а суперклассы — *базисными подмножествами* в UT_n .

Следующая теорема является частным случаем теоремы 3.1.

Теорема 3.5. *Системы базисных характеров $\{\chi_{D,\phi}\}$ и базисных подмножеств $\{K_{D,\phi}\}$ задают теорию суперхарактеров групп UT_n .*

Каждому базисному D поставим в соответствие граф с вершинами в точках $1, 2, \dots, n$, в котором вершины i и j соединены дугой, если корень (i, j) принадлежит D . Например, для $D = \{(1, 3), (3, 6), (2, 4), (4, 5), (5, 7)\}$ граф имеет следующий вид:



Будем говорить, что два положительных корня (i, j) и (k, l) образуют *пересечение*, если $i < k < j < l$. Обозначим через $c(D)$ число пересечений в базисном подмножестве D . На приведенном выше рисунке пересечение корней означает, что дуги пересекаются, $c(D) = 3$. Для любого базисного подмножества D положим

$$d(D) = \sum_{(i,j) \in D} (j - i - 1).$$

Из теоремы 3.2 вытекает следующее утверждение.

Теорема 3.6 (см. [6]). $(\chi_{D,\phi}, \chi_{D,\phi}) = q^{c(D)}$ и $\chi_{D,\phi}(1) = q^{d(D)}$.

В случае, если D состоит из единственного корня $\{\alpha\}$ и $c = \phi(\alpha) \in \mathbb{F}_q^*$, будем обозначать через $\chi_{\alpha,c}$ соответствующий суперхарактер, а через $\mathcal{O}_{\alpha,c}$ и $\mathcal{O}_{\alpha,c}^*$ — соответствующие лево-правые орбиты в $\mathfrak{ut}_n$ и $\mathfrak{ut}_n^*$. Отметим, что в этом случае $\chi_{\alpha,c}$ — неприводимый характер группы UT_n (он называется *элементарным характером*), $\mathcal{O}_{\alpha,c}$ — присоединенная орбита, $\mathcal{O}_{\alpha,c}^*$ — коприсоединенная орбита (обе называются *элементарными орбитами*).

Теорема 3.7 (см. [8, 9]). Пусть (D,ϕ) — допустимая пара, $D = \{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}$ и $c_i = \phi(\alpha_i)$. Тогда справедливы следующие утверждения:

- 1) лево-правая орбита $\mathcal{O}(D,\phi)$ в $\mathfrak{ut}_n$ является суммой элементарных орбит $\sum_{i=1}^k \mathcal{O}_{\alpha_i, c_i}$;
- 2) лево-правая орбита $\mathcal{O}^*(D,\phi)$ в $\mathfrak{ut}_n^*$ является суммой элементарных орбит $\sum_{i=1}^k \mathcal{O}_{\alpha_i, c_i}^*$;
- 3) суперхарактер $\chi_{D,\phi}$ группы UT_n является произведением элементарных характеров $\prod_{i=1}^k \chi_{\alpha_i, c_i}$.

Задача вычисления значения суперхарактера на суперклассах сводится в случае элементарного характера. Нам понадобятся новые определения.

На множестве положительных корней определена частичная операция сложения $(i, j) = (i, l) + (l, j)$. Корни (i, l) и (l, j) назовем *сингулярными* для корня (i, j) . Множество сингулярных корней для α обозначим $\text{Sing}(\alpha)$. Для любого положительного корня $\alpha = (i, j)$ и базисного подмножества D' обозначим через $D'(i, j)$ число тех $\beta \in D'$, для которых $\text{row}(\beta) > i$ и $\text{col}(\beta) < j$. Положим $d'(i, j) = j - i - 1 - |D'(i, j)|$.

Теорема 3.8 (см. [9, 6]). Пусть $\alpha = (i, j)$ — положительный корень, $c \in \mathbb{F}_q^*$ и (D', ϕ') — произвольная допустимая пара. Тогда значение элементарного характера $\chi_{\alpha, c}$ на суперклассе $K_{D', \phi'}$ вычисляется по формуле

$$\chi_{\alpha, c}(K_{D', \phi'}) = \begin{cases} q^{d'(i, j)}, & \text{если } D' \cap \text{Sing}(\alpha) = \emptyset, \alpha \notin D'; \\ q^{d'(i, j)_{\varepsilon c \phi'(\alpha)}}, & \text{если } D' \cap \text{Sing}(\alpha) = \emptyset, \alpha \in D'; \\ 0, & \text{если } D' \cap \text{Sing}(\alpha) \neq \emptyset. \end{cases} \quad (3.6)$$

Базисные подмногообразия в $\mathfrak{ut}_n^*$ можно рассматривать над произвольным полем. Вопросам разложения базисных подмногообразий на коприсоединенные орбиты и нахождения образующих в алгебре инвариантов обсуждались в [8, 33]. Далее мы отметим характеризацию базисных подмногообразий в терминах касательных конусов к многообразиям Шуберта.

Пусть K — алгебраически замкнутое поле произвольной характеристики. Сопряженное пространство распадается на базисные подмногообразия $\mathcal{O}^*(D, \phi)$, где D — базисное подмножество, а ϕ — отображение $D \rightarrow K^*$. Назовем *базисной клеткой* V_D° объединение

$$V_D^\circ = \bigcup_{\phi} \mathcal{O}^*(D, \phi),$$

а ее замыкание V_D — *базисным конусом*.

Рассмотрим многообразие флагов $\mathcal{F} = G/B$, где $G = \text{GL}(n, K)$ и $B = T(n, K)$. Хорошо известно, что $\mathcal{F}$ разбивается на клетки Шуберта $\mathcal{F}_w^\circ = B\dot{w}B \bmod B$, где w — элемент группы Вейля W , а $\dot{w}$ — его представитель в группе G . Многообразие Шуберта $\mathcal{F}_w$ — это замыкание клетки Шуберта $\mathcal{F}_w^\circ$ в топологии Зарисского. Всякое многообразие Шуберта содержит начальную точку $p = B \bmod B$.

Пусть N_- — подгруппа нижнетреугольных матриц n -го порядка с единицами на диагонали. Подмножество $V = N_-B \bmod B$ называют *главной аффинной окрестностью* точки $p \in V$. Применяя представление $N_- = 1 + \mathfrak{n}_-$, можно отождествить главную аффинную окрестность с $\mathfrak{n}_-$, а $\mathfrak{n}_-$ в свою очередь, используя форму Киллинга, — с $\mathfrak{ut}_n^*$; при этом $p = 0$. Таким образом, пересечение $\mathcal{F}_w \cap V$ становится замкнутым по Зарисскому подмножеством в $\mathfrak{ut}_n^*$. Касательный конус TC_w к многообразию Шуберта $\mathcal{F}_w$ в точке $p = 0$ является замкнутым конусом в $\mathfrak{ut}_n^*$ с центром в нуле.

Определение 3.1. Элемент $w \in W$ назовем *однородным*, если $\mathcal{F}_w \cap V$ — конус с центром в точке p (т.е. $\text{TC}_w = \mathcal{F}_w \cap V$).

Теорема 3.9 (см. [33]). Базисные конусы совпадают с касательными конусами однородных элементов группы Вейля.

3.3. Неприводимые компоненты суперхарактеров. Задача классификации неприводимых представлений унитарной группы сводится к задаче разложения суперхарактеров на неприводимые компоненты. Последняя задача, в общем случае, является также чрезвычайно сложной в общем случае. Однако отдельные продвижения здесь все же есть.

Заметим, что базисные характеры $\{\chi_{D, \phi}\}$ с общим D и различными $\phi : D \rightarrow \mathbb{F}_q^*$ сопряжены относительно присоединенного действия диагональной подгруппы $H = \mathbb{F}_q^{*n}$. Поэтому достаточно получить разложение только одного суперхарактера из этой серии, например, с $\phi \equiv 1$.

Первый вопрос: когда базисный характер неприводим? Из теоремы 3.6 следует, что базисный характер $\chi_{D, \phi}$ неприводим тогда и только тогда, когда $c(D) = 0$, т.е. граф базисного множества не содержит пересечений.

Второй вопрос: когда базисный характер кратен неприводимому характеру? Назовем k -кроссом (k -crossing) последовательность $i_0 < i_1 < i_2 < \dots < i_k < i_{k+1} < i_{k+2}$, где каждая пара (i_s, i_{s+2}) лежит в D ; число k будем называть длиной красса. Естественно определяется максимальный кросс как кросс, который нельзя продолжить. Следующий результат вытекает из [11, теорема 4].

Теорема 3.10. Базисный характер $\chi_{D, \phi}$ кратен неприводимому характеру тогда и только тогда, когда все максимальные кроссы из D имеют четную длину. При этом его единственный неприводимый компонент имеет степень q^e , где $e = d(D) - \frac{1}{2}c(D)$.

В общем случае известно, что суперхарактер $\chi_{D,\phi}$ является линейной комбинацией с целыми неотрицательными коэффициентами классфункций из множества $\text{Kir}(D, \phi)$, состоящего из функций Кириллова, соответствующих коприсоединенным орбитам из $G\lambda_{D,\phi}G$ (см. [14]). Число неприводимых характеров в $\text{supp}(\chi_{D,\phi})$ совпадает с $|\text{Kir}(D, \phi)|$ (см. [30]). Совпадение же самих множеств $\text{supp}(\chi_{D,\phi})$ и $\text{Kir}(D, \phi)$ можно сформулировать в виде гипотезы, но это вряд ли верно.

Согласно известной гипотезе Хигмана, число неприводимых представлений группы $\text{UT}(n, \mathbb{F}_q)$ является полиномом от q . Аналогичную гипотезу можно сформулировать для числа $N_D(q)$ неприводимых компонент базисного характера $\chi_{D,\phi}$ и для числа $N_{D,e}(q)$ его неприводимых компонент степени q^e . Все эти гипотезы на данный момент не решены. Обзор современных результатов по этим вопросам можно найти в [28].

В [28] показано, что число $N_{D,e}(q)$ может быть вычислено в терминах неприводимых представлений некоторой алгебры $\tilde{\mathfrak{C}}_D(q)$. Обозначим через $\text{Cr}(D)$ множество тех положительных корней (i, j) , для которых существуют такие корни $(i, k), (j, l)$ из D , что $i < j < k < l$ (т.е. корни (i, k) и (j, l) пересекаются). Сначала строится алгебра $\mathfrak{C}_D(q)$ как алгебра, порожденная образующими e_{ij} , где $(i, j) \in \text{Cr}(D)$, с соотношениями

$$e_{ij} * e_{kl} = \begin{cases} e_{il}, & \text{если } j = k \text{ и } (i, l) \in \text{Cr}(D), \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Это умножение не совпадает с умножением матричных единиц E_{ij} и E_{kl} . Алгебра $\tilde{\mathfrak{C}}_D(q)$ является ее центральным расширением $\mathfrak{C}_D(q) \oplus \mathbb{F}_q z_D$ с умножением $z_D^2 = 0$, $e_{ij} z_D = z_D e_{ij} = 0$ и

$$e_{ij} * e_{kl} = \begin{cases} e_{il}, & \text{если } j = k \text{ и } (i, l) \in \text{Cr}(D), \\ z_D, & \text{если } j = k \text{ и } (i, l) \in D, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Алгебра $\tilde{\mathfrak{C}}_D(q)$, так же, как $\mathfrak{C}_D(q)$, ассоциативна и нильпотентна. Пусть $J = \mathfrak{ut}_n$. Отметим, что

$$\mathfrak{C}_D(q) \cong \mathfrak{s}_\lambda / \mathfrak{l}_\lambda, \quad \tilde{\mathfrak{C}}_D(q) \cong \mathfrak{s}_\lambda / \mathfrak{k}_\lambda,$$

где

$$\mathfrak{l}_\lambda = J_{\lambda, \text{right}}, \quad \mathfrak{s}_\lambda = \left\{ x \in J : \lambda(xy) = 0 \text{ для всех } y \in J_{\lambda, \text{right}} \right\}, \quad \mathfrak{k} = J_{\lambda, \text{right}} \cap \text{Ker}(\lambda).$$

Пусть $\text{Irr}(G, k)$ — число неприводимых представлений группы G степени k .

Теорема 3.11 (см. [28, Theorem 3.1]). *Для любого базисного подмножества D и поля $\mathbb{F}_q$ имеет место равенство*

$$N_{D,e}(q) = \frac{\#(\text{Irr}(1 + \tilde{\mathfrak{C}}_D(q), q^f) - \#(\text{Irr}(1 + \mathfrak{C}_D(q), q^f))}{q - 1},$$

где $f = c(D) - d(D) + e$. Более того, если все неприводимые характеры группы $1 + \tilde{\mathfrak{C}}_D(q)$ степени q^f являются функциями Кириллова, то все неприводимые компоненты $\chi_{D,\phi}$ степени q^e также являются функциями Кириллова.

4. АЛГЕБРА ХОПФА СУПЕРХАРАКТЕРОВ УНИТРЕУГОЛЬНОЙ ГРУППЫ

4.1. Алгебра Хопфа $\text{NS}(X)$. Напомним определение алгебры Хопфа симметрических функций от некоммутирующих переменных (см. [6]). Пусть $X = \{x_1, x_2, \dots\}$ — набор некоммутирующих переменных (алфавит). На множестве X действует группа $S_\infty = \varinjlim S_n$ конечными перестановками переменных. Рассмотрим линейное пространство $\text{NS}(X)$, состоящее из формальных степенных рядов по переменным из X с комплексными коэффициентами, ограниченной степени и инвариантных относительно группы S_∞ . Линейное пространство $\text{NS}(X)$ является прямой суммой подпространств

$$\text{NS}(X) = \sum_{n=0}^{\infty} \text{NS}_n(X),$$

состоящих из однородных элементов фиксированной степени. Для $n = 0$ подпространство $\text{NS}_0(X)$ совпадает с полем $\mathbb{C}$. Естественное умножение превращает $\text{NS}(X)$ в градуированную алгебру. Алгебру $\text{NS}(X)$ называют *алгеброй симметрических функций от некоммутирующих переменных*.

Алгебра $\text{NS}(X)$ является алгеброй Хопфа с коумножением, определенным следующим образом. Пусть X' и X'' — два набора попарно коммутирующих копий алфавита X . Тогда для любого $f(X) \in \text{NS}(X)$ имеет место разложение

$$f(X' + X'') = \sum f'_k(X') f''_k(X''),$$

где $X' + X''$ — несвязное объединение алфавитов X' и X'' . По определению,

$$\Delta(f) = \sum f'_k \otimes f''_k.$$

Пусть P — разбиение $[n] = \{1, \dots, n\}$ (обозначение $P \vdash [n]$), а m_P — сумма всех мономов $x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_n}$, в которых $x_{i_s} = x_{i_t}$ только в случае, если i_s и i_t принадлежат одной части разбиения P . Например, если $P = 13|2|4$, то $m_P = x_1 x_2 x_1 x_3 + \dots$

Система элементов $\{m_P : P \vdash [n]\}$ является базисом в $\text{NS}_n(X)$. Если $P \vdash [k]$ и $Q \vdash [m]$, то $m_P m_Q \in \text{NS}_n(X)$, $n = k + m$, и

$$m_P m_Q = \sum m_R,$$

где сумма берется по всем $R \vdash [n]$, $R \wedge ([k][m]) = (P|Q)$.

Подразбиением разбиения $P \vdash [n]$ будем называть систему подмножеств P_1 , в которой каждое подмножество является одной из компонент разбиения P . По определению $P = P_1 + P_2$, если разбиение P является объединением двух непересекающихся подразбиений P_1 и P_2 .

Для любого подмножества $A \subseteq [n]$ обозначим через st единственное сохраняющее порядок отображение $\text{st} : A \rightarrow [|A|]$. Определим коумножение как

$$\Delta(m_P) = \sum_{P=P_1+P_2} m_{\text{st}(P_1)} \otimes m_{\text{st}(P_2)}.$$

Например, для разбиения $P = 14|2|3|$ отрезка $[4]$ имеем

$$\Delta(m_P) = m_{14|2|3|} \otimes 1 + 2m_{13|2} \otimes m_1 + m_{12} \otimes m_{1|2} + m_{1|2} \otimes m_{12} + 2m_1 \otimes m_{13|2} + 1 \otimes m_{14|2|3|}.$$

Линейное пространство $\text{NS}(X)$ является алгеброй Хопфа относительно введенного выше умножения, коумножения, единицы $1 \rightarrow m_\emptyset$ и коединицы $f \rightarrow f(0, 0, \dots)$.

4.2. Алгебра Хопфа SCU. Пусть $q = 2$ и UT_n — унитреугольная группа n -го порядка над полем из двух элементов. Рассмотрим линейное пространство суперкласс функций SCU_n на группе UT_n и прямую сумму

$$\text{SCU} = \sum_{n=1}^{\infty} \text{SCU}_n.$$

Определим умножение и коумножение на SCU . Группа $\text{UT}_k \times \text{UT}_m$ является факторгруппой группы UT_n , где $n = k + m$. Пусть $\phi \in \text{SCU}_k$ и $\psi \in \text{SCU}_m$; тогда, по определению,

$$\phi \cdot \psi = \text{Inf}(\phi \times \psi) \in \text{SCU}_n,$$

где инфляция является композицией $\phi \times \psi$ и естественной проекции $\text{UT}_n \rightarrow \text{UT}_k \times \text{UT}_m$.

Для любого разбиения $T = (A_1|A_2)$ множества $[n]$ определена подгруппа $\text{UT}_{A_1} \times \text{UT}_{A_2}$ группы UT_n , состоящая из унитреугольных матриц, для которых элементы из $a_{ij} \neq 0$ вытекают, что i, j лежат в одной компоненте разбиения T . Подгруппа $\text{UT}_{A_1} \times \text{UT}_{A_2}$ естественно изоморфна $\text{UT}_{|A_1|} \times \text{UT}_{|A_2|}$ (обозначим этот изоморфизм через π_T). Пусть $\chi \in \text{SCB}_n$. Тогда, по определению,

$$\Delta(\chi) = \sum_{T=(A_1|A_2) \vdash [n]} {}^T \text{Res}_{\text{UT}_{|A_1|} \times \text{UT}_{|A_2|}}^{\text{UT}_n}(\chi),$$

где ${}^T \text{Res}(\chi)(g) = \text{Res}(\chi)(\pi_T^{-1}(g))$.

Каждому разбиению $P \vdash [n]$ поставим в соответствие базисное подмножество D_P следующим образом. Корень (i, j) , где $1 \leq i < j \leq n$, принадлежит D_P , если i, j — соседние элементы в одном компоненте разбиения P . Например, если $P = (135|24)$, то $D_P = \{(1, 3), (3, 5), (2, 4)\}$.

Поскольку для $q = 2$ мы имеем $\phi \equiv 1$, то разбиению P соответствует единственный суперкласс K_P и суперхарактер χ_P . Обозначим через κ_P характеристическую функцию на суперклассе K_P . Система $\{\kappa_P : P \vdash [n]\}$ является базисом в SCU_n .

Теорема 4.1 (см. [6, теорема 3.2, следствие 3.3]). *Линейное пространство SCU является алгеброй Хопфа. Соответствие $\kappa_P \rightarrow m_P, P \vdash [n]$, линейно продолжается до изоморфизма алгебры Хопфа SCU на алгебру Хопфа $\text{NS}(X)$.*

Замечание 4.1. Для произвольного q алгебра Хопфа SCU изоморфна «раскрашенной» $\text{NS}(X)$ (см. [6, теорема 3.6]).

Замечание 4.2. Для произвольного q можно рассмотреть теорию суперхарактеров, которая получается «усреднением» по действию подгруппы диагональных матриц Γ (в духе примера 2.4 из раздела 2). Каждому разбиению $P \vdash [n]$ соответствует тогда единственный суперхарактер χ_P^Γ и суперкласс K_P^Γ . Соответствие, сопоставляющее характеристической функции κ_P^Γ суперкласса K_P^Γ элемент m_P , линейно продолжается до изоморфизма алгебры Хопфа SCU на алгебру Хопфа $\text{NS}(X)$ (см. [12]).

4.3. Двойственная алгебра Хопфа SCU^* . Линейное пространство $\text{SCU}^* = \sum_{n=0}^{\infty} \text{SCU}_n^*$ является алгеброй Хопфа относительно операций, двойственных к операциям из SCU . Скалярное произведение $(\cdot, \cdot)$ на группе G продолжается до скалярного произведения на SCU . отождествим SCU^* и SCU как линейные пространства и вычислим двойственные операции.

Пусть $\phi \in \text{SCU}_k, \psi \in \text{SCU}_m$ и $n = k + m$. Для разбиения $T = (A|A^c)$ операция, двойственная к ${}^T \text{Res}$ — это операция ${}^T \text{SInd} : \text{SCU}_k \otimes \text{SCU}_m \rightarrow \text{SCU}_n$, определенная следующим образом:

$${}^T \text{SInd}(\phi \times \psi) = \text{SInd}(\phi \pi_A \times \psi \pi_A).$$

Умножение в SCU^* определяется по формуле

$$\phi \cdot \psi = \sum_{\substack{T=(A_1|A_2), \\ |A_1|=k, |A_2|=n-k}} {}^T \text{SInd}_{\text{UT}_{|A_1|} \times \text{UT}_{|A_2|}}^{\text{UT}_n}(\phi \times \psi). \quad (4.1)$$

По определению, коумножение в SCU^* — это операция дефляции Def , двойственная к инфляции Inf . Дефляция определяется следующим образом. Пусть τ — естественная проекция $\text{UT}_n \rightarrow \text{UT}_k \times \text{UT}_m$ и $\chi \in \text{SCU}_n$. Тогда

$$\Delta(\chi)(u, v) = \text{Def}(\chi)(u, v) = \frac{1}{|\tau^{-1}(1)|} \sum_{x \in \tau^{-1}(u, v)} \chi(x), \quad (4.2)$$

где $u \in \text{UT}_k, v \in \text{UT}_m$.

Теорема 4.2 (см. [6]). *Операции супериндукции (4.1) и дефляции (4.2) задают структуру двойственной алгебры Хопфа SCU^* на линейном пространстве SCU .*

Система элементов $\{\kappa_P : P \vdash [n]\}$ является базисом в SCU_n . Двойственный базис $\{\kappa_P^* : P \vdash [n]\}$ состоит из элементов $\kappa_P^* = z_P \kappa_P$, где

$$z_P = \frac{|\text{UT}_n|}{|\text{UT}_n X_{D_P} \text{UT}_n|}.$$

Вычислим операции в SCU^* на базисных элементах. Для $P \vdash [k]$ и $Q \vdash [m]$ имеем

$$\kappa_P^* \cdot \kappa_Q^* = \sum \kappa_{(\text{st}_{A_1}^{-1}(P) | \text{st}_{A_2}^{-1}(Q))}^*,$$

где сумма берется по всем таким разбиениям $(A_1, A_2) \vdash [n]$, что $|A_1| = k, |A_2| = n - k$.

Пусть $P \vdash [n]$. Тогда

$$\Delta(\kappa_P^*) = \sum_{k=0}^n \kappa_{P_{[k]}}^* \otimes \kappa_{P_{[k]^c}}^*,$$

где $P_{[k]}$ и $P_{[k]^c}$ — пересечения разбиения P с $[k]$ и его дополнением $[k]^c$ в $[n]$.

5. СУПЕРХАРАКТЕРЫ КОНЕЧНЫХ РАЗРЕШИМЫХ ГРУПП

5.1. Теория суперхарактеров для конечных групп треугольного типа. В этом разделе мы построим теорию суперхарактеров конечных групп треугольного типа, следуя работам автора [3, 31, 32].

Пусть H — группа и J — ассоциативная алгебра над полем k . Предположим, что определены коммутирующие левое $h, x \rightarrow hx$ и правое $h, x \rightarrow xh$ линейные действия группы H на J . Предположим, что для любых $h \in H$ и $x, y \in J$ выполнены следующие условия:

- (i) $h(xy) = (hx)y$ и $(xy)h = x(yh)$,
- (ii) $x(hy) = (xh)y$.

На множестве

$$G = H + J = \{h + x : h \in H, x \in J\}$$

определена ассоциативная операция умножения

$$g_1 g_2 = (h_1 + x_1)(h_2 + x_2) = h_1 h_2 + h_1 x_2 + x_1 h_2 + x_1 x_2 \quad (5.1)$$

Если J — нильпотентная алгебра над полем k , то G является группой относительно операции (5.1). Если группа H конечна, $k = \mathbb{F}_q$ и J — конечномерная нильпотентная алгебра над полем k , то группа G конечна.

Определение 5.1. При соблюдении описанных выше условий будем называть группу G *конечной группой треугольного типа*, если группа H абелева и $\text{char } k$ не делит $|H|$.

Пусть $G = H + J$ — конечная группа треугольного типа. Групповая алгебра kH коммутативна и полупроста (в соответствии с теоремой Машке). Следовательно, kH — сумма полей. Существует такая система примитивных идемпотентов $\{e_1, \dots, e_n\}$, что

$$kH = k_1 e_1 \oplus \dots \oplus k_n e_n, \quad (5.2)$$

где $k_1, \dots, k_n$ — расширения поля k . Любой идемпотент в kH — сумма примитивных идемпотентов.

Прямая сумма $A = kH \oplus J$ имеет структуру алгебры относительно операции умножения (5.1). Группа G является подгруппой в группе A^* обратимых элементов алгебры A , рассмотренной ниже в примере 5.3. Заметим, что группа G разлагается в произведение $G = HN$ подгруппы H и нормальной подгруппы $N = 1 + J$, которая является алгебра группой.

Пример 5.1. Алгебра группа $G = 1 + J$.

Пример 5.2. $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, a, b \in \mathbb{F}_q, a \neq 0 \right\}$.

Пример 5.3. Пусть A — конечномерная алгебра с единицей приведенного типа, определенная над конечным полем $\mathbb{F}_q$ из q элементов (см. [4, § 6.6]). По определению, приведенная алгебра — это алгебра, для которой фактор по радикалу $J = J(A)$ есть прямая сумма алгебр с делением. Согласно теореме Веддерберна (см. [4, § 13.6]) всякая алгебра с делением над конечным полем коммутативна. Поэтому A/J коммутативна. Существует такая полупростая подалгебра S , что $A = S \oplus J$ (см. [4, § 11.6]). В нашем случае алгебра S коммутативна. Группа $G = A^*$ обратимых элементов в A является конечной группой треугольного типа $G = H + J$, где $H = S^*$. Если A — ассоциативная алгебра треугольных матриц, то $G = B_n = T(n, \mathbb{F}_q)$ — треугольная группа. Теория суперхарактеров для $G = A^*$ построена в [3].

Пусть $G = H + J$ — конечная группа треугольного типа. Образует группу $\tilde{G}$, которая состоит из троек $\tau = (t, a, b)$, где $t \in H$, $a, b \in N$, с операцией

$$(t_1, a_1, b_1) \cdot (t_2, a_2, b_2) = (t_1 t_2, t_2^{-1} a_1 t_2 a_2, t_2^{-1} b_1 t_2 b_2).$$

Группа $\tilde{G}$ действует на J по формуле

$$\rho_\tau(x) = t a x b^{-1} t^{-1}. \quad (5.3)$$

В сопряженном пространстве J^* представление группы $\tilde{G}$ определяется естественным образом:

$$\rho_\tau^* \lambda(x) = \lambda(\rho(\tau^{-1})(x)).$$

В J^* определено также левое и правое линейные действия группы G по формулам

$$b\lambda(x) = \lambda(xb), \quad \lambda a(x) = \lambda(ax).$$

Тогда

$$\rho_\tau(\lambda) = t b \lambda a^{-1} t^{-1}.$$

Для любого идемпотента $e \in kH$ обозначим через A_e подалгебру eAe . Подалгебра $J_e = eJe \subset J$ является радикалом в A_e . Обозначим $e' = 1 - e$. Имеет место разложение Пирса:

$$J = eJe \oplus eJe' \oplus e'Je \oplus e'Je'.$$

Сопряженное пространство J_e^* естественно отождествляется с подпространством в J^* , состоящим из линейных форм, равных нулю на всех компонентах разложения Пирса, кроме первого. Заметим, что поскольку группа H абелева, то $he = eh = ehe$ для любого $h \in H$. Подмножество $H_e = eHe$ является подгруппой в группе обратимых элементов алгебры A_e . Группа $G_e = eGe = H_e + J_e$ является конечной группой треугольного типа, и эта группа связана с алгеброй A_e также как G связано с A . Аналогично группе $\tilde{G}$ определим группу $\tilde{G}_e$. Отображение $h \rightarrow he$ является гомоморфизмом группы H на H_e с ядром

$$H(e) = \{h \in H : he = e\}. \quad (5.4)$$

Следующее определение эквивалентно (хотя и отличается по форме) аналогичному определению из [3, 31].

Определение 5.2. Будем называть $\rho_{\tilde{G}}$ -орбиту $\mathcal{O}$ *сингулярной* (относительно H), если $\mathcal{O} \cap J_e \neq \emptyset$ для некоторого идемпотента $e \neq 1$ из kH ; в противном случае орбиту $\mathcal{O}$ будем называть *регулярной* (относительно H). Элементы сингулярных (регулярных) орбит будем называть *сингулярными* (регулярными). Аналогично определяются сингулярные и регулярные орбиты и элементы в J^* .

Подгруппа $H(e)$ допускает следующую характеристику.

Предложение 5.1 (см. [31, Lemma 2.5]).

- 1) $H(e) = H_{y,\text{right}} \cap H_{y,\text{left}}$ для любого регулярного (относительно H_e) элемента $y \in J_e$;
- 2) $H(e) = H_{\lambda,\text{right}} \cap H_{\lambda,\text{left}}$ для любого регулярного (относительно H_e) элемента $\lambda \in J_e^*$.

В [3, 31] доказывается, что для любой $\tilde{G}$ -орбиты $\mathcal{O}$ в J верны следующие утверждения.

Предложение 5.2.

- 1) Пересечение $\mathcal{O} \cap J_e$ является $\tilde{G}_e$ -орбитой в J_e для любого идемпотента $e \in kH$.
- 2) Существует единственный идемпотент $e \in kH$ для которого $\mathcal{O} \cap J_e$ является регулярной $\tilde{G}_e$ -орбитой в J_e (относительно H_e).

Аналогичные утверждения верны для $\tilde{G}$ -орбит в J^* .

Как известно, для любого представления конечной группы в конечномерном линейном пространстве V , определенного над конечным полем, число орбит в V и V^* одинаково (см. [20, Lemma 4.1]). Из этого утверждения и свойств $\tilde{G}$ -орбит вытекает, что число регулярных (сингулярных) $\tilde{G}$ -орбит в J и J^* одинаково (см. [3, предложение 2.11]).

Перейдем к определению суперклассов в группе G . Для любого $g \in G$ и $(t, a, n) \in \tilde{G}$ рассмотрим элемент

$$R_\tau(g) = 1 + ta(g - 1)b^{-1}t^{-1} \quad (5.5)$$

из алгебры $A = kH + J$. Если $g = h + x$, то $R_\tau(g) = h \bmod J$. Поэтому $R_\tau(g) \in G$. Формула (5.5) определяет действие группы $\tilde{G}$ на G .

Определение 5.3. Будем называть $\tilde{G}$ -орбиты в G *суперклассами*.

Группа G разбивается на суперклассы. Обозначим через $\mathfrak{B}$ множество троек $\beta = (e, h, \omega)$, в которых e — идемпотент из kH , $h \in H(e)$, и ω — регулярная (относительно H_e) $\tilde{G}_e$ -орбита в J_e . Все элементы $h + \omega$ содержатся в одном суперклассе (см. [31, следствие 3.2]), который обозначим через K_β .

Теорема 5.1 (см. [31, теорема 3.3]). *Соответствие $\beta \rightarrow K_\beta$ является взаимно однозначным между множеством троек $\mathfrak{B}$ и множеством суперклассов в G .*

Обозначим через $\mathfrak{A}$ множество троек $\alpha = (e, \theta, \omega^*)$, в которых e — идемпотент из kH , θ — линейный характер (одномерное представление) подгруппы $H(e)$ и ω^* — регулярная (относительно H_e) $\tilde{G}_e$ -орбита в J_e^* . Поскольку подгруппа $H(e)$ абелева, то число ее линейных характеров совпадает с числом элементов. Число регулярных (относительно H_e) $\tilde{G}_e$ -орбит в J_e и J_e^* одинаково. Поэтому $|\mathfrak{A}| = |\mathfrak{B}|$.

Перейдем к построению суперхарактеров. Пусть $\alpha = (e, \theta, \omega^*) \in \mathfrak{A}$. Выберем $\lambda \in \omega^*$.

Рассмотрим подгруппу $G_\alpha = H(e) \cdot N_{\lambda, \text{right}}$, где $N_{\lambda, \text{right}}$ — стабилизатор λ для правого действия $N = 1 + J$ на J^* . Подгруппа $N_{\lambda, \text{right}}$ является алгебра группой и представляется в виде

$$N_{\lambda, \text{right}} = 1 + J_{\lambda, \text{right}},$$

где $J_{\lambda, \text{right}}$ — правый стабилизатор для λ в J . Группа G_α разлагается в сумму

$$G_\alpha = H(e) + J_{\lambda, \text{right}} \quad (5.6)$$

и является конечной группой треугольного типа.

Зафиксируем нетривиальный характер $t \rightarrow \varepsilon^t$ аддитивной группы поля $\mathbb{F}_q$ со значением в мультипликативной группе $\mathbb{C}^*$. По тройке $\alpha = (e, \theta, \omega^*)$ и $\lambda \in \omega^*$ определим линейный характер подгруппы G_α по формуле

$$\xi_{\theta, \lambda}(g) = \theta(h)\varepsilon^{\lambda(x)}, \quad (5.7)$$

где $g = h + x$, $h \in H(e)$ и $x \in J_{\lambda, \text{right}}$. Покажем, что $\xi = \xi_{\theta, \lambda}$ действительно является линейным характером:

$$\begin{aligned} \xi(gg') &= \xi((h + x)(h' + x')) = \xi(hh' + h'x + x'h + xx') = \\ &= \theta(hh')\varepsilon^{\lambda(h'x)}\varepsilon^{\lambda(x'h)}\varepsilon^{\lambda(xx')} = \theta(h)\theta(h')\varepsilon^{\lambda(x)}\varepsilon^{\lambda(x')} = \xi(g)\xi(g'). \end{aligned}$$

Индукцированный характер

$$\chi_\alpha = \text{Ind}(\xi_{\theta, \lambda}, G_\alpha, G) \quad (5.8)$$

будем называть *суперхарактером*.

Теорема 5.2 (см. [3, 31, предложения 4.1, 4.4]).

- 1) Суперхарактеры $\{\chi_\alpha : \alpha \in \mathfrak{A}\}$ попарно дизъюнкты;
- 2) каждый суперхарактер χ_α постоянен на каждом суперклассе K_β ;
- 3) $\{1\}$ — суперкласс $K(g)$ для $g = 1$.

Применяя предложение 2.1, приходим к следующему заключению.

Теорема 5.3 (см. [31, теорема 4.5]). Системы суперхарактеров $\{\chi_\alpha \mid \alpha \in \mathfrak{A}\}$ и суперклассов $\{K_\beta \mid \beta \in \mathfrak{B}\}$ задают теорию суперхарактеров группы G .

Замечание 5.1. При построении теории суперхарактеров надо находить идемпотенты в групповой алгебре kH , что не всегда удобно. Однако можно показать (см. [31, Sec. 5]), что в примере 5.3 можно считать, что идемпотенты берутся из подалгебры S (в случае $G = T(n, \mathbb{F}_q)$ подалгебра S совпадает с подалгеброй диагональных матриц), а в примере 5.2 можно ограничиться двумя идемпотентами $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Рассмотрим задачи ограничения и индуцирования в построенной теории суперхарактеров (см. [32]). Пусть $G = H + J$ — конечная группа треугольного типа. Пусть H — подгруппа в H и J' — подалгебра в J , инвариантная относительно лево-правое действия $H' \times H'$ на J . Тогда $G' = H' + J'$ — подгруппа в G , которую будем называть *подгруппой треугольного типа* в G .

Теорема 5.4 (см. [32]). Ограничение суперхарактера группы G на подгруппу треугольного типа является суммой суперхарактеров этой подгруппы с неотрицательными целыми коэффициентами.

Пусть ϕ — суперкласс функция (т.е. комплекснозначная функция, постоянная на суперклассах) на G' . Обозначим через $\dot{\phi}$ функцию на G , равную ϕ на G' и нулевую вне G' . Определим *супериндукцию* следующим образом:

$$\text{SInd } \phi(g) = \frac{|H|}{|G| \cdot |G'|} \sum_{\tau \in \tilde{G}} \dot{\phi}(\rho(\tau)(g)) = \frac{|H|}{|G| \cdot |G'|} \sum_{\substack{a, b \in N, \\ t \in H}} \dot{\phi}(1 + ta(g-1)bt^{-1}).$$

Легко видеть, что $\text{SInd } \phi$ — суперкласс функция на G . Имеет место аналог теоремы Фробениуса.

Теорема 5.5. Пусть ψ — суперкласс функция на G . Тогда $(\text{SInd } \phi, \psi) = (\phi, \text{Res } \psi)$.

Пусть $\{\chi_\alpha\}$ — система суперхарактеров для конечной группы треугольного типа $G = H + J$ и $\{\phi_\eta\}$ — система суперхарактеров для ее подгруппы треугольного типа $G' = H' + J'$. Из теоремы 5.4 получаем:

$$\text{Res } \chi_\alpha = \sum_{\eta} m_{\alpha, \eta} \phi_\eta, \quad m_{\alpha, \eta} \in \mathbb{Z}_+.$$

Система суперхарактеров образует базис в подпространстве суперкласс функций. Так как $\text{SInd } \phi_\eta$ — суперкласс функция на группе G , то

$$\text{SInd } \phi_\eta = \sum_{\alpha} a_{\eta, \alpha} \chi_\alpha.$$

Из теоремы 5.5 вытекает, что

$$a_{\eta, \alpha} = \frac{m_{\alpha, \eta}(\phi_\eta, \phi_\eta)}{(\chi_\alpha, \chi_\alpha)}.$$

Теорема 5.6. Для любого суперхарактера ϕ подгруппы треугольного типа G' супериндукция $\text{SInd } \phi$ является суммой суперхарактеров группы G с неотрицательными рациональными коэффициентами.

Следующая наша цель — формула А. А. Кириллова для суперхарактеров групп треугольного типа, обобщающая формулы (3.3) и (3.4) для алгебра групп.

В любом суперклассе K конечной группы треугольного типа G имеется элемент вида $g = h + x$, где $hx = xh = x$. Элемент $h - 1 \in kH$ ассоциирован с некоторым идемпотентом $f' \in kH$ (т.е. эти элементы отличаются обратимым множителем из kH). Пусть $f = 1 - f'$. Условие $hx = xh = x$ равносильно $x \in J_f$. Два элемента $g = h + x$ и $g' = h + x'$, где $x, x' \in J_f$, лежат в одном суперклассе тогда и только тогда, когда x и x' лежат на одной $\tilde{G}_f$ орбите (см. [31, теорема 3.1]).

Поскольку суперхарактеры постоянны на суперклассах, то достаточно уметь вычислять суперхарактеры на элемента вида $g = h + x$, где $hx = xh = x$. Пусть $\alpha = (e, \theta, \omega^*)$ и χ_α — суперхарактер.

Если $h \notin H(e)$, то g не лежит в Ad_G -орбите группы G_α . Из определения индуцированного представления следует, что $\chi_\alpha(h) = 0$.

Рассмотрим случай $h \in H(e)$, т.е. $he = e$; тогда $f'e = 0$ и $e < f$. Отсюда $J_e \subset J_f$ и J_e^* — подпространство в J_f^* . В частности, $\omega^* \in J_f^*$. Существует единственная $\rho^*(\tilde{G}_f)$ -орбита Ω^* в J_f^* , пересечение которой с J_e^* совпадает с ω^* (см. предложение 5.2). Обозначим через $\dot{\theta}(h)$ функцию $H \rightarrow \mathbb{C}$, которая равна нулю вне $H(e)$ и равна $\theta(h)$ на $H(e)$.

Теорема 5.7. *Значение суперхарактера χ_α на элементе $g = h + x$, где $hx = xh = x$, вычисляется по формуле*

$$\chi_\alpha(g) = \frac{|H_e| \cdot \dot{\theta}(h)}{n(\Omega^*)} \sum_{\mu \in \Omega^*} \varepsilon^{\mu(x)}, \quad (5.9)$$

где $n(\Omega^*)$ — число правых N_f -орбит в Ω^* .

Другая форма формулы Кириллова имеет следующий вид.

Теорема 5.8. *Значение суперхарактера χ_α на элементе $g = h + x$, где $hx = xh = x$, вычисляется по формуле*

$$\chi_\alpha(g) = \frac{|H_e| \cdot |\lambda N_f| \cdot \dot{\theta}(h)}{|\rho(\tilde{G}_f)(x)|} \sum_{y \in \rho(\tilde{G}_f)(x)} \varepsilon^{\lambda(y)}. \quad (5.10)$$

Следующая наша цель — перенести теорему 3.2 на случай групп треугольного типа. Скалярное произведение на G определяется как в (3.5).

Лемма 5.1. *Пусть $\lambda \in J_f^*$. Тогда $J_f \lambda \cap \lambda J_f = J \lambda \cap \lambda J$.*

Доказательство. Поскольку $\lambda \in J_f^*$, то $\lambda f = f \lambda = \lambda$. Включение

$$J_f \lambda \cap \lambda J_f \subseteq J \lambda \cap \lambda J$$

очевидно. Пусть $\mu \in J \lambda \cap \lambda J$. Тогда $\mu = j_1 \lambda$ и $\mu = \lambda j_2$ для некоторых $j_1, j_2 \in J$. Отсюда

$$\mu f = j_1 \lambda f = j_1 \lambda = \mu, \quad f \mu = f \lambda j_2 = \lambda j_2 = \mu.$$

Следовательно,

$$\mu = f \mu f \in f(J \lambda \cap \lambda J) f = (f J f)(f \lambda f) \cap (f \lambda f)(f J f) = J_f \lambda \cap \lambda J_f. \quad \square$$

Теорема 5.9. *Пусть $\alpha = (e, \theta, \omega^*) \in \mathfrak{A}$ и $\lambda \in \omega^*$. Тогда*

$$(\chi_\alpha, \chi_\alpha) = \frac{|H_{N \lambda N}|}{|H(e)|} \cdot |J \lambda \cap \lambda J|, \quad (5.11)$$

где $H_{N \lambda N}$ — стабилизатор для $N \lambda N$ относительно Ad_H^* действия подгруппы H .

Доказательство. Подгруппа $G' = H(e)N$ содержит G_α . Рассмотрим характер $\chi'_{\theta, \lambda} = \text{Ind}(\xi_{\theta, \lambda}, G_\alpha, G')$ подгруппы G' . Из теоремы о числе зацеплений индуцированных представлений получаем (см. [2, теорема 44.5]):

$$(\chi_\alpha, \chi_\alpha) = (\text{Ind}(\chi'_{\theta, \lambda}, G', G), \text{Ind}(\chi'_{\theta, \lambda}, G', G)) = \sum_{h \in H/H(e)} (\chi'_{\text{Ad}_h^* \lambda}, \chi'_{\theta, \lambda}).$$

Подгруппа G' является также подгруппой треугольного типа; ее диагональная часть $H(e)$ тривиально действует на λ . Два характера $\chi'_{\theta, \text{Ad}_h^* \lambda}$ и $\chi'_{\theta, \lambda}$ дизъюнкты, если $\text{Ad}_h^* \lambda \notin N \lambda N$. Поэтому

$$(\chi_\alpha, \chi_\alpha) = \frac{|H_{N \lambda N}|}{|H(e)|} (\chi'_{\theta, \lambda}, \chi'_{\theta, \lambda}). \quad (5.12)$$

Применим формулу (5.9) к суперхарактеру $\chi'_{\theta, \lambda}$ группы G' . Для любого $g = h + y \in G'$, $hy = yh = y$, получаем

$$\chi'_{\theta, \lambda}(g) = \theta(h) \chi_{\theta, \lambda}^f(1 + y),$$

где $\chi_{\theta, \lambda}^f$ — суперхарактер алгебра группы N_f , построенный по $\lambda \in J_e^* \subseteq J_f^*$.

Зафиксируем такие $h \in H(e)$ и $x \in J$, что $hx = xh = x$. Как мы видели выше, условие на x равносильно $x \in J_f$, где $f = 1 - f'$ и идемпотент f' ассоциирован с $h - 1$. Каждый элемент из суперкласса $K(h + x)$ в G' однозначно представим в виде $(1 + v)(h + y)(1 + u)$, где $v \in fJf'$, $u \in f'J$, а $y \in N_fxN_f$. Так как суперхарактер постоянен на суперклассе, то

$$\sum_{g \in K(h+x)} \chi'_{\theta, \lambda}(g) \overline{\chi'_{\theta, \lambda}(g)} = \frac{|J|}{|J_f|} \sum_{y \in N_fxN_f} \chi_{\theta, \lambda}^f(1 + y) \overline{\chi_{\theta, \lambda}^f(1 + y)}.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \sum_{g \bmod J=h} \chi'_{\theta, \lambda}(g) \overline{\chi'_{\theta, \lambda}(g)} &= \frac{|J|}{|J_f|} \sum_{y \in J_f} \chi_{\theta, \lambda}^f(1 + y) \overline{\chi_{\theta, \lambda}^f(1 + y)} = \\ &= |J| \cdot (\chi_{\theta, \lambda}^f, \chi_{\theta, \lambda}^f) = |J| \cdot |J_f \lambda \cap \lambda J_f| = |J| \cdot |J \lambda \cap \lambda J|. \end{aligned} \quad (5.13)$$

Заметим, что сумма (5.13) не зависит от $h \in H(e)$. Тогда

$$\begin{aligned} (\chi_\alpha, \chi_\alpha) &= \frac{|H_{N\lambda N}|}{|H(e)|} \cdot \frac{1}{|G'|} \sum_{g \in G'} \chi'_\alpha(g) \overline{\chi'_\alpha(g)} = \\ &= \frac{|H_{N\lambda N}|}{|H(e)| \cdot |G'|} \cdot |H(e)| \cdot |J| \cdot |J \lambda \cap \lambda J| = \frac{|H_{N\lambda N}|}{|H(e)|} \cdot |J \lambda \cap \lambda J|. \quad \square \end{aligned}$$

5.2. Теория суперхарактеров треугольной группы. Рассмотрим алгебру $A = \mathfrak{t}(n, \mathbb{F}_q)$, состоящую из $(n \times n)$ -матриц с элементами в поле $\mathbb{F}_q$ и нулями ниже диагонали. Треугольная группа $G = B_n = T(n, \mathbb{F}_q)$ — подгруппа обратимых элементов в алгебре A , является конечной группой треугольного типа $G = H + J$, где J совпадает с алгеброй $\mathfrak{ut}_n = \mathfrak{ut}(n, \mathbb{F}_q)$, состоящей из треугольных матриц с нулями по диагонали, а $H = \{(a_1, \dots, a_n) : a_i \in \mathbb{F}_q^*\}$ — подгруппа диагональных матриц. Подгруппа G является полупрямым произведением $G = HN$, где $N = UT_n$. В этом подразделе мы конкретизируем построенную выше теорию суперхарактеров для треугольной группы.

Как и выше, *положительным корнем* будем называть произвольную пару (i, j) , где $1 \leq i < j \leq n$. Пусть D — базисное подмножество в множестве положительных корней (см. раздел 3.2). *Носителем* D будем называть подмножество $\text{supp}(D) = \text{row}(D) \cup \text{col}(D)$ в $[n]$. Поставим в соответствие каждому базисному подмножеству D элемент

$$x_D = \sum_{(i,j) \in D} E_{ij} \in J.$$

Обозначим через $\mathcal{O}_D$ орбиту элемента x_D относительно действия ρ группы $\tilde{G}$ на J (см. (5.3)). Каждая $\tilde{G}$ -орбита в J имеет вид $\mathcal{O}_D$ для некоторого базисного подмножества D . Аналогично для J^* ; каждая $\tilde{G}$ -орбита в J^* является орбитой $\mathcal{O}_D^*$ некоторого

$$\lambda_D = \sum_{(i,j) \in D} E_{ij}^*.$$

Лемма 5.2 (см. [3]). *Орбита $\mathcal{O}_D$ (соответственно, $\mathcal{O}_D^*$) является регулярной тогда и только тогда, когда $\text{supp}(D) = [1, n]$.*

Каждому базисному подмножеству D поставим в соответствие идемпотент

$$e = e_D = \sum_{i \in \text{supp}(D)} E_{ii}.$$

Подгруппа H разлагается в произведение подгрупп $H_i = \{(1, \dots, a_i, \dots, 1)\}$, изоморфных $\mathbb{F}_q^*$. Подгруппы $H(e)$ и H_e , определенные в (5.4), имеют вид

$$H_{e_D} = \prod_{i \in \text{supp}(D)} H_i, \quad H(e_D) = \prod_{i \in [n] \setminus \text{supp}(D)} H_i.$$

Группа H разлагается в произведение $H = H_e \cdot H(e)$.

Определенная по идемпотенту $e = e_D$ подгруппа G_{e_D} естественно изоморфна треугольной группе B_m , где m — число элементов в $\text{supp}(D)$. Элемент x_D принадлежит $J_{e_D} = e_D J e_D$ (соответственно, λ_D принадлежит $J_{e_D}^*$). Обозначим через ω_D орбиту для x_D в J_e относительно $\tilde{G}_e$. Соответственно, ω_D^* — орбита для λ_D в J_e^* относительно $\tilde{G}_e$. Из леммы 5.2 вытекает, что ω_D и ω_D^* — регулярные орбиты в J_e и J_e^* (относительно H_e).

Пример 5.4. Пусть

$$G = T(3, \mathbb{F}_q) = \begin{pmatrix} * & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}, \quad D = \{(1, 3)\}.$$

Тогда

$$e = e_D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad H_e = \begin{pmatrix} * & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}, \quad H(e) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad J_e = \begin{pmatrix} 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$G_e = \begin{pmatrix} * & 0 & * \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}, \quad \omega_D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \neq 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ — регулярная } \tilde{G}_e\text{-орбита в } J_e.$$

По базисному подмножеству D и элементу $h \in H(e)$ построим суперкласс $K_{h,D'}$ как $\tilde{G}$ -орбиту для элемента $h + x_D$ в группе G . Для D и характера θ группы $H(e)$ определим суперхарактер $\{\chi_{\theta,D}\}$ группы G , как это делалось в п. 5.1 для набора (e, θ, ω) .

Теорема 5.10 (см. [3]). Система суперхарактеров $\{\chi_{\theta,D}\}$ и система суперклассов $\{K_{h,D}\}$ определяют теорию суперхарактеров для $G = B_n$.

Вычислим значения суперхарактеров $\chi_{\theta,D}$ на суперклассе $K_{h,D'}$ элемента $h + x_{D'}$. Нам понадобится ряд новых обозначений.

Для любого положительного корня $\gamma = (i, j)$, $1 \leq i < j \leq n$, пусть

$$\Delta'(\gamma) = \{(i, k) \mid i < k < j\}, \quad \Delta''(\gamma) = \{(k, j) \mid i < k < j\}.$$

Число элементов в обоих подмножествах одинаково и совпадает с $j - i - 1$. Положим

$$\delta'(D, D') = \begin{cases} 0, & \text{если } \exists \gamma \in D, \exists \gamma' \in D': \gamma' \in \Delta'(\gamma); \\ 1 & \text{в противном случае;} \end{cases}$$

аналогично определим $\delta''(D, D')$. Положим

$$\delta_0(D, h) = \begin{cases} 1, & \text{если } h \in H(e_D), \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Введем также обозначение

$$\delta(D, h, D') = \delta'(D, D') \delta''(D, D') \delta_0(D, h). \quad (5.14)$$

Для любого положительного корня $\gamma = (i, j)$, $1 \leq i < j \leq n$, обозначим через $P(\gamma)$ подматрицу для матрицы $h - 1 + x_{D'}$ с системой строк и столбцов $[i+1, j-1]$. Пусть $m(\gamma, h, D')$ — коранг $P(\gamma)$.

Поскольку в каждой строке и столбце P_γ не более одного ненулевого элемента, то $m(\gamma, h, D')$ — число нулевых строк (столбцов) в P_γ . Введем обозначения

$$m(D, h, D') = \sum_{\gamma \in D} m(\gamma, h, D'), \quad s(D, D') = |D| + |D \setminus D'|. \quad (5.15)$$

Теорема 5.11. *Значение суперхарактера $\chi_{\theta, D}$ на суперклассе $K_{h, D'}$ равно*

$$\chi_{\theta, D}(K_{h, D'}) = \delta(D, h, D')(-1)^{|D \cap D'|} q^{m(D, h, D')} (q-1)^{s(D, D')} \theta(h). \quad (5.16)$$

6. АЛГЕБРА ХОПФА СУПЕРХАРАКТЕРОВ ТРЕУГОЛЬНОЙ ГРУППЫ

6.1. Алгебра Хопфа $\text{NPS}(X, Y)$. Пусть дана система некоммутирующих переменных $X \cup Y$, состоящая из двух частей $X = \{x_1, x_2, \dots\}$ и $Y = \{y_1, \dots, y_{|Y|}\}$. Как и в разделе 4.1, группа $S_\infty = \varinjlim S_n$ действует на множестве X конечными перестановками. Продолжим это действие на $X \cup Y$, считая действие тождественным на Y . Рассмотрим линейное пространство $\text{NPS}(X, Y)$, состоящее из комплексных формальных степенных сумм от переменных из $X \cup Y$ ограниченной степени по X , конечной степени по Y и инвариантных относительно группы S_∞ . Линейное пространство $\text{NPS}(X, Y)$ является прямой суммой подпространств

$$\text{NPS}(X, Y) = \sum_{n=0}^{\infty} \text{NPS}_n(X, Y),$$

состоящих из однородных элементов фиксированной степени. Для $n = 0$ подпространство $\text{NPS}_0(X, Y)$ совпадает с полем $\mathbb{C}$.

Естественное умножение превращает $\text{NPS}(X, Y)$ в градуированную алгебру. Будем называть алгебру $\text{NPS}(X, Y)$ *алгеброй частично симметрических функций от некоммутирующих переменных*.

Пусть A — конечное подмножество в множестве целых положительных чисел.

Определение 6.1. *Оснащенным разбиением A будем называть пару $\mathcal{P} = (P, \Phi_{\mathcal{P}})$, где P — разбиение некоторого подмножества $\text{supp}(P) \subseteq A$ (назовем его частичным разбиением множества A), а $\Phi_{\mathcal{P}}$ — отображение $A \setminus \text{supp}(P) \rightarrow [|Y|]$ (обозначение $\mathcal{P} \models A$).*

Предложение 6.1. *Пусть $\mathcal{P} \models A$ и $\mathcal{P} = (P, \Phi_{\mathcal{P}})$. Тогда $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2$, где $\mathcal{P}_i \models A_i$, $\mathcal{P}_i = (P_i, \Phi_{\mathcal{P}_i})$, если $A = A_1 \sqcup A_2$, $P = P_1 + P_2$ (см. раздел 4.1), отображение $\Phi_{\mathcal{P}}$ совпадает с $\Phi_{\mathcal{P}_i}$ при ограничении на $A_i \setminus \text{supp}(P_i)$.*

Пусть $\mathcal{P} = (P, \Phi_{\mathcal{P}})$ — оснащенное разбиение множества $[n]$. Перенумеруем компоненты в частичном разбиении $P = \{P_1, \dots, P_s\}$. Поставим $\mathcal{P}$ в соответствие элемент $m_{\mathcal{P}} \in \text{NPS}_n(X, Y)$, который представляет сумму мономов вида $\sigma(z_1 \cdots z_n)$, где $\sigma \in S_\infty$, $z_i = y_{\Phi(i)}$ для любого $i \in [n] \setminus \text{supp}(P)$, и $z_i = x_j$, если $i \in P_j$. Элемент $m_{\mathcal{P}}$ не зависит от нумерации в системе компонент частичного разбиения P .

Пример 6.1. $n = 4$, $P = 13|4$ и $\Phi(2) = 1$. Тогда $m_{\mathcal{P}}$ равен сумме

$$x_1 y_1 x_1 x_2 + x_2 y_1 x_2 x_1 + x_1 y_1 x_1 x_3 + \dots$$

Набор элементов $\{m_{\mathcal{P}} : \mathcal{P} \models [n]\}$ является базисом в $\text{NPS}_n(X, Y)$. Для $\mathcal{P} \models [k]$ и $\mathcal{Q} \models [n-k]$ определено оснащенное разбиение $\mathcal{S} = (S, \Phi_{\mathcal{S}})$, где $S = P \sqcup \{k+Q\}$, и $\Phi_{\mathcal{S}}(i) = \Phi_{\mathcal{P}}(i)$, если $1 \leq i \leq k$, и $\Phi_{\mathcal{S}}(k+j) = \Phi_{\mathcal{Q}}(j)$, если $1 \leq j \leq n-k$. Будем использовать обозначение $\mathcal{S} = (\mathcal{P}|\mathcal{Q})$.

Будем говорить, что оснащенное разбиение $\mathcal{R} = (R, \Phi_{\mathcal{R}})$ является *непосредственным следствием* разбиения $(\mathcal{P}|\mathcal{Q})$, если $\text{supp}(R) = \text{supp}(P) \sqcup \text{supp}(Q)$, $R \wedge ([k][n-k]) = (P|Q)$ и $\Phi_{\mathcal{R}}$ совпадает с $\Phi_{(\mathcal{P}|\mathcal{Q})}$ (обозначение $(\mathcal{P}|\mathcal{Q}) \rightarrow \mathcal{R}$). Тогда

$$m_{\mathcal{P}} m_{\mathcal{Q}} = \sum_{(\mathcal{P}|\mathcal{Q}) \rightarrow \mathcal{R}} m_{\mathcal{R}}. \quad (6.1)$$

Определим коумножение по формуле

$$\Delta(m_{\mathcal{P}}) = \sum_{\mathcal{P}=\mathcal{P}_1+\mathcal{P}_2} m_{\text{st}(\mathcal{P}_1)} \otimes m_{\text{st}(\mathcal{P}_2)}. \quad (6.2)$$

Коединица определяется как отображение сопоставляющее ряду свободный член.

Теорема 6.1. *Алгебра $\text{NPS}(X, Y)$ является градуированной алгеброй Хопфа относительно определенных выше коумножения и коединицы.*

Доказательство. Так как пространство $\text{NPS}(X, Y)$ является градуированной связной алгебра (связность означает, что $\text{NPS}_0(X, Y) = \mathbb{C}$), то достаточно показать, что $\text{NPS}(X, Y)$ является биалгеброй (см. [36, 22]), т.е. что коумножение является гомоморфизмом алгебр. Для $\mathcal{P} \models [k]$ и $\mathcal{Q} \models [n - k]$, применяя (6.1) и (6.2), получаем

$$\begin{aligned} \Delta(m_{\mathcal{P}})\Delta(m_{\mathcal{Q}}) &= \left(\sum_{\mathcal{P}=\mathcal{P}_1+\mathcal{P}_2} m_{\text{st}(\mathcal{P}_1)} \otimes m_{\text{st}(\mathcal{P}_2)} \right) \left(\sum_{\mathcal{Q}=\mathcal{Q}_1+\mathcal{Q}_2} m_{\text{st}(\mathcal{Q}_1)} \otimes m_{\text{st}(\mathcal{Q}_2)} \right) = \\ &= \sum_{\substack{\mathcal{P}=\mathcal{P}_1+\mathcal{P}_2, \\ \mathcal{Q}=\mathcal{Q}_1+\mathcal{Q}_2}} m_{\text{st}(\mathcal{P}_1)} m_{\text{st}(\mathcal{Q}_1)} \otimes m_{\text{st}(\mathcal{P}_2)} m_{\text{st}(\mathcal{Q}_2)} = \sum_{\substack{\mathcal{R}=\mathcal{R}_1+\mathcal{R}_2, \\ (\mathcal{P}|\mathcal{Q}) \rightarrow \mathcal{R}}} m_{\text{st}(\mathcal{R}_1)} \otimes m_{\text{st}(\mathcal{R}_2)}. \end{aligned}$$

С другой стороны,

$$\Delta(m_{\mathcal{P}m_{\mathcal{Q}}}) = \Delta \left(\sum_{(\mathcal{P}|\mathcal{Q}) \rightarrow \mathcal{R}} m_{\mathcal{R}} \right) = \sum_{\substack{\mathcal{R}=\mathcal{R}_1+\mathcal{R}_2, \\ (\mathcal{P}|\mathcal{Q}) \rightarrow \mathcal{R}}} m_{\text{st}(\mathcal{R}_1)} \otimes m_{\text{st}(\mathcal{R}_2)}.$$

Отсюда $\Delta(m_{\mathcal{P}m_{\mathcal{Q}}}) = \Delta(m_{\mathcal{P}})\Delta(m_{\mathcal{Q}})$. $\square$

6.2. Алгебра Хопфа SCB. Пусть $B_n = \text{UT}(n, \mathbb{F}_q)$. Рассмотрим линейное пространство суперкласс функций SCB_n на группе B_n и прямую сумму

$$\text{SCB} = \sum_{n=0}^{\infty} \text{SCB}_n.$$

Умножение и коумножение на SCB определяются ниже аналогично алгебре SCU.

Группа $B_k \times B_m$ является фактор группой группы B_n , где $n = k + m$. Пусть $\phi \in \text{SCB}_k$ и $\psi \in \text{SCB}_m$; тогда, по определению,

$$\phi \cdot \psi = \text{Inf}(\phi \times \psi) \in \text{SCB}_n, \quad (6.3)$$

где инфляция является композицией $\phi \times \psi$ и естественной проекции $B_n \rightarrow B_k \times B_m$.

Для любого разбиения $T = (A_1|A_2)$ множества $[n]$ определена подгруппа $B_{A_1} \times B_{A_2}$ группы B_n , состоящая из унитреугольных матриц, для которых из $a_{ij} \neq 0$ вытекает, что i, j лежат в одной компоненте разбиения T . Подгруппа $B_{A_1} \times B_{A_2}$ естественно изоморфна $B_{|A_1|} \times B_{|A_2|}$ (обозначим этот изоморфизм через π_T). Пусть $\chi \in \text{SCB}_n$; тогда по определению

$$\Delta(\chi) = \sum_{T=(A_1|A_2) \vdash [n]} {}^T \text{Res}_{B_{|A_1|} \times B_{|A_2|}}^{B_n}(\chi), \quad (6.4)$$

где

$${}^T \text{Res}_{B_{|A_1|} \times B_{|A_2|}}^{B_n}(\chi)(g) = \text{Res}_{B_{|A_1|} \times B_{|A_2|}}^{B_n}(\chi)(\pi_T^{-1}(g)).$$

Предположим, что $|Y| = q - 2$. Зафиксируем нумерации в множестве $\mathbb{F}_q^* \setminus \{1\} = \{u_1, \dots, u_{q-2}\}$ и в множестве $\text{Irr}(\mathbb{F}_q^*) \setminus \{1\} = \{\eta_1, \dots, \eta_{q-2}\}$. Поставим в соответствие каждому оснащенному разбиению $\mathcal{P} = (P, \Phi_{\mathcal{P}}) \models [n]$ суперкласс и суперхарактер следующим образом. По частичному разбиению P построим подмножество типа расстановки ладей D_P в множестве положительных корней, как в п. 4.2. Заметим, что $\text{supp}(P) \subseteq \text{supp}(D)$ и равенство достигается, когда разбиение P не имеет одно элементных компонент.

Построим элемент

$$h_{\mathcal{P}} = \prod_{i \in [n] \setminus \text{supp}(P)} u_{\Phi_{\mathcal{P}}(i)} \in H(e_{D_{\mathcal{P}}})$$

и суперкласс $K_{\mathcal{P}}$ элемента $h_{\mathcal{P}} + x_{D_{\mathcal{P}}}$. Суперхарактер $\chi_{\mathcal{P}}$ мы строим по подмножеству $D_{\mathcal{P}}$ характеру

$$\theta_{\mathcal{P}} = \prod_{i \in [n] \setminus \text{supp}(P)} \eta_{\Phi_{\mathcal{P}}(i)}$$

подгруппы $H(e_{D_{\mathcal{P}}})$. В терминах оснащенных разбиений теорема 5.10 выглядит следующим образом.

Предложение 6.2. *Системы суперхарактеров $\{\chi_{\mathcal{P}}\}$ и суперклассов $K_{\mathcal{P}}$, где $\mathcal{P}$ пробегает множество оснащенных разбиений $[n]$, задают теорию суперхарактеров для группы треугольного типа B_n .*

Обозначим через $\kappa_{\mathcal{P}}$ характеристическую функцию на суперклассе $K_{\mathcal{P}}$. Пусть, как и выше, $|Y| = q - 2$.

Теорема 6.2. *Линейное пространство SCB является алгеброй Хопфа относительно определенного умножения и коумножения. Соответствие $\kappa_{\mathcal{P}} \rightarrow t_{\mathcal{P}}$, где $\mathcal{P}$ пробегает множество оснащенных разбиений $[n]$, линейно продолжается до изоморфизма алгебры Хопфа SCB на алгебру Хопфа $\text{NPS}(X, Y)$.*

Доказательство. Достаточно показать, что умножение и коумножение на элементах $\kappa_{\mathcal{P}}$ удовлетворяет равенствам (6.1) и (6.2).

Умножение задается формулой (6.3). Пусть $e_{[k]}$ — идемпотент, равный сумме первых k диагональных единиц, а $e_{[n-k]}$ — последних $n - k$. Тогда $\kappa_{\mathcal{P}}\kappa_{\mathcal{Q}}$ является характеристической функцией множества

$$\Lambda = \text{diag}(K_{\mathcal{P}}|K_{\mathcal{Q}}) + e_{[k]}J e_{[n-k]}.$$

Введем обозначение $G = B_n$. Множество Λ инвариантно относительно действия группы $\tilde{G}$ и, следовательно, распадается на суперклассы (см. п. 5.1). Все элементы из Λ имеют общую диагональную часть $h = \text{diag}(h_{\mathcal{P}}, h_{\mathcal{Q}})$. Пусть f' — идемпотент, ассоциированный с диагональной матрицей $h - 1$. Для идемпотента $f = 1 - f'$ определены подгруппа $G_f = H_f + J_f$, где $H_f = fHf$ и $J_f = fJf$. Подгруппа G_f изоморфна B_s для некоторого $s \leq n$ и является полупрямым произведением $G_f = H_f N_f$, где $N_f = 1 + J_f$ изоморфна UT_s . Аналогично по $h_{\mathcal{P}}$ и $h_{\mathcal{Q}}$ можно построить идемпотенты $f_{\mathcal{P}} \leq e_{[k]}$ и $f_{\mathcal{Q}} \leq e_{[n-k]}$. Тогда $f = f_{\mathcal{P}} + f_{\mathcal{Q}}$; группа N_f содержит подгруппу $N_{f_{\mathcal{P}}} \times N_{f_{\mathcal{Q}}}$, изоморфную некоторой подгруппе вида $\text{UT}_{s_1} \times \text{UT}_{s_2}$, где $s = s_1 + s_2$.

Каждый суперкласс элемента с диагональной частью h содержит подмножество $h + \omega$, где ω — некоторая орбита в J_f относительно группы $\tilde{G}_f$ (см. п. 5.1). Таким образом, множество $1 + \omega$ является H_f -орбитой в множестве суперклассов группы $N_f = \text{UT}_s$; оно однозначно определяется по данному суперклассу с диагональной частью h . Если дополнительно суперкласс содержится в Λ , то проекция $1 + \omega$ на $\text{UT}_{s_1} \times \text{UT}_{s_2}$ совпадает с H_f -орбитой суперкласса элемента $\text{diag}(1 + x_{D_{\mathcal{P}}}, 1 + x_{D_{\mathcal{Q}}})$. Применяя утверждения раздела 4, убеждаемся, что $1 + \omega$ соответствует разбиению R множества $[s]$ и $R \wedge ([s_1]||[s_2]) = (P|Q)$ (см. замечание 4.2). Таким образом, суперклассы, входящие в Λ , — это суперклассы группы B_n вида $K_{\mathcal{R}}$, где $(\mathcal{P}|\mathcal{Q}) \rightarrow \mathcal{R}$. Итак,

$$\kappa_{\mathcal{P}}\kappa_{\mathcal{Q}} = \sum_{(\mathcal{P}|\mathcal{Q}) \rightarrow \mathcal{R}} \kappa_{\mathcal{R}}. \quad (6.5)$$

Согласно формуле (6.2), $\Delta(\kappa_{\mathcal{P}})$ является суммой ограничений $\kappa_{\mathcal{P}}$ на подгруппы $B_{A_1} \otimes B_{A_2}$. Каждое такое ограничение является характеристической функцией пересечения суперкласса $K_{\mathcal{P}}$ с подгруппой $B_{A_1} \otimes B_{A_2}$, изоморфной $B_{|A_1|} \times B_{|A_2|}$. Это пересечение распадается на суперклассы $\{K_{\mathcal{P}_1} \times K_{\mathcal{P}_2}\}$ группы $B_{A_1} \otimes B_{A_2}$. Орбита каждого из классов $K_{\mathcal{P}_1} \times K_{\mathcal{P}_2}$ относительно группы $\tilde{G}$ совпадает с $K_{\mathcal{P}}$. Поэтому пересечение состоит из одного суперкласса и $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2$. Отсюда

$$\Delta(\kappa_{\mathcal{P}}) = \sum_{\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2} \kappa_{\text{st}(\mathcal{P}_1)} \otimes \kappa_{\text{st}(\mathcal{P}_2)}. \quad \square$$

6.3. Двойственная алгебра Хопфа SCB^* . Линейное пространство $\text{SCB}^* = \sum_{n=0}^{\infty} \text{SCB}_n^*$ является алгеброй Хопфа относительно операций двойственных к операциям из SCB . С помощью скалярного произведения отождествим SCB^* и SCB как линейные пространства. Определение супериндукции для групп треугольного типа позволяет вычислить двойственные операции в терминах пространства SCB (см. теорему 5.5).

Пусть $\phi \in \text{SCB}_k$, $\psi \in \text{SCB}_m$ и $n = k + m$. Для разбиения $T = (A|A^c)$ операция двойственная к ${}^T \text{Res}$ — это операция

$${}^T \text{SInd} : \text{SCB}_k \otimes \text{SCB}_m \rightarrow \text{SCB}_n, \quad {}^T \text{SInd}(\phi \times \psi) = \text{SInd}(\phi \pi_A \times \psi \pi_{A^c}).$$

Умножение в SCB^* определяется по формуле

$$\phi \cdot \psi = \sum_{\substack{T=(A_1|A_2), \\ |A_1|=k, \\ |A_2|=n-k}} {}^T \text{SInd}_{B_{|A_1|} \times B_{|A_2|}}^{B_n}(\phi \times \psi). \quad (6.6)$$

По определению, коумножение в SCB^* — это дефляция Def , двойственная операция к инфляции Inf . Пусть τ — естественная проекция $B_n \rightarrow B_k \times B_m$ и $\chi \in \text{SCB}_n$. Тогда

$$\Delta(\chi)(u, v) = \text{Def}(\chi)(u, v) = \frac{1}{|\tau^{-1}(1)|} \sum_{x \in \tau^{-1}(u, v)} \chi(x), \quad (6.7)$$

где $u \in B_k$, $v \in B_m$.

Теорема 6.3. Операции (6.6) и (6.7) задают структуру двойственной алгебры Хопфа SCB^* на линейном пространстве SCB .

Система элементов $\{\kappa_{\mathcal{P}} : \mathcal{P} \models [n]\}$ является базисом в SCB_n . Двойственный базис $\{\kappa_{\mathcal{P}}^* : \mathcal{P} \models [n]\}$ состоит из элементов $\kappa_{\mathcal{P}}^* = z_{\mathcal{P}} \kappa_{\mathcal{P}}$, где $z_{\mathcal{P}} = |B_n|/|K_{\mathcal{P}}|$. Вычислим операции в SCB^* на базисных элементах. Для $\mathcal{P} \models [k]$ и $\mathcal{Q} \models [m]$ имеем

$$\kappa_{\mathcal{P}}^* \cdot \kappa_{\mathcal{Q}}^* = \sum \kappa_{(\text{st}_{A_1}^{-1}(\mathcal{P})| \text{st}_{A_2}^{-1}(\mathcal{Q}))}^*,$$

где сумма берется по всем таким разбиениям $(A_1, A_2) \vdash [n]$, что $|A_1| = k$, $|A_2| = n - k$.

Пусть $\mathcal{P} \models [n]$. Тогда

$$\Delta(\kappa_{\mathcal{P}}^*) = \sum_{k=0}^n \kappa_{\mathcal{P}_{[k]}}^* \otimes \kappa_{\mathcal{P}_{[k]^c}}^*,$$

где $\mathcal{P}_{[k]}$ и $\mathcal{P}_{[k]^c}$ — пересечения оснащенного разбиения $\mathcal{P}$ с $[k]$ и его дополнением $[k]^c$ в $[n]$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кириллов А. А. Лекции по методу орбит. — Новосибирск: Научная книга, 2002.
2. Кэртис Ч., Райнер И. Теория представлений конечных групп и ассоциативных алгебр. — М.: Наука, 1969.
3. Панов А. Н. Теория суперхарактеров для групп обратимых элементов приведенных алгебр // Алгебра и анализ. — 2015. — 27, № 6. — С. 242–259; arXiv:1409.5565
4. Пирс Р. Ассоциативные алгебры. — М.: Мир, 1986.
5. Серр Ж.-П. Линейные представления конечных групп. — М.: Мир, 1970.
6. Aguiar M., Andr e C., Benedetti C., Bergeron N., Zhi Chen, Diaconis P., Hendrickson A., Hsiao S., Isaacs I. M., Jedwab A., Johnson K., Karaali G., Lauve A., Tung Le, Lewis S., Huilan Li, Magaarg K., Marberg E., Novelli J.-Ch., Amy Pang, Salola F., Tevlin L., Thibon J.-Y., Thiem N., Venkateswaran V., Vinroot C. R., Ning Yan, Zabricki M. Supercharacters, symmetric functions in noncommuting variables, and related Hopf algebras // Adv. Math. — 2012. — 229, № 4. — С. 2310–2337.
7. Andr e C. A. M. Basic characters of the unitriangular group // J. Algebra. — 1995. — 175. — С. 287–319.
8. Andr e C. A. M. Basic sums of coadjoint orbits of the unitriangular group // J. Algebra. — 1995. — 176. — С. 959–1000.

9. *André C. A. M.* The basic character table of the unitriangular group// J. Algebra. — 2001. — 241. — С. 437–471.
10. *André C. A. M.* The basic characters of the unitriangular group for arbitrary primes// Proc. Am. Math. Soc. — 2002. — 130. — С. 1943–1954.
11. *André C. A. M.* Hecke algebras for the basic characters of the unitriangular group// Proc. Am. Math. Soc. — 2003. — 132. — С. 987–996.
12. *André C. A. M.* Supercharacters of unitriangular groups and set-partition combinatorics/ CIMPA school: Modern Methods in Combinatorics ECOS 2013. — San Luis, Argentina.
13. *André C. A. M., Neto A. M.* A supercharacter theory for the Sylow p -subgroups of the finite symplectic and orthogonal groups// J. Algebra. — 2009. — 322, № 4. — С. 1273–1294.
14. *André C. A. M., Nicolás A.* Supercharacters of the adjoint group of a finite radical ring// J. Group Theory. — 2008. — 11. — С. 709–746.
15. *Arias-Castro E., Diaconis P., Stanley R.* A super-class walk on upper-triangular matrices// J. Algebra. — 2004. — 278. — С. 739–765.
16. *Asharafi A. R., Koorepazan-Moftakhar F.* Towards the classification of finite simple groups with exactly three or four supercharacter theories/ [arXiv:1605.08971](#)
17. *Benedett C.* Combinatorial Hopf algebra of supercharacters of type D // J. Algebr. Combin. — 2013. — 38, № 4. — С. 767–783.
18. *Brumbaugh J. L., Bulkow M., Fleming P. S., Garcia L. A., Garcia S. R., Karaali G., Michal M., Turner A. P., Suh H.* Supercharacters, exponential sums and the uncertainty principle// J. Number Theory. — 2014. — 144. — С. 151–175.
19. *Burkett Sh., Lamar J., Lewis M. L., Wynn C.* Groups with exactly two supercharacter theories/ [arXiv:1506.00015](#)
20. *Diaconis P., Isaacs I. M.* Supercharacters and superclasses for algebra groups// Trans. Am. Math. Soc. — 2008. — 360. — С. 2359–2392.
21. *Fowler C. F., Garcia S. R., Karaali G.* Ramanujan sums as supercharacters// Ramanujan J. — 2014. — 32. — С. 205–241.
22. *Grinberg D., Reiner V.* Hopf algebras in combinatorics/ [arXiv:1409.8356](#)
23. *Hendrickson A. O. F.* Supercharacter theory constructions corresponding to Schur ring products// Commun. Algebra. — 2012. — 40, № 12. — С. 4420–4438.
24. *Isaacs I. M., Karagueuzian D.* Involution and characters of upper triangular matrix groups// Math. Comput. — 2005. — 74. — С. 2027–2033.
25. *Kazhdan D.* Proof of Springer hypothesis// Isr. J. Math. — 1977. — 28. — С. 272–284.
26. *Kirillov A. A.* Variations on the triangular theme// Trans. Am. Math. Soc. — 1995. — 169. — С. 43–73.
27. *Marberg E., Thiem N.* Superinduction for pattern groups// J. Algebra. — 2009. — 321. — С. 3681–3703.
28. *Marberg E.* Combinatorial methods of character enumeration for the unitriangular group// J. Algebra. — 2011. — 345. — С. 295–323.
29. *Ning Yan.* Representation theory of finite unipotent linear groups/ Ph.D. Thesis. — Univ. Pennsylvania, 2001; [arXiv:1004.2674](#).
30. *Otto B.* Constituents of supercharacters and Kirillov functions// Arch. Math. — 2010. — 94. — С. 319–326.
31. *Panov A. N.* Supercharacters for the finite groups of triangular type/ [arXiv:1508.05767](#)
32. *Panov A. N.* Restriction and induction for supercharacters of finite groups of triangular type/ [arXiv:1610.04846](#)
33. *Panov A. N.* Invariants of the coadjoint action on the basic varieties of the unitriangular group// Transform. Groups. — 2015. — 20, № 1. — С. 229–246.
34. *Thiem N.* Branching rules in the sing of super functions of unipotent upper-triangular matrices// J. Algebr. Combin. — 2010. — 31. — С. 267–298.
35. *Thiem N., Venkateswaran V.* Restricting supercharacters of the finite unipotent uppertriangular matrices// Electr. J. Combin. — 2009. — 16, № 23.
36. *Zelevinsky A.* Representations of classical groups. A Hopf algebra approach/ Lect. Notes Math. — Berlin–Heidelberg–New York: Springer-Verlag, 1981. — 869.

А. Н. Панов

Самарский национальный исследовательский университет им. академика С. П. Королева

E-mail: apanov@list.ru



ИГРЫ С УПОРЯДОЧЕННЫМИ ИСХОДАМИ

© 2017 г. В. В. РОЗЕН

Аннотация. Работа представляет собой краткий обзор важнейших понятий и результатов, касающихся игр, в которых целевая структура формализована бинарными отношениями предпочтения. Основная часть работы посвящена играм с упорядоченными исходами, т.е. теоретико-игровым моделям, в которых отношения предпочтения игроков задаются частичными порядками на множестве исходов. В обзоре представлены как антагонистические игры, так и игры n лиц с упорядоченными исходами. Оптимальными решениями в играх с упорядоченными исходами являются стратегии игроков, ситуации или исходы игры. В статье рассматриваются некооперативные и некоторые кооперативные решения. Особое внимание уделено продолжению порядка на множество вероятностных мер, так как этот вопрос является существенным для построения смешанного расширения игры с упорядоченными исходами. Обзор охватывает работы, опубликованные с 1953 г. по настоящее время.

Ключевые слова: игра с упорядоченными исходами, оптимальная стратегия, ситуация равновесия, допустимый исход, продолжение порядка на множество вероятностных мер.

AMS Subject Classification: 91A40

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение	56
2. Антагонистические игры с упорядоченными исходами	58
3. Игры n лиц с упорядоченными исходами	63
4. Смешанные расширения игр с упорядоченными исходами	67
Список литературы	70

1. ВВЕДЕНИЕ

1.1. Возможность построения теории игр с нечисловыми оценками ситуаций осознавалась уже основателями теории игр — Дж. Фон Нейманом и О. Моргенштерном. В своей основополагающей работе «Теория игр и экономическое поведение», говоря об аксиоме линейности, они пишут: «Весьма сомнительно, что идеализация реальности, в которой верен этот постулат, является адекватной или хотя бы удобной. Это значит, что можно допускать для двух полезностей u и v отношение несравнимости, обозначаемое через $u \parallel v$, которое означает, что не имеет места ни $u = v$, ни $u > v$, ни $u < v$ » (цит. по рус. пер. [12, с. 628]). Понимание того принципиального обстоятельства, что предпочтения логически предшествуют полезностям (см., например, [10]), постепенно привело к развитию направления в теории игр, где в основу формализации целевых структур положены не функции выигрыша игроков (или функции полезности), а их отношения предпочтения¹. Кроме того, важным стимулом для исследования моделей принятия решения с нечисловыми оценками исходов явились обнаруженные сложности в задании функций выигрыша в конкретных моделях, относящихся к различным предметным областям. При построении математической модели принятия решения задание отношения предпочтения требует значительно

¹ Общие вопросы построения и исследования теоретико-игровых моделей с отношениями предпочтения обсуждаются, например, в монографиях [5, 8, 9, 10, 13, 15, 20, 27].

меньшей информации, чем функции выигрыша, так как эксперту проще ответить на вопрос, является ли один исход предпочтительнее другого, чем указать «во сколько раз» один исход имеет большую полезность, чем другой.

1.2. Цель данной работы — дать краткий обзор важнейших понятий и результатов, относящихся к играм, в которых целевая структура формализована бинарными отношениями предпочтения. Первой математической работой, в которой значениями функций выигрыша выступают не числа, а элементы упорядоченного множества, по-видимому, следует считать короткую заметку Л. Шепли и М. Шубика [42]. В ней устанавливается, что предположения о линейности и трансферабельности полезностей несущественны, а отказ от них не меняет характера решения по Нейману—Моргенштерну. Через два года в заметке [34] Р. Фаркуарсона предполагается, что предпочтения игроков заданы отношениями линейного квазипорядка на множестве ситуаций игры. Аналогичное предположение сделано в вышедшей через два года во Франции монографии К. Бержа (см. русский перевод [1]). Важным шагом в развитии теории игр с отношениями предпочтения явилась статья [36] Б. Пелега, имеющая характерное название «Независимость теории игр от теории полезности». В ней введено понятие ситуации равновесия и рассмотрены некоторые кооперативные решения для игр с отношениями предпочтения. В работах [32, 33] Р. Аумана дается описание ситуаций равновесия для игр с отношениями предпочтения без предположения их линейности. Начиная со второй половины прошлого века, появляется значительное число работ по играм с векторными выигрышами (см., например, [2, 11, 18, 35, 41]), занимающим промежуточное положение между играми с функциями выигрышами и играми с отношениями предпочтения.

В предложенном Н. Н. Воробьевым на I-й Всесоюзной конференции по теории игр (Ереван, 1968) общем определении игры постулируется, что предпочтения игроков задаются бинарными отношениями на множестве ситуаций игры (см. [6]). То же предположение сделано в модифицированном определении игры, предложенном Э. Й. Вилкасом (см. [4, 5]).

1.3. Хотя в общем определении игры на отношения предпочтения игроков не накладывается никаких ограничений (кроме их бинарности), понятие отношения является настолько широким, что установление нетривиальных содержательных утверждений — без дополнительных условий на тип отношений — представляется вряд ли возможным. В настоящем обзоре мы рассматриваем, в основном, игры, в которых отношения предпочтения являются отношениями порядка или квазипорядка¹; такие игры называются *играми с упорядоченными* (или *квазипорядоченными*) *исходами*. Наиболее существенным отличием игры с упорядоченными исходами от игры с функциями выигрыша является, во-первых, отсутствие количественного представления полезностей исходов игры и, во-вторых, возможная несравнимость по предпочтению некоторых пар исходов. Стоит заметить, что класс игр с упорядоченными исходами является «достаточно обширным» так как он содержит, например, класс игр с векторными выигрышами. Вместе с тем для этого класса игр оказывается возможным построение достаточно развитой математической теории, имеющей глубокие связи с классической теорией игр с функциями выигрыша.

1.4. Сделаем несколько замечаний о структуре работы. С формально-алгебраической точки зрения игра с отношениями предпочтения представляет собой многоосновную модель, базисными множествами которой являются множества стратегий игроков, множество ситуаций игры и множество ее исходов. Поэтому, рассматривая оптимальные решения игры, мы должны относить понятие оптимальности к стратегиям игроков, к ситуациям игры и к ее исходам. Далее, как известно, в классической теории игр сложилось два подхода к анализу игр: некооперативный и кооперативный. При первом подходе анализ игры ведется в предположении независимости

¹При изложении вопросов, связанных с упорядоченными множествами и решетками, мы придерживаемся, в основном, терминологии и обозначений книги Г. Биркгофа «Теория решеток» (М.: Наука, 1984). Напомним, что *отношением порядка* называется рефлексивное, транзитивное и антисимметричное бинарное отношение; бинарное отношение, удовлетворяющее первым двум условиям, называется *отношением квазипорядка*. В общем случае отношение порядка является «частичным», т.е. некоторые пары элементов несравнимы по порядку. Говорят, что упорядоченное множество удовлетворяет *условию линейности* (является *цепью*), если любые два элемента этого множества сравнимы относительно заданного на нем отношения порядка. Упорядоченное множество называется *решеткой*, если любое его подмножество имеет как инфимум, так и супремум.

действий игроков, которая объясняется либо правилами игры, либо разобщенностью игроков (в частности, отсутствием возможностей обмена информацией между ними). При кооперативном подходе, напротив, предполагается, что игроки могут создавать коалиции, имеющие собственные интересы и возможные действия.

Во втором разделе работы изучаются антагонистические игры с упорядоченными исходами в плане оптимальных стратегий игроков и оптимальных ситуаций игры. Третий раздел посвящен общим играм n лиц с упорядоченными исходами, для которых предметом анализа являются некооперативные и некоторые кооперативные решения. Реализация важнейшего теоретико-игрового принципа — равновесия — требует построения смешанного расширения игры. Соответствующие вопросы рассмотрены в четвертом разделе.

Обзор не претендует на полноту. В отборе представленных тем и результатов, разумеется, сказались научные интересы автора.

2. АНТАГОНИСТИЧЕСКИЕ ИГРЫ С УПОРЯДОЧЕННЫМИ ИСХОДАМИ

2.1. Доминирование стратегий. Антагонистическая игра с упорядоченными исходами может быть задана в виде набора

$$G = \langle X, Y, A, \omega, F \rangle, \quad (1)$$

где X — множество стратегий игрока 1, Y — множество стратегий игрока 2, A — множество исходов, ω — отношение (частичного) порядка на A , $F : X \times Y \rightarrow A$ — функция реализации. Мы предполагаем, что всегда $|X| \geq 2$, $|Y| \geq 2$, $|A| \geq 2$. Игра G называется *конечной*, если множества стратегий игроков X и Y являются конечными. Игра протекает следующим образом: игрок 1 произвольно выбирает стратегию $x \in X$, игрок 2 — стратегию $y \in Y$; в результате складывается ситуация (x, y) , приводящая к единственному исходу $F(x, y) \in A$. Интерпретация соотношения $a_1 \leq^\omega a_2$ состоит в том, что для игрока 1 исход a_2 является не менее предпочтительным, чем исход a_1 . Предпочтения игрока 2 выражаются обратным порядком ω^{-1} . Класс игр вида (1) обозначается через $K(\Omega)$.

Каждой игре $G \in K(\Omega)$ соответствует двойственная ей игра G^* , получающаяся из G перестановкой игроков 1 и 2 и заменой порядка ω на ω^{-1} . Для всякого утверждения (или понятия) S , сформулированного в терминах игры G , можно построить двойственное ему утверждение (или понятие) S^* , которое получается заменой игроков 1 и 2 друг на друга и отношения порядка ω на обратное отношение ω^{-1} . Так как класс $K(\Omega)$ замкнут относительно перехода к двойственной игре, то справедлив следующий принцип.

Принцип двойственности. Если некоторое утверждение S доказано для произвольной игры класса $K(\Omega)$, то справедливым будет и двойственное ему утверждение S^* .

Замечание 2.1. В игре G предпочтения игроков переносятся на ситуации игры с помощью функции реализации F .

Замечание 2.2. Антагонистические игры с функциями выигрыша игроков могут рассматриваться как игры с упорядоченными исходами. А именно, если задана антагонистическая игра с функцией выигрыша $\Gamma = \langle X, Y, f \rangle$, где X — множество стратегий игрока 1, Y — множество стратегий игрока 2 и $f : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ — функция выигрыша, то ее формально можно «превратить» в игру с упорядоченными исходами вида (1), в которой множества стратегий игроков те же самые, что и в игре Γ ; множеством исходов выступает множество действительных чисел (действительная прямая) $\mathbb{R}$; отношение порядка, выражающее предпочтения игрока 1, есть естественный порядок $\leq$ на действительной прямой $\mathbb{R}$, а в качестве функции реализации берется функция выигрыша f . Здесь более точно называть построенную игру с упорядоченными исходами «проекцией» игры Γ в класс $K(\Omega)$. Заметим, что ряд свойств исходной игры Γ (например, наличие седловой точки) могут быть сформулированы в терминах ее проекции. Однако, например, построение смешанного расширения игры Γ по ее проекции в класс $K(\Omega)$ невозможно.

Аналогично всякую антагонистическую игру с векторными выигрышами $\Gamma_1 = \langle X, Y, f \rangle$, где $f : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}^m$, $m \geq 2$, можно «спроектировать» в класс $K(\Omega)$. В этом случае в качестве

множества исходов выступает $\mathbb{R}^m$, в качестве функции реализации — функция выигрыша f , а отношение порядка, выражающее предпочтения игрока 1, есть отношение доминирования по Парето в $\mathbb{R}^m$.

Важные подклассы класса $K(\Omega)$ могут быть получены за счет наложения дополнительных требований на упорядоченное множество $\langle A, \omega \rangle$. Игра G вида (1) называется *игрой с решеточно упорядоченными исходами*, если $\langle A, \omega \rangle$ — полная решетка. Игра G называется *игрой с линейно упорядоченными исходами*, если $\langle A, \omega \rangle$ — полная цепь.

Перейдем к рассмотрению отношений доминирования стратегий в игре (1). Наиболее естественное отношение доминирования стратегий — *отношение доминирования по Парето* $\leq^{Par}$, являющееся спецификацией в рамках модели (1) отношения доминирования по Парето в $\mathbb{R}^m$. Для игры G вида (1) нестрогое доминирование по Парето стратегий игрока 1 задается формулой

$$x_1 \leq^{Par} x_2 \Leftrightarrow (\forall y \in Y) F(x_1, y) \leq^\omega F(x_2, y) \quad (x_1, x_2 \in X). \quad (2)$$

Строгое доминирование по Парето, обозначаемое знаком $<^{Par}$, означает, что выполняется правая часть (2), причем хотя бы одно из соотношений должно выполняться как строгое.

Определение 2.1. Стратегия $x^* \in X$ игрока 1 называется *оптимальной по Парето* (или *недоминируемой по Парето*), если она не доминируется (в строгом смысле) по Парето никакой другой стратегией этого игрока.

Принцип выбора решения, согласно которому оптимальными считаются решения, недоминируемые по Парето, называется *оптимальностью по Парето*. Основной недостаток этого принципа как правила выбора оптимальных решений состоит в том, что множество Парето-недоминируемых альтернатив, как правило, является «достаточно обширным», и трудности выбора оптимальной альтернативы переходят с первоначального множества решений на множество решений, оптимальных по Парето. С другой стороны, естественность процедуры отбрасывания доминируемых по Парето стратегий приводит к требованию рассмотрения лишь таких отношений доминирования, в которых «наследуется» неравенство $x_1 \leq^{Par} x_2$ (другими словами, рассматриваемое отношение доминирования должно содержать доминирование по Парето). Важнейшим отношением доминирования, удовлетворяющим этому условию, является отношение α -доминирования стратегий¹. Для игры G вида (1) наиболее естественным образом это отношение вводится на базе понятия оценки стратегии множеством гарантированных ею исходов. Введем следующие обозначения.

Через V_x^1 обозначается множество всех исходов игры G , гарантированных игроку 1 стратегией x :

$$V_x^1 = \{a \in A : (\forall y \in Y) F(x, y) \geq^\omega a\};$$

через V_y^2 — множество исходов, гарантированных игроку 2 стратегией y :

$$V_y^2 = \{a \in A : (\forall x \in X) F(x, y) \leq^\omega a\}.$$

Если в качестве оценки стратегии $x \in X$ взять множество V_x^1 гарантированных ею исходов, то возникает *отношение α -доминирования стратегий игрока 1*:

$$x_1 \leq^\alpha x_2 \Leftrightarrow V_{x_1}^1 \subseteq V_{x_2}^1.$$

Отношение α -доминирования стратегий игрока 2 определяется двойственно. Очевидно, что отношение α -доминирования стратегий является отношением квазипорядка. Стратегия, являющаяся наибольшим элементом относительно α -доминирования, называется также *α -наибольшей* или *наибольшей гарантирующей стратегией*. Для игр с решеточно упорядоченными исходами (в частности, для игр с функцией выигрыша) α -наибольшие стратегии игрока 1 характеризуются тем условием, что на них достигается внешний экстремум в выражении $\max_{x \in X} \inf_{y \in Y} F(x, y)$.

¹Для игр с отношениями предпочтения отношение α -доминирования стратегий введено В. В. Подиновским. Им же указаны некоторые недостатки концепции α -доминирования и предложено рассмотрение другого доминирования, которое для игр с упорядоченными исходами совпадает с вводимым ниже отношением β -доминирования; см. [16, 17].

При всей кажущейся естественности принцип α -доминирования стратегий обладает рядом существенных недостатков, основными из которых являются следующие.

1. Если в игре G упорядоченное множество исходов не содержит наименьшего элемента, то множество исходов, гарантированных некоторой стратегией игрока, может быть пустым. Более того, может оказаться пустым множество всех гарантированных исходов игрока.
2. Отношение α -доминирования стратегий в общем случае не сохраняется при добавлении несущественных (то есть нереализуемых) исходов игры и продолжении порядка на расширенное множество исходов.
3. Отношение α -доминирования стратегий может не сохраняться при изотонном преобразовании порядка игры; при этом может переопределяться наибольшая гарантирующая стратегия игрока.

Таким образом, оценка стратегии игрока множеством гарантированных ею исходов является «слишком грубой». Более «тонкая» оценка стратегий игроков основана не на свойстве гарантирования, а на свойстве запрета ею тех или иных исходов другому игроку, что приводит к отношению β -доминирования.

Определение 2.2. Будем говорить, что в игре G вида (1) исход $a \in A$ запрещается игроку 1 стратегией $y \in Y$, если при любой стратегии $x \in X$ соотношение $F(x, y) \geq^\omega a$ не имеет места; исход $a \in A$ запрещается игроку 2 стратегией $x \in X$, если при любой стратегии $y \in Y$ соотношение $F(x, y) \leq^\omega a$ не имеет места.

Множество тех исходов, которые запрещаются игроку k , $k = 1, 2$, некоторой стратегией другого игрока, может служить оценкой этой стратегии. Технически удобней здесь использовать дополнение этого множества, т.е. множество тех исходов, которые не запрещаются игроку k . Будем обозначать через U_y^1 множество исходов, которые не запрещаются игроку 1 стратегией $y \in Y$, а через U_x^2 — множество исходов, которые не запрещаются игроку 2 стратегией $x \in X$:

$$U_y^1 = \{a \in A : (\exists x \in X) F(x, y) \geq^\omega a\}, \quad U_x^2 = \{a \in A : (\exists y \in Y) F(x, y) \leq^\omega a\}.$$

Отношения β -доминирования стратегий игроков 1 и 2 определяются с помощью равносильностей:

$$x_1 \lesssim^\beta x_2 \Leftrightarrow U_{x_2}^2 \subseteq U_{x_1}^2, \quad y_1 \lesssim^\beta y_2 \Leftrightarrow U_{y_2}^1 \subseteq U_{y_1}^1.$$

Отношение β -доминирования лишено недостатков, отмеченных выше для отношения α -доминирования. Наибольший элемент относительно квазиупорядка $\leq^\beta$ называется *наибольшей запрещающей стратегией*.

Теорема 2.1. В любой игре G с упорядоченными исходами имеют место включения

$$\leq^{Par} \subseteq \leq^\beta \subseteq \leq^\alpha.$$

Следствие 2.1. Наибольшая запрещающая стратегия игрока является также его наибольшей гарантирующей стратегией.

2.2. Подходы к введению понятия значения игры. Для игр с функциями выигрыша важнейшим является понятие *значения* (или *цены*) игры; отметим, что большая часть обзора [30] по теории антагонистических игр посвящена вопросам существования значения игры. Различные способы введения понятия значения для игр с векторными выигрышами, а также для игр с отношениями предпочтения предлагались многими авторами. Не останавливаясь на характеристике этих способов, отметим, что они обладают рядом недостатков, основными из которых являются следующие:

- 1) существование значения игры оказывается неинвариантным относительно перехода к двойственной игре;
- 2) существование значения игры может не переходить на ее смешанное расширение;
- 3) существование значения игры не сохраняется при линейном доупорядочении множества исходов;

- 4) существование значения игры не сохраняется при добавлении несущественных (т.е. нереализуемых) исходов и продолжении порядка на расширенное множество исходов;
- 5) понятие значения игры с отношениями предпочтения не связывается с понятием значения для игр с функциями выигрыша.

Один из способов введения понятия значения игры с упорядоченными исходами состоит в следующем.

Определение 2.3. Исход $a \in A$ называется *гарантированным исходом игрока 1*, если он гарантируется игроку 1 хотя бы одной его стратегией; исход $a \in A$ называется *незапрещенным исходом игрока 1*, если он не запрещается игроку 1 никакой стратегией другого игрока.

Множество всех гарантированных исходов игрока 1 обозначается через $V(1)$, множество всех незапрещенных исходов игрока 1 — через $U(1)$. Для игрока 2 эти множества обозначаются, соответственно, через $V(2)$ и $U(2)$ и вводятся двойственным образом. Из определений сразу следует, что в любой игре G выполнено включение $V(1) \subseteq U(1)$, которое можно рассматривать как аналог известного соотношения между нижним и верхним значением игры с функцией выигрыша¹.

Определение 2.4. Будем говорить, что игра G вида (1) обладает *простым значением*, если выполнено равенство $V(1) = U(1)$.

Отметим, что указанное равенство называется также *условием альтернативности*, которое тесно связано с наличием в игре G седловой точки². Один из недостатков указанного подхода состоит в том, что условие альтернативности не сохраняется при переходе к двойственной игре, т.е. возможна такая ситуация, когда игра G обладает простым значением, а двойственная игра G^* — нет³.

Рассмотрим теперь следующее усиление свойства альтернативности игры.

Определение 2.5. Игра G вида (1) называется *глобально альтернативной*, если для любого мажорантно стабильного подмножества⁴ $B \subseteq A$ имеет место альтернатива: либо существует стратегия игрока 1, гарантирующая достижимость подмножества B , либо существует стратегия игрока 2, гарантирующая достижимость его дополнения $B' = A \setminus B$, т.е. либо $(\exists x \in X)(\forall y \in Y) F(x, y) \in B$, либо $(\exists y \in Y)(\forall x \in X) F(x, y) \in B'$.

Ниже излагается новый подход к введению понятия значения антагонистической игры с упорядоченными исходами, лишенный отмеченных недостатков и основанный на редукции к понятию значения для некоторого семейства антагонистических игр с функциями выигрыша.

Определение 2.6. Рассмотрим игру G вида (1). Пусть $C_0(\omega)$ — множество всех ограниченных изотонных отображений $\varphi : A \rightarrow \mathbb{R}$. При произвольном $\varphi \in C_0(\omega)$ определена антагонистическая игра с функциями выигрыша игроков $G_\varphi = \langle X, Y, \varphi \circ F \rangle$. Будем говорить, что игра G *потенциально обладает значением*, если при любом $\varphi \in C_0(\omega)$ игра G_φ обладает значением в классическом смысле, т.е. выполняется равенство

$$\sup_{x \in X} \inf_{y \in Y} \varphi(F(x, y)) = \inf_{y \in Y} \sup_{x \in X} \varphi(F(x, y)).$$

¹Для игр с векторными выигрышами множества гарантированных и незапрещенных векторов в качестве аналогов нижнего и верхнего значения игры рассматривались Г. Йенчем [35], а для игр с отношениями предпочтения Э.—В. В. Подиновским [17]. Отдельные свойства этих и подобных им аналогов изучались в [11, 18]. В рамках теории кооперативных игр использование гарантированных и незапрещенных векторов коалиции в качестве оценки ее возможностей было предложено Р. Ауманом и Б. Пелегом [31].

²Отметим, что элементарное доказательство основной теоремы теории матричных игр, не опирающееся на теорему о неподвижной точке (см., например, [7]), основано на «лемме о двух альтернативах», которая фактически представляет собой теорему Вилля (см. [3]). Эта теорема устанавливает (в нашей терминологии) свойство альтернативности смешанного расширения матричной игры.

³Для игр с векторными выигрышами факт несохранения свойства альтернативности при переходе к двойственной игре отмечен В. В. Подиновским [16].

⁴Подмножество $B \subseteq A$ называется мажорантно стабильным в упорядоченном множестве $\langle A, \omega \rangle$, если оно удовлетворяет условию: $a \in B, a' >^\omega a \Rightarrow a' \in B$.

Имеет место следующий принципиальный результат.

Теорема 2.2 (см. [21]). *Для того чтобы игра G с упорядоченными исходами потенциально обладала значением, необходимо и достаточно, чтобы она была глобально альтернативной.*

Введенное понятие потенциального значения игры лишено недостатков, присущих концепции простого значения. В частности, свойство потенциального значения сохраняется при переходе к двойственной игре, а также сохраняется при линейном доупорядочении исходов игры, при добавлении несущественных (нереализуемых) исходов и продолжении порядка ω на расширенное множество исходов (см. [24]). Далее, оказывается, что для антагонистической игры с упорядоченными исходами свойство наличия потенциального значения эквивалентно свойству наличия простого значения в некотором расширении этой игры. Для точной формулировки этого результата введем следующее замечание.

Замечание 2.3. Для произвольного упорядоченного множества $\langle A, \omega \rangle$ обозначим через $M(\omega)$ семейство всех мажорантно стабильных в $\langle A, \omega \rangle$ подмножеств; оно представляет собой полную решетку относительно включения, а отображение, которое каждому $a \in A$ ставит в соответствие множество его мажорант $a^\uparrow$, является изоморфным вложением упорядоченного множества $\langle A, \omega \rangle$ в эту полную решетку. Поэтому для всякой игры G вида (1) определено ее порядковое расширение $G^\uparrow = \langle X, Y, M(\omega), \supseteq, F^\uparrow \rangle$, где $F^\uparrow(x, y) = (F(x, y))^\uparrow$, называемое *мажорантным расширением* игры G . Имеет место следующее утверждение (см. [24]): *игра G обладает потенциальным значением тогда и только тогда, когда ее мажорантное расширение $G^\uparrow$ обладает простым значением.* Далее, оказывается, что при переходе от игры G к игре $G^\uparrow$ отношение α -доминирования стратегий «превращается» в отношение β -доминирования, причем в игре $G^\uparrow$ эти доминирования совпадают: $\alpha^\uparrow = \beta^\uparrow = \beta$.

2.3. Ситуации равновесия в антагонистических играх. Как известно, в теории бескоалиционных (некооперативных) игр с функциями выигрыша основным принципом оптимальности является принцип равновесия по Нэшу. Этот принцип естественным образом распространяется на класс антагонистических игр с упорядоченными исходами.

Определение 2.7. Ситуация (x_0, y_0) в игре G называется *седловой точкой*, если для всех $x \in X, y \in Y$ имеет место

$$F(x, y_0) \leq^\omega F(x_0, y_0) \leq^\omega F(x_0, y).$$

Седловая точка обладает устойчивостью в следующем смысле: при одностороннем отклонении игрока от седловой точки получается исход, который является менее (или столь же) предпочтительным для отклонившегося игрока, что и первоначальный исход.

Для характеристики седловых точек в игре G вида (1) введем следующее определение.

Определение 2.8. Стратегия игрока называется *дискриминирующей*, если ее применение обеспечивает попадание исхода игры в множество гарантированных исходов другого игрока. Таким образом, дискриминирующие стратегии $x_0 \in X, y_0 \in Y$ игроков 1 и 2, соответственно, характеризуются условиями

$$(\forall y \in Y) F(x_0, y) \in V(2), \quad (\forall x \in X) F(x, y_0) \in V(1).$$

Теорема 2.3. *Для того чтобы ситуация (x_0, y_0) в игре G вида (1) была в ней седловой точкой, необходимо и достаточно, чтобы x_0 была дискриминирующей стратегией игрока 1 и y_0 была дискриминирующей стратегией игрока 2.*

В терминах «характеристических множеств» V_x^1 и U_y^1 , введенных в п. 2.1, характеристика седловых точек принимает следующий вид.

Теорема 2.4. *Ситуация (x_0, y_0) является седловой точкой в игре G тогда и только тогда, когда $V_{x_0}^1 = U_{y_0}^1$.*

Учитывая, что при всех $x \in X, y \in Y$ выполнено включение $V_x^1 \subseteq U_y^1$, из теоремы 2.4 получаем следующее утверждение.

Следствие 2.2. Для того чтобы в игре G существовала седловая точка, необходимо и достаточно, чтобы существовали и были равны между собой $\max_{x \in X} V_x^1$ и $\min_{y \in Y} U_y^1$:

$$\max_{x \in X} V_x^1 = \min_{y \in Y} U_y^1 \quad (3)$$

(операторы $\max$ и $\min$ рассматриваются относительно включения). При этом если экстремум слева достигается при $x = x_0$, а экстремум справа — при $y = y_0$, то ситуация (x_0, y_0) будет седловой точкой в игре G .

Сформулируем теперь утверждение следствия 2.2 в теоретико-игровых терминах. Заметим, во-первых, что условие существования $\max_{x \in X} V_x^1$ эквивалентно существованию наибольшей гарантирующей стратегии игрока 1, условие существования $\min_{y \in Y} U_y^1$ эквивалентно существованию наибольшей запрещающей стратегии игрока 2, и, во-вторых, из равенства (3) вытекает альтернативность игры G . Отсюда получаем следующий результат.

Теорема 2.5. Для того чтобы в игре G вида (1) ситуация (x_0, y_0) была седловой точкой, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:

- 1) игра G была альтернативной;
- 2) стратегия x_0 была наибольшей гарантирующей стратегией игрока 1;
- 3) стратегия y_0 была наибольшей запрещающей стратегией игрока 2.

Замечание 2.4. Простые примеры показывают, что для игр с упорядоченными исходами введенные выше типы оптимальных стратегий: наибольшие гарантирующие, наибольшие запрещающие и дискриминирующие — попарно различны, причем каждый последующий тип является усилением предыдущего. Однако если игра имеет седловую точку, то, как следует из теорем 2.3 и 2.5, в ней все указанные виды оптимальных стратегий совпадают между собой. Отметим также, что достаточно общий способ введения отношений доминирования стратегий, основанный на категорном подходе, предложен в [37].

Замечание 2.5. Нетрудно показать, что существование в игре G дискриминирующей стратегии (хотя бы у одного из игроков) влечет глобальную альтернативность игры, а следовательно, и альтернативность. Для конечной игры с линейно упорядоченными исходами все указанные условия типа альтернативности эквивалентны между собой и эквивалентны существованию седловой точки.

Замечание 2.6. Для антагонистической игры с решеточно упорядоченными исходами равенство (3) приобретает вид

$$\max_{x \in X} \inf_{y \in Y} F(x, y) = \min_{y \in Y} \sup_{x \in X} F(x, y) \quad (4)$$

и совпадает с известным условием существования седловой точки для антагонистической игры с функциями выигрыша (см., например, [7]). Таким образом, указанный результат носит по существу решеточный характер, а его доказательство для игр с функциями выигрыша использует лишь порядковые свойства действительных чисел. Отметим также, что в случае конечной игры с решеточно упорядоченными исходами равенство (4) не превращается в совпадение максимина и минимакса, как это имеет место для игр с функциями выигрыша.

3. ИГРЫ n ЛИЦ С УПОРЯДОЧЕННЫМИ ИСХОДАМИ

3.1. Ситуации равновесия и допустимые исходы. Формально игра n лиц с отношениями предпочтения в нормальной форме может быть задана в виде набора

$$G = \langle N, (X_i)_{i \in N}, A, (\omega_i)_{i \in N}, F \rangle, \quad (5)$$

где $N = \{1, \dots, n\}$ — множество игроков, $n \geq 2$; X_i — множество стратегий игрока $i \in N$; A — множество исходов игры; $\omega_i \subseteq A^2$ — бинарное отношение на A , выражающее предпочтения игрока i ; F — функция реализации, т.е. отображение множества ситуаций игры $X = \prod_{i \in I} X_i$ в множество

исходов A . Игра (5) называется *игрой с упорядоченными* (или *квазиупорядоченными*) исходами, если все ω_i , $i \in N$, являются отношениями порядка (квазипорядка).

Замечание 3.1. Любая игра игроков $N = \{1, \dots, n\}$ с функциями выигрыша может быть рассмотрена как игра с квазиупорядоченными исходами, в которой множеством исходов выступает $\mathbb{R}^n$; функция реализации есть отображение, которое каждой ситуации игры ставит в соответствие вектор выигрышей игроков $1, \dots, n$ в этой ситуации; отношение квазипорядка, выражающее предпочтение игрока $i \in N$, представляет собой сравнение векторов из $\mathbb{R}^n$ по величине i -й компоненты (ср. с замечанием 2.2). Аналогичное утверждение справедливо и для игр с векторными выигрышами игроков.

Важнейшим принципом оптимальности для игр вида (5) с упорядоченными исходами является равновесие по Нэшу.

Определение 3.1. Ситуация $x^0 = (x_i^0)_{i \in N}$ в игре G вида (5) называется *ситуацией равновесия по Нэшу*, если для всех $i \in N$ и $x'_i \in X_i$

$$F(x^0 || x'_i) \leq^{\omega_i} F(x^0).$$

Отсутствие свойства линейности отношений предпочтения ω_i , $i \in N$, позволяет ввести следующее обобщение условия равновесия по Нэшу.

Определение 3.2. Ситуация $x^0 = (x_i^0)_{i \in N}$ в игре G называется *ситуацией общего равновесия*, если не существует таких $i \in N$ и $x'_i \in X_i$, для которых

$$F(x^0 || x'_i) >^{\omega_i} F(x^0). \quad (6)$$

Для игр с упорядоченными исходами, как и для игр с функциями выигрыша, универсальная реализуемость принципов равновесия требует перехода к смешанным стратегиям, что является подчас обременительным в практических приложениях. Это обстоятельство стимулировало выработку других типов оптимальности, важнейшим из которых является принцип допустимости исхода или ситуации игры.

Для игры G вида (5) понятие допустимости исхода может быть введено следующим образом. Зафиксируем $i \in N$ и положим

$$X_{N \setminus i} = \prod_{\substack{j \in N \\ j \neq i}} X_j.$$

Можно рассматривать $X_{N \setminus i}$ как множество стратегий дополнительной коалиции $N \setminus i$. Пара $(x_i, x_{N \setminus i})$, где $x_i \in X_i$ и $x_{N \setminus i} \in X_{N \setminus i}$, однозначно определяет некоторый исход игры G , который обозначается $F(x_i, x_{N \setminus i})$.

Определение 3.3. Будем говорить, что стратегия $x_i^0 \in X_i$ является *возражением игрока i* на исход $a \in A$, если для любой стратегии $x_{N \setminus i} \in X_{N \setminus i}$ дополнительной коалиции $N \setminus i$ выполнено неравенство

$$F(x_i^0, x_{N \setminus i}) >^{\omega_i} a.$$

Исход $a \in A$ называется *допустимым для игрока i* , если он не имеет возражений на этот исход. Исход a называется *допустимым исходом* в игре G , если этот исход является допустимым для всех игроков $i \in N$.

Таким образом, допустимость исхода $a \in A$ в игре G означает, что для любых $i \in N$ и $x_i \in X_i$ существует такая стратегия $x_{N \setminus i} \in X_{N \setminus i}$ дополнительной коалиции, что условие

$$F(x_i, x_{N \setminus i}) >^{\omega_i} a$$

не имеет места. Указанная стратегия $x_{N \setminus i}$ дополнительной коалиции называется *наказующей стратегией*.

Пример 3.1. Рассмотрим антагонистическую игру с функциями выигрыша $\Gamma = \langle X, Y, u \rangle$, где X — множество стратегий игрока 1, Y — множество стратегий игрока 2, $u(x, y)$ — платеж (выигрыш) игрока 1 и проигрыш игрока 2 в ситуации (x, y) . Мы можем рассматривать игру Γ как игру с упорядоченными исходами (см. замечание 2.2). Пусть

$$v_1 = \sup_{x \in X} \inf_{y \in Y} u(x, y), \quad v_2 = \inf_{y \in Y} \sup_{x \in X} u(x, y)$$

— нижнее и верхнее значения игры Γ соответственно. Рассмотрим следующее условие:

(C) если внешний экстремум в выражении $\sup_{x \in X} \inf_{y \in Y} u(x, y)$ достигается в точке $x_0 \in X$, то внутренний экстремум $\inf_{y \in Y} u(x_0, y)$ должен достигаться в некоторой точке $\tilde{y}_0 \in Y$.

Легко показать, что для игры Γ , рассматриваемой как игра с упорядоченными исходами, множество допустимых исходов для игрока 1 есть интервал (v_1, ∞) и, возможно, точка v_1 . При этом исход v_1 является допустимым для игрока 1 тогда и только тогда, когда выполнено условие (C). Для нахождения всех допустимых исходов игрока 2 надо использовать двойственное условие (C*). Таким образом, множество $Ac\Gamma$, состоящее из всех допустимых исходов игры Γ , представляет собой интервал (v_1, v_2) и, возможно, точки v_1 и v_2 .

Предположим, что множества X, Y представляют собой компактные топологические пространства и функция $u(x, y)$ является непрерывной. Тогда условия (C) и (C*) выполнены; следовательно, в этом случае получаем $Ac\Gamma = [v_1, v_2]$. Нахождение множества допустимых исходов для игры n лиц с функциями выигрыша игроков (см. замечание 3.1) может быть сведено к этой задаче для антагонистической игры.

Некоторое усиление концепции допустимости исхода вводится следующим образом.

Определение 3.4. Исход $a \in A$ называется *вполне допустимым для игрока i* , если существует такая стратегия $x_{N \setminus i} \in X_{N \setminus i}$ дополнительной коалиции $N \setminus i$, что при любой стратегии $x_i \in X_i$ условие $F(x_i, x_{N \setminus i}) >^{\omega_i} a$ не имеет места. Исход a называется *вполне допустимым в игре G* , если он вполне допустим для всех игроков $i \in N$.

Эти понятия естественным образом переносятся с исходов игры на ее ситуации. А именно, ситуация x в игре G называется *допустимой* (*вполне допустимой*), если исход в этой ситуации является допустимым (*вполне допустимым*)¹.

Замечание 3.2. Ситуация общего равновесия является вполне допустимой (а следовательно, и допустимой).

Замечание 3.3. Как и ситуации равновесия, допустимые ситуации являются устойчивыми (стабильными) в игре G , так как любое отклонение игрока от его первоначальной стратегии может быть «наказано» дополнительной коалицией (в терминологии Э. Мулена [14] здесь имеет место «стабильность на основе угроз»). При этом в случае ситуации равновесия такое «наказание» происходит автоматически (т.е. при бездействии дополнительной коалиции), в то время как в случае допустимой ситуации дополнительная коалиция имеет лишь «способ реагирования» на каждое возможное отклонение игрока от его первоначальной стратегии. Наконец, отметим, что в случае вполне допустимой ситуации выбор «наказания» со стороны дополнительной коалиции $N \setminus i$ не зависит от отклонения игрока i . Таким образом, в этом случае дополнительной коалиции достаточно знать лишь факт отклонения игрока от его первоначальной стратегии (т.е. «факт нарушения договора»).

Сформулируем некоторые достаточные условия существования допустимых ситуаций в игре G вида (5). Для фиксированных $i \in N$, $x_i \in X_i$ положим

$$\left(F(x_i, X_{N \setminus i}) \right)^\uparrow = \left\{ a \in A : (\exists x_{N \setminus i} \in X_{N \setminus i}) a \geq^{\omega_i} F(x_i, x_{N \setminus i}) \right\}.$$

¹Для игр с функциями выигрыша в нормальной форме условие допустимости ситуаций для отдельных игроков (под названием «слабая экстремальность») рассматривалось Э. Р. Смольяковым [28] и изучалось Э. Муленом [14] (в терминах «сценария предостережений»).

В алгебраических терминах множество $\left(F(x_i, X_{N \setminus i})\right)^\uparrow$ представляет собой дуальный идеал в упорядоченном множестве $\langle A, \omega_i \rangle$, порожденный x_i -строкой таблицы функции реализации F .

Теорема 3.1. Пусть G — игра с квазиупорядоченными исходами вида (5), в которой при любом $i \in N$ найдется такая стратегия $x_i \in X_i$, что всякая строго убывающая цепь дуальных идеалов

$$\left(F(x_i, X_{N \setminus i})\right)^\uparrow \supset \left(F(x_i^1, X_{N \setminus i})\right)^\uparrow \supset \left(F(x_i^2, X_{N \setminus i})\right)^\uparrow \supset \dots \quad (7)$$

обрывается на конечном номере. Тогда множество допустимых ситуаций в игре G непусто.

Доказательство теоремы 3.1 основано на том обстоятельстве, что условие (7) обеспечивает при каждом $i \in N$ существование для игрока i некоторой β -максимальной стратегии x_i^0 (см. п. 2.1). Далее, нетрудно проверить, что применение игроком i его β -максимальной стратегии обеспечивает (независимо от стратегий других игроков) получение исхода, допустимого для игрока i . Отсюда следует, что ситуация $x^0 = (x_i^0)_{i \in N}$ является допустимой в игре G .

Теорема 3.2. Пусть G — игра с отношениями предпочтения вида (5), в которой множества стратегий игроков являются конечными. Если для каждого $i \in N$ отношение предпочтения ω_i ациклично, то множество допустимых исходов в игре G непусто.

Следствие 3.1. Антагонистическая игра с отношениями предпочтения $G = \langle X, Y, A, F, \omega \rangle$, в которой множества стратегий игроков X, Y являются конечными и отношение предпочтения игрока 1 ациклично, имеет допустимый исход.

3.2. Кооперативные решения. Для изучения кооперативных аспектов в игре G вида (5) необходимо для каждой коалиции $S \subseteq N$ определить множество X_S ее стратегий и отношение предпочтения ω_S . Мы полагаем

$$X_S = \prod_{i \in S} X_i, \quad \omega_S = \bigcap_{i \in S} \omega_i. \quad (8)$$

Пусть S_1, S_2 — две коалиции, где $S_1 \cup S_2 = N$, $S_1 \cap S_2 = \emptyset$. Зафиксируем стратегии $x_{S_1} \in X_{S_1}$, $x_{S_2} \in X_{S_2}$. Тогда пара (x_{S_1}, x_{S_2}) однозначно определяет некоторый исход в игре G , обозначаемый $F(x_{S_1}, x_{S_2})$. Концепции оптимальных решений, рассмотренные в п. 3.1, естественным образом переносятся на коалиции. Например, концепция допустимости исхода для некоторой коалиции в игре G принимает следующий вид.

Определение 3.5. Стратегия $x_S \in X_S$ называется *возражением коалиции S на исход $a \in A$* , если для любой стратегии $x_{N \setminus S} \in X_{N \setminus S}$ дополнительной коалиции $N \setminus S$ выполняется неравенство

$$F(x_S, x_{N \setminus S}) >^{\omega_S} a.$$

Исход $a \in A$ называется *допустимым для коалиции S* , если эта коалиция не имеет на него возражений. Исход a называется *K -допустимым*, где K — некоторое фиксированное семейство коалиций, если этот исход является допустимым для всех коалиций $S \in K$. Ситуация $x^0 = (x_i^0)_{i \in N}$ называется *K -допустимой*, если исход $F(x^0)$ в этой ситуации является K -допустимым.

Замечание 3.4. Рассмотрим игру $\Gamma = \langle N, (X_i)_{i \in N}, (u_i)_{i \in N} \rangle$ с функциями выигрыша как игру с квазиупорядоченными исходами (см. замечание 3.1). В этом случае в соответствии с (8), для любой коалиции $S \subseteq N$ ее отношение предпочтения $\leq^S$ на $\mathbb{R}^n$ принимает вид:

$$(p_1, \dots, p_n) \leq^S (p'_1, \dots, p'_n) \Leftrightarrow (\forall i \in S) p_i \leq p'_i. \quad (9)$$

Используя (9), легко убедиться, что для игры Γ множество ситуаций, допустимых для семейства 2^N всех ее коалиций, совпадает с ее α -ядром, а множество вполне допустимых ситуаций — с ее β -ядром в смысле Э. Мулена (см. [14]).

Одно из направлений исследования кооперативных решений состоит в нахождении условий, при которых игра G вида (5) имеет непустое множество K -допустимых исходов для некоторых семейств коалиций K . Введем следующее определение.

Определение 3.6. Будем говорить, что семейство коалиций $K \subseteq 2^N$ образует *веерную структуру*, если для любых двух коалиций из K их пересечение либо пусто, либо одна из них содержится в другой.

Теорема 3.3 (см. [22]). Пусть $G = \langle N, (X_i)_{i \in I}, A, (\omega_i)_{i \in I}, F \rangle$ — игра с квазиупорядоченными исходами вида (5) и для каждого $i \in N$ квазиупорядоченное множество $\langle A, \omega_i \rangle$ удовлетворяет условию обрыва возрастающих цепей. Тогда в игре G для любой веерной структуры коалиций K существует K -допустимый исход.

Укажем некоторые конкретизации этой теоремы для игры G , удовлетворяющей условиям теоремы 3.3.

Следствие 3.2.

1. Пусть K — семейство попарно не пересекающихся коалиций. Тогда в игре G существует K -допустимый исход.
2. Пусть K — цепь коалиций. Тогда в игре G существует K -допустимый исход.

Учитывая, что в игре G ситуациями, допустимыми для коалиции N всех игроков, являются в точности ситуации, оптимальные по Парето, получаем следующее утверждение.

Следствие 3.3. В игре G , удовлетворяющей условиям теоремы 3.3, существует Парето-оптимальная ситуация, допустимая для каждого игрока $i \in N$.

Как известно, для класса игр нескольких лиц с функциями выигрыша игроков имеется так называемое «противоречие между выгодностью и устойчивостью», состоящее в том, что ситуации, оптимальные по Парето, могут не быть равновесными в смысле Нэша. Утверждение следствия 3.3 показывает, что в классе игр с квазиупорядоченными исходами указанное противоречие может быть устранено с помощью некоторого ослабления требования к устойчивости: заменой свойства равновесности ситуации ее допустимостью для всех игроков.

При некотором ослаблении условия допустимости для игры G с квазиупорядоченными исходами может быть доказано существование исхода, оптимального для семейства 2^N всех коалиций игры. Э. Й. Вилкасом развит общий подход к понятию оптимальности (см. [4, 5]), который для игры G вида (5) принимает следующий вид. Возражение x_S коалиции $S \subseteq N$ на исход $a \in A$ называется *эффективным*, если не существует такой коалиции $T \subseteq N$, где $T \cap S \neq \emptyset$, которая имеет возражение на некоторый исход множества

$$\{F(x_S, x_{N \setminus S}) : x_{N \setminus S} \in X_{N \setminus S}\}.$$

Исход игры называется *V-оптимальным*, если ни одна коалиция не имеет на него эффективных возражений.

Теорема 3.4 (см. [5]). Всякая игра G с квазиупорядоченными исходами вида (5) имеет *V-оптимальный исход*.

4. СМЕШАННЫЕ РАСШИРЕНИЯ ИГР С УПОРЯДОЧЕННЫМИ ИСХОДАМИ

4.1. Каноническое продолжение отношения порядка.

Определение 4.1. Под *вероятностной мерой на упорядоченном множестве* $\langle A, \omega \rangle$ будем понимать неотрицательную счетно-аддитивную нормированную функцию, заданную на σ -алгебре $\Sigma_\omega(A)$, порожденной семейством $M(\omega)$ мажорантно стабильных в $\langle A, \omega \rangle$ подмножеств. Множество всех вероятностных мер на $\langle A, \omega \rangle$ обозначается через $P_\omega(A)$.

Замечание 4.1. Пусть $C_0(\omega)$ — множество всех ограниченных изотонных отображений упорядоченного множества $\langle A, \omega \rangle$ в действительную прямую $\mathbb{R}$. Для любой функции $\varphi \in C_0(\omega)$ и вероятностной меры $\mu \in P_\omega(A)$ существует интеграл $\int_A \varphi d\mu$ на множестве A . Далее полагаем

$$\bar{\varphi}(\mu) \stackrel{\text{def}}{=} \int_A \varphi d\mu.$$

Каноническое продолжение $\tilde{\omega}$ порядка ω на множество вероятностных мер $P_\omega(A)$ определяется формулой

$$\mu \leq^{\tilde{\omega}} \nu \Leftrightarrow (\forall \varphi \in C_0(\omega)) \bar{\varphi}(\mu) \leq \bar{\varphi}(\nu). \quad (10)$$

Теорема 4.1 (см. [25]). Продолжения порядка ω на множество вероятностных мер $P_\omega(A)$ с помощью семейства $C_0(\omega)$ всех ограниченных изотонных отображений из $\langle A, \omega \rangle$ в $\mathbb{R}$ и с помощью семейства $C_2(\omega)$ всех изотонных отображений из $\langle A, \omega \rangle$ в двухэлементное множество $\{0, 1\}$ совпадают между собой.

Следствие 4.1. Соотношение $\mu \leq^{\tilde{\omega}} \nu$ имеет место тогда и только тогда, когда неравенство $\mu(B) \leq \nu(B)$ выполнено для каждого мажорантно стабильного подмножества $B \subseteq A$ (т.е. для каждого дуального идеала в упорядоченном множестве $\langle A, \omega \rangle$).

Замечание 4.2. В случае, когда $\langle A, \omega \rangle$ — конечное линейно упорядоченное множество, всякий дуальный идеал является главным, т.е. порождается одним элементом. В этом случае согласно следствию 4.1 соотношение (10) принимает вид

$$\mu \leq^{\tilde{\omega}} \nu \Leftrightarrow (\forall a \in A) \mu(\{a' \in A : a' \geq^\omega a\}) \leq \nu(\{a' \in A : a' \geq^\omega a\}), \quad (11)$$

откуда следует, что каноническое продолжение в этом случае совпадает с продолжением, введенным Е. Б. Яновской [29] (заметим также, что условие (11) соответствует определению *стохастического доминирования*, см. [30]).

Рассмотрим игру G с упорядоченными исходами вида (5). Чтобы построить ее смешанное расширение, необходимо для каждого $i \in N$ зафиксировать некоторую σ -алгебру Σ_i измеримых подмножеств множества X_i (в случае, когда X_i конечно, Σ_i совпадает с семейством всех подмножеств X_i). Далее через Σ обозначим σ -алгебру на множестве X ситуаций игры G , которая порождается произведением σ -алгебр Σ_i , $i \in N$, и пусть Σ_A — σ -алгебра на множестве A исходов игры G , состоящая из всех подмножеств множества A , прообразы которых при отображении F принадлежат Σ . Мы предполагаем, что вероятностные меры на множествах стратегий игроков заданы на соответствующих σ -алгебрах.

Определение 4.2. Смешанным расширением игры G с упорядоченными исходами называется игра с квазиупорядоченными исходами

$$\tilde{G} = \langle N, (\tilde{X}_i)_{i \in N}, \tilde{A}, (\tilde{\omega}_i)_{i \in N}, \tilde{F} \rangle,$$

где $\tilde{X}_i$ — множество вероятностных мер на X_i ; $\tilde{A}$ — множество вероятностных мер на A ; $\tilde{\omega}_i$ — каноническое продолжение порядка ω_i на множество вероятностных мер; функция реализации $\tilde{F}$ есть отображение, которое каждой ситуации в смешанных стратегиях

$$\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n) \in \prod_{i \in N} \tilde{X}_i$$

ставит в соответствие вероятностную меру F_μ на A , представляющую собой образ относительно отображения F произведения вероятностных мер $\mu_1 \otimes \dots \otimes \mu_n$.

Замечание 4.3. 1. Значение меры F_μ для произвольного подмножества $B \in \Sigma_A$ задается равенством

$$F_\mu(B) = \mu_1 \otimes \dots \otimes \mu_n(F^{-1}(B)).$$

2. В случае конечной игры G для произвольного $a \in A$ имеем

$$F_\mu(a) = \sum_{\substack{F(x)=a \\ x \in X}} \prod_{i=1}^n \mu_i(x_i),$$

где $x = (x_1, \dots, x_n)$.

4.2. Ситуации общего равновесия в смешанных стратегиях. Основным результатом данного раздела представляет теорема 4.2, устанавливающая важную связь между ситуациями равновесия (в смешанных стратегиях) игры с упорядоченными исходами и ситуациями равновесия некоторого семейства игр с функциями выигрыша. Предварительно отметим следующее обстоятельство. Пусть задана некоторая игра G с упорядоченными исходами вида (5) и набор отображений $\varphi_i : A \rightarrow \mathbb{R}$, $i \in N$; тогда, полагая $\varphi = (\varphi_i)_{i \in N}$, мы можем построить следующую игру G_φ игроков N с функциями выигрыша:

$$G_\varphi = \langle N, (X_i)_{i \in N}, (\varphi_i \circ F)_{i \in N} \rangle.$$

Теорема 4.2. Пусть G — конечная игра с упорядоченными исходами вида (5). Тогда множество $\text{Eq}(\tilde{G})$ ситуаций общего равновесия в ее смешанном расширении совпадает с объединением множеств $\text{NEq}(\tilde{G}_\varphi)$ ситуаций равновесия по Нэшу в смешанных стратегиях игр G_φ , где $\varphi = (\varphi_i)_{i \in N}$, причем каждое φ_i пробегает множество $C^0(\omega_i)$ строго изотонных отображений упорядоченного множества $\langle A, \omega_i \rangle$ в действительные числа¹:

$$\text{Eq}(\tilde{G}) = \bigcup_{\varphi \in \prod_{i \in N} C^0(\omega_i)} \text{NEq}(\tilde{G}_\varphi). \quad (12)$$

Замечание 4.4. В равенстве (12) $\text{Eq}(\tilde{G})$ есть множество ситуаций общего равновесия в смешанном расширении игры G (в смысле определения 4.2), а $\text{NEq}(\tilde{G}_\varphi)$ — множество ситуаций равновесия по Нэшу в смешанном расширении (в классическом смысле) игры $G_\varphi = \langle N, (X_i)_{i \in N}, (\varphi_i \circ F)_{i \in N} \rangle$ с функциями выигрыша. Используя теорему Нэша, получаем следующее утверждение.

Следствие 4.2. Всякая конечная игра с упорядоченными исходами имеет ситуацию общего равновесия в смешанных стратегиях.

4.3. Ситуации равновесия по Нэшу в смешанных стратегиях. В общем случае конечная игра с упорядоченными исходами может не иметь ситуаций равновесия по Нэшу в ее смешанном расширении. Ниже указаны условия, при которых произвольная ситуация в смешанных стратегиях является ситуацией равновесия по Нэшу.

Теорема 4.3 (см. [26]). Пусть G — конечная игра с упорядоченными исходами и $\tilde{G}$ — ее смешанное расширение (см. определение 4.2). Произвольная ситуация

$$\mu^0 = (\mu_i^0)_{i \in N} \in \prod_{i \in N} \tilde{X}_i$$

в смешанных стратегиях является ситуацией равновесия по Нэшу в игре $\tilde{G}$ тогда и только тогда, когда для каждого $i \in N$ выполнены следующие условия:

1. $F_{\mu^0 \| \delta_{x'_i}} = F_{\mu^0}$ для всех $x'_i \in \text{Sp } \mu_i^0$;
2. $F_{\mu^0 \| \delta_{x''_i}} \leq^{\omega_i} F_{\mu^0}$ для всех $x''_i \notin \text{Sp } \mu_i^0$.

Мы обозначаем через $\text{Sp } \mu_i$ спектр меры μ_i и через δ_{x_i} — вырожденную вероятностную меру, сосредоточенную в точке x_i .

Заметим, что в теореме 4.3 условие 1 использует только функцию реализации игры $\tilde{G}$ и не зависит от отношений предпочтения игроков. Это условие накладывает сильное ограничение на спектры мер, образующих ситуацию равновесия по Нэшу в смешанном расширении игры G . Чтобы получить точную формулировку этого условия, введем следующее определение.

¹Равенство (12) впервые было доказано в работе автора [19] (см. также [23]). Случай, когда G — конечная игра с линейно упорядоченными исходами, установлен ранее Е. Б. Яновской (см. [29, 30]). Другое доказательство теоремы 4.2, которое базируется на понятии ковариантно полного семейства контравариантных гомоморфизмов (см. [40]) было предложено в [38]. Это доказательство использует данное Л. С. Шепли [41] описание множества седловых точек в играх с векторными выигрышами. Необходимо также отметить, что утверждение теоремы 4.2 может быть получено с помощью «теоремы А» Р. Аумана (см. [32, 33]).

Определение 4.3. Зафиксируем в игре G вида (5) для каждого $i \in N$ произвольное подмножество $X_i^0 \subseteq X_i$. Семейство подмножеств $(X_i^0)_{i \in N}$ называется *изотропным*, если для любых $j \in N$, $x_j^0 \in X_j^0$ подмножества $\left\{ F(x || x_j^0) : x \in \prod_{i \in N} X_i^0 \right\}$ совпадают между собой.

Геометрическая интерпретация условия изотропности семейства $(X_i^0)_{i \in N}$ состоит в том, что в параллелепипеде $\prod_{i \in N} X_i^0$ любая гиперплоскость, полученная фиксированием одной координаты, заполнена одним и тем же множеством элементов. На основании теоремы 4.3 имеем два следствия.

Следствие 4.3. Пусть $\mu^0 = (\mu_i^0)_{i \in N}$ — ситуация равновесия по Нэшу в смешанном расширении игры G с упорядоченными исходами. Тогда семейство спектров $(\text{Sp } \mu_i^0)_{i \in N}$ является изотропным семейством подмножеств.

Следствие 4.4. Предположим, в игре G с упорядоченными исходами функция реализации F является взаимно однозначной. Тогда в смешанном расширении игры G могут быть только чистые ситуации равновесия по Нэшу.

Описание ситуаций равновесия по Нэшу в смешанном расширении конечной игры двух лиц с упорядоченными исходами содержится в [39].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Берж К. Общая теория игр нескольких лиц. — М.: Физматлит, 1961.
2. Блекуэлл Д. Аналог теоремы о минимаксе для векторных выигрышей // В сб.: Матричные игры. — М.: Физматлит, 1961. — С. 156–166.
3. Боненбласт Х., Карлин С. Об одной теореме Вилля // В сб.: Бесконечные антагонистические игры. — М.: Физматлит, 1963. — С. 489–496.
4. Вилкас Э. Й. Понятия оптимальности в теории игр // В сб.: Современные направления теории игр. — Вильнюс, 1976. — С. 25–43.
5. Вилкас Э. Й. Оптимальность в играх и решениях. — М.: Наука, 1990.
6. Воробьев Н. Н. Современное состояние теории игр // Усп. мат. наук. — 1970. — 25, № 2 (152). — С. 81–140.
7. Воробьев Н. Н. Теория игр для экономистов-кибернетиков. — М.: Наука, 1985.
8. Кирута А. Я., Рубинов А. М., Яновская Е. Б. Оптимальный выбор распределений в сложных социально-экономических задачах. — Л.: Наука, 1980.
9. Ларичев О. И. Наука и искусство принятия решений. — М.: Наука, 1979.
10. Льюс Р., Райфа Х. Игры и решения. — М.: ИЛ, 1961.
11. Морозов В. В. Смешанные стратегии в игре с векторными выигрышами // Вест. МГУ. Сер. 15. Вычисл. мат. киберн. — 1978. — № 4. — С. 44–49.
12. Нейман Дж., Моргенштерн О. Теория игр и экономическое поведение. — М.: Наука, 1970.
13. Миркин Б. Г. Проблема группового выбора. — М.: Наука, 1974.
14. Мулен Э. Теория игр. — М.: Мир, 1985.
15. Ногин В. Д. Принятие решений в многокритериальной среде. — М.: Физматлит, 2002.
16. Подиновский В. В. Принцип гарантированного результата для частичных отношений предпочтения // Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 1979. — 19, № 6. — С. 1436–1450.
17. Подиновский В. В. Общие антагонистические игры // Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 1981. — 21, № 5. — С. 1140–1153.
18. Подиновский В. В., Ногин В. Д. Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. — М.: Наука, 1982.
19. Розен В. В. Смешанные расширения игр с упорядоченными исходами // Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 1976. — 16, № 6. — С. 1436–1450.
20. Розен В. В. Цель—оптимальность—решение. — М.: Радио и связь, 1982.
21. Розен В. В. Значение для игр с упорядоченными исходами // В сб.: Теория полугрупп и ее приложения. — Саратов, 1987. — С. 59–70.
22. Розен В. В. Кооперативные игры с квазиупорядоченными исходами // Кибернетика. — 1988. — 6. — С. 77–89.
23. Розен В. В. Ситуации равновесия в играх с упорядоченными исходами // Кибернетика. — 1989. — 5. — С. 98–104.

24. Розен В. В. Порядковые инварианты и проблема «окружения» для игр с упорядоченными исходами// Киберн. сист. анал. — 2001. — 2. — С. 145–159.
25. Розен В. В. Продолжение упорядоченности на множество вероятностных мер// Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Мат. Мех. Информ. — 2005. — 5, № 1. — С. 61–70.
26. Розен В. В. Равновесие в играх с упорядоченными исходами// Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Мат. Мех. Информ. — 2009. — 9, № 3. — С. 61–66.
27. Розен В. Принятие решений по качественным критериям. Математические модели. — Palmarium Academic Publishing, 2013.
28. Смольяков Э. Р. Равновесные модели при несовпадающих интересах участников. — М.: Наука, 1986.
29. Яновская Е. Б. Ситуации равновесия в играх с неархимедовыми полезностями// В сб.: Математические методы в социальных науках. — Вильнюс, 1974. — Вып. 4. — С. 98–118.
30. Яновская Е. Б. Антагонистические игры// В сб.: Проблемы кибернетики. — М., 1978. — Вып. 34. — С. 221–246.
31. Aumann R. J., Peleg B. Von Neumann–Morgenstern solutions to cooperative games without side payments// Bull. Am. Math. Soc. — 1960. — 66. — С. 173–179.
32. Aumann R. J. Utility theory without completeness axiom// Econometrica. — 1962. — 30, № 3. — С. 445–462.
33. Aumann R. J. Utility theory without completeness axiom: a correction// Econometrica. — 1964. — 32, №№ 1-2. — С. 210–212.
34. Farquharson R. Sur une generalization de la notion d'équilibre// C. R. Acad. Sci. Paris. — 1955. — 240, № 1. — С. 46–48.
35. Jentsch G. Some thoughts on the theory of cooperative games// Ann. Math. Stud. — 1964. — 52. — С. 407–442.
36. Peleg B. The independence of game theory of utility theory// Bull. Am. Math. Soc. — 196. — 72, № 6. — С. 995–999.
37. Rozen V., Zhitomirski G. A category approach to derived preference relations in some decision making problems// Math. Soc. Sci. — 2006. — 51. — С. 257–273.
38. Rozen V. V. Equilibrium points in games with ordered outcomes// Proc. 3 Int. Conf. Game Theory and Management (L. A. Petrosyan, N. A. Zenkevich, eds.). — Saint Petersburg, 2010. — С. 368–386.
39. Rozen V. V. Nash equilibrium in games with ordered outcomes// Proc. 4 Int. Conf. Game Theory and Management (L. A. Petrosyan, N. A. Zenkevich, eds.). — Saint Petersburg, 2011. — С. 407–420.
40. Savina T. F. Homomorphisms and congruence relations for games with preference relations// Proc. 3 Int. Conf. Game Theory and Management (L. A. Petrosyan, N. A. Zenkevich, eds.). — Saint Petersburg, 2010. — С. 387–398.
41. Shapley L. S. Equilibrium points in games with vector payoffs// Naval Research. Logist. Quart. — Washington, 1959. — 6, № 1. — С. 57–61.
42. Shapley L. S., Shubik M. Solutions of n -person games with ordinal utilities// Econometrica. — 1953. — 21, № 2. — С. 348–349.

В. В. Розен

Саратовский национальный исследовательский государственный университет
им. Н. Г. Чернышевского
E-mail: rozenvv@mail.ru



СУПЕРАЛГЕБРЫ ЛИ И СИСТЕМЫ КАЛОДЖЕРО—МОЗЕРА—САЗЕРЛЕНДА

© 2017 г. А. Н. СЕРГЕЕВ

Аннотация. Работа содержит обзор недавних результатов, полученных на стыке теории квантовых деформированных систем Калоджеро—Мозера—Сазерленда и теории супералгебр Ли. Изложение основано на деформации систем корней простых супералгебр Ли. Доказывается существование пар Лакса для классических серий. Исследуется связи с бесконечномерными версиями квантовых систем Калоджеро—Мозера—Сазерленда и теорией представлений супералгебр Ли.

Ключевые слова: квантовая система Калоджеро—Мозера—Сазерленда, пара Лакса, супералгебра Ли, симметрическая функция, характер Эйлера, кольцо Гротендика.

AMS Subject Classification: 17B10, 17B22, 81U15

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	72
1. Обобщенные системы корней и их допустимые деформации	73
2. Интегрируемость деформированных квантовых систем КМС	80
3. Бесконечномерные квантовые системы КМС	86
4. Алгебры интегралов и спектральное разложение	93
5. Теория представлений и квантовые системы КМС	97
6. Бесконечномерные версии собственных функций	99
Список литературы	101

ВВЕДЕНИЕ

Цель настоящего обзора — изложить основные результаты, полученные в последние 15 лет на стыке теории квантовых систем Калоджеро—Мозера—Сазерленда (КМС) и теории супералгебр Ли. Впервые наличие связей между обеими теориями было замечено в [12, 13], где был построен супераналог оператора Калоджеро—Мозера—Сазерленда по системе корней общей линейной супералгебры Ли $\mathfrak{gl}(n, m)$. В [12] было отмечено, что для частного случая $m = 1$ построенный супераналог с точностью до замены переменных и параметра k совпадает с оператором, построенным А. Веселовым, О. Чалых и М. Фейгиным в [1] и что при $k = -1, -1/2$ супераналог оператора КМС являлся радиальной частью оператора Лапласа для симметрических супералгебр Ли $(\mathfrak{gl} \oplus \mathfrak{gl}, \mathfrak{gl})$ и $(\mathfrak{gl}, \mathfrak{osp})$. Эти результаты показывали, что между деформированными операторами КМС и супералгебрами Ли должны существовать связи аналогичные тем, что были обнаружены М. А. Ольшевским и А. М. Переломовым в классической работе [2]. Следующим важным шагом в исследовании деформированных квантовых систем КМС и их связей с супералгебрами Ли стала работа [14], заложившая основы для систематического построения теории деформированных

Работа выполнена при финансировании государственной программой поддержки ведущих университетов Российской Федерации «5-100».

квантовых систем КМС. А именно, было показано, что по каждой системе корней простой классической супералгебры Ли можно построить деформированный оператор Калоджеро—Мозера—Сазерленда. Были введены основные объекты для дальнейшего исследования: допустимые деформации обобщенных систем корней и соответствующий деформированный оператор второго порядка, обобщенные алгебры инвариантов и их разностные аналоги. Случай обобщенной системы корней $A(n, m)$ был рассмотрен более подробно в [15] в дифференциальном случае, а в [17] — соответствующий разностный случай. Как побочный результат этой деятельности появилась работа [8], описывающая ситуацию с полиномами Джека в случае специального параметра.

Эти работы показали, что между супералгебрами Ли и деформированными квантовыми интегрируемыми системами существуют глубокие связи, которые могут быть использованы для развития обоих направлений. Основная трудность в исследовании деформированных операторов КМС — это отсутствие операторов Данкла, которые играют ключевую роль в классическом случае. Поэтому приходится искать обобщение методов теории интегрируемых систем, не использующих операторы Данкла: квантовые матрицы Мозера и бесконечномерные версии классических систем. В частности, рассмотрение бесконечномерных аналогов классических интегрируемых систем позволило объяснить интегрируемость деформированного разностного оператора Макдональда—Руженаарса и дифференциального деформированного оператора типа BC , а также получить явные формулы для их собственных функций (см. [16, 17]). Эти собственные функции зависят от нескольких параметров. Естественный вопрос: как могут быть интерпретированы специализации собственных функций с точки зрения теории представлений? В случае классических полиномов Джека известно, что они специализируются либо в характеры неприводимых конечномерных представлений алгебр Ли, либо в сферические функции связанные с конечномерными представлениями, а соответствующие операторы второго порядка интерпретируются как радиальные части операторов Лапласа. В случае деформированных операторов Калоджеро—Мозера—Сазерленда окончательная картина не ясна до сих пор. Это связано с тем, что теория представлений простых конечномерных супералгебр Ли не является полупростой. Частичные результаты в этом направлении получены в [19, 20, 24]. В [19] доказано, что в случае деформированного оператора типа BC существует естественная специализация собственных функций в характеры Эйлера, а в [20] получено описание колец представлений классических супералгебр Ли как инвариантов некоторого группоида, естественно возникающего с точки зрения деформированных квантовых интегрируемых систем. В общем случае спектральное разложение алгебры интегралов деформированной задачи КМС не является полупростым. Интерпретация этого факта в терминах теории представлений дана в [24], где, в частности, показано, что для $k = -1/2$ обобщенные собственные подпространства могут быть описаны в терминах сферических функций, связанных с проективными накрытиями неприводимых модулей. Связь с теорией супералгебр Ли позволила также построить естественное обобщение классических симметрических функций Джека и описать действие алгебры интегралов в обобщенных собственных подпространствах при определенных значениях параметров (см. [21, 23]). В [22] на основе бесконечномерных аналогов операторов Данкла были найдены пары Лакса для деформированных операторов КМС, соответствующих классическим сериям обобщенных систем корней. Это позволило получить более простое доказательство интегрируемости по сравнению с предыдущими методами.

1. ОБОБЩЕННЫЕ СИСТЕМЫ КОРНЕЙ И ИХ ДОПУСТИМЫЕ ДЕФОРМАЦИИ

1.1. Обобщенные системы корней. Мы начинаем с определения обобщенной системы корней согласно В. Сергановой (см. [11]). В этой работе существует три слегка различных определения обобщенной системы корней. Мы выбираем одно из них, которое наиболее подходит для наших целей. Пусть V — конечномерное комплексное векторное пространство с невырожденной симметрической билинейной формой $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Определение 1.1. Конечное множество $R \subset V \setminus \{0\}$ называется *обобщенной системой корней*, если выполнены следующие условия:

- 1) R линейно порождает V и $R = -R$;

2) если $\alpha, \beta \in R$ и $\langle \alpha, \alpha \rangle \neq 0$, то

$$\frac{2\langle \alpha, \beta \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle} \in \mathbb{Z}, \quad s_\alpha(\beta) = \beta - \frac{2\langle \alpha, \beta \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle} \alpha \in R;$$

3) если $\alpha \in R$ и $\langle \alpha, \alpha \rangle = 0$, то для любого $\beta \in R$, удовлетворяющего условию $\langle \alpha, \beta \rangle \neq 0$, по крайней мере один из корней $\beta + \alpha$ или $\beta - \alpha$ принадлежит R .

Введем следующие обозначения:

$$R_{\text{re}} = \left\{ \alpha \in R : \langle \alpha, \alpha \rangle \neq 0 \right\}, \quad R_{\text{iso}} = \left\{ \alpha \in R : \langle \alpha, \alpha \rangle = 0 \right\}.$$

Обобщенная система корней R называется *приводимой*, если она может быть представлена как прямая сумма двух непустых обобщенных систем корней R_1, R_2 , т.е. $V = V_1 \oplus V_2$, $R_1 \subset V_1$, $R_2 \subset V_2$ и $R = R_1 \cup R_2$. В противном случае она называется *неприводимой*.

Любая обобщенная система корней имеет частичную симметрию, описываемую конечной группой W_0 , порожденной отражениями относительно неизотропных корней. Основной результат работы [11] заключается в классификации неприводимых обобщенных систем корней. Мы будем называть неизотропные корни также вещественными корнями. Так же как и в случае обычной системы корней, можно ввести понятие простого корня и соответственно понятие положительного и отрицательного корня. Множество положительных корней, как обычно, обозначается R^+ .

Ниже приводится полный список всех неприводимых обобщенных систем корней (см. [11]).

Классические серии.

1. Серия $A(n-1, m-1)$, $n \neq m$. Пусть $V_{n,m} = V_1 \oplus V_2$ — векторное пространство с таким базисом $\{e_1, \dots, e_{n+m}\}$, что $\{e_1, \dots, e_n\}$ — базис V_1 и $\{e_{n+1}, \dots, e_{n+m}\}$ — базис V_2 . Пусть e^i , $i = 1, \dots, n+m$, обозначает соответствующий базис в пространстве $V_{n,m}^*$.

Рассмотрим следующую билинейную симметрическую форму на $V_{n,m}$:

$$B(u, v) = \sum_{i=1}^n u^i v^i - \sum_{j=1}^m u^j v^j, \quad (1)$$

где u^i, v^i являются координатами векторов u, v в базисе e_i .

Разделим множество индексов $I = \{1, \dots, n+m\}$ на две группы, $I = I_1 \cup I_2$, где $I_1 = \{1, \dots, n\}$, $I_2 = \{n+1, \dots, n+m\}$, и перепишем последнюю формулу в виде

$$B = \sum_{i \in I_1} e^i \otimes e^i - \sum_{j \in I_2} e^j \otimes e^j, \quad (2)$$

где B рассматривается как элемент $V^* \otimes V^*$.

Обобщенная система корней типа $A(n-1, m-1)$, $n \neq m$, определяется как множество

$$R = \left\{ e_i - e_j, \quad i \neq j, \quad i, j \in I \right\},$$

и соответствующее пространство V является гиперплоскостью в $V_{n,m}$, порожденной этим множеством, с индуцированной билинейной формой. Легко видеть, что в этом случае

$$R_{\text{re}} = A_{n-1} \oplus A_{m-1}, \quad R_{\text{im}} = \left\{ \pm (e_i - e_j), \quad i \in I_1, \quad j \in I_2 \right\}.$$

Соответствующая супералгебра Ли — это $sl(n, m)$.

2. Серия $A(n-1, n-1)$. В случае $m = n$ ограничение формы B на соответствующую гиперплоскость V вырождено. В самом деле, вектор

$$v = \sum_{i \in I_1} e_i - \sum_{i \in I_2} e_i$$

принадлежит V и ортогонален всем корням (и, следовательно, всему V). Для того, чтобы получить соответствующее обобщение системы корней в этом случае, рассмотрим фактор $V' = V / \langle v \rangle$

и соответствующее множество R' , которое является образом R относительно проекции. Это система корней типа $A(n-1, n-1)$. Соответствующая супералгебра Ли — это $psl(n|n)$.

3. Серия $B(n, m)$. В этом случае $V = V_{n, m}$ с той же самой билинейной формой B и

$$R = BBB\{\pm e_i \pm e_j, i \neq j, i, j \in I, \pm e_i, i \in I, \pm 2e_i, i \in I_2\}.$$

Вещественные и изотропные корни — это

$$R_{\text{re}} = B_n \oplus BC_m, \quad R_{\text{im}} = \{\pm e_i \pm e_j, i \in I_1, j \in I_2\}.$$

Это система корней супералгебры Ли $osp(2n+1|2m)$.

4. Серия $D(n, m)$, $n \geq 2$. Пространство $V = V_{n, m}$ такое же, как и в предыдущем случае, но

$$R = \{\pm e_i \pm e_j, i \neq j, i, j \in I, \pm 2e_i, i \in I_2\}.$$

Имеем

$$R_{\text{re}} = D_n \oplus C_m, \quad R_{\text{im}} = \{\pm e_i \pm e_j, i \in I_1, j \in I_2\}.$$

Это система корней супералгебры Ли $osp(2n|2m)$.

5. Серия $C(0, m)$. Здесь $V = V_{1, m}$ и

$$R = \{\pm e_i \pm e_j, i \neq j, i, j \in I, \pm 2e_i, i \in I_2\}.$$

В этом случае

$$R_{\text{re}} = C_m, \quad R_{\text{im}} = \{\pm e_1 \pm e_j, j \in I_2\}.$$

Это система корней супералгебры Ли $osp(2|2m)$.

6. Серия $C(n, m)$. Здесь $V = V_{n, m}$ и

$$R = \{\pm e_i \pm e_j, i \neq j, i, j \in I, \pm 2e_i, i \in I\},$$

так что

$$R_{\text{re}} = C_n \oplus C_m, \quad R_{\text{im}} = \{\pm e_i \pm e_j, i \in I_1, j \in I_2\}.$$

В этом и следующем случаях не существует соответствующих супералгебр Ли, но существуют симметрические суперпространства с такими системами корней.

7. Серия $BC(n, m)$. Здесь $V = V_{n, m}$ и

$$R = \{\pm e_i \pm e_j, i \neq j, i, j \in I, \pm e_i, \pm 2e_i, i \in I\}.$$

В этом случае

$$R_{\text{re}} = BC_n \oplus BC_m, \quad R_{\text{im}} = \{\pm e_i \pm e_j, i \in I_1, j \in I_2\}.$$

Исключительные случаи

8. Случай $AB(1, 3)$ (другое обозначение $F(4)$). Здесь $V = V_1 \oplus V_2$, где V_1 — трехмерное пространство с базисом $\{e_1, e_2, e_3\}$, а V_2 — одномерное пространство, порожденное e_4 . Билинейная форма B имеет вид

$$B(u, v) = u^1 v^1 + u^2 v^2 + u^3 v^3 - 3u^4 v^4.$$

Система корней

$$R = \left\{ \pm e_i \pm e_j, i \neq j, \pm e_i, i, j = 1, 2, 3, \frac{1}{2}(\pm e_1 \pm e_2 \pm e_3 \pm e_4) \right\};$$

здесь

$$R_{\text{re}} = B_3 \oplus A_1, \quad R_{\text{im}} = \left\{ \frac{1}{2}(\pm e_1 \pm e_2 \pm e_3 \pm e_4) \right\}.$$

9. Случай $G(1, 2)$ (другое обозначение $G(3)$). Здесь $V = V_1 \oplus V_2$, где V_1 — двумерное пространство, порожденное векторами e_1, e_2, e_3 с условием $e_1 + e_2 + e_3 = 0$, а V_2 — одномерное пространство, порожденное e_4 . Форма B определяется следующими условиями:

$$\begin{cases} B(e_i, e_j) = -1, & \text{если } i \neq j, \\ B(e_i, e_i) = 2, \\ B(e_i, e_4) = 0, \\ B(e_4, e_4) = -2, \end{cases}$$

где $i, j = 1, 2, 3$. Система корней имеет вид

$$R = \left\{ \pm e_i, (e_i - e_j), \pm e_4, \pm 2e_4, \pm e_i \pm e_4, i \neq j, i, j \leq 3 \right\},$$

$$R_{\text{re}} = G_2 \oplus BC_1, \quad R_{\text{im}} = \left\{ \pm e_i \pm e_4, i = 1, 2, 3 \right\}.$$

10. Случай $D(2, 1, \lambda)$. Здесь $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ являются параметрами, удовлетворяющими соотношениям $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$. Пространство V — это прямая сумма $V_1 \oplus V_2 \oplus V_3$ трех одномерных подпространств, порожденных e_1, e_2, e_3 . Форма B имеет вид

$$B(u, v) = \lambda_1 u^1 v^1 + \lambda_2 u^2 v^2 + \lambda_3 u^3 v^3.$$

Система корней

$$R = \left\{ \pm 2e_1, \pm 2e_2, \pm 2e_3, \pm e_1 \pm e_2 \pm e_3 \right\},$$

$$R_{\text{re}} = A_1 \oplus A_1 \oplus A_1, \quad R_{\text{im}} = \left\{ \pm e_1 \pm e_2 \pm e_3 \right\}.$$

1.2. Допустимые деформации. Для построения деформированных операторов КМС нам понадобится понятие допустимой деформации, введенное в [14]. Рассмотрим всевозможные наборы $\mathcal{R} = (R, m, B)$, где R — обобщенная система корней, m — комплекснозначная функция на R , а B — симметрическая билинейная форма на пространстве V . В частности, исходную систему корней можно рассматривать как тройку такого вида, где m тождественно равна 1, а форма B совпадает с формой, входящей в определение R . Для каждого набора $\mathcal{R}$ рассмотрим две алгебры, связанные с ним: $\mathcal{D}_{\mathcal{R}}^{\text{rat}}$ и $\mathcal{D}_{\mathcal{R}}^{\text{tr}}$, рациональную и тригонометрическую. Пусть $\mathcal{R}$ — некоторый набор. Мы можем рассматривать элемент $\alpha \in R$ как функцию на V , а именно, $\alpha(v) = B(\alpha, v)$, и также будем рассматривать дифференцирования $\partial_u(v) = B(u, v)$.

Определение 1.2. Пусть $\mathbb{C}(V)$ — алгебра рациональных функций на пространстве V , а $\text{End}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}(V))$ — алгебра ее линейных преобразований как векторного пространства. Обозначим через $\mathcal{D}_{\mathcal{R}}^{\text{rat}}$ подалгебру в этой алгебре, порожденную операторами умножения на функции $1/\alpha$, $\alpha \in R$, и дифференцированиями ∂_v , $v \in V$. Обозначим также через $D(V)$ алгебру, порожденную операторами дифференцирования ∂_v , $v \in V$.

Определение 1.3. Гомоморфизм $\varphi : \mathcal{D}_{R,B}^{\text{rat}} \rightarrow D(V)$ обладающим свойством $\varphi(1/\alpha) = 0$, $\alpha \in R$, будем называть *гомоморфизмом Хариш-Чандры*.

Определение 1.4. Пусть $\mathbb{M}(V)$ — алгебра мероморфных функций на пространстве V , а $\text{End}_{\mathbb{C}}(\mathbb{M}(V))$ — алгебра ее линейных преобразований как векторного пространства. Обозначим через $\mathcal{D}_{R,B}^{\text{tr}}$ подалгебру в этой алгебре, порожденную операторами умножения на функции $e^{-\alpha}$, $1/(e^{-\alpha} - 1)$, $\alpha \in R^+$, и дифференцированиями ∂_v , $v \in V$.

Определение 1.5. Гомоморфизм $\varphi : \mathcal{D}_{R,B}^{\text{tr}} \rightarrow D(V)$, обладающий свойством $\varphi(e^{-\alpha}) = 0$, $\alpha \in R^+$, будем называть *гомоморфизмом Хариш-Чандры*.

Мы можем отождествить алгебру $D(V)$ с алгеброй полиномиальных функций на V , ставя в соответствие элементу ∂_v элемент из V^* по правилу $\partial_v(u) = (v, u)$.

Введем также следующие алгебры:

$$\Lambda_{\mathcal{R}}^{\text{rat}} = \left\{ p \in S(V) \mid p(wu) = p(u), w \in W_0, \partial_{\alpha}(p) \in (\alpha), \alpha \in R_{\text{iso}} \right\}, \quad (3)$$

$$\Lambda_{\mathcal{R}}^{\text{tr}} = \left\{ p \in S(V) \mid p(wu) = p(u), w \in W_0, p(u + \alpha/2) - p(u - \alpha/2) \in (\alpha), \alpha \in R_{\text{iso}} \right\}, \quad (4)$$

где (α) означает идеал, порожденный α , а R_{iso} обозначает множество изотропных корней.

Для каждого набора $\mathcal{R}$ определим два типа операторов, которые мы будем называть рациональным и тригонометрическим оператором Калоджеро—Мозера—Сазерленда:

$$H_2^{\text{rat}} = \Delta_B - \sum_{\alpha \in R^+} \frac{m(\alpha)(m(\alpha) + 1)(\alpha, \alpha)}{\alpha^2}, \quad (5)$$

$$H_2^{\text{tr}} = \Delta_B - \sum_{\alpha \in R^+} \frac{m(\alpha)(m(\alpha) + m(2\alpha) + 1)(\alpha, \alpha)}{(e^{\alpha/2} - e^{-\alpha/2})^2} \quad (6)$$

или

$$H_2^{\text{tr}} = \Delta_B - \sum_{\alpha \in R^+} \frac{m(\alpha)(m(\alpha) + m(2\alpha) + 1)(\alpha, \alpha)}{\text{sh}^2(\alpha)}, \quad (7)$$

где Δ_B — оператор Лапласа на V , определяемый формой B . Заметим, что два последних оператора отличаются заменой $v \rightarrow 2v$.

Обозначим также через $\Psi_{\mathcal{R}}^{\text{rat}}$ следующую функцию (*основное состояние*):

$$\Psi_{\mathcal{R}}^{\text{rat}} = \prod_{\alpha \in R^+} \alpha^{m(\alpha)} \quad (8)$$

в рациональном случае и

$$\Psi_{\mathcal{R}}^{\text{tr}} = \prod_{\alpha \in R^+} (e^{\alpha/2} - e^{-\alpha/2})^{m(\alpha)} \quad (9)$$

в тригонометрическом.

Обозначим через $C(H_2)$ централизатор оператора H_2 в соответствующей алгебре. Основная задача заключается в том, чтобы описать этот централизатор. В тех случаях, которые мы будем рассматривать, ограничение гомоморфизма Хариш-Чандры на централизатор инъективно. Следовательно, достаточно будет описать образ гомоморфизма Хариш-Чандры.

Выделим среди всех наборов $\mathcal{R}$ те, которые отвечают интегрируемым системам.

Определение 1.6. Набор $\mathcal{R}$ называется *допустимой деформацией*, если он удовлетворяет следующим условиям:

- 1) новая форма B и функция кратности m являются W_0 -инвариантными;
- 2) все изотропные корни имеют кратность 1;
- 3) справедливо следующее *основное тождество*:

$$\sum_{\substack{\alpha \not\sim \beta, \\ \alpha, \beta \in R_+}} \frac{m_{\alpha} m_{\beta}(\alpha, \beta)}{\alpha \beta} \equiv 0 \quad (10)$$

в рациональном случае и

$$\sum_{\substack{\alpha \not\sim \beta, \\ \alpha, \beta \in R_+}} m_{\alpha} m_{\beta}(\alpha, \beta) \left(\frac{1 + e^{-\alpha}}{1 - e^{-\alpha}} \cdot \frac{1 + e^{-\beta}}{1 - e^{-\beta}} + 1 \right) \equiv 0 \quad (11)$$

в тригонометрическом случае. Здесь $\alpha \not\sim \beta$ означает, что α не пропорционально β (заметим, что в случае $BC(n, m)$ существуют пропорциональные корни).

Можно проверить, что условия 3) эквивалентны следующему условию:

- 3*) функция $(\Psi_{\mathcal{R}}^{\text{rat}})^{-1}$ (соответственно, $(\Psi_{\mathcal{R}}^{\text{tr}})^{-1}$) является формальной собственной функцией рационального (соответственно, тригонометрического) оператора КМС.

Следующая теорема описывает все допустимые деформации обобщенных систем корней. Для этого надо использовать тот факт, что условия (10), (11) могут быть проверены для всех двумерных подсистем. (ср. [6, 28]). Достаточно рассматривать только классические системы корней $A(n, m)$ и $BC(n, m)$ (с точки зрения деформаций другие получаются как специальные случаи) и исключительные системы корней $G(1, 2)$, $AB(1, 3)$, $D(2, 1, \lambda)$. Формы B являются очевидно определенными с точностью до множителя, поэтому будем считать их нормализованными. Мы выписываем только тригонометрические версии, так как из приведенных выше формул видно как получить рациональные.

Одним из результатов работы [14] является следующая важная теорема.

Теорема 1.7. *Следующий список является полным набором допустимых деформаций обобщенных систем корней.*

Во всех случаях допустимые формы зависят от одного параметра. Мы обозначаем его k и выбираем таким путем, что значение $k = -1$ соответствует случаю супералгебр Ли.

Классические серии.

Серия $A(n, m)$. Форма B равна

$$B = \sum_{i \in I_1} e^i \otimes e^i + k \sum_{j \in I_2} e^j \otimes e^j, \quad (12)$$

где k — произвольный параметр. Кратности $m_\alpha = m(\alpha)$ неизотропных корней равны

$$m(e_i - e_j) = k, \quad i, j \in I_1, \quad m(e_i - e_j) = k^{-1}, \quad i, j \in I_2$$

(напомним, что мнимые корни имеют кратность 1).

Соответствующее однопараметрическое семейство деформированных КМС операторов имеет вид

$$L_{A(n-1, m-1)} = \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} \right) + k \left(\frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial y_m^2} \right) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{2k(k+1)}{\text{sh}^2(x_i - x_j)} - \sum_{1 \leq i < j \leq m} \frac{2(k^{-1}+1)}{\text{sh}^2(y_i - y_j)} - \sum_{1 \leq i \leq n} \sum_{1 \leq j \leq m} \frac{2(k+1)}{\text{sh}^2(x_i - y_j)}. \quad (13)$$

Упомянем, что в случае $m = n$ вектор

$$v = \sum_{i \in I_1} e_i - \sum_{i \in I_2} e_i$$

не является изотропным для деформированной формы, поэтому, строго говоря, мы деформируем не обобщенную систему корней типа $A(n-1, n-1)$, а ее (вырожденное) расширение.

Серия $BC(n, m)$. Форма B — такая же, как и выше, кратности определяются равенствами

$$\begin{aligned} m(e_i \pm e_j) &= k, & m(e_i) &= p, & m(2e_i) &= q, & i, j \in I_1, \\ m(e_i \pm e_j) &= k^{-1}, & m(e_j) &= r, & m(2e_j) &= s, & i, j \in I_2, \end{aligned}$$

где p, q, r, s удовлетворяют соотношениям

$$p = kr, \quad 2q + 1 = k(2s + 1).$$

Соответствующий деформированный КМС оператор зависит от трех свободных параметров и задается формулой

$$\begin{aligned}
L_{BC(n,m)} = & - \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} \right) - k \left(\frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial y_m^2} \right) \\
& + \sum_{1 \leq i < j \leq n} \left(\frac{2k(k+1)}{\text{sh}^2(x_i - x_j)} + \frac{2k(k+1)}{\text{sh}^2(x_i + x_j)} \right) + \sum_{1 \leq i \leq n} \sum_{1 \leq j \leq m} \frac{2(k+1)}{\text{sh}^2(x_i - y_j)} \\
& + \sum_{1 \leq i < j \leq m} \left(\frac{2(k^{-1}+1)}{\text{sh}^2(y_i - y_j)} + \frac{2(k^{-1}+1)}{\text{sh}^2(y_i + y_j)} \right) + \sum_{i=1}^n \frac{p(p+2q+1)}{\text{sh}^2 x_i} \\
& + \sum_{i=1}^n \frac{4q(q+1)}{\text{sh}^2 2x_i} + \sum_{j=1}^m \frac{kr(r+2s+1)}{\text{sh}^2 y_j} + \sum_{j=1}^m \frac{4ks(s+1)}{\text{sh}^2 2y_j}. \quad (14)
\end{aligned}$$

Исключительные случаи.

Случай $AB(1,3)$.

$$B = e^1 \otimes e^1 + e^2 \otimes e^2 + e^3 \otimes e^3 + 3ke^4 \otimes e^4,$$

кратности задаются равенствами

$$m(e_i) = a = \frac{3k+1}{2}, \quad m(e_4) = b = \frac{1-k}{2k}, \quad m(e_i \pm e_j) = c = \frac{3k-1}{4}, \quad i, j = 1, 2, 3.$$

Деформированный оператор КМС имеет вид

$$\begin{aligned}
L_{AB(1,3)} = & - \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right) - 3k \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \sum_{i=1}^3 \frac{a(a+1)}{\text{sh}^2 x_i} + \frac{3kb(b+1)}{\text{sh}^2 y} \\
& + \sum_{1 \leq i < j \leq 3} \left(\frac{4c(c+1)}{\text{sh}^2(x_i - x_j)} + \frac{4c(c+1)}{\text{sh}^2(x_i + x_j)} \right) + \frac{1}{4} \sum_{\pm} \frac{(3k+3)}{\text{sh}^2 \frac{1}{2}(y \pm x_1 \pm x_2 \pm x_3)}, \quad (15)
\end{aligned}$$

где параметры a, b, c задаются в терминах параметра k выше, и сумма берется по всем возможным 8 комбинациям знаков. В этом случае мы имеем только один свободный параметр k .

Случай $G(1,2)$. В базисе e_1, e_2, e_4 форма B имеет вид

$$B = e^1 \otimes e^1 + e^2 \otimes e^2 - \frac{1}{2}(e^1 \otimes e^2 + e^2 \otimes e^1) + ke^4 \otimes e^4.$$

Кратности задаются равенствами

$$\begin{aligned}
m(e_i) = a = 1 + 2k, \quad m(e_i - e_j) = b = \frac{2k-1}{3}, \quad m(e_4) = c = \frac{1}{k} + 2, \\
m(2e_4) = d = \frac{1}{2k} - \frac{1}{2}, \quad i, j = 1, 2, 3.
\end{aligned}$$

Соответствующий деформированный КМС оператор имеет вид

$$\begin{aligned}
L_{G(1,2)} = & - \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right) - k \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \sum_{i=1}^3 \frac{a(a+1)}{\text{sh}^2 x_i} + \sum_{1 \leq i < j \leq 3} \frac{3b(b+1)}{\text{sh}^2(x_i - x_j)} + \\
& + \frac{kc(c+2d+1)}{\text{sh}^2 y} + \frac{4kd(d+1)}{\text{sh}^2 2y} + \sum_{i=1}^3 \left(\frac{2(k+1)}{\text{sh}^2(x_i - y)} + \frac{2(k+1)}{\text{sh}^2(x_i + y)} \right), \quad (16)
\end{aligned}$$

где параметры a, b, c, d заданы в терминах k выше. Снова получаем однопараметрическое семейство.

Случай $D(2, 1, \lambda)$. Форма B имеет вид

$$B = \lambda_1 e^1 \otimes e^1 + \lambda_2 e^2 \otimes e^2 + \lambda_3 e^3 \otimes e^3,$$

где параметры λ_i , $i = 1, 2, 3$, являются произвольными. Введем параметр

$$k = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 - 1$$

так, чтобы при $k = -1$ получался случай супералгебр Ли. Кратности задаются равенствами

$$m(2e_i) = m_i = \frac{k+1}{2\lambda_i} - 1, \quad i = 1, 2, 3.$$

Соответствующий деформированный КМС оператор имеет вид

$$L_{D(2,1,\lambda)} = \lambda_1 \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \lambda_2 \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \lambda_3 \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} + \sum_{i=1}^3 \frac{4\lambda_i m_i (m_i + 1)}{\text{sh}^2 2x_i} + \sum_{\pm} \frac{2(k+1)}{\text{sh}^2(x_1 \pm x_2 \pm x_3)}, \quad (17)$$

где последняя сумма берется по всем возможным комбинациям знаков (4 знака в этом случае). Это семейство параметризуется точками проективной плоскости $\lambda_1 : \lambda_2 : \lambda_3$. Случай супералгебр Ли соответствует линии $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$, поэтому опять получается один свободный параметр (например, k).

Везде выше гиперболический синус определяется по обычной формуле $\text{sh } x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$. Кроме того, переменные x_i , y_j выбираются как элементы двойственного пространства, определяемые базисными векторами посредством формы B .

Следующая теорема показывает значение гомоморфизма Хариш-Чандры.

Теорема 1.8 (см. [14]). Пусть обобщенная система корней — это $A(n, m)$ или $BC(n, m)$, параметр k отличен от 0, а H_2 — соответствующий тригонометрический или рациональный деформированный оператор КМС. Тогда ограничение гомоморфизма Хариш-Чандры на централизатор $C(H_2)$ инъективно, а его образ содержится в алгебре $\Lambda_{\mathcal{R}}^{\text{tr}}$ или алгебре $\Lambda_{\mathcal{R}}^{\text{rat}}$ соответственно.

2. ИНТЕГРИРУЕМОСТЬ ДЕФОРМИРОВАННЫХ КВАНТОВЫХ СИСТЕМ КМС

В этом разделе мы доказываем интегрируемость деформированных квантовых систем КМС, связанных с классическими системами корней, т.е. систем типа $A(n-1, m-1)$ и $BC(n, m)$. Интегрируемость деформированного рационального оператора КМС в случае исключительных систем корней в настоящее время не доказана. Квантовый аналог пары Лакса для обычной системы КМС был предложен в 1992 г. (см. [25, 27, 29]). Заметим, что квантовая версия матрицы Мозера L была использована в [5] еще в 1975 г. для построения интегралов системы КМС. Доказательство интегрируемости классических систем КМС основано либо на теории операторов Данкла, либо на основе пары Лакса. В случае деформированных систем КМС аналоги операторов Данкла до сих пор не найдены, поэтому мы используем метод пар Лакса, который позволяет строить некоторые элементы из централизатора заданного элемента.

2.1. Пара Лакса. Доказательство интегрируемости основано на следующем уравнении Лакса.

Теорема 2.1. Пусть $\mathfrak{A}$ — некоторая алгебра и $a \in \mathfrak{A}$. Обозначим через E единичную матрицу размера $n \times n$ и через L , M такие матрицы размера $n \times n$ с элементами из $\mathfrak{A}$, что

$$[L, aE] = [L, M]. \quad (18)$$

Кроме того, пусть e^* , e — такие матрицы с элементами из $\mathfrak{A}$ размеров $1 \times n$ и $n \times 1$ соответственно (строка и столбец), что

$$e^* M = M e = 0, \quad e^* a = a e^*, \quad e a = a e. \quad (19)$$

Тогда элементы

$$L_r = e^* L^r e$$

коммутируют с элементом a .

Доказательство. Доказательство следует идеям работ [27, 29]. Равенство (18) может быть переписано в виде $[L, aE - M] = 0$. Следовательно, $[L^r, aE - M] = 0$. Поэтому

$$e^*(aE - M)L^r e = e^*L^r(aE - M)e$$

Поэтому и далее $e^*aL^r e = e^*L^raEe$; следовательно, $ae^*L^r e = e^*L^r ea$. $\square$

2.2. Рациональный случай. Рассмотрим сначала рациональный квантовый деформированный оператор типа $A(n-1, m-1)$; он имеет следующий вид

$$H_2 = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + k \sum_{i=1}^m \frac{\partial^2}{\partial y_i^2} - \sum_{i < j}^n \frac{2k(k+1)}{(x_i - x_j)^2} - \sum_{i < j}^m \frac{2(k^{-1}+1)}{(y_i - y_j)^2} - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \frac{2(k+1)}{(x_i - y_j)^2}.$$

Для удобства записи введем обозначения $y_j = x_{n+j}$, $j = 1, \dots, n$. Тогда алгебру $\mathcal{D}_{\mathcal{R}}^{\text{rat}}$ можно описать как алгебру, порожденную операторами дифференцирования $\frac{\partial}{\partial x_i}$, $i = 1, \dots, n+m$, и операторами умножения на функции $\frac{1}{x_i - x_j}$, $i \neq j$. Алгебра $\Lambda_{\mathcal{R}}^{\text{rat}}$ может быть описана следующим образом:

$$\Lambda_{\mathcal{R}}^{\text{rat}} = \left\{ f \in \mathbb{C}[\xi_1, \dots, \xi_{n+m}]^{S_n \times S_m} \mid \frac{\partial f}{\partial \xi_i} - \frac{\partial f}{\partial \xi_{n+j}} \in (\xi_i - k\xi_{n+j}), 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m \right\},$$

а группа $S_n \times S_m$ переставляет первые n и последние m символов.

Гомоморфизм Хариш-Чандры в этом случае описывается формулами

$$\varphi\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right) = \xi_i, \quad i = 1, \quad \varphi\left(\frac{1}{x_i - x_j}\right) = 0, \quad i, j = 1, \dots, n+m.$$

Теорема 2.2. *Оператор H_2 интегрируем. Более точно, определим матрицу L размера $(m+n) \times (m+n)$ с помощью равенства*

$$L = (L_{ij}), \quad L_{ii} = k^{p(i)} \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad L_{ij} = \frac{k^{1-p(j)}}{x_i - x_j}, \quad i \neq j.$$

Тогда

$$L_r = \sum_{ij} (L^r)_{ij} k^{-p(i)} \quad (20)$$

являются дифференциальными операторами порядка r и коммутируют между собой; кроме того, $H_2 = L_2$.

Доказательство. Напишем уравнение Лакса в этом случае. Для этого положим $\mathfrak{A} = \mathcal{D}_{\mathcal{R}}^{\text{rat}}$, $= H_2$; в качестве M возьмем матрицу

$$M_{ij} = \frac{2k^{1-p(j)}}{(x_i - x_j)^2}, \quad i \neq j, \quad M_{ii} = - \sum_{j \neq i} \frac{2k^{1-p(j)}}{(x_i - x_j)^2}.$$

Положим также

$$e^* = \left(1, \dots, \frac{1}{k}, \dots, \frac{1}{k}\right) \quad (\text{или } e_i^* = k^{-p(i)}, i = 1, \dots, m+n),$$

$$e = (1, \dots, 1) \quad (\text{или } e_i = 1, i = 1, \dots, n+m).$$

Проверим, что элемент a и матрицы L , M , e^* , e удовлетворяют условиям теоремы 2.1. Условия $e^*M = Me = 0$ очевидны. Представим матрицу L в виде $L = \partial + A$, где ∂ — диагональная матрица с элементами

$$\partial_i = k^{p(i)} \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad i = 1, \dots, n+m,$$

и запишем элемент H_2 в виде $H_2 = \Delta - f$, где f — потенциал. Далее, имеем

$$[L, aE - M] = -[\partial, fE] + [A, \Delta E] - [\partial, M] - [A, M].$$

Нужно показать, что выражение справа равно нулю. Вычислим элементы, лежащие вне главной диагонали. Пусть $i, j \in \{1, \dots, n+m\}$, $i \neq j$. Тогда несложно проверить, что

$$[\partial, fE]_{ij} = 0, \quad ([A, \Delta E] - [\partial, M])_{ij} = \frac{2k^{1-p(j)}}{(x_i - x_j)^3} (k^{p(i)} - k^{p(j)}),$$

$$[A, M]_{ij} = \frac{2k^{1-p(j)}}{(x_i - x_j)^3} (k^{1-p(j)} - k^{1-p(i)}),$$

и, следовательно, $[L, aE - M]_{ij} = 0$. Аналогично проверяется, что $[L, aE - M]_{ii} = 0$, $i = 1, \dots, n+m$. Следовательно, элементы L_r , $r = 1, 2, \dots$ коммутируют с H_2 . Из теоремы о гомоморфизме Хариш-Чандры следует, что они коммутируют между собой. $\square$

Следствие 2.3. *Для общего значения параметра k централизатор порожден элементами L_r , $r = 1, 2, \dots$, а ограничение гомоморфизма Хариш-Чандры на централизатор является изоморфизмом.*

Доказательство. Образ при гомоморфизме Хариш-Чандры интеграла L_r равен

$$\sum_{i=1}^r \xi_i^r + k^{r-1} \sum_{j=1}^m \eta_j^r.$$

При общем значении параметра k эти элементы порождают алгебру $\Lambda_{\mathcal{R}}^{\text{rat}}$ (см. [14]). $\square$

Рассмотрим теперь рациональный оператор типа $BC_{m,n}$. В этом случае он имеет вид

$$H_2 = \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} \right) + k \left(\frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial y_m^2} \right) -$$

$$- \sum_{i < j}^n \left(\frac{2k(k+1)}{(x_i - x_j)^2} - \frac{2k(k+1)}{(x_i + x_j)^2} \right) - \sum_{i < j}^m \left(\frac{2(k^{-1}+1)}{(y_i - y_j)^2} - \frac{2(k^{-1}+1)}{(y_i + y_j)^2} \right)$$

$$- \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \left(\frac{2(k+1)}{(x_i - y_j)^2} + \frac{2(k+1)}{(x_i + y_j)^2} \right) - \sum_{i=1}^n \frac{q(q+1)}{x_i^2} - \sum_{j=1}^m \frac{ks(s+1)}{y_j^2},$$

где параметры k, q, s удовлетворяют соотношению

$$2q + 1 = k(2s + 1). \quad (21)$$

Для удобства введем обозначения $y_j = x_{n+j}$, $j = 1, \dots, n$. Тогда алгебру $\mathcal{D}_{\mathcal{R}}^{\text{rat}}$ можно описать как алгебру, порожденную операторами дифференцирования $\frac{\partial}{\partial x_i}$, $i = 1, \dots, n+m$, и операторами умножения на функции $\frac{1}{x_i - x_j}$, $\frac{1}{x_i + x_j}$, $i \neq j$, $\frac{1}{x_i}$. Алгебра $\Lambda_{\mathcal{R}}^{\text{rat}}$ может быть описана как

$$\Lambda_{\mathcal{R}}^{\text{rat}} = \left\{ f \in \mathbb{C}[\xi_1^2, \dots, \xi_{n+m}^2]^{S_n \times S_m} \mid \frac{\partial f}{\partial \xi_i} - \frac{\partial f}{\partial \xi_{n+j}} \in (\xi_i - k\xi_{n+j}), \ 1 \leq i \leq n, \ 1 \leq j \leq m \right\},$$

а гомоморфизм Хариш-Чандры действует по формулам

$$\varphi \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right) = \xi_i, \quad \varphi \left(\frac{1}{x_i - x_j} \right) = \varphi \left(\frac{1}{x_i + x_j} \right) = \varphi \left(\frac{1}{x_i} \right) = 0, \quad i, j = 1, \dots, n+m.$$

Теорема 2.4. *Оператор H_2 интегрируем. Более точно, определим матрицу L размера $2(m+n) \times 2(m+n)$ с помощью равенства*

$$L = \begin{pmatrix} L_0 & L_1 \\ -L_1 & -L_0 \end{pmatrix},$$

где

$$(L_0)_{ii} = k^{p(i)} \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad (L_1)_{ii} = \frac{k^{p(i)} m(i)}{x_i}; \quad (L_0)_{ij} = \frac{k^{1-p(j)}}{x_i - x_j}, \quad (L_1)_{ij} = \frac{k^{1-p(j)}}{x_i + x_j}, \quad i \neq j.$$

Тогда

$$L_{2r} = e^* L^{2r} e \quad (22)$$

являются дифференциальными операторами порядка $2r$ и коммутируют между собой; кроме того, $H_2 = L_2$.

Доказательство. Доказательство следует той же схеме, что и в предыдущем случае. Укажем соответствующие данные из уравнения Лакса. Матрица L приведена выше, $e = (1, 1, \dots, 1)^T$, $e_i^* = e_{n+m+i}^* = k^{-p(i)}$, $i = 1, \dots, n+m$, $m(i) = q$, если $i = 1, \dots, n$, и $m(i) = s$, если $i = n+1, \dots, n+m$. В качестве M возьмем матрицу

$$M = \begin{pmatrix} M_0 & M_1 \\ M_1 & M_0 \end{pmatrix},$$

где

$$(M_0)_{ii} = -\sum \frac{2k^{1-p(j)}}{(x_i - x_j)^2} - \sum \frac{2k^{1-p(j)}}{(x_i - x_j)^2} - \sum \frac{m(i)k^{p(i)}}{x_i^2}, \quad (M_1)_{ii} = \frac{k^{p(i)}m(i)}{x_i^2},$$

$$(M_0)_{ij} = \frac{2k^{1-p(j)}}{x_i - x_j}, \quad (M_1)_{ij} = \frac{2k^{1-p(j)}}{(x_i + x_j)^2}, \quad i \neq j.$$

Проверим, что элемент a и матрицы L , M , e^* , e удовлетворяют условиям теоремы 2.1. Условия $e^*M = Me = 0$ очевидны. Представим матрицу L в виде

$$L = \begin{pmatrix} \partial & 0 \\ 0 & -\partial \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} A_0 & A_1 \\ -A_1 & -A_0 \end{pmatrix},$$

где ∂ — диагональная матрица с элементами

$$\partial_i = k^{p(i)} \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad i = 1, \dots, n+m,$$

и запишем элемент H_2 в виде $H_2 = \Delta - f$, где f — потенциал. Далее, как и прежде, имеем

$$[L, aE - M] = -[\partial, fE] + [A, \Delta E] - [\partial, M] - [A, M].$$

Нужно показать, что выражение справа равно нулю. Это условие эквивалентно двум уравнениям:

$$-[\partial, fE] + [A_0, \Delta E] - [\partial, M_0] - [A_0, M_0] - \{A_1, M_1\} = 0,$$

$$[A_1, \Delta E] - \{\partial, M_1\} - [A_1, M_0] - \{A_0, M_1\} = 0,$$

где скобки $\{ , \}$ означают антикоммутатор. Проверим первое уравнение. Вычислим элементы, лежащие вне главной диагонали. Пусть $i, j \in \{1, \dots, n+m\}$, $i \neq j$. Тогда несложно проверить, что

$$[\partial, fE]_{ij} = 0, \quad ([A_0, \Delta E] - [\partial, M_0])_{ij} = \frac{2k^{1-p(j)}}{(x_i - x_j)^3} (k^{p(i)} - k^{p(j)}),$$

$$([A_0, M_0] + \{A_1, M_1\})_{ij} =$$

$$= \frac{2k^{1-p(j)}}{(x_i - x_j)^3} (k^{1-p(j)} - k^{1-p(i)}) + \frac{2k^{1-p(j)}}{(x_i - x_j)(x_i + x_j)^2} (k^{1-p(j)} - k^{1-p(i)}) +$$

$$+ \frac{k^{1-p(j)}}{x_i - x_j} \left(\frac{m(i)k^{p(i)}}{x_i^2} - \frac{m(j)k^{p(j)}}{x_j^2} \right) + \frac{2k^{1-p(j)}}{(x_i + x_j)^2} \left(\frac{m(i)k^{p(i)}}{x_i} + \frac{m(j)k^{p(j)}}{x_j} \right) +$$

$$+ \frac{k^{1-p(j)}}{(x_i + x_j)} \left(\frac{m(i)k^{p(i)}}{x_i^2} + \frac{m(j)k^{p(j)}}{x_j^2} \right).$$

Следовательно, в первом уравнении все недиагональные члены равны нулю. Так же проверяется, что диагональные члены в первом уравнении также равны нулю, и тем самым первое уравнение верно. Аналогично проверяется второе уравнение. Следовательно, элементы L_r , $r = 1, 2, \dots$, коммутируют с H_2 . Кроме того, легко проверить, что $L^{2r+1} = 0$. Из теоремы о гомоморфизме Хариш-Чандры следует, что они коммутируют между собой. $\square$

Следствие 2.5. Для общего значения параметра k централизатор порожден элементами L_r , $r = 1, 2, \dots$, а ограничение гомоморфизма Хариш-Чандры на централизатор является изоморфизмом.

Доказательство. Образ при гомоморфизме Хариш-Чандры интеграла L_r равен

$$\sum_{i=1} \xi_i^{2r} + k^{2r-1} \sum_{j=1}^m \eta_j^{2r}.$$

При общем значении параметра k эти элементы порождают алгебру $\Lambda_{\mathcal{R}}^{\text{rat}}$. $\square$

2.3. Тригонометрический случай. В этом разделе мы доказываем интегрируемость тригонометрических деформированных квантовых систем КМС, связанных с классическими системами корней, т.е. систем типов $A(n, m)$ и $BC(n, m)$. Интегрируемость деформированного тригонометрического оператора КМС в случае исключительных систем корней в настоящее время не доказана.

Рассмотрим тригонометрический квантовый деформированный оператор типа $A(n, m)$. Введем новые переменные $x_i = e^{\varepsilon_i}$, $i = 1, \dots, n$, и $y_j = e^{\delta_j}$, $j = 1, \dots, m$. Тогда оператор примет следующий вид:

$$H_2 = \sum_{i=1}^n \left(x_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right)^2 + k \sum_{j=1}^m \left(y_j \frac{\partial}{\partial y_j} \right)^2 - \sum_{i < j}^n \frac{2k(k+1)x_i x_j}{(x_i - x_j)^2} - \sum_{i < j}^m \frac{2(k^{-1}+1)y_i y_j}{(y_i - y_j)^2} - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \frac{2(k+1)x_i y_j}{(x_i - y_j)^2}. \quad (23)$$

Для удобства введем новые обозначения $y_j = x_{n+j}$, $j = 1, \dots, m$. Тогда алгебру $\mathcal{D}_{\mathcal{R}}^{\text{tr}}$ можно описать как алгебру, порожденную операторами дифференцирования $x_i \frac{\partial}{\partial x_i}$, $i = 1, \dots, n+m$, и операторами умножения на функции $\frac{x_i + x_j}{x_i - x_j}$, $i \neq j$. Алгебра $\Lambda_{\mathcal{R}}^{\text{tr}}$ может быть описана следующим образом:

$$\Lambda_{\mathcal{R}}^{\text{tr}} = \left\{ f \in \mathbb{C}[\xi_1, \dots, \xi_{n+m}]^{S_n \times S_m} \mid \begin{aligned} & f\left(\xi_i - \frac{1}{2}, \xi_{n+j} + \frac{1}{2}\right) - f\left(\xi_i + \frac{1}{2}, \xi_{n+j} - \frac{1}{2}\right) \in (\xi_i - k\xi_{n+j}), \\ & 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m \end{aligned} \right\},$$

а гомоморфизм Хариш-Чандры действует по формулам

$$\varphi\left(x_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right) = \xi_i, \quad \varphi\left(\frac{x_i + x_j}{x_i - x_j}\right) = 1, \quad i, j = 1, \dots, n+m, \quad i < j.$$

Теорема 2.6. Оператор H_2 интегрируем. Определим матрицу L размера $(m+n) \times (m+n)$ с помощью равенства

$$L = (L_{ij}), \quad L_{ii} = k^{p(i)} x_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad L_{ij} = \frac{1}{2} k^{1-p(j)} \frac{x_i + x_j}{x_i - x_j}, \quad i \neq j.$$

Тогда

$$L_r = \sum_{i,j} (L^r)_{ij} k^{-p(i)} \quad (24)$$

являются дифференциальными операторами порядка r и коммутируют между собой; кроме того

$$H_2 = L_2 + B(\rho, \rho), \quad \rho = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in R^+} m(\alpha) \alpha.$$

Доказательство. Доказательство такое же, как в рациональном случае. Укажем соответствующие данные для уравнения Лакса: $a = H_2$,

$$M_{ij} = \frac{2k^{1-p(j)}x_i x_j}{(x_i - x_j)^2}, \quad i \neq j, \quad M_{ii} = - \sum_{j \neq i} \frac{2k^{1-p(j)}x_i x_j}{(x_i - x_j)^2}.$$

$e = (1, \dots, 1)^T$, $e_i^* = k^{-p(i)}$, $i = 1, \dots, n + m$. Следуя той же схеме, что и в рациональном случае, можно проверить, что $[L, aE - M] = 0$, так что по теореме 18 L_r коммутируют с H_2 . Из теоремы о гомоморфизме Хариш-Чандры следует, что они коммутируют между собой. $\square$

Следствие 2.7. Для общего значения параметра k централизатор порожден элементами L_r , $r = 1, 2, \dots$, а ограничение гомоморфизма Хариш-Чандры на централизатор является изоморфизмом.

Доказательство. Старшая компонента образа при гомоморфизме Хариш-Чандры интеграла L_r равна

$$\sum_{i=1}^n \xi_i^r + k^{r-1} \sum_{j=1}^n \eta_j^r.$$

Следовательно, при общем значении параметра k образы порождают алгебру $\Lambda_{\mathcal{R}}^{\text{tr}}$. $\square$

Рассмотрим теперь тригонометрический случай типа $BC_{m,n}$. Введем переменные $x_i = e^{\varepsilon_i}$, $i = 1, \dots, n$, и $y_j = e^{\delta_j}$, $j = 1, \dots, m$. Тогда оператор запишется в виде

$$\begin{aligned} H_2 = & \sum_{i=1}^n \left(x_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right)^2 + k \sum_{j=1}^m \left(y_j \frac{\partial}{\partial y_j} \right)^2 - \sum_{i < j}^n \left(\frac{8k(k+1)x_i x_j}{(x_i - x_j)^2} + \frac{8k(k+1)x_i x_j}{(x_i x_j - 1)^2} \right) - \\ & - \sum_{i < j}^m \left(\frac{8(k^{-1}+1)y_i y_j}{(y_i - y_j)^2} + \frac{8(k^{-1}+1)y_i y_j}{(y_i y_j - 1)^2} \right) - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \frac{8(k+1)x_i y_j}{(x_i - y_j)^2} - \\ & - \sum_{i=1}^n \left(\frac{4p(p+2q+1)x_i}{(x_i - 1)^2} + \frac{16q(q+1)x_i^2}{(x_i^2 - 1)^2} \right) - \sum_{j=1}^m \left(\frac{4kr(r+2s+1)y_j}{(y_j - 1)^2} + \frac{16ks(s+1)y_j^2}{(y_j^2 - 1)^2} \right), \quad (25) \end{aligned}$$

где параметры удовлетворяют соотношениям

$$p = kr, \quad 2q + 1 = k(2s + 1).$$

Для удобства введем обозначения $y_j = x_{n+j}$, $j = 1, \dots, m$. Тогда алгебру $\mathcal{D}_{\mathcal{R}}^{\text{tr}}$ можно описать как алгебру, порожденную операторами дифференцирования $x_i \frac{\partial}{\partial x_i}$, $i = 1, \dots, n + m$, и операторами умножения на функции $\frac{x_i + x_j}{x_i - x_j}$, $\frac{x_i x_j + 1}{x_i x_j - 1}$, $i \neq j$, $\frac{x_i + 1}{x_i - 1}$, $\frac{x_i^2 + 1}{x_i^2 - 1}$. Алгебра $\Lambda_{\mathcal{R}}^{\text{tr}}$ может быть описана следующим образом:

$$\Lambda_{\mathcal{R}}^{\text{tr}} = \left\{ f \in \mathbb{C}[\xi_1^2, \dots, \xi_{n+m}^2]^{S_n \times S_m} \mid \right. \\ \left. f \left(\xi_i - \frac{1}{2}, \xi_{n+j} + \frac{1}{2} \right) - f \left(\xi_i + \frac{1}{2}, \xi_{n+j} - \frac{1}{2} \right) \in (\xi_i - k\xi_{n+j}), \right. \\ \left. 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m \right\},$$

а гомоморфизм Хариш-Чандры действует по формулам

$$\begin{aligned} \varphi\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right) &= \xi_i, \quad \varphi\left(\frac{x_i + x_j}{x_i - x_j}\right) = 1, \quad i < j, \quad \varphi\left(\frac{x_i x_j + 1}{x_i x_j - 1}\right) = 1, \\ \varphi\left(\frac{x_i + 1}{x_i - 1}\right) &= 1, \quad \varphi\left(\frac{x_i^2 + 1}{x_i^2 - 1}\right) = 1, \quad i, j = 1, \dots, n + m. \end{aligned}$$

Теорема 2.8. *Оператор H_2 интегрируем. Более точно определим матрицу L размера $2(m + n) \times 2(m + n)$ с помощью равенства*

$$L = \begin{pmatrix} L_0 & L_1 \\ -L_1 & -L_0 \end{pmatrix},$$

где

$$\begin{aligned} (L_0)_{ii} &= k^{p(i)} x_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad (L_1)_{ii} = \frac{k^{p(i)} \mu(i)(x_i + 1)}{2(x_i - 1)} + \frac{k^{p(i)} \nu(i)(x_i^2 + 1)}{x_i^2 - 1}, \\ (L_0)_{ij} &= \frac{k^{1-p(j)}(x_i + x_j)}{2(x_i - x_j)}, \quad (L_1)_{ij} = \frac{k^{1-p(j)}(x_i x_j + 1)}{2(x_i x_j - 1)}, \quad i \neq j. \end{aligned}$$

Тогда

$$L_{2r} = e^* L^{2r} e$$

являются дифференциальными операторами порядка $2r$ и коммутируют между собой, где

$$\mu(i) = p, \quad \nu(i) = q, \quad i = 1, \dots, n, \quad \mu(i) = r, \quad \nu(i) = s, \quad i = 1, \dots, n + 1, n + m,$$

а e^* и e — те же самые, что и в рациональном случае BC . Справедливо также равенство

$$H_2 = L_2 + B(\rho, \rho), \quad \rho = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in R^+} m(\alpha) \alpha.$$

Так как матрица M в этом случае никем не вычислялась (хотя ее существование не вызывает сомнений), то мы докажем эту теорему в следующем разделе другим способом.

Следствие 2.9. *Для общего значения параметра k централизатор порожден элементами L_{2r} , $r = 1, 2, \dots$, а ограничение гомоморфизма Хариш-Чандры на централизатор является изоморфизмом.*

Доказательство. Старшая компонента образа при гомоморфизме Хариш-Чандры интеграла L_{2r} равна

$$\sum_{i=1}^n \xi_i^{2r} + k^{r-1} \sum_{j=1}^n \eta_j^{2r}.$$

Следовательно, при общем значении параметра k образы порождают алгебру $\Lambda_{\mathcal{R}}^{\text{tr}}$. $\square$

3. БЕСКОНЕЧНОМЕРНЫЕ КВАНТОВЫЕ СИСТЕМЫ КМС

В этом разделе мы определяем бесконечномерные аналоги систем КМС и показываем как они связаны с деформированными системами КМС. Под бесконечномерными операторами мы подразумеваем дифференциальные операторы на алгебре симметрических функций.

Нашим основным инструментом является оператор Данкла в бесконечности. Хотя этот подход и не позволяет построить операторы Данкла в деформированном случае, он позволяет естественным образом получить квантовую матрицу Мозера для деформированных систем КМС.

Еще одним результатом этого раздела являются новые формулы для квантовых интегралов в бесконечности в рационально и тригонометрическом случаях типа A и BC . Аналогичный подход в тригонометрическом случае типа A был использован М. Назаровым и Е. Скляниным в [10] для построения квантовых интегралов в бесконечности.

Для построения бесконечномерных операторов нам нужны операторы, которые на конечномерном уровне сохраняют пространство многочленов. Это так называемые операторы КМС в радиальной форме. Итак, вместо операторов L_2 мы будем рассматривать операторы $\mathcal{L}_2 = \Psi_{\mathcal{R}} L_2 \Psi_{\mathcal{R}}^{-1}$.

Предложение 3.1. *Справедливы следующие равенства:*

$$\mathcal{L}_2 = \Psi_{\mathcal{R}}^{\text{rat}} L_2 (\Psi_{\mathcal{R}}^{\text{rat}})^{-1} = \Delta - \sum_{\alpha \in R^+} \frac{2m(\alpha)}{\alpha} \partial_{\alpha}$$

в рациональном случае и

$$\mathcal{L}_2 = \Psi_{\mathcal{R}}^{\text{tr}} L_2 (\Psi_{\mathcal{R}}^{\text{tr}})^{-1} = \Delta - \sum_{\alpha \in R^+} m(\alpha) \frac{1 + e^{-\alpha}}{1 - e^{-\alpha}} \partial_{\alpha}$$

в тригонометрическом случае.

Изменим также матрицу L и интегралы посредством сопряжения на основное состояние:

$$\mathcal{L} = \Psi_{\mathcal{R}} L (\Psi_{\mathcal{R}})^{-1}, \quad \mathcal{L}_r = \Psi_{\mathcal{R}} L_r (\Psi_{\mathcal{R}})^{-1}.$$

Напомним, что алгебра симметрических функций Λ — это обратный предел алгебр симметрических многочленов (см. [9]). Эта алгебра изоморфна алгебре многочленов от бесконечного числа переменных (бесконечных степенных сумм) $\Lambda = \mathbb{C}[p_1, p_2, \dots]$. Добавим к этой алгебре еще одну переменную p_0 (бесконечная степенная сумма нулевых степеней) и обозначим полученную алгебру $\bar{\Lambda}$. Мы также будем рассматривать алгебры $\bar{\Lambda}[x]$ и $\bar{\Lambda}[x, x^{-1}]$, которые являются алгебрами многочленов и лорановских многочленов над алгеброй $\bar{\Lambda}$. Нам также будут нужны следующие алгебры деформированных степенных сумм.

Определение 3.2. Обозначим через $\Lambda_{n,m}$ подалгебру в алгебре $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_{n+m}]$, порожденную деформированными степенными суммами

$$p_r(x) = \sum_{i=1}^{n+m} k^{-p(i)} x_i^r = \sum_{i=1}^n x_i^r + \frac{1}{k} \sum_{i=n+1}^{n+m} x_i^r, \quad r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}.$$

Аналогично обозначим через $\Lambda_{n,m}^{\pm}$ подалгебру в алгебре $\mathbb{C}[x_1^{\pm 1}, \dots, x_{n+m}^{\pm 1}]$, порожденную деформированными степенными суммами

$$p_r(x) = \sum_{i=1}^{n+m} k^{-p(i)} x_i^r = \sum_{i=1}^n x_i^r + \frac{1}{k} \sum_{i=n+1}^{n+m} x_i^r, \quad r \in \mathbb{Z}.$$

3.1. Рациональный оператор типа A .

Определение 3.3. *Бесконечномерным оператором Данкла типа A мы будем называть линейный оператор*

$$D = \partial - k\Delta$$

на алгебре $\bar{\Lambda}[x]$, где ∂ — такое дифференцирование, что

$$\partial(x) = 1, \quad \partial(p_l) = lx^{l-1},$$

$$\Delta(x^l) = x^{l-1}p_0 + x^{l-2}p_1 + \dots + xp_{l-2} + p_{l-1}l - lx^{l-1}, \quad \Delta(x^l f) = \Delta(x^l)f,$$

где $f \in \Lambda$.

Введем линейный оператор

$$E : \bar{\Lambda}[x] \rightarrow \bar{\Lambda}, \quad E(x^l f) = p_l f, \quad f \in \bar{\Lambda}, \quad l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \quad (26)$$

а также операторы

$$\mathcal{L}_r^{\infty} : \bar{\Lambda} \rightarrow \bar{\Lambda}, \quad \mathcal{L}_r^{\infty} = \text{Res } E \circ D^r, \quad r \in \mathbb{Z}_+, \quad (27)$$

где Res означает ограничение на $\bar{\Lambda}$. Определим гомоморфизмы

$$\varphi_{n,m}^{(i)} : \bar{\Lambda}[x] \rightarrow \mathbb{C}[x_1, \dots, x_{n+m}], \quad \varphi_{n,m}^{(i)}(x) = x_i, \quad \varphi_{n,m}^{(i)}(p_l) = p_l(x) \quad \forall l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}.$$

Обозначим через F столбец

$$F = \left(\varphi_{n,m}^{(1)}, \varphi_{n,m}^{(2)}, \dots, \varphi_{n,m}^{(n+m)} \right)^T.$$

Предложение 3.4. На $\bar{\Lambda}[x]$ справедливо соотношение

$$F \circ D = \mathcal{L}F. \quad (28)$$

Доказательство. Достаточно показать, что

$$\varphi_{n,m}^{(i)} \circ D = k^{p(i)} \frac{\partial}{\partial x_i} \circ \varphi_{n,m}^{(i)} - \sum_{j \neq i} \frac{k^{1-p(j)}}{x_i - x_j} (\varphi_{n,m}^{(i)} - \varphi_{n,m}^{(j)}). \quad (29)$$

Для любого $f \in \bar{\Lambda}$ имеем

$$\begin{aligned} \varphi_{n,m}^{(i)} \circ (\partial - k\Delta)(x^l f) &= \\ &= \varphi_{n,m}^{(i)}(lx^{l-1}f + x^l \partial f - k(lx^{l-1}p_0 + x^{l-2}p_1 + \dots + xp_{l-2} + p_{l-1} - lx^{l-1})f) = \\ &= lx_i^{l-1}(1+k)\varphi_{n,m}(f) + x_i^l \varphi_{n,m}(\partial f) - k(x_i^{l-1}p_0 + x_i^{l-2}p_1 + \dots + x_i p_{l-2} + p_{l-1})\varphi_{n,m}^{(i)}(f). \end{aligned}$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} k^{p(i)} \frac{\partial}{\partial x_i} \circ \varphi_{n,m}^{(i)}(x^l f) - \sum_{j \neq i} \frac{k^{1-p(j)}}{x_i - x_j} (\varphi_{n,m}^{(i)} - \varphi_{n,m}^{(j)})(x^l f) &= \\ &= k^{p(i)} lx_i^{l-1} \varphi_{n,m}^{(i)}(f) + x_i^l k^{p(i)} \partial_i (\varphi_{n,m}^{(i)}(f)) - (x_i^{l-1}(kn+m) - \\ &\quad - k(x_i^{l-2}p_1 + \dots + x_i p_{l-2} + p_{l-1} - k^{-p(i)} lx_i^{l-1})) \varphi_{n,m}^{(i)}(f) = \\ &= \left(k^{p(i)} + k^{1-p(i)} \right) lx_i^{l-1} \varphi_{n,m}^{(i)}(f) + k^{p(i)} x_i^l \partial_i (\varphi_{n,m}^{(i)}(f)) - \\ &\quad - k \left(x_i^l (n + k^{-1}m) + x_i^{l-2}p_1 + \dots + x_i p_{l-2} + p_{l-1} \right) \varphi_{n,m}^{(i)}(f). \end{aligned}$$

Так как $k^{p(i)} + k^{1-p(i)} = 1 + k$ для всех $i = 1, \dots, n+m$, то нам только нужно показать, что

$$\varphi_{n,m}^{(i)}(\partial f) = k^{p(i)} \partial_i (\varphi_{n,m}^{(i)}(f)). \quad (30)$$

Так как оба ∂ и ∂_i являются дифференцированиями, достаточно проверить это для $f = p_l$, что легко сделать. $\square$

Следующее утверждение объясняет название и формулы для бесконечномерного оператора Данкла.

Следствие 3.5. Пусть $m = 0$; тогда следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{array}{ccc} \bar{\Lambda}[x] & \xrightarrow{D} & \bar{\Lambda}[x] \\ \varphi_{n,0}^{(i)} \downarrow & & \downarrow \varphi_{n,0}^{(i)} \\ \Lambda_{n,0}[x_i] & \xrightarrow{D_i} & \Lambda_{n,0}[x_i] \end{array}$$

где D_i — операторы Данкла,

$$D_i = \frac{\partial}{\partial x_i} - k \sum_{j \neq i} \frac{1}{x_i - x_j} (1 - s_{ij}),$$

а s_{ij} — транспозиция.

Доказательство. Пусть $m = 0$; тогда формула (29) может быть переписана в виде

$$\varphi_{n,0}^{(i)} \circ D = \frac{\partial}{\partial x_i} \circ \varphi_{n,0}^{(i)} - k \sum_{j \neq i} \frac{1}{x_i - x_j} (1 - s_{ij}) \circ \varphi_{n,0}^{(i)}. \quad (31)$$

$\square$

Сформулируем основной результат.

Теорема 3.6. Дифференциальные операторы $\mathcal{L}_r^\infty$ коммутируют друг с другом:

$$[\mathcal{L}_r^\infty, \mathcal{L}_s^\infty] = 0.$$

Оператор $\mathcal{L}_2^\infty$ имеет следующий явный вид:

$$\mathcal{L}_2^\infty = \sum_{a,b \geq 1} p_{a+b-2} \partial_a \partial_b - k \sum_{a,b \geq 0} p_a p_b \partial_{a+b+2} + (1+k) \sum_{a \geq 2} (a-1) p_{a-2} \partial_a, \quad (32)$$

где $\partial_a = a \partial / \partial p_a$.

Доказательство. Чтобы показать, что $\mathcal{L}_r^\infty$ является дифференциальным оператором порядка $\leq r$, напомним, что $\mathcal{M}$ является дифференциальным оператором на $\bar{\Lambda}$ порядка $\leq r$, если $\text{ad}(f)^{r+1} \mathcal{M} = 0$ для любой $f \in \bar{\Lambda}$. Так как E и Δ коммутируют с умножением на f , имеем

$$\text{ad}(f)^{r+1} (\mathcal{L}_r^\infty) = \text{Res } E \circ \text{ad}(f)^{r+1} (D^r).$$

Так как

$$\text{ad}(f)(D) = \text{ad}(f)(\partial) = -\partial f,$$

то $\text{ad}(f)^2(D) = 0$ и, следовательно, $\text{ad}(f)^{r+1}(D^r) = 0$. Для того, чтобы доказать коммутативность, сведем ее к конечномерной ситуации. Следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{array}{ccc} \bar{\Lambda} & \xrightarrow{\mathcal{L}_r^\infty} & \bar{\Lambda} \\ \varphi_{n,m} \downarrow & & \downarrow \varphi_{n,m} \\ \Lambda_{n,m} & \xrightarrow{\mathcal{L}_r} & \Lambda_{n,m} \end{array} \quad (33)$$

где $\varphi_{n,m}(p_r) = p_r(x)$. В самом деле, легко проверить, что $e^* F = \varphi_{n,m} \circ E$ и при ограничении на $\bar{\Lambda}$ верно равенство $F = e \varphi_{n,m}$. Поэтому $F \circ D^r = \mathcal{L}^r F$ и, следовательно, при ограничении на $\bar{\Lambda}$ имеем

$$e^* F \circ D^r = \varphi_{n,m} \circ E \circ D^r = e^* \mathcal{L}^r e \varphi_{n,m}.$$

Это доказывает коммутативность диаграммы и влечет

$$\varphi_{n,m}([\mathcal{L}_r^\infty, \mathcal{L}_s^\infty](f)) = [\mathcal{L}_r, \mathcal{L}_s](\varphi_{n,m}(f)) = 0,$$

так как интегралы коммутируют. Для завершения доказательства воспользуемся следующей леммой.

Лемма 3.7. Пусть $f \in \bar{\Lambda}$. Если $\varphi_{N,0}(f) = 0$ для всех N , то $f = 0$.

Доказательство. По определению, f — полином от конечного числа образующих p_r , $1 \leq r \leq M$, для некоторого M с коэффициентами, полиномиально зависящими от p_0 . Возьмем $N > M$. Так как $\varphi_{N,0}(p_r)$ для $1 \leq r \leq M$ алгебраически независимы в $\Lambda_{N,0}$ и $\varphi_{N,0}(f) = 0$, то все коэффициенты f равны нулю в $p_0 = N$. Так как это верно для всех $N > M$, то коэффициенты тождественно равны нулю. Следовательно, $f = 0$. $\square$

Теперь, применяя лемму 3.7, получаем коммутативность. $\square$

3.2. Рациональный оператор типа В. Доказательства всех утверждений аналогичны случаю А, поэтому мы их опускаем. Определим бесконечномерный оператор Данкла типа ВС как оператор

$$D : \bar{\Lambda}[x] \rightarrow \bar{\Lambda}[x], \quad D = \partial - 2k\Delta - \frac{q}{x}(1 - \tau). \quad (34)$$

Здесь дифференцирование ∂ в $\bar{\Lambda}[x]$ определяется по формуле

$$\partial(x) = 1, \quad \partial(p_l) = 2lx^{2l-1}, \quad l \in \mathbb{Z}_{\geq 0},$$

а оператор $\Delta : \bar{\Lambda}[x] \rightarrow \bar{\Lambda}[x]$ — по формуле

$$\Delta(x^l f) = \Delta(x^l) f, \quad \Delta(1) = 0, \quad f \in \bar{\Lambda}, \quad l \in \mathbb{Z}_{\geq 0},$$

где

$$\begin{aligned}\Delta(x^{2l}) &= x^{2l-1}p_0 + x^{2l-3}p_1 + \dots + x^3p_{l-2} + xp_{l-1} - lx^{2l-1}, \\ \Delta(x^{2l-1}) &= x^{2l-2}p_0 + x^{2l-4}p_1 + \dots + x^2p_{l-2} + p_{l-1} - lx^{2l-2}, \quad l > 0,\end{aligned}$$

а инволюция τ действует по правилу

$$\tau(x^l f) = (-x)^l f, \quad f \in \bar{\Lambda}.$$

Определим также линейный оператор

$$E : \bar{\Lambda}[x] \rightarrow \bar{\Lambda}E(x^{2l}f) = p_l f, \quad E(x^{2l+1}f) = 0, \quad f \in \bar{\Lambda}, \quad l \in \mathbb{Z}_{\geq 0},$$

и операторы

$$\mathcal{L}_r^\infty : \bar{\Lambda} \rightarrow \bar{\Lambda}, \quad r \in \mathbb{Z}_+, \quad \mathcal{L}_r^\infty = \text{Res } E \circ D^{2r}, \quad (35)$$

где, как и прежде, Res означает ограничение на $\bar{\Lambda}$. Гомоморфизмы $\varphi_{n,m}^{(i)} : \bar{\Lambda}[x] \rightarrow \mathbb{C}[x_1, \dots, x_{n+m}]$ в этом случае действуют следующим образом:

$$\varphi_{n,m}^{(i)}(x) = x_i, \quad \varphi_{n,m}^{(i)}(p_r) = p_{2r}(x) \quad \forall r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}.$$

Столбец F имеет вид

$$F = \left(\varphi_{n,m}^{(1)}, \dots, \varphi_{n,m}^{(n+m)}, \tau_1 \varphi_{n,m}^{(1)}, \dots, \tau_{n+m} \varphi_{n,m}^{(n+m)} \right)^T,$$

где τ_i меняет знак у переменной x_i .

Предложение 3.8. На $\bar{\Lambda}[x]$ справедливо соотношение

$$F \circ D = \mathcal{L}F. \quad (36)$$

Следствие 3.9. Пусть $m = 0$; тогда следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{array}{ccc} \bar{\Lambda}[x] & \xrightarrow{D} & \bar{\Lambda}[x] \\ \varphi_{n,0}^{(i)} \downarrow & & \downarrow \varphi_{n,0}^{(i)} V, \\ \Lambda_{n,0}[x_i] & \xrightarrow{D_i} & \Lambda_{n,0}[x_i] \end{array}$$

где D_i — операторы Данкла,

$$\frac{\partial}{\partial x_i} - \sum_{j \neq i} \frac{1}{x_i - x_j} (1 - s_{ij}) \sum_{j \neq i} \frac{1}{x_i - x_j} (1 - \tau_i \tau_j s_{ij}) - \frac{p}{x_i} (1 - \tau_i),$$

s_{ij} — транспозиция, а τ_i меняет знак у x_i .

Доказательство. Соотношение (36) записывается в виде

$$\begin{aligned} \varphi_{n,m}^{(i)} \circ D_\infty &= k^{p(i)} \frac{\partial}{\partial x_i} \circ \varphi_{n,m}^{(i)} - \frac{k^{p(i)} m(i)}{x_i} (1 - \tau_i) \varphi_{n,m}^{(i)} - \\ &\quad - \sum_{j \neq i} \frac{k^{1-p(j)}}{x_i - x_j} \left(\varphi_{n,m}^{(i)} - \varphi_{n,m}^{(j)} \right) - \sum_{j \neq i} \frac{k^{1-p(j)}}{x_i + x_j} \left(\varphi_{n,m}^{(i)} - \tau_j \varphi_{n,m}^{(j)} \right). \end{aligned}$$

Пусть $m = 0$; тогда формула может быть переписана в виде

$$\varphi_n^{(i)} \circ D = \left(\frac{\partial}{\partial x_i} - \sum_{j \neq i} \frac{1}{x_i - x_j} (1 - s_{ij}) \sum_{j \neq i} \frac{1}{x_i - x_j} (1 - \tau_i \tau_j s_{ij}) - \frac{p}{x_i} (1 - \tau_i) \right) \circ \varphi_{n,m}^{(i)}.$$

□

Как и прежде, имеем следующий основной результат.

Теорема 3.10. Дифференциальные операторы $\mathcal{L}_r^\infty$ коммутируют друг с другом:

$$[\mathcal{L}_r^\infty, \mathcal{L}_s^\infty] = 0.$$

Оператор $\mathcal{L}_2^\infty$ имеет следующий явный вид:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_2^\infty = & 8 \sum_{a,b \geq 1} p_{a+b-1} \partial_a \partial_b - 4k \sum_{a,b \geq 0} p_a p_b \partial_{a+b+1} + 4k \sum_{a \geq 0} (a+1) p_a \partial_{a+1} + \\ & + 2 \sum_{a \geq 0} (2a+1) p_a \partial_{a+1} - 4q \sum_{a \geq 0} p_a \partial_{a+1}, \end{aligned} \quad (37)$$

где $\partial_a = a \partial / \partial p_a$.

3.3. Тригонометрический оператор типа A. Несложно проверить, что

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_2 = & \sum_{i=1}^n \left(x_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right)^2 + k \sum_{j=1}^m \left(y_j \frac{\partial}{\partial y_j} \right)^2 - k \sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{x_i + x_j}{x_i - x_j} \left(x_i \frac{\partial}{\partial x_i} - x_j \frac{\partial}{\partial x_j} \right) - \\ & - \sum_{1 \leq i < j \leq m} \frac{y_i + y_j}{y_i - y_j} \left(y_i \frac{\partial}{\partial y_i} - y_j \frac{\partial}{\partial y_j} \right) - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \frac{x_i + y_j}{x_i - y_j} \left(x_i \frac{\partial}{\partial x_i} - k y_j \frac{\partial}{\partial y_j} \right). \end{aligned}$$

Определение 3.11. Бесконечномерным тригонометрическим оператором Данкла типа A называется оператор, определяемый по формуле

$$D = \partial - \frac{1}{2} k \Delta,$$

где ∂ — такое дифференцирование, что

$$\partial(x) = x, \quad \partial(p_r) = r x^r,$$

и

$$\Delta(x^l) = x^l p_0 + 2x^{l-1} p_1 + \cdots + 2x p_{l-1} + p_l - 2l x^l, \quad \Delta(x^l f) = \Delta(x^l) f, \quad \Delta(1) = 0,$$

где $f \in \Lambda$.

Оператор $E : \bar{\Lambda}[x] \rightarrow \bar{\Lambda}$ определяется равенством

$$E(x^l f) = p_l f, \quad f \in \bar{\Lambda}, \quad l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \quad (38)$$

а операторы $\mathcal{L}_r^\infty : \bar{\Lambda} \rightarrow \bar{\Lambda}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, — по формулам

$$\mathcal{L}_r^\infty = \text{Res } E \circ D^r, \quad (39)$$

где Res означает ограничение на $\bar{\Lambda}$. Гомоморфизмы $\varphi_{n,m}^{(i)}$ и столбец F определяются так же, как и в рациональном случае типа A.

Предложение 3.12. На $\bar{\Lambda}[x]$ справедливо соотношение

$$F \circ D = \mathcal{L}F. \quad (40)$$

Следствие 3.13. Пусть $m = 0$; тогда следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{array}{ccc} \bar{\Lambda}[x] & \xrightarrow{D} & \bar{\Lambda}[x] \\ \varphi_{n,0}^{(i)} \downarrow & & \downarrow \varphi_{n,0}^{(i)} \\ \Lambda_{n,0}[x_i] & \xrightarrow{D_i} & \Lambda_{n,0}[x_i], \end{array}$$

где D_i — операторы Данкла—Хекмана:

$$D_i = x_i \frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{1}{2} k \sum_{j \neq i} \frac{x_i + x_j}{x_i - x_j} (1 - s_{ij}),$$

где s_{ij} — транспозиция.

Теорема 3.14 (см. [4, 23, 26]). Дифференциальные операторы $\mathcal{L}^{(r)}$ коммутируют друг с другом:

$$[\mathcal{L}_r^\infty, \mathcal{L}_s^\infty] = 0.$$

Оператор $\mathcal{L}_2^\infty$ имеет следующий явный вид:

$$\mathcal{L}_2^\infty = \sum_{a,b>0} p_{a+b} \partial_a \partial_b - k \sum_{a,b>0} p_a p_b \partial_{a+b} + (1+k) \sum_{a>0} a p_a \partial_a - k p_0 \sum_{a>0} p_a \partial_a, \quad (41)$$

где $\partial_a = a \partial / \partial p_a$.

3.4. Тригонометрический оператор типа B. В этом случае

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_2^{(n,m)} = & \sum_{i=1}^n \partial_i^2 + k \sum_{\alpha=1}^m \partial_\alpha^2 - k \sum_{i<j}^n \left(\frac{x_i + x_j}{x_i - x_j} (\partial_i - \partial_j) + \frac{x_i x_j + 1}{x_i x_j - 1} (\partial_i + \partial_j) \right) - \\ & - \sum_{\alpha<\beta}^m \left(\frac{y_\alpha + y_\beta}{y_\alpha - y_\beta} (\partial_\alpha - \partial_\beta) + \frac{y_\alpha y_\beta + 1}{y_\alpha y_\beta - 1} (\partial_\alpha + \partial_\beta) \right) - \sum_{i=1}^n \left(p \frac{x_i + 1}{x_i - 1} + 2q \frac{x_i^2 + 1}{x_i^2 - 1} \right) \partial_i - \\ & - k \sum_{\alpha=1}^m \left(r \frac{y_\alpha + 1}{y_\alpha - 1} + 2s \sum_{\alpha=1}^n \frac{y_\alpha^2 + 1}{y_\alpha^2 - 1} \right) \partial_\alpha - \sum_{i=1}^n \sum_{\alpha=1}^m \left(\frac{x_i + y_\alpha}{x_i - y_\alpha} (\partial_i - k \partial_\alpha) + \frac{x_i y_\alpha + 1}{x_i y_\alpha - 1} (\partial_i + k \partial_\alpha) \right). \end{aligned}$$

Определение 3.15. Определим бесконечномерный тригонометрический аналог оператора Данкла типа B по формуле

$$D = \partial - \frac{1}{2} k \Delta - \frac{1}{2} p \frac{x+1}{x-1} (1-\theta) - \frac{1}{2} p \frac{x^2+1}{x^2-1} (1-\theta),$$

где ∂ — такое дифференцирование, что

$$\partial(x) = x, \quad \partial(p_r) = r(x^r - x^{-r}), \quad r \in \mathbb{Z}_{\geq 0},$$

а гомоморфизмы $\bar{\Lambda}$ модулей Δ и θ определены следующим образом: $\Delta(1) = 0$,

$$\begin{aligned} \Delta(x^l) &= x^r (p_0 - 2r - 1) - 2 \sum_{j=1}^{r-1} x^{r-2j} - x^{-r} + 2 \sum_{j=1}^{r-1} p_j x^{r-j} + p_r, \\ \Delta(x^{-r}) &= x^{-r} (p_0 - 2r - 1) + 2 \sum_{j=1}^{r-1} x^{r-2j} + x^r - 2 \sum_{j=1}^{r-1} p_j x^{-r+j} - p_r, \end{aligned}$$

где $r > 0$ и

$$\theta(x) = x^{-1}, \quad \theta(p_r) = p_r.$$

Введем линейный оператор $E : \bar{\Lambda}[x] \rightarrow \bar{\Lambda}$ по формуле

$$E(x^r f) = p_{|r|} f, \quad f \in \bar{\Lambda}, \quad r \in \mathbb{Z}, \quad (42)$$

и определим операторы

$$\mathcal{L}_r^\infty : \bar{\Lambda} \rightarrow \bar{\Lambda}, \quad \mathcal{L}_r^\infty = \text{Res } E \circ D^{2r}, \quad r \in \mathbb{Z}_+, \quad (43)$$

где Res означает ограничение на $\bar{\Lambda}$. Определим также гомоморфизмы

$$\varphi_{n,m}^{(i)} : \bar{\Lambda}[x] \rightarrow \mathbb{C}[x_1^{\pm 1}, \dots, x_{n+m}^{\pm 1}]$$

по правилу

$$\varphi_{n,m}^{(i)}(x) = x_i, \quad \varphi_{n,m}^{(i)}(p_r) = p_r(x) + p_{-r}(x) \quad \forall r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}.$$

Столбец F имеет тот же вид, что и в рациональном случае типа B.

Предложение 3.16. На $\bar{\Lambda}[x]$ справедливо соотношение

$$F \circ D = \mathcal{L}F. \quad (44)$$

Следующее утверждение объясняет название и формулы для бесконечномерного оператора Данкла.

Следствие 3.17. Пусть $t = 0$; тогда следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{array}{ccc} \bar{\Lambda}[x, x^{-1}] & \xrightarrow{D} & \bar{\Lambda}[x, x^{-1}] \\ \varphi_{n,0}^{(i)} \downarrow & & \downarrow \varphi_{n,0}^{(i)} \\ \Lambda_{n,0}[x_i, x_i^{-1}] & \xrightarrow{D_i} & \Lambda_{n,0}[x_i, x_i^{-1}], \end{array}$$

где D_i — тригонометрические операторы Данкля—Хекмана типа BC:

$$D_i = \partial_i - \frac{1}{2}k \sum_{j \neq i}^N \left(\frac{x_i + x_j}{x_i - x_j} (1 - s_{ij}^+) + \frac{x_i x_j + 1}{x_i x_j - 1} (1 - s_{ij}^-) \right) - \frac{1}{2}p \frac{x_i + 1}{x_i - 1} (1 - t_i) - q \frac{x_i^2 + 1}{x_i^2 - 1} (1 - t_i);$$

здесь s_{ij} — транспозиция и $t_i(x_i) = x_i^{-1}$, $t_i(x_j) = x_j$, $j \neq i$.

Доказательство легко следует из явной формулы для матрицы Лакса.

Теорема 3.18. Дифференциальные операторы $\mathcal{L}_r^\infty$ коммутируют друг с другом:

$$[\mathcal{L}_r^\infty, \mathcal{L}_s^\infty] = 0,$$

а оператор $\mathcal{L}_2^\infty$ имеет следующий явный вид:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_2^\infty = & 4 \sum_{a,b \geq 1} (p_{a+b} - p_{a-b}) \partial_a \partial_b + 2 \sum_{a \geq 1} (ak + a + k + h) p_a \partial_a + \\ & + 2(k - q) \sum_{a \geq 2} \left(\sum_{j=1}^{a-1} p_{a-2j} \right) \partial_a - p \sum_{a \geq 2} \left(\sum_{j=1}^{2a-1} p_{a-j} \right) \partial_a - 2k \sum_{a \geq 2} \left(\sum_{j=1}^{a-1} p_j p_{a-j} \right) \partial_a. \end{aligned}$$

4. АЛГЕБРЫ ИНТЕГРАЛОВ И СПЕКТРАЛЬНОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ

4.1. Тригонометрический оператор типа A. В этом разделе мы исследуем действие тригонометрической алгебры интегралов деформированной задачи КМС, следуя работе [24]. Предположим, что k — произвольное комплексное число, не равное нулю. Обозначим через $\mathfrak{D}_{n,m}$ подалгебру в алгебре $\mathcal{D}_{\mathcal{R}}^{\text{tr}}$, порожденную интегралами $\mathcal{L}_r$, $r = 1, 2, \dots$.

Рассмотрим теперь алгебру $\mathfrak{A}_{n,m}$, состоящую из $(S_n \times S_m)$ -инвариантных полиномов Лорана $f \in \mathbb{C}[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}, y_1^{\pm 1}, \dots, y_m^{\pm 1}]^{S_n \times S_m}$, удовлетворяющих условию квазиинвариантности

$$x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} - k y_j \frac{\partial f}{\partial y_j} \in (x_i - y_j), \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, m. \quad (45)$$

Предполагаем, что k произвольное, как и в определении алгебры $\mathfrak{D}_{n,m}$. Для любого полинома Лорана

$$f = \sum_{\mu \in X_{n,m}} c_\mu x^\mu, \quad X_{n,m} = \mathbb{Z}^n \oplus \mathbb{Z}^m,$$

рассмотрим множество $M(f)$, состоящее из таких μ , что $c_\mu \neq 0$, и определим носитель $S(f)$ как пересечение выпуклой оболочки $M(f)$ с $X_{n,m}$. Мы утверждаем, что алгебра $\mathfrak{D}_{n,m}$ отображает алгебру $\mathfrak{A}_{n,m}$ в себя.

Теорема 4.1. Операторы $\mathcal{L}_p$ для всех $p = 1, 2, \dots$ отображают алгебру $\mathfrak{A}_{n,m}$ в себя и сохраняют носитель: для любых $D \in \mathfrak{D}_{n,m}$ и $f \in \mathfrak{A}_{n,m}$

$$S(Df) \subseteq S(f).$$

Следствие 4.2. Обозначим через $\mathfrak{A}_{n,m}^+$ подалгебру, состоящую из обыкновенных полиномов. Тогда операторы $\mathcal{L}_p$ для всех $p = 1, 2, \dots$ отображают алгебру $\mathfrak{A}_{n,m}^+$ в себя.

Рассмотрим теперь $\mathfrak{A}_{n,m}$ и $\mathfrak{A}_{n,m}^+$ как модули над $\mathfrak{D}_{n,m}$.

Введем следующий частичный порядок на множестве целых весов $\lambda \in X_{n,m} = \mathbb{Z}^{n+m}$: мы скажем, что $\mu \preceq \lambda$, если и только если

$$\mu_1 \leq \lambda_1, \quad \mu_1 + \mu_2 \leq \lambda_1 + \lambda_2, \quad \dots, \quad \mu_1 + \dots + \mu_{n+m} \leq \lambda_1 + \dots + \lambda_{n+m}. \quad (46)$$

Предложение 4.3. Пусть $f \in \mathfrak{A}_{n,m}$ и λ — максимальные элементы $M(f)$ относительно частичного порядка, определенного выше. Если $D \in \mathfrak{D}_{n,m}$ и $\mu \in M(D(f))$, $\mu \neq \lambda$, то неравенство $\lambda \preceq \mu$ невозможно.

Коэффициент при x^λ в $D(f)$ равен $\varphi(D)(\lambda)c_\lambda$, где c_λ — коэффициент при x^λ в f .

Если λ — единственный максимальный элемент в $M(f)$, то $\mu \preceq \lambda$ для любого μ из $M(D(f))$.

Пусть $\chi : \mathfrak{D}_{\mathcal{R}} \rightarrow \mathbb{C}$ — гомоморфизм алгебр. Определим соответствующее обобщенное собственное подпространство $\mathfrak{A}_{n,m}(\chi)$ как множество всех таких $f \in \mathfrak{A}_{n,m}$, что для каждого $D \in \mathfrak{D}_{n,m}$ существует такое $N \in \mathbb{N}$, что $(D - \chi(D))^N(f) = 0$. Если размерность $\mathfrak{A}_{n,m}(\chi)$ конечна, то соответствующее N можно выбрать независимо от f .

Предложение 4.4. Алгебра $\mathfrak{A}_{n,m}$ как модуль над алгеброй $\mathfrak{D}_{n,m}$ может быть разложена в прямую сумму обобщенных собственных подпространств:

$$\mathfrak{A}_{n,m} = \bigoplus_{\chi} \mathfrak{A}_{n,m}(\chi), \quad (47)$$

где сумма берется по некоторому множеству гомоморфизмов χ (оно будет явно описано в дальнейшем).

Доказательство. Пусть $f \in \mathfrak{A}_{n,m}$. Определим векторное пространство

$$V(f) = \left\{ g \in \mathfrak{A}_{n,m} \mid S(g) \subseteq S(f) \right\}.$$

По теореме 4.1 $V(f)$ является конечномерным модулем над $\mathfrak{D}_{n,m}$. Так как предложение верно для каждого конечномерного модуля, то оно верно и в общем случае. $\square$

Опишем множество таких гомоморфизмов χ , что $\mathfrak{A}_{n,m}(\chi) \neq 0$. Скажем, что целый вес $\lambda \in X_{n,m} \in \mathbb{Z}^{n+m}$ является доминантным, если

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n, \quad \lambda_{n+1} \geq \lambda_{n+2} \geq \dots \geq \lambda_{n+m}.$$

Обозначим через $X_{n,m}^+$ множество доминантных весов. Для каждого $\lambda \in X_{n,m}^+$ определим гомоморфизм

$$\chi_\lambda : \mathfrak{D}_{\mathcal{R}} \rightarrow \mathbb{C}, \quad \chi_\lambda(D) = \varphi(D)(\lambda), \quad D \in \mathfrak{D}_{\mathcal{R}},$$

где φ — гомоморфизм Хариш-Чандры.

Предложение 4.5.

- 1) Для любого $\lambda \in X_{n,m}^+$ существует χ и $f \in \mathfrak{A}_{n,m}(\chi)$, который имеет единственный максимальный моном x^λ .
- 2) $\mathfrak{A}_{n,m}(\chi) \neq 0$, если и только если существует такое $\lambda \in X_{n,m}^+$, что $\chi = \chi_\lambda$.
- 3) Если $\mathfrak{A}_{n,m}(\chi)$ является конечномерным, то его размерность равна числу таких элементов $\lambda \in X_{n,m}^+$, что $\chi_\lambda = \chi$.

Доказательство. Пусть $\mu_1 = \lambda_1, \dots, \mu_n = \lambda_n$, $\nu_1 = \lambda_{n+1}, \dots, \nu_m = \lambda_{n+m}$. Рассмотрим полином Лорана

$$g(x, y) = s_\mu(x) s_\nu(y) \prod_{i,j} \left(1 - \frac{y_j}{x_i} \right)^2,$$

где $s_\mu(x)$, $s_\nu(y)$ — полиномы Шура (см. [9]). Легко проверить, что g принадлежит алгебре $\mathfrak{A}_{n,m}$ и имеет единственный максимальный вес λ . Согласно предложению 4.4, мы можем написать $g = g_1 + \dots + g_N$, где g_i принадлежат различным обобщенным собственным подпространствам. Следовательно, существует такое i , что $\lambda \in M(g_i)$. Так как g_i может быть получено из g посредством применения некоторого элемента из алгебры $\mathfrak{D}_{n,m}$ (который в действительности является проектором на соответствующее обобщенное подпространство в некотором конечномерном подпространстве, содержащем g); следовательно, λ является единственным максимальным элементом в $M(g_i)$ по предложению 4.3. Это доказывает первую часть.

Пусть $\mathfrak{A}_{n,m}(\chi) \neq 0$. Выберем ненулевой элемент f из этого подпространства и выберем также некоторый максимальный элемент $\lambda^{(1)}$ из $M(f)$ и оператор $D \in \mathfrak{D}_{n,m}$. Тогда согласно предложению 4.3 элемент $x^{\lambda^{(1)}}$ не содержится в $f_1 = (D - \chi_{\lambda^{(1)}}(D))(f)$ и $S(f_1) \subset S(f)$. Повторяя эту

процедуру, мы получим последовательность таких элементов $f_0 = f, f_1, \dots, f_N$ и $a_1 = \chi_{\lambda^{(1)}}(D), \dots, a_N = \chi_{\lambda^{(N)}}(D)$, что

$$f_i = (D - a_i)f_{i-1}, \quad i = 1, \dots, N, \quad (D - a_N)f_{N-1} = 0.$$

Следовательно,

$$P(t) = \prod_{i=1}^N (t - a_i)$$

является минимальным полиномом для D в подпространстве $\langle f_0, \dots, f_{N-1} \rangle$. Но это подпространство содержится в $\mathfrak{A}_{n,m}(\chi)$. Следовательно, указанный полином должен быть некоторой степенью полинома $t - \chi(D)$ и, следовательно, $a_1 = a_2 = \dots = a_N = \chi(D)$. В частности, получаем, что $\chi(D) = a_1 = \chi_{\lambda^{(1)}}(D)$ для некоторого $\lambda^{(1)} \in X_{n,r}^+$, что и требовалось.

Обратно, пусть $\lambda \in X_{n,m}^+$. Согласно первой части существуют такие χ и $f \in \mathfrak{A}_{n,m}(\chi)$, что λ — максимальный вес. Следовательно, предыдущие рассуждения показывают, что $\chi = \chi_\lambda$ и, таким образом, $\mathfrak{A}_{n,m}(\chi_\lambda) \neq 0$.

Чтобы доказать третью часть, предположим, что $\mathfrak{A}_{n,m}(\chi)$ конечномерно и что $\lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(N)}$ исчерпывают все различные элементы из $X_{n,m}^+$, обладающие свойством $\chi_{\lambda^{(i)}} = \chi, i = 1, \dots, N$. Согласно первым двум частям $f_i \in \mathfrak{A}_{n,m}(\chi)$ с единственным максимальным весом $\lambda^{(i)}$. Легко видеть, что $f_1, \dots, f_N$ линейно независимы. Для того чтобы показать, что они образуют базис, рассмотрим любое $f \in \mathfrak{A}_{n,m}(\chi)$ и возьмем максимальный вес μ из $M(f)$. В соответствии с предложением 4.3 имеем $\chi_\mu = \chi$; поэтому μ должно совпадать с одним из $\lambda^{(i)}$. Вычитая из f подходящую линейную комбинацию f_i и пользуясь индукцией, получаем требуемый результат. $\square$

Следствие 4.6.

- 1) Множество гомоморфизмов в предложении 4.4 состоит из $\chi = \chi_\lambda, \lambda \in X_{n,m}^+$.
- 2) Для общего значения k

$$\mathfrak{A}_{n,m}^+ = \oplus_\chi \mathfrak{A}_{n,m}^+(\chi), \quad (48)$$

где χ пробегает подмножество всех таких χ_λ , что

$$\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n \geq 0, \quad \lambda_{n+1} \geq \dots \geq \lambda_{n+m} \geq 0, \quad \lambda_n \leq |\{i \mid \lambda_{n+i} > 0\}|$$

и соответствующие собственные подпространства все одномерны.

Собственные функции из предыдущего следствия называются суперполиномами Джека (см. [15]). В общем случае полиномов из алгебры $\mathfrak{A}_{n,m}$ соответствующие собственные функции называются суперполиномами Джека—Лорана.

Рассмотрим теперь несколько иллюстрирующих примеров.

Пример 4.7. Пусть $n = m = 1$,

$$\mathfrak{A}_{1,1} = \left\{ f \in \mathbb{C}[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}] \mid \partial_x f - k \partial_y f \in (x - y) \right\}.$$

Положим для целых (λ, μ)

$$P_{\lambda,\mu} = x^\lambda y^\mu - \frac{\lambda - k\mu}{\lambda - 1 - k(\mu + 1)} x^{\lambda-1} y^{\mu+1}, \quad (\lambda, \mu) \neq (0, 0), (1, -1),$$

$$P_{0,0} = 1, \quad P_{1,-1} = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}.$$

Соответственно, имеем разложение на обобщенные собственные подпространства:

$$\mathfrak{A}_{1,1} = \bigoplus_{(\lambda,\mu) \neq (0,0), (1,1)} \langle P_{\lambda,\mu} \rangle \oplus \langle P_{(0,0)}, P_{(1,-1)} \rangle.$$

Несложно проверить, что образ алгебры интегралов в обобщенном собственном подпространстве $\langle P_{(0,0)}, P_{(1,-1)} \rangle$ равен алгебре двойных чисел $\mathbb{C}[\varepsilon], \varepsilon^2 = 0$.

Если $k \in \mathbb{Q}$, разложение может иметь другой вид.

Пример 4.8. Пусть $k = -1$. Тогда

$$\mathfrak{A}_{1,1} = \left\{ f \in \mathbb{C}[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}] \mid \partial_x f + \partial_y f \in (x - y) \right\}.$$

Это частный случай алгебры суперсимметричных полиномов Лорана. В этом случае имеем

$$\mathfrak{A}_{1,1} = \bigoplus_{\lambda+\mu \neq 0} \langle P_{\lambda,\mu} \rangle \oplus \left\langle \frac{x^a}{y^a}, a \in \mathbb{Z} \right\rangle,$$

и все обобщенные подпространства являются просто собственными подпространствами. Все они одномерные за исключением одного подпространства, которое бесконечномерно.

Пример 4.9. Пусть $k = -1/2$. Тогда

$$\mathfrak{A}_{1,1} = \left\{ f \in \mathbb{C}[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}] \mid \partial_x f + \frac{1}{2} \partial_y f \in (x - y) \right\}.$$

В этом случае мы имеем

$$\mathfrak{A}_{1,1} = \bigoplus_{2\lambda+\mu \neq 0,1} \langle P_{\lambda,\mu} \rangle \oplus \bigoplus_{a \in \mathbb{Z}} \left\langle \frac{x^a}{y^{2a}}, \frac{x^a}{y^{2a}} \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \right) \right\rangle,$$

т.е. то же самое, что и в общем случае.

4.2. Тригонометрический оператор типа B . В этом разделе мы исследуем действие тригонометрической алгебры интегралов деформированной задачи КМС, следуя работе [16]. Обозначим через $\mathfrak{D}_{n,m}$ подалгебру в алгебре $\mathcal{D}_{\mathcal{R}}^{\text{tr}}$, порожденную интегралами $\mathcal{L}_r$, $r = 1, 2, \dots$.

Рассмотрим теперь алгебру $\mathfrak{A}_{n,m}$, состоящую из $W_0 = (S_n \ltimes \mathbb{Z}_2^n) \times (S_m \ltimes \mathbb{Z}_2^m)$ -инвариантных полиномов Лорана $f \in \mathbb{C}[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}, y_1^{\pm 1}, \dots, y_m^{\pm 1}]^{W_0}$, удовлетворяющих условию квазиинвариантности

$$x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} - k y_j \frac{\partial f}{\partial y_j} \in (x_i - y_j), \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, m. \quad (49)$$

Предположим, что k — общее, как и в определении алгебры $\mathfrak{D}_{n,m}$. Утверждается, что алгебра $\mathfrak{D}_{n,m}$ отображает алгебру $\mathfrak{A}_{n,m}$ в себя.

Предложение 4.10. Операторы $\mathcal{L}_p$ для всех $p = 1, 2, \dots$ отображают алгебру $\mathfrak{A}_{n,m}$ в себя и сохраняют носитель: для любого $D \in \mathfrak{D}_{n,m}$ и $f \in \mathfrak{A}_{n,m}$ имеем

$$S(Df) \subseteq S(f).$$

Скажем, что целый вес $\lambda \in X_{n,m} \subset \mathbb{Z}^{n+m}$ является доминантным, если

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n \geq 0, \quad \lambda_{n+1} \geq \lambda_{n+2} \geq \dots \geq \lambda_{n+m} \geq 0, \quad \lambda_n \leq |\{i \mid \lambda_{n+i} > 0\}|.$$

Обозначим через $X_{n,m}^+$ множество доминантных весов. Для каждого $\lambda \in X_{n,m}^+$ определим гомоморфизм

$$\chi_\lambda : \mathfrak{D}_{\mathcal{R}} \rightarrow \mathbb{C}, \quad \chi_\lambda(D) = \varphi(D)(\lambda), \quad D \in \mathfrak{D}_{\mathcal{R}},$$

где φ — гомоморфизм Хариш–Чандры.

Теорема 4.11. Алгебра $\mathfrak{A}_{n,m}$ как модуль над алгеброй $\mathfrak{D}_{n,m}$ при общем значении k может быть разложена в прямую сумму одномерных собственных подпространств:

$$\mathfrak{A}_{n,m} = \bigoplus_{\chi} \mathfrak{A}_{n,m}(\chi), \quad (50)$$

где сумма берется по множеству гомоморфизмов $\chi = \chi_\lambda$, $\lambda \in X^+$.

Определение 4.12. Собственная функция SJ_λ , отвечающая гомоморфизму χ_λ , называется суперполиномом Якоби. Несложно показать, что старший (в лексикографическом порядке) моном равен $c_\lambda x_1^{\lambda_1} \dots x_n \lambda_n y_1^{\lambda_{n+1}} \dots y_m^{\lambda_{n+m}}$, где $c_\lambda \neq 0$.

5. ТЕОРИЯ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ И КВАНТОВЫЕ СИСТЕМЫ КМС

В классическом случае (т.е. при $m = 0$) собственные функции операторов КМС при подходящей специализации параметров дают либо характеры неприводимых конечномерных представлений соответствующих алгебр Ли, либо дают сферические функции связанные с симметрическими алгебрами Ли (см. [9]). В случае супералгебр Ли связь между системами КМС и представлениями соответствующих супералгебр устроена более сложно. Общая картина не ясна в настоящее время. Частичные результаты в этом направлении приводятся ниже.

5.1. Представления супералгебры $\mathfrak{gl}(n, m)$ и системы КМС. Рассмотрим сначала случай полиномиальных представлений. Напомним, что представление супералгебры Ли $\mathfrak{gl}(n, m)$ называется полиномиальным, если оно является подпредставлением тензорной алгебры тождественного представления. Известно (см. [3]), что тензорная алгебра тождественного представления вполне приводима как модуль над супералгеброй Ли $\mathfrak{gl}(n, m)$, а соответствующие неприводимые слагаемые нумеруются такими разбиениями λ , что $\lambda_{n+1} \leq m$. Обозначим категорию полиномиальных модулей через $\mathcal{F}^+$. В общем случае обозначим через $\mathcal{F}$ категорию конечномерных модулей над супералгеброй $\mathfrak{gl}(n, m)$, которые также предполагаются диагонализруемыми над выбранной подалгеброй Картана.

Определение 5.1. Алгебра Гротендика над полем $\mathbb{C}$ категории $\mathcal{F}$ (соответственно, $\mathcal{F}^+$) это алгебра, порожденная классами изоморфизма конечномерных модулей, подчиненных соотношениям

$$\begin{aligned} [V] &= [V_1] + [V_2] \quad \text{если} \quad 0 \rightarrow V_1 \rightarrow V \rightarrow V_2 \rightarrow 0, \\ [V_1 \otimes V_2] &= [V_1][V_2]. \end{aligned}$$

Обозначим эти алгебры соответственно через $K(\mathcal{F})$ и $K(\mathcal{F}^+)$. Несложно показать, что $K(\mathcal{F})$ и $K(\mathcal{F}^+)$ имеют базис, состоящий из классов неприводимых представлений.

Определение 5.2. Пусть V — модуль из категории $\mathcal{F}$ или $\mathcal{F}^+$. Представим его как прямую сумму неприводимых $\mathfrak{h}$ модулей:

$$V = \bigoplus_{\lambda \in (\mathfrak{f})^*} V(\lambda).$$

Тогда функция

$$\text{sch}(V) = \sum_{\lambda} \text{sdim}(V(\lambda)) x^{\lambda}$$

называется суперхарактером V , где

$$\text{sdim } V(\lambda, \mu) = \dim V(\lambda, \mu)_0 - \dim V(\lambda, \mu)_1.$$

Пусть также $U(\mathfrak{gl}(n, m))$ — универсальная обертывающая алгебра и $Z(\mathfrak{gl}(n, m))$ — ее центр. Каждый элемент центра действует как скалярный оператор в каждом неприводимом модуле. Тем самым мы имеем естественное действие $Z(\mathfrak{gl}(n, m))$ на $K(\mathcal{F})$. Теперь мы можем сформулировать следующую теорему.

Теорема 5.3. *Отображение взятия суперхарактера*

$$\text{sch} : K(\mathcal{F}) \rightarrow \mathfrak{A}_{n,m}$$

является изоморфизмом алгебр и переводит действие $Z(\mathfrak{gl}(n, m))$ в действие $\mathfrak{D}_{n,m}$.

При ограничении на $K(\mathcal{F}^+)$ предыдущее отображение задает изоморфизм

$$\text{sch} : K(\mathcal{F}^+) \rightarrow \mathfrak{A}_{n,m}^+$$

и переводит действие $Z(\mathfrak{gl}(n, m))$ в действие $\mathfrak{D}_{n,m}$. При этом неприводимые модули отображаются в суперфункции Шура (см. [3]).

Рассмотрим симметрическую супералгебру Ли $(\mathfrak{gl}(2n+1, 2m), \theta)$, где θ — инволютивный автоморфизм, неподвижной подалгеброй которого является ортосимплектическая супералгебра Ли $\mathfrak{osp}(2n+1, 2m)$. Существует естественный сюръективный гомоморфизм

$$\psi : Z(\mathfrak{gl}(2n+1, 2m)) \rightarrow \mathfrak{D}_{n,m},$$

который называется гомоморфизмом радиальной части. Следовательно, мы можем рассматривать алгебру $\mathfrak{A}_{n,m}$ как модуль на алгеброй $Z(\mathfrak{gl}(2n+1, 2m))$. Основным результатом в этом случае можно сформулировать следующим образом (см. [24]).

Теорема 5.4. Пусть $\mathfrak{D}_{n,m}$ — алгебра деформированных операторов КМС с параметром $k = -1/2$, которая естественно действует на алгебре $\mathfrak{A}_{n,m}$ деформированных полиномов Лорана с параметром $k = -1/2$, и

$$\mathfrak{A}_{n,m} = \bigoplus_{\chi} \mathfrak{A}_{n,m}(\chi)$$

— разложение в прямую сумму обобщенных собственных подпространств. Тогда для любого обобщенного конечномерного подпространства $\mathfrak{A}_{n,m}(\chi)$ существует единственный проективный неразложимый модуль P над $\mathfrak{gl}(2n+1, 2m)$ и естественное отображение

$$\psi : (P^*)^b \rightarrow \mathfrak{A}_{n,m}(\chi),$$

которое является изоморфизмом векторных пространств и $Z(\mathfrak{gl}(2n+1, 2m))$ модулей.

5.2. Ортосимплектические супералгебры и системы КМС. Рассмотрим случай ортосимплектической супералгебры Ли $\mathfrak{osp}(2m+1, 2n)$ (случай супералгебры $\mathfrak{osp}(2m, 2n)$ рассматривается аналогично). Мы приводим кратко два основных результата, показывающих связи теории представлений супералгебры $\mathfrak{osp}(2m+1, 2n)$ и соответствующей системы КМС. Первый из описывает алгебру Гротендика как интегрируемую систему. Пусть, как и прежде, $K(\mathcal{F})$ — алгебра Гротендика категории конечномерных представлений супералгебры $\mathfrak{osp}(2m+1, 2n)$ с действием обертывающей алгебры, которое было описано в предыдущем пункте, а $\mathfrak{A}_{n,m}$ и $\mathfrak{D}_{n,m}$ — те же, что и в формулировке теоремы 4.11, взятые при $k = p = -1$, $q = 0$.

Теорема 5.5. Отображение взятия суперхарактера

$$\text{sch} : K(\mathcal{F}) \rightarrow \mathfrak{A}_{n,m}$$

является изоморфизмом алгебр и переводит действие $Z(\mathfrak{gl}(n, m))$ в действие $\mathfrak{D}_{n,m}$.

Доказательство следует из результатов [20]. Второй результат показывает возможные специализации суперполиномов Якоби. Для любой параболической подалгебры $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{g}$ и любого конечномерного представления M of $\mathfrak{p}$ согласно суперверсии конструкции Бореля—Вейля—Ботта можно определить соответствующий суперхарактер Эйлера $E^p(M)$. Согласно общему результату Сергановой (см. [7])

$$E^p(M) = \sum_{w \in W_0} w \left(\frac{D e^\rho \text{sch } M}{\prod_{\alpha \in R_p \cap R_1^+} (1 - e^{-\alpha})} \right), \quad (51)$$

где

$$D = \frac{\prod_{\alpha \in R_1^+} (e^{\alpha/2} - e^{-\alpha/2})}{\prod_{\alpha \in R_0^+} (e^{\alpha/2} - e^{-\alpha/2})}.$$

Здесь ρ — полусумма четных положительных корней минус полусумма нечетных положительных корней, R_p — множество таких корней α , что $\mathfrak{g}_{\pm\alpha} \subset \mathfrak{p}$.

Основной результат [19] можно сформулировать следующим образом.

Теорема 5.6. *Повторный предел суперполиномов Якоби SJ_λ , когда сначала $k \rightarrow -1$, а затем $(p, q) \rightarrow (-1, 0)$, корректно определен и совпадает с характером Эйлера $E^{\mathfrak{p}(\lambda)}(\chi)$ для супералгебры Ли $\mathfrak{osp}(2m+1, 2n)$, где $\mathfrak{p}(\lambda)$ — некоторая параболическая подалгебра (зависящая от λ), а χ — некоторое ее одномерное представление (также зависящее от λ).*

6. БЕСКОНЕЧНОМЕРНЫЕ ВЕРСИИ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ

Бесконечномерные аналоги квантовых интегралов и соответствующие собственные функции играют важную роль в теории квантовых деформированных систем КМС. Как было показано в разделе 3, интегралы деформированной задачи КМС можно получить посредством редукции из бесконечномерных интегралов. Впервые это было замечено в [15] на примере тригонометрической деформированной системы типа A . В этой же работе исследовался вопрос о том, какие еще интегрируемые системы можно получить таким образом. Мы следуем в этом разделе работам [21, 23]. Чтобы определить симметрические функции Джека—Лорана, введем лорановскую версию алгебры симметрических функций. По определению, алгебра $\Lambda^\pm$ — это алгебра, свободно порожденная переменными (бесконечными степенными суммами) p_i , $i \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Мы также будем рассматривать «бесконечную сумму нулевых степеней» p_0 как дополнительный формальный параметр.

Пусть $\Lambda^\pm[x, x^{-1}]$ — алгебра полиномов Лорана от x над алгеброй $\Lambda^\pm$. Определим дифференцирование ∂ в $\Lambda^\pm[x, x^{-1}]$:

$$\partial(x) = x, \quad \partial(p_l) = lx^l,$$

и оператор

$$\begin{aligned} \Delta : \Lambda^\pm[x, x^{-1}] &\rightarrow \Lambda^\pm[x, x^{-1}], \quad \Delta(x^l f) = \Delta(x^l) f, \quad \Delta(1) = 0, \quad f \in \Lambda^\pm, \quad l \in \mathbb{Z}, \\ \Delta(x^l) &= x^l p_0 + 2x^{l-1} p_1 + \cdots + 2x p_{l-1} + p_l - 2lx^l, \quad l > 0, \\ \Delta(x^l) &= -(\Delta(x^{-l}))^*, \quad l < 0, \quad \text{где } x^* = x^{-1}. \end{aligned}$$

Определим бесконечномерные аналоги операторов Данкля—Хекмана:

$$D : \Lambda^\pm[x, x^{-1}] \rightarrow \Lambda^\pm[x, x^{-1}], \quad D = \partial - \frac{1}{2}k\Delta. \quad (52)$$

Введем также линейный оператор

$$E : \Lambda^\pm[x, x^{-1}] \rightarrow \Lambda^\pm, \quad E(x^l f) = p_l f, \quad f \in \Lambda, \quad l \in \mathbb{Z}, \quad (53)$$

и операторы

$$\mathcal{L}_r^\infty : \Lambda^\pm \rightarrow \Lambda^\pm, \quad \mathcal{L}_r^\infty = E \circ D^r, \quad r \in \mathbb{Z}_+ \quad (54)$$

где действие правой части ограничено на $\Lambda^\pm$. Мы утверждаем, что эти операторы дают лорановскую версию квантовых интегралов в бесконечности.

Теорема 6.1. *Оператор $\mathcal{L}_r^\infty$ является дифференциальным оператором порядка r , который полиномиально зависит от p_0 . Оператор $\mathcal{L}_2^\infty$ имеет следующую явную форму:*

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_2^\infty = \sum_{a,b \in \mathbb{Z}} p_{a+b} \partial_a \partial_b - k \left[\sum_{a,b > 0} p_a p_b \partial_{a+b} - \sum_{a,b < 0} p_a p_b \partial_{a+b} \right] - \\ - kp_0 \left[\sum_{a > 0} p_a \partial_a - \sum_{a < 0} p_a \partial_a \right] + (1+k) \sum_{a \in \mathbb{Z}} a p_a \partial_a, \quad (55) \end{aligned}$$

где $\partial_a = a\partial/\partial p_a$, и является лорановской версией оператора КМС в бесконечности.

Операторы $\mathcal{L}_r^\infty$ коммутируют друг с другом:

$$[\mathcal{L}_r^\infty, \mathcal{L}_s^\infty] = 0.$$

Пусть $\mathcal{P}$ — множество всех разбиений (или диаграмм Юнга). Под *двойным разбиением* мы подразумеваем пару разбиений $\alpha = (\lambda, \mu) \in \mathcal{P} \times \mathcal{P}$. Определим *длину двойного разбиения* $\alpha = (\lambda, \mu)$ как $l(\alpha) := l(\lambda) + l(\mu)$. Пусть $l(\alpha) \leq N$; тогда определим

$$\chi_N(\alpha) = \left(\underbrace{\lambda_1, \dots, \lambda_r, 0, \dots, 0, \mu_s, \dots, -\mu_1}_N \right). \quad (56)$$

и симметричный полином

$$P_{\chi_N(\alpha)}(x_1, \dots, x_N) = (x_1 \dots x_N)^{-a} P_\nu(x_1, \dots, x_N),$$

где a — такое целое неотрицательное число, что $\nu = \chi + a$ является разбиением и $P_\nu(x_1, \dots, x_N)$ — обычный полином Джека. Пусть $\Lambda^\pm(p_0)$ — алгебра рациональных функций от p_0 с коэффициентами из $\Lambda^\pm$, а $\varphi_N : \Lambda^\pm(p_0) \rightarrow \Lambda_N^\pm$ — гомоморфизм, определенным формулой $\varphi_N(p_i) = x_1^i + \dots + x_N^i$, $i \in \mathbb{Z}$, и специализацией $p_0 = N$.

Определим теперь *симметрические функции Джека—Лорана* $P_\alpha \in \Lambda^\pm(p_0)$ следующим образом.

Теорема 6.2. *Если $k \notin \mathbb{Q}$, $p_0 \neq n + k^{-1}m$ для любых $m, n \in \mathbb{Z}_{>0}$, то для любого двойного разбиения α существует такой единственный элемент $P_\alpha \in \Lambda^\pm(p_0)$ (называемый симметрической функцией Джека—Лорана), что для каждого $N \in \mathbb{N}$*

$$\varphi_N(P_\alpha) = \begin{cases} P_{\chi_N(\alpha)}(x_1, \dots, x_N), & \text{если } l(\alpha) \leq N, \\ 0, & \text{если } l(\alpha) > N. \end{cases} \quad (57)$$

Можно проверить, что определенные таким образом симметрические функции для общего значения p_0 являются собственными для бесконечномерных операторов, определенных в теореме 6.1. Для специальных значений p_0 это не так. Может оказаться, что функции P_α не определены при таких значениях p_0 и в общем случае вместо разложения на собственные подпространства нужно рассматривать разложение на обобщенные собственные подпространства.

Рассмотрим теперь случай специального значения параметров, когда $p_0 = n + k^{-1}m$, $n, m \in \mathbb{Z}_{>0}$. Обозначим через $\pi(n, m)$ прямоугольную диаграмму Юнга размера $n \times m$ и соответствующее двойное разбиение $\pi = (\pi(n, m), \pi(n, m))$. Определим центральную симметрию θ , действующую на $(ij) \in \pi(n, m)$ по формуле $\theta(ij) = (n - i + 1, m - j + 1)$. Введем теперь отношение эквивалентности на двойных разбиениях. Ниже теоретико-множественные операции на разбиениях понимаются как операции на диаграммах Юнга.

Определение 6.3. Двойное разбиение $\alpha = (\lambda, \mu)$ эквивалентно двойному разбиению $\tilde{\alpha} = (\tilde{\lambda}, \tilde{\mu})$, если

$$\alpha \setminus \pi = \tilde{\alpha} \setminus \pi \quad \text{и} \quad \theta(\lambda \setminus \tilde{\lambda}) = \mu \setminus \tilde{\mu}, \quad \theta(\tilde{\lambda} \setminus \lambda) = \tilde{\mu} \setminus \mu. \quad (58)$$

Оказывается, что каждый класс эквивалентности E состоит из 2^r элементов, где число r зависит от класса E . Пусть $\mathcal{D}^\infty$ — алгебра, порожденная интегралами $\mathcal{L}_r^\infty$, $r = 1, 2, \dots$. Следующая теорема описывает структуру $\Lambda^\pm$ как модуля над $\mathcal{D}^\infty$, а также действие $\mathcal{D}^\infty$ в обобщенных собственных подпространствах.

Теорема 6.4.

- 1) Алгебра $\Lambda^\pm$ как модуль над алгеброй $\mathcal{D}^\infty$ может быть разложена в прямую сумму обобщенных собственных подпространств:

$$\Lambda^\pm = \bigoplus_E \Lambda^\pm(E),$$

где сумма берется по всем классам эквивалентности.

- 2) Если класс E содержит 2^r элементов и k не является алгебраическим числом, то образ алгебры $\mathcal{D}^\infty$ в алгебре $\text{End}(\Lambda^\pm(E))$ изоморфен тензорному произведению r копий алгебры дуальных чисел

$$\mathbb{C}[\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_r] / (\varepsilon_1^2, \varepsilon_2^2, \dots, \varepsilon_r^2).$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Веселов А. П., Чалых О. А., Фейгин М. В. Новые интегрируемые деформации квантовой задачи Калоджеро—Мозера// Усп. мат. наук. — 1996. — 51, № 3. — С. 185–186.
2. Ольшанецкий М. А., Переломов А. М. Квантовые системы связанные с системами корней и радиальны части операторов Лапласа// Функци. анал. прилож. — 1978. — 12. — С. 121–128.
3. Сергеев А. Н. Тензорная алгебра тождественного представления как модуль над супералгебрами Ли $\mathfrak{gl}(n, m)$ и $\mathfrak{q}(n)$ // Мат. сб. — 1984. — 123, № 3. — С. 422–430.
4. Awata H. Hidden algebraic structure of the Calogero—Sutherland model, integral formula for Jack polynomials and their relativistic analog// In: Calogero—Moser—Sutherland Models. Montreal, QC, 1997/ CRM Ser. Math. Phys. — New York: Springer, 2000. — С. 23–35.
5. Calogero F., Marchioro C., Ragnisco O. Exact solution of the classical and quantum one-dimensional many-body problems with the two-body potential// Lett. Nuovo Cim. — 1975. — 13, № 10. — С. 383.
6. Chalykh O. A., Feigin M. V., Veselov A. P. Multidimensional Baker—Akhiezer functions and Huygens principle// Commun. Math. Phys. — 1999. — 206, № 2. — С. 533–566.
7. Gruson C., Serganova V. Cohomology of generalized super Grassmannians and character formula for basic classical Lie superalgebras// Proc. London Math. Soc. — 2010. — 101, № 3. — С. 852–892.
8. Kasatani M., Miwa T., Sergeev A. N., Veselov A. P. Coincident root loci and Jack and Macdonald polynomials for special values of the parameters// Contemp. Math. — Am. Math. Soc., Providence, Rhode Island, 2006. — 417. — С. 207–225.
9. Macdonald I. G. Symmetric Functions and Hall Polynomials. — Oxford: Oxford Univ. Press, 1995.
10. Nazarov M., Sklyanin E. Integrable hierarchy of the quantum Benjamin—Ono equation// SIGMA — 2013. — 9. — С. 078; arXiv:1309.6464.
11. Serganova V. On generalization of root system// Commun. Algebra. — 1996. — 24 (13). — С. 4281–4299.
12. Sergeev A. N. Calogero operator and Lie superalgebras// Theor. Math. Phys. — 2002. — 131, № 3. — С. 747–764.
13. Sergeev A. Projective Schur functions as bispherical functions on certain homogeneous superspaces// In: Orbit Method in Geometry and Physics/ Progr. Math. — Boston: Birkhäuser, 2003. — 213. — С. 421–443.
14. Sergeev A. N., Veselov A. P. Deformed quantum Calogero—Moser problems and Lie superalgebras// Commun. Math. Phys. — 2004. — 245, № 2. — С. 249–278.
15. Sergeev A. N., Veselov A. P. Generalised discriminants, deformed Calogero—Moser—Sutherland operators, and super-Jack polynomials// Adv. Math. — 2005. — 192. — С. 341–375.
16. Sergeev A. N., Veselov A. P. BC_∞ Calogero—Moser operator and super Jacobi polynomials// Adv. Math. — 2009. — 222, № 5. — С. 1687–1726.
17. Sergeev A. N., Veselov A. P. Deformed Macdonald—Ruijsenaars operators and super Macdonald polynomials// Commun. Math. Phys. — 2009. — 228. — С. 653–675.
18. Sergeev A. N., Veselov A. P. Quantum Calogero—Moser systems: a view from infinity/ arXiv:0910.5463
19. Sergeev A. N., Veselov A. P. Euler characters and super Jacobi polynomials// Adv. Math. — 2011. — 226. — С. 4286–4315.
20. Sergeev A. N., Veselov A. P. Grothendieck rings of basic classical Lie superalgebras// Ann. Math. — 2011. — 173. — С. 663–703.
21. Sergeev A. N., Veselov A. P. Jack—Laurent symmetric functions// Proc. London Math. Soc. (3). — 2015. — 111. — С. 63–92.
22. Sergeev A. N., Veselov A. P. Dunkl operators at infinity and Calogero—Moser systems// Int. Math. Res. Not. — 2015. — 21. — С. 10959–10986.
23. Sergeev A. N., Veselov A. P. Jack—Laurent symmetric functions for special values of the parameters// Glasgow Math. J. — 2016. — 58, № 3. — С. 599–616.
24. Sergeev A. N., Veselov A. P. Symmetric Lie superalgebras and deformed quantum Calogero—Moser problem// Adv. Math. — 2017. — 304. — С. 728–768.
25. Shastri B. S., Sutherland B. Super Lax pairs and infinite symmetries in the $1/r^2$ system// Phys. Rev. Lett. — 1993. — 70, № 26. — С. 4029–4033.
26. Stanley R. Some combinatorial properties of Jack symmetric functions// Adv. Math. — 1989. — 77, № 1. — С. 76–115.
27. Ujino H., Hikami K., Wadati M. Integrability of the quantum Calogero—Moser model// J. Phys. Soc. Jpn. — 1992. — 61, № 10. — С. 3425.
28. Veselov A. P. On generalization of the Calogero—Moser—Sutherland quantum problem and WDVV equation// J. Math. Phys. — 2002. — 43, № 11. — С. 5675–5682.

29. *Wadati M., Hikami K., Ujino H.* Integrability and algebraic structure of the quantum Calogero—Moser model// Chaos Solitons Fractals. — 1993. — 3, № 6. — С. 627–636.

А. Н. Сергеев

Саратовский национальный исследовательский государственный университет
им. Н. Г. Чернышевского;

Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»

E-mail: SergeevAN@info.sgu.ru, asergeev@hse.ru



η -ФУНКЦИЯ ДЕДЕКИНДА В СОВРЕМЕННЫХ ИССЛЕДОВАНИЯХ

© 2017 г. Г. В. ВОСКРЕСЕНСКАЯ

Аннотация. В работе описаны свойства η -функции Дедекинда, возникающие из нее конструкции и их применения в различных областях теории чисел и алгебры. Обсуждается связь с теорией представлений групп и исследованием структуры пространств модулярных форм. Особое внимание уделено специальному классу модулярных форм — η -произведениям с мультипликативными коэффициентами.

Ключевые слова: модулярные формы, параболические формы, η -функция Дедекинда, комбинаторные тождества, представления групп, структурные теоремы.

AMS Subject Classification: 11F11, 20C05

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение	103
2. Определения и основные свойства	105
3. Модулярные формы и конечные группы	118
4. Конечные группы и ассоциированные с ними семейства модулярных форм	126
5. Арифметика и структура пространств	129
Список литературы	136

1. ВВЕДЕНИЕ

Теория модулярных форм — очень красивая и активно развивающейся областью современной математики. Она пересекается с различными ветвями математики: комплексным анализом, теорией чисел, алгебраической геометрией, теорией представлений, — и развивается под сильным воздействием этих областей. В свою очередь результаты теории модулярных форм имеют различные приложения. Особую роль играют функции, выражающиеся через η -функцию Дедекинда. Они исследуются со времен классиков — Кронекера, Вебера, Дедекинда и др. — до настоящего времени с неослабевающим интересом.

Необходимые читателю классические сведения из теории модулярных форм можно найти в монографиях [9, 10, 11, 12, 46], из теории чисел — в [1], из теории групп — в [13].

В обзоре мы расскажем о новых результатах и направлениях исследований, в которых η -функция Дедекинда рассматривается с разных точек зрения. Эти открытия отражены в основном в журнальных статьях, и очень интересно рассказать о них в едином обзоре. Мы надеемся, что это будет способствовать привлечению новых исследователей к этим увлекательным задачам.

Сначала мы приводим основные определения теории модулярных форм и, прежде всего, формулировку теоремы Коэна—Остерле, которая является сегодня основой для вычисления размерностей пространств модулярных форм. Далее дается определение η -функции Дедекинда. Ее по справедливости можно считать одной из основных функций в теории модулярных форм; это подтверждается тем, что два основных ряда Эйзенштейна $E_4(z)$ и $E_6(z)$ являются η -полиномами.

Исследованиями η -полиномов и комбинаторных тождеств, содержащих η -функцию, активно занимаются Д. Цагир, Г. Келер, К. Оно и многие другие авторы. Новые результаты появляются каждый год. Сама η -функция Дедекинда не является модулярной формой, но можно строить η -частные, которые уже являются модулярными формами, вычислять их уровни, веса и характеристики. В п. 2.7 мы приводим детальное доказательство теоремы, которая позволяет это делать. Мы следуем идеям, приведенным Д. Даммитом, Х. Кисилевски и Дж. МакКеем в [21]. Это доказательство не публиковалось на русском языке, и в статье [21] оно приведено с сокращениями, поэтому важно привести его полностью. Следующим интересным моментом является формула для вычисления порядка нуля η -частного в параболической вершине. Она была открыта в 1990 г. А. Биаджиоли.

В 1985 г. Д. Даммит, Х. Кисилевски и Дж. МакКей открыли удивительный класс модулярных форм — η -произведения с мультипликативными коэффициентами; он содержит 28 форм целого веса и 2 формы полуполого веса, которые называются мультипликативными η -произведениями, или функциями МакКея. Самая известная из них — форма

$$\Delta(z) = \eta^{24}(z) = \frac{1}{1728} \cdot (E_4^3(z) - E_6^2(z)) = \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n)q^n;$$

ее коэффициенты — значения функции Рамануджана. Все эти функции приведены в таблице с указанием весов, уровней и характеров. Затем в 1996 г. Ив Мартин получил список η -частных с мультипликативными коэффициентами; его мы также приводим.

В следующем разделе рассказывается о том, как η -частные связываются с элементами конечных групп с помощью точных представлений. Эта теория называется по-английски «frame-shape-correspondence». А. И. Кострикин предложил называть ее по-русски «теорией фрейм-форм». Первые исследования в этом направлении провел М. Ньюман в статьях 1958–1962 гг., но ее настоящее развитие началось во второй половине 1980-х гг. в работах Дж. Мейсона и его учеников. Мы расскажем о природе этого соответствия и об исследованиях по классификации конечных $M\eta P$ -групп.

$M\eta P$ -группа — это такая конечная группа, что все модулярные формы, ассоциированные с элементами группы с помощью некоторого точного представления, являются мультипликативными η -произведениями. В классификации таких групп получен следующий интересный результат. Конечная простая группа G является простой $M\eta P$ -группой тогда и только тогда, когда G — простая подгруппа в M_{24} . Если конечная группа G является подгруппой в простой группе Ли, то можно изучить связь между характером Рамануджана, определенного на группе G , с характером Вейля.

В исследованиях последних лет часто звучит мысль о том, что «модулярные формы живут в семействах». В обзоре мы расскажем о том, как эта общая идея может быть реализована с помощью теории фрейм-соответствия. Между модулярными формами и группами можно определить связи, идейно аналогичные алгебраической зависимости между числами или функциями. Мы расскажем также о том, как конечные наборы модулярных форм однозначно определяют группу.

В последней части обзора мы остановимся на арифметических проблемах теории модулярных форм. Изучение коэффициентов Фурье считается одной из основных задач теории модулярных форм: во многих работах изучаются асимптотическое поведение, обращение в ноль, сравнения для коэффициентов и другие задачи. Изучение коэффициентов функций МакКея интересно прежде всего тем, что они мультипликативны. Мы расскажем об исследованиях японских математиков, прежде всего Т. Хиромацу и М. Койке. Они показывают, как множество простых чисел, по модулю которых некоторые многочлены разлагаются на линейные множители, описывается условием на коэффициенты модулярных форм.

Далее мы приведем определение сумм Шимуры, которые появляются в его работах, но их определение было дано Кеном Оно. Приведены их свойства. В последнем разделе мы расскажем о том, как используются η -частные при исследовании структуры пространств модулярных форм.

Важным свойством здесь является то, что η-функция Дедекинда не имеет нулей на верхней полуплоскости.

2. ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА

2.1. Определение модулярной формы. На верхней комплексной полуплоскости H дробно-линейными преобразованиями действует полная модулярная группа $\Gamma = SL_2(\mathbb{Z})$. Группа

$$\Gamma(N) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma : a \equiv d \equiv 1(N), b \equiv c \equiv 0(N) \right\}$$

называется *главной конгруэнц-подгруппой*. В этой теории важную роль играет «слэш»-оператор, действующий на комплекснозначные функции, определенные на верхней полуплоскости:

$$f|_k[\gamma] = (cz + d)^{-k} f\left(\frac{az + b}{cz + d}\right), \quad \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}).$$

Рассмотрим конгруэнц-подгруппу $\tilde{\Gamma} : \Gamma(N) \subset \tilde{\Gamma} \subset \Gamma$. *Параболическими вершинами* называются классы эквивалентных относительно $\tilde{\Gamma}$ точек в $\mathbb{Q} \cup \infty$; так же называются и представители классов эквивалентности. Пусть χ — характер Дирихле по модулю N , $k \in \mathbb{Z}$.

Определение. Функция $f : H \rightarrow \mathbb{C}$ называется *модулярной формой* веса k относительно $\tilde{\Gamma}$ с характером χ , если

- 1) $f|_k[\gamma] = \chi(d) \cdot f(z)$ для всех $\gamma \in \tilde{\Gamma}$;
- 2) $f(z)$ голоморфна на H и в параболических вершинах.

Первое условие называется *условием автоморфности*. Второе условие трактуется следующим образом: голоморфность на H понимается в обычном смысле, а голоморфность в ∞ определяется с помощью ряда Фурье. Так как $f(z + 1) = f(z)$, то существует разложение $f(z)$ в ряд Фурье в ∞ :

$$f(z) = \sum_{n=n_0}^{\infty} a(n)q^n, \quad q = e^{2\pi iz}.$$

Если $n_0 \geq 0$, то говорят, что $f(z)$ *голоморфна* в ∞ . Голоморфность в других параболических вершинах определяется с использованием дробно-линейного преобразования, связывающего ∞ с рассматриваемой параболической вершиной: если $s_0 \in \mathbb{Q}$, $s_0 = \alpha(\infty)$, $\alpha \in \Gamma$, то ряд Фурье в s_0 определяется выражением

$$f|_k[\alpha] = \sum_{n=n_0}^{\infty} a(n)q_N^n, \quad q = e^{\frac{2\pi iz}{N}}.$$

Число

$$\text{ord}_{s_0}(f) = n_0 = \{ \min n : a(n) \neq 0 \}$$

называется *порядком* $f(z)$ в точке s_0 ; оно не зависит от выбора представителя в классе эквивалентных параболических вершин. Если $n_0 \geq 0$, то $f(z)$ называется *голоморфной* в s_0 . Если $\text{ord}_{s_0}(f) > 0$ для всех параболических вершин s_0 , то $f(z)$ называется *параболической формой*.

Модулярные формы веса k относительно $\tilde{\Gamma}$ с характером χ образуют линейное пространство $M_k(\tilde{\Gamma}, \chi)$, параболические формы веса k относительно $\tilde{\Gamma}$ с характером χ образуют линейное пространство $S_k(\tilde{\Gamma}, \chi)$.

Если

$$\tilde{\Gamma} = \Gamma_0(N) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma : c \equiv 0(N) \right\},$$

то говорят, что модулярная форма имеет уровень N . Указанные выше пространства обозначаются в этом случае

$$M_k(\Gamma_0(N), \chi) = M_k(N, \chi), \quad S_k(\Gamma_0(N), \chi) = S_k(N, \chi).$$

Если χ — тривиальный характер, то пространства обозначаются $M_k(N)$, $S_k(N)$. Если $\tilde{\Gamma} = \Gamma$, то пространства обозначаются M_k , S_k . Важнейшими модулярными формами являются ряды Эйзенштейна

$$E_k(z) = 1 - \frac{2k}{B_k} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{k-1}(n) q^n;$$

здесь B_k — числа Бернулли,

$$\sigma_{k-1}(n) = \sum_{d|n} d^{k-1}.$$

При четном $k \geq 4$ справедливо $E_k(z) \in M_k$ (см. [10]). Известно, что любой элемент из M_k является однородным многочленом от $E_4(z)$ и $E_6(z)$.

2.2. Размерности. Формула Коэна—Остерле. В 1977 г. французские математики А. Коэн и Ж. Остерле доказали формулу, которая в современных исследованиях является основной формулой для вычисления размерностей. Она не дает хорошего ответа только при $k = 1$; в этом случае требуются дополнительные соображения, и вопрос до конца не исследован. Прежде чем ее сформулировать, надо ввести некоторые обозначения.

Пусть χ — характер Дирихле, $\chi(-1) = (-1)^k$, f — его кондуктор. Если $p|N$, то обозначим через r_p максимальную степень, в которой p делит N , а через s_p — максимальную степень, в которой p делит f . Имеем

$$\lambda(r_p, s_p, p) = \begin{cases} p^{r'} + p^{r'-1}, & 2s_p \leq r_p = 2r', \\ 2p^{r'}, & 2s_p \leq r_p = 2r' + 1, \\ 2p^{r_p - s_p}, & 2s_p \geq r_p. \end{cases}$$

$$\nu_k = \begin{cases} 0, & k \equiv 1 \pmod{2}, \\ -\frac{1}{4}, & k \equiv 2 \pmod{4}, \\ \frac{1}{4}, & k \equiv 0 \pmod{4}, \end{cases} \quad \mu_k = \begin{cases} 0, & k \equiv 1 \pmod{3}, \\ -\frac{1}{3}, & k \equiv 2 \pmod{3}, \\ \frac{1}{3}, & k \equiv 0 \pmod{3}. \end{cases}$$

Теорема 2.1 (теорема Коэна—Остерле; см. [17]). *Если k — целое число, χ — характер Дирихле по модулю N , $\chi(-1) = (-1)^k$, то*

$$\dim_{\mathbb{C}}(S_k(\Gamma_0(N), \chi)) - \dim_{\mathbb{C}}(M_{2-k}(\Gamma_0(N), \chi)) = \frac{(k-1)N}{12} \prod_{p|N} (1 + p^{-1}) - \frac{1}{2} \prod_{p|N} \lambda(r_p, s_p, p) + \nu_k \sum_{x: x^2+1 \equiv 0(N)} \chi(x) + \mu_k \sum_{x: x^2+x+1 \equiv 0(N)} \chi(x).$$

Если $k > 2$, то $\dim_{\mathbb{C}}(M_{2-k}(\Gamma_0(N), \chi)) = 0$; левая часть становится равна $\dim_{\mathbb{C}}(S_k(\Gamma_0(N), \chi))$. Если $k \leq 0$, то $\dim_{\mathbb{C}}(S_k(\Gamma_0(N), \chi)) = 0$; левая часть становится равной $-\dim_{\mathbb{C}}(M_{2-k}(\Gamma_0(N), \chi))$.

В [21] отмечается следующий важный для исследований факт: если у двух параболических форм из $S_k(\Gamma_0(N), \chi)$ совпадают первые $\frac{kN}{12} \cdot \prod_{p|N} \left(1 + \frac{1}{p}\right)$ коэффициентов Фурье в бесконечности, то эти функции совпадают. Это используется в случаях, когда части доказательств представляют собой компьютерную проверку.

2.3. Операторы Гекке. На пространствах модулярных и параболических форм действуют операторы Гекке, действие которых определяется следующим образом. Если

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a(n) q^n \in M_k(\Gamma_0(N), \chi),$$

то для простого числа p действие определяется формулой

$$f(z) | T_{p,k,\chi} = \sum_{n=0}^{\infty} (a(pn) + \chi(p)p^{k-1}a(n/p))q^n.$$

Если $(p, n) = 1$, то $a(n/p) = 0$. В общем случае имеем

$$f(z) | T_{m,k,\chi} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{d|(m,n)} (\chi(d)d^{k-1}a(mn/d^2))q^n.$$

Здесь $\chi(n) = 0$, если $(N, n) \neq 1$. Если $m \geq 2$, то $f(z) | T_{m,k,\chi} \in M_k(\Gamma_0(N), \chi)$. Если $f(z) \in S_k(\Gamma_0(N), \chi)$, то $f(z) | T_{m,k,\chi} \in S_k(\Gamma_0(N), \chi)$. Если $f(z)$ является собственной формой относительно всех $T_{m,k,\chi}$, то $a(mn) = a(n)a(m)$ при $(m, n) = 1$.

2.4. Определение η-функции Дедекинда. Определим главную героиню нашего обзора. Можно считать, что современное исследование η-функции Дедекинда и возникающих из нее конструкций начато М. Ньюмоном в [42, 43]. Затем начиная с середины 1980-х гг. она привлекла внимание Дж. Мейсона, Б. Гордона и большого коллектива японских математиков (см. [34, 22, 23, 24, 28]). О других работах мы подробнее расскажем далее, там и приведем ссылки.

Определение. η-Функция Дедекинда определяется формулой

$$\eta(z) = q^{1/24} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n), \quad q = e^{2\pi iz}, \quad z \in H.$$

В исследованиях активно используется тот факт, что $\eta(z)$ не имеет нулей на верхней полуплоскости.

Определение. η-Частным называется функция вида

$$f(z) = \prod_{j=1}^s \eta^{t_j}(a_j z), \quad a_j \in \mathbb{N}, \quad t_j \in \mathbb{Z}.$$

Если $t_j \in \mathbb{N}$ для всех j , то $f(z)$ называется η-произведением.

Линейная комбинация η-частных называется η-полиномом.

В книге [46] приводятся следующие замечательные выражения:

$$E_4(z) = \frac{\eta^{16}(z)}{\eta^8(2z)} + 2^8 \cdot \frac{\eta^{16}(2z)}{\eta^8(z)},$$

$$E_6(z) = \frac{\eta^{24}(z)}{\eta^{12}(2z)} - 2^5 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \eta^{12}(2z) - 2^9 \cdot 3 \cdot 11 \cdot \frac{\eta^{12}(2z)\eta^8(4z)}{\eta^8(z)} + 2^{13} \cdot \frac{\eta^{24}(4z)}{\eta^{12}(2z)}.$$

Это мотивирует формулировку следующих актуальных проблем.

Проблема (К. Оно). Какие пространства модулярных форм состоят из η-полиномов?

Эта проблема поставлена в [46]. Пространство M_k дает пример положительного решения этой проблемы. Для других уровней ситуация усложняется.

Важно, что представление функции в виде η-частного однозначно, как показывает следующая теорема, приведенная в [30].

Теорема 2.2. Пусть $a_j \in \mathbb{N}$, $a_1 > a_2 > \dots > a_s$, $t_j \in \mathbb{Z}$. Тогда

$$\prod_{j=1}^s \eta^{t_j}(a_j z) = \text{const} \quad \Leftrightarrow \quad t_j = 0 \quad \forall j = \overline{1, s}.$$

Доказательство. Рассмотрим

$$\psi(x) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - x^n).$$

Если $\prod_{j=1}^s \eta^{t_j}(a_j z) = \text{const}$, то $\prod_{j=1}^s \psi(x^{a_j})^{t_j} = \text{const}$. Получаем

$$\prod_{j=1}^{s-1} \psi(x^{a_j})^{t_j} = \text{const} \cdot \psi(x^{a_s})^{-t_s}.$$

Пусть $t_s \neq 0$; тогда в правую часть входит x^{a_s} с ненулевым коэффициентом, а в левую нет: там все степени переменной x выше. Следовательно, $t_s = 0$. Рассуждая так и далее, получим, что все $t_j = 0$. $\square$

2.5. Функциональное уравнение.

Теорема 2.3 (см. [10]). Пусть $\sqrt{\cdot}$ — та ветвь квадратного корня, которая имеет неотрицательную вещественную часть. Тогда

$$\eta\left(-\frac{1}{z}\right) = \sqrt{\frac{z}{i}} \cdot \eta(z).$$

2.6. Комбинаторные тождества. Получение комбинаторных тождеств, содержащих η -частные, — тема многочисленных исследований, новые результаты появляются каждый год. Одним из известных классических выражений является формула Радемахера:

$$\sum_{l=0}^4 \eta(5z) \eta^{-1}\left(\frac{z+24l}{5}\right) = 5^{-2} \left(\frac{\eta(5z)}{\eta(z)}\right)^6.$$

Отметим следующую проблему.

Проблема (Дон Цагир, Кай Арцдорф). Когда линейная комбинация двух η -частных также является η -частным?

Примеры к решению этой проблемы получены Г. Келером в 1990 г. (см. [29]). Заметим, что функции в этой формуле модулярными формами не являются. Формулы Келера имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\eta^6(3z)}{\eta^2(6z)} &= \frac{\eta^3(2z)\eta^2(9z)}{\eta(18z)} + 3 \frac{\eta^3(18z)\eta^2(z)}{\eta(2z)}, \\ \frac{\eta^7(6z)}{\eta(3z)} &= \frac{\eta^3(4z)\eta^9(18z)}{\eta^3(9z)\eta^3(36z)} + \frac{\eta^3(36z)\eta^9(2z)}{\eta^3(z)\eta^3(4z)}. \end{aligned}$$

В более общей постановке проблема состоит в изучении линейных зависимостей между η -частными.

Приведем шесть самых известных комбинаторных формул для η -частных. Эти формулы используются, в частности, для составления программ для нахождения коэффициентов модулярных форм, для доказательства некоторых теорем достаточно знать несколько первых коэффициентов как отмечалось в п. 2.2. В этих формулах $q = e^{2\pi iz}$.

Пентагональная формула Эйлера:

$$\eta(z) = q^{\frac{1}{24}} \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{\frac{3n^2+n}{2}}, \quad (1)$$

$$\eta(24z) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} (-1)^j q^{(6j+1)^2}, \quad (2)$$

$$\eta^3(8z) = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j (2j+1) q^{(2j+1)^2}, \quad (3)$$

$$\frac{\eta^2(z)}{\eta(2z)} = \sum_{j=-\infty}^{\infty} (-1)^j q^{j^2}. \quad (4)$$

Ряд Фурье для θ -функции:

$$\theta(z) = \frac{\eta^5(2z)}{\eta^2(z)\eta^2(4z)} = \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^{j^2}, \quad (5)$$

$$\frac{\eta^2(16z)}{\eta(8z)} = \sum_{j=0}^{\infty} q^{(2j+1)^2}. \quad (6)$$

2.7. Условие автоморфности для η -частных. Следующая теорема позволяет строить модулярные формы с помощью η -частных. В доказательстве мы будем следовать идеям работы [21].

Теорема 2.4. Пусть $a_j \in \mathbb{N}$, $t_j \in \mathbb{Z}$, $2k = \sum_{j=1}^s t_j$, натуральное N таково, что $a_j | N$ для всех $\overline{1, s}$, а также выполняются следующие условия:

$$\begin{aligned} 1) \quad & \sum_{j=1}^s a_j \cdot t_j \equiv 0 \pmod{24}, \\ 2) \quad & \sum_{j=1}^s \frac{N \cdot t_j}{a_j} \equiv 0 \pmod{24}. \end{aligned}$$

Тогда функция

$$f(z) = \prod_{j=1}^s \eta^{t_j}(a_j z)$$

удовлетворяет условию

$$f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = \chi(d) \cdot (cz+d)^k \cdot f(z) \quad \forall \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(N),$$

$$\chi(d) = \begin{cases} \left(\frac{(-1)^k \prod_{j=1}^s a_j^{|t_j|}}{d} \right), & d = 2l+1, \\ \left(\frac{(-1)^k \prod_{j=1}^s a_j^{|t_j|}}{d+N} \right), & d = 2l; \end{cases}$$

здесь $\left(\frac{*}{*}\right)$ — символ Якоби.

Доказательство. Если $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(N)$, $c \geq 0$, то справедлива формула

$$\eta\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = e^{i\pi/4} \cdot \epsilon(a, b, c, d) \cdot \sqrt{cz+d} \cdot \eta(z),$$

$$\epsilon(a, b, c, d) = \begin{cases} \left(\frac{c}{d}\right) \cdot e^{i\pi d/4} \cdot \exp\left(\frac{i\pi}{12} \cdot (ac(1-d^2) + d(b-c))\right), & d = 2l+1, \\ \left(\frac{d}{c}\right) \cdot \exp\left(\frac{i\pi}{12} \cdot (bd(1-c^2) + c(a+d))\right) \exp\left(\frac{i\pi(1-c)}{4}\right), & c = 2l+1. \end{cases}$$

Эту формулу можно найти в [11]. Далее преобразуем:

$$\begin{aligned} f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) &= \prod_{j=1}^s \eta^{t_j}\left(a_j \cdot \frac{az+b}{cz+d}\right) = \prod_{j=1}^s \eta^{t_j}\left(\frac{a(a_j z) + ba_j}{\frac{c}{a_j}(a_j z) + d}\right) = \\ &= \prod_{j=1}^s \left(\epsilon\left(a, b \cdot a_j, \frac{c}{a_j}, d\right) \cdot e^{-i\pi/4} \cdot (cz+d)^{1/2} \cdot \eta(a_j z)\right)^{t_j} = \\ &= \prod_{j=1}^s \left(\epsilon\left(a, b \cdot a_j, \frac{c}{a_j}, d\right)\right)^{t_j} \cdot \prod_{j=1}^s e^{-t_j i\pi/4} \cdot \prod_{j=1}^s (cz+d)^{t_j/2} \cdot \prod_{j=1}^s \eta^{t_j}(a_j z) = \\ &= \prod_{j=1}^s \left(\epsilon\left(a, b \cdot a_j, \frac{c}{a_j}, d\right)\right)^{t_j} \cdot e^{-ki\pi/2} \cdot (cz+d)^k \cdot f(z), \end{aligned}$$

так как

$$k = \frac{1}{2} \cdot \sum_{j=1}^s t_j.$$

Введем обозначение

$$E = e^{\frac{-ki\pi}{2}} \cdot \prod_{j=1}^s \left(\epsilon\left(a, b \cdot a_j, \frac{c}{a_j}, d\right)\right)^{t_j}.$$

Имеем

$$f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = E \cdot (cz+d)^k \cdot f(z).$$

Теперь мы определим значение E для четного и нечетного случая.

Случай 1: d — нечетное. Тогда

$$E = e^{-ki\pi/2} \cdot \prod_{j=1}^s \left(\left(\frac{c/a_j}{d}\right) \cdot e^{i\pi d/4} \cdot \exp\left(\frac{i\pi}{12} \cdot \left(a \cdot \frac{c}{a_j} \cdot (1-d^2) + d \cdot \left(b \cdot a_j - \frac{c}{a_j}\right)\right)\right)\right)^{t_j}.$$

Пусть

$$\delta = \sum_{j=1}^s \left(\frac{a \cdot c}{a_j} \cdot (1-d^2) + d \cdot \left(b \cdot a_j - \frac{c}{a_j}\right)\right) \cdot t_j.$$

Тогда

$$E = e^{-ki\pi/2} \cdot e^{ki\pi d/2} \cdot \prod_{j=1}^s \left(\frac{c/a_j}{d}\right)^{t_j} \cdot e^{i\pi\delta/12}.$$

Получаем:

$$\delta = d \cdot b \cdot \sum_{j=1}^s a_j \cdot t_j + (a - a \cdot d^2 - d) \cdot \sum_{j=1}^s \frac{c \cdot t_j}{a_j}.$$

Так как $c = N \cdot c_1$, то

$$d \cdot b \cdot \sum_{j=1}^s a_j \cdot t_j \equiv 0 \pmod{24}$$

по условию 1) теоремы,

$$(a - a \cdot d^2 - d) \cdot \sum_{j=1}^s \frac{c \cdot t_j}{a_j} \equiv (a - a \cdot d^2 - d) \cdot c_1 \cdot \sum_{j=1}^s \frac{N \cdot t_j}{a_j} \equiv 0 \pmod{24}$$

по условию 2) теоремы. Следовательно, $\delta \equiv 0 \pmod{24}$ и $e^{i\pi\delta/12} = 1$. Далее,

$$\prod_{j=1}^s \left(\frac{c/a_j}{d} \right)^{t_j} \cdot \left(\frac{a_j}{d} \right)^{t_j} = \prod_{j=1}^s \left(\frac{c}{d} \right)^{t_j} = 1,$$

так как все сомножители одинаковы, а количество их четно. Следовательно,

$$\prod_{j=1}^s \left(\frac{c/a_j}{d} \right)^{t_j} = \prod_{j=1}^s \left(\frac{a_j}{d} \right)^{t_j} = \left(\frac{\prod_{j=1}^s a_j^{|t_j|}}{d} \right)$$

в силу свойств символа Якоби,

$$E = e^{i\pi k(d-1)/2} \cdot \left(\frac{\prod_{j=1}^s a_j^{|t_j|}}{d} \right) = \left(\frac{(-1)^k}{d} \right) \cdot \left(\frac{\prod_{j=1}^s a_j^{|t_j|}}{d} \right) = \left(\frac{(-1)^k \cdot \prod_{j=1}^s a_j^{|t_j|}}{d} \right)$$

Случай 2: d — четное. Для четного d число c — нечетное, и так как $N|c$, то N — нечетное число. Имеем

$$\begin{aligned} E &= e^{-i\pi k/2} \cdot \prod_{j=1}^s \left(\left(\frac{d}{c/a_j} \right) \cdot \exp \left(\frac{i\pi}{12} \cdot \left(ba_j d \left(1 - \frac{c^2}{a_j^2} \right) + \frac{c}{a_j} \cdot (a + d) \right) \right) \exp \left(\frac{i\pi(1 - c/a_j)}{4} \right) \right)^{t_j} = \\ &= e^{-i\pi k/2} \cdot \exp \left(\sum_{j=1}^s \frac{i\pi t_j}{4} \right) \cdot \exp \left(\sum_{j=1}^s \frac{i\pi t_j c}{4a_j} \right) \cdot \prod_{j=1}^s \left(\frac{d}{c/a_j} \right)^{t_j} \cdot e^{i\pi r/12}, \end{aligned}$$

где

$$r = \sum_{j=1}^s \left(ba_j d \left(1 - \frac{c^2}{a_j^2} \right) + \frac{c}{a_j} \cdot (a + d) \right) \cdot t_j.$$

Так же, как и выше, можно показать, что $r \equiv 0 \pmod{24}$.

В силу условия 2) теоремы

$$\exp \left(\sum_{j=1}^s \frac{i\pi t_j c}{4a_j} \right) = 1,$$

так как показатель кратен $2\pi i$. Имеем

$$\exp \left(\sum_{j=1}^s \frac{i\pi t_j}{4} \right) = \exp \left(\frac{i\pi k}{2} \right),$$

и этот множитель сокращается с первым. Получаем

$$E = \prod_{j=1}^s \left(\frac{d}{c/a_j} \right)^{t_j}.$$

Заменим d на $\tilde{d} = d + N$; значение E от этого не изменится. Имеем

$$E = \prod_{j=1}^s \left(\frac{\tilde{d}}{c/a_j} \right)^{t_j} = \prod_{j=1}^s \left(\frac{\tilde{d}}{c/N \cdot N/a_j} \right)^{t_j} = \prod_{j=1}^s \left(\frac{\tilde{d}}{c/N} \right)^{t_j} \cdot \prod_{j=1}^s \left(\frac{\tilde{d}}{N/a_j} \right)^{t_j} = \prod_{j=1}^s \left(\frac{\tilde{d}}{N/a_j} \right)^{t_j}.$$

Здесь

$$\prod_{j=1}^s \left(\frac{\tilde{d}}{c/N} \right)^{t_j} = 1,$$

так как все множители равны, а количество их четно. Далее,

$$\left(\frac{\tilde{d}}{N/a_j} \right) = (-1)^{\frac{\tilde{d}-1}{2} \cdot \frac{N/a_j-1}{2}} \cdot \left(\frac{N/a_j}{\tilde{d}} \right).$$

Имеем

$$\prod_{j=1}^s \left(\frac{\tilde{d}}{N/a_j} \right)^{t_j} = (-1)^{\frac{1}{2} \cdot \sum_{j=1}^s \frac{N}{a_j} \cdot t_j} \cdot (-1)^{-k \cdot \frac{\tilde{d}-1}{2}} \cdot \prod_{j=1}^s (-1)^{\frac{\tilde{d}-1}{2}} \cdot \prod_{j=1}^s \left(\frac{N/a_j}{\tilde{d}} \right)^{t_j}.$$

По условию 2) теоремы

$$(-1)^{\frac{1}{2} \cdot \sum_{j=1}^s \frac{N}{a_j} \cdot t_j} = 1, \quad (-1)^{-k \cdot \frac{\tilde{d}-1}{2}} = 1,$$

так как число сомножителей одинаково, а их количество четно. Мы используем соотношение

$$(-1)^{k \cdot \frac{\tilde{d}-1}{2}} = \left(\frac{-1}{\tilde{d}} \right)^k.$$

Заметим, что

$$\prod_{j=1}^s \left(\frac{N/a_j}{\tilde{d}} \right)^{t_j} = \prod_{j=1}^s \left(\frac{a_j}{\tilde{d}} \right)^{t_j}.$$

Итак,

$$E = \left(\frac{-1}{\tilde{d}} \right)^k \cdot \prod_{j=1}^s \left(\frac{a_j}{\tilde{d}} \right)^{t_j} = \left(\frac{(-1)^k \prod_{j=1}^s a_j^{t_j}}{d + N} \right).$$

Теорема доказана. □

2.8. Поведение η -частных в параболических вершинах.

Теорема 2.5. Пусть m, n, N — натуральные числа, $n|N$, $(m, n) = 1$. Если

$$f(z) = \prod_{j=1}^s \eta^{t_j}(a_j z),$$

то порядок нуля в параболической вершине m/n равен

$$\frac{N}{24} \sum_{j=1}^s \frac{(n, a_j)^2 t_j}{(n, \frac{N}{n}) n a_j}.$$

Эта теорема была доказана А. Биаджиоли в 1990 г. (см. [14]).

2.9. Мультипликативные η -произведения. В 1985 г. Д. Даммит, Х. Кисилевски и Дж. МакКей доказали теорему, описывающую η -произведения с мультипликативными коэффициентами Фурье. Мы будем называть их *мультипликативными η -произведениями* или *функциями МакКея*.

Теорема 2.6. *Если*

$$f(z) = \prod_j^s \eta^{t_j}(a_j z) = f(z) = \sum_{n=n_0}^{\infty} a(n)q^n, \quad q = e^{2\pi iz}, \quad a_j \in \mathbb{N}, \quad t_j \in \mathbb{N}, \quad \sum_{j=1}^s a_j t_j \equiv 0 \pmod{24},$$

$a(mn) = a(n)a(m)$ при $(m, n) = 1$, где $a(n)$ — n -й коэффициент Фурье функции $f(z)$, то $f(z)$ — одна из функций, выписанных в таблице 1.

Таблица 1. Мультипликативные η -произведения

$f(z)$	k	N	$\chi(d)$
$\eta(23z)\eta(z)$	1	23	$\left(\frac{-23}{d}\right)$
$\eta(22z)\eta(2z)$	1	44	$\left(\frac{-11}{d}\right)$
$\eta(21z)\eta(3z)$	1	63	$\left(\frac{-7}{d}\right)$
$\eta(20z)\eta(4z)$	1	80	$\left(\frac{-5}{d}\right)$
$\eta(18z)\eta(6z)$	1	108	$\left(\frac{-3}{d}\right)$
$\eta(16z)\eta(8z)$	1	128	$\left(\frac{-2}{d}\right)$
$\eta^2(12z)$	1	144	$\left(\frac{-1}{d}\right)$
$\eta^4(6z)$	2	36	1
$\eta^2(8z)\eta^2(4z)$	2	32	1
$\eta^2(10z)\eta^2(2z)$	2	20	1
$\eta(12z)\eta(6z)\eta(4z)\eta(2z)$	2	24	1
$\eta(15z)\eta(5z)\eta(3z)\eta(z)$	2	15	1
$\eta(14z)\eta(7z)\eta(2z)\eta(z)$	2	14	1
$\eta^2(9z)\eta^2(3z)$	2	27	1
$\eta^2(11z)\eta^2(z)$	2	11	1
$\eta^3(6z)\eta^3(2z)$	3	12	$\left(\frac{-3}{d}\right)$
$\eta^6(4z)$	3	16	$\left(\frac{-1}{d}\right)$

(продолжение на след. стр.)

Таблица 1. Мультипликативные η -произведения

$f(z)$	k	N	$\chi(d)$
$\eta^2(8z)\eta(4z)\eta(2z)\eta^2(z)$	3	8	$\left(\frac{-2}{d}\right)$
$\eta^3(7z)\eta^3(z)$	3	7	$\left(\frac{-7}{d}\right)$
$\eta^2(6z)\eta^2(3z)\eta^2(2z)\eta^2(z)$	4	6	1
$\eta^4(5z)\eta^4(z)$	4	5	1
$\eta^8(3z)$	4	9	1
$\eta^4(4z)\eta^4(2z)$	4	8	1
$\eta^4(4z)\eta^2(2z)\eta^4(z)$	5	4	$\left(\frac{-1}{d}\right)$
$\eta^6(3z)\eta^6(z)$	6	3	1
$\eta^{12}(2z)$	6	4	1
$\eta^8(2z)\eta^8(z)$	8	2	1
$\eta^{24}(z)$	12	1	1
$\eta^3(8z)$	$\frac{3}{2}$	4	$\left(\frac{-4}{d}\right)$
$\eta(24z)$	$\frac{1}{2}$	576	$\left(\frac{12}{d}\right)$

Замечание 2.1. Пусть $f(z)$ — мультипликативное η -произведение. В силу одномерности пространств $S_k(\Gamma_0, \chi)$ инволюция Фрике переводит $f(z)$ в пропорциональную функцию

$$f(z)|_k[\gamma] = \text{const} \cdot f(z), \quad \gamma = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ N & 0 \end{pmatrix}.$$

Замечание 2.2. Используя формулу Биаджиоли, можно вычислить, что порядок в каждой параболической вершине мультипликативного η -произведения целого веса равен 1.

Среди этих модулярных форм две формы полуцелого веса и 28 форм целого веса. Самая известная из них форма —

$$\Delta(z) = \eta^{24}(z) = \frac{1}{1728} \cdot (E_4^3(z) - E_6^2(z)) = \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n)q^n.$$

Ее коэффициенты — значения функции Рамануджана.

Характеры, уровни и веса вычислены по теореме из п. 2.7.

Схема доказательства

Шаг 1. В силу мультипликативности коэффициентов имеем $a(1) = 1$. Следовательно,

$$\sum_{j=1}^s a_j t_j = 24.$$

На компьютере были проверены несколько первых коэффициентов для каждого из вариантов и отброшены варианты с нарушением мультипликативности; нарушение происходит довольно быстро. Остались 30 значений, указанных в таблице.

Шаг 2. Для двадцати восьми форм целого веса по формуле Коэна—Остерле вычисляется размерность пространств $S_k(\Gamma_0, \chi)$, в которых лежат эти формы. Значение уровня выбирается минимальным возможным. Эта размерность оказывается равной 1. Следовательно, рассматриваемые формы — собственные относительно всех операторов Гекке, и так как первый коэффициент равен 1, то коэффициенты мультипликативны. Для форм полуцелого веса мультипликативность доказывается использованием знания конкретных формул для ряда Фурье. $\square$

2.10. Мультипликативные η -частные. В [36] найдены все η -частные с мультипликативными коэффициентами, которые являются модулярными формами целого веса; они приведены в таблице 2 с указанием весов, уровней и характеров.

Таблица 2. Мультипликативные η -частные

$f(z)$	k	N	$\chi(d)$
$\eta^{24}(z)$	12	1	1
$\eta^8(z)\eta^8(2z)$	8	2	1
$\eta^{-3}(z)\eta^9(3z)$	3	3	$\left(\frac{-3}{d}\right)$
$\eta^9(z)\eta^{-3}(3z)$	3	3	$\left(\frac{-3}{d}\right)$
$\eta^6(z)\eta^6(3z)$	6	3	1
$\eta^{-4}(z)\eta^{10}(2z)\eta^{-4}(4z)$	1	4	$\left(\frac{-1}{d}\right)$
$\eta^{-4}(z)\eta^6(2z)\eta^4(4z)$	3	4	$\left(\frac{-1}{d}\right)$
$\eta^{12}(2z)$	6	4	1
$\eta^4(z)\eta^6(2z)\eta^{-4}(4z)$	3	4	$\left(\frac{-1}{d}\right)$
$\eta^4(z)\eta^2(2z)\eta^4(4z)$	5	4	$\left(\frac{-1}{d}\right)$
$\eta^{-1}(z)\eta^5(5z)$	2	5	$\left(\frac{5}{d}\right)$
$\eta^4(z)\eta^4(5z)$	4	5	1
$\eta^5(z)\eta^{-1}(5z)$	2	5	$\left(\frac{5}{d}\right)$
$\eta^2(z)\eta^2(2z)\eta^2(3z)\eta^2(6z)$	4	6	1
$\eta^3(z)\eta^3(7z)$	3	7	$\left(\frac{-7}{d}\right)$
$\eta^4(2z)\eta^4(4z)$	4	8	1

(продолжение на след. стр.)

Таблица 2. Мультипликативные η -частные

$f(z)$	k	N	$\chi(d)$
$\eta^{-2}(z)\eta^3(2z)\eta^3(4z)\eta^{-2}(8z)$	1	8	$\left(\frac{-2}{d}\right)$
$\eta^{-2}(z)\eta^3(2z)\eta(4z)\eta^2(8z)$	2	8	$\left(\frac{2}{d}\right)$
$\eta^2(z)\eta(2z)\eta(4z)\eta^2(8z)$	5	8	$\left(\frac{-2}{d}\right)$
$\eta^2(z)\eta(2z)\eta^3(4z)\eta^{-2}(8z)$	2	8	$\left(\frac{2}{d}\right)$
$\eta^3(z)\eta^{-2}(3z)\eta^3(9z)$	2	9	1
$\eta^8(3z)$	4	9	1
$\eta^2(z)\eta^2(11z)$	2	11	1
$\eta^{-2}(z)\eta^2(2z)\eta^2(3z)\eta(4z)\eta(12z)$	2	12	$\left(\frac{3}{d}\right)$
$\eta(z)\eta(3z)\eta^2(4z)\eta^2(6z)\eta^{-2}(12z)$	2	12	$\left(\frac{3}{d}\right)$
$\eta^2(z)\eta^{-2}(3z)\eta(4z)\eta^2(6z)\eta(12z)$	2	12	$\left(\frac{3}{d}\right)$
$\eta(z)\eta^2(2z)\eta(3z)\eta^{-2}(4z)\eta^2(12z)$	2	12	$\left(\frac{3}{d}\right)$
$\eta^3(2z)\eta^3(6z)$	3	12	$\left(\frac{-3}{d}\right)$
$\eta(z)\eta(2z)\eta(7z)\eta(14z)$	2	14	1
$\eta^2(z)\eta^{-1}(3z)\eta^{-1}(5z)\eta^2(15z)$	2	15	$\left(\frac{15}{d}\right)$
$\eta^{-1}(z)\eta^2(3z)\eta^2(5z)\eta(15z)$	2	15	$\left(\frac{15}{d}\right)$
$\eta(z)\eta(3z)\eta(5z)\eta(15z)$	2	15	1
$\eta^4(2z)\eta^{-4}(4z)\eta^4(8z)$	2	16	1
$\eta^{-4}(2z)\eta^{16}(4z)\eta^{-4}(8z)$	4	16	1
$\eta^{-12}(2z)\eta^{36}(4z)\eta^{-12}(8z)$	6	16	1
$\eta^6(4z)$	3	16	$\left(\frac{-1}{d}\right)$
$\eta(z)\eta(2z)\eta^{-1}(4z)\eta^{-1}(5z)\eta(10z)\eta(20z)$	1	20	$\left(\frac{-5}{d}\right)$
$\eta^{-1}(z)\eta(2z)\eta(4z)\eta(5z)\eta(10z)\eta^{-1}(20z)$	1	20	$\left(\frac{-5}{d}\right)$

(продолжение на след. стр.)

Таблица 2. Мультипликативные η -частные

$f(z)$	k	N	$\chi(d)$
$\eta^2(2z)\eta^2(10z)$	2	20	1
$\eta(z)\eta(23z)$	1	23	$\left(\frac{-23}{d}\right)$
$\eta(z)\eta^{-1}(3z)\eta(4z)\eta(6z)\eta^{-1}(8z)\eta(24z)$	1	24	$\left(\frac{-6}{d}\right)$
$\eta^{-1}(z)\eta(2z)\eta(3z)\eta(8z)\eta(12z)\eta^{-1}(24z)$	1	24	$\left(\frac{-6}{d}\right)$
$\eta(2z)\eta(4z)\eta(6z)\eta(12z)$	2	24	1
$\eta^2(3z)\eta^2(9z)$	2	27	1
$\eta^2(2z)\eta^{-1}(4z)\eta^{-1}(8z)\eta^2(16z)$	1	32	$\left(\frac{-2}{d}\right)$
$\eta^{-2}(2z)\eta^9(4z)\eta^{-5}(8z)\eta^2(16z)$	2	32	$\left(\frac{2}{d}\right)$
$\eta^2(2z)\eta^{-5}(4z)\eta^9(8z)\eta^{-2}(16z)$	3	32	$\left(\frac{-2}{d}\right)$
$\eta^{-2}(2z)\eta^5(4z)\eta^5(8z)\eta^{-2}(16z)$	3	32	$\left(\frac{-2}{d}\right)$
$\eta^2(4z)\eta^2(8z)$	2	32	1
$\eta(z)\eta^{-1}(2z)\eta^{-2}(3z)\eta(4z)\eta^4(6z)\eta(9z)\eta^{-2}(12z)\eta^{-1}(18z)\eta(36z)$	2	36	$\left(\frac{-1}{d}\right)$
$\eta^4(6z)$	2	36	1
$\eta(2z)\eta(22z)$	1	44	$\left(\frac{-11}{d}\right)$
$\eta(2z)\eta^{-1}(4z)\eta(6z)\eta(8z)\eta^{-1}(12z)\eta(24z)$	1	48	$\left(\frac{-3}{d}\right)$
$\eta^{-1}(2z)\eta^4(4z)\eta^{-1}(6z)\eta^{-1}(8z)\eta^4(12z)\eta(24z)$	3	48	$\left(\frac{-3}{d}\right)$
$\eta^{-3}(2z)\eta^9(4z)\eta^{-3}(6z)\eta^{-3}(8z)\eta^9(12z)\eta^{-3}(24z)$	3	48	$\left(\frac{-3}{d}\right)$
$\eta(3z)\eta(21z)$	1	63	$\left(\frac{-7}{d}\right)$
$\eta^2(4z)\eta^{-2}(8z)\eta^2(16z)$	1	64	$\left(\frac{-1}{d}\right)$
$\eta^{-2}(4z)\eta^8(8z)\eta^{-2}(16z)$	2	64	1
$\eta^{-6}(4z)\eta^{18}(8z)\eta^{-6}(16z)$	3	64	$\left(\frac{-1}{d}\right)$

(продолжение на след. стр.)

Таблица 2. Мультипликативные η -частные

$f(z)$	k	N	$\chi(d)$
$\eta^{-14}(4z)\eta^{38}(8z)\eta^{-14}(16z)$	5	64	$\left(\frac{-1}{d}\right)$
$\eta^{-2}(2z)\eta^6(4z)\eta^{-2}(8z)\eta^{-2}(10z)\eta^6(20z)\eta^{-2}(40z)$	2	80	1
$\eta(4z)\eta(20z)$	1	80	$\left(\frac{-5}{d}\right)$
$\eta(2z)\eta^{-3}(4z)\eta^{-1}(6z)\eta^4(8z)\eta^4(12z)\eta^{-1}(16z)\eta^{-3}(24z)\eta(48z)$	1	96	$\left(\frac{-6}{d}\right)$
$\eta^{-1}(2z)\eta^4(4z)\eta(6z)\eta^{-3}(8z)\eta^{-3}(12z)\eta(16z)\eta^4(24z)\eta^{-1}(48z)$	1	96	$\left(\frac{-3}{d}\right)$
$\eta(6z)\eta(18z)$	1	108	$\left(\frac{-3}{d}\right)$
$\eta(8z)\eta(16z)$	1	128	$\left(\frac{-2}{d}\right)$
$\eta^{-4}(6z)\eta^{12}(12z)\eta^{-4}(24z)$	2	144	1
$\eta^2(12z)$	1	144	$\left(\frac{-1}{d}\right)$
$\eta^{-1}(2z)\eta^3(4z)\eta^{-1}(8z)\eta^{-1}(22z)\eta^3(44z)\eta^{-1}(88z)$	1	176	$\left(\frac{-11}{d}\right)$
$\eta^{-1}(8z)\eta^4(16z)\eta^{-1}(32z)$	1	256	$\left(\frac{-1}{d}\right)$
$\eta^{-1}(4z)\eta^3(8z)\eta^{-1}(16z)\eta^{-1}(20z)\eta^3(40z)\eta^{-1}(80z)$	1	320	$\left(\frac{-5}{d}\right)$
$\eta^{-1}(6z)\eta^3(12z)\eta^{-1}(18z)\eta^{-1}(24z)\eta^3(36z)\eta^{-1}(72z)$	1	432	$\left(\frac{-3}{d}\right)$
$\eta^{-2}(12z)\eta^6(24z)\eta^{-2}(48z)$	1	576	$\left(\frac{-1}{d}\right)$
$\eta^{-2}(4z)\eta^5(8z)\eta^2(12z)\eta^{-2}(16z)\eta^{-4}(24z)\eta^{-2}(36z)\eta^2(48z)\eta^5(72z)\eta^{-2}(144z)$	1	576	$\left(\frac{-1}{d}\right)$

3. МОДУЛЯРНЫЕ ФОРМЫ И КОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ

В этом разделе обсуждается *теория фрейм-соответствия* (frame-shape correspondence); будем также использовать термин *теория фрейм-форм*. Эти термины были предложены А. И. Кострикиным и П. Гресем в рефератах статей американских и японских авторов, опубликованных в Реферативном журнале «Математика», где рассматривалось это соответствие. Выделим прежде всего работы Дж. Мейсона и его учеников. Речь идет о теории соответствия между конечными группами и модулярными формами, основанного на использовании собственных значений характеристических многочленов некоторых точных представлений. С точки зрения теории групп и теории представлений это связано с непростыми проблемами определения групп по классическим спектрам ее представлений; с точки зрения теории модулярных форм данная тематика отвечает модной идее о том, что модулярные формы естественными и различными способами можно объединять в семейства. Это приводит к пониманию новых тонких связей между теорией групп и теорией чисел.

3.1. Ряд Томпсона. Начнем с определения ряда Томпсона. Исследование этого понятия явилось для школы Дж. Мейсона главной мотивировкой изучения фрейм-соответствия (см. [37, 40]).

Определение. Пусть G — конечная группа. Формальный q -ряд

$$\Gamma = \sum \gamma_n q^n$$

называется *рядом Томпсона* для G , если каждый γ_n является рациональнозначным обобщенным характером группы G и если q -ряд

$$\Gamma_g = \sum \gamma_n(g) q^n$$

для любого $g \in G$ является модулярной формой относительно $\Gamma_0(N)$ для некоторого уровня $N = N(g)$ целого веса $k(g)$ с характером χ_g .

3.2. Фрейм-соответствие. Пусть Φ — такое линейное представление G в пространстве V , $24 \mid \dim V$, что для любого элемента $g \in G$ характеристический многочлен $P_g(x)$ имеет вид

$$\prod_{j=1}^s (x^{a_j} - 1)^{t_j}, \quad a_j, t_j \in \mathbb{N}, \quad 24 \mid \sum_{j=1}^s a_j t_j.$$

Тогда каждому элементу g можно поставить в соответствие функцию

$$\eta_g(z) = \prod_{j=1}^s \eta^{t_j}(a_j z).$$

Символ $\prod_{j=1}^s a_j^{t_j}$ называется *фрейм-формой* (frame-shape — каркас, рамочный шаблон). Описанное выше соответствие называется *соответствием с помощью фрейм-формы* (frame-shape соответствие). Такое соответствие можно рассмотреть для любой группы: можно подобрать представление в виде суммы регулярного и нескольких тривиальных. Возникает интересная задача нахождения в рассматриваемой ситуации для данной группы такого минимального l , что $\dim V = 24l$. Так, для группы Z_{31} минимальное значение $l = 2$. Как отмечается в [38], возникающее справа семейство функций $\eta_g(z)$ — это ряд Томпсона. Далее иногда, особенно при составлении таблиц, мы будем использовать стандартные для этой теории сокращения, записывая фрейм вместо модулярной формы. Например, запись $6^3 \cdot 2^3$ будет означать $\eta^3(6z) \cdot \eta^3(2z)$. Такие сокращения в статьях широко используются.

3.3. Группы, ассоциированные с мультипликативными η -произведениями. Статья [21], в которой Дж. МакКей и его соавторы открыли удивительный список η -произведений с мультипликативными коэффициентами, печаталась в 1985 г. в том же номере журнала «Contemporary Mathematics», что и одна из статей Дж. Мейсона по теории фрейм-соответствия. Возник естественный вопрос: нельзя ли рассмотреть функции МакКея с точки зрения этой теории? Оказалось, что эти 30 функций обладают «групповой замкнутостью», выраженной в следующей теореме.

Теорема 3.1. Если g — такой элемент в G , что $\eta_g(z)$, ассоциированная с g при помощи некоторого представления, является мультипликативным η -произведением, то $\eta_h(z)$, $h = g^k$, также является мультипликативным η -произведением.

Доказать теорему 3.1 можно прямым вычислением. Это позволяет дать следующее определение.

Определение. $M\eta P$ -Группа — это такая конечная группа, что все модулярные формы, ассоциированные с элементами группы с помощью некоторого точного представления, являются мультипликативными η -произведениями.

Термин происходит от сокращения фразы «группа, ассоциированная с мультипликативными η -произведениями». Такие подгруппы содержатся в любой группе. Единичная группа является $M\eta P$ -группой. Исследование таких групп было стимулировано открытием Дж. Мейсоном того

факта, что группа Матье M_{24} является $M\eta P$ –группой. Однако можно видеть, что не все такие группы являются подгруппами в M_{24} . Кроме того, для одной и той же группы часто возможны различные варианты фрейм-соответствия. В таблице 3 выписаны модулярные формы, соответствующие всем элементам циклических групп. Для некоторых порядков возможны несколько вариантов. Порядок элемента группы, которому соответствует форма, явно определяется по виду формы: это максимальное значение a_j . Таблица полезна при описании $M\eta P$ – групп.

Таблица 3. Циклические $M\eta P$ -группы

Группа	Модулярные формы
Z_{24}	$\eta(24z), \eta^2(12z), \eta^3(8z), \eta^4(6z), \eta^6(4z), \eta^8(3z), \eta^{12}(2z), \eta^{24}(z)$
Z_{23}	$\eta(23z)\eta(z), \eta^{24}(z)$
Z_{22}	$\eta(22z)\eta(2z), \eta^2(11z)\eta^2(z), \eta^{12}(2z), \eta^{24}(z)$
Z_{21}	$\eta(21z)\eta(3z), \eta^3(7z)\eta^3(z), \eta^8(3z), \eta^{24}(z)$
Z_{20}	$\eta(20z)\eta(4z), \eta^2(10z)\eta^2(2z), \eta^4(5z)\eta^4(z), \eta^6(4z), \eta^{12}(2z), \eta^{24}(z)$
Z_{18}	$\eta(18z)\eta(6z), \eta^2(9z)\eta^2(3z), \eta^3(6z)\eta^3(2z), \eta^6(3z)\eta^6(z), \eta^{12}(2z), \eta^{24}(z)$
Z_{16}	$\eta(16z)\eta(8z), \eta^2(8z)\eta^2(4z), \eta^4(4z)\eta^4(2z), \eta^8(2z)\eta^8(z), \eta^{24}(z)$
Z_{15}	$\eta(15z)\eta(5z)\eta(3z)\eta(z), \eta^4(5z)\eta^4(z), \eta^6(3z)\eta^6(z), \eta^{24}(z)$
Z_{14}	$\eta(14z)\eta(7z)\eta(2z)\eta(z), \eta^3(7z)\eta^3(z), \eta^8(2z)\eta^8(z), \eta^{24}(z)$
Z_{12}	$\eta(12z)\eta(6z)\eta(4z)\eta(2z), \eta^2(6z)\eta^2(3z)\eta^2(2z)\eta^2(z), \eta^6(3z)\eta^6(z),$ $\eta^4(4z)\eta^4(2z), \eta^8(2z)\eta^8(z), \eta^{24}(z)$
Z_{12}	$\eta^2(12z), \eta^4(6z), \eta^6(4z), \eta^8(3z), \eta^{12}(2z), \eta^{24}(z)$
Z_{11}	$\eta^2(11z)\eta^2(z), \eta^{24}(z)$
Z_{10}	$\eta^2(10z)\eta^2(2z), \eta^4(5z)\eta^4(z), \eta^{12}(2z), \eta^{24}(z)$
Z_9	$\eta(18z)\eta(6z), \eta^2(9z)\eta^2(3z), \eta^6(3z)\eta^6(z), \eta^{12}(2z), \eta^{24}(z)$
Z_8	$\eta^2(8z)\eta^2(4z), \eta^4(4z)\eta^4(2z), \eta^8(2z)\eta^8(z), \eta^{24}(z)$
Z_8	$\eta^3(8z), \eta^6(4z), \eta^{12}(2z), \eta^{24}(z)$
Z_8	$\eta^2(8z)\eta(4z)\eta(2z)\eta^2(z), \eta^4(4z)\eta^2(2z)\eta^4(z), \eta^8(2z)\eta^8(z), \eta^{24}(z)$
Z_7	$\eta^3(7z)\eta^3(z), \eta^{24}(z)$
Z_6	$\eta^2(6z)\eta^2(3z)\eta^2(2z)\eta^2(z), \eta^6(3z)\eta^6(z), \eta^8(2z)\eta^8(z), \eta^{24}(z)$
Z_6	$\eta^4(6z), \eta^8(3z), \eta^{12}(2z), \eta^{24}(z)$
Z_6	$\eta^3(6z)\eta^3(2z), \eta^6(3z)\eta^6(z), \eta^{12}(2z), \eta^{24}(z)$
Z_5	$\eta^4(5z)\eta^4(z), \eta^{24}(z)$
Z_4	$\eta^4(4z)\eta^4(2z), \eta^8(2z)\eta^8(z), \eta^{24}(z)$
Z_4	$\eta^6(4z), \eta^{12}(2z), \eta^{24}(z)$

(продолжение на след. стр.)

Таблица 3. Циклические $M\eta P$ -группы

Группа	Модулярные формы
Z_4	$\eta^4(4z)\eta^2(2z)\eta^4(z), \eta^8(2z)\eta^8(z), \eta^{24}(z)$
Z_3	$\eta^8(3z), \eta^{24}(z)$
Z_3	$\eta^6(3z)\eta^6(z), \eta^{24}(z)$
Z_2	$\eta^8(2z)\eta^8(z), \eta^{24}(z)$
Z_2	$\eta^{12}(2z), \eta^{24}(z)$

Проблема. Описать все $M\eta P$ -группы.

Это открытая проблема; основная сложность в исследованиях состоит в том, что фрейм-соответствие не является гомоморфизмом, различным классам сопряженных элементов соответствует иногда одна и та же модулярная форма. К настоящему времени описаны абелевы $M\eta P$ -группы, метациклические группы вида $\langle a, b : a^m = e, b^s = e, b^{-1}ab = a^r \rangle$, если пересечение подгрупп $\langle a \rangle$ и $\langle b \rangle$ тривиально, $M\eta P$ -группы нечетного порядка, конечные $M\eta P$ -подгруппы в $SL(5, \mathbb{C})$. При этом детально описываются соответствия между элементами группы и модулярными формами.

Приведем результат о группах нечетного порядка (см. [50]).

Теорема 3.2. *$M\eta P$ -Группы нечетного порядка являются подгруппами в следующих группах:*

- (i) $G_1 \cong \langle a, b, c : a^3 = b^3 = c^3 = e, ab = bac, ac = ca, bc = cb \rangle$,
- (ii) $G_2 \cong \langle a, b : a^{21} = b^3 = e, b^{-1}ab = a^4 \rangle$,
- (iii) $G_3 \cong \langle a, b : a^{23} = b^{11} = e, b^{-1}ab = a^{10} \rangle$,
- (iv) $G_4 \cong \langle a, b : a^{11} = b^5 = e, b^{-1}ab = a^5 \rangle$,
- (v) $G_5 \cong Z_9$,
- (vi) $G_6 \cong Z_{15}$.

Следующая теорема, касающаяся простых групп, доказана в [4].

Теорема 3.3. *Конечная простая группа G является простой $M\eta P$ -группой тогда и только тогда, когда G — подгруппа в M_{24} .*

Доказательство в одну сторону получается легко: для M_{24} единственным подходящим представлением является сумма первых двух неприводимых представлений: первое из них тривиально, второе имеет размерность 23. Это наблюдение, как уже говорилось, впервые было сделано Дж. Мейсоном. Поэтому требовалось доказать, что других вариантов нет. Доказательство использует теорему 3.2 и информацию о простых группах, содержащуюся в Атласе [19]. В этой статье для каждой простой группы явно выписаны все возможные представления, связывающие элементы группы с мультипликативными η -произведениями. Приведем в качестве примера исследование для группы $L_2(7)$.

Пример 3.1. $L_2(7)$ как $M\eta P$ -группа. Эта группа изоморфна группе $L_3(2)$. Найдём все допустимые представления. Оказывается, что их три. Приведем таблицу неприводимых характеров

(здесь $b_7 = \zeta_7 + \zeta_7^2 + \zeta_7^4$, ζ_7 — первообразный корень степени 7 из 1):

	1A	2A	3A	4A	7A	7B
χ_1	1	1	1	1	1	1
χ_2	3	-1	0	1	b_7	$\overline{b_7}$
χ_3	3	-1	0	1	$\overline{b_7}$	b_7
χ_4	6	2	0	0	-1	-1
χ_5	7	-1	1	-1	0	0
χ_6	8	0	-1	0	1	1

Пусть T — искомое представление. Элементы из классов $7A, 7B$ всегда должны соответствовать параболической форме $\eta^3(7z)\eta^3(z)$, т.е. $\chi_T(g) = 3$, если $g \in 7A, 7B$. Вариант соответствия для элементов четвертого порядка однозначно определяет вариант для элементов второго порядка. Следовательно, различные ситуации определяются элементами третьего и четвертого порядков. Элементы из класса $4A$ могут соответствовать одной из форм $\eta^6(4z)$, $\eta^4(4z)\eta^4(2z)$, $\eta^4(4z)\eta^2(2z)\eta^4(z)$, а элементы из класса $3A$ — одной из форм $\eta^8(3z)$, $\eta^6(3z)\eta^6(z)$.

Следует рассмотреть 6 вариантов. Вычисляем скалярные произведения $m_j = \langle \chi_T, \chi_j \rangle$, $j = \overline{1, 6}$. Обозначим значения характера искомого представления T на элементах из разных классов следующим образом:

$$t_1 = \chi_T(g), \quad g \in 2A; \quad t_2 = \chi_T(g), \quad g \in 3A; \quad t_3 = \chi_T(g), \quad g \in 4A.$$

Эти числа должны быть неотрицательными целыми числами, их сумма равна 24. Число t_1 может равняться 0 или 8, число $t_2 = 0$ или 6, число $t_3 = 0$ или 4, значение t_1 зависит от t_3 .

Мы используем данные о мощности классов сопряженных элементов:

$$|2A| = 21, \quad |3A| = 56, \quad |4A| = 42, \quad |7A| = |7B| = 24.$$

Получим:

$$\begin{aligned} m_1 &= 1 + \frac{t_1}{8} + \frac{t_2}{3} + \frac{t_3}{4}; & m_2 &= m_3 = \frac{-t_1}{8} + \frac{t_3}{4}; & m_4 &= \frac{t_1}{4}; \\ m_5 &= 1 - \frac{t_1}{8} + \frac{t_2}{3} - \frac{t_3}{4}; & m_6 &= 2 - \frac{t_2}{3}. \end{aligned}$$

Проведя вычисления, получим три допустимых варианта. В оставшихся трех случаях встречаются отрицательные m_j .

Ниже мы выпишем допустимые представления и соответствия между элементами группы и параболическими формами. Допустимое представление

$$\Phi_1 = 3T_1 \oplus 3T_5, \quad t_1 = 0, \quad t_2 = 6, \quad t_3 = 0.$$

2A	3A	4A	7A
$\eta^{12}(2z)$	$\eta^6(3z)\eta^6(z)$	$\eta^6(4z)$	$\eta^3(7z)\eta^3(z)$

В этом случае допустимое представление

$$\Phi_2 = T_1 \oplus T_5 \oplus 2T_6, \quad t_1 = t_2 = t_3 = 0,$$

2A	3A	4A	7A
$\eta^{12}(2z)$	$\eta^8(3z)$	$\eta^6(4z)$	$\eta^3(7z)\eta^3(z)$

В этом случае допустимое представление

$$\Phi_3 = 5T_1 \oplus 2T_4 \oplus T_5, \quad t_1 = 8, \quad t_2 = 6, \quad t_3 = 4,$$

2A	3A	4A	7A
$\eta^8(2z)\eta^8(z)$	$\eta^6(3z)\eta^6(z)$	$\eta^4(4z)\eta^2(2z)\eta^4(z)$	$\eta^3(7z)\eta^3(z)$

Исследования этой проблемы будут продолжены, для завершения классификации необходимо изучить группы четного порядка.

3.4. Характеры Рамануджана и характеры Вейля. Пусть параболическая форма

$$\eta_g(z) = \prod_{j=1}^s \eta(a_j z)^{t_j}$$

связана с элементом конечной группы $g \in G$ по принципу фрейм-соответствия.

С помощью функции $\eta_g(z)$ на произвольной конечной группе G можно определить для любого целого числа n функцию $a_n(g)$, значение которой равно n -му коэффициенту разложения Фурье в ∞ , и для простого числа p функцию

$$\psi_p(g) = \begin{cases} p^{k(g)-1} \chi_g(p), & (\text{ord}(g), p) = 1, \\ 0, & (\text{ord}(g), p) = p. \end{cases}$$

Здесь $\text{ord}(g)$ — порядок элемента g , $k(g)$ и $\chi_g(p)$ — вес и характер $\eta_g(z)$. Функция $\psi_p(g)$ называется характером Рамануджана. Это определение дается в [38].

Для модулярной формы $\eta_g(z)$, собственной относительно всех операторов Гекке, функции $a_n(g)$ и $\psi_p(g)$ участвуют в разложении ее преобразования Меллина в эйлерово произведение

$$L_g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n(g)}{n^s} = \prod_p \left(1 - \frac{a_p(g)}{p^s} + \frac{\psi_p(g)}{p^{2s}} \right)^{-1}.$$

В [38] Дж. Мейсон рассматривал представление группы Матье M_{24} на решетке Лича. Для любого элемента $g \in M_{24}$ функция $\eta_g(z)$, ассоциированная с этим представлением, является собственной относительно всех операторов Гекке. Функции $a_n(g)$ и $\psi_p(g)$ являются виртуальными характерами группы M_{24} . Указывается, что $\psi_p(g)$ является эффективным характером при $p \neq 3$.

Возникает естественный вопрос о природе функций $a_n(g)$ и $\psi_p(g)$, определенных на других конечных группах. В [8] исследуются ограничения присоединенных представлений простых групп Ли четного ранга, на конечные группы, каждый элемент которой имеет рациональный характеристический многочлен в присоединенном представлении. Характеры $a_n(g)$ описываются в этом случае формулой Макдональда (см. [35]). Мы изучим характеры $\psi_p(g)$.

Рассмотрим простую группу Ли G_0 и ее алгебру Ли $\text{Lie}(G_0)$ четного ранга. Пусть G — такая конечная подгруппа этой группы Ли, что каждый ее элемент g имеет в присоединенном представлении характеристический многочлен вида

$$\prod_{j=1}^s (x^{a_j} - 1)^{t_j},$$

с которым ассоциируется функция

$$\prod_{j=1}^s \eta(a_j z)^{t_j}.$$

Обозначим через $\text{ch}_{(p-1)\rho}$ характер Вейля неприводимого представления группы Ли G_0 со старшим весом $(p-1)\rho$, где ρ — полусумма положительных корней алгебры Ли $\text{Lie}(G_0)$.

Теорема 3.4. Для любого элемента $g \in G$ и любого нечетного простого числа p , взаимно простого с порядком элемента g , имеет место равенство

$$\psi_p(g) = \left(\frac{-1}{p} \right)^{\frac{\dim G_0}{2}} p^{\frac{r}{2}-1} \text{ch}_{(p-1)\rho},$$

где r — ранг алгебры Ли $\text{Lie}(G_0)$.

Доказательство. Мы используем следующий результат, доказательство которого основано на свойствах символа Якоби. Пусть b — некоторое натуральное число. Тогда для любого нечетного простого числа p , взаимно простого с b , выполняется равенство

$$\prod_{l=1}^{b/2} \frac{\sin \frac{\pi pl}{b}}{\sin \frac{\pi l}{b}} = \left(\frac{-1}{p} \right)^{b/2} \left(\frac{2}{p} \right) \left(\frac{b}{p} \right),$$

если b четное,

$$\prod_{l=1}^{(b-1)/2} \frac{\sin \frac{\pi pl}{b}}{\sin \frac{\pi l}{b}} = \left(\frac{p}{b} \right),$$

если b нечетное.

Пусть g — элемент конечного порядка в группе Ли G_0 , имеющий в присоединенном представлении характеристический многочлен

$$P_g(x) = \prod_{j=1}^s (x^{a_j} - 1)^{t_j}, \quad a_j \in \mathbb{N}, \quad t_j \in \mathbb{Z}.$$

Для такого нечетного простого числа p , что $(a_j, p) = 1$ при всех j , характер параболической формы, ассоциированной с g , равен

$$\chi_g(p) = \left(\frac{-1}{p} \right)^{\frac{1}{2} \sum_j t_j} \left(\frac{\prod_j a_j^{t_j}}{p} \right).$$

Следовательно,

$$\psi_p(g) = p^{\frac{1}{2} \sum_j t_j - 1} \left(\frac{-1}{p} \right)^{\frac{1}{2} \sum_j t_j} \left(\frac{\prod_j a_j^{t_j}}{p} \right).$$

Рассмотрим теперь значение характера Вейля

$$\text{ch}_{(p-1)\rho}(g) = \frac{\sum_{w \in W} \det(w) e^{w(p\rho)(h)}}{\sum_{w \in W} \det(w) e^{w(\rho)(h)}},$$

где $\det(w)$ — определитель автоморфизма w из группы Вейля W , h — такой элемент картановской подалгебры в $\text{Lie}(G_0)$, что g и $\exp(h)$ принадлежит одному классу сопряженных элементов в G_0 .

Учитывая, что

$$\prod_{\alpha \in R_+} (e^{\alpha/2} - e^{-\alpha/2}) = \sum_{w \in W} \det(w) e^{w(\rho)},$$

где R_+ — множество положительных корней алгебры Ли $\text{Lie}(G_0)$, получим

$$\text{ch}_{(p-1)\rho}(g) = \prod_{\alpha \in R_+} \frac{e^{p\alpha(h)/2} - e^{-p\alpha(h)/2}}{e^{\alpha(h)/2} - e^{-\alpha(h)/2}}.$$

Так как отображение $\text{Ad}(\exp(h)) = \exp(\text{ad}(h))$ задает присоединенное представление максимального тора группы Ли G_0 , то число $x_\alpha(g) = e^{\alpha(h)}$, где α — некоторый корень, является собственным значением присоединенного представления Ad группы G_0 .

Можно записать

$$\text{ch}_{(p-1)\rho}(g) = \prod_{\alpha \in R_+} \frac{x_\alpha^{p/2} - x_\alpha^{-p/2}}{x_\alpha^{1/2} - x_\alpha^{-1/2}},$$

где $x_\alpha(g)$ — собственные значения присоединенного представления группы G_0 , соответствующие положительным корням α алгебры Ли $\text{Lie}(G_0)$. Нули многочлена $P_g(x)$ состоят из элементов

$x_\alpha(g) = e^{\alpha(h)}$, соответствующих положительным и отрицательным корням α , и r единиц, где r — ранг $\text{Lie}(G_0)$. Если $x_\alpha = -1$, то $x_\alpha^{-1} = -1$. Следовательно, $\sum_{j:2|a_j} t_j$ — число четное.

При замене x_α на x_α^{-1} в формуле для $\text{ch}_{(p-1)\rho}(g)$ его значение не меняется (перемена знака в числителе и знаменателе). Часть нулей множителей $(x^{a_j} - 1)^{t_j}$ являются виртуальными, т.е. соответствующие им линейные множители сокращаются в числителе и знаменателе. Рассмотрим произведение

$$\prod_x \frac{x^{p/2} - x^{-p/2}}{x^{1/2} - x^{-1/2}}$$

по всем x , являющимся нулями множителей $(x^{a_j} - 1)^{t_j}$ в $P_g(x)$, кроме r нулей $x = 1$, причем из x и x^{-1} выбирается только одно значение. Множители, соответствующие виртуальным нулям, сокращаются, и значение этого произведения равно $\text{ch}_{(p-1)\rho}(g)$. Далее под формулой для характера Вейля мы будем понимать именно это произведение.

Количество множителей в формуле для характера, соответствующих $x = 1$, равно $\frac{1}{2}(\sum_j t_j - r)$. Каждый из них равен

$$\frac{e^{\pi i p} - e^{-\pi i p}}{e^{\pi i} - e^{-\pi i}} = \sum_{l=0}^{p-1} e^{\pi i(p-1-2l)} = p.$$

Рассмотрим отличные от 1 нули двучлена $x^{a_j} - 1$ при нечетном a_j . Они имеют вид

$$x = \exp\left(\frac{2\pi i m}{a_j}\right), \quad 1 \leq m \leq a_j.$$

В формулу для характера входят множители, соответствующие половине этих чисел. Заменяя при необходимости m на $a_j - m$, что равносильно замене x на x^{-1} , получим: произведение множителей в формуле для $\text{ch}_{(p-1)\rho}(g)$, отвечающих отличным от 1 нулям двучлена $x^{a_j} - 1$, равно

$$\prod_{m=1}^{\frac{a_j-1}{2}} \frac{\exp\left(\frac{\pi i p m}{a_j}\right) - \exp\left(-\frac{\pi i p m}{a_j}\right)}{\exp\left(\frac{\pi i m}{a_j}\right) - \exp\left(-\frac{\pi i m}{a_j}\right)} = \prod_{m=1}^{\frac{a_j-1}{2}} \frac{\sin \frac{\pi p m}{a_j}}{\sin \frac{\pi m}{a_j}}.$$

Это произведение равно

$$\left(\frac{p}{a_j}\right) = (-1)^{\frac{a_j-1}{2} \cdot \frac{p-1}{2}} \left(\frac{a_j}{p}\right) = \left(\frac{-1}{p}\right)^{\frac{a_j-1}{2}} \cdot \left(\frac{a_j}{p}\right);$$

$\text{ch}_{(p-1)\rho}(g)$ содержит t_j таких многочленов.

Далее, рассмотрим отличные от 1 нули двучленов $x^{a_j} - 1$ при четных a_j . Рассуждая аналогично получим, что в формулу для характера Вейля для всех четных a_j войдут множители

$$\prod_{m=1}^{\frac{a_j-1}{2}} \frac{\sin \frac{\pi p m}{a_j}}{\sin \frac{\pi m}{a_j}} = \left(\frac{-1}{p}\right)^{\frac{a_j}{2}-1} \left(\frac{2}{p}\right) \left(\frac{a_j}{p}\right),$$

и для половины (с учетом кратности) четных a_j войдут множители $\left(\frac{-1}{p}\right)$, соответствующие нулям $x = -1$. Множитель в $\text{ch}_{(p-1)\rho}(g)$, соответствующий отличным от 1 нулям двучленов $x^{a_j} - 1$ для четных a_j , равен

$$\left(\frac{2}{p}\right)^{\sum_{j:2|a_j} t_j} \left(\frac{\prod_j a_j^{t_j}}{p}\right) \left(\frac{-1}{p}\right)^{\sum_{j:2|a_j} \frac{a_j t_j}{2} - \sum_{j:2|a_j} \frac{t_j}{2}}.$$

Так как $\sum_{j:2|a_j} t_j$ — число четное, то

$$\left(\frac{2}{p}\right)^{\sum_{j:2|a_j} t_j} = 1.$$

Степень характеристического многочлена равна

$$\deg P_g(x) = \sum_j a_j t_j = \dim G_0.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \text{ch}_{(p-1)\rho}(g) &= p^{\frac{1}{2}\sum_j t_j - r} \left(\frac{\prod_j a_j^{t_j}}{p}\right) \left(\frac{-1}{p}\right)^{\sum_j \frac{a_j t_j}{2} - \sum_j \frac{t_j}{2}} = \\ &= p^{\frac{1}{2}\sum_j t_j - r} \left(\frac{\prod_j a_j^{t_j}}{p}\right) \left(\frac{-1}{p}\right)^{\frac{\dim G_0}{2}} \left(\frac{-1}{p}\right)^{\sum_j \frac{t_j}{2}} = p^{1-r/2} \left(\frac{-1}{p}\right)^{\frac{\dim G_0}{2}} \psi_p(g). \quad \square \end{aligned}$$

4. КОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ И АССОЦИИРОВАННЫЕ С НИМИ СЕМЕЙСТВА МОДУЛЯРНЫХ ФОРМ

4.1. (G, Φ) -множества. В исследованиях последних лет часто звучит мысль о том, что «модулярные формы живут в семействах». В этом разделе мы расскажем о том, как эта общая идея может быть реализована с помощью теории фрейм-соответствия (см. [5]).

Определение. (G, Φ) -Множеством называется множество параболических форм $\eta_g(z)$, ассоциированных с элементами группы G по принципу фрейм-соответствия с помощью некоторого представления.

Пример 4.1. $G \cong S_3 \cong \langle a, b : a^3 = e, b^2 = e, b^{-1}ab = a^2 \rangle$. Рассмотрим представление $\Phi = 4 \cdot T_{\text{reg}}$, где T_{reg} — регулярное представление. Параболические формы соответствуют элементам группы следующим образом:

$$\eta_e(z) = \eta^{24}(z), \quad \eta_a(z) = \eta_{a^2}(z) = \eta^8(3z), \quad \eta_b(z) = \eta_{ab}(z) = \eta_{a^2b}(z) = \eta^{12}(2z).$$

(S_3, T_{reg}) -множество имеет вид

$$\left\{ \eta^{24}(z), \eta^8(3z), \eta^8(3z), \eta^{12}(2z), \eta^{12}(2z), \eta^{12}(2z) \right\}.$$

Во многих задачах удобно рассматривать множества, получающиеся из (G, Φ) -множеств удалением повторяющихся форм. Мы будем называть такие множества *редуцированными*. Пример редуцированного (S_3, T_{reg}) -множества

$$\left\{ \eta^{24}(z), \eta^8(3z), \eta^{12}(2z) \right\}.$$

Проблема. Определить группу по заданным редуцированным (G, Φ) -множествам.

Технически это задача из теории групп; она по сути является задачей нахождения группы по данным характеристическим многочленам ее представлений. Можно ввести понятия пересечения и объединения редуцированных (G, Φ) -множеств.

Определение. Пусть S_1 — редуцированное (G_1, Φ_1) -множество, S_2 — редуцированное (G_2, Φ_2) -множество. *Пересечением* множеств S_1 и S_2 называется максимальное множество S , обладающее следующими свойствами:

- 1) любое редуцированное (H_j, Ψ_j) -множество V_j , которое содержится одновременно в S_1 и в S_2 , содержит S ;
- 2) S само является редуцированным (H, Ψ) -множеством для некоторой группы H и точного представления Ψ .

Определение. Пусть $S_1 = \{f_1, \dots, f_s\}$ — редуцированное (G_1, Φ_1) -множество, $S_2 = \{g_1, \dots, g_t\}$ — редуцированное (G_2, Φ_2) -множество. *Объединением* множеств S_1 и S_2 называется максимальное множество U , получающееся из $S = \{f_i g_j\}$, $i = \overline{1, s}$, $j = \overline{1, t}$, удалением повторяющихся функций.

Это множество U является редуцированным $(G_1 \times G_2, T)$ -множеством, представление T определяется формулой

$$T(g) = \Phi_1(g_1) \oplus \Phi_2(g_2), \quad g = g_1 g_2, \quad g_1 \in G_1, \quad g_2 \in G_2.$$

Пример 4.2. Пусть $S_1 = \{\eta^{24}(z), \eta^8(3z), \eta^{12}(2z)\}$ — редуцированное (S_3, Φ_1) -множество, $\Phi_1 = 4T_{\text{рег}}$; $S_2 = \{\eta^{24}(z), \eta^6(4z), \eta^{12}(2z)\}$ — редуцированное (D_4, Φ_2) -множество, $\Phi_2 = 3T_{\text{рег}}$. В этом случае

$$S = \{\eta^{24}(z), \eta^{12}(2z)\},$$

$$U = \{\eta^{48}(z), \eta^6(4z)\eta^{24}(z), \eta^{12}(2z)\eta^{24}(z), \\ \eta^8(3z)\eta^{24}(z), \eta^6(4z)\eta^{12}(2z), \eta^6(4z)\eta^8(3z), \eta^8(3z)\eta^{12}(2z), \eta^{24}(2z)\}.$$

4.2. G -зависимость и G -связанность. Между модулярными формами и группами можно определить связи, идейно аналогичные алгебраической зависимости между числами или функциями.

Определение. Назовем множество S , состоящее из η -произведений, *независимым относительно группы*, если не существует такой группы G , что S содержится в некотором (G, Φ) -множестве M . В противном случае множество S будем называть *зависимым относительно группы*, а его элементы — G -зависимыми.

Модулярные формы, принадлежащие одному и тому же (G, Φ) -множеству, будем называть G -связанными.

Определить, являются ли данные параболические формы G -зависимыми или нет, совсем не просто. И даже не так легко узнать, являются ли они G -связанными.

Теорема 4.1. *Функции из множества $S = \{\eta^{24}(z), \eta^4(5z)\eta^4(z), \eta^8(3z)\}$ не являются G -связанными ни для какой группы G .*

Доказательство. Допустим противное: множество S является редуцированным (G, Φ) -множеством для некоторой группы G . Элементы этой группы имеют порядки 1, 3, 5. Покажем сначала, что у группы $Z_3 \times Z_3$ не существует такого точного представления, что элементам этой группы соответствуют только формы $\eta^{24}(z), \eta^8(3z)$. Пусть такое представление существует и m_1 — кратность, с которой в него входит единичное представление. Получим $m_1 = 24/9$. Но это число должно быть целым. Следовательно, такое представление не существует и для элементарных абелевых групп экспоненты 3 большего ранга. Значит, силовская 3-подгруппа G_3 изоморфна Z_3 . Аналогично показывается, что силовская 5-подгруппа G_5 изоморфна Z_5 . В этом случае группа должна быть метациклической по известной теореме из теории групп (см. [13, теорема 9.3.4]). Но так как $|G_3|$ не делит $|\text{Aut}(G_5)|$ и $|G_5|$ не делит $|\text{Aut}(G_3)|$, а элементов порядка 15 в группе нет, то искомой группы не существует. Получено противоречие, и утверждение доказано. $\square$

Для каждого набора (G, Φ) -множеств, определяющих группу, можно определить такое минимальное число N , что все функции из этих множеств являются параболическими формами уровня N . Рассматривая все определяющие наборы, можно выбрать минимальное значение уровня по ним. Это число будем называть *уровнем группы*. Можно классифицировать группы по так определенному уровню. Группой уровня 1 является только единичная.

4.3. «Модулярный генетический код». Своеобразным аналогом генетического кода являются наборы η -произведений, являющиеся редуцированными (G, Φ) -множествами для группы G , которые однозначно ее определяют. Эти множества непросто находить даже для групп малых порядков и простой структуры. В [5] такие наборы находятся для групп порядков от 1 до 8, порядка 24, циклических групп порядка p^l , групп порядка p^2 , pq , где p, q — простые числа.

Для диэдральных групп D_p приведем результат полностью.

Теорема 4.2. Пусть p — нечетное простое число, $p \neq 3, 7$. Тогда диэдральная группа D_p однозначно определяется множеством

$$\left\{ \eta^{24p}(z), \eta^{24}(pz), \eta^{12p}(2z) \right\}.$$

Группы D_3 и D_7 определяются наборами из двух множеств:

$$\begin{aligned} D_3 \cong S_3 : & \left\{ \eta^{24}(z), \eta^8(3z), \eta^{12}(2z) \right\} \wedge \left\{ \eta^{24}(z), \eta^6(3z)\eta^6(z), \eta^{11}(2z)\eta^2(z) \right\}; \\ D_7 : & \left\{ \eta^{168}(z), \eta^{24}(7z), \eta^{84}(2z) \right\} \wedge \left\{ \eta^{24}(z), \eta^3(7z)\eta^3(z), \eta^{10}(2z)\eta^4(z) \right\}. \end{aligned}$$

Доказательство. Обозначим множество $\left\{ \eta^{24p}(z), \eta^{24}(pz), \eta^{12p}(2z) \right\}$ через S . По виду модулярных форм можно понять, что элементы группы имеют порядки 1, 2 и p . Пусть Φ — представление группы G , для которого S является редуцированным (G, Φ) -множеством. Из вида параболических форм следует, что $|G| = 2^s p^t$. Вычислим кратность, с которой в это представление входит единичное. Получим $m_1 = \frac{24p}{2^s p^t}$. Так как это число должно быть целым, то при $p > 3$ видим, что $t = 1$, а s может принимать значения 1, 2 или 3. При $p > 3$ силовская p -подгруппа является циклической порядка p . По теореме Силова $1 + pm$ делит порядок G . Если $m = 0$, то G_p является нормальной, и так как в группе нет элементов порядка $2p$, G_2 является подгруппой в $\text{Aut}(Z_p)$. Значит, в этом случае $G_2 \cong Z_2$, и $G \cong D_p$. Абелевой группой Z_{2p} наша группа быть не может, так как она не содержит элементы порядка $2p$. Искомым представлением Φ является прямая сумма, в которую каждое неприводимое двумерное представление входит с кратностью 24, а каждое одномерное — с кратностью 12.

Возможны еще два случая: $p = 3$, $m = 1$, $1 + pm = 4$ и $p = 7$, $m = 1$, $1 + pm = 8$.

Случай $p = 3$. Введем обозначения

$$S = \left\{ \eta^{24}(z), \eta^8(3z), \eta^{12}(2z) \right\}, \quad S_1 = \left\{ \eta^{24}(z), \eta^6(3z)\eta^6(z), \eta^{11}(2z)\eta^2(z) \right\}.$$

Пусть множество S соответствует представлению Φ , а S_1 — представлению Ψ .

Вычислим кратность, с которой в Φ входит единичное. Получим, $m_1 = \frac{24}{2^s 3^t}$. Так как это число должно быть целым, то $t = 1$.

Если силовская 3-подгруппа нормальна, то вся группа является диэдральной по тем же соображениям, что и выше. В противном случае в группе имеется 8 элементов порядка 3, остальные элементы имеют порядки 1 и 2. Кратность, с которой в Ψ входит единичное представление, равна

$$m_1 = \frac{24 + 8 \cdot 6 + 2l}{3 \cdot 2^s}.$$

При $s = 2$ имеем $l = 3$, а при $s = 3 - l = 15$. В обоих этих случаях m_1 не является целым числом.

Для D_3 представление Φ является прямой суммой, в которую неприводимое двумерное представление входит с кратностью 8, а одномерные представления — с кратностью 4.

Представление Ψ является прямой суммой, в которую неприводимое двумерное представление входит с кратностью 6, а одномерные представления, переводящие элементы второго порядка в -1 , входят с кратностью 5, единичное представление — с кратностью 7.

Случай $p=7$. Введем обозначения

$$S = \{\eta^{168}(z), \eta^{24}(7z), \eta^{84}(2z)\}, \quad S_1 = \{\eta^{24}(z), \eta^3(7z)\eta^3(z), \eta^{10}(2z)\eta^4(z)\}.$$

Пусть множество S соответствует представлению Φ , а S_1 — представлению Ψ .

Если силовская 7-подгруппа нормальна, то вся группа является диэдральной по тем же соображениям, что и выше. В противном случае в группе имеется 48 элементов порядка 7, а остальные элементы имеют порядки 1 и 2. Порядок группы равен 56. Силовская 2-подгруппа должна быть нормальна. Кратность, с которой в Ψ входит единичное представление, равна

$$m_1 = \frac{24 + 48 \cdot 3 + 7 \cdot 4}{56}.$$

Это число не является целым.

Для D_7 представление Φ является прямой суммой, в которую неприводимое двумерное представление входит с кратностью 24, а одномерные представления входят с кратностью 12.

Представление Ψ является прямой суммой, в которую неприводимое двумерное представление входит с кратностью 3, а одномерные представления, переводящие элементы второго порядка в -1 , входят с кратностью 1, единичное представление — с кратностью 5. $\square$

4.4. Открытые проблемы. Приведем ряд открытых проблем.

1. Описать все конечные группы G , для которых существуют (G, Φ) -множества, состоящие из мультипликативных η -произведений, т.е. завершить классификацию $M\eta P$ -групп.
2. Для данной группы найти наборы модулярных форм, однозначно ее определяющие.
3. Для данного N описать все группы «уровня N ».
4. Пусть некоторое множество M является редуцированным (G, Φ) -множеством. Описать все такие группы H , что M является (H, Ψ) -множеством. В этом случае можно говорить, что группа G определяет некоторое семейство, состоящее из наборов модулярных форм. С другой стороны, группы G и H оказываются связанными с помощью модулярных форм.
5. Проблема 1 допускает обобщение. Пусть M — некоторое множество параболических форм, определяемых некоторыми естественными условиями. Описать все такие группы G , что (G, Φ) -множества состоят только из элементов множества M .
6. Для данной группы описать все ее $M\eta P$ -подгруппы и все ее точные представления, ограничения которых на выбранную $M\eta P$ -подгруппу ассоциируют элементы этой подгруппы со степенями мультипликативных η -произведений.
7. Изучить вопрос о G -зависимости параболических форм.

5. АРИФМЕТИКА И СТРУКТУРА ПРОСТРАНСТВ

5.1. Коэффициенты Фурье и гроссен-характеры. Изучение коэффициентов Фурье считается одной из основных задач теории модулярных форм: во многих работах изучаются асимптотическое поведение, обращение в ноль, сравнения для коэффициентов и другие задачи. Изучение коэффициентов функций МакКея интересно прежде всего потому, что они мультипликативны.

Пусть $\mathbf{K} = \mathbb{Q}(\sqrt{-D})$ — мнимое квадратичное поле с дискриминантом $-D$, и пусть O_K — его кольцо целых. Пусть M — нетривиальный идеал в O_K и $I(M)$ — группа дробных идеалов, взаимно простых с M .

Гроссен-характер Гекке ϕ веса $k \geq 2$ с модулем M — это такой гомоморфизм

$$\phi : I(M) \rightarrow \mathbb{C}^*,$$

что для каждого $\alpha \in K^*$, $\alpha \equiv 1 \pmod{M}$ имеем

$$\phi(\alpha O_K) = \alpha^{k-1}.$$

Пусть

$$\omega_\phi(n) = \frac{\phi((n))}{n^{k-1}}$$

для каждого целого n , взаимно простого с M ,

$$\Psi(z) = \sum_A \phi(A) q^{N(A)},$$

где сумма берется по всем идеалам A , взаимно простым с M .

Теорема 5.1 (теорема Гекке, см. [46]). *Функция $\Psi(z)$ является параболической формой, а именно*

$$\Psi(z) \in S_k \left(\Gamma_0(DN(M)), \left(\frac{-D}{\cdot} \right) \omega_\phi \right).$$

Даммит, Кисилевски и МакКей нашли для 16 из 28 мультипликативных η -произведений целого веса L -функции с гроссен-характерами мнимых квадратичных полей, которые совпадают с преобразованиями Меллина этих форм. Они доказали, что для оставшихся 12 мультипликативных η -произведений целого веса такое соответствие невозможно (см. [21]).

Пример 5.1. $\Psi(z) = \eta^6(4z)$, $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-1})$, $M = (2)$, $\Psi(z) \in S_3 \left(\Gamma_0(16), \left(\frac{-4}{\cdot} \right) \right)$. В [7] приведены аналогичные формулы, в которых вместо кольца целых мнимых квадратичных полей рассматриваются порядки в алгебрах кватернионов и алгебре Кэли.

Теорема 5.2. Пусть $\mathbf{H}$ — алгебра кватернионов над $\mathbb{Q}$ и Γ_4 — решетка кватернионов Гурвица:

$$\alpha = \frac{a + bi + cj + dk}{2}, \quad a \equiv b \equiv c \equiv d \pmod{2}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{Z}.$$

Тогда

$$\frac{1}{12} \sum_{\alpha \in \Gamma_4 \subset \mathbf{H}} \alpha^6 e^{2\pi i z N(\alpha)} = \eta^8(z) \eta^8(2z).$$

Далее,

$$\frac{1}{8} \sum_{\substack{\alpha \in \mathbf{H}, \\ a+b+c+d \equiv 1 \pmod{2}}} \alpha^4 e^{2\pi i z N(\alpha)} = \eta^{12}(2z),$$

где суммирование ведется по всем таким кватернионам $a + bi + cj + dk$, что $a + b + c + d \equiv 1 \pmod{2}$, $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$.

Теорема 5.3. Пусть $\mathcal{C}_a$ — алгебра Кэли. Можно построить в $\mathcal{C}_a$ порядок, на котором билинейная форма

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \alpha \bar{\beta} + \beta \bar{\alpha}$$

определяет структуру четной унимодулярной решетки типа Γ_8 , причем система корней E_8 замкнута относительно умножения в алгебре Кэли. Тогда сумма

$$\frac{1}{12} \sum_{\alpha \in \Gamma_8 \subset \mathcal{C}_a} \alpha^8 e^{2\pi i z N\alpha}$$

по всем элементам этого порядка равна $\eta^{24}(z)$.

Интересно было бы найти аналогичные формулы для всех мультипликативных η -произведений.

5.2. Исследования Т. Хиромацу и М. Койке. В [25] Т. Хиромацу рассматривает ряд интересных арифметических проблем, для которых мультипликативные η -произведения являются яркими примерами. При этом определяются коэффициенты Фурье в общем виде, значения зависят от природы индекса. В этом пункте расскажем об одном результате, полученном Т. Хиромацу и М. Койке.

Пусть $f(x)$ — неприводимый многочлен с целыми коэффициентами, $f_p(x)$ получается из $f(x)$ редукцией всех коэффициентов по модулю p . Через $\text{Spl}\{f(x)\}$ обозначается множество всех таких простых p , что многочлен $f_p(x)$ разлагается в произведение линейных множителей над $\mathbb{F}_p$. Пусть

$$\eta(18z)\eta(6z) = \sum_{n=1}^{\infty} a(n)q^n, \quad q = e^{2\pi iz}.$$

В [25] показано, что

$$\text{Spl}\{x^3 - 2\} = \{p \mid p \equiv 1 \pmod{3}, a(p) = 2\}, \quad a_p = \begin{cases} 0, & p \equiv 2 \pmod{3}, \\ 2, & p \equiv 1 \pmod{3}, \left(\frac{d}{p}\right)_3 = 1, \\ -1, & p \equiv 1 \pmod{3}, \left(\frac{d}{p}\right)_3 \neq 1; \end{cases}$$

здесь $\left(\frac{d}{p}\right)_3$ — символ кубического вычета.

Пусть

$$\eta^2(11z)\eta^2(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b(n)q^n.$$

Доказано, что

$$\text{Spl}\{4x^3 - 4x^2 + 1\} = \left\{p \mid \left(\frac{-11}{p}\right) = 1, b(p) \equiv 0 \pmod{2}\right\}.$$

Далее, пусть

$$\eta(22z)\eta(2z) = \sum_{n=1}^{\infty} c(n)q^n.$$

Доказано, что если p — простое число, $p \neq 11$, то

$$\#\{x \in \mathbb{F}_q \mid 4x^3 - 4x^2 + 1 = 0\} = c(p) - \left(\frac{-11}{p}\right) = c^2(p) + 1.$$

В частности,

$$\text{Spl}\{4x^3 - 4x^2 + 1\} = \{p \mid c(p) = 2, p \neq 2, 11\}.$$

Анализируя идеи доказательства этих фактов в работах Т. Хиромацу, М. Койке доказал общий факт. Пусть $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, $a, b, c \in \mathbb{Z}$, — неприводимый многочлен, K_f — его поле разложения, $\text{Gal}(K_f/\mathbb{Q}) \cong S_3$, K_f содержит мнимое квадратичное поле k с дискриминантом $-D$. Пусть $L(s, \varrho)$ — L -функция Артина, ассоциированная с представлением $\varrho : \text{Gal}(K_f/\mathbb{Q}) \rightarrow GL_2(\mathbb{C})$ с кондуктором N . Тогда существует модулярная форма относительно $\Gamma_0(N)$ веса 1 с характером $\det(\varrho)$:

$$F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a(n)q^n$$

(см. [20]).

М. Койке доказал следующий результат.

Теорема 5.4 (см. [31]). Пусть M — произведение всех простых чисел, входящих в a , b , c и $p \nmid MN$. Тогда

$$\#\{\alpha \in \mathbb{F}_q \mid f(\alpha) = 0\} = a^2(p) - \left(\frac{-D}{p}\right).$$

В частности,

$$\text{Spl}\{f(x)\} = \{p \mid a(p) = 2\}.$$

5.3. Суммы Шимур.

5.3.1. Суммы Шимур от коэффициентов модулярных форм. Определение этих сумм было впервые дано в работе [45] К. Оно. Они возникают в исследованиях Г. Шимур перехода от модулярных форм полуцелого веса к модулярным формам целого веса. Но Шимура не давал их явного определения.

Арифметической функцией называется комплекснозначная функция, определенная на множестве натуральных чисел. Пусть $a(n)$ — арифметическая функция, доопределим ее до функции на множестве рациональных чисел, считая ее значение равным нулю, если аргумент не является натуральным числом.

Определение. Пусть $a(n)$ — функция, описанная выше, c — положительное целое число. Для $m \geq 1$ сумма Шимур $\text{Sh}(m, a, c)$ определяется формулой

$$\text{Sh}(m, a, c) = \sum_{j=1}^{m-1} a\left(\frac{m^2 - j^2}{c}\right);$$

по определению $\text{Sh}(1, a, c) = 0$.

Теорема 5.5 (К. Оно). *Если*

$$\eta^2(8z)\eta(4z)\eta(2z)\eta^2(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a(n)q^n \in S_3(8, \chi),$$

то справедливы следующие утверждения:

1) *если p инертно в $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-2})$, то*

$$p = \sqrt{-\frac{\text{Sh}(4p, a, 4)}{2}};$$

2) *если p разлагается или разветвляется в $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-2})$, то*

$$p = \sqrt{a^2(p) + \frac{\text{Sh}(4p, a, 4)}{2}}.$$

В [6] аналогичные результаты получены для других мультипликативных η -произведений, причем в доказательствах методы Оно, например теорема Сипра (см. [16]) не всегда могут быть применены, используются и другие приемы. Приведем одну теорему.

Теорема 5.6. *Пусть*

$$f(z) = \eta(18z)\eta(6z) = \sum_{n=1}^{\infty} a(n)q^n \in S_1(108, \chi).$$

1) *Если p инертно в $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-3})$, то*

$$p = -2 \text{Sh}(p^2, a, 1) - 1.$$

2) *Если p расщепляется в $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-3})$, то*

$$p = (2 \text{Sh}(p, a, 1) + a^2(p))^2 - 2 \text{Sh}(p^2, a, 1) - a^2(p^2) - 2 \text{Sh}(p, a, 1).$$

В частности, если $|a(p)| = 1$, то

$$p = 4 \text{Sh}^2(p, a, 1) - 2 \text{Sh}(p^2, a, 1) + 2 \text{Sh}(p, a, 1) + 1;$$

если $|a(p)| = 2$, то

$$p = 4 \text{Sh}^2(p, a, 1) - 2 \text{Sh}(p^2, a, 1) + 14 \text{Sh}(p, a, 1) - 5.$$

Суммы Шимур интересно было бы изучить для различных арифметических функций, а не только для коэффициентов модулярных форм.

5.3.2. *Суммы Шимур и суммы Гаусса.* Пусть $\zeta_p = e^{2\pi i/p}$. Рассмотрим сумму Гаусса

$$g(\chi) = \sum_{j=1}^{p-1} \left(\frac{j}{p}\right) \zeta_p^j, \quad \text{где} \quad \chi(t) = \left(\frac{t}{p}\right).$$

Теорема 5.7. Пусть $a(n) = \zeta_p^{-n}$; тогда

$$\text{Sh}(p, a, 1) = g(\chi) - 1.$$

Доказательство. Сначала докажем формулу

$$\sum_{j=1}^{p-1} \left(\frac{j}{p}\right) \zeta_p^j = \sum_{j=0}^{p-1} \zeta_p^{j^2}.$$

Среди натуральных чисел от 1 до $p-1$ одна половина чисел является квадратичными вычетами, а другая — квадратичными невычетами. Кроме того,

$$\sum_{j=1}^{p-1} \zeta_p^j + 1 = 0.$$

Имеем

$$\sum_{j=1}^{p-1} \left(\frac{j}{p}\right) \zeta_p^j + 0 = \sum_{j=1}^{p-1} \left(\frac{j}{p}\right) \zeta_p^j + \sum_{j=1}^{p-1} \zeta_p^j + 1 = 1 + 2 \sum_{j=0}^{\frac{p-1}{2}} \zeta_p^{j^2} = \sum_{j=0}^{p-1} \zeta_p^{j^2}.$$

Получаем

$$\text{Sh}(m, a, 1) = \sum_{j=1}^{p-1} \zeta_p^{-p^2+j^2} = \sum_{j=1}^{p-1} \zeta_p^{j^2} = g(\chi) - 1. \quad \square$$

5.3.3. *Суммы Шимур и суммы Якоби.*

Теорема 5.8. Пусть χ — мультипликативный характер конечного поля $\mathbb{F}_p$, $p > 2$, p — простое число. Тогда сумма Якоби равна

$$J(\chi, \chi) = 2 \text{Sh}\left(\frac{p+1}{2}, \chi, 1\right) + \chi^2\left(\frac{p+1}{2}\right).$$

Интересно было бы провести исследование асимптотических свойств сумм Шимур для различных функций.

5.4. η-Произведения в структурных теоремах.

5.4.1. *Исследование структуры методом рассечения.* Так как все мультипликативные η-произведения имеют в параболических вершинах нули порядка 1, а в остальных точках нулей и полюсов у них нет, то справедлива следующая теорема.

Теорема 5.9. Пусть $S_l(\Gamma_0(N), \chi)$ — одномерное пространство, образующей которой является функция МакКея. Тогда при $k \geq l$ выполняется соотношение

$$S_k(\Gamma_0(N), \chi) = f(z) \cdot M_{k-l}(\Gamma_0(N)).$$

При $N = 1$ и четном $k \geq 12$ получаем классический случай

$$S_k(\Gamma) = \eta^{24}(z) \cdot M_{k-12}(\Gamma).$$

Возникает идея изучать структуру пространств $V \cong S_k(\Gamma_0(N), \chi)$ для произвольных весов и характеров, представив пространство V в виде

$$S_k(\Gamma_0(N), \chi) = f(z) \cdot M_{k-l}(\Gamma_0(N), \psi_2) \oplus W,$$

где $f(z) \in S_l(\Gamma_0(N), \psi_1)$, $\chi = \psi_1 \cdot \psi_2$.

В качестве $f(z)$ выбирают функцию малого веса, и размерность дополнительного пространства W не зависит от веса k и при возрастании веса становится существенно меньше размерности пространства $S_k(\Gamma_0(N), \chi)$. Такой подход называется изучением пространств «методом рассеечения», а функция $f(z)$ называется «рассекающей функцией». В качестве рассекающих функций разумно выбирать η -произведения, так как их дивизор сосредоточен в параболических вершинах. В [2] исследуются пространства $S_k(\Gamma_0(N))$ для четных весов. Получены результаты для всех уровней, результат зависит от значения N по модулю 24. Приведем формулировку одной из теорем.

Теорема 5.10. Пусть $N \equiv 5 \pmod{12}$ или $N \equiv 9 \pmod{12}$. Тогда

$$S_k(\Gamma_0(N)) = V_1 \oplus V_2 \oplus V_3,$$

где

$$V_1 = \eta^4(Nz)\eta^4(z) \cdot M_{k-4}(\Gamma_0(N)), \quad V_2 = \langle \eta^4(Nz)\eta^4(z) \rangle^\perp \cdot G(z), \quad V_3 = S_2(\Gamma_0(N)) \cdot H(z),$$

$$G(z) = E_4^{(k-4)/4}(z), \quad H(z) = E_6^{(k-2)/6}(z) \quad \text{при } k \equiv 0 \pmod{4},$$

$$G(z) = E_6^{(k-4)/6}(z), \quad H(z) = E_4^{(k-4)/4}(z) \quad \text{при } k \equiv 2 \pmod{4}.$$

Здесь пространство $\langle \eta^4(Nz)\eta^4(z) \rangle^\perp$ — ортогональное дополнение к пространству $\langle \eta^4(Nz)\eta^4(z) \rangle$ в $S_4(\Gamma_0(N))$.

Исследован для случая четного веса феномен точного рассеечения.

Теорема 5.11. Пусть k, l — четные числа, $k > l$.

$$S_k(\Gamma_0(N)) \cong f(z) \cdot M_{k-l}(\Gamma_0(N))$$

тогда и только тогда, когда

- 1) или $f(z)$ — мультипликативное η -произведение четного веса,
- 2) или $N = 17$, $k \equiv 2 \pmod{4}$, $k \geq 6$, $l = 2$; $N = 19$, $k \equiv 2 \pmod{6}$, $k \geq 8$, $l = 2$.

Во всех случаях $f(z)$ имеет мультипликативные коэффициенты Фурье, являясь собственной функцией относительно всех операторов Гекке, и $S_l(\Gamma_0(N)) \cong \langle f(z) \rangle$. Кроме двух последних пространств $S_2(\Gamma_0(17))$ и $S_2(\Gamma_0(19))$, $f(z)$ является мультипликативным η -произведением четного веса.

Доказательство. Отметим сразу, что утверждение теоремы для уровня 1 и веса $l = 12$ является хорошо известным классическим фактом (см. [10]).

Докажем сначала, что если имеет место точное рассеечение, то $\dim S_l(\Gamma_0(N)) = 1$. Допустим противное. Тогда пространства $f(z) \cdot M_{k-l}(\Gamma_0(N))$ совпадают для любых $f(z)$ из $S_l(\Gamma_0(N))$. Пусть $h(z)$ — функция из $M_{k-l}(\Gamma_0(N))$ и s — такая параболическая вершина, в которой она не обращается в нуль. Пусть $f(z)$ — такая функция из $S_l(\Gamma_0(N))$, что $\text{ord}_s(f)$ минимально. Пусть $g(z)$ — такая функция из $S_l(\Gamma_0(N))$, что $\text{ord}_s(g) > \text{ord}_s(f)$. Имеем

$$f(z)h(z) = g(z)h_1(z), \quad h(z), h_1(z) \in M_{k-l}(\Gamma_0(N)).$$

Но это равенство невозможно, так как порядки в s у функций справа и слева различны. Значит, все формы из $S_l(\Gamma_0(N))$ имеют одинаковый порядок в s . Но это тоже невозможно, так как если $f(z)$ и $g(z)$ — нормированные формы из $S_l(\Gamma_0(N))$, то $f(z) - g(z)$ имеет больший порядок в s (при необходимости $f(z)$ и $g(z)$ можно заменить на пропорциональные функции).

Известно, что $\dim S_{12}(\Gamma) = 1$. Следовательно, $\dim S_{12}(\Gamma_0(N)) > 1$ для всех $N > 1$. Значит, проверять l надо до значения 12. Если $\dim S_2(\Gamma_0(p)) > 1$, то $\dim S_k(\Gamma_0(p)) > 1$, поэтому для точного рассеечения необходимым условием является $\dim S_2(\Gamma_0(p)) \leq 1$, где p — простой делитель уровня N . Это условие выполняется для $p = 2, 3, 5, 7, 11, 17, 19$. Нетрудно найти, что $\dim S_2(\Gamma_0(N)) = 1$ для $N = 11, 12, 14, 15, 17, 19, 20, 27, 36$. Если уровень N_1 делится на любое из этих значений, $N_1 > N$, то $\dim S_2(\Gamma_0(N_1)) > 1$.

Далее, что для $N = 5, 8, 9$ имеем $\dim S_4(\Gamma_0(N)) = 1$; если уровень N_1 делится на любое из этих значений, $N_1 > N$, то $\dim S_4(\Gamma_0(N_1)) > 1$; для $N = 3, 4$ имеем $\dim S_6(\Gamma_0(N)) = 1$; если

ТАБЛИЦА 4

N	χ	$f_1(z), \dots, f_s(z)$	$g(z)$
16	$\left(\frac{-1}{d}\right)$	$4^6; 1^{-4} \cdot 2^6 \cdot 4^4; 1^4 \cdot 2^6 \cdot 4^{-4}; 2^{-4} \cdot 4^6 \cdot 8^4; 2^4 \cdot 4^6 \cdot 8^{-4}; 4^{-4} \cdot 8^6 \cdot 16^4;$ $4^4 \cdot 8^6 \cdot 16^{-4}$	4^6
12	$\left(\frac{-3}{d}\right)$	$1^{-3} \cdot 3^9; 2^{-3} \cdot 6^9; 4^{-3} \cdot 12^9; 1^9 \cdot 3^{-3}; 2^9 \cdot 6^{-3}; 4^9 \cdot 12^{-3}; 2^3 \cdot 6^3$	$2^3 \cdot 6^3$
8	$\left(\frac{-2}{d}\right)$	$1^{-2} \cdot 4^{11} \cdot 2^{-1} \cdot 8^{-2}; 8^{-2} \cdot 2^{11} \cdot 4^{-1} \cdot 1^{-2}; 1^{-6} \cdot 2^{13} \cdot 4^{-3} \cdot 8^2;$ $8^{-6} \cdot 4^{13} \cdot 2^{-3} \cdot 1^2; 1^2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 8^2$	$1^2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 8^2$
7	$\left(\frac{-7}{d}\right)$	$1^3 \cdot 7^3; 1^{-1} \cdot 7^7; 7^{-1} \cdot 1^7$	$1^3 \cdot 7^3$

уровень N_1 делится на любое из этих значений, $N_1 > N$, то $\dim S_6(\Gamma_0(N_1)) > 1$; для $N = 2$ имеем $\dim S_8(\Gamma_0(N)) = 1$; если уровень N_1 делится на 2, $N_1 > 2$, то $\dim S_8(\Gamma_0(N_1)) > 1$.

Для всех мультипликативных η -произведений известно, что их порядок в каждой параболической вершине равен 1, а вне параболических вершин нулей нет. Пусть $g(z) \in S_k(\Gamma_0(N))$; тогда $g(z)/f(z) \in M_{k-l}(\Gamma_0(N))$. Обратное включение $f(z) \cdot M_{k-l}(\Gamma_0(N)) \subset S_k(\Gamma_0(N))$ очевидно.

Мультипликативные η -произведения соответствуют всем рассматриваемым выше уровням, кроме 17 и 19. Для уровней $N = 17, 19$ равенство размерностей для пространств слева и справа достигается не для любых значений k , а лишь при указанных в формулировке условиях. $\square$

Планируется продолжить исследования для пространств функций с нетривиальными характеристиками.

5.4.2. Представление модулярных форм в виде однородных многочленов. Известно, что каждый элемент пространства M_k является однородным многочленом от рядов Эйзенштейна $E_4(z)$ и $E_6(z)$. Если форма параболическая, то она делится на мультипликативное η -произведение

$$\eta^{24}(z) = \frac{E_4^3(z) - E_6^2(z)}{1728}.$$

Это классический факт. Н. Коблиц в [10] указывает, что любой элемент из $S_k(\Gamma(4))$ при четном $k \geq 6$ является однородным многочленом от модулярных форм $\eta^{-8}(z)\eta^{20}(2z)\eta^{-8}(4z)$ и $\eta^{-4}(2z)\eta^8(4z)$, который делится на мультипликативное η -произведение $\eta^{12}(2z)$. В [3] этот результат обобщается для всех уровней, соответствующих мультипликативным η -произведениям веса $k > 1$, кроме $N = 11$. В этих случаях выясняется, что элементы пространств $M_k(\Gamma(N), \chi)$ являются однородными многочленами от небольшого количества η -частных. Приведем формулировку одной из теорем и доказательство для одного случая. В остальных случаях доказательство проводится аналогично, но требует больших вычислений.

Теорема 5.12. Любая модулярная форма $f(z) \in M_{3l}(\Gamma_0(N), \chi^l)$ является однородным многочленом от $f_1(z), \dots, f_s(z)$ степени l . Если $f(z)$ — параболическая форма, то она делится на мультипликативное η -произведение веса 3. Значения $N, \chi, f_1(z), \dots, f_s(z), g(z)$ приведены в таблице 4.

Мы использовали сокращенное обозначение для η -частных, как в п. 3.2.

Доказательство. Проведем подробное доказательство для $N = 7$. Введем следующие обозначения:

$$f_1(z) = \eta^{-1}(z)\eta^7(7z), \quad f_2(z) = \eta^7(z)\eta^{-1}(7z), \quad g(z) = \eta^3(z)\eta^3(7z).$$

Имеем

$$\dim M_{3l}(\Gamma_0(7), \chi^l) = \dim S_{3l}(\Gamma_0(7), \chi^l) + 2.$$

Параболических вершин две: 0 и ∞ . Порядки: $\text{ord}_\infty f_1^l = 2l$, $\text{ord}_0 f_1^l = 0$, $\text{ord}_\infty f_2^l = 0$, $\text{ord}_0 f_2^l = 2l$. В силу этого нетривиальная линейная комбинация функций f_1^l и f_2^l не может быть ни нулевой функцией, ни параболической формой. Следовательно,

$$M_{3l}(\Gamma_0(7), \chi^l) \cong S_{3l}(\Gamma_0(7), \chi^l) \oplus \langle f_1^l \rangle \oplus \langle f_2^l \rangle,$$

$$M_3(\Gamma_0(7), \chi) \cong \langle g(z) \rangle \oplus \langle f_1^l \rangle \oplus \langle f_2^l \rangle.$$

Так как порядок в каждой параболической вершине функции $g(z)$ равен 1, то

$$S_{3l}(\Gamma_0(7), \chi^l) \cong g(z) \cdot M_{3l-3}(\Gamma_0(7), \chi^{l-1}).$$

Можно применить предположение индукции. Если $f(z)$ не является параболической, то можно подобрать числа c_1 и c_2 так, что $G(z) = f(z) - c_1 f_1^l(z) - c_2 f_2^l(z)$ является параболической формой. Тогда

$$\frac{G(z)}{g(z)} \in M_{3l-3}(\Gamma_0(7), \chi^{l-1}),$$

и можно применить предположение индукции. Следовательно, утверждение теоремы верно и для $f(z)$. $\square$

В этом обзоре были затронуты лишь некоторые современные проблемы в теории модулярных форм. Автор надеется, что рассмотренные вопросы заинтересуют молодых математиков, и в этих областях будут получены новые результаты.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Айерлэнд К., Роузен М. Классическое введение в современную теорию чисел. — М.: Мир, 1987.
2. Воскресенская Г. В. Разложение пространств модулярных форм // Мат. заметки. — 2016. — 99, № 6. — С. 867–877.
3. Воскресенская Г. В. О представлении модулярных форм в виде однородных многочленов // Вестн. СамГУ. — 2015. — 128, № 6. — С. 40–49.
4. Воскресенская Г. В. Конечные простые группы и мультипликативные η -произведения // Зап. научн. семин. ПОМИ. — 2010. — 375. — С. 71–91.
5. Воскресенская Г. В. Конечные группы и ассоциированные с ними семейства модулярных форм // Мат. заметки. — 2010. — 87, № 4. — С. 528–541.
6. Воскресенская Г. В. Арифметические свойства сумм Шимур для некоторых модулярных форм // Фундам. прикл. мат. — 2010. — 16, № 6. — С. 7–22.
7. Воскресенская Г. В. Гиперкомплексные числа, системы корней и модулярные формы // Арифметика и геометрия многообразий / Межвуз. сб. науч. тр. — Самара: Самарский ун-т, 1992. — С. 48–59.
8. Воскресенская Г. В. Модулярные формы и представления групп // Мат. заметки — 1992. — 52, № 1. — С. 25–31.
9. Кнэпп Э. Эллиптические кривые. — М.: Факториал Пресс, 2004.
10. Коблиц Н. Введение в эллиптические кривые и модулярные формы. — М.: Мир, 1988.
11. Ленг С. Введение в теорию модулярных форм. — М.: Мир, 1977.
12. Ленг С. Эллиптические функции. — М.: Наука, 1984.
13. Холл М. Теория групп. — М.: ИЛ, 1962.
14. Biagioli A. J. F. The construction of modular forms as products of transforms of the Dedekind eta-function // Acta Arithm. — 1990. — 54, № 4. — С. 273–300.
15. Bruinier J. H., Ono K. The arithmetic of Borcherds exponents // Math. Ann. — 2003. — 327. — С. 293–303.
16. Cipra B. On the Shimura lift, apres Selberg // J. Number Theory. — 1989. — 32. — С. 58–64.
17. Cohen H., Oesterle J. Dimensions des espaces de formes modulaires // Lect. Notes Math. — 1976. — 627. — С. 69–78.
18. Conway J., Norton S. Monstrous Moonshine // Bull. London Math. Soc. — 1979. — 11. — С. 308–339.
19. Conway J. H., Curtis R. T., Norton S. P., Parker R. A., Wilson R. A. Atlas of finite groups. Maximal subgroups and ordinary characters for simple groups. — Oxford: Clarendon Press, 1985.
20. Deligne P., Serre J.-P. Formes modulaires de poids 1 // Ann. Sci. Ec. Norm. Super. — 1974. — 7, № 4. — С. 507–530.
21. Dummit D., Kisilevsky H., McKay J. Multiplicative products of η -functions // Contemp. Math. — 1985. — 45. — С. 89–98.

22. *Gordon B., Sinor S.* Multiplicative properties of η -products// *Lect. Notes Math.* — 1987. — 1395. — С. 173–200.
23. *Gordon B., Robins S.* Lacunarity of Dedekind η -products// *Glasgow Math. J.* — 1995. — 37, № 1. — С. 1–14.
24. *Gordon B., Hughes K.* Multiplicative properties of η -products, II// *Contemp. Math.* — 1993. — 143. — С. 415–430.
25. *Hiramatsu T.* Higher reciprocity law and modular forms of weight one// *Comm. Math. Univ. St. Paul.* — 1982. — 31. — С. 75–85.
26. *Hiramatsu T.* Theory of automorphic forms of weight 1// *Adv. Stud. Pure Math.* — 1988. — 13. — С. 503–584.
27. *Hiramatsu T., Sato M., Takada I.* On S_3 -type modular forms of weight 1// *Math. Jpn.* — 1987. — 32, № 6. — С. 915–925.
28. *Ishii N.* Cusp forms of weight one, quartic reciprocity and elliptic curves// *Nagoya Math. J.* — 1985. — 98. — С. 117–137.
29. *Kohler G.* Some eta-identities arising from theta series// *Math. Scand.* — 1990. — 66, № 1. — С. 147–154.
30. *Koike M.* On McKay’s conjecture// *Nagoya Math. J.* — 1984. — 95. — С. 85–89.
31. *Koike M.* Higher reciprocity law, modular forms of weight 1 and elliptic curves// *Nagoya Math. J.* — 1985. — 98. — С. 109–115.
32. *Koike M.* Mathieu group M_{24} and modular forms// *Nagoya Math. J.* — 1985. — 99. — С. 147–157.
33. *Koike M.* Modular forms and the automorphism group of Leech lattice// *Nagoya Math. J.* — 1988. — 112. — С. 63–79.
34. *Kondo T.* Examples of multiplicative η -functions// *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo. Sect. 1A. Math.* — 1987. — 153. — С. 133–149.
35. *Macdonald I. G.* Affine root systems and Dedekind’s η -function// *Invent. Math.* — 1972. — 15. — С. 91–143.
36. *Martin Y.* Multiplicative eta-quotients// *Trans. Am. Math. Soc.* — 1996. — 348, № 12. — С. 4825–4856.
37. *Mason G.* Frame shapes and rational characters of finite groups// *J. Algebra.* — 1984. — 89. — С. 236–246.
38. *Mason G.* M_{24} and certain automorphic forms// *Contemp. Math.* — 1985. — 45. — С. 223–244.
39. *Mason G.* Finite groups and modular functions// *Proc. Symp. Pure Math.* — 1987. — 47. — С. 181–207.
40. *Mason G.* Finite groups and Hecke operators// *Math. Ann.* — 1989. — 283. — С. 381–409.
41. *Mason G.* On a system of elliptic modular forms attached to the large Mathieu group// *Nagoya Math. J.* — 1990. — 118. — С. 177–193.
42. *Newman M.* Construction and application of a certain class of modular forms// *Proc. London Math. Soc.* — 1956. — 7. — С. 334–350.
43. *Newman M.* Construction and application of a certain class of modular forms, II// *Proc. London Math. Soc.* — 1959. — 9. — С. 373–387.
44. *Raji W.* Generalized modular forms representable as eta products// *Acta Arithm.* — 2007. — 129. — С. 41–51.
45. *Ono K.* Shimura sums related to imaginary quadratic fields// *Proc. Jpn. Acad.* — 1994. — 70(A), № 5. — С. 146–151.
46. *Ono K.* The web of modularity: Arithmetic of the coefficients of modular forms and q -series. — Providence, Rhode island: Am. Math. Soc., 2004.
47. *Shimura G.* On modular forms of half-integral weight// *Lect. Notes Math.* — 1973. — 97. — С. 440–481.
48. *Thompson J.* Finite groups and modular functions// *Bull. London Math. Soc.* — 1979. — 11. — С. 347–351.
49. *Voskresenskaya G. V.* One special class of modular forms and group representations// *J. Theor. Nombres Bordx.* — 1999. — 11, № 1. — С. 247–262.
50. *Voskresenskaya G. V.* Multiplicative Dedekind η -functions and representations of finite groups// *J. Theor. Nombres Bordx.* — 2005. — 17. — С. 359–380.

Г. В. Воскресенская

Самарский национальный исследовательский университет им. академика С. П. Королева

E-mail: galvosk@mail.ru