

ISSN 0233-6723



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ

СОВРЕМЕННАЯ
МАТЕМАТИКА
И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Тематические
обзоры

Том 133



Москва 2017

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Главный редактор:

Р. В. Гамкрелидзе (Математический институт им. В. А. Стеклова РАН)

Заместители главного редактора:

А. В. Овчинников (МГУ им. М. В. Ломоносова)

В. Л. Попов (Математический институт им. В. А. Стеклова РАН)

Члены редколлегии:

А. А. Аграчёв (Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, SISSA)

Е. С. Голод (МГУ им. М. В. Ломоносова)

А. Б. Жижченко (Отделение математических наук РАН)

Е. П. Кругова (ВИНИТИ РАН)

А. В. Михалёв (МГУ им. М. В. Ломоносова)

И. Ю. Никольская (ВИНИТИ РАН)

Н. Х. Розов (МГУ им. М. В. Ломоносова)

М. В. Шамолин (Институт механики МГУ им. М. В. Ломоносова)

Ответственные редакторы:

И. А. Жлябинкова

Н. Ю. Селиванова

Научный редактор:

А. В. Овчинников

ISSN 0233–6723

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ВСЕРОССИЙСКИЙ ИНСТИТУТ
НАУЧНОЙ И ТЕХНИЧЕСКОЙ ИНФОРМАЦИИ
(ВИНИТИ РАН)

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ

СЕРИЯ
СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА
И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

ТЕМАТИЧЕСКИЕ ОБЗОРЫ

Том 133

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ



Москва 2017

СОДЕРЖАНИЕ

Об аппроксимации коэффициентных обратных задач для дифференциальных уравнений в функциональных пространствах (Д. Г. Орловский, С. И. Пискарев)	3
Критерии единственности решения и корректности в обратной задаче об источнике (А. Б. Костин)	81
Конечно-разностные методы для дробных дифференциальных уравнений порядка $1/2$ (М. Ю. Кокурин, С. И. Пискарев, М. Спреафико)	120



ОБ АППРОКСИМАЦИИ КОЭФФИЦИЕНТНЫХ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

© 2017 г. Д. Г. ОРЛОВСКИЙ, С. И. ПИСКАРЕВ

Аннотация. Работа посвящена вопросам аппроксимации коэффициентных обратных задач для дифференциальных уравнений параболического, эллиптического и гиперболического типов в функциональных пространствах. Приводится общее описание соответствующих задач, их аппроксимаций и обзор результатов.

Ключевые слова: абстрактное дифференциальное уравнение, абстрактная гиперболическая задача, абстрактная эллиптическая задача, абстрактная параболическая задача, C_0 -полугруппа, банахово пространство, полудискретизация, обратная переопределенная задача, разностная схема, дискретная полугруппа.

AMS Subject Classification: 35Nxx, 65Jxx, 65Nxx, 35Jxx, 47Dxx

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение	4
2. Параболический случай	4
2.1. Существование управляющего элемента f	6
2.2. Общая аппроксимационная схема	9
2.3. Дискретизация полугрупп	11
2.4. Аппроксимация управляющего элемента f	14
2.5. Обзор последних результатов для параболических уравнений	19
3. Эллиптический случай	30
3.1. Дискретизация абстрактной эллиптической задачи	32
3.2. Сходимость решений	33
3.3. Сходимость в простейшем случае	34
3.4. Сходимость для случая гладкой операторной функции	36
4. Аппроксимация обратной задачи Дирихле—Бицадзе—Самарского для эллиптических уравнений	38
4.1. Решение прямой задачи	39
4.2. Решение обратной задачи	42
4.3. Дискретизация эллиптической задачи с условиями Дирихле	44
5. Аппроксимация обратной задачи типа Неймана—Бицадзе—Самарского для эллиптических уравнений	46
5.1. Решение прямой задачи	47
5.2. Решение обратной задачи	49
5.3. Дискретизация эллиптической задачи с условиями Неймана	51
5.4. Сходимость решений	52
6. Обзор последних статей по эллиптическим уравнениям	54

7. Гиперболический случай	58
7.1. Дискретизация по пространству и времени	62
7.2. Существование решения обратной задачи	64
7.3. Аппроксимация решения обратных задач	66
7.4. Обзор последних статей по гиперболическим уравнениям	69
Список литературы	72

1. ВВЕДЕНИЕ

Теория обратных задач для дифференциальных уравнений является интенсивно развивающейся областью математической физики. При решении так называемых прямых задач решение заданного дифференциального уравнения или системы уравнений получается посредством использования начальных и граничных условий, в то время как в обратных задачах неизвестно также и само уравнение. Определение как самого уравнения так и его решения требует наложения некоторых дополнительных условий по сравнению с соответствующей прямой задачей.

Истоки теории обратных задач можно найти в конце 19-го — начале 20-го веков. Это задача нахождения фигуры равновесия вращающейся жидкости, кинематическая проблема в сейсмологии, обратная задача Штурма—Лиувилля и др. Задача Ньютона определения сил, в результате которых планеты движутся в соответствии с законами Кеплера, была одной из первых обратных задач динамики механических систем, решенной ранее. Обратные задачи теории потенциала, где необходимо определить положение тела, его форму и плотность, исходя из известного значения его потенциала, имеет геофизическое происхождение. Обратные задачи электромагнитной разведки были порождены необходимостью разработки теории и методологии применения электромагнитных полей при исследовании внутреннего строения земной коры.

Влияние обратных задач по восстановлению уравнений математической физики стало распространяться на другие разделы математики, где эти задачи постепенно занимают важное место в прикладных проблемах, возникающих в реальных ситуациях.

С классической точки зрения рассматриваемые здесь задачи, вообще говоря, некорректно поставлены. Общий подход и современная теория некорректных и условно корректных задач связана с применениями различных методов регуляризации к таким проблемам математической физики. Во многих случаях эти проблемы включают в себя вспомогательные сведения о структуре основного дифференциального уравнения, тип его коэффициентов, а также некоторые другие параметры. Довольно часто однозначная разрешимость обратной задачи обеспечивается избытком информации такого рода. Определенная структура коэффициентов дифференциального уравнения приводит к тому, что обратная задача становится корректно поставленной с общей точки зрения.

Дифференциальные уравнения с неограниченными операторными коэффициентами в банаховом пространстве представляют собой довольно общую форму исследования дифференциальных уравнений в частных производных. Соответственно, обратная задача для дифференциального уравнения в банаховом пространстве является абстрактной формой исследования обратной задачи для дифференциального уравнения в частных производных. На этом пути мы покрываем большинство разумных подходов к изучению как чистой теории, так и численных методов.

Обзор состоит из трех частей, посвященных соответственно параболическому, эллиптическому и гиперболическому случаям. В начале каждой части дается общее описание соответствующих задач и их аппроксимаций, после чего приводится обзор результатов.

2. ПАРАБОЛИЧЕСКИЙ СЛУЧАЙ

Пусть $B(E)$ обозначает банахову алгебру всех линейных ограниченных операторов в комплексном банаховом пространстве E . Множество всех линейных замкнутых и плотно определенных операторов на E будем обозначать через $\mathcal{C}(E)$. Через $\sigma(B)$ обозначим спектр оператора B , через $\rho(B)$ — резольвентной множество B , через $\mathcal{N}(B)$ — ядро B и через $\mathcal{R}(B)$ — образ оператора B .

Предполагая, что A является генератором C_0 -полугруппы $\exp(tA)$, $t \geq 0$, рассмотрим следующую задачу Коши в банаховом пространстве E :

$$u'(t) = Au(t) + g(t), \quad t \geq 0, \quad (2.1)$$

$$u(0) = u^0, \quad (2.2)$$

где $g(\cdot) \in C([0, T]; E)$. Как обычно, предполагается, что $u^0 \in D(A)$.

Определение 2.1. Говорят, что $u(\cdot)$ является решением (2.1)–(2.2) в классическом смысле, если $u(\cdot) \in C^1([0, T]; E) \cap C([0, T]; D(A))$ и удовлетворяет (2.1)–(2.2).

Известно, что обобщенное решение (2.1)–(2.2) определяется равенством

$$u(t) = \exp(tA)u^0 + \int_0^t \exp((t-s)A)g(s) ds, \quad (2.3)$$

и если $u(\cdot)$ в (2.3) непрерывно дифференцируема, то эта функция $u(\cdot)$ является классическим решением (2.1)–(2.2). Очевидно, что если положить

$$g(s) = \exp(sA)x, \quad s \geq 0,$$

то из ограниченности $Au(t) = \exp(tA)Au^0 + tA \exp(tA)x$ при $t \rightarrow 0$ следует, что A является генератором аналитической C_0 -полугруппы. Но даже если A порождает аналитическую C_0 -полугруппу и $g(\cdot) \in C([0, T]; E)$, то $u(\cdot)$ из (2.3), вообще говоря, не является классическим решением. Если рассматривать задачу (2.3) в интерполяционных пространствах $E^\alpha = (E, D(A))_\alpha$, то эта задача (2.3) корректно поставлена в классическом смысле [152, 153, 185]. В действительности, если задача (2.1)–(2.2) коэрцитивна, то (см. [51]) либо A ограничен, либо E содержит подпространство, которое изоморфно c_0 . Поэтому на функцию $g(\cdot)$ необходимо наложить некоторые условия гладкости. Будем предполагать, что $g(\cdot) \in C^1([0, T]; E)$.

В [157, 163, 202] наблюдается большой интерес к изучению задачи (2.1)–(2.2) с некоторым дополнительным условием, например, $u(T) = u^T$, $T > 0$. Такого рода условие естественно при $u^T \in D(A)$. В самом деле, пусть $g(t) = x \in E$, $t \geq 0$. Тогда (2.3) можно записать в виде

$$u^T = \exp(TA)u^0 + A^{-1}(\exp(TA) - I)x,$$

если $0 \in \rho(A)$, и в случае, когда $u^0 \in D(A)$, ясно, что $u^T \in D(A)$. Для экспоненциально убывающей C_0 -полугруппы $\exp(tA)$ оператор $(\exp(TA) - I)^{-1}$ принадлежит классу $B(E)$ для любого $T > 0$ (см. [19]), и следовательно, можно получить оценку

$$\|x\| \leq c(\|Au^0\| + \|Au^T\|).$$

Такая оценка показывает, что задача определения x из (2.3) с $u(T) = u^T$ корректно поставлена в пространствах $D(A) \longleftrightarrow E$, т.е., когда $u^0, u^T \in D(A)$ и $x \in E$. Теперь мы в состоянии сформулировать нашу задачу.

Пусть оператор A является генератором аналитической C_0 -полугруппы $\exp(\cdot A)$, определенной в банаховом пространстве E . Из этого следует, что $A : D(A) \subseteq E \rightarrow E$ является замкнутым линейным оператором, для которого

$$\|(\lambda I - A)^{-1}\|_{B(E)} \leq \frac{M}{1 + |\lambda|} \quad \text{если } \operatorname{Re} \lambda \geq 0. \quad (2.4)$$

В банаховом пространстве E рассмотрим задачу

$$u'(t) = Au(t) + \mathcal{F}(t)f \quad (2.5)$$

с дополнительными условиями

$$u(0) = u^0 \in D(A), \quad u(T) = u^T \in D(A), \quad (2.6)$$

где $\mathcal{F}(\cdot) \in C^1([0, T])$ — известная скалярная функция, $u^0, u^T \in D(A)$ — заданные элементы, а $f \in E$ — неизвестный элемент. В соответствии с [114, 133, 215] обобщенное решение задачи (2.5)–(2.6) дается формулой

$$u(t) = \exp(tA)u^0 + \int_0^t \exp((t-s)A)\mathcal{F}(s)f ds, \quad t \in [0, T], \quad (2.7)$$

с таким элементом $f \in E$, для которого выполнены условия (2.6). Если мы предположим, что оператор A порождает аналитическую C_0 -полугруппу, то в этом случае $u(t) \in D(A)$ для любой функции $\mathcal{F}(\cdot) \in C^1([0, T])$ (см. [114, 213]).

Если необходимо вычислить элемент f из уравнения (2.7), полагая $t = T$, придется манипулировать элементами Au^0 , Au^T , как мы видели при анализе свойств функции $g(s) \equiv x$, рассматривая соотношение (2.3).

Применяя оператор A к обеим сторонам равенства (2.7), получаем после интегрирования по частям

$$Au(t) = \exp(tA)Au^0 - \mathcal{F}(t)f + \exp(tA)\mathcal{F}(0)f + \int_0^t \exp((t-s)A)\mathcal{F}(s)'_s f ds.$$

Если можно сделать выбор функции $\mathcal{F}(\cdot)$ так, чтобы $\mathcal{F}(T) = 1$, и использовать условие $u(T) = u^T$, то мы получим следующее уравнение Фредгольма второго рода:

$$If - K(T)f := If - \exp(TA)\mathcal{F}(0)f - \int_0^T \exp((T-s)A)\mathcal{F}(s)'_s ds f = G(T), \quad (2.8)$$

где

$$G(T) = \exp(TA)Au^0 - Au^T.$$

В такой постановке можно сказать, что задача (2.5)–(2.6) будет корректно поставлена если элементы u^0 , u^T заданы в пространстве $D(A)$, а неизвестный элемент f рассматривается как элемент пространства E . Из (2.4) следует, что $\omega(A) < 0$, и, следовательно, существует оператор A^{-1} , откуда вытекает эквивалентность задачи (2.5)–(2.6) уравнению Фредгольма второго рода (2.8).

Здесь мы построим алгоритм для аппроксимации элемента f , который разрешает задачу (2.5)–(2.6); другими словами, мы намерены решить уравнение (2.8). Мы основываем алгоритм на общей аппроксимационной схеме, которая включает методы конечных элементов, конечных разностей, а также проекционные методы. Заметим, что формула (2.7) формально приводит к уравнению Фредгольма первого рода (см. [16, 91, 92]), которое, вообще говоря, является некорректно поставленной задачей (см. [131, 132, 205]). Как было отмечено выше, за счет выбора пространств $D(A) \longleftrightarrow E$ и специального выбора функции $\mathcal{F}(\cdot)$ задача становится корректно поставленной и сводится к уравнению Фредгольма второго рода (2.8).

Методика, которую мы здесь разработали, может быть применена в более общей ситуации, когда оператор A порождает проинтегрированную полугруппу или C -полугруппу (см. [118, 119, 122, 123]). Более того, в доказательстве компактности интеграла от не полугруппового семейства удобно использовать результаты из [216].

2.1. Существование управляющего элемента f . Основным вопросом является вопрос разрешимости задачи (2.5)–(2.6). Например, ясно, что в случае компактности оператора $K(T)$, оператор $I - K(T)$ является фредгольмовым оператором индекса 0.

Линейный оператор в банаховом пространстве E называется *компактным*, если он отображает единичный шар $\{x \in E : \|x\| \leq 1\}$ в относительно компактное подмножество пространства E . Линейный компактный оператор $B \in L(E)$ является непрерывным, т.е., $B \in B(E)$.

Теорема 2.1 (см. [124]). Пусть $B \in B(E)$ — компактный оператор. Тогда $\mathcal{N}(I - B) \subseteq E$ является конечномерным подпространством, $\mathcal{R}(I - B) \subseteq E$ является замкнутым подпространством конечной коразмерности и

$$\dim \mathcal{N}(I - B) = \operatorname{codim} \mathcal{R}(I - B).$$

Таким образом, легко видеть, что $\mathcal{N}(I - B) = \{0\}$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{R}(I - B) = E$. Следовательно, по теореме Банаха, в случае $\mathcal{N}(I - B) = \{0\}$ оператор $I - B$ обратим, и уравнение $v = Bv + h$ имеет решение $v = (I - B)^{-1}h$. Теорема об альтернативе Фредгольма утверждает, что $v = Bv + h$ имеет решение $v = (I - B)^{-1}h$ при любом h тогда и только тогда, когда однородное уравнение $v = Bv$ имеет только тривиальное решение $v = 0$. Известно также, что для ненулевого $\lambda_0 \in \sigma(B)$ размерность $\dim \mathcal{N}(\lambda_0 I - B)$ конечна. Более того, множество $\sigma(B)$ не более чем счетно и 0 является единственно возможной предельной точкой $\sigma(B)$. Если $\dim \mathcal{R}(B) = \infty$, то $0 \in \sigma(B)$.

Определение 2.2. Оператор $B \in L(E)$ называется *фредгольмовым*, если его ядро $\mathcal{N}(B)$ конечномерно, его образ $\mathcal{R}(B)$ замкнут и имеет конечную коразмерность. Для фредгольмова оператора B можно определить индекс по формуле

$$\operatorname{ind} B = \dim \mathcal{N}(B) - \operatorname{codim} \mathcal{R}(B).$$

Если B является фредгольмовым оператором индекса 0, то из условия $\mathcal{N}(B) = \{0\}$ следует, что $B^{-1} \in B(E)$. Любой фредгольмов оператор $B \in B(E)$ индекса 0 может быть представлен в виде $B = C + K$, где C обратим, а K является компактным оператором.

Большая часть результатов, посвященных существованию решения задачи (2.5)–(2.6), касается свойств компактности или позитивности резольвенты оператора A (см. [156, 157, 159]). Так, существование ограниченного обратного оператора $(I - K(T))^{-1}$ следует практически из условия $\mathcal{N}(I - K(T)) = \{0\}$ и компактной сходимости резольвент (см. теорему 2.8 и шаг 4 в доказательстве теоремы 2.18). Некоторые теоремы, доказанные, например, в [156, 157, 159], гарантируют, что условие $\mathcal{N}(I - K(T)) = \{0\}$ выполняется.

В частности, перечислим некоторые результаты, которые могут быть применены здесь. Рассмотрим в банаховом пространстве E задачу определения такого элемента $f \in E$, для которого

$$u'(t) = Au(t) + \mathcal{F}(t)f, \quad t \in [0, T], \quad (2.9)$$

$$u(0) = u^0, \quad \int_0^T u(t) d\mu(t) = u^T, \quad u^0, u^T \in D(A). \quad (2.10)$$

Теорема 2.2 (см. [159]). Пусть функция $\mu(\cdot)$ не убывает на $[0, T]$ и непрерывна справа при $t = 0$. Пусть $\mathcal{F}(t) \geq 0$ при $0 \leq t \leq T$ и

$$\int_0^T \mathcal{F}(t) d\mu(t) \neq 0,$$

причем

$$\|\exp(tA)\| \leq Me^{-\beta t}, \quad \beta > 0, \quad t \geq 0.$$

Предположим также, что выполнено любое из следующих двух условий:

- а) $\mathcal{F}(t)'_t \geq 0$ при $0 \leq t \leq T$;
- б) функция $\mu(\cdot)$ выпукла вверх на $[0, T]$.

Тогда задача (2.9)–(2.10) корректно поставлена.

Векторная структура E с полной нормой называется *банаховой структурой*. Напомним, что полуупорядоченное множество $(E, \leq)$ называется *структурой*, если для любой пары элементов $x, y \in E$ в E существуют элементы $\sup(x, y)$ и $\inf(x, y)$. Кроме того, для любого $x \in E$ можно определить $x^+ := \sup(x, 0)$ и $x^- := \inf((-x), 0)$, называемые соответственно положительной и отрицательной частями элемента x , причем справедливо соотношение $x = x^+ - x^-$.

Определение 2.3. Пусть B — линейный оператор в E . Оператор B называется *позитивным*, если $Bx \succeq 0$ при всех $x \succeq 0$.

Отметим, что любой позитивный оператор $B \in L(E)$ непрерывен на банаховой структуре E .

Определение 2.4. C_0 -полугруппа $\exp(tA)$, $t \geq 0$, называется *позитивной* в банаховом пространстве с конусом E^+ , если $\exp(tA)E^+ \subseteq E^+$ при любом $t \geq 0$.

Предложение 2.1. C_0 -полугруппа $\exp(tA)$ позитивна тогда и только тогда, когда резольвента удовлетворяет условию $(\lambda I - A)^{-1}E^+ \subseteq E^+$ при любом $\lambda > \omega(A)$.

Определение 2.5. Линейный оператор $A : D(A) \subseteq E \rightarrow E$ называется *оператором со свойством внедиагональной позитивности (POD)*, если

$$\langle Au, \phi \rangle \geq 0$$

для любых $0 \preceq u \in D(A)$ и $0 \preceq \phi \in E^*$, удовлетворяющих условию $\langle u, \phi \rangle = 0$.

Предложение 2.2 (см. [45]). Пусть E — банахово пространство с нормальным конусом и $\text{int } E^+ \neq \emptyset$. Для инфинитезимального производящего оператора A следующие условия эквивалентны:

- (i) оператор A порождает позитивную C_0 -полугруппу;
- (ii) оператор A обладает свойством POD и $\mathcal{R}(\lambda I - A) = E$ при достаточно больших $\lambda \in \mathbb{R}_+$.

Теорема 2.3 (см. [159]). Пусть функция $\mu(\cdot)$ не убывает на $[0, T]$ и непрерывна справа при $t = 0$. Пусть $\mathcal{F}(t)$ — операторная функция из $B([0, T]; B(E))$ и $\mathcal{F}(t), \mathcal{F}'(t) \succeq 0$ для $0 \leq t \leq T$, а оператор

$$0 \preceq \left(\int_0^T \mathcal{F}(t) d\mu(t) \right)^{-1} \in B(E).$$

Пусть C_0 -полугруппа позитивна. Предположим также, что

$$\sigma(A) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : \text{Re } \lambda < 0\}.$$

Тогда ядро задачи (2.9)–(2.10) тривиально, и следовательно, для любых $u^0, u^T \in D(A)$ эта задача имеет не более одного решения.

Теорема 2.4 (см. [159]). Пусть выполнены условия теоремы 2.3. Предположим также, что C_0 -полугруппа $\exp(tA)$ компактна. Тогда задача (2.9)–(2.10) корректно поставлена.

Напомним, что спектральным радиусом $r(B)$ оператора $B \in B(E)$ называется число

$$r(B) = \sup_{\lambda \in \sigma(B)} |\lambda|$$

и в случае комплексного банахова пространства E

$$r(B) = \lim_{k \rightarrow \infty} \|B^k\|^{1/k}.$$

Теорема 2.5 (см. [156]). Пусть A порождает компактную и позитивную C_0 -полугруппу и пусть операторная функция $\mathcal{F}(\cdot)$ принадлежит классу $C^1([0, T]; B(E))$. Предположим также, что $\omega(A) < 0$, $\mathcal{F}(t) \succeq 0$, $\mathcal{F}'(t) \succeq 0$ для любого $t \geq 0$ и $\mathcal{F}(T) = I$. Тогда спектральный радиус $r(K(T)) < 1$.

Теорема 2.6 (см. [156]). Пусть оператор A является генератором компактной и позитивной C_0 -полугруппы, а операторная функция $\mathcal{F}(\cdot)$ принадлежит классу $C^1([0, T]; B(E))$, причем $\mathcal{F}(T) = I$. Предположим также, что $\omega(A) < 0$, $\mathcal{F}(t) \succeq 0$, $\mathcal{F}'(t) \succeq 0$ при любом $t \geq 0$. Тогда для любого $u^T \in D(A)$ существует единственное решение задачи (2.9)–(2.10).

Напомним статьи [203, 204], в которых для скалярной функции $\mathcal{F}(\cdot)$ и некоторых условий на $\mu(\cdot)$ и $\mathcal{F}(\cdot)$ авторы изучали вопрос существования решения в том смысле, что спектр разрешающего оператора отличен от нулевого, т.е., можно из условия

$$\int_0^T d\mu(t) \int_0^t e^{z(t-s)} \mathcal{F}(s) ds \neq 0$$

для $z \in \sigma(A)$ получить утверждение

$$\mathcal{N}(I - K(T)) = \{0\}$$

в предположении, что $\mathcal{F}(\cdot) \in C^1(0, T)$ и при некоторых условиях на μ .

2.2. Общая аппроксимационная схема. Общая аппроксимационная схема, согласно [209, 210], может быть описана следующим образом. Пусть E_n и E — банаховы пространства и $\{p_n\}$ — последовательность линейных ограниченных операторов

$$p_n : E \rightarrow E_n, \quad p_n \in B(E, E_n), \quad n \in \mathbb{N} = \{1, 2, \dots\},$$

обладающих следующим свойством:

$$\|p_n x\|_{E_n} \rightarrow \|x\|_E \quad \text{при } n \rightarrow \infty \text{ для любого } x \in E.$$

Определение 2.6. Последовательность элементов $\{x_n\}$, $x_n \in E_n$, $n \in \mathbb{N}$, называется $\mathcal{P}$ -сходящейся к $x \in E$, если

$$\|x_n - p_n x\|_{E_n} \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty;$$

это обозначается следующим образом: $x_n \xrightarrow{\mathcal{P}} x$.

Определение 2.7. Последовательность ограниченных линейных операторов $B_n \in B(E_n)$, $n \in \mathbb{N}$, называется $\mathcal{PP}$ -сходящейся к ограниченному линейному оператору $B \in B(E)$, если для любого $x \in E$ и любой последовательности $\{x_n\}$, $x_n \in E_n$, $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}$ -сходящейся к x , т.е. $x_n \xrightarrow{\mathcal{P}} x$, последовательность $B_n x_n$ $\mathcal{P}$ -сходится к Bx : $B_n x_n \xrightarrow{\mathcal{P}} Bx$. Это записывается следующим образом: $B_n \xrightarrow{\mathcal{PP}} B$.

Общие примеры $\mathcal{P}$ -сходимости можно найти, например, в [208].

Замечание 2.1. Если положить $E_n = E$ и $p_n = I$ при каждом $n \in \mathbb{N}$, где I — тождественный оператор на E , то определение 2.6 приводит к традиционной поточечной сходимости ограниченных линейных операторов, которую обозначим через $B_n \rightarrow B$.

Определение 2.8. Последовательность элементов $\{x_n\}$, $x_n \in E_n$, $n \in \mathbb{N}$, называется $\mathcal{P}$ -компактной, если для любого $\mathbb{N}' \subseteq \mathbb{N}$ существуют такие $\mathbb{N}'' \subseteq \mathbb{N}'$ и $x \in E$, что $x \xrightarrow{\mathcal{P}} x$ при $n \rightarrow \infty$ в $\mathbb{N}''$.

Определение 2.9. Будем говорить, что система $\{p_n\}$ дискретизационно сохраняет порядок, если для всех последовательностей $\{x_n\}$, $x_n \in E_n$ и любого элемента $x \in E$ из сходимости $x_n \xrightarrow{\mathcal{P}} x$ вытекает сходимость $x_n^+ \xrightarrow{\mathcal{P}} x^+$.

Известно (см. [77]), что $\{p_n\}$ сохраняет порядок тогда и только тогда, когда

$$\|p_n x^+ - (p_n x)^+\|_{E_n} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty$$

для любого $x \in E$. Если $B_n \xrightarrow{\mathcal{PP}} B$ и $B_n \succeq 0$ при $n \geq n_0$, а система $\{p_n\}$ сохраняет порядок, то $B \succeq 0$ (см. [149]). Однако обратное утверждение неверно, и нам нужно предполагать позитивность $B_n \succeq 0$.

Определение 2.10. Будем говорить, что последовательность операторов $\{B_n\}$, $B_n \in B(E_n)$, $n \in \mathbb{N}$, сходится компактно к оператору $B \in B(E)$, если $B_n \xrightarrow{\mathcal{PP}} B$ и выполнено следующее условие компактности:

$$\|x_n\|_{E_n} = O(1) \implies \{B_n x_n\} \text{ является } \mathcal{P}\text{-компактной.}$$

Отметим, что последняя импликация может быть записана в виде

$$\mu(\{B_n x_n\}) = 0, \quad \|x_n\| \leq \text{const}$$

для меры некомпактности $\mu(\cdot)$. Основное свойство $\mu(\cdot)$ состоит в том, что $\mu(\{y_n\}) = 0$ тогда и только тогда, когда $\{y_n\}$ является $\mathcal{P}$ -компактной. Легко проверить, что

$$\begin{aligned} \mu(\{y_n + x_n\}) &\leq \mu(\{y_n\}) + \mu(\{x_n\}), \\ \mu(\{D_n x_n\}) &\leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \|D_n\| \|x_n\| \end{aligned}$$

для любых операторов $D_n \in B(E_n)$ и любых последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$.

Определение 2.11. Последовательность операторов $\{B_n\}$, $B_n \in B(E_n)$, $n \in \mathbb{N}$, называется *устойчиво сходящейся* к оператору $B \in B(E)$, если

$$B_n \xrightarrow{\mathcal{PP}} B, \quad \|B_n^{-1}\|_{B(E_n)} = O(1), \quad n \rightarrow \infty.$$

Мы будем записывать это следующим образом:

$$B_n \xrightarrow{\mathcal{PP}} B \quad \text{устойчиво.}$$

Определение 2.12. Последовательность операторов $\{B_n\}$, $B_n \in B(E_n)$, называется *собственно сходящейся* к оператору $B \in B(E)$, если $B_n \xrightarrow{\mathcal{PP}} B$ и справедлива следующая импликация:

$$\|x_n\|_{E_n} = O(1) \text{ и } \{B_n x_n\} \text{ } \mathcal{P}\text{-компактна} \implies \{x_n\} \text{ } \mathcal{P}\text{-компактна.}$$

Мы будем записывать это следующим образом:

$$B_n \xrightarrow{\mathcal{PP}} B \quad \text{собственно.}$$

Теорема 2.7 (см. [210]). Пусть $C_n, Q_n \in B(E_n)$, $C, Q \in B(E)$ и $\mathcal{R}(Q) = E$. Предположим также, что $C_n \xrightarrow{\mathcal{PP}} C$ компактно и $Q_n \xrightarrow{\mathcal{PP}} Q$ устойчиво. Тогда $Q_n + C_n \xrightarrow{\mathcal{PP}} Q + C$ сходится собственно.

Теорема 2.8 (см. [210]). Для $B_n \in B(E_n)$ и $B \in B(E)$ следующие условия равносильны:

- (i) $B_n \xrightarrow{\mathcal{PP}} B$ собственно, B_n являются фредгольмовыми операторами индекса 0 и $\mathcal{N}(B) = \{0\}$;
- (ii) $B_n \xrightarrow{\mathcal{PP}} B$ устойчиво и $\mathcal{R}(B) = E$;
- (iii) $B_n \xrightarrow{\mathcal{PP}} B$ устойчиво и собственно;
- (iv) если выполнено одно из условий (i)–(iii), то существует $B_n^{-1} \in B(E_n)$, $B^{-1} \in B(E)$, и $B_n^{-1} \xrightarrow{\mathcal{PP}} B^{-1}$ собственно и устойчиво.

Определение 2.13. Область устойчивости

$$\Delta_s = \Delta_s(\{A_n\}), \quad A_n \in \mathcal{C}(B_n),$$

— это множество всех таких $\lambda \in \mathbb{C}$, что $\lambda \in \rho(A_n)$ для почти всех n и последовательность $\{(\lambda I_n - A_n)^{-1}\}_{n \in \mathbb{N}}$ ограничена. Область сходимости

$$\Delta_c = \Delta_c(\{A_n\}), \quad A_n \in \mathcal{C}(E_n),$$

— это множество всех таких $\lambda \in \mathbb{C}$, что $\lambda \in \Delta_s(\{A_n\})$ и последовательность операторов $\{(\lambda I_n - A_n)^{-1}\}_{n \in \mathbb{N}}$ $\mathcal{PP}$ -сходится к некоторому оператору $S(\lambda) \in B(E)$.

Рассмотрим понятие *согласованности* для случая неограниченных операторов (известно, что, вообще говоря, производящие генераторы неограничены).

Определение 2.14. Последовательность замкнутых линейных операторов $\{A_n\}$, $A_n \in \mathcal{C}(E_n)$, $n \in \mathbb{N}$, называется *согласованной с замкнутым линейным оператором* $A \in \mathcal{C}(E)$, если для каждого $x \in D(A)$ существует такая последовательность $\{x_n\}$, $x_n \in D(A_n) \subseteq E_n$, $n \in \mathbb{N}$, что $x_n \xrightarrow{\mathcal{P}} x$ и $A_n x_n \xrightarrow{\mathcal{P}} Ax$.

Отметим, что (A_n, A) согласована, если резольвенты сходятся:

$$(\lambda I_n - A_n)^{-1} \xrightarrow{\mathcal{PP}} (\lambda I - A)^{-1}.$$

Обычно в приложениях банаховы пространства E_n конечномерны, хотя, вообще говоря, для случая замкнутого неограниченного оператора A мы имеем

$$\dim E_n \rightarrow \infty, \quad \|A_n\|_{B(E_n)} \rightarrow \infty \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Определение 2.15. Последовательность операторов $\{L_n\}$, $L_n \in \mathcal{C}(E_n)$, называется *собственно согласованной* с оператором $L \in \mathcal{C}(E)$, если (L_n, L) согласована и для любой такой ограниченной последовательности $\|x_n\|_{E_n} = O(1)$, что $x_n \in D(L_n)$, последовательность $\{L_n x_n\}$ является $\mathcal{P}$ -компактной. Отсюда следует, что $\{x_n\}$ $\mathcal{P}$ -компактна, а из $\mathcal{P}$ -сходимости $\{x_n\}$ к некоторому элементу x и сходимости $\{L_n x_n\}$ к некоторому элементу y при $n \rightarrow \infty$ в $\mathbb{N}' \subseteq \mathbb{N}$ следует, что $x \in D(L)$ и $Lx = y$.

Определение 2.16. Область собственности $\Delta_r = \Delta_r(\{A_n\}, A)$ — это множество всех таких $\lambda \in \mathbb{C}$, что $(L_n(\lambda), L(\lambda))$ собственно согласованы, где $L_n(\lambda) = \lambda I_n - A_n$ и $L(\lambda) = \lambda I - A$.

Соотношения между этими областями даются следующим утверждением.

Предложение 2.3 (см. [211]). *Предположим, что $\Delta_c \neq \emptyset$ и $\mathcal{N}(S(\lambda)) = \{0\}$, по крайней мере, для одной точки $\lambda \in \Delta_c$ так, что $S(\lambda) = (\lambda I - A)^{-1}$. Тогда (A_n, A) согласованы и*

$$\Delta_c = \Delta_s \cap \rho(A) = \Delta_s \cap \Delta_r = \Delta_r \cap \rho(A).$$

Определение 2.17. Область компактной сходимости резольвент $\Delta_{cc} = \Delta_{cc}(A_n, A)$, где $A_n \in \mathcal{C}(E_n)$ и $A \in \mathcal{C}(E)$, — это множество всех таких $\lambda \in \Delta_c \cap \rho(A)$, что $(\lambda I_n - A_n)^{-1} \xrightarrow{\mathcal{PP}} (\lambda I - A)^{-1}$ компактно.

Теорема 2.9 (см. [71]). *Предположим, что $\Delta_{cc} \neq \emptyset$. Тогда для любого $\zeta \in \Delta_s$ справедлива следующая импликация:*

$$\|x_n\|_{E_n} = O(1) \ \& \ \|(\zeta I_n - A_n)x_n\|_{E_n} = O(1) \implies \{x_n\} \text{ } \mathcal{P}\text{-компактна.} \quad (2.11)$$

Обратно, если при некотором $\zeta \in \Delta_c \cap \rho(A)$ справедлива импликация (2.11), то $\Delta_{cc} \neq \emptyset$.

Следствие 2.1 (см. [71]). *Предположим, что $\Delta_{cc} \neq \emptyset$. Тогда $\Delta_{cc} = \Delta_c \cap \rho(A)$.*

Теорема 2.10 (см. [71]). *Предположим, что $\Delta_{cc} \neq \emptyset$. Тогда $\Delta_r = \mathbb{C}$.*

2.3. Дискретизация полугрупп. Рассмотрим корректно поставленную задачу Коши в банаховом пространстве E с оператором $A \in \mathcal{C}(E)$:

$$\begin{aligned} u'(t) &= Au(t), \quad t \in [0, \infty), \\ u(0) &= u^0 \in E, \end{aligned} \quad (2.12)$$

где оператор A порождает C_0 -полугруппу $\exp(\cdot A)$. Известно, что C_0 -полугруппа дает решение (2.12) по формуле $u(t) = \exp(tA)u^0$ при $t \geq 0$. Теория корректно поставленных задач и их численный анализ развивались достаточно интенсивно (см., например, [71, 105, 144]).

На общей дискретизационной схеме рассмотрим полудискретную аппроксимацию задачи (2.12) в банаховых пространствах E_n :

$$\begin{aligned} u'_n(t) &= A_n u_n(t), \quad t \in [0, \infty), \\ u_n(0) &= u_n^0 \in E_n \end{aligned} \quad (2.13)$$

с операторами $A_n \in \mathcal{C}(E_n)$, порождающими C_0 -полугруппы, согласованные с оператором $A \in \mathcal{C}(E)$, и $u_n^0 \xrightarrow{\mathcal{P}} u^0$.

Для общей аппроксимационной схемы мы имеем следующую версию теоремы Троттера—Като.

Теорема 2.11 (см. [208, теорема ABC]). *Предположим, что операторы $A \in \mathcal{C}(E)$ и $A_n \in \mathcal{C}(E_n)$ порождают C_0 -полугруппы. Следующие два условия (A) и (B) эквивалентны условию (C):*

(А) согласованность: существует такое $\lambda \in \rho(A) \cap \bigcap_n \rho(A_n)$, что резольвенты сходятся:

$$(\lambda I_n - A_n)^{-1} \xrightarrow{\mathcal{PP}} (\lambda I - A)^{-1};$$

(В) устойчивость: существуют константы $M \geq 1$ и ω , не зависящие от n и такие, что

$$\|\exp(tA_n)\| \leq M \exp(\omega t), \quad t \geq 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

(С) сходимостъ: для любого конечного $T > 0$ величина

$$\max_{t \in [0, T]} \left\| \exp(tA_n)u_n^0 - p_n \exp(tA)u^0 B \right\| \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty$$

всякий раз, когда $u_n^0 \xrightarrow{\mathcal{P}} u^0$, для любых $u_n^0 \in E_n$, $u^0 \in E$.

Замечание 2.2. Условие (А) в этих теоремах эквивалентно согласованности операторов (A_n, A) .

Теорема 2.12 (см. [144]). Пусть операторы A и A_n порождают аналитические C_0 -полугруппы. Следующие два условия (А) и (В₁) эквивалентны условию (С₁):

(А) согласованность: существует такое $\lambda \in \rho(A) \cap \bigcap_n \rho(A_n)$, что резольвенты сходятся:

$$(\lambda I_n - A_n)^{-1} \xrightarrow{\mathcal{PP}} (\lambda I - A)^{-1};$$

(В₁) устойчивость: существуют такие константы $M_2 \geq 1$ и ω_2 , не зависящие от n , что для любого $\Re \lambda > \omega_2$

$$\left\| (\lambda I_n - A_n)^{-1} \right\| \leq \frac{M_2}{|\lambda - \omega_2|} \quad \text{для всех } n \in \mathbb{N};$$

(С₁) сходимостъ: для любого конечного $\mu > 0$ и некоторого $0 < \theta < \pi/2$ имеем

$$\max_{\eta \in \Sigma(\theta, \mu)} \left\| \exp(\eta A_n)u_n^0 - p_n \exp(\eta A)u^0 \right\| \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty$$

всякий раз, когда $u_n^0 \xrightarrow{\mathcal{P}} u^0$. Здесь

$$\Sigma(\theta, \mu) = \left\{ z \in \Sigma(\theta) : |z| \leq \mu \right\}, \quad \Sigma(\theta) = \left\{ z \in \mathbb{C} : |\arg z| \leq \theta \right\}.$$

Определение 2.18. Элемент $e \in E^+$ называется *порядковой единицей* в банаховой структуре E , если для любого $x \in E$ существует такое $0 \leq \lambda \in \mathbb{R}$, что $-\lambda e \preceq x \preceq \lambda e$. Для $e \in \text{int } E^+$ можно определить норму по порядковой единице равенством

$$\|x\|_e = \inf \left\{ \lambda \geq 0 : -\lambda e \preceq x \preceq \lambda e \right\}.$$

Упорядоченное банахово пространство E называется *пространством с порядковой единицей*, если существует такая $e \in \text{int } E^+$, что $\|\cdot\|_E = \|\cdot\|_e$.

Справедлива следующая версия теоремы Троттера–Като для позитивной C_0 -полугруппы.

Теорема 2.13 (см. [149]). Пусть операторы A_n и A из (2.12) и (2.13) согласованы, пусть E и E_n являются пространствами с порядковыми единицами и $e_n \in D(A_n) \cap \text{int } E_n^+$. Предположим, что операторы A_n обладают свойством POD и $A_n e_n \preceq 0$ для достаточно большого n . Тогда

$$\exp(tA_n) \xrightarrow{\mathcal{PP}} \exp(tA)$$

равномерно по $t \in [0, T]$.

Когда мы рассматриваем любой процесс дискретизации по времени, то можно предполагать, что без ограничения общности для соответствующего случая C_0 -полугрупп выполнены условия (А) и (В). Обозначим через $T_n(\cdot)$ семейство дискретных полугрупп, как в [105], т.е.,

$$T_n(t) = T_n(\tau_n)^{k_n}, \quad k_n = \left\lceil \frac{t}{\tau_n} \right\rceil, \quad \tau_n \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Генератор дискретной полугруппы определяется равенством

$$\check{A}_n = \frac{1}{\tau_n} (T_n(\tau_n) - I_n) \in B(E_n)$$

и, следовательно,

$$T_n(t) = \left(I_n + \tau_n \check{A}_n \right)^{k_n}, \quad t = k_n \tau_n.$$

Теорема 2.14 (см. [208]). Следующие условия (A) и (B') эквивалентны условию (C'):

(A) согласованность: существует такое $\lambda \in \rho(A) \cap \bigcap_n \rho(\check{A}_n)$, что резольвенты сходятся:

$$(\lambda I_n - \check{A}_n)^{-1} \xrightarrow{\mathcal{PP}} (\lambda I - A)^{-1};$$

(B') устойчивость: существуют такие константы $M_1 \geq 1$ и $\omega_1 \in \mathbb{R}$, что

$$\|T_n(t)\| \leq M_1 \exp(\omega_1 t), \quad t \in \overline{\mathbb{R}}_+ = [0, \infty), \quad n \in \mathbb{N};$$

(B') сходимост: для любого конечного $T > 0$

$$\max_{t \in [0, T]} \|T_n(t)u_n^0 - p_n \exp(tA)u^0\| \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty$$

как только $u_n^0 \xrightarrow{\mathcal{P}} u^0$ при любых $u^0 \in E$, $u_n^0 \in E_n$.

Теорема 2.15 (см. [208]). Предположим, что операторы $A \in \mathcal{C}(E)$ и $A_n \in \mathcal{C}(E_n)$ порождают C_0 -полугруппы. Предположим также, что выполнены условия (A) и (B) теоремы 2.11. Тогда неявная разностная схема

$$\frac{\overline{U}_n(t + \tau_n) - \overline{U}_n(t)}{\tau_n} = A_n \overline{U}_n(t + \tau), \quad \overline{U}_n(0) = u_n^0, \quad (2.14)$$

устойчива, т.е.

$$\|(I_n - \tau_n A_n)^{-k_n}\| \leq M_1 e^{\omega_1 t}, \quad t = k_n \tau_n \in \overline{\mathbb{R}}_+,$$

и дает аппроксимацию решения задачи (2.12), т.е.,

$$\overline{U}_n(t) \equiv (I_n - \tau_n A_n)^{-k_n} u_n^0 \xrightarrow{\mathcal{P}} \exp(tA)u^0$$

равномерно по $t = k_n \tau_n \in [0, T]$ при $u_n^0 \xrightarrow{\mathcal{P}} u^0$, $n \rightarrow \infty$, $k_n \rightarrow \infty$, $\tau_n \rightarrow 0$.

Теорема 2.16 (см. [144]). Предположим, что выполнены условия (A) и (B₁) теоремы 2.12 и условие

$$\tau_n \|A_n\| \leq 1/(M + 2), \quad n \in \mathbb{N}. \quad (2.15)$$

Тогда разностная схема

$$\frac{U_n(t + \tau_n) - U_n(t)}{\tau_n} = A_n U_n(t), \quad U_n(0) = u_n^0, \quad (2.16)$$

устойчива и дает аппроксимацию решения задачи (2.12), т.е.,

$$U_n(t) \equiv (I_n + \tau_n A_n)^{k_n} u_n^0 \xrightarrow{\mathcal{P}} u(t)$$

равномерно по $t = k_n \tau_n \in [0, T]$ при $u_n^0 \xrightarrow{\mathcal{P}} u^0$, $n \rightarrow \infty$, $k_n \rightarrow \infty$, $\tau_n \rightarrow 0$.

Рассмотрим следующие эквивалентные условия:

(B'₁) устойчивость: существуют такие постоянные M' , ω' , что

$$\|\exp(tA_n)\| \leq M' e^{\omega' t}, \quad \|A_n \exp(tA_n)\| \leq \frac{M'}{t} e^{\omega' t}, \quad t \in \mathbb{R}_+;$$

(B''₁) устойчивость: существуют такие постоянные M'' , ω'' и $\tau^* > 0$, что

$$\|(I_n - \tau_n A_n)^{-k}\| \leq M'' e^{\omega'' k \tau_n}, \quad \|k \tau_n A_n (I_n - \tau_n A_n)^{-k}\| \leq M'' e^{\omega'' k \tau_n}, \\ 0 < \tau_n < \tau^*, \quad n, k \in \mathbb{N}.$$

Теорема 2.17. Условия (A) и (B'_1) эквивалентны условию (C_1) .

Замечание 2.3. Условия (B_1) , (B'_1) и (B''_1) эквивалентны.

2.4. Аппроксимация управляющего элемента f . Аппроксимация позитивных C_0 -полугрупп по времени на общей аппроксимационной схеме описана в [149]. Можно найти условие устойчивости схемы (2.16) для позитивных C_0 -полугрупп. Начиная с этого момента, будем предполагать, что в данном пункте банаховы пространства E_n являются банаховыми структурами.

Пусть A_n — генератор аналитической и компактной C_0 -полугруппы $\exp(\cdot A_n)$. В банаховом пространстве E_n рассмотрим задачу

$$u'_n(t) = A_n u_n(t) + \mathcal{F}_n(t) f_n, \quad (2.17)$$

где

$$u_n(0) = u_n^0 \in D(A_n), \quad u_n(T) = u_n^T \in D(A_n). \quad (2.18)$$

Решение задачи (2.17)–(2.18) дается формулой

$$u_n(t) = \exp(tA_n)u_n^0 + \int_0^t \exp((t-s)A_n)\mathcal{F}_n(s)f_n ds, \quad t \in [0, T],$$

а соответствующее уравнение Фредгольма второго рода может быть записано в следующем виде:

$$I_n f_n - K_n(T) f_n := I_n f_n - \exp(TA_n)\mathcal{F}_n(0)f_n - \int_0^T \exp((T-s)A_n)\mathcal{F}_n(s)'_s f_n ds = G_n(T), \quad (2.19)$$

где

$$G_n(T) = \exp(TA_n)A_n u_n^0 - A_n u_n^T.$$

Перед тем, как сформулировать основной результат, напомним сразу, что условие $\mathcal{N}(I - K(T)) = \{0\}$ может быть получено из теорем в п. 2.1. Отметим также (см. [28]), что если $\Delta_{cc} \neq \emptyset$, то $\omega(A_n) \leq \delta < 0$, так как $\omega(A) < 0$ и, следовательно, условие $A_n^{-1} \in B(E_n)$ в теореме 2.18 выполнено автоматически.

Теорема 2.18. Предположим, что $pF_n(\cdot), \mathcal{F}(\cdot) \in C^1([0, T])$ и

$$\mathcal{F}_n(t)' \rightarrow \mathcal{F}(t)' \quad \text{равномерно при } t \in [0, T].$$

Пусть выполнены условия (A), (B'_1) и

$$u_n^0 \xrightarrow{\mathcal{P}} u^0, \quad u_n^T \xrightarrow{\mathcal{P}} u^T$$

так, что $G_n(T) \xrightarrow{\mathcal{P}} G(T)$. Предположим также, что $\mathcal{N}(I - K(T)) = \{0\}$, оператор $(\lambda I - A)^{-1}$ компактен и

$$(\lambda I_n - A_n)^{-1} \xrightarrow{\mathcal{PP}} (\lambda I - A)^{-1}$$

компактно. Тогда решение задачи (2.19) существует и сходится к решению задачи (2.8), т.е., $f_n \xrightarrow{\mathcal{P}} f$.

Доказательство. Доказательство естественным путем распадается на четыре шага.

Шаг 1. Прежде всего, покажем, что компактная сходимост резольвент

$$R(\lambda; A_n) \xrightarrow{\mathcal{PP}} R(\lambda; A)$$

эквивалентна компактной сходимости C_0 -полугрупп

$$\exp(tA_n) \xrightarrow{\mathcal{PP}} \exp(tA)$$

при любом $t > 0$.

Шаг 2. Рассмотрим операторы $K(T)$ и $K_n(T)$, определенные в (2.8) и (2.19) на пространствах E и E_n и докажем, что оператор $K(T)$, определенный в (2.8), компактен в E .

Шаг 3. Легко видеть, что $K_n(T) \xrightarrow{\mathcal{PP}} K(T)$. Можно показать, что

$$K_n(T) \xrightarrow{\mathcal{PP}} K(T) \quad \text{компактно.}$$

Шаг 4. Итак,

$$I_n \xrightarrow{\mathcal{PP}} I \quad \text{устойчиво,} \quad K_n(T) \xrightarrow{\mathcal{PP}} K(T) \quad \text{компактно.}$$

Поэтому из теоремы 2.7 следует, что

$$I_n - K_n(T) \xrightarrow{\mathcal{PP}} I - K(T) \quad \text{собственно.}$$

Более того, ядро $\mathcal{N}(I - K(T)) = \{0\}$ и операторы $I_n - K_n(T)$ фредгольмовы с индексом, равным нулю. Далее из теоремы 2.8 следует, что

$$I_n - K_n(T) \xrightarrow{\mathcal{PP}} I - K(T) \quad \text{устойчиво,}$$

т.е.

$$(I_n - K_n(T))^{-1} \xrightarrow{\mathcal{PP}} (I - K(T))^{-1}.$$

Из того факта, что $G_n(T) \xrightarrow{\mathcal{P}} G(T)$, получаем

$$f_n = (I_n - K_n(T))^{-1} G_n(T) \xrightarrow{\mathcal{P}} (I - K(T))^{-1} G(T) = f.$$

Теорема доказана. $\square$

Можно найти в соответствии с теоремой 2.5, что решение задачи (2.19) с $u^0 = 0$ может быть получено следующим образом:

$$f_{n,j+1} = K_n(T)f_{n,j} - A_n u_n^T, \quad j = 0, 1, \dots, \quad (2.20)$$

с начальным условием $f_{n,0} = 0$. Значение $K_n(T)f_{n,j}$ является не чем иным, как решением задачи Коши

$$v'_n(t) = A_n v_n(t) + \mathcal{F}_n(t)'_t f_{n,j}, \quad v_n(0) = \mathcal{F}_n(0) f_{n,j}, \quad (2.21)$$

в точке T , т.е.,

$$K_n(T)f_{n,j} = v_n(T; f_{n,j}) = \exp(TA_n)\mathcal{F}_n(0)f_{n,j} + \int_0^T \exp((T-s)A_n)\mathcal{F}_n(s)'_s f_{n,j} ds. \quad (2.22)$$

Следовательно, (2.20) может быть записано в следующем виде, начиная с $f_{n,0} = 0$:

$$f_{n,j+1} = v_n(T; f_{n,j}) - A_n u_n^T, \quad j = 0, 1, \dots \quad (2.23)$$

Более того, $f_{n,j} \rightarrow f_n$ при $j \rightarrow \infty$, так как $r(K_n(T)) < 1$.

Существует два способа вычисления $v(T; f_{n,j})$. Можно использовать непосредственно теоремы 2.15 и 2.16, а можно использовать некоторые разностные схемы высшего порядка для аппроксимации $\exp(TA_n)$, например, как в [71, 148], а затем применить какие-либо квадратурные формулы для аппроксимации интеграла

$$\int_0^T \exp((T-s)A_n)\mathcal{F}_n(s)'_s f_{n,j} ds.$$

В данном обзоре мы рассмотрим только простейший способ, который вытекает из теоремы 2.15. В случае теоремы 2.16 мы должны предполагать, что выполнено условие устойчивости, однако при других рассуждениях делается то же самое. Таким образом, следуя схеме (2.14), рассмотрим следующую аппроксимацию уравнения (2.17):

$$\frac{\overline{U}_n(t + \tau_n) - \overline{U}_n(t)}{\tau_n} = A_n \overline{U}_n(t + \tau) + \mathcal{F}_n(t + \tau_n) f_n, \quad (2.24)$$

$$\overline{U}_n(0) = u_n^0, \quad t = k\tau_n.$$

Решение схемы (2.24) может быть записано в следующем виде:

$$\bar{U}_n(t) = (I_n - \tau_n A_n)^{-k} u_n^0 + \sum_{l=0}^{k-1} (I_n - \tau_n A_n)^{-k+l} \mathcal{F}_n(l\tau_n + \tau_n) f_n \tau_n, \quad t = k\tau_n. \quad (2.25)$$

Для того чтобы построить аппроксимацию оператора $K_n(T)$ в (2.22), мы рассмотрим только простейшую формулу ($T = k_n \tau_n$):

$$\tilde{K}_n(T) := (I_n - \tau_n A_n)^{-k_n} \mathcal{F}_n(0) + \sum_{l=0}^{k_n-1} (I_n - \tau_n A_n)^{-k_n+l} \frac{\mathcal{F}_n(l\tau_n + \tau_n) - \mathcal{F}_n(l\tau_n)}{\tau_n} \tau_n. \quad (2.26)$$

Отметим, что имеются некоторые интересные соотношения между (2.26) и (2.25). А именно, положим $u_n^0 = 0$ в (2.25) и применим оператор A_n . Интегрируя по частям ($t = k\tau_n$), получим

$$\begin{aligned} A_n \bar{U}_n(t) &= \sum_{l=0}^{k-1} \tau_n A_n (I_n - \tau_n A_n)^{-k+l} \mathcal{F}_n(l\tau_n + \tau_n) f_n = \\ &= \sum_{l=0}^{k-1} (I_n - \tau_n A_n)^{-k+l} \mathcal{F}_n(l\tau_n + \tau_n) f_n - \sum_{j=0}^{k-1} (I_n - \tau_n A_n)^{-k+j} \mathcal{F}_n(j\tau_n) f_n + \\ &\quad + (I_n - \tau_n A_n)^{-k} \mathcal{F}_n(0) f_n - (I_n - \tau_n A_n)^{-0} \mathcal{F}_n(k\tau_n) = \\ &= (I_n - \tau_n A_n)^{-k} \mathcal{F}_n(0) f_n + \sum_{l=0}^{k-1} (I_n - \tau_n A_n)^{-k+l} \frac{\mathcal{F}_n(l\tau_n + \tau_n) - \mathcal{F}_n(l\tau_n)}{\tau_n} f_n \tau_n - \mathcal{F}_n(t) f_n. \end{aligned} \quad (2.27)$$

В следующей теореме мы воспользуемся теоремой Крейна—Рутмана, которая утверждает, что у любого положительного и компактного оператора B с $r(B) > 0$ в банаховой структуре E существуют собственное значение $\lambda_0 > 0$ и такой собственный вектор $0 \preceq v_0 \neq 0$, что $Bv_0 = \lambda_0 v_0$ и $r(B) = \lambda_0$.

Теорема 2.19. Пусть C_0 -полугруппы $\exp(\cdot A_n)$ позитивны и компактны. Предположим также, что $\mathcal{F}_n(t) \geq 0$, $\mathcal{F}_n(t)'_t \geq 0$ для любого $t \in [0, T]$ и $\mathcal{F}_n(T) = 1$. Определим оператор $\tilde{K}_n(T)$ так же, как в (2.26). Тогда $r(\tilde{K}_n(T)) < 1$.

Доказательство. Оператор $\tilde{K}_n(T)$ позитивен и компактен; следовательно, по теореме Крейна—Рутмана, существуют такие $\lambda_0 \geq 0$ и $0 \preceq f_n^0 \neq 0$, что

$$\tilde{K}_n(T) f_n^0 = \lambda_0 f_n^0;$$

более того,

$$r(\tilde{K}_n(T)) = \lambda_0.$$

Предположим противное, т.е. $\lambda_0 \geq 1$. Рассмотрим оператор в (2.27) с $f_n = f_n^0$. Получим, что $A_n \bar{U}_n(T)$ позитивен для положительного f_n^0 . Следовательно, если мы применим $(-A_n)^{-1}$, то, в силу позитивности C_0 -полугруппы $\exp(\cdot A_n)$, резольвента $(-A_n)^{-1}$ также позитивна (см. предложение 2.1) и

$$(-A_n)^{-1} A_n \bar{U}_n(T) \succeq 0,$$

а это означает, что $0 \succeq \bar{U}_n(T)$. С другой стороны, из (2.25) следует, что

$$\bar{U}_n(T) \succeq 0$$

для $f_n^0 \succeq 0$ и $u_n^0 = 0$. Это означает, что $\bar{U}_n(T) = 0$, что может быть только в случае $f_n^0 = 0$. Но это противоречит условию $f_n^0 \neq 0$. Теорема доказана. $\square$

Из теоремы 2.19 следует, что можно организовать процесс

$$\tilde{f}_{n,j+1} = \tilde{K}_n(T) \tilde{f}_{n,j} - A_n u_n^T, \quad j = 0, 1, \dots, \quad (2.28)$$

который сходится:

$$\tilde{f}_{n,j} \rightarrow \tilde{f}_n, \quad j \rightarrow \infty,$$

где $\tilde{f}_n$ — решение задачи

$$\tilde{f}_n = \tilde{K}_n(T)\tilde{f}_n - A_n u_n^T. \quad (2.29)$$

Теорема 2.20. Пусть C_0 -полугруппы $\exp(\cdot A_n)$ позитивны и аналитичны. Предположим также, что $\mathcal{F}_n(\cdot), \mathcal{F}(\cdot) \in C^1([0, T])$ и

$$\mathcal{F}_n(t)' \rightarrow \mathcal{F}(t)' \quad \text{равномерно по } t \in [0, T].$$

Пусть выполнены условия (A), (B₁') и

$$u_n^0 \xrightarrow{\mathcal{P}} u^0, \quad u_n^T \xrightarrow{\mathcal{P}} u^T$$

так, что $G_n(T) \xrightarrow{\mathcal{P}} G(T)$. Предположим также, что $\mathcal{N}(I - K(T)) = \{0\}$, оператор $(\lambda I - A)^{-1}$ компактен,

$$(\lambda I_n - A_n)^{-1} \xrightarrow{\mathcal{PP}} (\lambda I - A)^{-1} \quad \text{компактно,}$$

$\mathcal{F}_n(\cdot) \in C^3([0, T])$ и

$$|\mathcal{F}_n(t)'''| \leq \text{const}, \quad t \in [0, T].$$

Тогда решения задач (2.29) существуют и сходятся к решению задачи (2.8), т.е.,

$$\tilde{f}_n \xrightarrow{\mathcal{P}} f, \quad n \rightarrow \infty.$$

Доказательство. Если $\tilde{K}_n(T) \xrightarrow{\mathcal{PP}} K(T)$ компактно, то утверждение теоремы получается аналогично шагу 4 теоремы 2.18.

Покажем, что

$$\tilde{K}_n(T) \xrightarrow{\mathcal{PP}} K(T) \quad \text{компактно.}$$

Чтобы сделать это, достаточно доказать, что

$$\|\tilde{K}_n(T) - K_n(T)\| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

так как утверждение

$$K_n(T) \xrightarrow{\mathcal{PP}} K(T) \quad \text{компактно}$$

уже доказано в теореме 2.18. Используем оценки

$$C \int_{l\tau_n}^{(l+1)\tau_n} \left| \mathcal{F}_n(s)'_s - \frac{\mathcal{F}_n(l\tau_n + \tau_n) - \mathcal{F}_n(l\tau_n)}{\tau_n} \right| ds = O(\tau_n^2)$$

и

$$\begin{aligned} & \left\| \sum_{l=0}^{k_n-1} \int_{l\tau_n}^{(l+1)\tau_n} \left(\exp((T-s)A_n) - (I_n - \tau_n A_n)^{-k_n+l} \right) ds \frac{\mathcal{F}_n(l\tau_n + \tau_n) - \mathcal{F}_n(l\tau_n)}{\tau_n} \right\| \leq \\ & \leq C \sum_{l=0}^{k_n-2} \int_{l\tau_n}^{(l+1)\tau_n} \left\| \exp((T-s)A_n) - \exp((T-l\tau_n)A_n) \right\| ds + C\tau_n + \\ & + C \sum_{l=0}^{k_n-1} \left\| \exp((T-l\tau_n)A_n) - (I_n - \tau_n A_n)^{-k_n+l} \right\| \tau_n \leq \\ & \leq C \left(\sum_{l=0}^{k_n-2} \frac{\tau_n}{k_n - l - 1} + \sum_{l=0}^{k_n-1} \frac{\tau_n}{k_n - l} \right). \end{aligned}$$

Теорема доказана. $\square$

Пример 2.1. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная гладкая область. Рассмотрим сильно эллиптический оператор второго порядка

$$Lu = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)u_{x_i x_j}(x) + \sum_{j=1}^n b_j(x)u_{x_j}(x) + c(x)u(x) \quad (2.30)$$

с гладкими коэффициентами a_{ij} , b_j , c , где $c(x) < 0$. Рассмотрим ассоциированную параболическую задачу

$$\begin{aligned} u_t(t, x) &= Lu(t, x) + \mathcal{F}(t)f(x), \quad t > 0, \quad x \in \Omega, \\ u(t, x) &= 0, \quad t > 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad u(0, x) = u^0(x), \quad u(T, x) = u^T(x), \quad x \in \Omega. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Пусть $E = L^2(\Omega)$. Определим оператор

$$A : D(A) \subset E \rightarrow E, \quad D(A) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega), \quad Au = Lu \quad \forall u \in D(A).$$

Известно, что A порождает аналитическую и компактную C_0 -полугруппу $\{\exp(tA) : t \geq 0\}$. Введем обозначения

$$E^1 = D(A) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega), \quad E^{1/2} = H_0^1(\Omega).$$

В этом случае для любых $u^0 \in D(A)$, $f(\cdot) \in L^2(\Omega)$ и $\mathcal{F}(\cdot) \in C^1([0, T])$ существует такое классическое решение $u(t, x)$ задачи (2.31), что $u(T, \cdot) \in D(A)$.

Пусть A , E и $E^{1/2}$ — такие же, как и раньше. Известно, что (см. [105]) A может быть однозначно связан с такой полуторалинейной формой

$$\sigma : E^{1/2} \times E^{1/2} \rightarrow \mathbb{C},$$

что

$$\begin{aligned} |\sigma(u, v)| &\leq c_1 \|u\|_{E^{1/2}} \|v\|_{E^{1/2}}, \quad u, v \in E^{1/2}, \\ \operatorname{Re} \sigma(u, u) &\geq c_2 \|u\|_{E^{1/2}}^2, \quad u \in E^{1/2}, \\ \sigma(u, v) &= \langle -Au, v \rangle, \quad u \in D(A), \quad v \in E^{1/2}. \end{aligned}$$

Для выпуклого многоугольника $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, рассмотрим его разбиение, представляющее собой регулярную триангуляцию, в которой все треугольники имеют наибольший диаметр, равный h . В этом случае обозначим через S_h совокупность всех функций в $E^{1/2}$, которые линейны в каждом треугольном элементе.

Таким образом, мы получили семейство S_h конечномерных подпространств в $H_0^1(\Omega)$ со стандартным (см. [199]) аппроксимационным свойством

$$\inf_{\chi \in S_h} (\|v - \chi\|_E + h\|v - \chi\|_{E^{1/2}}) \leq Ch^2 \|v\|_{E^1} \quad \text{при } v \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega).$$

Обозначим через $P_h u$ проекцию $u \in E$ на $S_h = E_h^{1/2}$ по отношению к скалярному произведению в $L^2(\Omega)$; эти операторы играют роль связывающих отображений $\{p_n\}$. Рассматриваемая конечно-элементная аппроксимация $A_h : S_h \rightarrow S_h$ оператора A определяется как

$$\langle -A_h \phi_h, \psi_h \rangle = \sigma(\phi_h, \psi_h), \quad \phi_h, \psi_h \in E_h^{1/2}.$$

Другими словами, A_h — это оператор, ассоциированный с полуторалинейной формой $\sigma_h(\cdot, \cdot)$, которая является сужением $\sigma(\cdot, \cdot)$ на $E_h^{1/2} \times E_h^{1/2}$. В такой постановке можно доказать (см. [56]), что существует такая постоянная C и такой острый угол θ , что для любого $x \in E$ и $z \in \{z \in \mathbb{C} : \theta \leq |\arg z| \leq \pi\}$ имеем, например,

$$\left\| (zI - A)^{-1}x - (zI_h - A_h)^{-1}P_h x \right\|_E \leq Ch^2 \|x\|_E.$$

Эта оценка показывает, что для такого примера имеем $\mathcal{P}$ -сходимость с равномерной сходимостью резольвент. Так как резольвента $(\lambda I - A)^{-1}$ компактна при некотором λ , то вследствие упомянутого выше неравенства, имеем

$$\mu \left((zI_h - A_h)^{-1}x_h \right) \leq \mu \left((zI - A)^{-1}x_h \right) + \overline{\lim}_{h \rightarrow 0} \left\| (zI - A)^{-1}x_h - (zI_h - A_h)^{-1}x_h \right\|_E = 0,$$

где $\mu(\cdot)$ — мера некомпактности, и резольвенты сходятся компактно при $h \rightarrow 0$. Следовательно, выполняется свойство компактной сходимости $\Delta_{cc} \neq \emptyset$ как одно из основных предположений в общей аппроксимационной схеме. Обратные задачи для параболических уравнений и систем были исследованы также в [95, 163, 164, 165, 166, 167].

Замечание 2.4. Конечно-разностные методы для начальных задач изучались, например, в [177, 176, 175]. В случае, когда рассматриваются конечно-разностные методы, можно построить связывающие отображения $\{p_n\}$ следующим образом. Для случая $E = C([0, 1])$ можно положить

$$(p_n x)(t_j) = x(t_j), \quad t_j = jh, \quad 0 \leq j \leq \left\lfloor \frac{1}{h} \right\rfloor.$$

В случае $E = L^p([0, 1])$, можно выбрать

$$(p_n x)(t_j) = \frac{1}{h} \int_{t_j-h/2}^{t_j+h/2} x(s) ds, \quad 1 \leq j \leq \left\lfloor \frac{1}{h} \right\rfloor - 1.$$

Построенные таким образом связывающие отображения обладают свойством

$$\|p_n x\|_{E_n} \rightarrow \|x\|_E \quad x \in E.$$

2.5. Обзор последних результатов для параболических уравнений. В [59] исследованы условия единственности решений обратных задач для параболических уравнений с неизвестной правой частью в том случае, когда дополнительная информация дана в конечный момент времени. Если эта дополнительная информация нарушена, то свойство единственности может быть потеряно.

В [40] рассмотрена обратная параболическая задача. Доказано, что из финального переопределения можно одновременно определить тепловой коэффициент излучения, начальную температуру и граничный коэффициент при условии, что тепловой коэффициент излучения априори известен в небольшой подобласти. Кроме того, для этой обратной задачи получены оценки устойчивости.

В [121] рассматривается двумерное упругое тело, базовая конфигурация которого представлена полой оболочкой. Авторы получили карлемановские оценки для уравнения линейной полой оболочки и применили их для доказательства условной устойчивости в обратной задаче определения элементов внешнего источника по наблюдениям смещения в окрестности границы на протяжении некоторого временного интервала.

В [7] предложены новые конструктивные методы исследования многомерных обратных задач.

В [63] обсуждается однозначная разрешимость обратной задачи для параболического уравнения с условием интегрального переопределения.

Работа [73] представляет систематическое исследование обратных задач идентификации неизвестного источника $F(x, t)$ уравнения теплопроводности (линейного параболического уравнения) $u_t = (k(x)u_x)_x + F(x, t)$ исходя из измеренных выходных данных в форме граничных условия типа Дирихле $h(t) = u(0, t)$ или Неймана $f(t) = -k(0)u_x(0, t)$, а также в форме финального переопределения по времени $u_T(x) = u(x, T)$. В первой части [73] для вывода формулы для градиентов Фреше функционалов цены используется подход, связанный с сопряженной задачей. Доказано, что все эти градиенты являются липшицевыми функциями. Выводятся необходимые условия единственности и, следовательно, различимости решений всех трех типов обратных задач. Во второй части статьи для получения общего представления решения обратной задачи источника для абстрактного эволюционного уравнения $u_t = Au + F$ с финальным переопределением используется теория полугрупп. Это представление показывает структуру неединственности решения обратной задачи, а также позволяет вывести достаточные условия единственности.

В [46] рассматривается начально-граничная задача для уравнения диффузии с неизвестным начальным условием. Для определения неизвестного начального условия используется дополнительная информация, которая представляет собой внешний объемный потенциал, плотность которого является лапласианом, вычисленным для решения начально-граничной задачи. Для

случая, когда пространственная область начально-граничной задачи представляет собой сферический слой или параллелепипед, доказаны теоремы единственности решения обратной задачи.

В работе [161] рассматривается линейное эволюционное уравнение

$$u'(t) = Au(t) + F(t)f, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (2.32)$$

в банаховом пространстве $E = L^p(\Omega)$, где функция F известна, а f неизвестна. Анализируется вопрос единственности для обратной задачи определения f и $u(\cdot)$ из (2.32) с условиями $u(0) = 0$, $u(T) = 0$. Сформулирована теорема единственности для случая, когда A порождает C_0 -полугруппу операторов. Рассматривается также случай, когда оператор A диссипативен. Кроме того, полученные результаты применены для уравнения переноса. Статья [161] завершается сравнением представленных результатов с предыдущими работами.

Обратная задача реконструкции специального вида правой части исследуется в [165] для параболического уравнения с переменными коэффициентами. В данном случае переопределением является интеграл от решения, взятый по времени. Доказана единственность решения обратной задачи. Для дифференцируемой по времени правой части обоснованы улучшенные свойства гладкости решения прямой задачи. Кроме того, выведены конкретные условия, при которых слабое решение прямой задачи имеет постоянный знак.

Целью статьи [3] является исследование корректности обратной задачи определения коэффициента при младшем члене полулинейного параболического уравнения для случая нелинейного граничного условия. Дополнительное условие дано в нелокальной интегральной форме. Доказаны теоремы единственности и «условной» устойчивости.

В [5] для некоторых уравнений математической физики получены новые представления для решения и коэффициентов, используемые для изучения многомерных обратных задач.

В [48] рассматривается начально-граничная задача для уравнения диффузии с неизвестным начальным условием в сферически симметричном случае. Дополнительная информация, используемая для определения неизвестного начального условия, представляет собой внешний объемный потенциал, плотность которого задана оператором Лапласа, вычисленным на решении начально-краевой задачи. Исследуется единственность решения обратной задачи, зависящей от параметра, содержащегося в граничном условии.

Статья [50] представляет единый подход для разработки вопроса единственности при идентификации неизвестных коэффициентов в n -мерном параболическом дифференциальном уравнении. Показано, что неизвестные коэффициенты в параболической обратной задаче однозначно определяются по заданным наблюдениям в том случае, когда ассоциированная сопряженная задача аппроксимативно управляема. Кроме того, предложенный метод предоставляет явное выражение для градиента ассоциированных выходных данных функционала ошибок наименьших квадратов и может служить средством прямого решения обратной задачи. Гибкость метода иллюстрируется примерами идентификации, включающими один или более коэффициентов как в одном уравнении, так и в системе и основанными на различных граничных и внутренних наблюдениях.

В [110] изучается обратная задача реконструкции источника $F(x, t) = h(x, t)f(x)$ для параболического уравнения с неизвестной функцией $f(x)$. Для того чтобы найти $f(x)$, дано дополнительное условие нелокального наблюдения вида

$$\int_0^T u(x, t) d\mu(t) = \chi(x).$$

Доказано свойство фредгольмовости и получены достаточные условия существования и единственности решения. Эти условия имеют форму легко проверяемых неравенств и не содержат ограничений на величину $T > 0$, а также на диаметр рассматриваемой области Ω . Доказательство основано на априорных оценках и качественных свойствах решений начально-граничных задач для параболических уравнений.

В [57] рассматривается обратная граничная задача для уравнения теплопроводности на промежутке $(0, 1)$, в котором теплопроводность $\gamma(t, x)$ кусочно постоянна, а точка разрыва зависит

от времени:

$$\gamma(t, x) = k^2, \quad 0 < x < s(t), \quad \gamma(t, x) = 1, \quad s(t) < x < 1.$$

Показано, что k и $s(t)$ на временном интервале $[0, T]$ определяются из частичного отображения Дирихле—Неймана $u(t, 1) \rightarrow \partial_x u(t, 1)$, $0 < t < T$, где $u(t, x)$ — такое решение уравнения теплопроводности, что $u(t, 0) = 0$ не зависит от начальных данных $u(0, x)$. Показано также, что другое частичное отображение Дирихле—Неймана $u(t, 0) \rightarrow \partial_x u(t, 1)$, $0 < t < T$, сужает пару $(k, s(t))$ не более чем до двух случаев на временном интервале $[0, T]$, где $u(t, x)$ — такое решение уравнения теплопроводности, что $u(t, 1) = 0$ также независимо от начальных данных $u(0, x)$.

В статье [55] рассматривается задача определения теплового коэффициента диффузии среды, зависящего от времени, причем распространение температуры в части этой среды известно. Такая ситуация возникает в пищевой технологии, где для увеличения срока годности используются тепловые процессы под высоким давлением с целью сохранения питательных и органолептических свойств. Это явление моделируется уравнением теплопроводности, содержащим член, зависящий от источника температуры и повышения давления, а также от подходящих начальных и граничных условий. Изучается задача определения теплового коэффициента диффузии k по некоторым известным измерениям температуры на границе и внутри среды. Доказана единственность решения обратной задачи при подходящих априорных предположениях о регулярности, размере и росте k .

В [60] рассматриваются обратные задачи с терминальным наблюдением для параболического уравнения с неизвестными коэффициентами при производной по времени. На основе принципа двойственности доказаны достаточные условия единственности решений в классах Гельдера. Автор приводит примеры, в которых при расширении множества допустимых решений теряется свойство единственности, а также примеры неустойчивости решений по отношению к ошибкам исходных данных. Обоснован метод квазирешения для построения устойчивой аппроксимации решений.

В [61] рассматриваются обратные задачи с терминальным наблюдением для параболических уравнений с неизвестными коэффициентами при младших членах и младших производных в классах Гельдера. На основе принципа двойственности доказаны достаточные условия единственности решения в этих классах. Приведены примеры неустойчивости и потери единственности.

В [96] изучается однозначная разрешимость обратной задачи определения старшего коэффициента в параболическом уравнении на плоскости с коэффициентами, зависящими как от времени, так и от пространственных переменных при условии интегрального переопределения по времени. Получены достаточные условия единственности решения обратной задачи. Приведены нетривиальные примеры задач, для которых эти условия выполнены. Показано, что накладываемые условия выполняются, когда либо временной интервал достаточно велик, либо пространственный интервал, на котором рассматривается задача, достаточно мал.

В [222] исследуется одновременная реконструкция начальной температуры и коэффициента теплопереноса в теплопроводящей системе по заданному измерению температуры в фиксированное время на подмножестве физической области. Сначала устанавливается устойчивость обратной задачи, а затем изучается численная реконструкция. Процесс реконструкции выполнен с помощью тихоновской регуляризации, в которой регуляризационные члены представлены L^2 -нормами градиентов и осуществляются таким образом, что решение уравнения теплопроводности соответствует фиксированному времени наблюдения, а подмножество наблюдения оптимально в смысле L^2 -норм. Непрерывная нелинейная система оптимизации дискретизируется методом кусочно-линейных конечных элементов, причем показана сходимость аппроксимации конечных элементов. Задача с дискретным конечным элементом решается нелинейным градиентным методом с эффективной нелинейной многосеточной техникой для ускорения процесса реконструкции. Эффективность предложенного нелинейного многосеточного градиентного метода для решения обратной параболической задачи проиллюстрирована результатами численных экспериментов.

Цель работы [34] — определить два конвективных коэффициента из одного граничного измерения. Для доказательства единственности определения пространственно меняющихся коэффициентов в дифференциальном уравнении с частными производными с одним измерением используются карлемановские оценки.

В [21] рассматривается обратная задача определения пространственно меняющегося источника для параболической задачи переноса тепла. Авторы устанавливают оценки липшицевой устойчивости при определении источника по одному измерению в произвольной подобласти в течение временного интервала. Используемым методом является карлемановская оценка для задачи теплопереноса.

В [41] даны некоторые оценки устойчивости для обратной задачи, состоящей в определении из граничного измерения источника и коэффициентов, которые встречаются в эллиптических и параболических уравнениях и зависят от всех переменных.

В [126] авторы доказывают единственность идентификации неизвестного расположения источника в двумерном уравнении теплопроводности из разрозненных измерений. Основываясь на предположении, что неизвестный источник представляет собой сумму известных функций, они показывают, что одна точка измерения достаточна для идентификации количества источников, а три измерительные точки достаточны для того, чтобы определить все расположения неизвестных источников. Предложена численная схема реконструкции для восстановления количества источников и их расположения.

В [26] рассматривается (2×2) -система параболических уравнений со связью первого и нулевого порядка. На основе дополнительной информации только для одной компоненты без данных о начальных значениях установлены карлемановские оценки, которые затем применены к обратной задаче определения некоторых или всех коэффициентов по наблюдениям в произвольной подобласти на протяжении некоторого временного интервала для только одной компоненты и информации о двух компонентах за фиксированное положительное время θ во всей пространственной области. Основными результатами являются липшицевы оценки устойчивости обратных задач. Для липшицевой устойчивости требуется наложить некоторое условие невырожденности в θ для двух компонент, после чего становится возможным аппроксимативно управлять двумя компонентами (2×2) -системы с входными данными только одной компоненты. Такая аппроксимативная управляемость доказана также с помощью этих новых карлемановских оценок. Наконец, установлены карлемановские оценки для (3×3) -системы параболических уравнений со связью членов нулевого порядка одной компоненты для того, чтобы доказать соответствующую аппроксимативную управляемость с управлением одной компонентой.

В [69] рассмотрена задача частичной реконструкции источника вместе с решением для линейной параболической задачи в $\mathbb{R}^{n+m}$. Дополнительная информация, которая необходима для ее решения, дана в виде функции

$$\int_{\mathbb{R}^n} u(t, x, y) d\mu(y)$$

для всех (t, x) , где u — решение параболической задачи, а μ — комплекснозначная борелевская мера в $\mathbb{R}^n$.

Основная цель работ [66, 65] состоит в том, чтобы проиллюстрировать некоторые результаты, касающиеся обратной задачи определения источника.

В [67] рассматривается задача реконструкции источника параболической системы Коши—Дирихле в цилиндрической области. Дополнительную информацию, необходимую для определения неизвестной части источника вместе с решением, авторы задают значением интеграла от решения по отношению к некоторым пространственным переменным.

В [68] рассматривается обратная задача идентификации коэффициента в источнике параболической смешанной системы с граничным условием первого порядка. Дополнительная информация, необходимая для ее решения, дана знанием эволюции по времени конкретного интеграла по отношению к подходящей борелевской мере.

В банаховом пространстве рассматривается неоднородное эволюционное уравнение с неизвестной правой частью. Для определения неизвестной правой части дополнительно к условиям Коши

дано специальное переопределение. В [159] построена систематическая теория для исследования этой задачи и даны достаточные условия для существования и единственности. Особое внимание уделено некоторым проблемам теории возмущения.

В [100] доказаны теоремы существования и единственности для обратной задачи нахождения правой части параболического уравнения высокого порядка с двумя независимыми переменными и дополнительным условием в форме интегрального переопределения. Полученные результаты использованы для изучения перехода к пределу в последовательности таких обратных задач со слабо сходящимися коэффициентами.

В [27] доказаны теоремы существования и единственности для обратной задачи определения источника в общем параболическом уравнении. Рассмотрены первая и вторая граничные задачи, в которых условиями переопределения являются нелокальный и интегральный типы.

В [97, 98] рассматривается однозначная разрешимость обратной задачи определения правой части параболического уравнения со старшим коэффициентом, зависящим от времени и пространственных переменных, при условии финального переопределения. Получены два типа условий, которые достаточны для локальной разрешимости обратной задачи, а также доказана фредгольмова разрешимость рассматриваемой обратной задачи.

В [62] продолжен анализ обратных задач с терминальным переопределением для квазилинейных параболических уравнений общего вида

$$c(x, t, u)u_t - Lu = p_0(x, t)f(x) + p_1(x, t), \quad 0 \leq x \leq l, \quad 0 \leq t \leq T,$$

с неизвестной правой частью, которые связаны с нахождением тепловых источников на основе заданного температурного распределения в конечный момент времени. Внимание в основном уделяется постановке таких задач и единственности их решений в классах Гельдера в случае граничных условий первого рода. Исследование проблемы единственности основано на анализе свойств соответствующих сопряженных задач для линейных параболических уравнений и использует единственность решения первой граничной задачи для таких уравнений с обратным течением времени. Этот подход позволяет получить достаточные условия единственности для квазилинейного параболического оператора общего вида с коэффициентами, зависящими от (x, t, u) .

В [54] установлены условия существования и единственности решения коэффициентной обратной задачи для одномерного уравнения теплопроводности в случае граничных условий первого рода и нелокального условия переопределения.

В [94] автор рассматривает задачу нахождения пары $(a(t), u(x, t))$ из уравнения $u_t = a(t)u_{xx} + b(x, t, u, u_x)$, начальных условий, граничного условия Дирихле и заданного теплового потока в качестве условия переопределения. Доказаны существование и единственность гладкого решения.

В [127] доказано существование сильных решений задачи идентификации полулинейного дифференциального уравнения первого порядка в общем банаховом пространстве, подчиненных переопределению, выраженному посредством интеграла Лебега. Доказаны единственность и непрерывная зависимость решения от исходных данных при дополнительном предположении о том, что C_0 -полугруппа, порождаемая линейной частью, имеет достаточно быстрое экспоненциальное убывание.

В [180] рассмотрена обратная задача определения неизвестного источника в параболическом уравнении со старшим коэффициентом, зависящим от времени и пространственных переменных, при условии финального переопределения. Получены серии модельных решений задачи с помощью метода весового гомотопного анализа. Приведено описание метода решения задачи и идентификации неизвестного источника. Наконец, для иллюстрации этого метода приведены отдельные примеры.

В [112] изучается разрешимость параболических и гиперболических обратных задач определения решения вместе с неизвестной правой частью, когда дано общее условие переопределения (со случаями финального и интегрального переопределения включительно). Доказаны некоторые теоремы однозначного существования регулярных решений.

В [103] рассматривается задача одновременного определения зависящей от времени теплопроводности и распределения температуры в одномерном уравнении теплопроводности

для случая нелокального граничного условия и интегрального переопределения. Устанавливаются условия существования и единственности классического решения рассматриваемой задачи. Представлен численный пример, использующий конечно-разностную схему Кранка—Николсон, скомбинированную с итерационным методом, проиллюстрирована чувствительность этой схемы по отношению к данным шумового переопределения.

Работа [74] представляет полугрупповой подход к обратным задачам определения источника для абстрактного уравнения теплопроводности $u'(t) = Au(t) + F$, где измеряемые выходные данные даны в форме финального переопределения $u_T(x) := u(x, T)$. Приведена формула представления решения для этой обратной задачи. Это представление показывает структуру неединственности решения обратной задачи и позволяет вывести достаточное условие для единственности. Некоторые представленные примеры связаны с идентификацией неизвестных источников, зависящих от пространственных $f(x)$ или временной переменной $h(t)$ уравнения теплопроводности $u_t = u_{xx} + f(x)h(t)$ из финального переопределения или измерения в одной точке.

В [101] рассматривается обратная задача нахождения зависящего от времени коэффициента теплоемкости вместе с решением уравнения теплопроводности с периодическими граничными условиями и интегральным переопределением. Установлены условия существования и единственности классического решения задачи при рассматриваемых условиях. Представлены численные примеры, использующие конечно-разностную схему Кранка—Николсон в комбинации с итерационным методом.

В [182] установлены условия однозначной разрешимости обратной задачи определения младшего коэффициента с двумя неизвестными, зависящими от времени параметрами в одномерном параболическом уравнении с условиями интегральных переопределений в области со свободной границей.

В [88] доказано, что дополнительные граничные данные $\partial u / \partial n$ на $\partial \Omega \times (0, T)$, связанные с решением $u(\cdot)$ параболической задачи

$$cu'(t) - \Delta u + au = 0 \quad \text{на} \quad \Omega \times (0, T),$$

однозначно определяют коэффициенты $c = c(x)$, $a = a(x)$. В доказательствах используется теорема Сильвестра—Ульмана о полноте произведений решений уравнения $-\Delta u + au = 0$.

При подходящих предположениях автор статьи [89] доказывает, что задача с финальным переопределением является фредгольмовой с нулевым индексом. Затем с помощью ограничения классов допустимых неизвестных функций f и весов автор доказывает единственность (а следовательно, существование и устойчивость) решения задачи с финальным переопределением. Для этого необходимы два основных предположения: позитивность и строгая монотонность функции $a(x, t) > 0$ по времени. В связи с этими предположениями автор показывает, что если условие строгой позитивности перестает выполняться, то существует положительная весовая функция, для которой задача с финальным переопределением допускает нетривиальные решения.

Еще одна задача идентификации изучается в [89] для случая, когда функция $F = 0$, а коэффициент в операторе A предполагается неизвестным и зависящим только от x . Для такой задачи доказаны также результаты существования и единственности.

Предположим, что оператор A является генератором C_0 -полугруппы $\exp(tA)$, действующей в пространстве E . Пусть $F(t)$ — операторная функция, непрерывная на промежутке $[0, T]$ и такая, что $F(\cdot) \in C([0, T]; B(E))$. Предположим, что $f \in E$. В E рассмотрим неоднородную задачу Коши

$$u'(t) = Au(t) + F(t)f, \quad 0 \leq t \leq T, \quad u(0) = 0. \quad (2.33)$$

Под решением (2.33) мы понимаем *обобщенное решение*, т.е. функцию $u(t)$, имеющую вид

$$u(t) = \int_0^t \exp((t-s)A)F(s)f \, ds, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Теперь предположим, что элемент f в (2.33) неизвестен. Для того чтобы найти его, в [201] рассмотрено специальное переопределение

$$\int_0^T \omega(t)u(t)dt = \psi, \quad (2.34)$$

где ψ — заданный элемент из $D(A)$, а $\omega(t)$ — скалярная функция, которая непрерывна на $[0, T]$. Решением обратной задачи (2.33), (2.34) является, по определению, такой элемент $f \in E$, что решение $u(t)$ задачи Коши (2.33) с данным f удовлетворяет условию (2.34). В [201] показано, что задача (2.33)–(2.34) эквивалентна задаче с некоторым финальным переопределением $u(T) = \psi$.

В [162] рассмотрена обратная задача с финальным переопределением для абстрактного эволюционного уравнения в полуупорядоченном банаховом пространстве.

В [25] для обратной параболической задачи с неизвестными коэффициентами, которые не зависят от пространственных переменных, получены теоремы существования и единственности.

В [42] рассмотрена обратная параболическая задача для значений параметров диффузии. Показано, что эта задача корректно поставлена, за исключением конечного множества значений.

В [100] доказаны теоремы существования и единственности для обратной задачи определения правой части параболического уравнения высшего порядка с двумя независимыми переменными и дополнительным условием в форме интегрального переопределения. Этот результат используется для изучения перехода к пределу в последовательности таких обратных задач со слабо сходящимися коэффициентами.

В [166] авторы исследуют обратную задачу восстановления правой части (специального вида) параболического уравнения с переменными коэффициентами. В качестве переопределения задан интеграл от решения по времени. Доказано, что эта задача обладает свойством фредгольмовости; доказаны также существование и единственность ее решения при условии, что операторные коэффициенты производных высшего порядка по отношению к пространственным переменным стационарны. Приведены оценки устойчивости и найдены некоторые легко проверяемые достаточные условия для корректной разрешимости обратной задачи «в целом».

Обратная параболическая задача с переменными коэффициентами исследована в [164]. Доказано свойство фредгольмовости этой задачи и ее корректность при некотором условии на правую часть.

В [97] рассматривается однозначная разрешимость обратной задачи определения правой части параболического уравнения со старшим коэффициентом, зависящим от времени и пространственных переменных, при условии финального переопределения. Получены два типа достаточных условий локальной разрешимости обратной задачи, а также доказана фредгольмову разрешимость этой обратной задачи.

В [163] рассматривается параболическая система фредгольмова индекса 0, для которой доказана корректная разрешимость.

В [172] рассмотрена обратная задача (существование локального решения) с переопределением для параболического квазилинейного уравнения.

В [68] рассмотрена обратная задача идентификации коэффициента в источнике смешанной параболической системы с граничными условиями первого порядка. Дополнительная информация, необходимая для ее решения, задана в виде эволюции по времени конкретного интеграла по отношению к подходящей борелевской мере.

Новая обратная задача, которая состоит в одновременном определении источника вместе с температурой для уравнения теплопроводности из интегральных наблюдений, исследована в [75]. Эти интегральные наблюдения представляют собой весовые средние температуры по пространственной области и временному интервалу. Для того чтобы обеспечить единственность решения, источник тепла ищется в виде суммы двух зависящих от пространства и времени компонент. Доказаны локальное существование и единственность решения в классических гильбертовых пространствах. Обратная задача линейна, но некорректна, так как небольшие ошибки во входном интегральном наблюдении вызывают большие ошибки выходных данных. Для устойчивой реконструкции используется вариационный метод наименьших квадратов как с пенализацией, так и

без нее. Градиент функционала, который минимизируется, вычисляется явно; применяется метод сопряженных градиентов. Численные результаты, полученные для отдельных примеров теста производительности, показывают точность и устойчивость реконструкции теплового источника.

В [99] получены теоремы существования и единственности для решения обратной задачи определения младшего коэффициента в многомерных параболических уравнениях с интегральным наблюдением. Дана оценка максимума модуля неизвестного коэффициента с постоянной, которая явно выражается через исходные данные задачи.

В [102] исследуется обратная задача нахождения зависящего от времени коэффициента диффузии в параболическом уравнении с периодическими граничными условиями и интегральным условием переопределения. При некоторых предположениях на исходные данные с помощью обобщенных методов Фурье доказаны существование, единственность и непрерывная зависимость от исходных данных. Точность и вычислительная эффективность предложенного метода продемонстрированы численными примерами.

В [168] рассмотрены существование и единственность коэффициентных обратных задач для параболического уравнения. Решение ищется в пространствах Соболева, а старший коэффициент — в классах непрерывных функций.

Некоторые результаты существования и единственности решений обратных параболических задач частичной реконструкции внешних сил демонстрируются в [70]. В частности, найдены условия, обеспечивающие сходимость решения и неизвестной части внешних сил к стационарному состоянию.

В [76] исследуется обратная задача нахождения зависящего от времени теплового источника вместе с температурой для уравнения теплопроводности с нелокальным граничным условием и дополнительным интегральным условием. Установлены существование, единственность и непрерывная зависимость решения обратной задачи от исходных данных. Кроме того, для того, чтобы получить устойчивое решение, разработан вариант метода граничных элементов в комбинации с тихоновской регуляризацией различного порядка. Представлены и обсуждены численные результаты.

В [142] представлен полугрупповой подход для анализа обратных задач идентификации неизвестного граничного условия $u(1, t) = f(t)$ в квазилинейном параболическом уравнении

$$u_t(x, t) = (k(u(x, t))u_x(x, t))_x$$

с граничными условиями Дирихле

$$u(0, t) = \psi_0, \quad u(1, t) = f(t)$$

и с использованием дополнительно измеряемых данных

$$u(x_0, t) = \psi_1, \quad u_x(x_0, t) = \psi_2.$$

Целью этого изучения является идентификация неизвестного граничного условия $u(1, t)$ при $x = 1$ с помощью дополнительно измеренных данных $u(x_0, t) = 1$ и $u_x(x_0, t) = \psi_2$. Прежде всего, используя дополнительные измеренные данные в качестве граничного условия, автор определяет задачу на

$$\Omega_{T_0} = \left\{ (x, t) \in \mathbb{R}_2 : 0 < x < x_0, 0 < t \leq T \right\},$$

затем с помощью полугруппы линейных операторов получает интегральное представление этой задачи. Наконец, автор доказывает основной результат, расширяя решение единственным образом на замкнутый промежуток $[0, 1]$. Основным моментом здесь является единственность расширений решения с $[0, x_0]$ на замкнутый интервал $[0, 1]$, что влечет за собой единственность решений. Этот момент приводит к интегральному представлению неизвестного граничного условия $u(1, t)$ при $x = 1$.

Статья [74] представляет полугрупповой подход для обратных задач с неизвестным источником для абстрактного уравнения теплопроводности, когда измеряемые выходные данные даны в форме финального переопределения. Предложена формула представления решения обратной задачи с неизвестным источником. Это представление показывает структуру неединственности решения обратной задачи, а также позволяет вывести достаточное условие для единственности.

Представлены некоторые примеры, связанные с идентификацией тепловых источников уравнения теплопроводности, зависящих как от пространственных переменных, так и от времени, из условий финального переопределения или из измерения в одной точке.

В [106] исследуется обратная задача нахождения коэффициента, зависящего от времени, для уравнения теплопроводности с нелокальным граничным условием и интегральным условием переопределения. С помощью обобщенного метода Фурье при некоторых условиях регулярности и согласованности исходных данных доказаны существование, единственность и непрерывная зависимость решения от исходных данных.

В [46] рассматривается начально-граничная задача для уравнения диффузии с неизвестным начальным условием. Для случая, когда пространственная область является сферическим слоем или параллелепипедом, доказана теорема единственности решения обратной задачи.

В [90] рассматривается обратная задача нахождения зависящего от времени коэффициента теплоемкости вместе с решением уравнения теплопроводности для нелокального граничного условия и условия переопределения. Изучаются существование, единственность и непрерывная зависимость решения от исходных данных. Для этой обратной задачи представлены некоторые численные рассуждения с примерами.

В [112] изучается разрешимость параболических и гиперболических обратных задач определения решения вместе с неизвестной правой частью для общего условия переопределения (включая случаи финального и интегрального переопределения). Доказаны некоторые теоремы однозначной разрешимости для регулярных решений.

В [173] рассматривается обратная задача определения источника для параболического уравнения с переопределением. Доказано, что обратная задача корректна в смысле Адамара. Доказательство основано на вещественной аналитичности параметра в уравнении Фредгольма.

Разрешимость коэффициентной обратной задачи для параболического уравнения высокого порядка рассмотрена в [29]. В качестве дополнительной информации рассмотрено финальное переопределение. Доказаны теоремы существования и единственности.

В [62] приведен анализ обратных задач для квазилинейных параболических уравнений общего вида с неизвестной правой частью и терминальным переопределением. Внимание в основном уделяется постановке таких проблем, как единственность их решений в гильбертовых классах для случая граничных условий первого рода. Исследование проблемы единственности основано на анализе свойств соответствующих сопряженных задач для линейных параболических уравнений и использует единственность решения первой граничной задачи для таких уравнений с обратным течением времени. Указанный подход позволяет получить достаточные условия единственности для квазилинейных параболических операторов общего вида с коэффициентами, зависящими от (x, t, u) . Это расширяет класс обратных задач с терминальным переопределением, которые обладают свойством единственности. Автор также рассматривает устойчивость приближенного решения в гильбертовых пространствах для упомянутого выше класса некорректных задач на основе метода регуляризации квазирешений.

В [98] изучается однозначная разрешимость обратной задачи определения правой части параболического уравнения со старшим коэффициентом, зависящим как от времени, так и от пространственной переменной, при условии интегрального переопределения по отношению ко времени. Авторы получили два типа условий, которые достаточны как для локальной разрешимости обратной задачи, так и для изучения ее так называемой фредгольмовой разрешимости.

В [219] предложен новый численный метод определения движущейся границы из данных Коши в одномерном уравнении теплопроводности, когда начальная температура не требуется. Численная схема основана на использовании фундаментальных решений уравнения теплопроводности в качестве базисных функций. Для того чтобы регуляризовать плохо обусловленную линейную систему уравнений, получающуюся в результате коллокации граничных данных, авторы успешно применяют тихоновскую регуляризацию с правилом выбора параметра методом обобщенной перекрестной проверки для получения устойчивой численной аппроксимации движущейся границы. При некоторых предположениях доказана также единственность движущейся границы.

В [218] рассмотрена обратная задача для одномерного уравнения теплопроводности, в которой нужно определить граничное значение на одном конце пространственного промежутка на протяжении некоторого интервала времени и начальное значения из данных Коши на другом конце. Из существующей теории авторы доказывают единственность определения как граничного значения, так и начального значения; этот метод не требует никакого начального значения. Исследован численный метод и доказана устойчивость численной реконструкции.

В [223] изучается обратная задача реконструкции зависящего от времени теплового источника в уравнении теплопроводности с использованием измерения температуры во внутренней точке. Задачи этого типа имеют важные приложения в отдельных областях прикладных наук. Методом функции Грина обратная задача сводится к интегральному уравнению первого рода, являющемуся, как известно, некорректной задачей. Единственность решения обратной задачи получена из принципа сжимающих отображений. Для изучения операторного уравнения используется численный алгоритм на основе метода итераций Ландвебера, в статье также выполнены некоторые другие численные эксперименты, которые показывают, что предложенный метод устойчив, а неизвестный тепловой источник восстанавливается достаточно хорошо.

В [212] рассматривается обратная задача нелинейной конвекции-диффузии, в которой требуется провести идентификацию неизвестного, зависящего исключительно от времени коэффициента диффузии в подмножестве ограниченной области $\mathbb{R}^d$. Недостающие данные компенсированы граничным наблюдением на части поверхности подмножества: измеряются полный поток через эту поверхность или значения решения. Обсуждаются два метода решения. В обоих случаях разрешимость задачи доказывается с использованием коэффициента сопоставления данных. Более подробно, конструируется нелинейный численный алгоритм, основанный на методе Рунге, а также показана сходимость аппроксимаций к слабому решению в подходящих функциональных пространствах. При доказательстве также используются монотонные методы и аргумент Минти—Браудера. Обсуждаются результаты численных экспериментов.

В [224] рассмотрена обратная задача теплопроводности с устойчивой границей. Для решения этой задачи предложены различные подходы, основанные на преобразованиях Лапласа и Фурье. Применение преобразования Лапласа делает возможным получить операторное уравнение, описывающее явную зависимость нужной граничной функции от исходных данных на другой границе. Этот подход к решению данной задачи используется впервые. Данный метод основан на прямом и обратном преобразованиях Фурье по отношению к временной переменной при условии устойчивости решений. Оценка ошибки для этих решений лучше по отношению к другим. Диапазон применения каждого из предложенных методов и устойчивость решений, полученных этими методами, оценивались с помощью вычислительного эксперимента.

В [1] рассмотрены обратные задачи для параболического уравнения с неизвестным источником (зависящим от пространственных переменных или от времени) в правой части. Численный подход основан на методе прямых. Приведены результаты численных экспериментов на пробных задачах.

В [195] исследовано численное решение для класса одномерных обратных параболических задач с помощью подвижной аппроксимации наименьших квадратов. Обратная задача состоит в определении неизвестного источника, зависящего от времени. Для решения уравнения используется метод коллокации. Представлены и обсуждены некоторые численные эксперименты для иллюстрации устойчивости и высокой эффективности данного метода.

В [49] исследована обратная задача определения теплового источника, зависящего от пространственных переменных, в параболическом уравнении теплопроводности с коэффициентами, зависящими как от пространственных переменных, так и от времени. Целью является восстановление теплового источника, зависящего от пространственных переменных, даны обычные условия прямой задачи и дополнительная информация от измерения температуры в заданный момент времени. Доказано, что эта обратная задача имеет единственное решение, и для нахождения теплового источника в этой обратной задаче предложена устойчивая итерационная процедура. Метод основан на последовательности корректно поставленных прямых задач, которые решаются численно

на каждом шаге итераций с помощью метода конечных элементов. Нестабильность обратной задачи определения источника покрывается путем остановки итераций с помощью принципа невязки. В работу включены численные результаты, показывающие, что можно достигнуть точности и устойчивости реконструкции.

В [78] исследуется определение старших и младших температурных коэффициентов, зависящих от времени. Рассмотрены обратные и некорректно поставленные задачи одновременной идентификации пары этих коэффициентов в одномерном уравнении теплопроводности из граничных данных Коши. Представлены теоремы однозначной разрешимости этих обратных задач, причем в одном случае, который раньше не был представлен, доказательство проведено строго. Однако, поскольку эти задачи все еще остаются некорректно поставленными, решение требует регуляризации. Таким образом, для того, чтобы получить устойчивое решение с целью получения неизвестных коэффициентов, требуется минимизировать нелинейную целевую функцию наименьших квадратов. Для различных параметров регуляризации исследуется устойчивость численных результатов по отношению к различным уровням шума для отдельных тестовых примеров. Это изучение важно для исследований по численным математическим методам для решения обратных коэффициентных задач идентификации с приложениями в тепловом переносе и пористых средах.

Численное решение коэффициентных обратных задач для параболического уравнения исследуется в [2]. Предложен подход, основанный на методе Рунге. На тестовой задаче обсуждаются результаты численных экспериментов.

В [150] представлен численный метод для решения обратной задачи теплопроводности с зашумленными данными на основе метода Синк–Галеркина. Для задачи определяется устойчивое численное решение. Для этого авторы используют датчик, расположенный в точке внутри тела, и измерение $u(x; t)$ в точке $x = a$, где $0 < a < 1$. Они также доказывают, что скорость сходимости метода экспоненциальна. Эффективность подхода показывают численные результаты для оценки неизвестных функций этой обратной задачи.

В [4] рассматриваются существование и единственность решения для n -мерной нелинейной обратной задачи реакции-диффузии с нелинейным источником. Эта задача преобразуется в новую коэффициентную обратную задачу. Затем определяется параболический дифференциальный оператор L_λ , чтобы установить соотношение между решением уравнения $L_\lambda = 0$ и новой обратной задачей. Следуя этому, авторы работы показывают, что обратная задача имеет по крайней мере одно решение в классе допустимых коэффициентов. В дальнейшем доказано, что это решение является единственным решением рассматриваемой обратной задачи. Для иллюстрации некорректности этой обратной задачи приведен численный пример.

В [58] рассматривается обратная задача для уравнения теплопроводности

$$u_t - \gamma \Delta u = f(x)\sigma(t), \quad (x, t) \in \Omega \times (0, T),$$

по определению источника $f(x)$, зависящего от пространственных координат, в предположении, что $\sigma(t)$ известна из одного внутреннего измерения решения на $(0, T)$. Цель работы — установить формулу реконструкции для $f(x)$, подобную той, которая была получена М. Ямамото для гиперболических уравнений с помощью точного управления, и обобщенную здесь для параболических уравнений. Формула реконструкции ассоциирована с семейством точных управлений $\nu^{(\tau)}$, индексированных параметром $\tau \in (0, T)$. Целесообразность, точность и устойчивость предложенной формулы реконструкции проиллюстрированы результатами численного моделирования.

В [220] рассматривается обратная задача теплопроводности определения неизвестного теплового источника, зависящего от времени, и неизвестной начальной температуры посредством наблюдения температуры в конечный момент времени и температурного профиля в одной фиксированной точке временного интервала. Доказано, что тепловой источник и начальная температура могут быть единственным образом определены по двум видам данных. Получены численные решения с помощью решения задачи теплопроводности с обратным ходом времени, а также двух численных задач для производных. Для решения задачи был выбран метод фундаментальных решений, комбинированный с дискретной тихоновской регуляризацией, а метод

радиально-базисных функций аппроксимации использован для получения устойчивых численных производных. Эффективность и точность предложенного метода продемонстрированы численными примерами.

Обратная задача определения температуры и температуропроводности, зависящей от времени, из различной дополнительной нелокальной информации, исследована в [120]. Эти нелокальные условия могут принимать форму внутренней или граничной энергии, или, для одномерного случая, как разность граничных температур или тепловой поток, таким образом, чтобы обеспечить единственность решения уравнения теплопроводности с неизвестным коэффициентом температуропроводности. Для численного решения обратной задачи используется метод Рисса–Галеркина с подходящими функциями. Представлены и обсуждены численные результаты.

В [72] исследуется обратная задача идентификации неизвестного теплового источника $H(t)$, зависящего от времени, для уравнения теплопроводности $u_t = (k(x)u_x)_x + F(x)H(t)$ с переменным коэффициентом и разделенными источниками вида $F(x)H(t)$ из дополнительного измерения температуры $h(t) = u(0, t)$ на левом конце стержня. Метод Фурье используется для иллюстрации сравнения задач идентификации теплового источника, зависящего от пространственной переменной $F(x)$ и от времени $H(t)$. Выведена явная формула для градиента Фреше функционала стоимости с помощью единственного решения подходящей сопряженной задачи. Для численного решения обратной задачи источника предлагается алгоритм сопряженных градиентов, основанный на формуле градиента функционала стоимости. Алгоритм проверен на численных примерах, связанных с реконструкцией непрерывных и разрывных тепловых источников $H(t)$ в том случае, когда тепло передается через неоднородные и композитные структуры. Представлен численный анализ алгоритма, примененного к обратным задачам определения источника в обычных для источника классах функций. Вычислительные результаты для выходных данных случайного шума показывают, как можно оценить число итераций для алгоритма сопряженных градиентов. Основанные на этом результаты показали, что это число итераций играет роль параметра регуляризации. Численные результаты иллюстрируют границы применимости предложенного алгоритма, а также его эффективность и точность.

В [103] рассматривается задача одновременного определения зависящей от времени теплопроводности и распределения температуры в одномерном уравнении теплопроводности для случая нелокального граничного условия и условия интегрального переопределения. Установлены условия существования и единственности классического решения рассматриваемой задачи. Представлен численный пример, использующий конечно-разностную схему Кранка–Николсон в комбинации с итерационным методом, продемонстрирована чувствительность этой схемы по отношению к шумовым данным переопределения.

Примеры неединственности решения обратных задач восстановления источника в уравнении приведены в [111]. Здесь обсуждены задачи для уравнений параболического, эллиптического и гиперболического типов. Дополнительная информация (переопределение) дана в виде условий финальных наблюдений.

Отметим также, что различные вопросы существования и единственности решения обратных задач были рассмотрены в [161, 25, 200, 93].

3. ЭЛЛИПТИЧЕСКИЙ СЛУЧАЙ

В комплексном банаховом пространстве E рассмотрим задачу нахождения функции $u(\cdot) \in C^2([0; T]; E)$ и элемента $p \in E$ из системы уравнений

$$\begin{cases} u''(t) = Au(t) + p, & 0 \leq t \leq T, \\ u(0) = u(T) = 0, \\ u(\theta) = u^\theta, \end{cases} \quad (3.1)$$

где число $\theta \in (0; T)$ фиксировано, A — замкнутый линейный оператор с плотной областью определения $D(A)$ в пространстве E , элемент $u^\theta \in E$ задан.

Предположим, что абстрактное дифференциальное уравнение в (3.1) имеет эллиптический тип. Это означает, что A является позитивным оператором.

Оператор A , действующий в банаховом пространстве E и имеющий плотную область определения, т.е. $\overline{D(A)} = E$, называется *позитивным*, если оператор $\lambda I + A$ имеет ограниченный обратный в E и выполнена оценка

$$\|(\lambda I + A)^{-1}\| \leq \frac{M}{1 + \lambda} \quad \text{для любого } \lambda \geq 0 \quad (3.2)$$

при некотором $1 \leq M < \infty$. Пусть $\psi(z)$ — аналитическая функция в окрестности $\sigma(A)$. Предположим, что $\psi(\cdot)$ удовлетворяет оценке

$$(1 + |z|)^\alpha |\psi(z)| \leq M$$

при некотором $0 < \alpha < +\infty$, $1 \leq M < +\infty$. Спектр $\sigma(A)$ оператора A есть подмножество множества G_ε^- и на его границе ∂G_ε^- резольвента $(\lambda I + A)^{-1}$ подчинена оценке (3.2). Тогда (см. [10, Сес. 5.1]) операторный интеграл Коши—Рисса

$$\psi(A) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G_\varepsilon^-} \psi(z)(zI + A)^{-1} dz, \quad (3.3)$$

сходится в операторной норме и определяет ограниченный линейный оператор $\psi(A)$, который является функцией A .

В частности, функция $\psi(z) = z^{-\alpha}$ определяет ограниченный оператор $A^{-\alpha}$ для любого $\alpha > 0$ (см. [213]). Равенство $A^\alpha = (A^{-\alpha})^{-1}$, $\alpha > 0$, определяет положительные степени оператора A . Операторы A^α , $\alpha > 0$, вообще говоря, не ограничены, но их области определения $D(A^\alpha)$ плотны в E .

Известно (см., например, [184]), что оператор $A^{1/2}$ имеет лучшие спектральные свойства, чем позитивный оператор A . В частности, оператор $\lambda I + \sqrt{A}$ имеет ограниченный обратный для любого комплексного числа λ с $\operatorname{Re} \lambda \geq 0$, причем выполнена оценка

$$\|(\lambda I + \sqrt{A})^{-1}\| \leq M(|\lambda| + 1)^{-1}, \quad \operatorname{Re} \lambda \geq 0,$$

для некоторого $M \geq 1$. Таким образом (см. [184]), оператор $-\sqrt{A}$ порождает аналитическую C_0 -полугруппу в банаховом пространстве E , т.е., выполняются следующие оценки с некоторыми постоянными $M, \delta > 0$:

$$\|e^{-t\sqrt{A}}\| \leq Me^{-\delta t}, \quad t \|\sqrt{A}e^{-t\sqrt{A}}\| \leq Me^{-\delta t}, \quad t > 0.$$

Задача (3.1) является обратной задачей с переопределением. Детальное описание такого класса задач можно найти в [157, 134, 135, 154, 155, 189]. Эта задача (3.1) в настоящей постановке была исследована Д. В. Орловским [135]. Здесь мы рассмотрим полудискретизацию и полную дискретизацию задачи (3.1).

Абстрактная задача Дирихле с позитивным оператором A

$$u''(t) = Au(t) + f(t), \quad t \in [0, T], \quad u(0) = u^0, \quad u(T) = u^T, \quad (3.4)$$

связана с обратной задачей (3.1) в смысле представления решения $u(\cdot)$ в (3.5).

Функция $u(\cdot)$ называется *решением задачи* (3.4) в *классическом смысле*, если выполнены следующие условия (см. [214]):

- (i) $u(\cdot)$ дважды непрерывно дифференцируема на промежутке $[0, T]$ (производная на концах отрезка понимается как соответствующая односторонняя производная);
- (ii) элемент $u(t)$ принадлежит $D(A)$ для любого $t \in [0, T]$ и функция $Au(\cdot)$ непрерывна на отрезке $[0, T]$;
- (iii) $u(\cdot)$ удовлетворяет уравнению и граничным условиям (3.4).

Легко показать (см. [114]), что $u(\cdot)$, определенная на $[0, T]$ соотношением

$$u(t) = (I - e^{-2T\sqrt{A}})^{-1} \left\{ \left(e^{-t\sqrt{A}} - e^{-(2T-t)\sqrt{A}} \right) u^0 + \left(e^{-(T-t)\sqrt{A}} - e^{-(T+t)\sqrt{A}} \right) u^T + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \left(e^{-(T-t)\sqrt{A}} - e^{-(T+t)\sqrt{A}} \right) (2\sqrt{A})^{-1} \int_0^T \left(e^{-(T-s)\sqrt{A}} - e^{-(T+s)\sqrt{A}} \right) f(s) ds \Big\} - \\
& - (2\sqrt{A})^{-1} \int_0^T \left(e^{-|t-s|\sqrt{A}} - e^{-(t+s)\sqrt{A}} \right) f(s) ds, \quad (3.5)
\end{aligned}$$

является единственным решением в $C([0, T]; E)$ задачи (3.4), если, например, $u^0, u^T \in D(A)$ и $Af(\cdot) \in C([0, T]; E)$ или $f'(\cdot) \in C([0, T]; E)$.

Теорема 3.1 (см. [135]). *Для любого $u^\theta \in D(A)$ существует единственное решение обратной задачи (3.1). Это решение дается формулой (3.5), где $u^0 = 0$, $u^T = 0$, и*

$$f(t) = - \left(I - e^{-2T\sqrt{A}} \right) \left(I - e^{-T\sqrt{A}} \right)^{-1} \left(I - e^{-\theta\sqrt{A}} \right)^{-1} \left(I - e^{-(T-\theta)\sqrt{A}} \right)^{-1} A u^\theta.$$

3.1. Дискретизация абстрактной эллиптической задачи. Полудискретная аппроксимация (3.4) – это граничная задача в банаховых пространствах E_n :

$$u_n''(t) = A_n u_n(t) + f_n(t), \quad t \in [0, T], \quad u_n(0) = u_n^0, \quad u_n(T) = u_n^T, \quad (3.6)$$

где операторы A_n строго позитивны, A_n и A согласованы, $u_n^0 \xrightarrow{\mathcal{P}} u^0$, $u_n^T \xrightarrow{\mathcal{P}} u^T$, а $f_n(\cdot) \xrightarrow{\mathcal{P}} f(\cdot)$ в подходящем смысле $\mathcal{P}$ -сходимости.

Мы здесь опишем также дискретизацию (3.6) по переменной t . Одна из простейших разностных схем — это

$$\begin{aligned}
\frac{U_n^{k+1} - 2U_n^k + U_n^{k-1}}{\tau_n^2} &= A_n U_n^k + \varphi_n^k, \quad k \in \left\{ 1, \dots, \left[\frac{T}{\tau_n} \right] - 1 \right\}, \\
U_n^0 &= u_n^0, \quad U_n^K = u_n^T,
\end{aligned} \quad (3.7)$$

где, например, для случая $f_n(\cdot) \in C([0, T]; E_n)$ можно положить

$$\varphi_n^k = f_n(k\tau_n), \quad k \in \{1, \dots, K-1\}, \quad K = \left[\frac{T}{\tau_n} \right],$$

а для случая $f_n(\cdot) \in L^1([0, T]; E_n)$ можно взять

$$\varphi_n^k = \frac{1}{2\tau_n} \int_{t_{k-1}}^{t_{k+1}} f_n(s) ds, \quad t_k = k\tau_n, \quad k \in \{1, \dots, K-1\}.$$

Решение (3.7) дается формулой

$$\begin{aligned}
U_n^k &= \left(I_n - R_n^{2K} \right)^{-1} \left(R_n^k - R_n^{2K-k} \right) \left(u_n^0 + \sum_{j=1}^{K-1} B_n^{-1} R_n^j \left(I_n + \tau_n B_n \right) \left(2I_n + \tau_n B_n \right)^{-1} \varphi_n^j \tau_n \right) - \\
&- \sum_{j=1}^{K-1} B_n^{-1} R_n^{|k-j|} \left(I_n + \tau_n B_n \right) \left(2I_n + \tau_n B_n \right)^{-1} \varphi_n^j \tau_n - \\
&- \left(I_n - R_n^{2K} \right)^{-1} \left(R_n^{K-k} - R_n^{K+k} \right) \left(u_n^T + \sum_{j=1}^{K-1} B_n^{-1} R_n^{K-j} \left(I_n + \tau_n B_n \right) \left(2I_n + \tau_n B_n \right)^{-1} \varphi_n^j \tau_n \right) \quad (3.8)
\end{aligned}$$

(см. [10]), где

$$R_n = \left(I_n + \tau_n B_n \right)^{-1}, \quad B_n = \frac{1}{2} \left(A_n \tau_n + \sqrt{A_n} \sqrt{\tau_n^2 A_n + 4} \right).$$

3.2. Сходимость решений. Рассмотрим задачу (3.1). Функция $u(\cdot)$, которая задана соотношением (3.5), удовлетворяет уравнению (3.1), в котором нужно положить $f(t) \equiv p$, $u^0 = 0$, $u^T = 0$. В этом случае, следуя [135], можно переписать (3.5) в виде

$$u(t) = -\left(I - e^{-2T\sqrt{A}}\right)^{-1} A^{-1} \left(I - e^{-t\sqrt{A}}\right) \left(I - e^{-T\sqrt{A}}\right) \left(I - e^{-(T-t)\sqrt{A}}\right) p.$$

Таким образом, элемент p может быть получен по формуле

$$p = -\left(I - e^{-2T\sqrt{A}}\right) \left(I - e^{-T\sqrt{A}}\right)^{-1} \left(I - e^{-\theta\sqrt{A}}\right)^{-1} \left(I - e^{-(T-\theta)\sqrt{A}}\right)^{-1} A u^\theta.$$

Подставляя это в предыдущую формулу, получаем следующее представление решения обратной задачи (3.1):

$$u(t) = \left(I - e^{-t\sqrt{A}}\right) \left(I - e^{-\theta\sqrt{A}}\right)^{-1} \left(I - e^{-(T-t)\sqrt{A}}\right) \left(I - e^{-(T-\theta)\sqrt{A}}\right)^{-1} u^\theta. \quad (3.9)$$

Аналогично, обратная задача полудискретной аппроксимации определяется следующим образом:

$$\begin{cases} u_n''(t) = A_n u_n(t) + p_n, & 0 \leq t \leq T, \\ u_n(0) = u_n(T) = 0, \\ u_n(\theta) = u_n^\theta, \end{cases} \quad (3.10)$$

где A_n , A согласованы и $u_n^\theta \xrightarrow{\mathcal{P}} u^\theta$. Решение обратной задачи (3.10) дается следующими формулами:

$$\begin{cases} u_n(t) = \left(I_n - e^{-t\sqrt{A_n}}\right) \left(I_n - e^{-\theta\sqrt{A_n}}\right)^{-1} \left(I_n - e^{-(T-t)\sqrt{A_n}}\right) \left(I_n - e^{-(T-\theta)\sqrt{A_n}}\right)^{-1} u_n^\theta, \\ p_n = -\left(I_n - e^{-2T\sqrt{A_n}}\right) \left(I_n - e^{-T\sqrt{A_n}}\right)^{-1} \left(I_n - e^{-\theta\sqrt{A_n}}\right)^{-1} \left(I_n - e^{-(T-\theta)\sqrt{A_n}}\right)^{-1} A_n u_n^\theta. \end{cases} \quad (3.11)$$

Теперь рассмотрим дискретизированную по времени обратную задачу:

$$\begin{cases} \frac{U_n^{k+1} - 2U_n^k + U_n^{k-1}}{\tau_n^2} = A_n U_n^k + \tilde{p}_n, & k \in \left\{1, \dots, \left[\frac{T}{\tau_n}\right] - 1\right\}, \\ U_n^0 = 0, \quad U_n^K = 0, \quad K = \left[\frac{T}{\tau_n}\right], \\ U_n^{k(n)} = u_n^\theta, \quad k(n)\tau_n = \theta, \end{cases} \quad (3.12)$$

где A_n , A согласованы, а $u_n^\theta \xrightarrow{\mathcal{P}} u^\theta$. Пара $(U_n^k, \tilde{p}_n)$, удовлетворяющая всем требованиям (3.12), называется решением обратной задачи (3.12). Для того чтобы решить обратную задачу (3.12), можно использовать соотношение (3.8), в котором нужно положить

$$u_n^0 = 0, \quad u_n^T = 0, \quad \varphi_n^k = \tilde{p}_n.$$

Получаем

$$\begin{aligned} U_n^k &= \left(I_n - R_n^{2K}\right)^{-1} \left(R_n^k - R_n^{2K-k}\right) \sum_{j=1}^{K-1} B_n^{-1} R_n^j \left(I_n + \tau_n B_n\right) \left(2I_n + \tau_n B_n\right)^{-1} \tau_n \tilde{p}_n - \\ &- \sum_{j=1}^{K-1} B_n^{-1} R_n^{|k-j|} \left(I_n + \tau_n B_n\right) \left(2I_n + \tau_n B_n\right)^{-1} \tau_n \tilde{p}_n + \left(I_n - R_n^{2K}\right)^{-1} \left(R_n^{K-k} - R_n^{K+k}\right) \times \\ &\times \sum_{j=1}^{K-1} B_n^{-1} R_n^{K-j} \left(I_n + \tau_n B_n\right) \left(2I_n + \tau_n B_n\right)^{-1} \tau_n \tilde{p}_n. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Теперь

$$\sum_{j=1}^{K-1} R_n^j = \left(R_n - R_n^K\right) \left(I_n - R_n\right)^{-1}, \quad \sum_{j=1}^{K-1} R_n^{K-j} = \left(R_n - R_n^K\right) \left(I_n - R_n\right)^{-1},$$

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{K-1} R_n^{|k-j|} &= \sum_{j=1}^{k-1} R_n^{k-j} + \sum_{j=k}^{K-1} R_n^{j-k} = (R_n - R_n^k)(I_n - R_n)^{-1} + \\ &+ (I_n - R_n^{K-k})(I_n - R_n)^{-1} = (I_n + R_n - R_n^k - R_n^{K-k})(I_n - R_n)^{-1}. \end{aligned}$$

Подставляя результаты в (3.13), имеем

$$\begin{aligned} U_n^k &= (I_n - R_n^{2K})^{-1} (I_n - R_n^K) (R_n^{k+1} + R_n^k + R_n^{K-k+1} + R_n^{K-k} - \\ &- R_n^{K+1} - R_n - R_n^K - I_n) B_n^{-1} (I_n - R_n)^{-1} (I_n + \tau_n B_n) (2I_n + \tau_n B_n)^{-1} \tau_n \tilde{p}_n. \end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что

$$\begin{aligned} R_n^{k+1} + R_n^k + R_n^{K-k+1} + R_n^{K-k} - R_n^{K+1} - R_n - R_n^K - I_n &= \\ &= -(I_n - R_n^k)(I_n - R_n^{K-k})(I_n + R_n). \end{aligned}$$

Следовательно, соотношение (3.13) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} U_n^k &= -(I_n - R_n^{2K})^{-1} (I_n - R_n^K) (I_n - R_n^k) (I_n - R_n^{K-k}) \times \\ &\times (I_n + R_n) B_n^{-1} (I_n - R_n)^{-1} (I_n + \tau_n B_n) (2I_n + \tau_n B_n)^{-1} \tau_n \tilde{p}_n. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Для $k = k(n)$ имеем

$$U_n^k = u_n^\theta.$$

Из (3.14) получаем элемент $\tilde{p}_n$ в следующем виде:

$$\begin{aligned} \tilde{p}_n &= -\frac{1}{\tau_n} (2I_n + \tau_n B_n) (I_n + \tau_n B_n)^{-1} (I_n - R_n) B_n (I_n + R_n)^{-1} \times \\ &\times (I_n - R_n^{K-k(n)})^{-1} (I_n - R_n^{k(n)})^{-1} (I_n - R_n^K)^{-1} (I_n - R_n^{2K}) u_n^\theta. \end{aligned}$$

Наконец, подставляя $\tilde{p}_n$ в (3.14), получаем решение обратной задачи (3.12):

$$\begin{cases} U_n^k = (I_n - R_n^k) (I_n - R_n^{k(n)})^{-1} (I_n - R_n^{K-k}) (I_n - R_n^{K-k(n)})^{-1} u_n^\theta, \\ \tilde{p}_n = -(I_n - R_n^{2K}) (I_n - R_n^K)^{-1} (I_n - R_n^{k(n)})^{-1} (I_n - R_n^{K-k(n)})^{-1} (I_n + \tau_n B_n)^{-1} B_n^2 u_n^\theta. \end{cases} \quad (3.15)$$

3.3. Сходимость в простейшем случае. Предположим, что операторы A_n равномерно позитивны, т.е. так же, как в (3.2), выполняются следующие оценки:

$$\left\| (\lambda I_n + A_n)^{-1} \right\| \leq \frac{M}{1 + \lambda} \quad \text{для любых } \lambda \geq 0, n \in \mathbb{N} \quad (3.16)$$

при некотором $1 \leq M < \infty$.

Теорема 3.2. *Предположим, что резольвенты $(\lambda I - A)^{-1}$, $(\lambda I_n - A_n)^{-1}$ компактны, выполнены (3.16) и (3.2) и $\Delta_{cc} \neq \emptyset$. Тогда решения задач (3.10) существуют для почти всех n и сходятся к решению задачи (3.1), т.е.*

$$u_n(t) \xrightarrow{\mathcal{P}} u(t) \quad \text{равномерно по } t \in [0, T] \text{ и } p_n \xrightarrow{\mathcal{P}} p \text{ при } n \in \mathbb{N},$$

если только $A_n u_n^\theta \xrightarrow{\mathcal{P}} A u^\theta$.

Доказательство. Из (3.3) получаем, что выполнены условия (A), (B₁) для операторов $\sqrt{A_n}$, $\sqrt{A}$ (см. [12]). Из (3.3) следует, что оператор $A^{-1/2}$ компактен, если $(\lambda I - A)^{-1}$ компактен при некотором λ . Более того, из (3.3) и $\Delta_{cc} \neq \emptyset$ следует, что

$$(\lambda I_n - \sqrt{A_n})^{-1} \xrightarrow{\mathcal{PP}} (\lambda I - \sqrt{A})^{-1} \quad \text{компактно}$$

при некотором λ и, следовательно,

$$e^{-t\sqrt{A_n}} \xrightarrow{\mathcal{PP}} e^{-t\sqrt{A}} \quad \text{компактно при } t > 0,$$

как было показано в [158]. Отсюда получаем, следуя теореме 2.7, что

$$I_n - e^{-t\sqrt{A_n}} \xrightarrow{\mathcal{PP}} I - e^{-t\sqrt{A}} \quad \text{собственно и устойчиво при } t > 0,$$

так как $\mathcal{N}(I - e^{-t\sqrt{A}}) = \{0\}$ (см. [19]). Тогда сходимость

$$\begin{aligned} p_n &= -\left(I_n - e^{-2\sqrt{A_n}T}\right)\left(I_n - e^{-\sqrt{A_n}T}\right)^{-1}\left(I_n - e^{-\sqrt{A_n}\theta}\right)^{-1}\left(I_n - e^{-\sqrt{A_n}(T-\theta)}\right)^{-1}A_n u_n^\theta \xrightarrow{\mathcal{P}} \\ &\xrightarrow{\mathcal{P}} p = -\left(I - e^{-2\sqrt{A}T}\right)\left(I - e^{-\sqrt{A}T}\right)^{-1}\left(I - e^{-\sqrt{A}\theta}\right)^{-1}\left(I - e^{-\sqrt{A}(T-\theta)}\right)^{-1}Au^\theta \end{aligned}$$

следует из теоремы 2.8. Равномерная сходимость $u_n(t) \xrightarrow{\mathcal{P}} u(t)$ по $t \in [0, T]$ следует аналогичным образом из представлений (3.9) и (3.11). Теорема доказана. $\square$

Теорема 3.3. *Предположим, что резольвенты $(\lambda I - A)^{-1}$, $(\lambda I_n - A_n)^{-1}$ компактны, а также выполнены условия (3.16), (3.2) и $\Delta_{cc} \neq \emptyset$. Тогда решения задач (3.12) существуют для почти всех n и сходятся к решению задачи (3.1), т.е.,*

$$U_n(t) \xrightarrow{\mathcal{P}} u(t) \quad \text{равномерно по } t \in [0, T] \text{ и } \tilde{p}_n \xrightarrow{\mathcal{P}} p \text{ при } n \in \mathbb{N},$$

когда $A_n u_n^\theta \xrightarrow{\mathcal{P}} Au^\theta$.

Доказательство. Из [186, Sec. 7.4] следует, что операторы B_n равномерно по n порождают аналитические C_0 -полугруппы, т.е.,

$$\left\| (I_n + \tau_n B_n)^{-k} \right\| \leq M, \quad \left\| k\tau_n B_n (I_n + \tau_n B_n)^{-k} \right\| \leq M, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (3.17)$$

С другой стороны, по теореме Лебега о сходимости под знаком интеграла имеем

$$B_n^{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G_\varepsilon^-} \frac{1}{\frac{1}{2}(\tau_n \rho + \sqrt{\rho^2 + \tau_n^2 \rho + 4})} \left(\rho I_n - A_n \right)^{-1} d\rho \xrightarrow{\mathcal{PP}} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G_\varepsilon^-} \frac{1}{\sqrt{\rho}} (\rho I - A)^{-1} d\rho = A^{-1/2}$$

при $\tau_n \rightarrow 0$ и $n \rightarrow \infty$. Более того,

$$B_n^{-1} \xrightarrow{\mathcal{PP}} A^{-1/2} \quad \text{компактно.}$$

Следовательно, из (3.17) и теоремы 2.14 следует, что

$$R_n^{k_n} \xrightarrow{\mathcal{PP}} e^{-t\sqrt{A}} \quad \text{компактно при } k_n \tau_n = t > 0, \tau_n \rightarrow 0, n \rightarrow \infty.$$

Отсюда получаем, следуя теореме 2.7, что

$$I_n - R_n^{k(n)} \xrightarrow{\mathcal{PP}} I - e^{-t\sqrt{A}} \quad \text{собственно и устойчиво при } t > 0,$$

так как $\mathcal{N}(I - e^{-t\sqrt{A}}) = \{0\}$ (см. [19]). Используя тождество

$$A_n = B_n^2 (I_n + \tau_n B_n)^{-1},$$

получим

$$\left(I_n + \tau_n B_n \right)^{-1} B_n^2 u_n^\theta \xrightarrow{\mathcal{P}} Au^\theta,$$

если

$$A_n u_n^\theta \xrightarrow{\mathcal{P}} Au^\theta, \quad n \rightarrow \infty.$$

Теперь ясно, что

$$U_n(t) \xrightarrow{\mathcal{P}} u(t) \quad \text{равномерно по } t \in [0, T] \text{ и } \tilde{p}_n \xrightarrow{\mathcal{P}} p$$

следует из теорем 2.7, 2.8 и представлений (3.15) для решений (3.12). Теорема доказана. $\square$

3.4. Сходимость для случая гладкой операторной функции. Рассмотрим обратную задачу (3.1) в общей форме:

$$\begin{cases} u''(t) = Au(t) + \Phi(t)p, & 0 \leq t \leq T, \\ u(0) = u(T) = 0, \\ u(\theta) = u^\theta, & 0 < \theta < T, \end{cases} \quad (3.18)$$

где $\Phi(\cdot) \in C^1([0, T]; B(E))$. Пара $(u(\cdot), p)$ называется решением обратной задачи (3.18), если $u(\cdot)$ дважды непрерывно дифференцируема на $[0, T]$, $u(t) \in D(A)$ при всех $t \in [0, T]$, $Au(\cdot) \in C([0, T]; E)$ и выполнены все условия (3.18). Полудискретная аппроксимация обратной задачи (3.18) определяется обратными задачами

$$\begin{cases} u_n''(t) = A_n u_n(t) + \Phi_n(t)p_n, & 0 \leq t \leq T, \\ u_n(0) = u_n(T) = 0, \\ u_n(\theta) = u_n^\theta, & 0 < \theta < T, \end{cases} \quad (3.19)$$

где

$$\begin{aligned} \Phi_n(\cdot) &\in C^1([0, T]; B(E_n)), \\ \Phi_n(t) &\xrightarrow{\mathcal{PP}} \Phi(t), \quad \Phi_n'(t) \xrightarrow{\mathcal{PP}} \Phi'(t) \quad \text{равномерно по } t \in [0, T], \\ u_n^\theta &\xrightarrow{\mathcal{P}} u^\theta, \quad A_n u_n^\theta \xrightarrow{\mathcal{P}} Au^\theta, \quad n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Пара $(u_n(\cdot), p_n)$ называется решением обратной задачи (3.19), если $u_n(\cdot)$ дважды непрерывно дифференцируема на $[0, T]$ и выполнены условия (3.19).

В отличие от п. 3.3, решение обратной задачи (3.18) может не существовать. Поэтому мы предположим, что обратная задача (3.18) разрешима. Достаточные условия однозначной разрешимости (3.18) в гильбертовом пространстве см., например, в [135].

Теорема 3.4. *Предположим, что*

$$\Phi(\cdot) \in C^1([0, T]; B(E)), \quad \Phi_n(\cdot) \in C^1([0, T]; B(E_n)),$$

оператор $\Phi(\theta)$ обратим, т.е., $\Phi^{-1}(\theta) \in B(E)$, резольвенты

$$(\lambda I_n - A_n)^{-1}, \quad (\lambda I - A)^{-1}$$

компактны, выполнены условия (3.16) и (3.2),

$$\begin{aligned} \Phi_n(\theta) &\xrightarrow{\mathcal{PP}} \Phi(\theta) \quad \text{устойчиво,} \\ \Phi_n'(t) &\xrightarrow{\mathcal{PP}} \Phi'(t) \quad \text{равномерно по } t \in [0, T] \end{aligned}$$

и $\Delta_{cc} \neq \emptyset$. Предположим также, что задача (3.18) имеет единственное решение при любом $u^\theta \in D(A)$. Тогда существуют решения задач (3.19) для почти всех n и они сходятся к решению задачи (3.18), т.е.,

$$\begin{aligned} u_n(t) &\xrightarrow{\mathcal{P}} u(t) \quad \text{равномерно по } t \in [0, T] \quad \text{и} \quad p_n \xrightarrow{\mathcal{P}} p \quad \text{при } n \in \mathbb{N} \\ A_n u_n^\theta &\xrightarrow{\mathcal{P}} Au^\theta. \end{aligned}$$

Доказательство. Следуя [135, Lemma 1], видим, что задача (3.18) может быть преобразована к виду

$$Ip - Kp = -\Phi^{-1}(\theta)Au(\theta) \quad (3.20)$$

с компактным оператором

$$K = \frac{1}{2} \Phi(\theta)^{-1} \left(I - e^{-2\sqrt{A}T} \right)^{-1} \left(- \int_0^T e^{-\sqrt{A}(2T-\theta-s)} \Phi'(s) ds - \int_0^\theta e^{-\sqrt{A}(2T-\theta+s)} \Phi'(s) ds + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{\theta}^T e^{-\sqrt{A}(2T+\theta-s)} \Phi'(s) ds + \int_0^{\theta} e^{-\sqrt{A}(\theta-s)} \Phi'(s) ds - \int_{\theta}^T e^{-\sqrt{A}(s-\theta)} \Phi'(s) ds + \\
& + \int_0^T e^{-\sqrt{A}(\theta+s)} \Phi'(s) ds + 2 \left(e^{-\sqrt{A}(T-\theta)} - e^{-\sqrt{A}(T+\theta)} \right) \Phi(T) + 2 \left(e^{-\sqrt{A}\theta} - e^{-\sqrt{A}(2T-\theta)} \right) \Phi(0) \Big). \quad (3.21)
\end{aligned}$$

Задача (3.20) аппроксимируется уравнениями

$$I_n p_n - K_n p_n = -\Phi_n^{-1}(\theta) A_n u_n(\theta). \quad (3.22)$$

В нашей постановке задачи (3.22) эквивалентны задачам (3.19). Мы знаем, что

$$e^{-t\sqrt{A_n}} \xrightarrow{\mathcal{PP}} e^{-t\sqrt{A}} \quad \text{компактно при } t > 0.$$

Таким образом, ясно, что

$$A_n^{-\alpha} \int_a^b A_n^{\alpha} e^{-s\sqrt{A_n}} g_n(s) ds = \int_a^b e^{-s\sqrt{A_n}} g_n(s) ds \xrightarrow{\mathcal{PP}} \int_a^b e^{-s\sqrt{A}} g(s) ds \quad \text{компактно,}$$

если

$$g_n(s) \xrightarrow{\mathcal{PP}} g(s) \quad \text{равномерно по } s \in [a, b].$$

Поэтому

$$K_n \xrightarrow{\mathcal{PP}} K \quad \text{компактно}$$

и, следовательно, по теореме 2.7

$$I_n - K_n \xrightarrow{\mathcal{PP}} I - K \quad \text{собственно.}$$

По нашему предположению, $\mathcal{N}(I - K) = \{0\}$, поэтому по теореме 2.8 имеем

$$(I_n - K_n)^{-1} \xrightarrow{\mathcal{PP}} (I - K)^{-1}, \quad n \rightarrow \infty.$$

Решение $u(\cdot)$ обратной задачи (3.18) дается формулой (3.5) с

$$u^0 = u^T = 0, \quad f(t) = \Phi(t)p,$$

т.е.,

$$\begin{aligned}
u(t) = \left(I - e^{-2T\sqrt{A}} \right)^{-1} \Bigg\{ & \left(e^{-(T-t)\sqrt{A}} - e^{-(T+t)\sqrt{A}} \right) \left(2\sqrt{A} \right)^{-1} \int_0^T \left(e^{-(T-s)\sqrt{A}} - e^{-(T+s)\sqrt{A}} \right) \Phi(s) p ds \Bigg\} - \\
& - \left(2\sqrt{A} \right)^{-1} \int_0^T \left(e^{-|t-s|\sqrt{A}} - e^{-(t+s)\sqrt{A}} \right) \Phi(s) p ds, \quad (3.23)
\end{aligned}$$

где

$$p = -(I - K)^{-1} \Phi^{-1}(\theta) A u^{\theta}.$$

Теперь ясно, что сходимости

$$u_n(t) \xrightarrow{\mathcal{P}} u(t) \quad \text{равномерно по } t \in [0, T], \quad p_n \xrightarrow{\mathcal{P}} p$$

вытекают из следующих фактов:

$$e^{-t\sqrt{A_n}} \xrightarrow{\mathcal{P}} e^{-t\sqrt{A}} \quad \text{компактно по } t \in [0, T],$$

$$\Phi_n(\theta) \xrightarrow{\mathcal{PP}} \Phi(\theta) \quad \text{устойчиво,}$$

$$\Phi'_n(t) \xrightarrow{\mathcal{PP}} \Phi'(t) \quad \text{равномерно по } t \in [0, T],$$

$$(\sqrt{A_n})^{-1} \xrightarrow{\mathcal{PP}} (\sqrt{A})^{-1},$$

$$A_n u_n^\theta \xrightarrow{\mathcal{P}} A u^\theta.$$

Теорема доказана. $\square$

Рассмотрим следующие обратные задачи:

$$\begin{cases} \frac{U_n^{k+1} - 2U_n^k + U_n^{k-1}}{\tau_n^2} = A_n U_n^k + \Phi_n(t) \tilde{p}_n, & 0 \leq t \leq T, \\ U_n^0 = U_n^K = 0, \\ U_n^{k(n)} = u_n^\theta, & k(n)\tau_n = \theta, \end{cases} \quad (3.24)$$

где

$$\begin{aligned} \Phi_n(\cdot) &\in C^2([0, T]; B(E_n)), \\ \Phi_n(t) &\xrightarrow{\mathcal{PP}} \Phi(t), \quad \Phi'_n(t) \xrightarrow{\mathcal{PP}} \Phi'(t), \quad \Phi''_n(t) \xrightarrow{\mathcal{PP}} \Phi''(t) \quad \text{равномерно по } t \in [0, T], \\ A_n u_n^\theta &\xrightarrow{\mathcal{P}} A u^\theta, \quad n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Теорема 3.5 (см. [139]). *Предположим, что*

$$\Phi(\cdot) \in C^2([0, T]; B(E)), \quad \Phi_n(\cdot) \in C^2([0, T]; B(E_n)),$$

оператор $\Phi(\theta)$ обратим, т.е., $\Phi^{-1}(\theta) \in B(E)$, резольвенты

$$(\lambda I_n - A_n)^{-1}, \quad (\lambda I - A)^{-1}$$

компактны, выполнены условия (3.16) и (3.2),

$$\begin{aligned} \Phi_n(\theta) &\xrightarrow{\mathcal{PP}} \Phi(\theta) \quad \text{устойчиво,} \\ \Phi'_n(t) &\xrightarrow{\mathcal{PP}} \Phi'(t), \quad \Phi''_n(t) \xrightarrow{\mathcal{PP}} \Phi''(t) \quad \text{равномерно по } t \in [0, T] \end{aligned}$$

и $\Delta_{cc} \neq \emptyset$. Предположим также, что задача (3.18) имеет единственное решение при любом $u^\theta \in D(A)$. Тогда существуют решения задач (3.24) для почти всех n и они сходятся к решению задачи (3.18), т.е.

$$U_n(t) \xrightarrow{\mathcal{P}} u(t) \quad \text{равномерно по } t \in [0, T], \quad \tilde{p}_n \xrightarrow{\mathcal{P}} p, \quad n \in \mathbb{N},$$

когда $A_n u_n^\theta \xrightarrow{\mathcal{P}} A u^\theta$.

4. АППРОКСИМАЦИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ—БИЦАДЗЕ—САМАРСКОГО ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

В [139] для комплексного банахова пространства E мы рассматривали задачу нахождения функции $u(\cdot) \in C^2([0, T]; E) \cap C([0, T]; D(A))$ и элемента $p \in E$, удовлетворяющих системе уравнений

$$\begin{cases} u''(t) = A u(t) + p, & 0 \leq t \leq T, \\ u(0) = x, \\ u(T) = \sum_{i=1}^L k_i u(\tau_i) + y, \\ u(\theta) = z, \end{cases} \quad (4.1)$$

где $\{\tau_i\}$ — последовательность различных чисел из интервала $(0, T)$, число $\theta \in (0, T)$ фиксировано, коэффициенты $\{k_i\}$ вещественны, A — линейный замкнутый оператор с плотной областью определения $D(A)$ в пространстве E , элемент $z \in D(A)$ задан.

Мы предполагаем, что дифференциальное уравнение в (4.1) имеет эллиптический тип. Это означает, что оператор A позитивен: все неположительные числа принадлежат его резольвентному множеству и для некоторого $M > 0$ выполняется оценка (3.2).

4.1. Решение прямой задачи.

Обратная задача (4.1) связана с прямой задачей

$$\begin{cases} u''(t) = Au(t) + f(t), & 0 \leq t \leq T, \\ u(0) = x, \\ u(T) = \sum_{i=1}^L k_i u(\tau_i) + y. \end{cases} \quad (4.2)$$

Таким образом, решение задачи (4.2) связано с задачей с обычными условиями Дирихле

$$\begin{cases} u''(t) = Au(t) + f(t), & 0 \leq t \leq T, \\ u(0) = f_1, \\ u(T) = f_2. \end{cases} \quad (4.3)$$

Функция Грина этой задачи имеет вид

$$G(t, s) = \frac{1}{2} A^{-1/2} (I - V(2T))^{-1} [V(t + s) - V(|t - s|) + V(2T - t - s) - V(2T - |t - s|)]. \quad (4.4)$$

При выполнении условий

$$f_1, f_2 \in D(A), \quad f \in C^\alpha([0; T], X) \cap C([0; T], D(A)), \quad 0 < \alpha \leq 1$$

решение задачи (4.3) существует, единственно и дается формулой (см. [115, 116, 117])

$$u(t) = (I - V(2T))^{-1} [(V(t) - V(2T - t))f_1 + (V(T - t) - V(T + t)f_2)] + \int_0^T G(t, s)f(s) ds. \quad (4.5)$$

Вопрос разрешимости задачи (4.2) тесно связан с распределением нулей целой функции

$$\varphi(z) = 1 - e^{-2Tz} - \sum_{i=1}^L k_i (e^{-(T-\tau_i)z} - e^{-(T+\tau_i)z}), \quad (4.6)$$

которая называется *характеристической функцией* задачи (4.2).

Теорема 4.1. Пусть $x, y \in D(A)$, $f \in C^\alpha([0; T], X) \cap C([0; T], D(A))$, $0 < \alpha \leq 1$, а характеристическая функция (4.6) не имеет нулей в полуплоскости $\operatorname{Re} z > 0$. Тогда решение задачи (4.2) существует и единственно.

Доказательство. Используя формулу (4.5) и граничные условия (4.2), мы получаем уравнение для неизвестного элемента $u(T) \in D(A)$:

$$\begin{aligned} u(T) = \sum_{i=1}^L k_i \left\{ (I - V(2T))^{-1} [(V(\tau_i) - V(2T - \tau_i))x + \right. \\ \left. + (V(T - \tau_i) - V(T + \tau_i))u(T)] + \int_0^T G(\tau_i, s)f(s)ds \right\} + y. \end{aligned}$$

Умножая полученное уравнение на $I - V(2T)$, мы получаем следующее уравнение:

$$Bu(T) = g, \quad (4.7)$$

где

$$\begin{aligned} B = I - V(2T) - \sum_{i=1}^L k_i (V(T - \tau_i) - V(T + \tau_i)), \\ g = \sum_{i=1}^L k_i \left\{ (V(\tau_i) - V(2T - \tau_i))x + (I - V(2T)) \int_0^T G(\tau_i, s)f(s)ds \right\} + (I - V(2T))y. \end{aligned}$$

Поскольку полугруппа $V(T)$ коммутирует с оператором A , элемент $u(T)$ принадлежит $D(A)$ тогда и только тогда, когда $g \in D(A)$. Таким образом, разрешимость задачи (4.2) сводится к разрешимости уравнения (4.7).

Известно, что спектр оператора $A^{1/2}$ расположен в секторе комплексной плоскости

$$S = \{z \in C : |\arg(z)| < \theta\},$$

где $0 < \theta < \pi/2$.

Поскольку функция $\varphi_1(z) = \varphi(z) - 1$ экспоненциально убывает в секторе S на бесконечности, в силу операторного исчисления для секториальных операторов, оператор B может быть выражен интегралом Данфорда

$$B = I + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \varphi_1(z)(zI - A^{1/2})^{-1} dz,$$

где Γ — путь, лежащий в секторе S и охватывающий спектр оператора $A^{1/2}$ (см. [45]).

Имеем $\varphi(z) \rightarrow 1$ при $z \rightarrow \infty$, $z \in S$. Поэтому если эта функция не равна нулю в секторе S , то функция

$$\varphi_2(z) = -\frac{\varphi_1(z)}{\varphi(z)}$$

экспоненциально убывает в секторе S на бесконечности. Пусть

$$B_1 = I + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \varphi_2(z)(zI - A^{1/2})^{-1} dz.$$

Из равенства $\varphi(z) = 1 + \varphi_1(z)$ имеем

$$\begin{aligned} BB_1 &= B_1B = I + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \left(\varphi_1(z) + \varphi_2(z) + \varphi_1(z)\varphi_2(z) \right) (zI - A^{1/2})^{-1} dz = \\ &= I + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \left[\varphi_1(z) - \frac{\varphi_1(z)}{\varphi(z)} - \frac{\varphi_1^2(z)}{\varphi(z)} \right] (zI - A^{1/2})^{-1} dz = \\ &= I + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \varphi_1(z) \left[\frac{\varphi(z) - 1 - \varphi_1(z)}{\varphi(z)} \right] (zI - A^{1/2})^{-1} dz = I. \end{aligned}$$

Значит, оператор B^{-1} существует и $B^{-1} = B_1$. Теорема 4.1 доказана. $\square$

Расположение нулей характеристической функции $\varphi(z)$ требует специального изучения. Мы рассмотрим подробно только случай $n = 1$. Покажем, что в случае $|k_1| \leq 1$ все нули характеристической функции лежат на мнимой оси.

Действительно,

$$\begin{aligned} \varphi(z) &= 1 - e^{-2Tz} - k_1 \left(e^{-(T-\tau_1)z} - e^{-(T+\tau_1)z} \right) = \\ &= e^{-2Tz} \left(e^{2Tz} - 1 - k_1 e^{(T+\tau_1)z} + k_1 e^{(T-\tau_1)z} \right). \end{aligned}$$

Пусть $\beta = T/\tau_1$; тогда после замены переменной $y = e^{\tau_1 z}$ имеем

$$\varphi(z) = e^{-2Tz} \left(y^{2\beta} - 1 - k_1 y^{\beta+1} + k_1 y^{\beta-1} \right).$$

Для переменной y получаем следующее уравнение:

$$y^{2\beta} - 1 - k_1 y^{\beta+1} + k_1 y^{\beta-1} = 0. \quad (4.8)$$

Покажем, что для $|k_1| \leq 1$ все решения уравнения (4.8) расположены на единичной окружности. Действительно, из уравнения (4.8) следует, что

$$\begin{aligned} y^{2\beta} - k_1 y^{\beta+1} &= 1 - k_1 y^{\beta-1}, \\ y^{\beta+1} (y^{\beta-1} - k_1) &= 1 - k_1 y^{\beta-1}, \end{aligned}$$

$$\frac{1 - k_1 y^{\beta-1}}{y^{\beta-1} - k_1} = y^{\beta+1}.$$

Когда $k_1 = 1$, из уравнения следует, что $y^{\beta+1} = -1$, и если $k_1 = -1$, мы получаем $y^{\beta+1} = 1$. Поэтому достаточно рассмотреть случай $|k_1| < 1$. Предположим, что $|y| > 1$; тогда $|y^{\beta-1}| > 1$. Из теории аналитических функций известно, что дробно-линейная функция

$$w = \frac{1 - k_1 z}{z - k_1}, \quad |k_1| < 1,$$

отображает внешнюю область единичного круга в его внутренность и наоборот. Следовательно, $|y^{\beta+1}| < 1$, но тогда $|y| < 1$. Получаем противоречие. Если $|y| < 1$, то $|y^{\beta-1}| < 1$, и, используя то же самое свойство дробно-линейной функции w , получаем неравенство $|y^{\beta+1}| > 1$. Значит, $|y| > 1$; снова получаем противоречие. Итак, $|y| = 1$, но тогда все значения $z = (\text{Ln } y)/\tau_1$ образуют множество, лежащее на мнимой оси.

Следствие 4.1. Пусть выполнены условия

$$\begin{aligned} x, y \in D(A), \quad f \in C^\alpha([0; T], X) \cap C([0; T], D(A)), \\ 0 < \alpha \leq 1, \quad n = 1, \quad |k_1| \leq 1. \end{aligned}$$

Тогда решение задачи (4.2) существует и единственно.

Для самосопряженного положительно определенного оператора A ситуация упрощается. Здесь мы можем использовать преимущество спектрального разложения оператора

$$A^{1/2} = \int_{\varepsilon}^{+\infty} \lambda dE_\lambda,$$

где $\varepsilon > 0$ и E_λ является спектральным разложением единицы оператора $A^{1/2}$. Согласно операторному исчислению самосопряженных операторов,

$$B = \int_{\varepsilon}^{+\infty} \varphi(\lambda) dE_\lambda,$$

где $\varphi(\lambda)$ является характеристической функцией (4.6).

Поскольку $\varphi(\lambda) \rightarrow 1$ при $\lambda \rightarrow +\infty$, то для разрешимости (4.7) достаточно, чтобы характеристическая функция не обращалась в нуль на положительной полуоси. В этом случае оператор B имеет обратный на всем пространстве E и

$$B^{-1} = \int_{\varepsilon}^{+\infty} \varphi^{-1}(\lambda) dE_\lambda.$$

Следствие 4.2. Пусть E — гильбертово пространство, оператор A самосопряжен, $x, y \in D(A)$, $f \in C^\alpha([0, T]; E) \cap C([0, T]; D(A))$, $0 < \alpha \leq 1$, и характеристическая функция (4.6) не имеет нулей на положительной полуоси. Тогда решение задачи (4.2) существует и единственно.

Теорема 4.2. Пусть E — гильбертово пространство, оператор A самосопряжен и положительно определен,

$$x, y \in D(A), \quad f \in C^\alpha([0; T], X) \cap C([0; T], D(A)), \quad 0 < \alpha \leq 1.$$

Предположим, что выполняется условие

$$\sum_{i=1}^n (|k_i| + k_i) \leq 2. \quad (4.9)$$

Тогда решение задачи (4.2) существует и единственно.

Доказательство. Действительно, если выполняется условие (4.9), то

$$\begin{aligned}\varphi(\lambda) &\geq 2e^{-T\lambda} \left(\sum_{i=1}^L \frac{|k_i| + k_i}{2} \operatorname{sh} T\lambda - \sum_{i=1}^L k_i \operatorname{sh} \tau_i \lambda \right) \geq \\ &\geq 2e^{-T\lambda} \left(\sum_{i=1}^L \frac{|k_i| + k_i}{2} \operatorname{sh} \tau_i \lambda - \sum_{i=1}^L k_i \operatorname{sh} \tau_i \lambda \right) = \\ &= 2e^{-T\lambda} \left(\sum_{i=1}^L \frac{|k_i| - k_i}{2} \operatorname{sh} \tau_i \lambda \right) \geq 0. \quad (4.10)\end{aligned}$$

Равенство нулю в последней строке (4.10) возможно только тогда, когда все коэффициенты $k_i \geq 0$. Если это так, то на второй строке (4.10) имеем строгое неравенство, исключая случай, когда все коэффициенты $k_i = 0$. Поэтому в данной ситуации положительность характеристической функции очевидна. Теперь утверждения теоремы вытекают из следствия 4.2. Теорема 4.2 доказана. $\square$

4.2. Решение обратной задачи. Перейдем к анализу обратной задачи (4.1).

Лемма 4.1. Для функции Грина (4.4) задачи (4.3) выполняется следующее тождество:

$$\int_0^T G(t, s) ds = -A^{-1}(I + V(T))^{-1}(I - V(t))(I - V(T - t)). \quad (4.11)$$

Доказательство. В силу формулы (4.4), имеем

$$\int_0^T G(t, s) ds = A^{-1}(I - V(2T))^{-1} \left(V(2T) - V(T + t) - V(2T - t) + V(T - t) + V(t) - I \right).$$

Используя полугрупповое свойство, легко проверить соотношение

$$\begin{aligned}V(2T) - V(T + t) - V(2T - t) + V(T - t) + V(t) - I &= \\ &= (V(T) - I)(V(t) - I)(V(T - t) - I).\end{aligned}$$

Поскольку

$$(I - V(2T))^{-1}(I - V(T)) = (I + V(T))^{-1},$$

лемма доказана. $\square$

Используя формулы (4.5), (4.11), мы получаем следующее представление решения задачи (4.1):

$$\begin{aligned}u(t) &= (I - V(T))^{-1} \left[(V(t) - V(2T - t))x + (V(T - t) - V(T + t))u(T) \right] - \\ &\quad - (I + V(T))^{-1}(I - V(t))(I - V(T - t))A^{-1}p. \quad (4.12)\end{aligned}$$

Два последних равенства в задаче (4.1) приводят к следующей системе для нахождения неизвестных элементов $u(T) \in D(A)$ и $p \in E$:

$$\begin{cases} u(T) = \sum_{i=1}^n k_i \left\{ (I - V(2T))^{-1} \left[(V(\tau_i) - V(2T - \tau_i))x + (V(T - \tau_i) - V(T + \tau_i))u(T) \right] - \right. \\ \quad \left. - (I + V(T))^{-1}(I - V(\tau_i))(I - V(T - \tau_i))A^{-1}p \right\} + y, \\ (I - V(2T))^{-1} \left[(V(\theta) - V(2T - \theta))x + (V(T - \theta) - V(T + \theta))u(T) \right] - \\ \quad - (I + V(T))^{-1}(I - V(\theta))(I - V(T - \theta))A^{-1}p = z. \end{cases}$$

Умножим полученное уравнение на $I - V(2T)$ и введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} A_{11} &= I - V(2T) - \sum_{i=1}^n k_i \left(V(T - \tau_i) - V(T + \tau_i) \right), \\ A_{12} &= - \sum_{i=1}^n k_i (I - V(\tau_i)) (I - V(T - \tau_i)), \\ A_{21} &= V(T - \theta) - V(T + \theta), \\ A_{22} &= (I - V(\theta)) (I - V(T - \theta)), \\ f_1 &= \sum_{i=1}^n k_i \left(V(\tau_i) - V(2T - \tau_i) \right) x + (I - V(2T)) y, \\ f_2 &= (I - V(2T)) z - (V(\theta) - V(2T - \theta)) x, \\ g &= -(I - V(T)) A^{-1} p. \end{aligned}$$

Тогда получим следующую систему уравнений для неизвестных элементов $u(T), g \in D(A)$:

$$\begin{cases} A_{11}u(T) + A_{12}g = f_1, \\ A_{21}u(T) + A_{22}g = f_2. \end{cases} \quad (4.13)$$

Элементы f_1, f_2 из системы (4.13) принадлежат $D(A)$. Для разрешимости обратной задачи достаточно, чтобы не вырождался операторный детерминант системы (4.13):

$$\Delta = A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21}.$$

В этом случае решение системы (4.13) определяется по формулам

$$\begin{cases} u(T) = \Delta^{-1}(A_{22}f_1 - A_{12}f_2), \\ g = \Delta^{-1}(-A_{21}f_1 + A_{11}f_2). \end{cases} \quad (4.14)$$

Поскольку полугруппа $V(t)$ коммутирует с оператором A , то из факта принадлежности элементов f_1, f_2 к $D(A)$ следует, что решения этой системы принадлежат $D(A)$. Кроме того,

$$p = -(I - V(T))^{-1} Ag. \quad (4.15)$$

Изучение вопроса обратимости оператора A может быть выполнено с помощью операторного исчисления таким же образом, как и для прямой задачи (4.2). Представим оператор Δ в следующем виде:

$$\Delta = I + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} (\psi(z) - 1) (zI - A^{1/2})^{-1} dz,$$

где

$$\begin{aligned} \psi(z) &= \left(1 - e^{-2Tz} - \sum_{i=1}^L k_i \left(e^{-(T-\tau_i)z} - e^{-(T+\tau_i)z} \right) \right) (1 - e^{-\theta z}) (1 - e^{-(T-\theta)z}) + \\ &\quad + \left(\sum_{i=1}^L k_i (1 - e^{-\tau_i z}) (1 - e^{-(T-\tau_i)z}) \right) \left(e^{-(T-\theta)z} - e^{-(T+\theta)z} \right) \end{aligned} \quad (4.16)$$

— характеристическая функция задачи (4.1).

Относительно этой функции можно сделать те же выводы, что и о характеристической функции (4.6) прямой задачи (4.2). Имеем $\psi(z) \rightarrow 1$ при $z \rightarrow \infty, z \in S$. Если эта функция не имеет нулей в правой полуплоскости, то оператор Δ имеет ограниченный обратный оператор, определенный на всем пространстве E :

$$\Delta^{-1} = I + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{1 - \psi(z)}{\psi(z)} (zI - A^{1/2})^{-1} dz.$$

Эти соображения приводят к следующему утверждению.

Теорема 4.3. Пусть $x, y, z \in D(A)$. Предположим, что характеристическая функция обратной задачи (4.1) не имеет нулей в правой полуплоскости $\operatorname{Re} z > 0$. Тогда решение обратной задачи (4.1) существует и единственно.

Для самосопряженного оператора A в гильбертовом пространстве E можно сформулировать следующую теорему.

Теорема 4.4. Пусть пространство E гильбертово, оператор A самосопряжен и положительно определен. Предположим, что $x, y, z \in D(A)$, все коэффициенты $k_i \geq 0$ и

$$\sum_{i=1}^L k_i \leq 1. \quad (4.17)$$

Тогда решение обратной задачи (4.1) существует и единственно.

Доказательство. Для анализа обратимости оператора Δ используем спектральное представление оператора

$$A^{1/2} = \int_{\varepsilon}^{+\infty} \lambda dE_{\lambda}, \quad \varepsilon > 0.$$

Достаточно легко преобразовать характеристическую функцию обратной задачи к следующему виду:

$$\psi(\lambda) = 8e^{-3T\lambda/2} \left[\left(\operatorname{sh} T\lambda - \sum_{i=1}^L k_i \operatorname{sh} \tau_i \lambda \right) \operatorname{sh} \frac{\tau \lambda}{2} \operatorname{sh} \frac{(T-\tau)\lambda}{2} + \operatorname{sh} \tau \lambda \sum_{i=1}^L k_i \operatorname{sh} \frac{\tau_i \lambda}{2} \operatorname{sh} \frac{(T-\tau_i)\lambda}{2} \right]. \quad (4.18)$$

Используя операторное исчисление для самосопряженных операторов, получаем представление

$$\Delta = \int_{\varepsilon}^{+\infty} \psi(\lambda) dE_{\lambda}.$$

Из условия (4.17) для $\lambda > 0$ получаем, что

$$\operatorname{sh}(T\lambda) - \sum_{i=1}^L k_i \operatorname{sh}(\tau_i \lambda) > 0,$$

а также что все коэффициенты $k_i \geq 0$. Из вида функции (4.18) следует, что она положительна на положительной полуоси. Это доказывает обратимость оператора Δ и представление

$$\Delta^{-1} = \int_{\varepsilon}^{+\infty} \psi^{-1}(\lambda) dE_{\lambda}.$$

Этого факта достаточно для существования и единственности решения обратной задачи. Теорема доказана. $\square$

4.3. Дискретизация эллиптической задачи с условиями Дирихле. Рассмотрим обратную задачу

$$\begin{cases} \frac{U_n^{k+1} - 2U_n^k + U_n^{k-1}}{\tau_n^2} = A_n U_n^k + \Phi_n(t) \tilde{p}_n, & 0 \leq t \leq T, \\ U_n^0 = U_n^K = 0, \\ U_n^{k(n)} = u_n^{\theta}, & k(n)\tau_n = \theta, \end{cases} \quad (4.19)$$

где

$$\Phi_n(\cdot) \in C^2([0, T]; B(E_n)),$$

$$\Phi_n(t) \xrightarrow{\mathcal{PP}} \Phi(t), \quad \Phi'_n(t) \xrightarrow{\mathcal{PP}} \Phi'(t), \quad \Phi''_n(t) \xrightarrow{\mathcal{PP}} \Phi''(t) \quad \text{равномерно по } t \in [0, T],$$

$$A_n u_n^\theta \xrightarrow{\mathcal{P}} A u^\theta, \quad n \rightarrow \infty.$$

Теорема 4.5. *Предположим, что*

$$\Phi(\cdot) \in C^2([0, T]; B(E)), \quad \Phi_n(\cdot) \in C^2([0, T]; B(E_n)),$$

оператор $\Phi(\theta)$ обратим, т.е., $\Phi^{-1}(\theta) \in B(E)$, резольвенты

$$(\lambda I_n - A_n)^{-1}, \quad (\lambda I - A)^{-1}$$

компактны, выполнены условия (3.16) и (3.2),

$$\Phi_n(\theta) \xrightarrow{\mathcal{PP}} \Phi(\theta) \quad \text{устойчиво,}$$

$$\Phi'_n(t) \xrightarrow{\mathcal{PP}} \Phi'(t), \quad \Phi''_n(t) \xrightarrow{\mathcal{PP}} \Phi''(t) \quad \text{равномерно по } t \in [0, T]$$

и $\Delta_{cc} \neq \emptyset$. Предположим также, что задача (3.18) имеет единственное решение для любого $u^\theta \in D(A)$. Тогда существует решение задачи (4.19) при почти всех n и они сходятся к решению задачи (3.18), т.е.

$$U_n(t) \xrightarrow{\mathcal{P}} u(t) \quad \text{равномерно по } t \in [0, T],$$

$$\tilde{p}_n \xrightarrow{\mathcal{P}} p, \quad n \in \mathbb{N},$$

как только $A_n u_n^\theta \xrightarrow{\mathcal{P}} A u^\theta$.

Доказательство. Доказательство повторяет доказательство теоремы 3.4. Применяя оператор $A_n = B_n^2(I_n + \tau_n B_n)^{-1}$ к обеим частям равенства (3.13), получаем

$$\begin{aligned} A_n U_n^{k(n)} &= (I_n - R_n^{2K})^{-1} (R_n^{k(n)} - R_n^{2K-k(n)}) \tau_n \sum_{j=1}^{K-1} B_n R_n^j (2I_n + \tau_n B_n)^{-1} \Phi_n(j\tau_n) \tilde{p}_n - \\ &\quad - \tau_n \sum_{j=1}^{K-1} B_n R_n^{|k(n)-j|} (2I_n + \tau_n B_n)^{-1} \Phi_n(j\tau_n) \tilde{p}_n + \\ &\quad + (I_n - R_n^{2K})^{-1} (R_n^{K-k(n)} - R_n^{K+k(n)}) \tau_n \sum_{j=1}^{K-1} B_n R_n^{K-j} (2I_n + \tau_n B_n)^{-1} \Phi_n(j\tau_n) \tilde{p}_n. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Таким образом, уравнение (4.20) приводится к виду

$$I_n \tilde{p}_n - \mathcal{K}_n \tilde{p}_n = -\Phi_n(\theta)^{-1} A_n u_n^\theta, \quad (4.21)$$

где оператор $\mathcal{K}_n$ определяется формулой

$$\begin{aligned} \Phi_n(\theta) \mathcal{K}_n \tilde{p}_n &= \\ &= (I_n - R_n^{2K})^{-1} (R_n^{k(n)} - R_n^{2K-k(n)}) \tau_n \sum_{j=2}^K R_n^j (2I_n + \tau_n B_n)^{-1} \left(\frac{\Phi_n(j\tau_n) - \Phi_n((j-1)\tau_n)}{\tau_n} \right) \tilde{p}_n + \\ &\quad + (I_n - R_n^{2K})^{-1} (R_n^{k(n)} - R_n^{2K-k(n)}) (2I_n + \tau_n B_n)^{-1} \left[\Phi_n(\tau_n) - R_n^{K-1} \Phi_n((K-1)\tau_n) \right] \tilde{p}_n + \\ &\quad + R_n^{k(n)-1} (2I_n + \tau_n B_n)^{-1} \Phi_n(\tau_n) \tilde{p}_n - R_n^{K-k(n)-1} (2I_n + \tau_n B_n)^{-1} \Phi_n((K-1)\tau_n) \tilde{p}_n - \\ &\quad - \tau_n \sum_{j=2}^{k(n)} R_n^{k(n)-j} (2I_n + \tau_n B_n)^{-1} \left[\frac{\Phi_n(j\tau_n) - \Phi_n((j-1)\tau_n)}{\tau_n} \right] \tilde{p}_n - \\ &\quad - \tau_n \sum_{j=2}^{K-k(n)} R_n^{j-1} (2I_n + \tau_n B_n)^{-1} \left[\frac{\Phi_n((j+k(n))\tau_n) - \Phi_n((j+k(n)-1)\tau_n)}{\tau_n} \right] \tilde{p}_n + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(I_n - R_n^{2K} \right)^{-1} \left(R_n^{K-k(n)} - R_n^{K+k(n)} \right) \left[\left(2I_n + \tau_n B_n \right)^{-1} \left(\Phi_n(K\tau_n) \tilde{p}_n - R_n^{K-1} \Phi_n(\tau_n) \tilde{p}_n \right) \right] - \\
& - \left(I_n - R_n^{2K} \right)^{-1} \left(R_n^{K-k(n)} - R_n^{K+k(n)} \right) \times \\
& \times \left(\tau_n \sum_{j=2}^K R_n^{K-j} \left(2I_n + \tau_n B_n \right)^{-1} \left[\frac{\Phi_n(j\tau_n) - \Phi_n((j-1)\tau_n)}{\tau_n} \right] \tilde{p}_n \right) - \\
& - \left(2I_n + \tau_n B_n \right)^{-1} \frac{\Phi_n(\theta + \tau_n) - \Phi_n(\theta)}{\tau_n} \tau_n \tilde{p}_n. \quad (4.22)
\end{aligned}$$

Ясно, что $\mathcal{K}_n \xrightarrow{\mathcal{PP}} K$. Можно показать, что

$$\mathcal{K}_n \xrightarrow{\mathcal{PP}} K \quad \text{компактно.}$$

Поэтому

$$I_n - \mathcal{K}_n \xrightarrow{\mathcal{PP}} I - K \quad \text{собственно.}$$

Из условия $\mathcal{N}(I - K) = \{0\}$ и теоремы 2.8 получаем, что

$$I_n - \mathcal{K}_n \xrightarrow{\mathcal{PP}} I - K \quad \text{устойчиво.}$$

Отсюда следует, что $\tilde{p}_n \xrightarrow{\mathcal{P}} p$. Тот факт, что сходимость решений $U_n(t) \xrightarrow{\mathcal{P}} u(t)$ равномерна по $t \in [0, T]$, вытекает из интегрального представления (3.8) и (3.23). Теорема доказана. $\square$

5. АППРОКСИМАЦИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ТИПА НЕЙМАНА—БИЦАДЗЕ—САМАРСКОГО ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

В комплексном банаховом пространстве E рассмотрим задачу нахождения функции $u(\cdot) \in C^2([0, T]; E) \cap C([0, T]; D(A))$ и элемента $\varphi \in E$ из системы

$$\begin{cases} u''(t) = Au(t) + \varphi, & 0 \leq t \leq T, \\ u'(0) = x, \\ u'(T) = \sum_{i=1}^L k_i u'(\xi_i) + y, \\ u(\theta) = z, \end{cases} \quad (5.1)$$

где $\{\xi_i\}$ — последовательность различных чисел на интервале $(0, T)$, число $\theta \in (0, T)$ фиксировано, коэффициенты $\{k_i\}$ вещественны, A — замкнутый линейный оператор с плотной областью определения $D(A)$ в пространстве E , элемент $z \in D(A)$ задан. Исследования задачи типа Бицадзе—Самарского в абстрактной постановке было начато в [9, 8].

Предположим, что дифференциальное уравнение в (5.1) имеет эллиптический тип. Это означает, что A — позитивный оператор (см. [213]): все неположительные числа принадлежат его резольвентному множеству и выполняется оценка (3.2).

Любой положительный оператор A имеет положительный квадратный корень $B = A^{1/2}$ и оператор $-A^{1/2}$ порождает сильно непрерывную аналитическую C_0 -полугруппу $V(t) = \exp(-t\sqrt{A})$ (см. [12, 139, 145]). Кроме того, для любых положительных значений t спектральный радиус оператора $V(t)$ меньше 1. Отсюда вытекает обратимость оператора $I - V(t)$ для любого $t > 0$ (см. [19, 114, 115]). Важность полугруппы $V(\cdot)$ определяется тем, что через эту полугруппу выражается функция Грина основной граничной задачи.

Задача (5.1) является задачей с переопределением. Подробнее с классом таких задач можно ознакомиться в [157, 134, 136, 137, 135, 139, 140, 141, 154, 155, 158, 189].

5.1. Решение прямой задачи.

Обратная задача (5.1) связана с прямой задачей, рассмотренной в [8]:

$$\begin{cases} u''(t) = Au(t) + f(t), & 0 \leq t \leq T, \\ u'(0) = x, \\ u'(T) = \sum_{i=1}^L k_i u'(\xi_i) + y. \end{cases} \quad (5.2)$$

Решение задачи (5.2) связано с задачей Неймана:

$$\begin{cases} u''(t) = Au(t) + f(t), & 0 \leq t \leq T, \\ u'(0) = \tilde{u}^0, \\ u'(T) = \tilde{u}^T. \end{cases} \quad (5.3)$$

Функция Грина задачи (5.3) имеет вид

$$G(t, s) = \frac{1}{2} A^{-1/2} (V(2T) - I)^{-1} \left(V(t+s) + V(|t-s|) + V(2T-t-s) + V(2T-|t-s|) \right). \quad (5.4)$$

Предположим, что $\tilde{u}^0, \tilde{u}^T \in D(A^{1/2})$, $f(\cdot) \in C^1([0, T]; E)$. Тогда решение задачи (5.3) существует, единственно и задается формулой

$$u(t) = (V(2T) - I)^{-1} \left[(V(t) + V(2T-t)) A^{-1/2} \tilde{u}^0 - (V(T-t) + V(T+t)) A^{-1/2} \tilde{u}^T \right] + \int_0^T G(t, s) f(s) ds \quad (5.5)$$

(см. [115, 116, 117]). Кроме того,

$$u'(t) = (I - V(2T))^{-1} \left((V(t) - V(2T-t)) \tilde{u}^0 + (V(T-t) - V(T+t)) \tilde{u}^T \right) + \int_0^T G_t(t, s) f(s) ds. \quad (5.6)$$

Разрешимость задачи (5.2) тесно связана с распределением нулей целой функции

$$\eta(z) = 1 - e^{-2Tz} - \sum_{i=1}^L k_i \left(e^{-(T-\xi_i)z} - e^{-(T+\xi_i)z} \right), \quad (5.7)$$

которая называется характеристической функцией задачи (5.2).

Теорема 5.1. Пусть $x, y \in D(A^{1/2})$, $f(\cdot) \in C^1([0, T]; E)$. Предположим, что характеристическая функция (5.7) не имеет нулей в полуплоскости $\operatorname{Re} z > 0$. Тогда существует единственное решение задачи (5.2).

Доказательство. Из последнего граничного условия задачи (5.2) и равенства (5.6) получаем уравнение для неизвестного элемента $u'(T) \in D(A^{1/2})$:

$$u'(T) = \sum_{i=1}^L k_i \left((I - V(2T))^{-1} \left((V(\xi_i) - V(2T - \xi_i)) x + (V(T - \xi_i) - V(T + \xi_i)) u'(T) \right) + \int_0^T G_t(\xi_i, s) f(s) ds \right) + y.$$

Умножая последнее равенство на $I - V(2T)$, получаем

$$\Psi u'(T) = h, \quad (5.8)$$

где

$$\Psi = I - V(2T) - \sum_{i=1}^L k_i (V(T - \xi_i) - V(T + \xi_i)),$$

$$h = \sum_{i=1}^L k_i \left((V(\xi_i) - V(2T - \xi_i))x + (I - V(2T)) \int_0^T G_t(\xi_i, s) f(s) ds \right) + (I - V(2T))y.$$

Поскольку полугруппа $V(T)$ коммутирует с оператором A , то $u'(T) \in D(A^{1/2})$ тогда и только тогда, когда $h \in D(A^{1/2})$. Итак, разрешимость задачи (5.2) сводится к разрешимости уравнения (5.8). Наконец, можно показать, что существует оператор Ψ^{-1} . Теорема 5.1 доказана. $\square$

Расположение нулей характеристической функции $\eta(z)$ требует специального изучения. Рассмотрим подробно лишь случай $L = 1$. Покажем, что в случае $|k_1| \leq 1$ все нули характеристической функции $\eta(z)$ лежат на мнимой оси.

Действительно,

$$\begin{aligned} \eta(z) &= 1 - e^{-2Tz} - k_1 \left(e^{-(T-\xi_1)z} - e^{-(T+\xi_1)z} \right) = \\ &= e^{-2Tz} \left(e^{2Tz} - 1 - k_1 e^{(T+\xi_1)z} + k_1 e^{(T-\xi_1)z} \right). \end{aligned}$$

Пусть $\beta = T/\xi_1$. После замены переменных $y = e^{\xi_1 z}$ получаем

$$\eta(z) = e^{-2Tz} \left(y^{2\beta} - 1 - k_1 y^{\beta+1} + k_1 y^{\beta-1} \right).$$

Для переменной y получаем уравнение

$$y^{2\beta} - 1 - k_1 y^{\beta+1} + k_1 y^{\beta-1} = 0. \quad (5.9)$$

Покажем, что для $|k_1| \leq 1$ все решения уравнения (5.9) лежат на единичной окружности. Действительно, из (5.9) следует

$$\begin{aligned} y^{2\beta} - k_1 y^{\beta+1} &= 1 - k_1 y^{\beta-1}, \\ y^{\beta+1} (y^{\beta-1} - k_1) &= 1 - k_1 y^{\beta-1}, \end{aligned} \quad (5.10)$$

$$\frac{1 - k_1 y^{\beta-1}}{y^{\beta-1} - k_1} = y^{\beta+1}. \quad (5.11)$$

При $k_1 = 1$ из уравнения (5.11) следует, что $y^{\beta+1} = -1$, а если $k_1 = -1$, то $y^{\beta+1} = 1$. Поэтому достаточно рассмотреть случай $|k_1| < 1$. Предположим, что корень уравнения (5.11) таков, что $|y| > 1$. Тогда $|y^{\beta-1}| > 1$. Из комплексного анализа известно (см. [181]), что дробно-линейная функция

$$w(z) = \frac{1 - k_1 z}{z - k_1}, \quad |k_1| < 1,$$

отображает внешнюю область единичного круга в его внутренность и наоборот. Следовательно, $|y^{\beta+1}| < 1$ и поэтому $|y| < 1$, противоречие. Предположим, что корень уравнения (5.11) таков, что $|y| < 1$. Тогда $|y^{\beta-1}| < 1$. Как и ранее, по свойству дробно-линейной функции $w(\cdot)$ получаем неравенство $|y^{\beta+1}| > 1$, т.е., $|y| > 1$; снова приходим к противоречию. Итак, $|y| = 1$, но тогда все значения $z = (\text{Ln } y)/\xi_1$ образуют множество, лежащее на мнимой оси.

Следствие 5.1. Пусть $x, y \in D(A^{1/2})$, $f(\cdot) \in C^1([0, T]; E)$, $L = 1$, $|k_1| \leq 1$. Тогда существует единственное решение задачи (5.2).

Для самосопряженного положительно определенного оператора A ситуация упрощается. Здесь можно использовать преимущество спектрального разложения оператора

$$A^{1/2} = \int_{\varepsilon}^{+\infty} \lambda dE_{\lambda},$$

где $\varepsilon > 0$ и E_λ является спектральным разложением единицы оператора $B = A^{1/2}$. Согласно операторному исчислению, для самосопряженных операторов

$$\Psi = \int_{\varepsilon}^{+\infty} \eta(\lambda) dE_\lambda,$$

где $\eta(\lambda)$ — характеристическая функция (5.7).

Поскольку $\eta(\lambda) \rightarrow 1$ при $\lambda \rightarrow +\infty$, то разрешимость задачи (5.8) следует из того факта, что характеристическая функция не имеет нулей на положительной полуоси. В этом случае оператор B имеет обратный оператор, определенный на всем пространстве E , и

$$\Psi^{-1} = \int_{\varepsilon}^{+\infty} \eta^{-1}(\lambda) dE_\lambda.$$

Следствие 5.2. Пусть пространство E гильбертово, оператор A самосопряжен, $x, y \in D(A^{1/2})$, $f(\cdot) \in C^1([0, T]; E)$. Предположим, что характеристическая функция (5.7) не имеет нулей на положительной полуоси. Тогда существует единственное решение задачи (5.2).

Теорема 5.2. Пусть пространство E гильбертово, оператор A самосопряжен и положительно определен, $x, y \in D(A^{1/2})$, $f(\cdot) \in C^1([0, T]; E)$. Предположим, что выполняется условие

$$\sum_{i=1}^L (|k_i| + k_i) \leq 2. \quad (5.12)$$

Тогда существует единственное решение задачи (5.2).

Доказательство. Действительно, если выполняется условие (5.12), то для вещественных λ имеем

$$\begin{aligned} \eta(\lambda) &\geq 2e^{-T\lambda} \left(\sum_{i=1}^L \frac{|k_i| + k_i}{2} \operatorname{sh} T\lambda - \sum_{i=1}^n k_i \operatorname{sh} \xi_i \lambda \right) \geq \\ &\geq 2e^{-T\lambda} \left(\sum_{i=1}^L \frac{|k_i| + k_i}{2} \operatorname{sh} \xi_i \lambda - \sum_{i=1}^n k_i \operatorname{sh} \xi_i \lambda \right) = 2e^{-T\lambda} \left(\sum_{i=1}^L \frac{|k_i| - k_i}{2} \operatorname{sh} \xi_i \lambda \right) \geq 0. \end{aligned} \quad (5.13)$$

Знак равенства в последней строке (5.13) возможен тогда и только тогда, когда все коэффициенты $k_i \geq 0$. При этом во второй строке (5.13) получаем строгое неравенство, кроме случая, когда все коэффициенты $k_i = 0$. Однако в данной ситуации положительность характеристической функции очевидна. Утверждение теоремы теперь вытекает из следствия 5.2. Теорема 5.2 доказана. $\square$

5.2. Решение обратной задачи.

Перейдем к анализу обратной задачи (5.1).

Лемма 5.1. Для функции Грина (5.4) задачи (5.2) имеют место следующие тождества:

$$\int_0^T G(t, s) ds = -A^{-1}, \quad \int_0^T G_t(t, s) ds = 0. \quad (5.14)$$

Доказательство. Легко видеть, что для любого элемента $\varphi \in E$ постоянная функция

$$u(t) = -A^{-1}\varphi$$

является решением задачи

$$u''(t) = Au(t) + \varphi, \quad u'(0) = 0, \quad u'(T) = 0.$$

Поэтому

$$u(t) = -A^{-1}\varphi = \int_0^T G(t, s)\varphi ds. \quad (5.15)$$

Отсюда получаем первое равенство в (5.14). Дифференцирование (5.15) по t дает второе равенство. Лемма доказана. $\square$

В силу леммы 5.1, формулы (5.5) и (5.6) преобразуются в следующие:

$$u(t) = (V(2T) - I)^{-1} \left((V(t) + V(2T - t))A^{-1/2}x - (V(T - t) + V(T + t))A^{-1/2}u'(T) \right) - A^{-1}\varphi, \quad (5.16)$$

$$u'(t) = (I - V(2T))^{-1} \left((V(t) - V(2T - t))x + (V(T - t) - V(T + t))u'(T) \right). \quad (5.17)$$

Из последних двух равенств в (5.1) следует, что неизвестные элементы $u'(T) \in D(A^{1/2})$ и $\varphi \in E$ следует искать из системы

$$\begin{aligned} u'(T) &= \sum_{i=1}^L k_i \left((I - V(2T))^{-1} \left((V(\xi_i) - V(2T - \xi_i))x + (V(T - \xi_i) - V(T + \xi_i))u'(T) \right) (I - V(2T))^{-1} \right) + y, \\ (V(2T) - I)^{-1} \left((V(\theta) + V(2T - \theta))A^{-1/2}x - (V(T - \theta) + V(T + \theta))A^{-1/2}u'(T)A^{-1/2} \right) - A^{-1}\varphi &= z. \end{aligned}$$

Умножая первое равенство на $I - V(2T)$, а второе на A , получаем систему

$$\begin{cases} \Psi u'(T) = h, \\ \varphi = (V(2T) - I)^{-1} \left((V(\theta) + V(2T - \theta))A^{1/2}x - (V(T - \theta) + V(T + \theta))A^{1/2}u'(T) \right) - Az, \end{cases} \quad (5.18)$$

где Ψ — тот же оператор, что и в уравнении (5.8), и

$$h = \sum_{i=1}^L k_i \left\{ (V(\xi_i) - V(2T - \xi_i))x \right\} + (I - V(2T))y.$$

Итак, обратная задача (5.1) также сводится к уравнению $\Psi u'(T) = h$. Решая это уравнение и подставляя $u'(T)$ во второе уравнение системы (5.18), находим неизвестный элемент

$$\varphi = (V(2T) - I)^{-1} \left((V(\theta) + V(2T - \theta))A^{1/2}x - (V(T - \theta) + V(T + \theta))A^{1/2}\Psi^{-1}h \right) - Az. \quad (5.19)$$

Следовательно, для разрешимости обратной задачи достаточно, чтобы характеристическая функция $\eta(z)$, определенная формулой (5.7), не имела нулей в полуплоскости $\operatorname{Re} z > 0$. Для самосопряженного положительно определенного оператора A в гильбертовом пространстве E для разрешимости обратной задачи достаточно, чтобы функция $\eta(z)$ не имела нулей на положительной полуоси. Это приводит к следующим утверждениям.

Теорема 5.3. Пусть $x, y \in D(A^{1/2})$, $z \in D(A)$. Предположим, что характеристическая функция (5.7) имеет нули только в полуплоскости $\operatorname{Re} z \leq 0$. Тогда существует единственное решение обратной задачи (5.1).

Следствие 5.3. Пусть $x, y \in D(A^{1/2})$, $z \in D(A)$, $L = 1$ и $|k_1| \leq 1$. Тогда существует единственное решение задачи (5.1).

Теорема 5.4. Пусть пространство E гильбертово, оператор A самосопряжен и положительно определен и $x, y \in D(A^{1/2})$, $z \in D(A)$. Предположим, что выполняется условие (5.12). Тогда существует единственное решение обратной задачи (5.1).

5.3. Дискретизация эллиптической задачи с условиями Неймана. Рассмотрим следующие задачи Неймана в банаховых пространствах E_n :

$$\begin{cases} u_n''(t) = A_n u_n(t) + \varphi_n, & t \in [0, T], \\ u_n'(0) = \tilde{u}_n^0, & u_n'(T) = \tilde{u}_n^T; \end{cases} \quad (5.20)$$

здесь A_n — сильно позитивные операторы, операторы A_n и A согласованы,

$$u_n^0 \xrightarrow{\mathcal{P}} u^0, \quad u_n^T \xrightarrow{\mathcal{P}} u^T.$$

Мы опишем также дискретизацию (5.20) по переменной t .

Одной из простейших разностных схем является

$$\begin{aligned} \frac{U_n^{k+1} - 2U_n^k + U_n^{k-1}}{\tau_n^2} &= A_n U_n^k + \bar{\varphi}_n, \quad k \in \left\{1, \dots, \left[\frac{T}{\tau_n}\right] - 1\right\}, \\ U_n^1 - U_n^0 &= \tau_n \tilde{u}_n^0, \quad U_n^K - U_n^{K-1} = \tau_n \tilde{u}_n^T. \end{aligned} \quad (5.21)$$

Решение задачи (5.21) имеет вид

$$\begin{aligned} U_n^k &= -A_n^{-1} \bar{\varphi}_n - \\ &- (I_n - R_n)^{-1} (I_n - R_n^{2K-2})^{-1} \left((R_n^k + R_n^{2K-k-1}) \tau_n \tilde{u}_n^0 - (R_n^{K-k} + R_n^{K+k-1}) \tau_n \tilde{u}_n^T \right), \end{aligned} \quad (5.22)$$

где

$$R_n = (I_n + \tau_n B_n)^{-1}, \quad B_n = \frac{1}{2} \left(A_n \tau_n + \sqrt{A_n^2 \tau_n^2 + 4} \right). \quad (5.23)$$

Действительно, общее решение уравнения (5.21) можно записать в виде

$$U_n^k = (R_n^k + R_n^{2K-k})a + (R_n^{K-k} + R_n^{K+k})b - A_n^{-1} \bar{\varphi}_n,$$

где система для нахождения a, b имеет вид

$$\begin{cases} (R_n - I_n)(I_n - R_n^{2K-1})a + (I_n - R_n)^2 R_n^{K-1}b = \tau_n \tilde{u}_n^0, \\ -(I_n - R_n)^2 R_n^{K-1}a - (R_n - I_n)(I_n - R_n^{2K-1})b = \tau_n \tilde{u}_n^T. \end{cases} \quad (5.24)$$

Детерминант системы (5.24) равен

$$\Delta = -(I_n - R_n)^2 (I_n - R_n^{2K}) (I_n - R_n^{2K-2}).$$

Поэтому

$$\begin{aligned} a &= \Delta^{-1} \left(-(R_n - I_n)(I_n - R_n^{2K-1}) \tau_n \tilde{u}_n^0 - (I_n - R_n)^2 R_n^{K-1} \tau_n \tilde{u}_n^T \right), \\ b &= \Delta^{-1} \left((I_n - R_n)^2 R_n^{K-1} \tau_n \tilde{u}_n^0 + (R_n - I_n)(I_n - R_n^{2K-1}) \tau_n \tilde{u}_n^T \right) \end{aligned}$$

и в результате получаем (5.22).

Теорема 5.5. *Предположим, что выполняются условия (A) и (B₁), резольвенты*

$$(\lambda I - A)^{-1}, \quad (\lambda I_n - A_n)^{-1}$$

компактны и $\Delta_{cc} \neq \emptyset$. Предположим также, что

$$\tilde{u}_n^0 \xrightarrow{\mathcal{P}} \tilde{u}^0, \quad \tilde{u}_n^T \xrightarrow{\mathcal{P}} \tilde{u}^T, \quad \varphi_n \xrightarrow{\mathcal{P}} f(\cdot) = \varphi.$$

Тогда решения (5.20) сходятся к решению (5.3), т.е., $u_n(t) \xrightarrow{\mathcal{P}} u(t)$ равномерно по $t \in [0, T]$.

Доказательство. Поскольку $\exp(tB_n) \xrightarrow{\mathcal{P}\mathcal{P}} \exp(tB)$ компактно для любого $t > 0$, то решения уравнений (5.20) сходятся к решению (5.5). Теорема доказана. $\square$

Теорема 5.6. *Предположим, что выполняются условия (A) и (B₁), резольвенты*

$$(\lambda I - A)^{-1}, \quad (\lambda I_n - A_n)^{-1}$$

компактны и $\Delta_{cc} \neq \emptyset$. Предположим также, что

$$\tilde{u}_n^0 \xrightarrow{\mathcal{P}} \tilde{u}^0, \quad \tilde{u}_n^T \xrightarrow{\mathcal{P}} \tilde{u}^T, \quad \bar{\varphi}_n \xrightarrow{\mathcal{P}} f(\cdot) = \bar{\varphi}.$$

Тогда решения (5.21) сходятся к решению (5.3), т.е., $U_n^k \xrightarrow{\mathcal{P}} u(t)$ равномерно по $t = k\tau_n \in [0, T]$.

Доказательство. В силу компактной сходимости $U_n^k \xrightarrow{\mathcal{PP}} \exp(tB)$ при любом $k\tau_n = t > 0$ получаем сходимость решений (5.22) к решению (5.5). Действительно, можно видеть, что (5.22) полностью соответствует (5.16). Члены

$$(I_n - R_n)^{-1} = (I_n + \tau_n B_n) \frac{1}{\tau_n B_n}$$

в силу тождества

$$A_n = B_n^2 (I_n + \tau_n B_n)^{-1}$$

(см. [139]) обеспечивают сходимость

$$\tau_n (I_n - R_n)^{-1} \xrightarrow{\mathcal{PP}} A^{-1/2}.$$

Ясно, что

$$I_n - R_n^{2K-2} \xrightarrow{\mathcal{PP}} I - V(2T) \quad \text{устойчиво.}$$

Теорема доказана. $\square$

5.4. Сходимость решений. Рассмотрим в банаховых пространствах E_n задачу нахождения функций $u_n(\cdot) \in C^2([0; T]; E_n) \cap C([0; T]; D(A_n))$ и элементов $\varphi_n \in E$ из системы уравнений

$$\begin{cases} u_n''(t) = A_n u_n(t) + \varphi_n, & 0 \leq t \leq T, \\ u_n'(0) = x_n, \\ u_n'(T) = \sum_{i=1}^L k_i u_n'(\xi_i) + y_n, \\ u_n(\theta) = z_n, \end{cases} \quad (5.25)$$

где точки $\{\xi_i\} \subseteq (0, T)$, $\theta \in (0, T)$, $\{k_i\}$ выбраны так же, как в (5.1), операторы A_n удовлетворяют условиям (A), (B₁) теоремы 2.12, а элементы $x_n, y_n, z_n \in D(A_n)$ таковы, что

$$\begin{aligned} x_n &\xrightarrow{\mathcal{P}} x, & y_n &\xrightarrow{\mathcal{P}} y, & z_n &\xrightarrow{\mathcal{P}} z, \\ A_n x_n &\xrightarrow{\mathcal{P}} Ax, & A_n y_n &\xrightarrow{\mathcal{P}} Ay, & A_n z_n &\xrightarrow{\mathcal{P}} Az. \end{aligned}$$

Теорема 5.7. *Предположим, что резольвенты*

$$(\lambda I - A)^{-1}, \quad (\lambda I_n - A_n)^{-1}$$

компактны и выполняются условия (B₁), (3.2) и $\Delta_{cc} \neq \emptyset$. Предположим также, что характеристическая функция (5.7) имеет нули только в полуплоскости $\operatorname{Re} z \leq 0$. Тогда решения задач (5.25) существуют для почти всех n и сходятся к решению задачи (5.1), т.е.,

$$u_n(t) \xrightarrow{\mathcal{P}} u(t) \quad \text{равномерно по } t \in [0, T], \quad \varphi_n \xrightarrow{\mathcal{P}} \varphi, \quad n \in \mathbb{N},$$

как только

$$A_n x_n \xrightarrow{\mathcal{P}} Ax, \quad A_n y_n \xrightarrow{\mathcal{P}} Ay, \quad A_n z_n \xrightarrow{\mathcal{P}} Az.$$

Доказательство. Заметим, что решения аппроксимирующих задач, согласно (5.18), могут быть записаны в виде

$$\begin{cases} \Psi_n u'_n(T) = h_n, \\ \varphi_n = (V_n(2T) - I_n)^{-1} \left((V_n(\theta) + V_n(2T - \theta)) A_n^{1/2} x_n - \right. \\ \quad \left. - (V_n(T - \theta) + V_n(T + \theta)) A_n^{1/2} u'_n(T) \right) - A_n z_n, \end{cases} \quad (5.26)$$

где

$$\begin{aligned} \Psi_n &= I_n - V_n(2T) - \sum_{i=1}^L k_i \left(V_n(T - \xi_i) - V_n(T + \xi_i) \right), \\ h_n &= \sum_{i=1}^L k_i \left(V_n(\xi_i) - V_n(2T - \xi_i) \right) x_n + y_n. \end{aligned}$$

Поскольку

$$V_n(t) \xrightarrow{\mathcal{PP}} V(t) \quad \text{компактно при любом } t > 0,$$

из теорем 2.7–2.8 получаем, что

$$\Psi_n \xrightarrow{\mathcal{PP}} \Psi, \quad I_n - V_n(2T) \xrightarrow{\mathcal{PP}} I - V(2T) \quad \text{устойчиво,}$$

т.е.

$$\Psi_n^{-1} \xrightarrow{\mathcal{PP}} \Psi^{-1}, \quad (I_n - V_n(2T))^{-1} \xrightarrow{\mathcal{PP}} (I - V(2T))^{-1}.$$

Следовательно, $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{P}} \varphi$. Теорема доказана. $\square$

Согласно (5.21), аппроксимация (5.25) может быть рассмотрена в виде

$$\begin{cases} \frac{U_n^{k+1} - 2U_n^k + U_n^{k-1}}{\tau_n^2} = A_n U_n^k + \bar{\varphi}_n, & k \in \left\{ 1, \dots, \left[\frac{T}{\tau_n} \right] - 1 \right\}, \\ U_n^1 - U_n^0 = \tau_n x_n, \\ U_n^K - U_n^{K-1} = \sum_{i=1}^L k_i \left(U_n^{[\xi_i/\tau_n]+1} - U_n^{[\xi_i/\tau_n]} \right) + \tau_n y_n, \\ U_n^{[\theta/\tau_n]} = z_n, \end{cases} \quad (5.27)$$

Замечание 5.1. В (5.27) аппроксимация имеет порядок $O(\tau_n)$, а дифференциальное уравнение в (5.27) аппроксимируется с порядком $O(\tau_n^2)$. Если изменить схему и аппроксимировать (5.27) с порядком $O(\tau_n^2)$, то, как и ранее, устойчивость и сходимость также будут иметь место, однако сложность выкладок существенно вырастет.

Теорема 5.8. *Предположим, что резольвенты*

$$(\lambda I - A)^{-1}, \quad (\lambda I_n - A_n)^{-1}$$

компактны и выполняются условия (B₁), (3.2) и $\Delta_{cc} \neq \emptyset$. Предположим также, что характеристическая функция (5.7) имеет нули только в полуплоскости $\operatorname{Re} z \leq 0$. Тогда решения задач (5.27) существуют при почти всех n и сходятся к решению задачи (5.1), т.е.

$$U_n^k \xrightarrow{\mathcal{P}} u(t) \quad \text{равномерно по } t = k\tau_n \in [0, T], \quad \bar{\varphi}_n \xrightarrow{\mathcal{P}} \varphi, \quad n \in \mathbb{N},$$

как только

$$A_n x_n \xrightarrow{\mathcal{P}} Ax, \quad A_n y_n \xrightarrow{\mathcal{P}} Ay, \quad A_n z_n \xrightarrow{\mathcal{P}} Az.$$

Доказательство. Для нахождения функции U_n^k , удовлетворяющей системе (5.27), начнем с дискретного решения задачи Неймана. Решение задачи (5.21) для некоторых

$$U_n^1 - U_n^0 = \tau_n x_n, \quad U_n^K - U_n^{K-1} = \tau_n (\partial_{\tau_n} U_n)^{K-1}$$

задается формулой (5.22). Подставляя эту функцию в условия (5.27) с

$$k = \left\lfloor \frac{\xi_i}{\tau_n} \right\rfloor, \quad k = \left\lfloor \frac{\xi_i}{\tau_n} \right\rfloor + 1, \quad k = \left\lfloor \frac{\theta}{\tau_n} \right\rfloor,$$

получаем систему для нахождения $\bar{\varphi}_n$ и $\tau_n (\partial_{\tau_n} U_n)^{K-1}$:

$$\bar{\Psi}_n \tau_n (\partial_{\tau_n} U_n)^{K-1} = \bar{h}_n, \quad (5.28)$$

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}_n = & -A_n (I_n - R_n)^{-1} (I_n - R_n^{2K-2})^{-1} \left(\left(R_n^{\lfloor \theta/\tau_n \rfloor} + R_n^{2K - \lfloor \theta/\tau_n \rfloor - 1} \right) \tau_n x_n - \right. \\ & \left. - \left(R_n^{K - \lfloor \theta/\tau_n \rfloor} + R_n^{K + \lfloor \theta/\tau_n \rfloor - 1} \right) \tau_n (\partial_{\tau_n} U_n)^{K-1} \right) - A_n z_n, \end{aligned} \quad (5.29)$$

где

$$\begin{aligned} \bar{\Psi}_n = & (I_n - R_n^{2K-2})^{-1} \left(I_n - R_n^{2K-2} - \sum_{i=1}^L k_i \left(R_n^{K - \lfloor \xi_i/\tau_n \rfloor - 1} + R_n^{K + \lfloor \xi_i/\tau_n \rfloor - 1} \right) \right), \\ \bar{h}_n = & (I_n - R_n^{2K-2})^{-1} \left(\sum_{i=1}^L k_i \left(R_n^{\lfloor \xi_i/\tau_n \rfloor} - R_n^{2K - \lfloor \xi_i/\tau_n \rfloor - 2} \right) \tau_n x_n \right) + \tau_n y_n. \end{aligned}$$

Так же, как и в доказательстве теоремы 5.7, можно показать, что

$$\begin{aligned} \bar{\Psi}_n = & (I_n - R_n^{2K-2})^{-1} \left(I_n - R_n^{2K-2} - \sum_{i=1}^L k_i \left(R_n^{K - \lfloor \xi_i/\tau_n \rfloor - 1} + R_n^{K + \lfloor \xi_i/\tau_n \rfloor - 1} \right) \right) \\ & \xrightarrow{\mathcal{PP}} (I - V(2T))^{-1} \Psi \quad \text{устойчиво,} \end{aligned}$$

т.е.

$$\bar{\Psi}_n^{-1} \xrightarrow{\mathcal{PP}} (I - V(2T)) \Psi^{-1}.$$

Теорема доказана. $\square$

6. ОБЗОР ПОСЛЕДНИХ СТАТЕЙ ПО ЭЛЛИПТИЧЕСКИМ УРАВНЕНИЯМ

Обратная задача по определению неизвестной границы обсуждается в [31]. Доказана условная устойчивость логарифмического типа для неизвестных липшицевых границ с априорными предположениями. Доказательства базируются на оценке гармонических мер.

В [32, 33] для эллиптических уравнений с двумя независимыми переменными доказана единственность определения нескольких коэффициентов из отображения Дирихле–Неймана. Целью работы является доказательство широкой применимости теории обобщенных аналитических функций к таким обратным задачам.

В [107] рассмотрена обратная задача идентификации носителя источника D в эллиптическом уравнении

$$\begin{cases} -\Delta u(x) + q(x) \chi_D(x) u(x) = 0, & x \in \Omega, \\ u(x) = f(x), & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

где $q(\cdot)$ — заданная положительная функция и χ_D — такая характеристическая функция подобласти D , что $\bar{D} \subset \Omega$. Доказана глобальная единственность обратной задачи с выпуклой оболочкой многоугольника D .

В [36] рассматривается обратная задача определения неизвестной границы, на которой наложены нулевые условия Неймана. Доказаны единственность и оценка устойчивости при некоторых априорных допущениях на неизвестные границы и решения задач. Доказательства опираются на

метод комплексного продолжения и оценку гармонической меры. Преимуществом метода является то, что не требуется ставить граничные условия на всей границе.

В [79] рассмотрены обратные граничные задачи для эллиптических уравнений второго порядка нахождения коэффициентов из отображения Дирихле—Неймана на частях границ. Доказаны результаты по единственности в трехмерном случае. Доказательство опирается на комплексные решения геометрической оптики, которые построены на основе оценок Карлемана.

В [17] обсуждается реконструкция комплекснозначных коэффициентов скалярного эллиптического уравнения второго порядка, заданного в ограниченной области, по информации о нескольких решениях этого уравнения. Показано, что для достаточно большого числа решений и для открытого множества соответствующих граничных условий все коэффициенты могут быть единственно и устойчиво восстановлены с точностью до некоторого калибровочного преобразования. Показано также, что в некоторых специфических ситуациях минимальное число таких возможных решений равно $n(n+3)/2$ и достаточно для единственного глобального восстановления неизвестных коэффициентов. Эта теория находит приложение в некоторых физико-медицинских методах визуализации, включая фотоакустическую томографию, транзитную эластографию и магнитнорезонантную эластографию.

Абстрактная обратная задача второго порядка рассмотрена в [15]. Автор ограничивается случаем, когда для решения $u(t)$ дифференциального уравнения необходимо знать значения некоторого оператора или функционала $\Phi[u(t)] = g(t)$ как функции аргумента t . Рассмотрен новый подход, основанный на теории возмущений линейных операторов. Получены достаточные условия существования и единственности решения. В качестве возможных приложений абстрактных теорем рассмотрены некоторые приложения из теории упругости.

Двумерная обратная граничная задача определения коэффициентов общего эллиптического оператора второго порядка по данным Коши, измеренным на некотором непустом открытом множестве границы, рассматривается в [82]. Приведена полная характеристика множества коэффициентов, которые дают те же самые частичные данные Коши. Как следствие, получены результаты о единственности определения коэффициентов по частичным данным Коши для изотропного уравнения проводимости, уравнения Шредингера, уравнения конвекции-диффузии, уравнения анизотропной проводимости с точностью до группы диффеоморфизмов, совпадающих на границе, а также для магнитного уравнения Шредингера с точностью до калибровочных преобразований. Ключевым местом является построение новых решений комплексной геометрической оптики с помощью оценок Карлемана.

ddd

В [83] обсуждается двумерная обратная граничная задача определения проводимости из пары всех входных данных Дирихле, сосредоточенных на открытом подмножестве Γ_+ , и всех соответствующих данных Неймана, измеренных на открытом подмножестве Γ_- . Доказана глобальная единственность при некотором дополнительном геометрическом условии в случае, когда $\overline{\Gamma_+ \cap \Gamma_-} = \emptyset$. Также доказана единственность для похожей обратной задачи для стационарного уравнения Шредингера. Ключом к доказательству является построение подходящего комплекса решений геометрической оптики с помощью карлемановских оценок с сингулярным весом.

В [80] рассматривается обратная задача определения коэффициентных матриц в N -системе эллиптических уравнений второго порядка в ограниченной двумерной области по множеству данных Коши на произвольной части границы. Основным результатом является следующее утверждение. Если две системы эллиптических операторов порождают одинаковое множество частичных данных Коши на произвольной части границы, то коэффициентные матрицы первого порядка и члены нулевого порядка удовлетворяют заданной системе дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка. Из основного результата следует единственность любых двух коэффициентных матриц при условии, что одна оставшаяся из трех коэффициентных матриц известна.

В [84] рассматривается обратная задача определения коэффициентов общего эллиптического оператора второго порядка с двумя переменными по измерениям соответствующих данных

Коши на произвольном открытом подмножестве границы. Показано, что можно определить коэффициенты оператора с точностью до таких естественных ограничений, как конформная инвариантность, калибровочные преобразования и диффеоморфная инвариантность. Этот главный результат использован для того, чтобы показать, что ротор магнитного поля и электрический потенциал однозначно определяются по измерениям частичных данных Коши, ассоциированных с магнитным уравнением Шредингера, на произвольном открытом подмножестве границы. Доказано также, что любые два из трех коэффициентов эллиптического оператора второго порядка, главная часть которого является лапласианом, однозначно определяются по своим частичным данным Коши.

В [190] доказана альтернатива Фредгольма для соответствующей обратной задачи, проведена оценка устойчивости в случае существования единственного решения и представлены некоторые достаточные условия, приводящие к однозначной разрешимости соответствующей обратной задачи. В качестве дополнительной информации (переопределения) о решении прямой задачи автор предполагает известным след решения внутри области. Приведен пример реализации первой части альтернативы Фредгольма (однородная задача имеет нетривиальное решение), а для случая, когда реализуется вторая часть альтернативы Фредгольма, была доказана оценка устойчивости.

В [191] изучаются ситуации, в которых реализуется вторая часть альтернативы Фредгольма. Приведены некоторые достаточные условия, при которых справедлива вторая часть альтернативы Фредгольма, т.е. существование единственного решения рассматриваемой обратной задачи.

В [129] рассмотрена идентификация неизвестного постоянного коэффициента при главном члене дифференциального уравнения второго порядка

$$-kM(|u|^p - 2u) + g(x)u = f(x)$$

с граничным условием Дирихле; здесь эллиптический оператор M самосопряжен, $p \geq 2$. Идентификация k основана на интегральных граничных данных. Для обратной задачи доказаны теоремы локального существования и единственности в классе пар, содержащих такую функцию $u(\cdot)$, что $|u|^p - 2u \in W_2^2(\Omega)$, и положительное число k .

В [52] рассмотрена идентификация двух коэффициентов $a(u)$ и $c(x)$ в квазилинейном эллиптическом дифференциальном уравнении в частных производных из наблюдения отображения Дирихле—Неймана. Сначала при помощи некоторой линеаризационной процедуры и специальных сингулярных решений определяются $a(0)$ и $c(x)$ для $x \in \Omega$, после чего на основе сопряженного подхода находится $a(u)$.

В [138] рассмотрены две обратные задачи определения неизвестного параметра в неоднородной части абстрактного эллиптического уравнения второго порядка в банаховом пространстве с граничными условиями типа Бицадзе—Самарского. Для первой задачи автор использует условия Дирихле, а для второй — условия Неймана. Доказаны теоремы существования и единственности решений как прямых, так и обратных задач. Получены явные формулы для решений.

Достаточные условия однозначной разрешимости обратной коэффициентной задачи изучаются в [192]. Получены различные глобальные достаточные условия в форме ограничений на знаки заданных функций и их производных. Как следствие, выведены утверждения для коэффициентных обратных задач с переопределением на границе, на которой условия Дирихле дополнены нулевыми условиями для нормальной производной на части границы.

В [193] рассмотрены обратные задачи нахождения правой части линейного эллиптического уравнения второго порядка общего вида. Изучается первая граничная задача. Рассмотрены два способа указания дополнительной информации (переопределения): на некотором многообразии меньшей размерности внутри области может быть задан след решения или на части границы может быть указана нормальная производная. На основе альтернативы Фредгольма, доказанной в первой части рассматриваемой статьи, автор выделяет одно из условий на заданные функции, при котором обратная задача однозначно разрешима. Исследование проводится в классе непрерывных функций, производные которых удовлетворяют условию Гельдера.

В [194] рассматриваются обратные задачи определения коэффициента в правой части для уравнения Пуассона в цилиндрической области. Исследуется первая граничная задача. Рассматриваются два способа задания дополнительной информации (переопределения): первый — след

решений граничных задач внутри области на многообразии меньшей размерности, второй — задание значений нормальной производной на части границы. Доказаны теоремы существования и единственности.

В [195] изучается обратная задача определения источника и коэффициента эллиптического уравнения в прямоугольнике. Дополнительная информация о решении прямой задачи (переопределение) — это известный след ее решения на отрезке внутри прямоугольника. Получены достаточные условия существования и единственности (глобальной). Исследование проводилось в классе непрерывно дифференцируемых функций, производные которых удовлетворяют условию Гельдера.

Численный метод для идентификации неизвестных точечных источников в двумерной задаче Пуассона из граничных данных Дирихле предложен в [125]. При дополнительных предположениях о том, что общее число и оценка положений точечных источников известны, можно идентифицировать точное расположение и соответствующую мощность отдельных точечных источников исходя из разбросанных (зашумленных) наблюдений граничных данных Дирихле. Численная проверка указывает на то, что этот метод эффективен и надежен.

В [130] исследуется обратная задача определения коэффициента в эллиптическом уравнении второго порядка. Установлены условия существования и единственности классического решения рассматриваемой задачи. Представлены численные тесты, использующие конечно-разностную схему в комбинации с итерационным методом, а также показана чувствительность этой схемы по отношению к шумовому переопределению.

В [170, 171] предложен алгоритм численной визуализации для решения коэффициентной обратной задачи в эллиптическом уравнении, затем этот алгоритм проверен с помощью данных, созданных посредством компьютерного моделирования. Предыдущая работа в этой области была сосредоточена на стационарной оптической задаче со многими положениями источников, перемещающихся по прямой, а также на проблеме частотной области. Эта работа включает задачу стационарной термальной томографии со многими положениями источников, перемещающихся по прямой, а также задачу нестационарной оптической томографии, использующей только два фиксированных положения источников. Анализ сходимости показывает, что этот метод сходится глобально в предположении эспланадности асимптотического решения (так называемой шлейфовой функции). Эвристический подход к аппроксимации новой «шлейфовой функции» использовался и подтвержден в численных экспериментах; он также имеет глобальную сходимость. Представлены численные эксперименты для двумерной нестационарной оптики и реконструкции стационарного термального свойства.

В [14] рассмотрено приближенное решение обратной задачи для эллиптического уравнения с переопределением. Для приближенного решения обратной задачи в многомерном эллиптическом уравнении с переопределением применен конечно-разностный метод. Для этой задачи установлены устойчивость и коэрцитивная устойчивость первого и второго порядка точности разностных схем. Алгоритм для приближенного решения проверен на двумерной обратной задаче.

Статья [18] посвящена реконструкции коэффициента диффузии в эллиптическом уравнении по нескольким известным плотностям энергии. Плотность энергии — это произведение коэффициента диффузии на квадрат модуля градиента решения эллиптического уравнения. Происхождение такого внутреннего функционала восходит к возмущению анализируемой среды акустическими (плоскими) волнами, которые участвуют в небольших изменениях коэффициента диффузии. После подходящего асимптотического разложения и (Фурье) преобразования стало возможным построить внутри области плотность мощности для уравнения, зависящую от пространственных переменных. Такая постановка находит применение в электроимпедансной томографии с ультразвуковым модулированием и оптической томографии с ультразвуковым модулированием. Авторы показали, что коэффициент диффузии может быть однозначно и устойчиво реконструирован по достаточно большому числу плотностей мощности. Предложено также точное выражение для реконструкции коэффициента диффузии. Эти результаты имеют силу для эллиптического уравнения с большим классом граничных условий в двумерной постановке. В случае трех измерений

результаты доказаны для более ограничительного класса граничных условий посредством решений комплексной геометрической оптики.

В [13] рассматривается обратная задача для многомерного эллиптического уравнения со смешанными граничными условиями и переопределением. Построены аппроксимации решения этой обратной задачи первого и второго порядка точности по t , а также второго порядка точности по пространственным переменным. Для решений этих разностных схем установлены оценки устойчивости, почти коэрцитивной устойчивости и коэрцитивной устойчивости. Для двумерных обратных задач со смешанными граничными условиями в тестовых примерах представлены численные результаты.

ddd

7. ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЙ СЛУЧАЙ

Рассмотрим обратную задачу в E , состоящую в нахождении функции $u(\cdot) \in C^2([0, T]; E)$ и элемента $d \in E$ из уравнений

$$u''(t) = Au(t) + \Phi(t)d, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (7.1a)$$

$$u(0) = u^0, \quad u'(0) = u^1, \quad (7.1b)$$

$$u(T) = u^T, \quad (7.1c)$$

где $A \in \mathcal{C}(E)$, $\Phi(\cdot) \in C^2([0, T]; B(E))$, а элементы $u^0, u^1, u^T \in E$ заданы. Здесь предполагается, что абстрактное дифференциальное уравнение в (7.1a) имеет гиперболический тип. Это означает, что оператор A порождает C_0 -косинус оператор-функцию $C(\cdot, A)$. Напомним, что C_0 -косинус оператор-функция используется для представления решения абстрактной задачи Коши

$$\begin{cases} u''(t) = Au(t) + f(t), & 0 \leq t \leq T, \\ u(0) = u^0, \quad u'(0) = u^1. \end{cases} \quad (7.2)$$

Определение 7.1. Функция $u(\cdot)$ называется *классическим решением* задачи (7.2), если $u(\cdot)$ дважды непрерывно дифференцируема, $u(t) \in D(A)$ для всех $t \in [0, T]$ и $u(\cdot)$ удовлетворяет соотношениям в (7.2).

Предложение 7.1 (см. [53, 196]). *Оператор A порождает C_0 -косинус оператор-функцию тогда и только тогда, когда существуют константы M и ω такие, что для всех λ с $\operatorname{Re} \lambda > \omega$ значение λ^2 содержится в резольвентном множестве $\rho(A)$ оператора A и для этих же значений λ выполняется оценка:*

$$\left\| \frac{d^n}{d\lambda^n} (\lambda R(\lambda^2; A)) \right\| \leq \frac{Mn!}{(\lambda - \omega)^{n+1}}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (7.3)$$

Для любой сильно непрерывной C_0 -косинус оператор-функции $C(\cdot, A)$ выполняются неравенства

$$\|C(t, A)\| \leq M \exp(\omega|t|), \quad t \in \mathbb{R}. \quad (7.4)$$

В этом случае пишут $A \in C(M, \omega)$. Далее введем пространство Кызинского [108]

$$E^1 = \{x \in E : C(t, A)x \in C^1(\mathbb{R}; E)\}$$

с нормой $\|x\|_{E^1} = \|x\| + \sup_{0 < t \leq 1} \|C'(t, A)x\|$. Это банахово пространство с нормой $\|\cdot\|_{E^1}$.

Если оператор A порождает C_0 -косинус оператор-функцию $C(\cdot, A)$ и $f(\cdot) \in C([0, T]; E)$, то для любого классического решения (7.2) имеем

$$u(t) = C(t, A)u^0 + S(t, A)u^1 + \int_0^t S(t-s, A)f(s) ds, \quad t \in [0, T], \quad (7.5)$$

где $S(t, A) := \int_0^t C(s, A) ds$ — ассоциированная C_0 -синус оператор-функция. Формула (7.5) является аналогом формулы вариации постоянной для C_0 -полугрупп. Как и в случае C_0 -полугрупп операторов, функция $u(\cdot)$ заданная в (7.5) не является, вообще говоря, классическим решением, поскольку может не быть дважды непрерывно дифференцируемой.

Замечание 7.1. Согласно (7.5), вообще говоря, задача (7.1) некорректна. Такое случается, например, если резольвента $(\lambda I - A)^{-1}$ компактна для некоторого λ . Действительно, в этом случае

интегральный оператор $\int_0^T S(T-s, A)\Phi(s) ds$ компактен и поэтому уравнение

$$\int_0^T S(T-s, A)\Phi(s) ds d = u(T) - C(T, A)u^0 - S(T, A)u^1$$

в пространстве E приводит к некорректной задаче. Если же рассмотреть оператор $\int_0^T S(T-s, A)\Phi(s) ds$ как оператор из E в $\mathfrak{D}(A)$, где $\mathfrak{D}(A)$ наделено нормой $\|x\|_{\mathfrak{D}(A)} = \|x\| + \|Ax\|$, то оператор $\int_0^T S(T-s, A)\Phi(s) ds : E \rightarrow \mathfrak{D}(A)$ не обязан быть компактным. Поэтому в случае $u(T), C(T, A)u^0, S(T, A)u^1 \in D(A)$ можно преобразовать формулу (7.28), чтобы получить уравнение Фредгольма второго рода, которое является корректной задачей.

Определение 7.2. Функция $u(\cdot) \in C([0, T]; E)$, определенная в (7.5), называется *слабым решением* задачи (7.2).

Предложение 7.2 (см. [53]). Пусть оператор A порождает C_0 -косинус оператор-функцию $C(\cdot, A)$, и пусть либо

- (i) $f(\cdot), Af(\cdot) \in C([0, T]; E)$ и $f(t) \in D(A)$ for $t \in [0, T]$ либо
- (ii) $f(\cdot) \in C^1([0, T]; E)$.

Тогда функция $u(\cdot)$, определенная в (7.5), при $u^0 \in D(A)$ и $u^1 \in E^1$ является классическим решением задачи (7.2) на $[0, T]$.

Если продифференцировать обе части в (7.5), то получим

$$u'(t) = S(t, A)Au^0 + C(t, A)u^1 + \int_0^t C(t-s, A)f(s) ds.$$

Интегрируя по частям, приходим к альтернативному виду для первой производной

$$u'(t) = S(t, A)(Au^0 + f(0)) + C(t, A)u^1 + \int_0^t S(t-s, A)f'(s) ds. \quad (7.6)$$

Положим $v(t) = u'(t)$, $v^0 = u^1$, $v^1 = Au^0 + f(0)$, $f_1(t) = f'(t)$. Тогда последняя формула в (7.6) может быть переписана в виде (7.5):

$$v(t) = C(t, A)v^0 + S(t, A)v^1 + \int_0^t S(t-s, A)f_1(s) ds.$$

Предложение 7.2 дает условие, при котором функция $v(\cdot)$ является классическим решением (в частности, дважды непрерывно дифференцируема) задачи

$$\begin{cases} v''(t) = Av(t) + f_1(t), & 0 \leq t \leq T, \\ v(0) = v^0, \quad v'(0) = v^1. \end{cases}$$

Этими условиями являются $v^0 \in D(A)$, $v^1 \in E^1$, $f_1(\cdot) \in C^1([0, T]; E)$, т.е., $u^0, u^1 \in D(A)$, $Au^0 + f(0) \in E^1$, $f(\cdot) \in C^2([0, T]; E)$. Отсюда следует, что при этих условиях $v(\cdot) \in C^2([0, T]; E)$, т.е., $u(\cdot) \in C^3([0, T]; E)$.

Следуя указанной процедуре, можно найти достаточные условия, при которых решение задачи Коши становится сколь угодно гладким. Положим $w(t) = v'(t)$. Тогда можно написать

$$w(t) = C(t, A)w^0 + S(t, A)w^1 + \int_0^t S(t-s, A)f_2(s) ds, \quad (7.7)$$

где $w^0 = v^1$, $w^1 = Av_0 + f_1(0)$, $f_2(t) = f_1'(t)$.

Если $w^0 \in D(A)$, $w^1 \in E^1$ и $f_2(\cdot) \in C^1([0, T]; E)$, то $w(\cdot) \in C^2([0, T]; E)$, т.е., $u(\cdot) \in C^4([0, T]; E)$. Таким образом, приходим к следующему предложению.

Предложение 7.3. *Предположим, что оператор $A \in C(M, \omega)$ и $u^0, u^1 \in D(A^2)$. Предположим, что выполняются следующие условия:*

- (i) $f(\cdot) \in C^3([0, T]; E)$;
- (ii) $Au^0 + f(0) \in D(A)$, $Au^1 + f'(0) \in E^1$.

Тогда функция $u(\cdot)$ из (7.5) принадлежит $C^4([0, T]; E)$.

Обратно. Предположим, что функция $u(\cdot)$, определенная в (7.5), принадлежит к $C^4([0, T]; E)$, т.е., $u(\cdot) \in C^4([0, T]; E)$, и $f(\cdot) \in C^3([0, T]; E)$ с $f(0) = 0$. Тогда $f'(0) \in E^1$ и потому $AS(t, A)f'(0) \in C([0, T]; E)$.

Доказательство. Докажем лишь вторую часть предложения. Из (7.7) мы получаем

$$\begin{aligned} u'''(t) &= A^2S(t, A)u^0 + C(t, A)(Au^1 + f'(0)) + \int_0^t C(t-s, A)f''(s) ds = \\ &= S(t, A)A^2u^0 + C(t, A)(Au^1 + f'(0)) + S(t, A)f''(0) + \int_0^t S(t-s, A)f'''(s) ds. \end{aligned}$$

Тогда

$$u''''(t) = C(t, A)A^2u^0 + S(t, A)A^2u^1 + AS(t, A)f'(0) + C(t, A)f''(0) + \int_0^t C(t-s, A)f'''(s) ds. \quad (7.8)$$

Итак, функция $AS(t, A)f'(0) \in C([0, T]; E)$. □

Рассмотрим однородную корректную задачу Коши

$$u''(t) = Au(t), \quad t \in \mathbb{R}; \quad u(0) = u^0, \quad u'(0) = u^1. \quad (7.9)$$

Определим матричный оператор $\mathcal{A} := \begin{pmatrix} 0 & I \\ A & 0 \end{pmatrix} : E^1 \times E \rightarrow E^1 \times E$ действующий на элемент $(x, y) \in E^1 \times E$ по формуле $\mathcal{A}(x, y) = (y, Ax)$. Этот оператор имеет область определения $D(\mathcal{A}) := D(A) \times E^1$.

Предположим, что корректная задача (7.9) имеет вид

$$u''(t) = \mathfrak{B}^2u(t), \quad t \in \mathbb{R}; \quad u(0) = u^0, \quad u'(0) = u^1, \quad (7.10)$$

где $\mathfrak{B} \in \mathcal{C}(E)$. Дадим определение.

Определение 7.3. Говорят, что решение $u(\cdot)$ задачи (7.10) удовлетворяет условию (K), если $u'(\cdot) \in C([0, T]; \mathfrak{D}(\mathfrak{B}))$.

Предложение 7.4 (см. [53]). *Задача (7.10) имеет единственное решение, удовлетворяющее условию (K), тогда и только тогда, когда следующая задача Коши*

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}'(t) = \begin{pmatrix} 0 & \mathfrak{B} \\ \mathfrak{B} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}(t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}(0) = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} \quad (7.11)$$

корректно поставлена в пространстве $E \times E$.

Следующее условие (F) является аналогом условия (K), которое позволяет упростить изучение задачи (7.9), используя C_0 -полугруппы.

Определение 7.4. Говорят, что C_0 -косинус оператор-функция $C(\cdot, A)$ удовлетворяет условию (F), если выполнены следующие условия:

- (i) существует такой оператор $\mathfrak{B} \in \mathcal{C}(E)$, что $\mathfrak{B}^2 = A$, и $\mathfrak{B}$ коммутирует с любым оператором из $B(E)$, коммутирующим с оператором A ;
- (ii) оператор $S(t, A)$ отображает E в $D(\mathfrak{B})$ для любого $t \in \mathbb{R}$;
- (iii) функция $\mathfrak{B}S(t, A)x$ непрерывна по $t \in \mathbb{R}$ для любого фиксированного $x \in E$.

Предложение 7.5 (см. [53]). *В условии (F) для каждого $t \in \mathbb{R}$ имеем $\mathfrak{B}S(t, A) \in B(E)$ и $\mathfrak{D}(\mathfrak{B}) \subseteq E^1$.*

Предложение 7.6 (см. [53]). *Существуют банахово пространство E и C_0 -косинус оператор-функция $C(\cdot, A)$ (даже равномерно ограниченная) такие, что условие (F) не выполняется.*

Заметим, что если $0 \in \rho(A)$, то условия (K) и (F) эквивалентны.

Предложение 7.7 (см. [207]). *Пусть E — гильбертово пространство, и предположим, что оператор A является самосопряженным отрицательно определенным. Тогда $A \in \mathcal{C}(M; \omega)$, условие (F) выполняется и соответствующее пространство E^1 совпадает с $\mathfrak{D}((-A)^{1/2})$.*

Теорема 7.1 (см. [206]). *Пусть A и $\mathfrak{B}$ являются операторами, удовлетворяющими условию (i) определения 7.4, и пусть $0 \in \rho(\mathfrak{B})$. Следующие условия эквивалентны:*

- (i) C_0 -косинус оператор-функция $C(\cdot, A)$ удовлетворяет условию (F);
- (ii) оператор $\mathfrak{B}$ порождает C_0 -группу $\exp(\cdot \mathfrak{B})$ на E ;
- (iii) оператор $\begin{pmatrix} 0 & \mathfrak{B} \\ \mathfrak{B} & 0 \end{pmatrix}$ с областью определения $D(A) \times D(\mathfrak{B})$ порождает C_0 -группу на $E \times E$;
- (iv) оператор $\mathcal{A} := \begin{pmatrix} 0 & I \\ A & 0 \end{pmatrix}$ с областью определения $D(A) \times D(\mathfrak{B})$ порождает C_0 -группу $\exp(\cdot \mathcal{A})$ на $\mathfrak{D}(\mathfrak{B}) \times E$, где $\mathfrak{D}(\mathfrak{B})$ — банахово пространство элементов $D(\mathfrak{B})$, наделенное нормой графика;
- (v) имеет место вложение $D(\mathfrak{B}) \subseteq E^1$;
- (vi) $\mathfrak{D}(\mathfrak{B}) = E^1$.

Предложение 7.8 (см. [206]). *В условиях теоремы 7.1 для $t \in \mathbb{R}$ имеем*

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad & \exp(t\mathfrak{B}) = C(t, A) + \mathfrak{B}S(t, A), \quad C(t, A) = (\exp(t\mathfrak{B}) + \exp(-t\mathfrak{B}))/2; \\ \text{(ii)} \quad & \exp(t\mathcal{A}) = \begin{pmatrix} \mathfrak{B}^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \exp\left(t \begin{pmatrix} 0 & \mathfrak{B} \\ \mathfrak{B} & 0 \end{pmatrix}\right) \begin{pmatrix} \mathfrak{B} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Аналог предложения 7.2 формулируется в следующей теореме.

Теорема 7.2 (см. [114]). *Пусть оператор $\mathfrak{B} = \sqrt{A}$ в задаче (7.2) имеет ограниченный обратный $\mathfrak{B}^{-1} \in B(E)$ и является генератором C_0 -группы. Предположим, что функция $f(\cdot)$ обладает одним из свойств:*

- (i) $f(\cdot) \in C^1([0, T]; E)$;
- (ii) $\mathfrak{B}f(\cdot) \in C([0, T]; E)$.

Тогда для любого $u^0 \in D(A)$ и $u^1 \in D(\mathfrak{B})$ существует единственное классическое решение задачи (7.2), которое дается по формуле (7.5) в виде

$$u(t) = \frac{1}{2}(\exp(t\mathfrak{B}) + \exp(-t\mathfrak{B}))u^0 + \frac{1}{2}(\exp(t\mathfrak{B}) - \exp(-t\mathfrak{B}))\mathfrak{B}^{-1}u^1 + \\ + \frac{1}{2} \int_0^t (\exp((t-s)\mathfrak{B}) - \exp(-(t-s)\mathfrak{B}))\mathfrak{B}^{-1}f(s) ds, \quad t \in [0, T]. \quad (7.12)$$

7.1. Дискретизация по пространству и времени. Для C_0 -косинус оператор-функций имеет место теорема АВС.

Теорема 7.3 (см. [145]). Пусть операторы A и A_n являются генераторами C_0 -косинус оператор-функций. Следующие условия (A) и (B'') эквивалентны условию (C'').

(A) *Согласованность.* Существует такое $\lambda \in \rho(A) \cap \bigcap_n \rho(A_n)$, что резольвенты сходятся

$$(\lambda I_n - A_n)^{-1} \xrightarrow{\mathcal{PP}} (\lambda I - A)^{-1}.$$

(B'') *Устойчивость.* Существуют такие константы $M_3 \geq 1$ и $\omega_3 \geq 0$, что

$$\|C(t, A_n)\| \leq M_3 e^{\omega_3 t}, \quad t \geq 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

(C'') *Сходимость.* Для любого конечного $T > 0$ имеем

$$\max_{t \in [0, T]} \|C(t, A_n)u_n^0 - p_n C(t, A)u^0\| \rightarrow 0$$

при $n \rightarrow \infty$ для любого $u^0 \in E$, как только $u_n^0 \xrightarrow{\mathcal{P}} u^0$.

Полудискретная аппроксимация (7.2) приводит к следующим задачам Коши в банаховых пространствах E_n :

$$u_n''(t) = A_n u_n(t) + f_n(t), \quad t \in [0, T], \\ u_n(0) = u_n^0, \quad u_n'(0) = u_n^1, \quad (7.13)$$

с операторами A_n , которые порождают C_0 -косинус оператор-функции, операторы A_n и A согласованы, $u_n^0 \xrightarrow{\mathcal{P}} u^0$, $u_n^1 \xrightarrow{\mathcal{P}} u^1$ и $f_n(\cdot) \xrightarrow{\mathcal{P}} f(\cdot)$ в подходящем смысле. Естественнo предположить, что выполняются условия (A) и (B'') теоремы 7.3 для C_0 -косинус оператор-функций.

Дискретизация (7.13) по времени рассматривалась во многих работах [11, 146, 187]. Наиболее простой разностной схемой является

$$\frac{U_n^{k+1} - 2U_n^k + U_n^{k-1}}{\tau_n^2} = A_n U_n^{k+1} + \varphi_n^k, \quad k \in \left\{1, \dots, \left[\frac{T}{\tau_n}\right]\right\}, \quad U_n^0 = u_n^0, \quad U_n^1 = u_n^0 + \tau_n u_n^1, \quad (7.14)$$

где, например, если $f_n(\cdot) \in C([0, T]; E_n)$, можно положить $\varphi_n^k = f_n(k\tau_n)$, $k \in \{1, \dots, K\}$, $K = \left[\frac{T}{\tau_n}\right]$, а в случае $f_n(\cdot) \in L^1([0, T]; E_n)$ можно выбрать

$$\varphi_n^k = \frac{1}{\tau_n} \int_{t_{k-1}}^{t_k} f_n(s) ds, \quad t_k = k\tau_n, \quad k \in \{1, \dots, K\}.$$

Решение задачи (7.14) дается в виде [174]:

$$U_n^k = C_k^{(n)} U_n^0 + S_k^{(n)} U_n^1 + \tau_n^2 R_n \sum_{j=2}^k S_{k+1-j}^{(n)} \varphi_n^{j-1}, \quad (7.15)$$

где $k \geq 2$. Действительно, для того, чтобы решить однородную задачу, ассоциированную с (7.14), т.е.,

$$U_n^{k+1} - 2(I_n - \tau_n^2 A_n)^{-1} U_n^k + (I_n - \tau_n^2 A_n)^{-1} U_n^{k-1} = 0, \quad (7.16)$$

мы рассмотрим дискретную оператор-функцию, определенную рекуррентным соотношением

$$\begin{aligned} C_{k+1}^{(n)} &= R_n(2C_k^{(n)} - C_{k-1}^{(n)}), \quad C_0^{(n)} = I_n, \quad C_1^{(n)} = 0, \\ S_{k+1}^{(n)} &= R_n(2S_k^{(n)} - S_{k-1}^{(n)}), \quad S_0^{(n)} = 0, \quad S_1^{(n)} = I_n, \end{aligned} \quad (7.17)$$

где $R_n = (I_n - \tau_n^2 A_n)^{-1}$. Тогда решение (7.16) дается формулой

$$U_n^k = C_k^{(n)} U_n^0 + S_k^{(n)} U_n^1 = (C_k^{(n)} + S_k^{(n)}) U_n^0 + \tau_n S_k^{(n)} \frac{U_n^1 - U_n^0}{\tau_n}.$$

Для работы с дискретными семействами дадим определение.

Определение 7.5 (см. [147]). Операторы A_n , порождающие C_0 -косинус оператор-функции $C(\cdot, A_n)$, удовлетворяют *дискретному условию Крейна—Фатторини*, если выполняются следующие условия:

- (i) существуют такие $\mathfrak{B}_n \in \mathcal{C}(E_n)$, что $\mathfrak{B}_n^2 = A_n$, и $\mathfrak{B}_n$ коммутируют с любым оператором из $B(E_n)$, коммутирующим с A_n ;
- (ii) операторы $\mathfrak{B}_n$ порождают C_0 -группы так, что $\|\exp(\pm t \mathfrak{B}_n)\| \leq M_0 e^{\omega_0 |t|}$, $t \in \mathbb{R}$;
- (iii) операторы $-A_n$ сильно позитивны, т.е.,

$$\|(\lambda I_n - A_n)^{-1}\| \leq \frac{M}{1 + |\lambda|}, \quad \operatorname{Re} \lambda \geq 0,$$

и $\|\mathfrak{B}_n^{-1}\| \leq C$ при $n \in \mathbb{N}$.

Можно получить явное выражение для функций $C_k^{(n)}$, $S_k^{(n)}$ следующим образом. Введем операторы

$$R_{1,n} = (I_n - \tau_n \mathfrak{B}_n)^{-1}, \quad R_{2,n} = (I_n + \tau_n \mathfrak{B}_n)^{-1},$$

где операторы $\mathfrak{B}_n$ фигурируют в условии Крейна—Фатторини. Эти операторы удовлетворяют соотношениям

$$R_{1,n} R_{2,n} = R_n, \quad R_{1,n} - R_{2,n} = 2\tau_n \mathfrak{B}_n R_n, \quad R_{1,n} + R_{2,n} = 2R_n, \quad (7.18)$$

что следует из тождества Гильберта для резольвент. Поскольку в условии Крейна—Фатторини операторы $\mathfrak{B}_n$ порождают C_0 -группы, мы получаем $\|R_{j,n}^k\| \leq \operatorname{const}(t)$, $k\tau_n = t$ для $j = 1, 2$.

Простые вычисления показывают, что общее решение (7.16) дается, как и в [174], по формуле

$$U_n^k = R_{1,n}^k x + R_{2,n}^k y, \quad (7.19)$$

где x и y — произвольные элементы E_n . Заметим, что представление (7.19) было установлено в [38, 39] без условия Крейна—Фатторини, но нам нужны оценки $\|R_{1,n}^{k_n}\| \leq M e^{\omega t}$, $\|R_{2,n}^{k_n}\| \leq M e^{\omega t}$ с $k_n \tau_n = t$. Если мы решим систему

$$\begin{cases} x + y = U_n^0, \\ R_{1,n} x + R_{2,n} y = U_n^1 \end{cases}$$

и подставим x и y в (7.19), то получим после некоторых вычислений

$$C_k^{(n)} = -R_n \sum_{s=0}^{k-2} R_{1,n}^s R_{2,n}^{k-2-s}, \quad S_k^{(n)} = \sum_{s=0}^{k-1} R_{1,n}^s R_{2,n}^{k-1-s}.$$

Из (7.18) мы получаем

$$R_n \mathfrak{B}_n S_k^{(n)} = \frac{1}{2\tau_n} (R_{1,n} - R_{2,n}) \sum_{s=0}^{k-1} R_{1,n}^s R_{2,n}^{k-1-s} = \frac{1}{2\tau_n} (R_{1,n}^k - R_{2,n}^k). \quad (7.20)$$

Заметим, что

$$\begin{cases} R_{1,n}^k - R_{1,n}^{k-1} = \tau_n \mathfrak{B}_n R_{1,n}^k, \\ R_{2,n}^k - R_{2,n}^{k-1} = -\tau_n \mathfrak{B}_n R_{2,n}^k \end{cases} \quad (7.21)$$

и

$$R_{1,n}^k + R_{2,n}^k = 2R_n(S_k^{(n)} - S_{k-1}^{(n)}). \quad (7.22)$$

Равенство (7.22) может быть доказано индукцией по k . Для $k = 1$ и $k = 2$ оно проверяется непосредственно. Для $k > 2$,

$$\begin{aligned} R_{1,n}^{k+1} + R_{2,n}^{k+1} &= (R_{1,n}^k + R_{2,n}^k)(R_{1,n} + R_{2,n}) - R_{1,n}R_{2,n}(R_{1,n}^{k-1} + R_{2,n}^{k-1}) = \\ &= 2R_n(S_k^{(n)} - S_{k-1}^{(n)}) \cdot 2R_n - R_n \cdot (S_{k-1}^{(n)} - S_{k-2}^{(n)}) = 2R_n(2S_k^{(n)} - 3S_{k-1}^{(n)} + S_{k-2}^{(n)}) = \\ &= 2R_n(R_n(2S_k^{(n)} - S_{k-1}^{(n)}) - R_n(2S_{k-1}^{(n)} - 2S_{k-2}^{(n)})) = 2R_n(S_{k+1}^{(n)} - S_k^{(n)}). \end{aligned}$$

Из (7.18) и равенства $I - R_{1,n} = -\tau_n \mathfrak{B}_n R_{1,n}$ имеем

$$\begin{aligned} C_k^{(n)} + S_k^{(n)} &= -R_{1,n}R_{2,n} \sum_{s=0}^{k-2} R_{1,n}^s R_{2,n}^{k-2-s} + \sum_{s=0}^{k-1} R_{1,n}^s R_{2,n}^{k-1-s} = -\sum_{s=0}^{k-2} R_{1,n}^{s+1} R_{2,n}^{k-1-s} + \sum_{s=0}^{k-1} R_{1,n}^s R_{2,n}^{k-1-s} = \\ &= \sum_{s=0}^{k-2} (R_{1,n}^s - R_{1,n}^{s+1}) R_{2,n}^{k-1-s} + R_{1,n}^{k-1} = -\tau_n \mathfrak{B}_n \sum_{s=0}^{k-2} R_{1,n}^{s+1} R_{2,n}^{k-1-s} + R_{1,n}^{k-1} = \\ &= -\tau_n \mathfrak{B}_n R_{1,n} R_{2,n} \sum_{s=0}^{k-2} R_{1,n}^s R_{2,n}^{k-2-s} + R_{1,n}^{k-1} = -\tau_n \mathfrak{B}_n R_n S_{k-1}^{(n)} + R_{1,n}^{k-1}. \end{aligned}$$

Используя (7.20), получаем

$$\tau_n \mathfrak{B}_n R_n S_{k-1}^{(n)} = \frac{1}{2}(R_{1,n}^{k-1} - R_{2,n}^{k-1}), \quad (7.23)$$

и следовательно,

$$C_k^{(n)} + S_k^{(n)} = \frac{1}{2}(R_{1,n}^{k-1} + R_{2,n}^{k-1}). \quad (7.24)$$

Рассмотрим неоднородное уравнение (7.14), т.е.,

$$U_n^{k+1} - 2(I_n - \tau_n^2 A_n)^{-1} U_n^k + (I_n - \tau_n^2 A_n)^{-1} U_n^{k-1} = \tau_n^2 (I_n - \tau_n^2 A_n)^{-1} \varphi_n^k. \quad (7.25)$$

Используя рекуррентное соотношение (7.17), получаем формулу (7.15), (см. [174]).

7.2. Существование решения обратной задачи. Рассмотрим обратную задачу (7.1) в следующем виде: для заданных элементов $u^T, u^0, u^1 \in D(A)$ найти решение $u(\cdot) \in C^2([0, T]; E)$ и элемент $d \in E$ такие, что

$$\begin{cases} u''(t) = Au(t) + \Phi(t)d, & 0 \leq t \leq T, \\ u(0) = u^0, & u'(0) = u^1, \\ u(T) = u^T. \end{cases} \quad (7.26)$$

Здесь $A \in C(M; \omega)$. Задача (7.26) является обратной задачей с переопределением. Подробности описания таких задач можно найти в [157].

Основываясь на замечании 7.1, мы можем исследовать решение (7.26) следующим образом:

$$A \int_0^T S(T-s, A) \Phi(s) ds d = Au(T) - C(T, A)Au^0 - AS(T, A)u^1$$

и затем использовать тождества

$$A \int_0^T S(T-s, A) \Phi(s) ds = \int_0^T C(T-s, A) \Phi'(s) ds - \Phi(T) + C(T, A) \Phi(0) \quad (7.27)$$

и

$$A \int_0^T S(T-s, A) \Phi(s) ds = \int_0^T S(T-s, A) \Phi''(s) ds - S(T, A) \Phi'(0) - \Phi(T) + C(T, A) \Phi(0). \quad (7.28)$$

Предложение 7.9. Пусть $\Phi(\cdot) \in C^1([0, T]; B(E))$, оператор $\Phi(T)$ обратим, т.е., $\Phi(T)^{-1} \in B(E)$. Тогда обратная задача (7.26) эквивалентна уравнению

$$Id - B_1 d = g_1, \quad (7.29)$$

где

$$B_1 := \Phi(T)^{-1} \left(\int_0^T (C(T-s, A)\Phi'(s) - \lambda S(T-s, A)\Phi(s)) ds + C(T, A)\Phi(0) \right)$$

и

$$g_1 := -\Phi(T)^{-1}(A - \lambda I)(u^T - C(T, A)u^0 - S(T, A)u^1) \quad \text{для } \lambda \in \rho(A).$$

Предложение 7.10. Пусть $\Phi(\cdot) \in C^2([0, T]; B(E))$, и предположим, что оператор

$$D = \Phi(T) - C(T, A)\Phi(0) \quad (7.30)$$

обратим, т.е., $D^{-1} \in B(E)$. Тогда обратная задача (7.26) эквивалентна уравнению

$$Id - B_2 d = g_2, \quad (7.31)$$

где

$$B_2 := D^{-1} \left(\int_0^T S(T-s, A)(\Phi''(s) - \lambda \Phi(s)) ds + S(T, A)\Phi'(0) \right)$$

и

$$g_2 := -D^{-1}(A - \lambda I)(u^T - C(T, A)u^0 - S(T, A)u^1) \quad \text{для } \lambda \in \rho(A).$$

Предложение 7.11 (см. [157]). Пусть выполнены условия предложения 7.9 и

$$\int_0^T (\|\Phi'(s)\| + |\lambda|(T-s)\|\Phi(s)\|) e^{\omega(T-s)} ds + \|\Phi(0)\| e^{\omega T} < \frac{1}{M\|\Phi(T)^{-1}\|}.$$

Тогда решение $(u(\cdot), d)$ обратной задачи (7.26) существует и единственно для любых начальных данных $u^0, u^T \in D(A)$, $u^1 \in E^1$.

Предложение 7.12 (см. [157]). Предположим, что выполняются условия предложения 7.10 и выполнено неравенство

$$\int_0^T (T-s)\|\Phi''(s) - \lambda \Phi(s)\| e^{\omega(T-s)} ds + T\|\Phi'(0)\| e^{\omega T} < \frac{1}{M\|D^{-1}\|}.$$

Тогда решение $(u(\cdot), d)$ обратной задачи (7.26) существует и единственно для любых входных данных $u^0, u^T \in D(A)$, $u^1 \in E^1$.

Предложение 7.13 (см. [157]). Предположим, что оператор A порождает сильно непрерывную C_0 -косинус оператор-функцию $C(\cdot, A)$ на банаховом пространстве E , $\Phi(t) \equiv I$ и $0 \in \rho(A)$. Тогда обратная задача (7.26) однозначно разрешима для любых входных данных $u^0, u^T \in D(A)$, $u^1 \in E^1$ тогда и только тогда, когда $1 \in \rho(C(T, A))$.

Предположим теперь, что E является гильбертовым пространством, а оператор A самосопряжен и отрицателен. Для любой вещественной функции $\Phi(\cdot)$ значение $\Phi(t)$ будет идентифицироваться с оператором умножения на число $\Phi(t)$ в пространстве E . Характеристическая функция $\varphi(\cdot)$ на отрицательной полуоси определяется как

$$\varphi(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{-\lambda}} \int_0^T \Phi(s) \sin(\sqrt{-\lambda}(T-s)) ds. \quad (7.32)$$

Заметим, что мы можем продолжить функцию $\varphi(\cdot)$ с отрицательной полуоси для построения целой функции комплексной переменной λ . Если, в частности, $\Phi(t) \not\equiv 0$, то нули функции $\varphi(\cdot)$ являются изолированными.

Далее, обозначим через E_λ спектральное разложение единицы оператора A . Можно написать

$$A = \int_0^{+\infty} \lambda dE(\lambda).$$

Теорема 7.4 (см. [157]). *Если оператор A является самосопряженным и полуограниченным сверху на гильбертовом пространстве E , $\Phi(\cdot) \in C^1[0, T]$ и $\Phi(\cdot) \not\equiv 0$, то выполняются следующие утверждения:*

- (i) *обратная задача (7.26) с фиксированными данными $u^0, u^T \in D(A)$, $u^1 \in E^1$ разрешима тогда и только тогда, когда*

$$\int_0^{+\infty} |\varphi(\lambda)|^{-2} d(E_\lambda g, g) < \infty, \quad (7.33)$$

где $g := u^T - C(T, A)u^0 - S(T, A)u^1$;

- (ii) *если обратная задача (7.26) разрешима, то ее решение единственно тогда и только тогда, когда точечный спектр оператора A не содержит нулей целой функции $\varphi(\cdot)$, определенной в (7.32).*

Особый интерес представляет случай $\Phi(t) \equiv tI$. В этой ситуации

$$\varphi(\lambda) = \begin{cases} \frac{\sin(\sqrt{-\lambda}T) - \sqrt{-\lambda}T}{\lambda\sqrt{-\lambda}T}, & \lambda \neq 0, \\ T^3/6, & \lambda = 0. \end{cases}$$

Эта функция не имеет нулей на отрицательной полуоси и $\varphi(\lambda) \sim -\frac{T}{\lambda}$ при $\lambda \rightarrow +\infty$. Поэтому сходимость интеграла

$$\int_0^{+\infty} |\varphi(\lambda)|^{-2} d(E_\lambda g, g)$$

эквивалентна сходимости

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\lambda|^2 d(E_\lambda g, g).$$

Этот интеграл сходится для любого элемента $g \in D(A)$. Итак, доказано следующее предложение.

Предложение 7.14. *Предположим, что оператор A является самосопряженным и отрицательным на гильбертовом пространстве E , $\Phi(t) \equiv tI$, $t \geq 0$. Тогда решение $(u(\cdot), d)$ обратной задачи (7.26) существует и единственно для любых входных данных $u^0, u^T \in D(A)$, $u^1 \in E^1$.*

7.3. Аппроксимация решения обратных задач. Рассмотрим полудискретизацию обратной задачи для уравнения второго порядка (7.26): для заданных элементов $u_n^T, u_n^0, u_n^1 \in D(A_n)$ найти решение $u_n(\cdot) \in C^2([0, T]; E_n)$ и элемент $d_n \in E_n$ такой, что

$$\begin{cases} u_n''(t) = A_n u_n(t) + \Phi_n(t) d_n, & 0 \leq t \leq T, \\ u_n(0) = u_n^0, & u_n'(0) = u_n^1, \\ u_n(T) = u_n^T, \end{cases} \quad (7.34)$$

где операторы $A_n \in C(M; \omega)$, операторы A, A_n согласованы, $u_n^T \xrightarrow{\mathcal{P}} u^T$, $u_n^0 \xrightarrow{\mathcal{P}} u^0$, $u_n^1 \xrightarrow{\mathcal{P}} u^1$ и $\Phi_n(\cdot) \xrightarrow{\mathcal{PP}} \Phi(\cdot)$ в подходящем смысле.

Решение d_n задачи (7.34) должно удовлетворять уравнению

$$I_n d_n - B_{n,2} d_n = g_{n,2}, \quad (7.35)$$

где

$$B_{n,2} := D_n^{-1} \left(\int_0^T S(T-s, A_n) (\Phi_n''(s) - \lambda \Phi_n(s)) ds + S(T, A_n) \Phi_n'(0) \right), \quad \lambda \in \Delta_{cc},$$

$$g_{n,2} := -D_n^{-1} (A_n - \lambda I_n) (u_n^T - C(T, A_n) u_n^0 - S(T, A_n) u_n^1), \quad D_n = \Phi_n(T) - C(T, A_n) \Phi_n(0).$$

Теорема 7.5 (см. [214]). Пусть $A, A_n \in C(M; \omega)$. Тогда $S(t, A_n) \xrightarrow{\mathcal{PP}} S(t, A)$ компактно для любого $t > 0$ тогда и только тогда, когда $\Delta_{cc} \neq \emptyset$.

Теорема 7.6. Предположим, что $\Phi(\cdot) \in C^3([0, T]; B(E))$, $\Phi_n(\cdot) \in C^3([0, T]; B(E_n))$, $D_n^{-1} \xrightarrow{\mathcal{PP}} D^{-1}$, резольвенты $(\lambda I_n - A_n)^{-1}$, $(\lambda I - A)^{-1}$ компактны и выполняются (A), (B'') и (7.4), $\Phi_n^{(j)}(t) \xrightarrow{\mathcal{PP}} \Phi^{(j)}(t)$ равномерно по $t \in [0, T]$ для $j \in \overline{1, 3}$, и $\Delta_{cc} \neq \emptyset$. Предположим, что задача (7.26) имеет единственное решение для любого $u^T \in D(A)$. Тогда существуют решения задач (7.34) для почти всех n и они сходятся к решению задачи (7.26), т.е., $u_n(t) \xrightarrow{\mathcal{P}} u(t)$ равномерно по $t \in [0, T]$ и $d_n \xrightarrow{\mathcal{P}} d$ при $n \in \mathbb{N}$, как только $A_n u_n^0 \xrightarrow{\mathcal{P}} A u^0$, $A_n u_n^1 \xrightarrow{\mathcal{P}} A u^1$, $A_n u_n^T \xrightarrow{\mathcal{P}} A u^T$.

Доказательство. Покажем сначала, что решения задач (7.35) сходятся к решению задачи (7.31). Поскольку $D_n^{-1} \xrightarrow{\mathcal{PP}} D^{-1}$, ясно, что $g_{n,2} \xrightarrow{\mathcal{P}} g_2$. Используя теорему 7.5, можно показать, что $B_{n,2} \xrightarrow{\mathcal{PP}} B_2$ компактно. Тогда по теоремам 2.7 и 2.8 следует, что $d_n \xrightarrow{\mathcal{P}} d$ и теорема 7.6 доказана. $\square$

Рассмотрим дискретизацию (7.34) по времени

$$\frac{U_n^{k+1} - 2U_n^k + U_n^{k-1}}{\tau_n^2} = A_n U_n^{k+1} + \Phi_n(k\tau_n) \tilde{d}_n, \quad k \in \left\{ 1, \dots, \left[\frac{T}{\tau_n} \right] \right\}, \quad (7.36)$$

$$U_n^0 = u_n^0, \quad U_n^1 = u_n^0 + \tau_n u_n^1.$$

В силу (7.15), решение может быть записано в виде

$$U_n^k = C_k^{(n)} U_n^0 + S_k^{(n)} U_n^1 + \tau_n^2 R_n \sum_{j=2}^k S_{k+1-j}^{(n)} \Phi_n^{j-1} \tilde{d}_n, \quad (7.37)$$

где $\Phi_n^j = \Phi_n(j\tau_n)$. Используя (7.20) и (7.21) и суммируя по частям, получаем

$$\begin{aligned} R_n A_n \tau_n^2 \sum_{j=2}^k S_{k+1-j}^{(n)} \Phi_n^{j-1} &= R_n \mathfrak{B}_n^2 \tau_n^2 \sum_{j=2}^k S_{k+1-j}^{(n)} \Phi_n^{j-1} = \frac{\tau_n \mathfrak{B}_n}{2} \sum_{j=2}^k (R_{1,n}^{k+1-j} - R_{2,n}^{k+1-j}) \Phi_n^{j-1} = \\ &= \frac{\tau_n \mathfrak{B}_n}{2} \sum_{j=2}^k R_{1,n}^{k+1-j} \Phi_n^{j-1} - \frac{\tau_n \mathfrak{B}_n}{2} \sum_{j=2}^k R_{2,n}^{k+1-j} \Phi_n^{j-1} = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j=2}^k (R_{1,n}^{k+1-j} - R_{1,n}^{k-j}) \Phi_n^{j-1} + \frac{1}{2} \sum_{j=2}^k (R_{2,n}^{k+1-j} - R_{2,n}^{k-j}) \Phi_n^{j-1} = \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_{j=2}^k R_{1,n}^{k+1-j} (\Phi_n^{j-1} - \Phi_n^{j-2}) - \Phi_n^{k-1} + R_{1,n}^{k-1} \Phi_n^0 \right) + \\ &+ \frac{1}{2} \left(\sum_{j=2}^k R_{2,n}^{k+1-j} (\Phi_n^{j-1} - \Phi_n^{j-2}) - \Phi_n^{k-1} + R_{2,n}^{k-1} \Phi_n^0 \right) = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j=2}^k (R_{1,n}^{k+1-j} + R_{2,n}^{k+1-j}) (\Phi_n^{j-1} - \Phi_n^{j-2}) - \Phi_n^{k-1} + \frac{1}{2} (R_{1,n}^{k-1} + R_{2,n}^{k-1}) \Phi_n^0. \end{aligned} \quad (7.38)$$

Используя (7.22) и суммируя по частям, получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{j=2}^k (R_{1,n}^{k+1-j} + R_{2,n}^{k+1-j}) (\Phi_n^{j-1} - \Phi_n^{j-2}) &= R_n \sum_{j=2}^k (S_{k+1-j}^{(n)} - S_{k-j}^{(n)}) (\Phi_n^{j-1} - \Phi_n^{j-2}) = \\ &= R_n \left(\sum_{j=2}^k S_{k+1-j}^{(n)} (\Phi_n^{j-1} - 2\Phi_n^{j-2} + \Phi_n^{j-3}) + S_{k-1}^{(n)} (\Phi_n^0 - \Phi_n^{-1}) \right). \end{aligned} \quad (7.39)$$

Из (7.38) и (7.39) получаем, что следующее тождество выполняется для любого решения (7.36):

$$\begin{aligned} A_n U_n^k &= A_n C_k^{(n)} U_n^0 + A_n S_k^{(n)} U_n^1 + R_n \sum_{j=2}^k S_{k+1-j}^{(n)} (\Phi_n^{j-1} - 2\Phi_n^{j-2} + \Phi_n^{j-3}) \tilde{d}_n + \\ &+ \left(R_n \tau_n S_{k-1}^{(n)} \frac{\Phi_n^0 - \Phi_n^{-1}}{\tau_n} - \Phi_n^{k-1} + \frac{1}{2} (R_{1,n}^{k-1} + R_{2,n}^{k-1}) \Phi_n^0 \right) \tilde{d}_n, \quad k \geq 2. \end{aligned} \quad (7.40)$$

Как и в (7.30), определим оператор

$$D_{n,k_n} = \Phi_n^{k_n-1} - (C_{k_n}^{(n)} + S_{k_n}^{(n)}) \Phi_n^0.$$

Теорема 7.7. *Предположим, что $\Phi(\cdot) \in C^4([0, T]; B(E))$, $\Phi_n(\cdot) \in C^4([0, T]; B(E_n))$, $\mathfrak{B}_n^{-1} \xrightarrow{\mathcal{PP}} \mathfrak{B}^{-1}$ компактно, $(D_{n,k_n})^{-1} \xrightarrow{\mathcal{PP}} D^{-1}$, $k_n \tau_n = T$, резольвенты $(\lambda I_n - A_n)^{-1}$, $(\lambda I - A)^{-1}$ компактны, выполняются В'') и (7.4) и $\Phi_n^{(l)}(t) \xrightarrow{\mathcal{PP}} \Phi^{(l)}(t)$ равномерно по $t \in [0, T]$ для $l = \overline{1, 4}$. Предположим также, что задача (7.26) имеет единственное решение для любого $u^T \in D(A)$ и выполняются условия Крейна—Фатторини. Тогда существуют решения задач (7.36) для почти всех n и они сходятся к решению задачи (7.26), т.е.,*

$$U_n(t) \xrightarrow{\mathcal{P}} u(t) \quad \text{равномерно по } t \in [0, T],$$

$$u \tilde{d}_n \xrightarrow{\mathcal{P}} d \text{ при } n \in \mathbb{N}, \text{ как только } A_n u_n^T \xrightarrow{\mathcal{P}} A u^T, A_n u_n^0 \xrightarrow{\mathcal{P}} A u^0, \mathfrak{B}_n u_n^1 \xrightarrow{\mathcal{P}} \mathfrak{B} u^1.$$

Доказательство. Применим оператор $(A_n - \lambda I_n)$ к (7.37) для $\lambda \in \Delta_{cc}$. Используя (7.40), мы получаем уравнение

$$\begin{aligned} &(\Phi_n^{k-1} - (C_k^{(n)} + S_k^{(n)}) \Phi_n^0) \tilde{d}_n - \\ &- \left[R_n \sum_{j=2}^k S_{k+1-j}^{(n)} (\Phi_n^{j-1} - 2\Phi_n^{j-2} + \Phi_n^{j-3}) - \lambda R_n \tau_n^2 \sum_{j=2}^k S_{k+1-j}^{(n)} \Phi_n^{j-1} + R_n S_{k-1}^{(n)} (\Phi_n^0 - \Phi_n^{-1}) \right] \tilde{d}_n = \\ &= (A_n - \lambda I_n) [C_k^{(n)} U_n^0 + S_k^{(n)} U_n^1 - U_n^k]. \end{aligned} \quad (7.41)$$

Поскольку

$$(D_{n,k_n})^{-1} = (\Phi_n^{k_n-1} - (C_{k_n}^{(n)} + S_{k_n}^{(n)}) \Phi_n^0)^{-1} \xrightarrow{\mathcal{PP}} D^{-1},$$

мы можем переписать (7.41) в виде

$$I_n \tilde{d}_n - B_{n,3} \tilde{d}_n = g_{n,3}, \quad (7.42)$$

где

$$\begin{aligned} B_{n,3} &:= (D_{n,k_n})^{-1} \left[R_n \sum_{j=2}^{k_n} S_{k_n+1-j}^{(n)} (\Phi_n^{j-1} - 2\Phi_n^{j-2} + \Phi_n^{j-3}) - \right. \\ &\quad \left. - \lambda R_n \tau_n^2 \sum_{j=2}^{k_n} S_{k_n+1-j}^{(n)} \Phi_n^{j-1} + R_n S_{k_n-1}^{(n)} (\Phi_n^0 - \Phi_n^{-1}) \right] \end{aligned}$$

и

$$g_{n,3} := (D_{n,k_n})^{-1} (A_n - \lambda I_n) (C_{k_n}^{(n)} U_n^0 + S_{k_n}^{(n)} U_n^1 - u_n^T), \quad k_n \tau_n = T.$$

Можно показать, что $B_{n,3} \xrightarrow{\mathcal{PP}} B_2$ компактно. Сходимость конечных разностей к производным следует из [128, р. 409]. Поэтому из теорем 2.7 и 2.8 вытекает, что $\tilde{d}_n \xrightarrow{\mathcal{P}} d$. Сходимость решений $U_n(t) \xrightarrow{\mathcal{P}} u(t)$ равномерно по $t \in [0, T]$ следует из представлений (7.37) и (7.5). $\square$

Замечание 7.2. В случае гильбертова пространства и отрицательного самосопряженного оператора A в теореме 7.7 можно опустить условие, что $\mathfrak{B}_{n,3} \xrightarrow{\mathcal{PP}} \mathfrak{B}_2$ компактно, и использовать условие $\Delta_{cc} \neq \emptyset$. Действительно, в этом случае компактная сходимость корней из операторов может быть получена, как в [139], и тогда, как и ранее, можно получить компактную сходимость $B_{n,3} \xrightarrow{\mathcal{PP}} B_2$.

Замечание 7.3. В случае банахова пространства в теореме 7.7 можно опустить условие компактной сходимости $\mathfrak{B}_n^{-1} \xrightarrow{\mathcal{PP}} \mathfrak{B}^{-1}$ и использовать лишь условие $\Delta_{cc} \neq \emptyset$. В этом случае надо предполагать, что задача (7.26) допускает условие дополнительной гладкости. Более точно, предположим, что $u(\cdot) \in C^4([0, T]; B(E))$, $\Phi(\cdot) \in C^3([0, T]; B(E))$, $\Phi(0) = 0$ и $u^0, u^1 \in D(A^2)$. Тогда из предложения 7.3 следует, что $AS(\cdot, A)\Phi'(0) \in C([0, T]; E)$. Кроме того, если предположить, что для задач (7.34) и (7.26) $U_n^{(4)}(t) \xrightarrow{\mathcal{P}} u^{(4)}(t)$ равномерно по $t \in [0, T]$ для любых $\tilde{d}_n \xrightarrow{\mathcal{P}} d$, то из дискретного аналога (7.8) следует, что

$$A_n R_n \tau_n S_{k_n-1}^{(n)} \frac{\Phi_n^0 - \Phi_n^{-1}}{\tau_n} \tilde{d}_n \xrightarrow{\mathcal{P}} AS(T, A)\Phi'(0)d. \quad (7.43)$$

Это означает, что без потери общности, можно предполагать, что

$$A_n R_n \tau_n S_{k_n-1}^{(n)} \frac{\Phi_n^0 - \Phi_n^{-1}}{\tau_n} \xrightarrow{\mathcal{PP}} AS(T, A)\Phi'(0),$$

и тогда компактная сходимость $B_{n,3} \xrightarrow{\mathcal{PP}} B_2$ может быть установлена непосредственно из сходимости $A_n B_{n,3} \xrightarrow{\mathcal{PP}} AB_2$.

7.4. Обзор последних статей по гиперболическим уравнениям. В [30] изучается волновое уравнение с точечными источниками и доказывается единственность и устойчивость определения точечных источников в терминах нормы в $H^1(0, T)$ от наблюдений. Авторы обсуждают обратную задачу нахождения точечных источников $N, \alpha_1, \dots, \alpha_N, x_1, \dots, x_N$ или $\{x_1, \dots, x_N\}$ по данным наблюдения $u(\eta, t)$, $0 < t < T$. Результаты по единственности нуждаются в иррациональности числа η и в том, чтобы $T \geq 1$, а результаты по устойчивости нуждаются в некоторой априорной (но разумной) информации о неизвестных $\{x_1, \dots, x_N\}$.

В [86, 87] рассматривается обратная задача определения $p(x)$, $x \in \Omega$ в $(\partial^2 u / \partial t^2)(x, t) - \Delta u(x, t) - p(x)u(x, t) = 0$.

Посредством оценок Карлемана авторы работы [221] получают глобальную единственность и устойчивость решения обратной задачи нахождения волнового источника в H^{-1} -пространстве.

В [109] получены нижние и верхние оценки в нормах Соболева и расстояние между конечными комбинациями дираковских мер путем применения теории графов. Эти оценки применяются для решения обратной задачи для волнового уравнения.

В [37] рассмотрена гиперболическая задача в ограниченной области с гладкой границей. Авторы предполагают, что функция $\sigma(t)$ не равна нулю, кроме как на множестве меры 0. Результат о единственности гарантирует, что если $u = 0$, то $f(x) = 0$ для всех x . Доказательство основано на единственности продолжения на плоскость для волнового уравнения.

В [6] доказана единственность для обратной задачи определения коэффициента $q(x)$ в $\partial_t^2 u(x, t) = \Delta u(x, t) - q(x)u(x, t)$ для $x \in \mathbb{R}^n$ и $t > 0$ по наблюдениям $u|_{\Gamma \times (0, T)}$ и нормальной производной $\frac{\partial u}{\partial \nu}|_{\Gamma \times (0, T)}$, где Γ — произвольная C^∞ -гиперповерхность. Основным результатом статьи устанавливается единственность q из $\mathbb{R}^n$ в случае, когда $T > 0$ достаточно велико и q является аналитической около Γ и вне шара. Доказательство опирается на глобальную теорему Holmgren и оценки Карлемана.

Гиперболический оператор с главным членом $-p(x, t)\Delta$ в ограниченной области рассматривается в [85]. Авторы оценивают $u(\cdot)$ по данным Коши на открытом множестве.

В [44] рассматривается обратная граничная задача для волнового уравнения. В обратной задаче начальные условия тоже неизвестны, и авторы не предполагают положительности начальных данных. Ключевым моментом являются оценки Карлемана и точная управляемость в пространстве Соболева высокого порядка.

В [47] рассматриваются две обратные задачи для коэффициентов у квазилинейного гиперболического уравнения, где дополнительная информация для нахождения коэффициентов представляет значения решения на некоторой кривой. (Это соответствует измерениям, выполненным в движущейся точке наблюдения.) Неизвестный коэффициент зависит от пространственной переменной в первой обратной задаче и от решения уравнения во второй обратной задаче. Доказаны теоремы единственности решения обратных задач.

Предположим, что $q_i(x)$, $i = 1, 2$, — гладкие функции на $\mathbb{R}^3$, а $U_i(x, t)$ являются решениями начальной задачи $\partial_t^2 U_i - \Delta U_i - q_i(x)U_i = \delta(x, t)$, $(x, t) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$, $U_i(x, t) = 0$ для $t < 0$. Выберем R, T такие, что $0 < R < T$, и пусть C — вертикальный цилиндр $(x, t) : |x| = R, R \leq t \leq T$. В [169] показано, что если $(U_1, U_{1r}) = (U_2, U_{2r})$ на C , то $q_1 = q_2$ в кольцевой области $R \leq |x| \leq (R + T)/2$, при условии, что $\gamma > 0$ — не зависящая от r , так что

$$\int_{|x|=r} |\Delta_s(q_1 - q_2)|^2 dS_x \leq \gamma \int_{|x|=r} |q_1 - q_2|^2 dS_x,$$

$r \in [R, (R + T)/2]$. Здесь Δ_s является сферическим лапласианом на $|x| = r$.

Обратная задача определения точечных источников в колеблющейся пластине по граничным измерениям рассмотрена в [225]. Авторы показывают, что граничные наблюдения области единственным образом определяют источники за произвольно малое время наблюдений, а также устанавливают условную устойчивость.

В [183] установлены условия однозначной разрешимости обратной задачи определения параметров, зависящих от времени, в коэффициенте при неизвестной функции одномерного параболического уравнения в области со свободной границей.

Задача нахождения источника $a(t, x)F(x)$ в волновом уравнении в анизотропной среде с a , заданным одиночным измерением, изучается в [197]. Авторы используют оценки Карлемана вместе с геометрическими аргументами и дают точные условия для единственности. Они также изучают нелинейную задачу восстановления звуковой скорости в уравнении с одним измерением. Даны точные условия устойчивости. Представлены приложения к термоакустической томографии.

В [35] авторы доказывают оценки условной устойчивости логарифмического типа для волнового уравнения на прямой в $\mathbb{R}^n$, $2 \leq n \leq 3$, используя FBI-преобразование. Эти оценки применяются к обратной задаче нахождения изменяющегося по пространству источника на его расширенной прямой по наблюдениям на некотором участке и устанавливается условная устойчивость.

В [23, 24] авторы рассматривают обратную задачу определения потенциала $q(\cdot)$ в волновом уравнении $\partial_t^2 u - \Delta u + q(x)u = 0$ в ограниченной гладкой области Ω в $\mathbb{R}^n$ по конечному числу данных гиперболического отображения Дирихле—Неймана и доказывают липшицеву устойчивость определения $q(\cdot)$.

Обратная задача нахождения коэффициента второй производной в гиперболическом уравнении второго порядка с переменными коэффициентами рассмотрена в [22]. При предположениях слабой регулярности и геометрическом условии на метрику авторы доказывают единственность в многомерной гиперболической обратной задаче с одним измерением данных Неймана на подходящей части границы. Кроме того, они показывают, что единственность влечет оценку липшицевой устойчивости в пространстве L^2 для решения обратной задачи. Ключом к решению является карлемановская оценка для гиперболического оператора с переменными коэффициентами.

Гиперболический дифференциальный оператор с переменной главной частью рассмотрен в [81]. Сначала авторы дают достаточное условие для псевдовыпуклости, которое влечет оценку Карлемана и необходимое условие. Из этого достаточного условия следует, что поверхности уровня, порожденные весовой функцией в карлемановской оценке, выпуклы по отношению к лучам, заданным $a_0(x)$, а также дают более общее явное условие на a_0 для псевдовыпуклости. Затем

они применяют карлемановскую оценку к обратной задаче определения a_0 по данным Коши на боковой границе с ослабленными ограничениями на a_0 .

Обратная задача нахождения коэффициентов $q(s)$ и $p(s)$ в уравнении $u_{tt} = a^2 u_{xx} + q(u)u_t - p(u)u_x$ исследована в [179]. Как переопределение, необходимое в обратной постановке, даны два дополнительных условия: граничное условие и условие с фиксированным значением времени по добной переменной. Предложен итерационный метод для решения обратной задачи, основанный на эквивалентной системе интегральных уравнений второго рода. Доказаны теоремы единственности и существования в малой области для обратной задачи, обеспечивающие сходимость алгоритма.

В [15] авторы рассмотрели абстрактную обратную задачу второго порядка. Они ограничились абстрактными обратными задачами, когда для решения дифференциального уравнения необходимо знать значение некоторого оператора или функционала $\varphi(u(t)) = g(t)$, как функции аргумента t . Рассмотрен новый подход, основанный на теории возмущений линейных операторов. Приведены достаточные условия существования и единственности решения. В качестве применения абстрактных результатов даны некоторые приложения из теории упругости.

В [112] изучается разрешимость парболических и гиперболических обратных задач нахождения решения и неизвестной правой части, когда задано общее условие переопределения (включая случаи финального и интегрального переопределения). Доказаны некоторые теоремы однозначной разрешимости регулярных решений.

Две обратные коэффициентные задачи для квазилинейного гиперболического уравнения, где дополнительной информацией для поиска коэффициентов является значение решения на некоторой кривой, рассмотрены в [47]. Это соответствует измерениям в движущейся точке наблюдения. Незвестный коэффициент зависит от пространственной переменной в первой обратной задаче и от решения уравнения во второй обратной задаче. Автор доказывает теоремы единственности решения обратных задач.

В [178] авторы рассматривают обратную задачу, состоящую в восстановлении нелинейного источника в уравнении гиперболического типа с постоянными коэффициентами в главной части дифференциального оператора. Дополнительная информация для решения обратной задачи дается в виде финального переопределения. Получен итерационный алгоритм восстановления источника, базирующийся на теореме существования и единственности. Установлена сходимость итерационного метода для решения обратной задачи.

В [143] изучается аппроксимативно глобально сходящийся численный метод, предложенный Бейлина и Клибановым для коэффициентно обратной задачи с гиперболическим уравнением. Несмотря на то, что глобальная сходимость этого метода была доказана для одного случая, она для этого случая была доказана только частично. Этот последний случай представляет интерес, так как он показывает, что вариант этого метода работает хорошо для множества экспериментальных данных. В этой работе дано полное доказательство сходимости.

Проблема реконструкции диэлектриков по экспериментальным данным обратного рассеяния рассмотрена в [20]. Реконструкция выполнена по временным данным в противоположность более обычной частотной области данных. Экспериментальные данные были собраны с помощью микроволнового рассеяния на оборудовании, построенном в университете Северной Каролины, в Шарлотте. Система посылает электромагнитные импульсы в среду и собирает рассеянные данные на части плоскости. Пространственно распределенная диэлектрическая константа является неизвестным коэффициентом волнового уравнения. Этот коэффициент восстанавливается по данным рассеяния. Чтобы сделать это, используется глобально сходящийся численный метод.

В [151] рассмотрены существование и единственность решения одномерной обратной задачи для неоднородного линейного волнового уравнения с начальными и граничными условиями через вспомогательную задачу. Затем представлен устойчивый численный метод, состоящий в тихоновской регуляризации нулевого, первого и второго порядков к матричной форме принципа Дюамеля для решения этой обратной задачи. Устойчивость и точность представленной схемы оценены сравнением с методом сингулярного разложения. Некоторые численные эксперименты

подтвердили пригодность этого алгоритма, так как результаты находятся в хорошем соответствии с точными данными.

Благодарности. Эта работа была частично поддержана грантами РФФИ 13-01-00096-а[◇] и 15-01-00026-а[◇].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. K. R. Aida-zade and A. B. Rahimov, "An approach to numerical solution of some inverse problems for parabolic equations," *Inverse Probl. Sci. Eng.*, **22**, No. 1, 96–111 (2014).
2. Айда-заде К. Р., Рахимов А. Б. К решению одной коэффициентно-обратной задачи // Сиб. журн. индустр. мат. — 2013. — 16, № 2. — С. 3–13.
3. A. Ya. Akhundov and A. I. Gasanova, "On an inverse problem for a semilinear parabolic equation in the case of boundary value problem with nonlinear boundary condition," *Azerb. J. Math.*, **4**, No. 2, 10–15 (2014).
4. F. T. Akyildiz, Salih Tatar, and Suleyman Ulusoy, "Existence and uniqueness for a nonlinear inverse reaction-diffusion problem with a nonlinear source in higher dimensions," *Math. Methods Appl. Sci.*, **36**, No. 17, 2397–2402 (2013).
5. Yu. E. Anikonov and M. V. Neshchadim, "Analytical methods of the theory of inverse problems for parabolic equations," *J. Math. Sci.*, **195**, No. 6, 754–770 (2013).
6. Yu. E. Anikonov, J. Cheng, and M. Yamamoto, "A uniqueness result in an inverse hyperbolic problem with analyticity," *European J. Appl. Math.*, **15**, No. 5, 533–543 (2004).
7. Yu. E. Anikonov and M. Yamamoto, "Analytic representations of solutions to inverse problems for nonlinear equations," *J. Inverse Ill-Posed Probl.*, **17**, No. 7, 695–701 (2009).
8. A. Ashyralyev and F. Ozesenli Tetikoglu, "A note on Bitsadze–Samarskii type nonlocal boundary value problems: Well-posedness," *Numer. Funct. Anal. Optim.* (2013), in press.
9. A. Ashyralyev and E. Ozturk, "On Bitsadze–Samarskii type nonlocal boundary value problems for elliptic differential and difference equations: Well-posedness," *Appl. Math. Comput.*, **219**, No. 3, 1093–1107 (2013).
10. A. Ashyralyev and P. E. Sobolevskii, *New Difference Schemes for Partial Differential Equations*, Operator Theory Advances and Applications, Birkhäuser Verlag, Basel, Boston, Berlin (2004).
11. A. Ashyralyev and P. E. Sobolevskii, "A note on the difference schemes for hyperbolic equations," *Abstr. Appl. Anal.*, **6**, No. 2, 63–70 (2001).
12. A. Ashyralyev, C. Cuevas, and S. Piskarev, "On well-posedness of difference schemes for abstract elliptic equations in $L^p([0, T]; E)$ spaces," *Numer. Funct. Anal. Optim.*, Vol. 29, Issue 1&2, 43–65 (2008).
13. Charyyar Ashyralyev and Mutlu Dedetürk, "Approximation of the inverse elliptic problem with mixed boundary value conditions and overdetermination," Preprint (2014).
14. Charyyar Ashyralyev and Mutlu Dedetürk, "Approximate solution of inverse problem for elliptic equation with overdetermination," *Abstr. Appl. Anal.*, Art. ID 548017 (2013), 11 pp.
15. Fadi Awawdeh, "Perturbation method for abstract second-order inverse problems," *Nonlinear Anal.*, **72**, No. 3-4, 1379–1386 (2010).
16. N. S. Bakhvalov, N. P. Zhidkov, and G. M. Kobel'kov, *Numerical Methods* [in Russian], Nauka, Moscow (1987).
17. Guillaume Bal and Gunther Uhlmann, "Reconstruction of coefficients in scalar second-order elliptic equations from knowledge of their solutions," *Comm. Pure Appl. Math.*, **66**, No. 10, 1629–1652 (2013).
18. Guillaume Bal, Eric Bonnetier, Francois Monard, and Faouzi Triki, "Inverse diffusion from knowledge of power densities," *Inverse Probl. Imaging*, **7**, No. 2, 353–375 (2013).
19. V. Barbu and N. H. Pavel, "On the invertibility of $I \pm \exp(-tA)$, $t > 0$, with A maximal monotone," In: *World Congress of Nonlinear Analysts '92*, Vols. I–IV, de Gruyter, Berlin (1996), pp. 2231–2237.
20. Larisa Beilina, Nguyen Trung Thanh, Michael V. Klibanov, and Michael A. Fiddy, "Reconstruction from blind experimental data for an inverse problem for a hyperbolic equation," *Inverse Problems*, **30**, No. 2, 025002, (2014) 24 pp.
21. M. Bellassoued and M. Yamamoto, "Inverse source problem for a transmission problem for a parabolic equation," *J. Inverse Ill-Posed Probl.*, **14**, No. 1, 47–56 (2006).
22. M. Bellassoued and M. Yamamoto, "Determination of a coefficient in the wave equation with a single measurement," *Appl. Anal.*, **87**, No. 8, 901–920 (2008).
23. M. Bellassoued, D. Jellali, and M. Yamamoto, "Lipschitz stability for a hyperbolic inverse problem by finite local boundary data," *Appl. Anal.*, **85**, No. 10, 1219–1243 (2006).

24. M. Bellassoued, D. Jellali, and M. Yamamoto, "Stability estimate for the hyperbolic inverse boundary value problem by local Dirichlet-to-Neumann map," *J. Math. Anal. Appl.*, **343**, No. 2, 1036–1046 (2008).
25. Yu. Ya. Belov, "Inverse problems for parabolic equations," *J. Inverse Ill-Posed Probl.*, **1**, No. 4, 283–305 (1993).
26. Assia Benabdallah, Michel Cristofol, Patricia Gaitan, and Masahiro Yamamoto, "Inverse problem for a parabolic system with two components by measurements of one component," *Appl. Anal.*, **88**, No. 5, 683–709 (2009).
27. I. B. Bereznits'ka, "Inverse problem of determination of the source in a general parabolic equation," *Mat. Stud.*, **18**, No. 2, 169–176 (2002).
28. W.-J. Beyn and S. Piskarev, "Shadowing for discrete approximations of abstract parabolic equations," *Discrete Contin. Dynam. Systems Ser. B*, Vol. 10, No. 1, 19–42 (2008).
29. L. F. Borisova, "Inverse problem for parabolic high-order equations," *J. Inverse Ill-Posed Probl.*, **16**, No. 3, 209–220 (2008).
30. Gottfried Bruckner and Masahiro Yamamoto, "Determination of point wave sources by pointwise observations: Stability and reconstruction," *Inverse Problems*, **16**, No. 3, 723–748 (2000).
31. A. L. Bukhgeim, J. Cheng, and M. Yamamoto, "Conditional stability in an inverse problem of determining a non-smooth boundary," *J. Math. Anal. Appl.*, **242**, No. 1, 57–74 (2000).
32. J. Cheng and M. Yamamoto, "The global uniqueness for determining two convection coefficients from Dirichlet to Neumann map in two dimensions," *Inverse Problems*, **16**, No. 3, L25–L30 (2000).
33. Jin Cheng and Masahiro Yamamoto, "Determination of two convection coefficients from Dirichlet to Neumann map in the two-dimensional case," *SIAM J. Math. Anal.*, **35**, No. 6, 1371–1393 (2004).
34. J. Cheng and M. Yamamoto, "Identification of convection term in a parabolic equation with a single measurement," *Nonlinear Anal.*, **50**, No. 2, Ser. A: Theory Methods, 163–171 (2002).
35. Jin Cheng, Li Peng, and Masahiro Yamamoto, "The conditional stability in line unique continuation for a wave equation and an inverse wave source problem," *Inverse Problems*, **21**, No. 6, 1993–2007 (2005).
36. J. Cheng, Y. C. Hon, and M. Yamamoto, "Conditional stability for an inverse Neumann boundary problem," *Appl. Anal.*, **83**, No. 1, 49–62 (2004).
37. Jin Cheng, Guanghong Ding, and Masahiro Yamamoto, "Uniqueness along a line for an inverse wave source problem," *Comm. Partial Differential Equations*, **27**, No. 9-10, 2055–2069 (2002).
38. W. Chojnacki, "Group representations of bounded cosine functions," *J. Rein. Angew. Math.*, **478**, 61–84 (1996).
39. Wojciech Chojnacki, "On group decompositions of bounded cosine sequences," *Stud. Math.*, **181**, No. 1, 61–85 (2007).
40. Mourad Choulli and Masahiro Yamamoto, "Uniqueness and stability in determining the heat radiative coefficient, the initial temperature and a boundary coefficient in a parabolic equation," *Nonlinear Anal.*, **69**, No. 11, 3983–3998 (2008).
41. M. Choulli and M. Yamamoto, "Some stability estimates in determining sources and coefficients," *J. Inverse Ill-Posed Probl.*, **14**, No. 4, 355–373 (2006).
42. M. Choulli and M. Yamamoto, "Generic well-posedness of a linear inverse parabolic problem with diffusion parameters," *J. Inverse Ill-Posed Probl.*, **7**, No. 3, 241–254 (1999).
43. D.-K. Chyan, S.-Y. Shaw, and S. Piskarev, "On maximal regularity and semivariation of cosine operator functions," *J. London Math. Soc. (2)*, **59**, No. 3, 1023–1032 (1999).
44. Rolci Cipolatti, Masahiro Yamamoto, "An inverse problem for a wave equation with arbitrary initial values and a finite time of observations," *Inverse Problems*, **27**, No. 9, 095006 (2011), 15 pp.
45. Ph. Clement, H. J. A. M. Heijmans, S. Angenent, et al, *One-Parameter Semigroups*, CWI Monographs, 5. North-Holland Publishing Co., Amsterdam (1987).
46. A. M. Denisov, "The inverse problem for the diffusion equation with overdetermination in the form of external volume potential," *Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz.*, **51**, No. 9, 1695–1702 (2011); translation in *Comput. Math. Math. Phys.*, **51**, No. 9, 1588–1595 (2011).
47. A. M. Denisov, "Inverse problems for a quasilinear hyperbolic equation in the case of a moving observation point," *Differ. Uravn.*, **45**, No. 11, 1543–1553 (2009); translation in *Differ. Equations*, **45**, No. 11, 1577–1587 (2009).
48. A. M. Denisov and S. I. Solov'eva, "Inverse problem for the diffusion equation in the case of spherical symmetry," *Comput. Math. Math. Phys.*, **53**, No. 11, 1607–1613 (2013).
49. Sam D'haeyer, B. Tomas Johansson, and Marian Slodichka, "Reconstruction of a spacewise-dependent heat source in a time-dependent heat diffusion process," *IMA J. Appl. Math.*, **79**, No. 1, 33–53 (2014).

50. Paul DuChateau, "An adjoint method for proving identifiability of coefficients in parabolic equations," *J. Inverse Ill-Posed Probl.*, **21**, No. 5, 639–663 (2013).
51. B. Eberhardt and G. Greiner, "Baillon's theorem on maximal regularity," *Acta Appl. Math.*, **27**, 47–54 (1992).
52. Herbert Egger, Jan-Frederik Pietschmann, and Matthias Schlottbom, "Simultaneous identification of diffusion and absorption coefficients in a quasilinear elliptic problem," *Inverse Problems*, **30**, No. 3, 035009 (2014), 8 pp.
53. H. O. Fattorini, "Second order linear differential equations in Banach spaces," North Holland, Amsterdam (1985).
54. U. M. Fedus, "An inverse problem for determining the heat capacity coefficient," *Mat. Stud.*, **25**, No. 2, 126–140 (2006).
55. A. Fraguera, J. A. Infante, A. M. Ramos, and J. M. Rey, "A uniqueness result for the identification of a time-dependent diffusion coefficient," *Inverse Problems*, **29**, No. 12, 125009 (2013), 17 pp.
56. H. Fujita and A. Mizutani, "On the finite element method for parabolic equations. I. Approximation of holomorphic semi-groups," *J. Math. Soc. Japan*, **28**, No. 4, 749–771 (1976).
57. P. Gaitan, H. Isozaki, O. Poisson, S. Siltanen, and J. P. Tamminen, "Inverse problems for time-dependent singular heat conductivities-one-dimensional case," *SIAM J. Math. Anal.*, **45**, No. 3, 1675–1690 (2013).
58. Galina C. Garcia, Axel Osses, and Marcelo Tapia, "A heat source reconstruction formula from single internal measurements using a family of null controls," *J. Inverse Ill-Posed Probl.*, **21**, No. 6, 755–779 (2013).
59. N. L. Gol'dman, "On a counterexample of inverse parabolic problems with final overdetermination," *Dokl. Math.* **88**, No. 3, 714–716 (2013); translation from *Dokl. Akad. Nauk, Ross. Akad. Nauk*, **453**, No. 5, 479–481 (2013).
60. N. L. Gol'dman, "Finding the coefficient multiplying the time derivative in quasilinear parabolic equations in Hölder spaces," *Differ. Equations*, **48**, No. 12, 1563–1571 (2012); Translation from *Differ. Uravn.*, **48**, No. 12, 1597–1606 (2012).
61. N. L. Gol'dman, "On the properties of solutions of parabolic equations with unknown coefficients," *Differ. Uravn.*, **47**, No. 1, 60–69 (2011); translation in *Differ. Equations*, **47**, No. 1, 60–68 (2011).
62. N. L. Gol'dman, "Determination of the right-hand side in a quasilinear parabolic equation with final observation," *Differ. Uravn.*, **41**, No. 3, 366–374, 430 (2005); translation in *Differ. Equations*, **41**, No. 3, 384–392 (2005).
63. Omer Faruk Gozukizil and Metin Yaman, "A note on the unique solvability of an inverse problem with integral overdetermination," *Appl. Math. E-Notes*, **8**, 223–230 (2008).
64. R. D. Grigorieff, "Diskrete Approximation von Eigenwertproblemen. II. Konvergenzordnung," *Numer. Math.*, **24**, No. 5, 415–433 (1975).
65. Davide Guidetti, "Determining the source term in an abstract parabolic problem from a time integral of the solution," In: *Bruno Pini Mathematical Analysis Seminar 2011*, 20 pp., Univ. Bologna, Alma Mater Stud., Bologna (2011).
66. Davide Guidetti, "Determining the source term in an abstract parabolic problem from a time integral of the solution," *Mediterr. J. Math.*, **9**, No. 4, 611–633 (2012).
67. Davide Guidetti, "Partial reconstruction of the source term in a linear parabolic initial problem with Dirichlet boundary conditions," *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, **33**, No. 11-12, 5107–5141 (2013).
68. Davide Guidetti, "Partial reconstruction of the source term in a linear parabolic initial problem with first order boundary conditions," *Appl. Anal.*, **93**, No. 3, 511–538 (2014).
69. Davide Guidetti, "Partial reconstruction of the source term in a linear parabolic initial value problem," *J. Math. Anal. Appl.*, **355**, No. 2, 796–810 (2009).
70. Davide Guidetti, "Convergence to a stationary state of solutions to inverse problems of parabolic type," *Discrete Contin. Dynam. Systems. Ser. S*, **6**, No. 3, 711–722 (2013).
71. D. Guidetti, B. Karasozen, and S. Piskarev, "Approximation of abstract differential equations," *J. Math. Sci.*, **122**, No. 2, 3013–3054 (2004).
72. Alemdar Hasanov and Burhan Pektaş, "Identification of an unknown time-dependent heat source term from overspecified Dirichlet boundary data by conjugate gradient method," *Comput. Math. Appl.*, **65**, No. 1, 42–57 (2013).
73. Alemdar Hasanov, Muhtarbay Otelbaev, and Bakytzhan Akpayev, "Inverse heat conduction problems with boundary and final time measured output data," *Inverse Probl. Sci. Eng.*, **19**, No. 7, 985–1006 (2011).

74. Alemdar Hasanov and Marian Slodicka, "An analysis of inverse source problems with final time measured output data for the heat conduction equation: a semigroup approach," *Appl. Math. Lett.*, **26**, No. 2, 207–214 (2013).
75. Dinh Nho Hao, Phan Xuan Thanh, D. Lesnic, and M. Ivanchov, "Determination of a source in the heat equation from integral observations," *J. Comput. Appl. Math.*, **264**, 82–98 (2014).
76. A. Hazanee, M. I. Ismailov, D. Lesnic, and N. B. Kerimov, "An inverse time-dependent source problem for the heat equation," *Appl. Numer. Math.*, **69**, 13–33 (2013).
77. R. H. W. Hoppe, "A constructive approach to the Bellman semigroup," *Nonlinear Anal.*, **9**, No. 11, 1165–1181 (1985).
78. M. S. Hussein, D. Lesnic, and M. I. Ivanchov, "Simultaneous determination of time-dependent coefficients in the heat equation," *Comput. Math. Appl.*, **67**, No. 5, 1065–1091 (2014).
79. Oleg Y. Imanuvilov and Masahiro Yamamoto, "Uniqueness for inverse boundary value problems by Dirichlet-to-Neumann map on subboundaries," *Milan J. Math.*, **81**, No. 2, 187–258 (2013).
80. O. Y. Imanuvilov and Masahiro Yamamoto, "Inverse problem by Cauchy data on an arbitrary subboundary for systems of elliptic equations," *Inverse Problems*, **28**, No. 9, 095015, (2012), 30 pp.
81. Oleg Yu. Imanuvilov, Victor Isakov, and Masahiro Yamamoto, "New realization of the pseudoconvexity and its application to an inverse problem," *Appl. Anal.*, **88**, No. 5, 637–652 (2009).
82. Oleg Y. Imanuvilov, Gunther Uhlmann, and Masahiro Yamamoto, "Determination of second-order elliptic operators in two dimensions from partial Cauchy data," *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, **108**, No. 2, 467–472 (2011).
83. Oleg Yu. Imanuvilov, Gunther Uhlmann, and Masahiro Yamamoto, "Inverse boundary value problem by measuring Dirichlet data and Neumann data on disjoint sets," *Inverse Problems*, **27**, No. 8, 085007 (2011), 26 pp.
84. Oleg Yu. Imanuvilov, Gunther Uhlmann, and Masahiro Yamamoto, "Partial Cauchy data for general second order elliptic operators in two dimensions," *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, **48**, No. 4, 971–1055 (2012).
85. O. Yu. Imanuvilov and M. Yamamoto, "Stability estimate in a Cauchy problem for a hyperbolic equation with variable coefficients. Inverse problems: modeling and simulation," *J. Inverse Ill-Posed Probl.*, **13**, No. 6, 583–594 (2005).
86. Oleg Yu. Imanuvilov and Masahiro Yamamoto, "Global Lipschitz stability in an inverse hyperbolic problem by interior observations," In: *Special issue to celebrate Pierre Sabatier's 65th birthday (Montpellier, 2000)*, *Inverse Problems*, **17**, No. 4, 717–728 (2001).
87. Oleg Yu. Imanuvilov and Masahiro Yamamoto, "Global uniqueness and stability in determining coefficients of wave equations," *Comm. Partial Differential Equations*, **26**, No. 7-8, 1409–1425 (2001).
88. Victor Isakov, "Uniqueness for inverse parabolic problems with a lateral overdetermination," *Comm. Partial Differential Equations*, **14**, No. 6, 681–689 (1989).
89. Victor Isakov, "Inverse parabolic problems with the final overdetermination," *Comm. Pure Appl. Math.*, **44**, No. 2, 185–209 (1991).
90. Mansur I. Ismailov and Fatma Kanca, "An inverse coefficient problem for a parabolic equation in the case of nonlocal boundary and overdetermination conditions," *Math. Methods Appl. Sci.*, **34**, No. 6, 692–702 (2011).
91. V. K. Ivanov, V. V. Vasin, and V. P. Tanana, *Theory of Linear Ill-Posed Problems and its Applications*, VSP, Utrecht (2002).
92. V. K. Ivanov; I. V. Mel'nikova, and A. I. Filinkov, *Operator-differential Equations and Ill-posed Problems* [in Russian], Nauka, Moscow (1995).
93. M. I. Ivanchov, "Inverse problem for a multidimensional heat equation with an unknown source function," *Mat. Stud.*, **16**, No. 1, 93–98 (2001).
94. M. I. Ivanchov, "Inverse problem for semilinear parabolic equation," *Mat. Stud.*, **29**, No. 2, 181–191 (2008).
95. S. I. Kabanikhin, *Projection-Difference Methods for Calculation of Coefficients of Hyperbolic Equations* [in Russian], Nauka, Novosibirsk (1988).
96. V. L. Kamynin, "On the inverse problem of determining the leading coefficient in a parabolic equation," *Mat. Zametki*, **84**, No. 1, 48–58 (2008); translation in *Math. Notes*, **84**, No. 1-2, 45–54 (2008).
97. V. L. Kamynin, "On the unique solvability of an inverse problem for parabolic equations with a final overdetermination condition," *Mat. Zametki*, **73**, No. 2, 217–227 (2003); translation in *Math. Notes*, **73**, No. 1-2, 202–211 (2003).

98. V. L. Kamynin, "On an inverse problem of determining the right-hand side of a parabolic equation with the integral overdetermination condition," *Mat. Zametki*, **77**, No. 4, 522–534 (2005); translation in *Math. Notes*, **77**, No. 3-4, 482–493 (2005).
99. V. L. Kamynin, "The inverse problem of determining the lower-order coefficient in parabolic equations with integral observation," *Mat. Zametki*, **94**, No. 2, 207–217 (2013); translation in *Math. Notes*, **94**, No. 1-2, 205–213 (2013).
100. V. L. Kamynin, E. Franchini, "An inverse problem for a higher-order parabolic equation," *Mat. Zametki*, **64**, No. 5, 680–691 (1998); translation in *Math. Notes*, **64**, No. 5-6, 590–599 (1998).
101. Fatma Kanca, "The inverse problem of the heat equation with periodic boundary and integral overdetermination conditions," *J. Inequal. Appl.*, **2013**, No. 108 (2013), 9 pp.
102. Fatma Kanca, "Inverse coefficient problem of the parabolic equation with periodic boundary and integral overdetermination conditions," *Abstr. Appl. Anal.*, Art. ID 659804 (2013), 7 pp.
103. Fatma Kanca and Mansur I. Ismailov, "The inverse problem of finding the time-dependent diffusion coefficient of the heat equation from integral overdetermination data," *Inverse Probl. Sci. Eng.*, **20**, No. 4, 463–476 (2012).
- 104.
105. T. Kato, *Perturbation Theory for Linear Operators*. Springer-Verlag, Berlin (1995).
106. Nazim B. Kerimov and Mansur I. Ismailov, "An inverse coefficient problem for the heat equation in the case of nonlocal boundary conditions," *J. Math. Anal. Appl.*, **396**, No. 2, 546–554 (2012).
107. Sungwhan Kim and Masahiro Yamamoto, "Uniqueness in identification of the support of a source term in an elliptic equation," *SIAM J. Math. Anal.*, **35**, No. 1, 148–159 (2003).
108. J. Kisynski, "On cosine operator functions and one parameter groups of operators," *Stud. Math.*, **44**, 93–105 (1972).
109. Vilmos Komornik and Masahiro Yamamoto, "Upper and lower estimates in determining point sources in a wave equation," *Inverse Problems*, **18**, No. 2, 319–329 (2002).
110. A. B. Kostin, "The inverse problem of reconstructing a source in a parabolic equation from the nonlocal observation condition," *Mat. Sb.*, **204**, No. 10, 3–46 (2013); translation in *Sb. Math.*, **204**, No. 9-10, 1391–1434 (2013).
111. A. B. Kostin, "Counterexamples in inverse problems for parabolic, elliptic, and hyperbolic equations," *Comput. Math. Math. Phys.*, **54**, No. 5, 797–810 (2014).
112. Aleksandr Ivanovich Kozhanov and Regina Rifkhatovna Safiullova, "Linear inverse problems for parabolic and hyperbolic equations," *J. Inverse Ill-Posed Probl.*, **18**, No. 1, 1–24 (2010).
113. M. A. Krasnosel'skij, Je. A. Lifshits, and A. V. Sobolev, *Positive Linear Systems. The Method of Positive Operators*, Heldermann Verlag, Berlin (1989).
114. S. G. Krein, *Linear differential equations in Banach space*, Amer. Math. Soc., Providence, R.I. (1971).
115. S. G. Krein and G. I. Laptev, "Granichniye zadachi dlja differentsialnykh uravnenij vtorogo poryadka v Banahovom prostranstve. I.," *Differ. Uravn.*, v. 2, No. 3, 382–390 (1966).
116. S. G. Krein and G. I. Laptev, "Korrektnost granichnykh zadach dlya differentsialnykh uravnenij vtorogo poryadka v Banahovom prostranstve. II.," *Differ. Uravn.*, v. 2, No. 7, 919–926 (1966).
117. S. G. Krein and G. I. Laptev, "Granichniye zadachi dlja uravnenija v Gilbertovom prostranstve," *Dokl. AN USSR*, v. 146, No. 3, 535–538 (1962).
118. C.-C. Kuo, "On α -times integrated C -semigroups and the abstract Cauchy problem," *Studia Math.*, **142**, 201–217 (2000).
119. M. M. Lavrent'ev, V. G. Romanov, and S. P. Shishatskii, *Ill-posed Problems of Mathematical Physics and Analysis*, AMS, Providence (1986).
120. D. Lesnic, S. A. Yousefi, and M. Ivanchoy, "Determination of a time-dependent diffusivity from nonlocal conditions," *Appl. Math. Comput.*, **41**, No. 1-2, 301–320 (2013).
121. Shumin Li, Bernadette Miara, and Masahiro Yamamoto, "A Carleman estimate for the linear shallow shell equation and an inverse source problem," *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, **23**, No. 1-2, 367–380 (2009).
122. Y.-C. Li and S.-Y. Shaw, "On generators of integrated C -semigroups and C -cosine functions," *Semigroup Forum*, **47**, 29–35 (1993).
123. Y.-C. Li and S.-Y. Shaw, N -times integrated C -semigroups and the abstract Cauchy problem, *Taiwanese J. Math.*, **1**, 75–102 (1997).
124. I. K. Lifanov, L. N. Poltavskii, and G. M. Vainikko, "Hypersingular integral equations and their applications," In: *Differential and Integral Equations and Their Applications 4*, Boca Raton, FL: Chapman & Hall/CRC (2004), 396 p.

125. Leevan Ling, Y. C. Hon, and M. Yamamoto, "Inverse source identification for Poisson equation," *Inverse Probl. Sci. Eng.*, **13**, No. 4, 433–447 (2005).
126. Leevan Ling, Masahiro Yamamoto, Y. C. Hon, and Tomoya Takeuchi, "Identification of source locations in two-dimensional heat equations," *Inverse Problems*, **22**, No. 4, 1289–1305 (2006).
127. Alfredo Lorenzi and Ioan I. Vrabie, "Identification for a semilinear evolution equation in a Banach space," *Inverse Problems*, **26**, No. 8, 085009, (2010), 16 pp.
128. L. A. Lusternik and V. I. Sobolev, *Elements of Functional Analysis* [in Russian], Moscow (1965).
129. Anna S. Lyubanova, "Identification of a constant coefficient in a quasi-linear elliptic equation," *J. Inverse Ill-Posed Probl.*, **22**, No. 3, 341–356 (2014).
130. Yashar T. Mehraliyev and Fatma Kanca, "An inverse boundary value problem for a second order elliptic equation in a rectangle," *Math. Model. Anal.*, **19**, No. 2, 241–256 (2014).
131. V. A. Morozov, *Methods for the Regularization of Unstable Problems* [in Russian], Moskov. Gos. Univ., Moscow (1987).
132. V. A. Morozov, *Regular Methods for Solving Ill-Posed Problems* [in Russian], Nauka, Moscow (1987).
133. R. Nagel, et al., *One-Parameter Semigroups of Positive Operators*, Springer-Verlag, Berlin (1986).
134. D. G. Orlovsky, "An inverse problem for a second order differential equation in a Banach space," *Differ. Equations*, **25**, No. 6, 1000–1009 (1989).
135. D. G. Orlovsky, "Inverse Dirichlet problem for an equation of elliptic type," *Differ. Equations*, **44**, No. 1, 124–134 (2008).
136. D. G. Orlovsky, "An inverse problem of determining a parameter of an evolution equation," *Differ. Equations*, **26**, No. 9, 1614–1621 (1990).
137. D. G. Orlovsky, "Fredholm-type solvability of inverse boundary value problems for abstract differential equations of second order," *Differ. Equations*, **28**, No. 4, 1614–1621 (1992).
138. Dmitry G. Orlovsky, "Inverse problem for elliptic equation in a Banach space with Bitsadze–Samarsky boundary value conditions," *J. Inverse Ill-Posed Probl.*, **21**, No. 1, 141–157 (2013).
139. D. Orlovsky and S. Piskarev, "On approximation of inverse problems for abstract elliptic problems," *J. Inverse Ill-posed Problems*, **17**, No. 8, 765–782 (2009).
140. D. Orlovsky and S. Piskarev, "Approximation of inverse Bitsadze–Samarsky problem for elliptic equation with Dirichlet conditions," *Differ. Equations*, No. 7 (2013).
141. D. Orlovsky, S. Piskarev, and R. Spigler, "On approximation of inverse problems for abstract hyperbolic equations," *Taiwanese J. Math.*, Vol. 14, No. 3B, 1145–1167 (2010).
142. Ebru Ozbilge, "Determination of the unknown boundary condition of the inverse parabolic problems via semigroup method," *Bound. Value Probl.*, **2013**, No. 2 (2013), 7 pp.
143. Ebru Ozbilge, "Convergence theorem for a numerical method of a 1D coefficient inverse problem," *Appl. Anal.*, **93**, No. 8, 1611–1625 (2014).
144. S. I. Piskarev, "On approximation of holomorphic semigroups," *Tartu ÜL. Toimetised*, **492**, 3–23 (1979).
145. S. Piskarev, *Differential Equations in Banach Space and Their Approximation* [in Russian], Moscow, Lomonosov Moscow State University Publish House (2005).
146. S. Piskarev, "Discretisation of abstract hyperbolic equation," *Tartu ÜL. Toimetised*, **500**, 3–23 (1979).
147. S. Piskarev, "Solution of a second order evolution equation under the Krein–Fattorini conditions," *Differ. Equations*, **21**, 1100–1106 (1985).
148. S. I. Piskarev, "Error estimates in the approximation of semigroups of operators by Padé fractions," *Izv. Vuzov, Mat.*, **4**, 33–38 (1979).
149. S. I. Piskarev, "Approximation of positive C_0 -semigroups of operators," *Differ. Uravn.*, **27**, No. 7, 1245–1250, 1287 (1991).
150. Reza Pourgholi, Ali Abbasi Molai, and Tahereh Houliari, "Resolution of an inverse parabolic problem using sinc-Galerkin method," *TWMS J. Appl. Eng. Math.*, **3**, No. 2, 160–181 (2013).
151. Reza Pourgholi and Amin Esfahani, "An efficient numerical method for solving an inverse wave problem," *Int. J. Comput. Methods*, **10**, No. 3, 1350009, 21 pp. (2013).
152. G. Da Prato and P. Grisvard, "Sommes d'opérateurs linéaires et équations différentielles opérationnelles," *J. Math. Pures Appl.*, **54**, No. 3, 305–387 (1975).
153. G. Da Prato and P. Grisvard, "Équations d'évolution abstraites non linéaires de type parabolique," *C. R. Acad. Sci. Paris. A-B*, **283**, No. 9, A709–A711 (1976).
154. A. I. Prilepko, "Inverse problems in potential theory (elliptic, parabolic, hyperbolic equations and transport equation)," *Math. Notes*, V. 14, issue 5, 755–767 (1973).

155. A. I. Prilepko, "Selected topics on inverse problems of mathematical physics," In: *Conditionally Well Posed Problems in Mathematical Physics and Analysis* (ed. V. Romanov) [in Russian], Nauka, Novosibirsk, 151–162 (1992).
156. A. I. Prilepko and A. B. Kostin, "An estimate for the spectral radius of an operator and the solvability of inverse problems for evolution equations," *Mat. Zametki*, **53**, No. 1, 89–94 (1993).
157. A. I. Prilepko, D. G. Orlovsky, and I. A. Vasin, *Methods for Solving Inverse Problems in Mathematical Physics*, Marcel Dekker, New York (2000).
158. A. Prilepko, S. Piskarev, and S.-Y. Shaw, "On inverse problem for abstract differential equations in Banach spaces," *Inverse and Ill-posed Problems*, **15**, 831–851 (2007).
159. A. I. Prilepko and I. V. Tikhonov, "Reconstruction of the inhomogeneous term in an abstract evolution equation," *Izv. Ross. Akad. Nauk Ser. Mat.*, **58**, No. 2, 167–188 (1994).
160. A. I. Prilepko and I. V. Tikhonov, "The principle of the positivity of a solution to a linear inverse problem and its application to the heat conduction coefficient problem," *Dokl. Ross. Akad. Nauk*, **364**, No. 1, 21–23 (1999).
161. A. I. Prilepko and I. V. Tikhonov, "Uniqueness of the solution of an inverse problem for an evolution equation and applications to the transfer equation," *Mat. Zametki*, **51**, No. 2, 77–87, 158 (1992).
162. A. I. Prilepko and I. V. Tikhonov, "An inverse problem with final overdetermination for an abstract evolution equation in an ordered Banach space," *Funktsional. Anal. i Prilozhen.*, **27**, No. 1, 81–83 (1993); translation in *Funct. Anal. Appl.*, **27**, No. 1, 68–69 (1993).
163. A. I. Prilepko and D. S. Tkachenko, "The Fredholm property of the inverse source problem for parabolic systems," *Differential Equations*, **39**, No. 12, 1785–1793 (2003).
164. A. I. Prilepko and D. S. Tkachenko, "The Fredholm property and the well-posedness of the inverse source problem with integral overdetermination," *Comput. Math. Math. Phys.*, **43**, No. 9, 1338–1347 (2003).
165. A. I. Prilepko and D. S. Tkachenko, "Properties of solutions of a parabolic equation and the uniqueness of the solution of the inverse source problem with integral overdetermination," *Comput. Math. Math. Phys.*, **43**, No. 4, 537–546 (2003).
166. A. I. Prilepko and D. S. Tkachenko, "Inverse problem for a parabolic equation with integral overdetermination," *J. Inverse Ill-Posed Probl.*, **11**, No. 2, 191–218 (2003).
167. A. I. Prilepko and D. S. Tkachenko, "An inverse problem for a parabolic equation with final overdetermination," *Ill-Posed Inverse Probl.*, 345–381 (2002).
168. S. G. Pyatkov and A. G. Borichevskaya, "On an inverse problem for a parabolic equation with Cauchy data on a part of the lateral surface of a cylinder," *Sibirsk. Mat. Zh.*, **54**, No. 2, 436–449 (2013); translation in *Sib. Math. J.*, **54**, No. 2, 341–352 (2013).
169. Rakesh and Paul Sacks, "Uniqueness for a hyperbolic inverse problem with angular control on the coefficients," *J. Inverse Ill-Posed Probl.*, **19**, No. 1, 107–126 (2011).
170. Aubrey Rhoden, "Applications and adaptations of a globally convergent numerical method in inverse problems," *Thesis (Ph.D.)*, The University of Texas at Arlington, (2013), 93 pp.
171. Aubrey Rhoden, Natee Patong, Yueming Liu, Jianzhong Su, and Hanli Liu, "A globally convergent numerical method for coefficient inverse problems with time-dependent data. Applied inverse problems," *Springer Proc. Math. Stat.*, **48**, 105–128, Springer, New York (2013).
172. A. V. Rozanova, "Controllability in a nonlinear parabolic problem with integral overdetermination," *Differ. Uravn.*, **40**, No. 6, 798–815, 862 (2004); translation in *Differential Equations*, **40**, No. 6, 853–872 (2004).
173. Kenichi Sakamoto and Masahiro Yamamoto, "Inverse heat source problem from time distributing overdetermination," *Appl. Anal.*, **88**, No. 5, 735–748 (2009).
174. Aleksandr A. Samarskij and Evgenii S. Nikolaev, "Numerical methods for grid equations," Volume I: "Direct methods," Volume II: "Iterative methods," Transl. from the Russian by Stephen G. Nash. Birkhäuser Verlag., xxxv, vol. I, 242 p.; xv, vol. 2, 502 p. (1989).
175. A. A. Samarskii, *The Theory of Difference Schemes*, Marcel Dekker, New York (2001).
176. A. A. Samarskii and P. N. Vabishchevich, *Numerical Methods for Inverse Problems in Mathematical Physics*, URSS (2004).
177. A. A. Samarskii, P. P. Matus, and P. N. Vabishchevich, *Difference Schemes with Operator Factors*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht (2002).
178. A. Yu. Shcheglov, "Iterative method for recovery a nonlinear source in a hyperbolic equation with final overdetermination," *J. Inverse Ill-Posed Probl.*, **10**, No. 6, 629–641 (2002).
179. A. Yu. Shcheglov, "A method for determining the coefficients of a quasilinear hyperbolic equation," *Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz.*, **46**, No. 5, 813–833 (2006); translation in *Comput. Math. Math. Phys.*, **46**, No. 5, 776–795 (2006).

180. A. Shidfar, A. Babaei, and A. Molabahrami, "Solving the inverse problem of identifying an unknown source term in a parabolic equation," *Comput. Math. Appl.*, **60**, No. 5, 1209–1213 (2010).
181. Y. V. Sidorov, M. V. Fedoruk, and M. I. Shabunin, *Lectures on the Theory of Function of a Complex Variable* [in Russian], Nauka, Moscow (1982).
182. H. A. Snitko, "Determination of the lowest coefficient for a one-dimensional parabolic equation in a domain with free boundary," *Mat. Zh.*, **65**, No. 11, 1531–1549 (2013).
183. G. A. Snitko, "The inverse problem of finding time-dependent functions in a lower-order coefficient in a parabolic problem in a free boundary domain," *Mat. Metodi Fiz.-Mekh. Polya*, **56**, No. 2, 37–47 (2013); translation in *J. Math. Sci. (N. Y.)*, **203**, No. 1, 40–54 (2014).
184. P. E. Sobolevskii, "On elliptic equations in a Banach space," *Differential Equations*, **4**, No. 7, 1346–1348 (1969).
185. P. E. Sobolevskii, "Some properties of the solutions of differential equations in fractional spaces," *Trudy Nauchn. Issled. Inst. Mat. Voronezh. Gos. Univ.*, **74**, 68–76 (1975).
186. P. E. Sobolevskii, "The theory of semigroups and the stability of difference schemes," In: *Operator Theory in Function Spaces* [in Russian], Proc. School, Novosibirsk (1975), pp. 304–337; Nauka, Sibirsk. Otdel., Novosibirsk (1977).
187. P. E. Sobolevskii and L. M. Chebotaryeva, "Approximate solution of the Cauchy problem for an abstract hyperbolic equation by the method of lines," *Izv. Vyssh. Uchebn. Zav. Mat.*, No. 5(180), 103–116 (1977).
188. V. V. Solov'ev, "Inverse problems of source determination for the two-dimensional Poisson equation," *Comput. Math. Math. Phys.*, **44**, No. 5, 815–824 (2004).
189. V. V. Soloviev, "Inverse problems of determining a source of a Poisson equation on the plain," *Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz.*, **44**, No. 5, 862–871 (2004).
190. V. V. Solov'ev, "Inverse problems for elliptic equations on the plane. I," *Differ. Uravn.*, **42**, No. 8, 1106–1114, 1151 (2006); translation in *Differential Equations*, **42**, No. 8, 1170–1179 (2006).
191. V. V. Solov'ev, "Inverse problems for elliptic equations on the plane. II," *Differ. Uravn.*, **43**, No. 1, 101–109, 142 (2007); translation in *Differential Equations*, **43**, No. 1, 108–117 (2007).
192. V. V. Solov'ev, "Inverse coefficient problems for elliptic equations in a cylinder: I," Translation of *Differ. Uravn.*, **49**, No. 8, 1026–1035 (2013); *Differential Equations*, **49**, No. 8, 996–2005 (2013).
193. V. V. Solov'ev, "Inverse problems for elliptic equations in the space. II," *Differ. Uravn.*, **47**, No. 5, 714–723 (2011); translation in *Differential Equations*, **47**, No. 5, 715–725 (2011).
194. V. V. Solov'ev, "The inverse problem of determining the coefficient in the Poisson equation in a cylinder," *Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz.*, **51**, No. 10, 1849–1856 (2011); translation in *Comput. Math. Math. Phys.*, **51**, No. 10, 1738–1745 (2011).
195. V. V. Solov'ev, "Inverse problems of determining the source and coefficient in an elliptic equation in a rectangle," *Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz.*, **47**, No. 8, 1365–1377 (2007); translation in *Comput. Math. Math. Phys.*, **47**, No. 8, 1310–1322 (2007).
196. M. Sova, "Cosine operator functions," *Rozpr. mat.*, **49**, 1–47 (1966).
197. Plamen Stefanov and Gunther Uhlmann, "Recovery of a source term or a speed with one measurement and applications," *Trans. Amer. Math. Soc.*, **365**, No. 11, 5737–5758 (2013).
198. F. Stummel, "Diskrete Konvergenz linearer Operatoren. III," In: *Linear Operators and Approximation (Proc. Conf., Oberwolfach, 1971)*, 196–216; *Internat. Ser. Numer. Math.*, Vol. 20. Birkhäuser, Basel (1972).
199. V. Thomée, *Galérkin Finite Element Methods for Parabolic Problems*, Springer, Berlin (1997).
200. I. V. Tikhonov, "Solvability of a linear inverse problem with final overdetermination in a Banach space of L^1 -type," *Fundam. Prikl. Mat.*, **4**, No. 2, 691–708 (1998).
201. I. V. Tikhonov, "A connection between inverse problems and terminal and integral overdeterminations," *Uspekhi Mat. Nauk*, **47**, No. 4(286), 211–212 (1992).
202. I. V. Tikhonov and Yu. S. Eidelman, "A uniqueness criterion in an inverse problem for an abstract differential equation with a nonstationary inhomogeneous term," *Math. Notes*, **77**, No. 1–2, 246–262 (2005).
203. I. V. Tikhonov and Yu. S. Eidelman, "Theorems on the mapping of the point spectrum for C_0 -semigroups and their application to uniqueness problems for abstract differential equations," *Dokl. Akad. Nauk*, **394**, No. 1, 32–35 (2004).
204. I. V. Tikhonov and Yu. S. Eidelman, "Uniqueness of the solution of a two-point inverse problem for an abstract differential equation with an unknown parameter," *Differential Equations*, **36**, No. 8, 1256–1258 (2000).
205. A. N. Tikhonov, A. S. Leonov, and A. G. Yagola, *Nonlinear Ill-Posed Problems*, Vol. 1, 2. Chapman & Hall, London (1998).

206. C. C. Travis and G. F. Webb “Second order differential equations in Banach space,” In: *Nonlinear Equations in Abstract Space*, 331–361 (1978).
207. C. C. Travis and G. F. Webb “Cosine families and abstract non-linear second order differential equations,” *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **32**, No. 3–4, 75–96 (1978).
208. T. Ushijima, “Approximation theory for semi-groups of linear operators and its application to approximation of wave equations,” *Japan. J. Math. (N.S.)*, **1**, No. 1, 185–224 (1975/76).
209. G. Vainikko, *Funktionalanalysis der Diskretisierungsmethoden*, Leipzig, B. G. Teubner Verlag (1976).
210. G. Vainikko, “Approximative methods for nonlinear equations (two approaches to the convergence problem),” *Nonlinear Anal.*, **2**, 647–687 (1978).
211. G. Vainikko and S. Piskarev, “Regularly compatible operators,” *Izv. Vuzov. Mat.*, **10**, 25–36 (1977).
212. K. Van Bockstal and M. Slodichka, “Determination of a time-dependent diffusivity in a nonlinear parabolic problem,” *Inverse Probl. Sci. Eng.*, **23**, No. 2, 307–330 (2015).
213. V. V. Vasil’ev, S. G. Krein, and S. Piskarev, “Operator semigroups, cosine operator functions, and linear differential equations,” In: *Progress in Science and Technology, Vsesoyuz. Inst. Nauchn. i Tekhn. Inform. AH SSSR, Mathematical analysis, Vol. 28* [in Russian], Moscow (1990) pp. 87–202, 204.
214. V. V. Vasil’ev and S. I. Piskarev, “Differential equations in Banach spaces. II. Theory of cosine operator functions,” *J. Math. Sci. (N. Y.)*, **122**, No. 2, 3055–3174 (2004).
215. V. V. Vasil’ev and S. I. Piskarev, *Differential Equations in Banach Spaces I. Semigroup Theory* [in Russian], Moscow State University Publish House (1996), 164 p.
216. J. Voigt, “On the convex compactness property for the strong operator topology,” *Note Mat.*, **12**, 259–269 (1992).
217. Baiyu Wang, “Moving least squares method for a one-dimensional parabolic inverse problem,” *Abstr. Appl. Anal.*, Art. ID 686020 (2014), 12 pp.
218. Y. B. Wang, J. Cheng, J. Nakagawa, and M. Yamamoto, “A numerical method for solving the inverse heat conduction problem without initial value,” *Inverse Probl. Sci. Eng.*, **18**, No. 5, 655–671 (2010).
219. T. Wei and M. Yamamoto, “Reconstruction of a moving boundary from Cauchy data in one-dimensional heat equation,” *Inverse Probl. Sci. Eng.*, **17**, No. 4, 551–567 (2009).
220. Jin Wen, Masahiro Yamamoto, and Ting Wei, “Simultaneous determination of a time-dependent heat source and the initial temperature in an inverse heat conduction problem,” *Inverse Probl. Sci. Eng.*, **21**, No. 3, 485–499 (2013).
221. Masahiro Yamamoto and Xu Zhang, “Global uniqueness and stability for an inverse wave source problem for less regular data,” *J. Math. Anal. Appl.*, **263**, No. 2, 479–500 (2001).
222. Masahiro Yamamoto and Jun Zou, “Simultaneous reconstruction of the initial temperature and heat radiative coefficient,” In: *Special issue to celebrate Pierre Sabatier’s 65th birthday (Montpellier, 2000)*, *Inverse Problems*, **17**, No. 4, 1181–1202.
223. Liu Yang, Mehdi Dehghan, Jian-Ning Yu, and Guan-Wei Luo, “Inverse problem of time-dependent heat sources numerical reconstruction,” *Math. Comput. Simulation*, **81**, No. 8, 1656–1672 (2011).
224. Natalia Yaparova, “Numerical methods for solving a boundary-value inverse heat conduction problem,” *Inverse Probl. Sci. Eng.*, **22**, No. 5, 832–847 (2014).
225. Ouahiba Zair, “Determination of point sources in vibrating plate by boundary measurements,” *Appl. Anal.*, **92**, No. 10, 2061–2075 (2013).

Д. Г. Орловский

Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»

(Московский инженерно-физический институт)

E-mail: odg@bk.ru

С. И. Пискарев

Научно-исследовательский вычислительный центр МГУ им. М. В. Ломоносова;

Всероссийский институт научной и технической информации (ВИНИТИ РАН)

E-mail: piskarev@gmail.com



КРИТЕРИИ ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ И КОРРЕКТНОСТИ В ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ ОБ ИСТОЧНИКЕ

© 2017 г. А. Б. КОСТИН

Аннотация. В работе изучается связь корректности обратной задачи нахождения источника в абстрактном дифференциальном уравнении с вопросом базисности некоторого класса систем функций в гильбертовом пространстве. В качестве следствия из имеющихся результатов по корректности обратных задач получена базисность по Риссу, а при некоторых дополнительных условиях — базисность по Бари таких систем.

Ключевые слова: обратная задача, уравнение в гильбертовом пространстве, финальное наблюдение, корректность, полнота, базисность Рисса.

AMS Subject Classification: 35P05, 35R30, 47F05

СОДЕРЖАНИЕ

1. Мотивировка и наводящие соображения	82
2. Постановка задачи и результаты для диагонализуемого оператора	83
3. Доказательство основных результатов	85
4. Базисы, квадратично близкие к ОНБ	88
5. Полнота и базисность как следствие корректности обратной задачи	92
6. Постановка и результаты для оператора с базисом из собственных и присоединённых векторов	93
7. Примеры неединственности решения для параболических и эллиптических обратных задач	107
Список литературы	116

Вопросы полноты и базисности различных систем функций возникают во многих задачах и являются предметом пристального внимания. К классическим относятся результаты, полученные Ш. Агмоном, М. С. Аграновичем, Н. К. Бари, Ф. Браудером, В. А. Ильиным, М. В. Келдышем, А. Г. Костюченко, М. Г. Крейном, В. Б. Лидским, А. С. Маркусом, Е. И. Моисеевым, В. А. Садовничим, А. А. Шкаликовым и их учениками. В данной работе изучается связь корректности обратной задачи нахождения источника в абстрактном дифференциальном уравнении с вопросом базисности некоторого класса систем функций в гильбертовом пространстве. В качестве следствия из имеющихся результатов по корректности обратных задач получена базисность по Риссу, а при некоторых дополнительных условиях — базисность по Бари таких систем. Отметим, что в [25] установлена теорема о расположении на комплексной плоскости собственных значений некоторого класса линейных операторов и показана асимптотическая точность оценок комплексных собственных значений этих операторов. Полученные в этом направлении результаты позволили построить ряд примеров для линейных обратных задач, очерчивающих границы теории.

1. МОТИВИРОВКА И НАВОДЯЩИЕ СООБРАЖЕНИЯ

Рассмотрим в вещественном гильбертовом пространстве $L_2(0, 2\pi)$ полную ортогональную систему

$$E_0 = \{1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots\} = \{e_k(x)\}.$$

Зададим дополнительно набор весовых (измеримых) функций $\{\beta_k(x)\}$, удовлетворяющих условию $0 < \nu \leq \beta_k(x) \leq \mu$ на $[0, 2\pi]$ с некоторыми константами μ и ν .

Спрашивается: будет ли система $\{\beta_k(x)e_k(x)\}$ полна в $L_2(0, 2\pi)$? Близкий вопрос возникает в связи с обратными задачами для параболических уравнений, и в общем случае ответ на него отрицательный. При умножении одной из функций системы E_0 на весовую функцию $\beta(x)$ без изменения остальных, очевидно, свойство полноты сохраняется. При умножении двух функций E_0 на весовые функции $p(x)$ и $q(x)$ свойство полноты, вообще говоря, нарушается. Для основной тригонометрической системы E_0 пример приведен в [54]. Для наших дальнейших целей более наглядным является пример для системы синусов $E_1 = \{\sin kx\}$ в пространстве $L_2(0, \pi)$, который мы сейчас приведём. Рассмотрим систему функций

$$\Phi = \{p(x) \sin x, q(x) \sin 2x, \sin 3x, \dots\}$$

с положительными весами

$$p(x) = 59 + 88 \cos x + 54 \cos 2x + 24 \cos 3x,$$

$$q(x) = 34 + 21 \cos x - 29 \cos 2x - 30 \cos 3x + 17 \cos 4x + 29 \cos 5x + 3 \cos 6x - 15 \cos 7x - 12 \cos 8x.$$

Для функции $p(x)$ минимальное значение на $[0, \pi]$ равно 1 и достигается при $x = \pi$, что легко следует из представления

$$p(x) = 96 \cos^3 x + 108 \cos^2 x + 16 \cos x + 5.$$

Положительность же функции $q(x)$ устанавливается из отсутствия у неё нулей на $[0, \pi]$. Этот результат получен с использованием теоремы Штурма о числе корней многочлена на отрезке (см., например, [39, стр. 42]), применённой к многочлену

$$\tilde{q}(t) = 65 + 361t + 244t^2 - 1540t^3 - 1928t^4 + 2144t^5 + 3168t^6 - 960t^7 - 1536t^8$$

на отрезке $[-1, 1]$, здесь $\tilde{q}(\cos x) \equiv q(x)$. Функция $f(x) = \sin 2x - \sin x$ ортогональна в $L_2(0, \pi)$ системе Φ . В самом деле, введем обозначения

$$g_1(x) = f(x) \sin x, \quad g_2(x) = f(x) \sin 2x.$$

После преобразований получаем

$$g_1(x) = \frac{1}{2}(-1 + \cos x + \cos 2x - \cos 3x), \quad g_2(x) = \frac{1}{2}(1 - \cos x + \cos 3x - \cos 4x).$$

откуда вытекает, что $g_1(x)$ и $g_2(x)$ ортогональны в $L_2(0, \pi)$ функциям $p(x)$ и $q(x)$ соответственно. В обратных задачах для параболических уравнений возникают близкие вопросы относительно системы $\{\beta_k(x) \sin kx\}$, где веса $\beta_k(x)$ имеют следующий специальный вид:

$$\beta_k(x) = k^2 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^T e^{-k^2(T-\tau)} h(x, \tau) d\tau, \quad k = 1, 2, \dots,$$

с заданными $T > 0$ и функцией $h \in C^1(\overline{Q})$, где $\overline{Q} = [0, \pi] \times [0, T]$.

Из результатов по параболическим обратным задачам (см. [24]) следует, что если

$$h(x, t) \geq 0, \quad h_t(x, t) \geq 0 \quad \text{в } [0, \pi] \times [0, T], \\ h(x, T) \equiv 1 \quad \text{в } [0, \pi],$$

то система функций $\{\beta_k(x) \sin kx\}$ образует базис Бари в $L_2(0, \pi)$. В данной работе эти и другие результаты получены в линейной обратной задаче для абстрактных дифференциальных уравнений в гильбертовом пространстве. Для прозрачности изложения мы ограничимся случаем финального наблюдения.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И РЕЗУЛЬТАТЫ ДЛЯ ДИАГОНАЛИЗУЕМОГО ОПЕРАТОРА

Пусть H — сепарабельное (комплексное) гильбертово пространство, A — линейный замкнутый оператор с областью определения $D(A)$, плотной в H , резольвентное множество которого $\rho(A) \neq \emptyset$.

Предположим, что собственные векторы $\{e_k\}$ оператора A образуют ортонормированный базис (ОНБ) в H , а $\{\lambda_k\} \subset \mathbb{C}$ — соответствующие собственные значения, т.е. $Ae_k = \lambda_k e_k$. Отметим, что при этом $e_k \in D(A^*)$ и $A^*e_k = \bar{\lambda}_k e_k$, так как имеет место следующая лемма.

Лемма 2.1. Пусть A — линейный оператор в гильбертовом пространстве H , $\{e_k\}$ — ОНБ в H из собственных векторов оператора A , т.е.

$$Ae_k = \lambda_k e_k,$$

где $\lambda_k \in \mathbb{C}$. Тогда существует сопряжённый к A оператор A^* , причём $e_k \in D(A^*)$ и

$$A^*e_k = \bar{\lambda}_k e_k.$$

Доказательство. Обозначим через $\mathcal{H}$ множество конечных линейных комбинаций системы $\{e_k\}$. Имеем $\mathcal{H} \subset D(A)$ и $\overline{\mathcal{H}} = H$, так что $\overline{D(A)} = H$ и существует сопряжённый оператор A^* . Рассмотрим элемент

$$y = \sum_{l=1}^N y_l e_l \in \mathcal{H};$$

тогда

$$(Ay, e_k) = \left(\sum_{l=1}^N \lambda_l y_l e_l, e_k \right) = (y_k e_k, \bar{\lambda}_k e_k) = \left(\sum_{l=1}^N y_l e_l, \bar{\lambda}_k e_k \right) = (y, \bar{\lambda}_k e_k) = (y, A^*e_k).$$

Так как $\mathcal{H}$ плотно в H , то получим, что

$$A^*e_k = \bar{\lambda}_k e_k.$$

Лемма доказана. $\square$

Пусть оператор $-A$ является генератором полугруппы $S(t)$ класса C_0 . Рассмотрим следующую обратную задачу нахождения функции $u(t)$ и элемента $f \in H$:

$$u'(t) + Au(t) = \Phi(t)f, \quad t \in [0, T], \quad u(0) = 0, \quad (2.1)$$

$$u(T) = \chi, \quad (2.2)$$

где $\Phi(t) \in C^1([0, T]; \mathfrak{L}(H))$, $\chi \in D(A)$ заданы, $\mathfrak{L}(H)$ — множество линейных ограниченных операторов в H . Под её решением понимается такой элемент $f \in H$, что решение задачи Коши (2.1) удовлетворяет условию (2.2). Если элемент $f \in H$ задан, то при сделанных предположениях существует единственное решение (2.1)

$$u(t) \in C^1([0, T]; H) \cap C([0, T]; D(A))$$

(см., например, [76, стр. 108]).

Введём в рассмотрение систему элементов гильбертова пространства H по формулам

$$\psi_k = \bar{\beta}_k \int_0^T \exp[-\bar{\lambda}_k(T - \tau)] \Phi^*(\tau) d\tau e_k, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (2.3)$$

где $\beta_k = \lambda_k - \lambda^0$, $\lambda^0 \in \rho(A)$, λ^0 фиксировано. При этом, очевидно, $\beta_k \neq 0$ для всех $k = 1, 2, \dots$. Таким образом, $\psi_k = U_k e_k$ и

$$U_k = \bar{\beta}_k \int_0^T \exp[-\bar{\lambda}_k(T - \tau)] \Phi^*(\tau) d\tau \in \mathfrak{L}(H).$$

Возьмём произвольный элемент $f \in H$ и решим с ним задачу (2.1). Важную роль в установлении связи свойств обратной задачи (2.1), (2.2) со свойствами системы $\{\psi_k\}$ играют следующие равенства ($\forall k \in \mathbb{N}$):

$$(u(T), e_k) = \left(f, \int_0^T \exp[-\bar{\lambda}_k(T - \tau)] \Phi^*(\tau) d\tau e_k \right), \quad (2.4)$$

которые в эквивалентном виде (после умножения на β_k) запишем так:

$$\beta_k(u(T), e_k) = (f, \psi_k), \quad \text{но} \quad \bar{\beta}_k e_k = (A^* - \bar{\lambda}^0 I) e_k$$

и окончательно получим, что (2.4) эквивалентны соотношениям

$$(f, \psi_k) = ((A - \lambda^0 I)u(T), e_k), \quad k = 1, 2, \dots \quad (2.5)$$

Вывод равенств (2.4) сводится к умножению обеих частей уравнения

$$u'(t) + Au(t) = \Phi(t)f$$

на $e^{\bar{\lambda}_k t} e_k$ справа скалярно в H и интегрированию по $t \in [0, T]$ с использованием замкнутости оператора A и нулевого начального условия.

Для системы $\{\psi_k\}$ может быть поставлена проблема моментов. Найти элемент $f \in H$, если

$$(f, \psi_k) = \alpha_k \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad (2.6)$$

где $\alpha = \{\alpha_k\}$ задана. Встречающееся ниже условие $\alpha \in l_2$, как обычно, означает, что

$$\sum_k |\alpha_k|^2 < \infty.$$

Замечание 2.2. Соотношения (2.4) фактически являются результатом применения метода ортогональности для обратной задачи (2.1), (2.2) и восходят к работе П. С. Новикова [36] по единственности обратной задачи ньютонова потенциала (см. также [40]). Проблема моментов (2.6) для параболических уравнений была исследована в [43, 21, 24].

Пусть выполнены все перечисленные выше условия на оператор A и заданные функции. Основные результаты этого и следующего параграфов состоят в следующем.

Теорема 2.3. Система (2.3) полна в H тогда и только тогда, когда решение обратной задачи (2.1), (2.2) единственно.

Теорема 2.4. Разрешимость проблемы моментов эквивалентна разрешимости обратной задачи. Более точно, справедливы два утверждения:

- 1) Пусть $\alpha \in l_2$ и проблема моментов (2.6) разрешима. Тогда

$$\chi = \sum_k (\alpha_k / \beta_k) e_k \in D(A)$$

и обратная задача (2.1), (2.2) с $u(T) = \chi$ разрешима.

- 2) Пусть обратная задача (2.1), (2.2) с условием $u(T) = \chi \in D(A)$ разрешима. Тогда проблема моментов с $\alpha_k = \beta_k(\chi, e_k)$ разрешима, причём $\alpha \in l_2$.

Теорема 2.5. Пусть при всех $k \in \mathbb{N}$ обратная задача (2.1), (2.2) разрешима с $u(T) = (1/\beta_k)e_k$. Тогда существует $\{g_k\}$ — сопряжённая для $\{\psi_k\}$ система. Если решение обратной задачи единственно, то и $\{g_k\}$ единственна.

Определение 2.6. Обратная задача (2.1), (2.2) называется *корректной*, если для любого $\chi \in D(A)$ существует единственный элемент $f \in H$ — решение обратной задачи, и справедлива оценка устойчивости

$$\|f\| \leq C(\|\chi\| + \|A\chi\|),$$

где $\|f\|$ — норма f в H .

Напомним, что система $\{\psi_k\}$ называется *базисом Рисса* в H , если $\psi_k = Ue_k$, где $\{e_k\}$ — ОНБ в H и $U, U^{-1} \in \mathfrak{L}(H)$. Системы $\{\psi_k\}$ и $\{e_k\}$ называются *квадратично близкими*, если

$$\sum_k \|\psi_k - e_k\|^2 < \infty.$$

Если базис $\{\psi_k\}$ квадратично близок к некоторому ОНБ в H , то, по терминологии М. Г. Крейна [10], он называется *базисом Бари*.

Теорема 2.7. *Обратная задача (2.1), (2.2) корректна только тогда, когда система $\{\psi_k\}$ из (2.3) является базисом Рисса.*

При некоторых дополнительных условиях на оператор A доказано, что система $\{\psi_k\}$ является базисом Бари в H (см. раздел 4, стр. 88).

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ОСНОВНЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

3.1. Доказательство теоремы 2.3. Решение обратной задачи (2.1), (2.2) будет единственно, если из условия $\chi = 0$ следует, что $f = 0$.

Необходимость. Пусть $\{\psi_k\}$ полна в H . Рассмотрим $f \in H$ — решение (2.1), (2.2) с $\chi = 0$. Тогда из (2.5) имеем $(f, \psi_k) = 0$ при всех $k = 1, 2, \dots$, откуда $f = 0$ в силу полноты $\{\psi_k\}$.

Достаточность. Пусть решение обратной задачи единственно, и существует $f \in H$, такой, что

$$(f, \psi_k) = 0, \quad k = 1, 2, \dots$$

Для этого f из (2.1) однозначно определим $u(t)$; применив (2.5), получим

$$((A - \lambda^0 I) u(T), e_k) = 0, \quad k = 1, 2, \dots$$

Так как $\{e_k\}$ — базис H , то

$$(A - \lambda^0 I) u(T) = 0, \quad u(T) = 0.$$

Из единственности решения обратной задачи получим $f = 0$. Теорема 2.3 доказана. $\square$

Замечание 3.1. Теорема 2.3 остаётся верной при более слабых ограничениях на систему собственных элементов оператора A . Пусть, как и выше, A — линейный, замкнутый оператор с плотной в H областью определения $D(A)$, а $(-A)$ является генератором C_0 -полугруппы.

Теорема 2.3'. *Пусть $\{e_k\}$ — полная в H система собственных векторов оператора A^* , а $\{\bar{\lambda}_k\}$ — соответствующие собственные значения. Система элементов (2.3) полна в H тогда и только тогда, когда решение обратной задачи (2.1), (2.2) единственно.*

Доказательство теоремы при данной формулировке не изменяется.

3.2. Доказательство теоремы 2.4. 1. Пусть $\alpha \in l_2$ и проблема моментов (2.6) разрешима, т.е. существует такой элемент $f \in H$, что $(f, \psi_k) = \alpha_k$. Рассмотрим решение (2.1) с этим f , которое, в силу условий на оператор A , существует и единственно, удовлетворяет условию

$$u(t) \in C^1([0, T]; H) \cap C([0, T]; D(A)),$$

причём справедливо (2.5), т.е. при всех $k = 1, 2, \dots$ имеет место равенство

$$\beta_k(u(T), e_k) = \alpha_k.$$

Поскольку $u(T) \in D(A)$, а $\{e_k\}$ — ОНБ в H , то

$$u(T) = \sum_k (\alpha_k / \beta_k) e_k = \chi, \quad \chi \in D(A),$$

и обратная задача разрешима. Первый пункт теоремы доказан.

2. Пусть существует решение $f \in H$ обратной задачи (2.1), (2.2). В силу (2.5), при всех $k = 1, 2, \dots$ выполнено равенство

$$(f, \psi_k) = \beta_k(\chi, e_k).$$

Введем обозначение $\alpha_k = \beta_k(\chi, e_k)$ и докажем, что $\alpha \in l_2$. Последнее справедливо в силу следующей цепочки равенств:

$$\sum_k \alpha_k e_k = \sum_k (\lambda_k - \lambda^0)(\chi, e_k) e_k = \sum_k ((A - \lambda^0 I) \chi, e_k) e_k,$$

где $(A - \lambda^0 I) \chi \in H$, так как $\chi \in D(A)$. Теорема 2.4 доказана. $\square$

Следствие 3.2. Если проблема моментов разрешима при любой $\alpha \in l_2$, то обратная задача (2.1), (2.2) разрешима при любом элементе $\chi \in D(A)$.

Доказательство. Рассмотрим произвольный $\chi \in D(A)$ и возьмём $f \in H$ как решение следующей проблемы моментов:

$$(f, \psi_k) = \alpha_k \quad \text{при всех } k = 1, 2, \dots,$$

где

$$\alpha_k = (\lambda_k - \lambda^0)(\chi, e_k).$$

Поскольку $(A - \lambda^0 I) \chi \in H$, то $\alpha \in l_2$, и следовательно, искомым $f \in H$ существует. Решим прямую задачу (2.1) с этим f , учитывая, что $\lambda_k - \lambda^0 \neq 0$, и из (2.5) получим равенства

$$(u(T), e_k) = (\chi, e_k),$$

откуда $u(T) = \chi$, т.е. обратная задача разрешима. Следствие доказано. $\square$

3.3. Доказательство теоремы 2.5. Рассмотрим элементы $g_n \in H$ как решения следующих обратных задач:

$$\begin{cases} u'(t) + Au(t) = \Phi(t)g_n, & t \in [0, T]; \\ u(0) = 0, & u(T) = \frac{1}{\beta_n} e_n \end{cases}$$

для всех $n \in \mathbb{N}$. Из соотношения

$$\beta_k(u(T), e_k) = (f, \psi_k),$$

эквивалентного (2.4), получим, что

$$(g_n, \psi_k) = \beta_k / \beta_n (e_n, e_k) = \delta_{nk},$$

т.е. $\{g_n\}$ — сопряжённая к $\{\psi_k\}$ система. Если решение соответствующей обратной задачи единственно, то и $\{g_n\}$ единственна. Теорема доказана. $\square$

3.4. Доказательство теоремы 2.7. При доказательстве теоремы 2.7 нам понадобится следующая элементарная лемма.

Лемма 3.3. Пусть A — линейный замкнутый оператор с областью определения $D(A)$, плотной в H , а $\lambda \in \rho(A)$. Тогда найдутся $C_1, C_2 > 0$ такие, что для всех $u \in D(A)$ справедливы оценки:

$$C_1 (\|Au\| + \|u\|) \leq \| (A - \lambda I) u \| \leq C_2 (\|Au\| + \|u\|).$$

Доказательство. Возьмём $C_2 = \max\{|\lambda|, 1\}$; тогда второе неравенство выполняется. Так как $\lambda \in \rho(A)$, то резольвента $(A - \lambda I)^{-1}$ отображает H на $D(A)$ взаимно однозначно; а поскольку $(A - \lambda I)^{-1}$ — линейный замкнутый оператор, то по теореме Банаха $(A - \lambda I)^{-1} \in \mathfrak{L}(H; H_A)$ — линейный ограниченный оператор из H в банахово пространство

$$H_A = \left\{ u \in D(A), \|u\|_A = \|u\| + \|Au\| \right\}.$$

В силу ограниченности найдется такое $C > 0$, что для любого элемента $g \in H$ выполняется неравенство

$$\| (A - \lambda I)^{-1} g \|_A \leq C \|g\|.$$

Возьмём произвольный элемент $u \in D(A)$ и $g = (A - \lambda I)u$; тогда имеем оценку

$$\|u\|_A \leq C \|(A - \lambda I)u\|$$

и можем положить $C_1 = 1/C$. Лемма доказана. $\square$

Необходимость. Пусть обратная задача (2.1), (2.2) корректна, т.е. для любого $\chi \in D(A)$ решение существует и единственно и справедлива оценка устойчивости

$$\|f\| \leq C (\|\chi\| + \|A\chi\|).$$

Тогда по теореме 2.5 существует и единственная система $\{g_n\}$, сопряжённая к $\{\psi_k\}$. Введём оператор B , действующий в H по следующему правилу:

$$Bf = \sum_k (f, \psi_k) e_k, \quad f \in H.$$

Так как $(f, \psi_k) = \beta_k(u(T; f), e_k)$, где $u(t; f)$ — решение прямой задачи (2.1) с данным f , то $Bf \in H$ и B — линейный оператор с областью определения $D(B) = H$. Докажем, что область значений $R(B) = H$. Рассмотрим произвольный элемент $g \in H$, разложим его по базису $\{e_k\}$:

$$g = \sum_k \alpha_k e_k,$$

где $\alpha_k = (g, e_k)$, $\{\alpha_k\} \in l_2$. Возьмём

$$\chi = \sum_k (\alpha_k / \beta_k) e_k.$$

Поскольку $\inf |\beta_k| > 0$, то $\chi \in H$. Обозначим

$$\chi_N = \sum_{k=1}^N (\alpha_k / \beta_k) e_k,$$

тогда при $N \rightarrow \infty$

$$\chi_N \xrightarrow{H} \chi, \quad (A - \lambda^0 I) \chi_N \equiv \sum_{k=1}^N \alpha_k e_k \xrightarrow{H} g.$$

В силу замкнутости оператора A , отсюда получим, что $\chi \in D(A)$. Решение обратной задачи (2.1), (2.2) с этим χ существует и единственно, а тогда по теореме 2.4 существует единственный элемент $f \in H$ — решение следующей проблемы моментов:

$$(f, \psi_k) = \alpha_k, \quad k = 1, 2, \dots$$

Для этого f имеем $Bf = g$, т.е. область значений $R(B) = H$.

Ядро оператора B содержит лишь нулевой элемент, так как уравнение $Bf = 0$ равносильно равенствам $(f, \psi_k) = 0$ при всех $k \in \mathbb{N}$, откуда по теореме 2.3 имеем $f = 0$. Отсюда получаем, что существует B^{-1} с $D(B^{-1}) = R(B) = H$. Докажем, что оператор B^{-1} ограничен, для этого рассмотрим произвольный $f \in H$ и получим оценку:

$$\begin{aligned} \|Bf\|^2 &= \left\| \sum_{k=1}^{\infty} (f, \psi_k) e_k \right\|^2 = \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k (u(T), e_k) e_k \right\|^2 = \\ &= \left\| \sum_{k=1}^{\infty} ((A - \lambda^0 I) u(T), e_k) e_k \right\|^2 = \|(A - \lambda^0 I) u(T)\|^2 \geq m^2 \|f\|^2 \end{aligned}$$

с $m > 0$, в последнем неравенстве были использованы лемма 3.3 и определение корректности обратной задачи (2.1), (2.2). Отсюда получим, что

$$\|f\| = \|B^{-1} Bf\| = \|B^{-1} g\| \leq \frac{1}{m} \|g\|$$

при любом $g \in H$, а тогда $B^{-1} \in \mathfrak{L}(H)$ и B^{-1} отображает H на всё H , следовательно, по теореме Банаха, $B \in \mathfrak{L}(H)$. Из определения B получим, что $Bg_k = e_k$ для всех $k \in \mathbb{N}$, где $\{g_k\}$ — сопряжённая для $\{\psi_k\}$ система, следовательно, $\{g_k\}$ — базис Рисса, а поэтому и $\{\psi_k\}$ — базис Рисса (см., например, [10, стр. 374]).

Достаточность. Пусть $\{\psi_k\}$ — базис Рисса, тогда (см., например, [10, стр. 371]) существует и единственна $\{g_k\}$ — сопряжённая к $\{\psi_k\}$ система, которая также является базисом Рисса. Тогда для любого $f \in H$ имеем

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} (f, \psi_k) g_k,$$

и существует оператор $U \in \mathfrak{L}(H)$ такой, что $Ue_k = g_k$ при всех $k \in \mathbb{N}$ и $U^{-1} \in \mathfrak{L}(H)$.

Рассмотрим произвольный элемент $\chi \in D(A)$ и докажем, что обратная задача (2.1), (2.2) однозначно разрешима с $u(T) = \chi$. Возьмём $\alpha_k = \beta_k(\chi, e_k)$ и рассмотрим следующую проблему моментов: $(f, \psi_k) = \alpha_k$ при $k = 1, 2, \dots$. Так же, как при доказательстве теоремы 2.4, получим, что $\alpha \in l_2$. Пусть

$$f^N = \sum_{k=1}^N \alpha_k g_k = U \left(\sum_{k=1}^N \alpha_k e_k \right),$$

тогда $f^N \xrightarrow{H} Ug$, $N \rightarrow \infty$, где

$$g = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k,$$

поскольку $g_k = Ue_k$, $U \in \mathfrak{L}(H)$, $\{e_k\}$ — ОНБ в H , а

$$g^N = \sum_{k=1}^N \alpha_k e_k \xrightarrow{H} g \quad \text{при} \quad N \rightarrow \infty.$$

Обозначим

$$f = Ug = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k g_k \in H,$$

а так как $\{\psi_k\}$ — сопряжённая система, то $(f, \psi_k) = \alpha_k$ для всех $k = 1, 2, \dots$, т.е. существует и единственно решение проблемы моментов, а тогда по теореме 2.4 решение обратной задачи (2.1), (2.2) существует и единственно. Получим оценку устойчивости:

$$\begin{aligned} \|f\|^2 &\leq \|U\|^2 \|g\|^2 = \|U\|^2 \|\alpha\|_{l_2}^2 = \|U\|^2 \sum_{k=1}^{\infty} |\beta_k|^2 |(\chi, e_k)|^2 = \\ &= \|U\|^2 \|(A - \lambda^0 I) \chi\|^2 \leq C^2 (\|A\chi\| + \|\chi\|)^2. \end{aligned}$$

В последнем неравенстве использована лемма 3.3. Теорема 2.7 доказана. $\square$

4. БАЗИСЫ, КВАДРАТИЧНО БЛИЗКИЕ К ОНБ

Для удобства ссылок приведем предположения относительно оператора и заданной оператор-функции $\Phi(t)$, уже сделанные в разделе 1.

Оператор $(-A)$ является генератором полугруппы

$$S(t) \text{ класса } C_0; \tag{4.1}$$

оператор-функция

$$\Phi \in C^1([0, T]; \mathfrak{L}(H)). \tag{4.2}$$

Если элемент $f \in H$ задан, то при сделанных предположениях существует единственное решение задачи Коши (2.1)

$$u(t) \in C^1([0, T]; H) \cap C([0, T]; D(A))$$

и при $t \in [0, T]$ справедливы формулы (см. [76, стр. 108])

$$u(t) = \int_0^t S(t-s)\Phi(s)f ds; \quad (4.3)$$

$$u'(t) = S(t)\Phi(0)f - \int_0^t S(t-s)\Phi'(s)f ds. \quad (4.4)$$

Теорема 4.1. Пусть A — линейный замкнутый оператор с областью определения $D(A)$, плотной в H , имеющий ОНБ из собственных векторов, и выполнены условия (4.1), (4.2), причём $\Phi(T) = I$. Если обратная задача (2.1), (2.2) корректна и при некотором $\lambda \in \rho(A)$

$$B_\lambda = I - (A - \lambda I) \int_0^T S(t-s)\Phi(s)ds$$

является оператором Гильберта—Шмидта, т.е. $B_\lambda \in HS$, то система $\{\psi_k\}$ из (2.3) есть базис Бари.

Доказательство. При доказательстве теоремы 2.5 для $\{\psi_k\}$ построена сопряжённая система $\{g_k\}$ как решение следующей последовательности обратных задач

$$\begin{aligned} u'(t) + Au(t) &= \Phi(t)g, \quad t \in [0, T], \quad u(0) = 0; \\ u(T) &= (\lambda_k - \lambda^0)^{-1} e_k. \end{aligned}$$

Сделаем замену $v(t) = e^{\lambda t}u(t)$, тогда для $v(t)$ и g получим задачу

$$v'(t) + (A - \lambda I)v(t) = \Phi e^{\lambda t}g, \quad t \in [0, T], \quad v(0) = 0; \quad (4.5)$$

$$v(T) = \frac{e^{\lambda T}}{\lambda_k - \lambda^0} e_k.$$

Подставим $t = T$ в уравнение, получим ($g = g_k$)

$$e^{-\lambda T}v'(T) + e_k = g_k. \quad (4.6)$$

Решение прямой задачи (4.5) с данным $g \in H$ обозначим через $v(t; g)$, тогда оператор B_λ может быть представлен как $B_\lambda g = e^{-\lambda T}v'(T; g)$ в силу следующей цепочки равенств:

$$\begin{aligned} e^{-\lambda T}v'(T; g) &= e^{-\lambda T} \left(e^{\lambda T}u'(T; g) + \lambda e^{\lambda T}u(T; g) \right) = \\ &= Ig - (A - \lambda I)u(T; g) = Ig - (A - \lambda I) \int_0^T S(T-s)\Phi(s) ds g. \end{aligned}$$

Пусть $B_\lambda \in HS$, тогда уравнение (4.6) даёт $g_k - e_k = B_\lambda g_k$, а система $\{g_k\}$ есть базис Рисса как сопряжённая система к базису Рисса $\{\psi_k\}$ (по теореме 2.7). Тогда $g_k = Ue_k$, где $U, U^{-1} \in \mathfrak{L}(H)$ и $g_k - e_k = B_\lambda Ue_k$, причём $B_\lambda U \in HS$, поскольку HS — двусторонний идеал кольца $\mathfrak{L}(H)$. Отсюда получим ([10, теорема 2, стр. 376]), что $\{g_k\}$ есть базис Бари, а следовательно ([10, теорема 3, стр. 386]), и $\{\psi_k\}$ — базис Бари. Теорема доказана. $\square$

Прежде, чем привести некоторые достаточные условия того, что $B_\lambda \in HS$, докажем одну элементарную лемму о представлении оператора B_λ .

Лемма 4.2. Пусть выполнены условия (4.1), (4.2), а $\Phi(T) = I$, обозначим через S_λ C_0 -полугруппу с генератором $\lambda I - A$. Тогда B_λ представим в виде

$$B_\lambda = S(T)\Phi(0) - \int_0^T S_\lambda(\tau) \frac{d}{d\tau} \left(e^{-\lambda \tau} \Phi(T - \tau) \right) d\tau.$$

Доказательство следует из цепочки равенств:

$$\begin{aligned}
B_\lambda &= I - (A - \lambda I) \int_0^T S(T-s) \Phi(s) ds = \\
&= I + \lambda \int_0^T S(T-s) \Phi(s) ds - A \int_0^T S(T-s) \Phi(s) ds = \\
&= I + \lambda \int_0^T S(T-s) \Phi(s) ds - \left[S(T-s) \Phi(s) \Big|_0^T - \int_0^T S(T-s) \Phi'(s) ds \right] = \\
&= S(T) \Phi(0) + \int_0^T S(T-s) [\Phi'(s) + \lambda \Phi(s)] ds = \\
&= S(T) \Phi(0) + \int_0^T e^{-\lambda s} S(T-s) \frac{d}{ds} (e^{\lambda s} \Phi(s)) ds.
\end{aligned}$$

Сделаем замену $T - s = \tau$, получим

$$\begin{aligned}
B_\lambda &= S(T) \Phi(0) - \int_0^T e^{-\lambda(T-\tau)} S(\tau) \frac{d}{d\tau} (e^{\lambda(T-\tau)} \Phi(T-\tau)) d\tau = \\
&= S(T) \Phi(0) - \int_0^T S_\lambda(\tau) \frac{d}{d\tau} (e^{-\lambda\tau} \Phi(T-\tau)) d\tau.
\end{aligned}$$

Лемма доказана. $\square$

Приведём достаточные условия того, что система $\{\psi_k\}$ из (2.3) — базис Бари.

Предложение 4.3. Пусть выполнено (4.1), $\Phi \in C^2([0, T]; \mathfrak{L}(H))$, $\Phi(T) = I$, $S(t) \in HS$ при любом $t > 0$ и $(A - \lambda I)^{-1} \in HS$. Тогда $B_\lambda \in HS$ (и следовательно, при условии корректности задачи (2.1), (2.2) система $\{\psi_k\}$ есть базис Бари в H).

Доказательство. Обозначим

$$F(\tau) = \frac{d}{d\tau} [e^{-\lambda\tau} \Phi(T-\tau)],$$

по лемме 4.2 имеем

$$B_\lambda = S(T) \Phi(0) - \int_0^T S_\lambda(\tau) F(\tau) d\tau = B'_\lambda - B''_\lambda,$$

где оператор $B'_\lambda = S(T) \Phi(0) \in HS$ как произведение оператора Гильберта—Шмидта на ограниченный оператор, а $F(\tau) \in C^1([0, T]; \mathfrak{L}(H))$. Покажем, что в условиях утверждения оператор $B''_\lambda \in HS$, представив его по следующей формуле:

$$B''_\lambda = (A - \lambda I)^{-1} \int_0^T (A - \lambda I) S_\lambda(\tau) F(\tau) d\tau = (A - \lambda I)^{-1} G,$$

где $G \in \mathfrak{L}(H)$. Действительно, если $F(\tau) \in C^1([0, T]; \mathfrak{L}(H))$, то, поскольку

$$G = \int_0^T (A - \lambda I) S_\lambda(\tau) F(\tau) d\tau,$$

где $S_\lambda(\tau)$ — C_0 -полугруппа с генератором $\lambda I - A$, G можно представить в виде

$$G = -S_\lambda(\tau)F(\tau)\Big|_0^T + \int_0^T S_\lambda(\tau)F'(\tau)d\tau,$$

откуда $G \in \mathfrak{L}(H)$, а $B_\lambda'' \in HS$.

Отсюда следует, что $B_\lambda \in HS$ и по теореме 4.1 система $\{\psi_k\}$ есть базис Бари. Предложение доказано. $\square$

Для приложений может быть полезно также следующее предложение.

Предложение 4.4. Пусть $\Phi(t) \in C^1([0, T]; \mathfrak{L}(H))$, $\Phi(T) = I$, оператор A линейный, замкнутый с плотной областью определения, причем $(-A)$ является генератором аналитической полугруппы $S(t) \in HS$ при $t > 0$. Тогда $B_\lambda \in HS$ при выполнении одного из двух условий:

- 1) $(A - \lambda I)^{-\gamma} \in HS$ с некоторым $\gamma \in (0, 1)$;
- 2) $\Phi(t) \in C^{1+\alpha}([0, T]; \mathfrak{L}(H))$ и $(A - \lambda I)^{-1} \in HS$, где $\alpha \in (0, 1)$.

Доказательство. Используя обозначения из доказательства предложения 4.3, достаточно установить, что $B_\lambda'' \in HS$, где

$$B_\lambda'' = \int_0^T S_\lambda(\tau)F(\tau)d\tau,$$

а $S_\lambda(\tau)$ — полугруппа с генератором $\lambda I - A$.

В условиях п. 1) представим B_λ'' в виде

$$B_\lambda'' = (A - \lambda I)^{-\gamma} \int_0^T (A - \lambda I)^\gamma S_\lambda(\tau)F(\tau)d\tau = (A - \lambda I)^{-\gamma} G,$$

где $F(\tau) \in C([0, T]; \mathfrak{L}(H))$. Тогда, в силу оценки $\|(A - \lambda I)^\gamma \cdot S_\lambda(t)\| \leq M \cdot t^{-\gamma} \cdot e^{-\delta t}$ при $t > 0$, справедливой для аналитических полугрупп ([76, стр. 74]), получим, что $G \in \mathfrak{L}(H)$ и $B_\lambda'' \in HS$.

В условиях п. 2) функция $F(\tau) \in C^\alpha([0, T]; \mathfrak{L}(H))$ и, пользуясь замкнутостью A , оператор B_λ'' можно представить в виде предела (в сильной операторной топологии):

$$B_\lambda'' = (A - \lambda I)^{-1} \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_\varepsilon^T (A - \lambda I)S_\lambda(\tau)F(\tau)d\tau = (A - \lambda I)^{-1} \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} G_\varepsilon = (A - \lambda I)^{-1} G.$$

Покажем, что $G \in \mathfrak{L}(H)$, для этого разобьём G_ε на два слагаемых

$$G_\varepsilon = \int_\varepsilon^T (A - \lambda I)S_\lambda(\tau)(F(\tau) - F(0))d\tau + \int_\varepsilon^T (A - \lambda I)S_\lambda(\tau)F(0)d\tau = G_\varepsilon^1 + G_\varepsilon^2.$$

Отсюда, используя лемму 4.2, получим, что (в сильной операторной топологии)

$$G_\varepsilon^2 \rightarrow G^2 = \int_0^T (A - \lambda I)S_\lambda(\tau)F(0)d\tau = [I - S_\lambda(T)]F(0).$$

При любом $\varepsilon \in (0, T)$ для оператора G_ε^1 справедлива оценка ([76, стр. 74])

$$\|G_\varepsilon^1\| \leq M_1 \int_\varepsilon^T \tau^{-1} \tau^\alpha d\tau \leq C_1,$$

откуда получим, что $G_\varepsilon^1 \rightarrow G^1 \in \mathfrak{L}(H)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ в топологии сильной сходимости. Предложение доказано. $\square$

5. ПОЛНОТА И БАЗИСНОСТЬ КАК СЛЕДСТВИЕ КОРРЕКТНОСТИ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ

Обратная задача (2.1), (2.2) (для «стационарного» оператора A) достаточно хорошо изучена как в абстрактном виде, так и для конкретных уравнений (см. [43, 49, 45, 38, 74]). Для неё получен ряд достаточных условий единственности (корректности), некоторые из которых мы здесь приведём и, как следствие, получим полноту (базисность) соответствующих систем элементов.

В этом параграфе будем предполагать, что H — полуупорядоченное гильбертово пространство с конусом H_+ , условие $x \in H_+$ будем, как обычно, записывать $x \geq 0$, а соотношение $x \leq y$ означает, что $y - x \in H_+$. Относительно конуса H_+ предполагается, что он воспроизводящий, т.е. замыкание множества конечных линейных комбинаций элементов H_+ совпадает с H . Оператор B такой, что $BH_+ \subseteq H_+$, будем обозначать $B \geq 0$. Напомним, что элементы $f_1, f_2 \in H$ называются *дизъюнктными*, если $\inf \{|f_1|, |f_2|\} = 0$, здесь $|f| = \sup \{f, -f\}$.

Будем говорить, следуя [49], что *оператор функция* $\Phi(t)$ *сохраняет дизъюнктность*, если для любых f_1, f_2 — дизъюнктных элементов H и для любого $t \in [0, T]$ элементы $\Phi(t)f_1$ и $\Phi(t)f_2$ дизъюнктны. В [49] доказана следующая теорема единственности для обратной задачи (2.1), (2.2).

Теорема 5.1 (А. И. Прилепко, И. В. Тихонов [49]). *Предположим, что C_0 -полугруппа $S(t)$, порождённая оператором $(-A)$, удовлетворяет условию $S(t) \geq 0$ при $t \geq 0$, а спектр оператора $(-A)$ лежит в полуплоскости $\operatorname{Re} \lambda < 0$. Пусть $\Phi(t)$ сохраняет дизъюнктность на $[0, T]$, причем $\Phi(t) \geq 0$, $\Phi'(t) \geq 0$ при $0 \leq t \leq T$, а $\ker \Phi(T) = \{0\}$. Тогда решение обратной задачи (2.1), (2.2) единственно.*

В качестве следствия из этой теоремы и доказанной выше теоремы 2.3 получим следующий результат.

Теорема 5.2. *Пусть выполнены условия теоремы 5.1. Тогда система $\{\psi_k\}$, определённая в (2.3), полна в H .*

В [44] доказана следующая теорема о корректности обратной задачи в случае компактной полугруппы $S(t)$. Обозначим, как обычно, через

$$\omega(-A) = \lim_{t \rightarrow +\infty} t^{-1} \|S(t)\|$$

экспоненциальный тип полугруппы $S(t)$.

Теорема 5.3 (А. И. Прилепко, А. Б. Костин [44]). *Пусть оператор $(-A)$ является генератором компактной при $t > 0$ C_0 -полугруппы $S(t)$, $\Phi \in C^1([0, T]; \mathfrak{L}(H))$, $\Phi(T)^{-1} \in \mathfrak{L}(H)$. Кроме того, пусть $\omega(-A) < 0$, $S(t) \geq 0$, $\Phi(t)\Phi(T)^{-1} \geq 0$, $\Phi'(t)\Phi(T)^{-1} \geq 0$ при $t \in [0, T]$. Тогда для любого $\chi \in D(A)$ существует единственное решение обратной задачи (2.1), (2.2) и справедлива оценка устойчивости*

$$\max_{[0, T]} \|Au\| + \|f\| \leq C \|A\chi\|,$$

т.е. обратная задача (2.1), (2.2) корректна.

В качестве следствия получим такой результат.

Теорема 5.4. *Пусть выполнены условия теоремы 5.3. Тогда система $\{\psi_k\}$ есть базис Рисса в H .*

Замечание 5.5. Результаты, изложенные в этой части работы, были получены автором сначала для параболических уравнений (см. [43, 21, 22, 24]). Схема исследования без изменений оказалась применима в случае обратной задачи для абстрактного уравнения в гильбертовом пространстве. Чуть позднее А. И. Прилепко предложил другое доказательство теоремы 2.7, оно опиралось на сведение обратной задачи к операторному уравнению второго рода.

6. ПОСТАНОВКА И РЕЗУЛЬТАТЫ ДЛЯ ОПЕРАТОРА С БАЗИСОМ ИЗ СОБСТВЕННЫХ И ПРИСОЕДИНЁННЫХ ВЕКТОРОВ

Здесь мы развиваем результаты разделов 2–5, где рассматривался случай оператора с ортонормированным базисом из собственных векторов. Полученные в разделах 2–5 результаты дают критерии полноты и базисности соответствующих систем элементов в терминах обратной задачи об источнике. Вместе с тем, в стороне остался вопрос о полноте и базисности такого вида систем в случае, когда оператор (например, эллиптический с соответствующими краевыми условиями) не является самосопряжённым. Результаты работ Ш. Агмона, М. С. Аграновича, Ф. Браудера, В. А. Ильина, М. В. Келдыша, С. Г. Крейна, В. Б. Лидского, А. С. Маркуса дают достаточные условия полноты и базисности систем собственных и присоединённых функций для несамосопряжённых дифференциальных операторов. Эти результаты дают возможность изучить в таком случае связь вопросов единственности решения обратной задачи и её корректности с полнотой и базисностью соответствующих систем функций. Так же, как в разделах 2–5, для простоты изложения ограничимся задачей с финальным наблюдением. Как следствие, из имеющихся результатов по корректности обратной задачи получена базисность со скобками таких систем. Отметим, что ситуация в несамосопряжённом случае более разнообразна и интересна даже для конечномерного пространства. Соответствующие примеры даны ниже. При изложении результатов нам понадобятся некоторые известные факты и определения из теории операторов, они взяты из курса лекций М. С. Аграновича, прочитанных в Независимом Московском университете в 2004/2005 учебном году (эти лекции пока не опубликованы, но выложены Михаилом Семёновичем на его страничке в интернете <http://www.agranovich.nm.ru>). В этом параграфе для равенства по определению используется обозначение $A := B$, где слева стоит определяемый объект.

Пусть H — сепарабельное (комплексное) гильбертово пространство, A — линейный замкнутый оператор с областью определения $D(A)$, плотной в H , резольвентное множество которого $\rho(A) \neq \emptyset$, и пусть для удобства $0 \in \rho(A)$, т.е. $\exists A^{-1} \in \mathfrak{L}(H)$. Данное условие не является ограничением общности, поскольку всегда достижимо экспоненциальной заменой в задаче (6.1), (6.2). Предположим, что оператор A имеет компактную резольвенту, т.е. спектр оператора A дискретен, обозначим $\{\lambda_k\} \subset \mathbb{C}$ — его собственные значения, множество $\{\lambda_k\}$ не имеет конечных предельных точек. Как обычно, если λ — собственное значение A , то $\text{Ker}(A - \lambda I)$ — собственное подпространство, а $N(A - \lambda I)$ — корневое подпространство оператора A . В наших предположениях все корневые подпространства конечномерные, поэтому все жордановы цепочки имеют конечную длину. Величины $\dim \text{Ker}(A - \lambda I)$ и $\dim N(A - \lambda I)$ называют геометрической и алгебраической кратностью собственного значения λ соответственно. Отметим также, что $\text{Ker}(A - \lambda I) \subseteq N(A - \lambda I)$ и $\text{Ker}(A - \lambda I)$, $N(A - \lambda I)$ — инвариантные подпространства для $A - \mu I$ при любом $\mu \in \mathbb{C}$. Аналогичные свойства справедливы для множеств $\text{Ker}(A^* - \bar{\lambda}I)$ и $N(A^* - \bar{\lambda}I)$, причём это инвариантные подпространства для $A^* - \bar{\mu}I$.

Пусть оператор $(-A)$ является генератором полугруппы $S(t)$ класса C_0 . Рассмотрим следующую обратную задачу нахождения элемента $f \in H$:

$$u'(t) + Au(t) = \Phi(t)f, \quad t \in [0, T], \quad u(0) = 0; \quad (6.1)$$

$$u(T) = \chi, \quad (6.2)$$

где оператор-функция $\Phi(t) \in C^1([0, T]; \mathfrak{L}(H))$ и элемент $\chi \in D(A)$ заданы, а $\mathfrak{L}(H)$ — множество линейных ограниченных операторов в H . Под её решением понимается элемент $f \in H$ такой, что решение задачи Коши (6.1) удовлетворяет условию (6.2). Если элемент $f \in H$ задан, то при сделанных предположениях существует единственное решение (6.1) (см., например, [76, стр. 108]) $u(t) \in C^1([0, T]; H) \cap C([0, T]; D(A))$. Иногда будет необходимо подчеркнуть, что u получено именно с данным $f \in H$, тогда используем обозначение $u = u(t; f)$.

Введём в рассмотрение систему элементов H , полнота и базисность которой тесно связаны с обратной задачей (6.1), (6.2). Для построения этой системы фиксируем $\bar{\lambda}$ — собственное значение оператора A^* , сопряжённого к A . По предположению, сделанному выше, подпространство $N(A^* - \bar{\lambda}I)$ конечномерное и инвариантное, поэтому сужение A^* на $N(A^* - \bar{\lambda}I)$ есть конечномерный оператор. По теореме Жордана в $N(A^* - \bar{\lambda}I)$ можно построить базис, состоящий из жордановых

цепочек. Рассмотрим одну из таких цепочек, т.е. собственный вектор e^0 и к нему присоединённые $e^1, e^2, \dots, e^r$. По определению имеем равенства

$$(A^* - \bar{\lambda}I)e^0 = 0, \quad (A^* - \bar{\lambda}I)e^k = e^{k-1} \quad \text{для всех } k = 1, \dots, r.$$

Обозначим через $e(\bar{\lambda})$ базис Жордана корневого подпространства $N(A^* - \bar{\lambda}I)$, полученный объединением соответствующих жордановых цепочек, занумеруем эти векторы, введём систему

$$e := \bigcup_{\lambda \in \{\lambda_k\}} e(\bar{\lambda}). \quad (6.3)$$

В этих обозначениях считаем, что собственные значения занумерованы в порядке неубывания модулей, без учёта их кратностей, а все собственные векторы нормированы, т.е. $0 < |\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq \dots \leq |\lambda_n| \leq \dots$, $\|e^0\| = 1$. В дальнейшем мы также будем считать, что все векторы системы (6.3) занумерованы одним натуральным параметром в порядке неубывания $|\lambda_k|$ последовательно в каждом из корневых подпространств. Обозначим через (x, y) скалярное произведение элементов $x, y \in H$, фиксируем произвольный $f \in H$ и для решения задачи (6.1) $u = u(t; f)$ запишем тождества:

$$\int_0^T (u'(t) + Au(t), \varphi^k(t; \bar{\lambda})) dt = \int_0^T (\Phi(t)f, \varphi^k(t; \bar{\lambda})) dt \quad (6.4)$$

для всех $k = 0, 1, \dots, r$, где

$$\begin{aligned} \varphi^0(t; \bar{\lambda}) &= \exp[\bar{\lambda}(t - T)] \cdot e^0, \\ \varphi^1(t; \bar{\lambda}) &= \exp[\bar{\lambda}(t - T)] \cdot \left(\frac{t}{1!} e^0 + e^1 \right), \\ &\dots, \\ \varphi^r(t; \bar{\lambda}) &= \exp[\bar{\lambda}(t - T)] \cdot \left(\frac{t^r}{r!} e^0 + \frac{t^{r-1}}{(r-1)!} e^1 + \dots + e^r \right). \end{aligned} \quad (6.5)$$

Так как

$$\frac{d}{dt} \varphi^k = A^* \varphi^k \quad \text{для } k = 0, 1, \dots, r,$$

то, интегрируя по частям равенство (6.4), получим соотношения:

$$(u(T), \varphi^k(T; \bar{\lambda})) = \left(f, \int_0^T \Phi^*(t) \varphi^k(t; \bar{\lambda}) dt \right) \quad \text{для всех } k = 0, 1, \dots, r, \quad (6.6)$$

справедливые для всех собственных значений $\bar{\lambda}$ и всех жордановых цепочек. Обозначим $\psi(\bar{\lambda})$ систему элементов вида

$$\psi^k(\bar{\lambda}) := \int_0^T \Phi^*(t) \varphi^k(t; \bar{\lambda}) dt \quad \text{для всех } k = 0, 1, \dots, r,$$

полученную объединением таких элементов по всем цепочкам базиса Жордана корневого подпространства $N(A^* - \bar{\lambda}I)$ при фиксированном собственном значении $\bar{\lambda}$. Далее, аналогично системе (6.3), получим систему элементов

$$\psi := \bigcup_{\lambda \in \{\lambda_k\}} \psi(\bar{\lambda}). \quad (6.7)$$

Если в условии (6.2) $\chi = 0$, то обратную задачу будем называть однородной. Единственность решения обратной задачи (6.1), (6.2), очевидно, эквивалентна тому, что однородная обратная задача имеет лишь тривиальное (нулевое) решение $f = 0, u(t) = 0$.

Сформулируем первый из основных результатов этой части работы, считая, что выполнены все вышеперечисленные (в этом параграфе) условия на оператор A и заданные функции.

Теорема 6.1. Пусть система элементов $\mathbf{e}$, определённая в (6.3), полна в гильбертовом пространстве H . Однородная обратная задача имеет лишь тривиальное решение тогда и только тогда, когда система элементов ψ , определённая в (6.7), полна в H .

Доказательство. Как уже отмечалось, система равенств (6.6) справедлива для всех собственных значений и всех цепочек:

$$(u(T), \varphi^k(T; \bar{\lambda})) = \left(f, \int_0^T \Phi^*(t) \varphi^k(t; \bar{\lambda}) dt \right) \equiv (f, \psi^k(\bar{\lambda})), \quad (6.8)$$

где $u(t; f)$ — решение прямой задачи (6.1) с элементом $f \in H$.

Необходимость. Пусть однородная обратная задача имеет лишь тривиальное решение. Рассмотрим равенства (с некоторым $f \in H$):

$$(f, \psi^k(\bar{\lambda})) = 0$$

для всех собственных значений и всех цепочек Жордана.

Докажем, что $f = 0$. Из тождеств (6.8) получим, что

$$(u(T; f), \varphi^k(T; \bar{\lambda})) = 0$$

для всех собственных значений и всех цепочек, т.е. для каждого элемента системы φ . По лемме 6.3 система φ полна в H , поэтому $u(T; f) = 0$, т.е. пара $f, u(t; f)$ является решением однородной обратной задачи. По условию теоремы имеем $f = 0$ (и $u(t) = 0$), т.е. система ψ полна.

Достаточность. Пусть система ψ полна в H . Докажем, что однородная обратная задача имеет лишь тривиальное решение. Рассмотрим пару $f \in H, u(t; f)$ — произвольное решение однородной обратной задачи. Тогда имеем соотношения (6.8) с $u(T; f) = 0$, т.е. $(f, \psi^k(\bar{\lambda})) = 0$ для всех собственных значений и всех цепочек Жордана. В силу полноты системы ψ имеем $f = 0$ и тогда, в силу единственности решения прямой задачи (6.1), $u(t; f) = 0$. Теорема доказана. $\square$

Лемма 6.2. Система элементов $\{\varphi^k(T; \bar{\lambda})\}_{k=0}^r$ полна в циклическом подпространстве $[e^0, e^1, \dots, e^r]$, где через $[e^0, e^1, \dots, e^r]$ обозначена линейная оболочка векторов $e^0, e^1, \dots, e^r$.

Доказательство. Так как

$$\varphi^k(T; \bar{\lambda}) = \left(\frac{T^k}{k!} e^0 + \frac{T^{k-1}}{(k-1)!} e^1 + \dots + e^k \right) \quad \text{для всех } k = 0, 1, \dots, r, \quad (6.9)$$

то матрица перехода от циклического базиса $e: e^0, e^1, \dots, e^r$ к системе $\varphi: \varphi^0(T; \bar{\lambda}), \varphi^1(T; \bar{\lambda}), \dots, \varphi^r(T; \bar{\lambda})$ имеет вид

$$\mathbf{T}_{e \rightarrow \varphi} = \begin{pmatrix} 1 & T & \frac{T^2}{2} & \dots & \frac{T^r}{r!} \\ 0 & 1 & T & \dots & \frac{T^{r-1}}{(r-1)!} \\ 0 & 0 & 1 & T & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & T \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Она невырождена, поэтому $[e^0, e^1, \dots, e^r] = [\varphi^0(T; \bar{\lambda}), \varphi^1(T; \bar{\lambda}), \dots, \varphi^r(T; \bar{\lambda})]$. Лемма доказана. $\square$

Введём в рассмотрение систему φ , которая получается из системы $\mathbf{e}$ по правилу: каждая жорданова цепочка $e^0, e^1, \dots, e^r$ системы $\mathbf{e}$ заменяется на соответствующие элементы $\varphi^0(T; \bar{\lambda}), \varphi^1(T; \bar{\lambda}), \dots, \varphi^r(T; \bar{\lambda})$ из (6.9).

Напомним, что система элементов $\{e_j\}_1^\infty$ называется полной в H , если

$$\forall h \in H \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists C_1, \dots, C_N$$

такие, что

$$\|h - \sum_{k=1}^N C_k e_k\| < \varepsilon,$$

т.е. множество конечных линейных комбинаций элементов системы $\{e_j\}_1^\infty$ плотно в H . Мы будем пользоваться также и другим (эквивалентным) определением полноты. Систему элементов $\{e_j\}_1^\infty$ будем называть полной в гильбертовом пространстве H , если не существует ненулевого элемента H , ортогонального всем элементам системы $\{e_j\}_1^\infty$.

Лемма 6.3. Пусть e — система собственных и присоединённых элементов оператора A^* , определённая в (6.3). Система e полна в H только тогда, когда соответствующая система φ полна в H .

Доказательство. В силу леммы 6.2, множества конечных линейных комбинаций систем e и φ совпадают, поэтому они одновременно либо полны, либо нет. Лемма 6.3 доказана. $\square$

Замечание 6.4. Если система ψ из теоремы 6.1 не является полной в H , то, взяв элемент $f \neq \theta$, ортогональный всем векторам системы ψ , получим пару $f, u(t; f)$ — нетривиальное решение однородной обратной задачи, т.е. пример неединственности.

Если оператор-функция Φ имеет вид $\Phi(t) = \varphi(t)I$, где $\varphi(t)$ — скалярная, гладкая функция (так называемый скалярный случай), то, переобозначив $\bar{\lambda}$ на λ , введём целую функцию

$$L(\lambda) := \int_0^T e^{\lambda t} \varphi(t) dt,$$

которая играет ключевую роль в вопросе единственности решения в скалярном случае (см. [56]). Рассмотрим некоторую цепочку Жордана: $e^0, e^1, \dots, e^r$ и построим соответствующие функции

$$\begin{aligned} \psi^0 &= \exp(-\lambda T) L(\lambda) e^0, \\ \psi^1 &= \exp(-\lambda T) \left(\frac{L'(\lambda)}{1!} e^0 + L(\lambda) e^1 \right), \\ \psi^2 &= \exp(-\lambda T) \left(\frac{L^{(2)}(\lambda)}{2!} e^0 + \frac{L^{(1)}(\lambda)}{1!} e^1 + L(\lambda) e^2 \right), \\ &\dots \\ \psi^r &= \exp(-\lambda T) \left(\frac{L^{(r)}(\lambda)}{r!} e^0 + \dots + L(\lambda) e^r \right). \end{aligned}$$

Так как матрица перехода $T_{e \rightarrow \psi}$ имеет вид

$$\exp(-\lambda T) \begin{pmatrix} L(\lambda) & L'(\lambda) & \frac{L^{(2)}(\lambda)}{2!} & \dots & \frac{L^{(r)}(\lambda)}{r!} \\ 0 & L(\lambda) & L'(\lambda) & \dots & \frac{L^{(r-1)}(\lambda)}{(r-1)!} \\ 0 & 0 & L(\lambda) & L'(\lambda) & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & L'(\lambda) \\ 0 & \dots & \dots & \dots & L(\lambda) \end{pmatrix},$$

то условие $L(\lambda) \neq 0$ (для всех собственных значений) является необходимым и достаточным условием полноты системы ψ , если система e полна. Таким образом, в скалярном случае единственность решения обратной задачи (6.1), (6.2) полностью определяется нулями характеристической функции $L(\lambda)$ и собственными значениями оператора A . Отметим, что при минимальных ограничениях на оператор A и скалярную функцию $\varphi(t)$ это установлено в [56], [57].

Для исследования корректности обратной задачи (6.1), (6.2) нам понадобится модификация системы ψ , а именно, для каждого собственного значения $\bar{\lambda}$ (по условию $\bar{\lambda} \neq 0$) и каждой цепочки Жордана $e^0, e^1, \dots, e^r$ введём функции

$$\psi_c^0(\bar{\lambda}) := \bar{\lambda} \int_0^T \Phi^*(t) \varphi^0(t; \bar{\lambda}) dt \equiv \bar{\lambda} \psi^0(\bar{\lambda}),$$

$$\psi_c^k(\bar{\lambda}) := \bar{\lambda} \psi^k(\bar{\lambda}) + \psi^{k-1}(\bar{\lambda}) \quad \text{для всех } k = 1, \dots, r.$$

Объединение систем элементов такого вида (при фиксированном $\bar{\lambda}$) по всем цепочкам Жордана обозначим $\psi_c(\bar{\lambda})$, а тогда, аналогично (6.7), введём систему

$$\psi_c := \bigcup_{\lambda \in \{\lambda_k\}} \psi_c(\bar{\lambda}). \quad (6.10)$$

Связь с корректностью даёт следующая теорема.

Теорема 6.5. Пусть система элементов e , определённая в (6.3), — базис со скобками (базис Рисса со скобками) в гильбертовом пространстве H .

- 1) Если обратная задача (6.1), (6.2) корректна, то система ψ_c есть базис со скобками (базис Рисса со скобками) в пространстве H .
- 2) Если система ψ_c эквивалентна системе φ , то обратная задача (6.1), (6.2) корректна.

Доказательство этой теоремы использует некоторые известные факты и определения, которые для удобства приведены в следующем пункте.

6.1. Известные факты о базисах со скобками. Пусть $\{H_k\}$ — последовательность подпространств H , причём $H_i \cap H_j = \{\theta\}$ при $i \neq j$. Система $\{H_k\}$ называется полной в H , если множество сумм вида $f^{(1)} + \dots + f^{(n)}$, где $f^{(k)} \in H_k$, плотно в H . Система $\{H_k\}$ называется базисом из подпространств в H , если любой элемент $f \in H$ однозначно представим в виде:

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} f^{(k)},$$

где $f^{(k)} \in H_k$.

Пусть $\dim H_k < \infty$ при всех $k \in \mathbb{N}$, а элементы $\{e_j\}$, где $j = 1 + j_{k-1}, \dots, j_k$, образуют базис в подпространстве H_k , $0 = j_0 < j_1 < \dots$. Если система $\{H_k\}$ — базис из подпространств, то система $\{e_j\}_1^\infty$ называется базисом со скобками. Иначе, система $\{e_j\}_1^\infty$ называется базисом со скобками в H , если существует последовательность целых чисел $0 = j_0 < j_1 < \dots < j_n < \dots$ такая, что каждый вектор $f \in H$ однозначно представим в виде:

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1+j_{k-1}}^{j_k} C_j e_j \right) \quad (6.11)$$

с некоторыми коэффициентами C_j . Базис $\{G_k\}$ из подпространств называется ортогональным, если $G_k \perp G_j$ при $k \neq j$. Пусть $\{G_k\}$ — ортогональный базис из подпространств, а $B, B^{-1} \in \mathfrak{L}(H)$, причём $H_k = B(G_k)$ для всех $k \in \mathbb{N}$. Тогда $\{H_k\}$ называется базисом Рисса из подпространств, а соответствующая система элементов $\{e_j\}_1^\infty$ (составленная из базисов подпространств H_k) называется базисом Рисса со скобками в H . Несколько известных фактов о базисах со скобками для удобства ссылок сформулируем в виде лемм.

Лемма 6.6. Если система $\{f_j\}_1^\infty$ — базис со скобками H , то она полна и минимальна в H .

Доказательство. По определению базиса со скобками для каждого $f \in H$ найдутся единственным образом числа $C_j = C_j(f)$ такие, что справедливо разложение (6.11). Отсюда следует, что множество конечных линейных комбинаций элементов f_j плотно в H , т.е. $\{f_j\}_1^\infty$ полна. Отметим

также, что $C_j(f)$ — линейные функционалы, определённые на всём H , по теореме Банаха они ограничены. Предположим, например, что

$$f_1 \in \overline{\text{span}(f_j, j \neq 1)},$$

т.е. найдётся $\{g^N\} \in \text{span}(f_j, j = \overline{2, N})$ такой, что $g^N \xrightarrow{H} f_1$. Будем иметь $C_1(f_1) = 1$, $C_1(f_j) = 0$ для всех $j = 2, 3, \dots$. Как отмечалось, $C_1(f)$ — линейный непрерывный функционал, поэтому

$$C_1(g^N) = C_1\left(\sum_{j=2}^N \alpha_j f_j\right) = \sum_{j=2}^N \alpha_j C_1(f_j) = 0,$$

а с другой стороны, $C_1(g^N) \rightarrow C_1(f_1) = 1$. Полученное противоречие завершает доказательство леммы 6.6. $\square$

Лемма 6.7. *Если система $\{f_j\}_1^\infty$ — базис со скобками H , то существует сопряжённая система, которая сама является базисом со скобками.*

Доказательство. Базис со скобками по лемме 6.6 — полная и минимальная система (но не обязательно базис в H). Из минимальности следует, что существует сопряжённая система (доказательство см. [6], [10, стр. 371]). Пусть последовательность $\{g_j\}_1^\infty$ является сопряжённой к базису со скобками $\{f_j\}_1^\infty$. Докажем, что $\{g_j\}_1^\infty$ есть базис со скобками в H . По определению базиса со скобками для любого $f \in H$ имеем

$$f = \lim_{N \rightarrow \infty} f^N = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N \left(\sum_{j=1+j_{k-1}}^{j_k} (f, g_j) f_j \right) = \sum_{k=1}^\infty \left(\sum_{j=1+j_{k-1}}^{j_k} (f, g_j) f_j \right).$$

Тогда для любого вектора $\chi \in H$ сходится числовой ряд со скобками:

$$(f, \chi) = \sum_{k=1}^\infty \left(\sum_{j=1+j_{k-1}}^{j_k} (f, g_j) (f_j, \chi) \right).$$

Это означает, что последовательность проекторов $\{Q_N\}_1^\infty$, определённых равенствами

$$Q_N \chi := \sum_{k=1}^N \left(\sum_{j=1+j_{k-1}}^{j_k} (\chi, f_j) g_j \right) \xrightarrow{H} \chi, \quad N \rightarrow \infty,$$

сходится слабо к тождественному оператору, т.е. $Q_N \xrightarrow{w} I$ при $N \rightarrow \infty$. Отсюда получим, что последовательность проекторов $\{Q_N\}_1^\infty$ ограничена в $\mathfrak{L}(H)$ (см., например, [5]). Обозначим

$$\sup_N \|Q_N\| = C.$$

Система $\{g_j\}_1^\infty$ полна в H как сопряжённая к базису со скобками. Действительно, из равенства

$$f = \sum_{k=1}^\infty \left(\sum_{j=1+j_{k-1}}^{j_k} (f, g_j) f_j \right)$$

следует, что если $f \perp g_j$ при всех $j \in \mathbb{N}$, то $f = \theta$. Из полноты $\{g_j\}_1^\infty$ для всякого $\varepsilon > 0$ и любого вектора $\chi \in H$ найдутся числа $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ и $C_{j,k}^{(\varepsilon)}$, $k = 1, 2, \dots, N_\varepsilon$, $j = 1 + j_{k-1}, \dots, j_k$, такие, что выполнено неравенство

$$\left\| \chi - \sum_{k=1}^{N_\varepsilon} \left(\sum_{j=1+j_{k-1}}^{j_k} C_{j,k}^{(\varepsilon)} g_j \right) \right\| < \varepsilon \Leftrightarrow \|\chi - \chi_\varepsilon\| < \varepsilon.$$

При этом, для всех $N > N_\varepsilon$ справедливо

$$Q_N(\chi - \chi_\varepsilon) \equiv Q_N \left(\chi - \sum_{k=1}^{N_\varepsilon} \left(\sum_{j=1+j_{k-1}}^{j_k} C_{j,k}^{(\varepsilon)} g_j \right) \right) = Q_N \chi - \sum_{k=1}^{N_\varepsilon} \left(\sum_{j=1+j_{k-1}}^{j_k} C_{j,k}^{(\varepsilon)} g_j \right).$$

Поскольку $\|Q_N(\chi - \chi_\varepsilon)\| < C\varepsilon$, то при всех $N > N_\varepsilon$

$$\|Q_N\chi - \chi\| = \|Q_N(\chi - \chi_\varepsilon) + (\chi_\varepsilon - \chi)\| < (C + 1)\varepsilon.$$

Следовательно,

$$Q_N\chi \xrightarrow{H} \chi \quad \text{при} \quad N \rightarrow \infty,$$

т.е.

$$\chi = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1+j_{k-1}}^{j_k} (\chi, f_j) g_j \right)$$

и система $\{g_j\}_1^\infty$ есть базис со скобками в H . □

Аналогичное рассуждение устанавливает справедливость утверждения.

Лемма 6.8. *Сопряжённая система к базису Рисса со скобками в H сама является базисом Рисса со скобками.*

Лемма 6.9. *Пусть в унитарном пространстве U задан базис $e: e_1, \dots, e_m$, а $g: g_1, \dots, g_m$, — биортогональный с ним базис U . Если $\tilde{e}: \tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_m$, — новый базис U , а T — матрица перехода от e к $\tilde{e}$, т.е. $\tilde{e} = eT$, то система $\tilde{g}: \tilde{g}_1, \dots, \tilde{g}_m$ биортогональна к $\tilde{e}$ и находится по формуле*

$$\tilde{g} = g(T^*)^{-1}.$$

Доказательство. По определению матрицы перехода от e к $\tilde{e}$ имеем

$$\tilde{e}_i = \sum_{k=1}^m t_{ki} e_k.$$

Ищем биортогональный к g базис в виде:

$$\tilde{g}_j = \sum_{l=1}^m d_{lj} g_l,$$

т.е. $\tilde{g} = gD$, где матрица D неизвестна. Из условия биортогональности получаем

$$\delta_{ij} = (\tilde{e}_i, \tilde{g}_j) = \sum_{k,l=1}^m t_{ki} \bar{d}_{lj} (e_k, g_l) = \sum_{k=1}^m t_{ki} \bar{d}_{kj},$$

т.е. $T^T \bar{D} = E$, откуда $D = (T^*)^{-1}$. Лемма доказана. □

Лемма 6.10. *Пусть в корневом подпространстве $N(A^* - \bar{\lambda}I)$ задан базис $e: e_1, \dots, e_m$, а $\tilde{g}: \tilde{g}_1, \dots, \tilde{g}_m$ — базис корневого подпространства $N(A - \lambda I)$, причём матрица $\Gamma = (e_i, \tilde{g}_j)$ невырождена. Тогда существует матрица T такая, что система $g = \tilde{g}T$ биортогональна системе e .*

Доказательство следует из выкладки:

$$\delta_{ij} = (e_i, g_j) = \sum_{k=1}^m \bar{t}_{kj} (e_i, \tilde{g}_k) \Leftrightarrow E = \Gamma \bar{T},$$

откуда

$$T = (\bar{\Gamma})^{-1}.$$

Матрица Γ в условиях леммы невырождена, это доказано в [3]. □

Определение 6.11. Две системы элементов $e = \{e_j\}_1^\infty$ и $\varphi = \{\varphi_j\}_1^\infty$ гильбертова пространства H называются эквивалентными, если $\varphi_j = Ue_j$ для всех $j = 1, 2, \dots$, где $U, U^{-1} \in \mathfrak{L}(H)$. В этом случае для краткости будем писать $e \sim \varphi$ и $\varphi = Ue$.

Лемма 6.12. *Если система e — базис со скобками (базис Рисса со скобками) в H , а система φ ей эквивалентна, т.е. $\varphi \sim e$, то φ есть базис со скобками (базис Рисса со скобками) в H .*

Доказательство. Пусть $\mathbf{e}$ — базис со скобками в H , а $\varphi = U\mathbf{e}$, где $U, U^{-1} \in \mathfrak{L}(H)$. По лемме 6.7 существует $\boldsymbol{\eta}$ — сопряжённая к $\mathbf{e}$. Тогда система $\boldsymbol{\gamma} = (U^*)^{-1}\boldsymbol{\eta}$ — сопряжённая к φ . В самом деле,

$$(\varphi_k, \gamma_j) = (Ue_k, (U^*)^{-1}\eta_j) = \delta_{kj}.$$

Теперь утверждение следует из выкладки

$$\begin{aligned} f^N &= \sum_{k=1}^N \left(\sum_{j=1+n_{k-1}}^{n_k} (f, \gamma_j) \varphi_j \right) = \sum_{k=1}^N \left(\sum_{j=1+n_{k-1}}^{n_k} (f, (U^*)^{-1}\eta_j) Ue_j \right) = \\ &= U \left(\sum_{k=1}^N \left(\sum_{j=1+n_{k-1}}^{n_k} (U^{-1}f, \eta_j) e_j \right) \right) \longrightarrow U(U^{-1}f) = f. \end{aligned}$$

□

6.2. Доказательство теоремы 6.5. Для доказательства понадобится следующее утверждение.

Лемма 6.13. Пусть $\mathbf{e}$ — базис со скобками (базис Рисса со скобками) в H из собственных и присоединённых векторов A^* . Тогда система φ — тоже базис со скобками (базис Рисса со скобками).

Доказательство. Напомним, что система φ получается из системы $\mathbf{e}$ по правилу: каждая жорданова цепочка $e^0, e^1, \dots, e^r$ системы $\mathbf{e}$ заменяется на соответствующие элементы $\varphi^0(T; \bar{\lambda}), \varphi^1(T; \bar{\lambda}), \dots, \varphi^r(T; \bar{\lambda})$ из (6.9). Обозначим через $H_k = N(A^* - \bar{\lambda}_k)$ соответствующее корневое подпространство оператора A^* , в условиях этого параграфа $\dim H_k < \infty$. Система $\mathbf{e}$ получена объединением базисов Жордана $\mathbf{e}_k$ в каждом из этих корневых подпространств H_k . Из определения φ следует, что матрица перехода от базиса $\mathbf{e}_k$ подпространства H_k к системе φ_k имеет вид $D_k = \text{diag}(J_k^i)$, а матрицы J_k^i либо имеют вид

$$\begin{pmatrix} 1 & T & \frac{T^2}{2} & \dots & \frac{T^r}{r!} \\ 0 & 1 & T & \dots & \frac{T^{r-1}}{(r-1)!} \\ 0 & 0 & 1 & T & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & T \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

либо являются клетками первого порядка. Отсюда получаем, что φ_k есть базис подпространства H_k , а поэтому φ есть базис со скобками (базис Рисса со скобками) в H . □

Лемма 6.14. Для системы элементов ψ_c , введённых в (6.10), справедлива система равенств

$$(Au(T), \varphi^k(T; \bar{\lambda})) = (f, \psi_c^k(\bar{\lambda})) \quad (6.12)$$

для всех собственных значений и всех цепочек Жордана.

Доказательство следует из определения ψ_c и тождеств (6.6). □

Перейдём к доказательству теоремы 6.5. Пусть обратная задача (6.1), (6.2) корректна. Рассмотрим систему $\boldsymbol{\eta}$, сопряжённую к базису со скобками (базису Рисса со скобками) φ . Напомним, что в этом параграфе для простоты считаем, что $0 \in \rho(A)$. Рассмотрим последовательность обратных задач

$$u'(t) + Au(t) = \Phi(t)f, \quad t \in [0, T], \quad u(0) = 0; \quad (6.13)$$

$$u(T) = A^{-1}\eta_k, \quad (6.14)$$

где $\eta_k \in \boldsymbol{\eta}$, $k = 1, 2, \dots$. Из корректности следует, что решение каждой из задач (6.13), (6.14) существует и единственно. Получим систему решений этой последовательности обратных задач,

которую обозначим $\gamma = \{\gamma_j\}_1^\infty$. Из тождеств (6.12) следует, что γ является сопряжённой системой для ψ_c . Рассмотрев уравнение (6.13) при $t = T$, получим верные равенства (при всех $k \in \mathbb{N}$)

$$u_t(T; \gamma_k) + \eta_k = \Phi(T)\gamma_k \iff (\Phi(T) - B)\gamma_k = \eta_k,$$

где $U = \Phi(T) - B$ — линейный ограниченный оператор в H . Из корректности обратной задачи следует оценка $\|\gamma_k\| \leq C\|\eta_k\|$, а также, что оператор U имеет обратный, ограниченный $U, U^{-1} \in \mathfrak{L}(H)$. Таким образом, система $\gamma = U^{-1}\eta$ является базисом со скобками (базисом Рисса со скобками) как система, эквивалентная базису со скобками (базису Рисса со скобками) (по лемме 6.12). А тогда и система ψ_c как сопряжённая к γ является базисом со скобками (базисом Рисса со скобками) в H (по леммам 6.7 и 6.8). Первое утверждение теоремы доказано.

Предположим, что $\psi_c = U\varphi$, где $U, U^{-1} \in \mathfrak{L}(H)$, $\varphi = \{\varphi_k\}_1^\infty$ — базис со скобками (см. лемму 6.13). По лемме 6.12 система $\psi_c = \{\psi_{c,k}\}_1^\infty$ является базисом со скобками. Если η — сопряжённая к φ , то $\gamma = (U^*)^{-1}\eta$ — сопряжённая к ψ_c ; действительно

$$(\psi_{c,k}, \gamma_j) = (U\varphi_k, (U^*)^{-1}\eta_j) = (\varphi_k, \eta_j) = \delta_{kj}.$$

Возьмём произвольный элемент $\chi \in D(A)$ и докажем, что обратная задача (6.1), (6.2) имеет единственное решение и справедлива оценка устойчивости. Введём числа

$$\alpha_k = (A\chi, \varphi_k) \quad \text{для всех } k = 1, 2, \dots$$

и рассмотрим проблему моментов

$$\alpha_k = (f, \psi_{c,k}) \quad \text{для всех } k = 1, 2, \dots \quad (6.15)$$

Рассмотрим последовательность элементов

$$\begin{aligned} f^N &= \sum_{k=1}^N \left(\sum_{j=1+n_{k-1}}^{n_k} \alpha_j \gamma_j \right) \equiv \sum_{k=1}^N \left(\sum_{j=1+n_{k-1}}^{n_k} (A\chi, \varphi_j) (U^*)^{-1} \eta_j \right) \equiv \\ &\equiv (U^*)^{-1} \sum_{k=1}^N \left(\sum_{j=1+n_{k-1}}^{n_k} (A\chi, \varphi_j) \eta_j \right) \xrightarrow{H} (U^*)^{-1} A\chi =: f. \end{aligned}$$

Найденный $f \in H$ даёт решение проблемы моментов (6.15). С этим элементом f решим прямую задачу (6.1), получим функцию $u = u(t; f)$, запишем для неё тождества (6.12) и получим такие равенства

$$(A\chi, \varphi_k) = \alpha_k = (f, \psi_{c,k}) = (Au(T; f), \varphi_k) \quad \text{для всех } k = 1, 2, \dots$$

Из полноты φ и условия $0 \in \rho(A)$ будем иметь равенство $u(T; f) = \chi$, т.е. пара f и $u = u(t; f)$ является решением обратной задачи (6.1), (6.2). Единственность этого решения следует из полноты системы ψ_c , а искомая оценка устойчивости из равенства

$$f = (U^*)^{-1} A\chi,$$

поскольку в условиях доказываемой теоремы

$$(U^*)^{-1} \in \mathfrak{L}(H).$$

Теорема 6.5 полностью доказана. $\square$

6.3. Некоторые примеры. В этом пункте приведём ряд примеров, показывающих существенность условий доказанных теорем. Начнём с примера для оператора с собственным значением бесконечной кратности и неединственным решением обратной задачи.

Пример 6.15. Идея построения этого и следующего примеров восходит к знаменитой работе А. Н. Тихонова [78]. Предположим, что у оператора A имеется цепочка Жордана бесконечной длины:

$$e^0, e^1, \dots, e^n, \dots,$$

где e^0 — собственный вектор A , отвечающий собственному значению $\lambda = 0$, а e^k — к нему присоединённые, т.е.

$$Ae^0 = \theta, \quad Ae^k = e^{k-1}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Тогда формально построенный ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \varphi^{(k)}(t) e^k$$

с функцией $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$, $\text{supp } \varphi(t) \subseteq [0, T]$, даёт нетривиальное (формальное) решение задачи

$$u'(t) = Au(t), \quad t \in [0, T], \quad u(0) = u(T) = 0. \quad (6.16)$$

Это проверяется подстановкой с учётом равенств $\varphi^{(k)}(0) = \varphi^{(k)}(T) = 0$ для всех $k = 0, 1, \dots$

Приведем такой оператор, цепочку e^k и функцию $\varphi(t)$. Для этого в пространстве l_2 со стандартным ОНБ $\{e_k\}_{k=1}^\infty$ рассмотрим линейный оператор с матрицей (a_{ij}) вида

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \cdot 2 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 3 \cdot 4 & \dots & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & (2n-1)2n & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix},$$

т.е. $a_{j,j+1} = (2j-1)2j$ при $j = 1, 2, \dots$, а все остальные элементы a_{ij} этой матрицы равны нулю. Этот оператор имеет следующую бесконечную цепочку Жордана:

$$\begin{aligned} e^0 &= (1, 0, \dots), & Ae^0 &= \theta, \\ e^1 &= (0, \frac{1}{2!}, 0, \dots), & Ae^1 &= e^0, \\ e^2 &= (0, 0, \frac{1}{4!}, 0, \dots), & Ae^2 &= e^1, \\ &\dots & &\dots \\ e^n &= (\underbrace{0, \dots, 0}_n, \frac{1}{(2n)!}, 0, \dots), & Ae^n &= e^{n-1}, \\ &\dots & &\dots \end{aligned} \quad (6.17)$$

Норма элемента e^n в пространстве l_2 равна $\|e^n\| = \frac{1}{(2n)!}$. Прямое вычисление даёт равенства

$$Ae_1 = \theta, \quad Ae_2 = 1 \cdot 2e_1, \quad Ae_3 = 3 \cdot 4e_2, \quad Ae_{n+1} = (2n-1)2ne_n, \quad \dots$$

Для вектора

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k e_k \in l_2$$

имеем

$$Ax = (1 \cdot 2x_2, 3 \cdot 4x_3, \dots, (2n-1)2nx_{n+1}, \dots).$$

Условие $Ax \in l_2$ означает, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} |(2k-1)2k|^2 |x_{k+1}|^2 < \infty.$$

Таким образом, область определения оператора A задаётся условием

$$\mathcal{D}(A) := \left\{ x \in l_2 \mid \sum_{k=1}^{\infty} |(2k-1)2k|^2 |x_{k+1}|^2 < \infty \right\}.$$

Ясно, что $\mathcal{D}(A)$ плотно в l_2 , а A — линейный, неограниченный оператор. Покажем, что оператор A замкнут. Пусть элементы $x^n \in \mathcal{D}(A)$ таковы, что

$$x^n = (x_1^n, x_2^n, \dots) \xrightarrow{l_2} x = (x_1, x_2, \dots) \quad \text{и} \quad Ax^n \xrightarrow{l_2} y = (y_1, y_2, \dots).$$

Докажем, что $x \in \mathcal{D}(A)$ и $Ax = y$. Из сходимости в l_2 имеем сходимость координат $x_k^n \rightarrow x_k$ при $n \rightarrow \infty$ для всех $k = 1, 2, \dots$. Из сходимости Ax^n получим, что $(2k-1)2k x_{k+1}^n \rightarrow y_k$ для всех $k \in \mathbb{N}$, а $x_1^n \rightarrow x_1$. Отсюда следуют равенства $y_k = (2k-1)2k x_{k+1}$ для всех $k \in \mathbb{N}$. По условию $y \in l_2$, т.е.

$$\sum_{k=1}^{\infty} |(2k-1)2k|^2 |x_{k+1}|^2 < \infty,$$

поэтому $x \in \mathcal{D}(A)$ и $Ax = y$. Как отмечалось выше, для этого оператора $\lambda = 0$ собственное значение бесконечной кратности, собственные и присоединённые векторы, отвечающие $\lambda = 0$, образуют ортогональный базис в l_2 (см. (6.17)).

Воспользуемся идеей А. Н. Тихонова [78]. Отметим, что при исследовании нелокальных задач аналогичные рассуждения применялись в [58]. Построим функцию $\varphi(t)$, применив следующую теорему из [60, стр. 32, теорема 1.3.5].

Теорема. Пусть $a_0 \geq a_1 \geq \dots$ — последовательность положительных чисел и

$$a = \sum_{k=0}^{\infty} a_k < \infty.$$

Тогда существует функция $\varphi(t)$ такая, что

$$\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}), \quad \text{supp } \varphi(t) \subseteq [0, a], \quad \int_0^a \varphi(t) dt = 1, \quad \varphi(t) \geq 0,$$

и справедливы оценки

$$|\varphi^{(k)}(t)| \leq \frac{2^k}{a_0 \cdot \dots \cdot a_k}$$

на $\mathbb{R}$ при всех $k = 0, 1, 2, \dots$.

Выберем $a_0 = 1$, $a_k = \frac{1}{k^2}$. Тогда по данной теореме найдётся функция $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$ такая, что

$$\varphi^{(k)}(0) = \varphi^{(k)}(T) = 0, \quad T \equiv a = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{\pi^2}{6},$$

производные которой удовлетворяют оценке:

$$|\varphi^{(k)}(t)| \leq 2^k \cdot (k!)^2 \quad \text{при } k = 0, 1, 2, \dots, \quad (6.18)$$

причём, как видно из построения функции φ в [60], выполняется неравенство $\varphi(t) > 0$ на $(0, T)$. Рассмотрим ряд

$$u(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi^{(k)}(t) e^k \quad (6.19)$$

и докажем, что этот ряд и продифференцированный ряд сходятся в норме l_2 равномерно на $[0, T]$. Воспользуемся оценками (6.18)

$$|\varphi^{(k)}(t)| \cdot \|e^k\| \leq 2^k \cdot (k!)^2 \cdot \frac{1}{(2k)!} =: c_k.$$

По признаку Даламбера

$$\frac{c_{k+1}}{c_k} = \frac{2^{k+1} \cdot ((k+1)!)^2}{(2k+2)!} \cdot \frac{(2k)!}{2^k \cdot (k!)^2} = \frac{k+1}{2k+1} \rightarrow \frac{1}{2}, \quad k \rightarrow \infty.$$

Продифференцированный ряд имеет вид

$$|\varphi^{(k+1)}(t)| \cdot \|e^k\| \leq 2^{k+1} \cdot ((k+1)!)^2 \cdot \frac{1}{(2k)!} =: c_k^{(1)}.$$

По признаку Даламбера

$$\frac{c_{k+1}^{(1)}}{c_k^{(1)}} = \frac{2^{k+2} \cdot ((k+2)!)^2}{(2k+2)!} \cdot \frac{(2k)!}{2^{k+1} \cdot ((k+1)!)^2} = \frac{(k+2)^2}{(k+1)(2k+1)} \rightarrow \frac{1}{2}, \quad k \rightarrow \infty.$$

Ряд

$$Au(t) := \sum_{k=1}^{\infty} \varphi^{(k)}(t) e^{k-1}$$

тоже сходится в l_2 равномерно на $[0, T]$, т.к.

$$|\varphi^{(k)}(t)| \cdot \|e^{k-1}\| \leq 2^k \cdot (k!)^2 \cdot \frac{1}{(2k-2)!} =: c_k^{(2)}.$$

По признаку Даламбера

$$\frac{c_{k+1}^{(2)}}{c_k^{(2)}} = \frac{2^{k+1} \cdot ((k+1)!)^2}{(2k)!} \cdot \frac{(2k-2)!}{2^k \cdot (k!)^2} = \frac{(k+1)^2}{k(2k-1)} \rightarrow \frac{1}{2}, \quad k \rightarrow \infty.$$

Так как все ряды сходятся в l_2 абсолютно и равномерно на $[0, T]$, то $u(t)$ есть классическое решение задачи (6.16), при этом пара $u(t)$, $f = \theta$ является нетривиальным решением однородной обратной задачи

$$u'(t) = Au(t) + f, \quad t \in [0, T], \quad u(0) = u(T) = 0. \quad (6.20)$$

Взяв

$$v(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi^{(k)}(t) e^{k+1},$$

получим, что эта функция удовлетворяет таким равенствам

$$u'(t) = Au(t) - \varphi(t)e^0, \quad t \in [0, T], \quad u(0) = u(T) = 0,$$

т.е. пара $v(t)$ и $f = -e^0$ является решением однородной обратной задачи с $\varphi(t) > 0$ на $[0, T]$.

Этот пример показывает, что для оператора, обладающего цепочкой Жордана бесконечной длины, единственность решения обратной задачи и полнота системы ψ неэквивалентны. В случае обратной задачи (6.20) аналог системы ψ содержит подсистему элементов вида

$$\int_0^T \varphi^k(t; 0) dt, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

которая является полной в силу базисности системы $e^0, e^1, \dots$. Единственность решения обратной задачи (6.20) отсутствует. Напомним, что $\varphi^k(t; \lambda)$ введены в (6.5).

Пример 6.16. Дадим аналог предыдущего примера на языке дифференциальных операторов. Рассмотрим оператор $A = \frac{d^2}{dx^2}$ в пространстве $H = L_2(0, 1)$ с областью определения $\mathcal{D}(A) = W_2^2(0, 1)$, т.е. оператор обобщённого дифференцирования 2-ого порядка без граничных условий. Поясним его замкнутость, для этого возьмём последовательность

$$y_n \in W_2^2(0, 1)$$

такую, что

$$y_n'' \xrightarrow{L_2} v, \quad y_n \xrightarrow{L_2} y,$$

и покажем, что $y \in W_2^2(0, 1)$ и $y'' = v$. Так как $y_n \in W_2^2(0, 1)$, то справедливы равенства

$$\begin{aligned} y_n'(x) &= \int_0^x y_n''(t) dt + y_n'(0), \\ y_n(x) &= \int_0^x \left(\int_0^\xi y_n''(t) dt \right) d\xi + xy_n'(0) + y_n(0). \end{aligned} \quad (6.21)$$

Из последнего равенства получим, что последовательность линейных функций

$$\eta_n(x) := xy_n'(0) + y_n(0)$$

сходится в $L_2(0, 1)$ к некоторой функции $\eta \in L_2(0, 1)$. Имеет место утверждение.

Лемма 6.17. *Если последовательность линейных функций $\eta_n(x) = a_n x + b_n$ сходится в $L_2(0, 1)$ к функции $\eta(x)$, то для некоторой подпоследовательности будем иметь $a_{n_k} \rightarrow a$, $b_{n_k} \rightarrow b$ и $\eta(x) = ax + b$ — линейная функция.*

Доказательство. Рассмотрим подпоследовательность $\eta_{n_k}(x)$, сходящуюся п.в. на $(0, 1)$ к $\eta(x)$, и пусть $x_1 \neq x_2$, $x_i \in (0, 1)$, — точки, в которых имеется такая (поточечная) сходимость. Тогда

$$\eta_{n_k}(x_i) = a_{n_k} x_i + b_{n_k} \rightarrow \eta(x_i).$$

Отсюда имеем

$$a_{n_k} \rightarrow \frac{\eta(x_2) - \eta(x_1)}{x_2 - x_1} \equiv a, \quad b_{n_k} \rightarrow \eta(x_1) - ax_1.$$

Указанные пределы числовых последовательностей не зависят от x_1 и x_2 , поэтому

$$a = \frac{\eta(x_2) - \eta(x_1)}{x_2 - x_1} \quad \text{и} \quad b = \eta(x_1) - ax_1$$

есть константы. Переходя к пределу по этой подпоследовательности, получим, что $\eta(x) = ax + b$ п.в. на $(0, 1)$. Лемма доказана. $\square$

Переходя теперь к пределу в равенствах (6.21), получим

$$\begin{aligned} y_n'(x) &\xrightarrow{L_2} \int_0^x v(t) dt + a, \\ y_n(x) &\xrightarrow{L_2} \int_0^x \left(\int_0^\xi v(t) dt \right) d\xi + ax + b = y(x). \end{aligned}$$

Из последних формул следует, что $y \in W_2^2(0, 1)$ и $y''(x) = v(x)$. Замкнутость A установлена. У этого оператора имеются при $\lambda = 0$ две цепочки бесконечной длины

$$\begin{aligned} e^0 &= 1, \quad e^1 = \frac{x^2}{2!}, \quad e^2 = \frac{x^4}{4!}, \quad \dots, \quad e^n = \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad \dots, \\ g^0 &= x, \quad g^1 = \frac{x^3}{3!}, \quad g^2 = \frac{x^5}{5!}, \quad \dots, \quad g^n = \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \dots \end{aligned}$$

Отметим, что именно эти функции фигурируют в примере А. Н. Тихонова [78].

Взяв, например, вторую цепочку и функцию $\varphi(t) > 0$ из примера 6.15, получим пример нетривиального решения такой обратной задачи:

$$\begin{aligned} u_t(x, t) &= u_{xx}(x, t) + \varphi(t)f(x), \quad (x, t) \in (0, 1) \times (0, T), \\ u(x, 0) &= u(x, T) = 0, \quad x \in (0, 1). \end{aligned}$$

Искомое решение даёт пара функций

$$u(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi^{(k)}(t) \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}, \quad f(x) = -x.$$

Равномерная сходимость соответствующих рядов проверяется так же, как в примере 6.15, с использованием оценок (6.18).

Замечание 6.18. Впервые подобные примеры для обратных и нелокальных задач обнаружил И. В. Тихонов [58], который и обратил на них внимание автора. Здесь этот пример приведён для полноты картины.

Приведём теперь ряд примеров, относящихся к конечномерному случаю. Эти примеры, в частности, показывают, что в общем (не скалярном) случае единственность решения обратной задачи не определяется собственными значениями оператора A , необходимо привлекать собственные векторы. Для пояснения сути достаточно ограничиться случаем $\mathbb{R}^2$.

Пример 6.19. Рассмотрим однородную обратную задачу для системы линейных дифференциальных уравнений, состоящую в нахождении вектор-функции $y(t)$ и векторного параметра p из следующих условий:

$$\dot{y}(t) + Ay(t) = \Phi(t)p, \quad t \in [0, T], \quad y(0) = y(T) = 0. \quad (6.22)$$

Здесь под векторами, для удобства, понимаем столбцы $y(t) = (y_1(t), \dots, y_n(t))'$, $p = (p_1, \dots, p_n)'$; $A = (a_{ij})$ — постоянная, вещественная матрица порядка n , матрица $\Phi(t) = \text{diag}(\varphi_i(t))$ с элементами $\varphi_i \in C[0, T]$, $\varphi_i(t) > 0$ на $[0, T]$. Рассмотрим случай $n = 2$.

- 1) Если матрица A имеет комплексное собственное значение, то существует, вообще говоря, нетривиальное решение задачи (6.22).

Простейший пример даёт матрица с собственными значениями $\lambda_{1,2} = \pm i\beta$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ -\beta & 0 \end{pmatrix}.$$

Считая $\beta > 0$, возьмём $T = 2\pi/\beta$, а в качестве $\Phi(t)$ возьмём единичную матрицу, т.е. $\Phi(t) \equiv E$. Опуская "студенческие" вычисления, получим две пары вещественных решений задачи (6.22):

$$\begin{aligned} y^1(t) &= \frac{1}{\beta} (\cos(\beta t) - 1, \sin(\beta t))', & p^1 &= (0, 1)', \\ y^2(t) &= \frac{1}{\beta} (-\sin(\beta t), \cos \beta t - 1)', & p^2 &= (-1, 0)'. \end{aligned}$$

То, что это решения (6.22), проверяется непосредственной подстановкой.

- 2) Если матрица A имеет одно вещественное собственное значение и базис Жордана из собственного и присоединённого векторов, то существует, вообще говоря, нетривиальное решение задачи (6.22).

Опуская подробности, выберем матрицу A , функции $\varphi_i(t) > 0$, считая параметр λ вещественным:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda + 6 & 6 \\ -6 & \lambda - 6 \end{pmatrix}, \quad \varphi_1(t) = \exp(-\lambda t), \quad \varphi_2(t) = t \exp(-\lambda t).$$

Пусть $T = 1$. Число λ — собственное значение матрицы A^* , а цепочка из собственного и присоединённого векторов $e^0 = (1, 1)'$, $e^1 = (-1/2, -2/3)'$ — базис Жордана для A^* . Непосредственной подстановкой убеждаемся, что пара

$$y(t) = \exp(-\lambda t) t(1-t)(1-2t, 2t)', \quad p = (1, -2)'$$

является нетривиальным решением задачи (6.22).

- 3) Если матрица $A \neq A'$ имеет два различных вещественных собственных значения и соответственно базис из собственных векторов, то, вообще говоря, существует нетривиальное решение задачи (6.22).

Опуская подробности, выберем матрицу A , функции $\varphi_i(t) > 0$, считая параметр $\lambda \neq 0$ вещественным:

$$A = \frac{\lambda}{\gamma^2 - 1} \begin{pmatrix} -1 & -\gamma^2 \\ 1 & \gamma^2 \end{pmatrix}, \quad \varphi_1(t) = 1, \quad \varphi_2(t) = \exp(-\lambda t), \quad \gamma = \frac{2 \operatorname{sh}(\lambda T/2)}{\lambda T}.$$

Числа λ и 0 — собственные значения матрицы A^* , а $e^1 = (1, 1)'$, $e^2 = (1/\gamma, \gamma)'$ — соответствующие собственные векторы. Непосредственной подстановкой убеждаемся, что пара

$$p = (\gamma \exp(-\lambda T/2), -1)',$$

$$y(t) = \frac{1}{\gamma^2 - 1} \begin{pmatrix} \gamma^2 t - \frac{1 - \exp(-\lambda t)}{\lambda} & \gamma^2 \exp(-\lambda t) \left(\frac{\exp(\lambda t) - 1}{\lambda} - t \right) \\ \frac{1 - \exp(-\lambda t)}{\lambda} - t & \left(\gamma^2 t - \frac{\exp(\lambda t) - 1}{\lambda} \right) \exp(-\lambda t) \end{pmatrix}^p$$

является нетривиальным решением задачи (6.22).

- 4) Если 2×2 -матрица $A = A'$ имеет два (различных) вещественных собственных значения и соответственно ортонормированный базис из собственных векторов, то задача (6.22) с матрицей $\Phi(t) = \operatorname{diag}(\varphi_i(t))$ с элементами $\varphi_i \in C[0, T]$, $\varphi_i(t) \geq 0$, $\varphi_i(t) \not\equiv 0$ на $[0, T]$ имеет лишь тривиальное решение.

Пусть λ_1, λ_2 — собственные значения вещественной матрицы A , а e^1 и e^2 — соответствующие собственные векторы, они могут быть выбраны ортогональными и нормированными, $\|e^k\| = 1$. С точностью до скалярных ненулевых множителей, не влияющих на полноту системы, получим

$$\psi^1 = \int_0^T e^{\lambda_1 \tau} \Phi(\tau) d\tau e^1 \equiv \Lambda_1 e^1, \quad \psi^2 = \int_0^T e^{\lambda_2 \tau} \Phi(\tau) d\tau e^2 \equiv \Lambda_2 e^2.$$

Здесь $\Lambda_k = \operatorname{diag}(\lambda_1^k, \lambda_2^k)$ — матрицы второго порядка с положительными элементами

$$\lambda_1^k \equiv \int_0^T e^{\lambda_1 \tau} \varphi_1(\tau) d\tau, \quad \lambda_2^k \equiv \int_0^T e^{\lambda_2 \tau} \varphi_2(\tau) d\tau.$$

Установим линейную независимость системы векторов ψ^1, ψ^2 . Предположим, что найдутся числа C_1 и C_2 такие, что

$$C_1 \cdot \psi^1 + C_2 \cdot \psi^2 = \theta, \quad |C_1| + |C_2| \neq 0. \quad (6.23)$$

Считаем, например, что $C_1 \neq 0$, тогда из последнего равенства следует

$$e^1 = \frac{C_2}{C_1} \cdot \Lambda_1^{-1} \Lambda_2 e^2 \Rightarrow 0 = (e^1, e^2) = \frac{C_2}{C_1} \cdot \left(\varepsilon_1 |e_1^2|^2 + \varepsilon_2 |e_2^2|^2 \right),$$

где числа $\varepsilon_i = \frac{\lambda_i^2}{\lambda_i^1} > 0$, $\Lambda_1^{-1} \Lambda_2 = \operatorname{diag}(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$, а $e^2 = (e_1^2, e_2^2)$. Тогда $C_2 = 0$ и $C_1 = 0$, получим противоречие с предположением (6.23). Поэтому система векторов ψ^1, ψ^2 полна, а по критерию единственности (см. теорему 6.1) получим, что обратная задача (6.22) имеет лишь нулевое решение.

7. ПРИМЕРЫ НЕЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ

ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ И ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ

7.1. Постановка задачи и обсуждение. Теория и методы решения обратных и некорректных задач активно развиваются на протяжении десятилетий, результаты описаны в большом количестве работ (см., например, [53], [77], [75], [18], [29], [65]). За это время в ряде обратных задач для уравнений математической физики получены легко проверяемые достаточные условия их разрешимости, а также условия единственности решений. В таких случаях всегда возникают вопросы о том, насколько полученные условия близки к необходимым, можно ли какое-либо из условий отбросить или ослабить. Установленные выше критерии дают возможность исследовать

близость к необходимым известным достаточных условий. Здесь эти вопросы будут рассматриваться в связи с достаточными условиями единственности решений для параболических и эллиптических обратных задач с переопределением на верхней крышке (или финальным наблюдением). В параболическом случае речь пойдёт о следующей задаче.

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область с достаточно гладкой границей $\partial\Omega$. В цилиндре $Q = \Omega \times (0, T)$ требуется найти пару функций $\{w(x, t), p(x)\}$, удовлетворяющих условиям

$$w_t(x, t) - Lw(x, t) = h(x, t)p(x), \quad (x, t) \in Q, \quad (7.1)$$

$$w(x, 0) = 0, \quad x \in \Omega; \quad w(x, t) = 0, \quad (x, t) \in S \equiv \partial\Omega \times [0, T], \quad (7.2)$$

$$w(x, T) = \chi(x), \quad x \in \Omega, \quad (7.3)$$

где функции $h(x, t)$, $\chi(x)$ заданы и достаточно гладкие, а равномерно эллиптический оператор L имеет вид

$$Lw = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial w}{\partial x_j} \right) + \sum_{i=1}^n b_i(x) \frac{\partial w}{\partial x_i} + c_0(x)w. \quad (7.4)$$

Коэффициенты $a_{ij} = a_{ji} \in C^1(\bar{\Omega})$; $b_i, c_0 \in L_\infty(\Omega)$ — вещественные функции. Если в условии переопределения (7.3) функция $\chi(x) \equiv 0$, то будем говорить о соответствующей однородной обратной задаче. Ясно, что решение линейной обратной задачи (7.1)–(7.3) единственно только тогда, когда однородная обратная задача имеет лишь тривиальное решение $w = 0$, $p = 0$. Какие условия, налагаемые на функцию $h(x, t)$ и коэффициенты оператора L , являются достаточными для единственности решения задачи (7.1)–(7.3)? В работах [45, 74, 43] доказано, что при выполнении условий:

$$c_0(x) \leq 0 \quad \text{в } \Omega; \quad h(x, t) \geq 0, \quad h_t(x, t) \geq 0 \quad \text{в } Q; \quad h(x, T) > 0 \quad \text{в } \Omega \quad (7.5)$$

однородная обратная задача имеет лишь тривиальное решение, т.е. имеется единственность решения обратной задачи (7.1)–(7.3). Впервые подобные условия возникли в работах по обратным задачам теории потенциала (см., например, [40]), а для параболических уравнений эти условия появились в [16]. Если допустить перемены знака функции $h(x, t)$ по переменной $t \in [0, T]$, то единственности решения, вообще говоря, нет. Примеры в этом случае строятся достаточно легко, причём для всех типов уравнений они хорошо известны специалистам. Следует отметить, что имеются результаты, содержащие условия малости нормы $h(x, t)$ и обеспечивающие единственность (см., например, [43]). В этих теоремах функция $h(x, t)$ и её производная по t могут быть знакопеременными. В настоящем параграфе будет показано, что условие $h_t(x, t) \geq 0$ в Q , присутствующее в (7.5), без дополнительных ограничений не может быть отброшено (даже при усилении других требований на функцию $h(x, t)$). А именно, при выполнении только условий:

$$c_0(x) \leq 0 \quad \text{в } \Omega; \quad h(x, t) \geq \delta > 0 \quad \text{в } Q \quad (7.6)$$

однородная обратная задача может иметь нетривиальное решение, отсутствует единственность решения обратной задачи (7.1)–(7.3). В данном параграфе оператор L , область $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, функция $h(x, t) \equiv h(t)$ и соответствующие нетривиальные решения параболической обратной задачи выписываются явным образом. Из вида этих решений устанавливается, что они являются аналитическими функциями своих аргументов. Случай $n = 1$ рассматривался в [74]. В обратных задачах, аналогичных по постановке задаче (7.1)–(7.3), но для эллиптических уравнений, также построены примеры неединственности решения. Основные примеры, построенные в данном параграфе, объединяет наличие комплексного собственного значения у соответствующего эллиптического оператора с вещественными коэффициентами. Здесь мы ограничились случаем $n = 2$, хотя соответствующие примеры неединственности решения имеются и при $n \geq 3$. Связь единственности решения обратной задачи с нулями некоторой целой функции и точечным спектром оператора впервые отмечалась в [62, 64].

7.2. Примеры для параболической обратной задачи.

Пример 7.1. Одномерная задача с условиями периодичности.

Вначале рассмотрим задачу с периодическими граничными условиями в одномерном случае. Ищется пара $\{w(x, t), p(x)\}$ комплекснозначных функций, удовлетворяющих условиям:

$$\begin{cases} w_t(x, t) - w_{xx}(x, t) + w_x(x, t) = e^{-k^2 t} p(x), & (x, t) \in (0, 2\pi) \times (0, 2\pi), \\ w(0, t) = w(2\pi, t), & w_x(0, t) = w_x(2\pi, t), & t \in [0, 2\pi], \\ w|_{t=0} = 0, & w|_{t=2\pi} = 0, & x \in (0, 2\pi), \end{cases} \quad (7.7)$$

где k — некоторое фиксированное натуральное число. Будем искать решение задачи (7.7) в виде $w(x, t) = T(t) \exp(ikx)$ и $p(x) = \exp(ikx)$, тогда для функции $T(t)$ имеем систему

$$\begin{cases} T'(t) + (k^2 + ik)T(t) = e^{-k^2 t}, & t \in [0, 2\pi], \\ T(0) = T(2\pi) = 0. \end{cases} \quad (7.8)$$

Решение задачи (7.8) легко выписывается

$$T(t) = \int_0^t e^{-(k^2 + ik)(t-s)} e^{-k^2 s} ds \equiv \frac{i}{k} e^{-k^2 t} [e^{-ikt} - 1].$$

Тогда для всех $k \in \mathbb{N}$ имеем нетривиальное решение однородной обратной задачи (7.7)

$$\begin{cases} w(x, t) = \frac{i}{k} e^{-k^2 t} [e^{-ikt} - 1] e^{ikx}, \\ p(x) = e^{ikx}. \end{cases} \quad (7.9)$$

Отделяя в (7.9) действительную и мнимую части, получим две пары вещественных решений обратной задачи

$$\begin{cases} w_1(x, t) = \frac{1}{k} e^{-k^2 t} [\sin k(t - x) + \sin kx], \\ p_1(x) = \cos kx, \\ w_2(x, t) = \frac{1}{k} e^{-k^2 t} [\cos k(t - x) - \cos kx], \\ p_2(x) = \sin kx. \end{cases}$$

Как нетрудно видеть, $w_i(x, t)$ и $p_i(x)$ являются вещественно аналитическими функциями своих аргументов, а уравнение выполнено для всех $(x, t) \in \mathbb{R}^2$.

Построение этого примера стало возможным из-за наличия комплексного собственного значения $\lambda_0 = k^2 + ik$ у оператора $L_0 w \equiv -w_{xx} + w_x$ с периодическими краевыми условиями. Для $n = 1$ и «разделённых» краевых условий (т.е. когда на каждом из концов отрезка некоторая нетривиальная линейная комбинация искомой функции и её производной равна нулю) подобный пример невозможен, т.к. соответствующие собственные значения вещественны (см., например, [51, стр. 541]). Заметим ещё, что пара функций из (7.9) даёт также пример неединственности решения для обратной задачи в неограниченной области

$$\begin{cases} w_t(x, t) - w_{xx}(x, t) + w_x(x, t) = e^{-k^2 t} p(x), & (x, t) \in \mathbb{R} \times (0, 2\pi), \\ w(x, 0) = 0, & w(x, 2\pi) = 0, & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

где уравнение для найденных функций выполняется при всех $(x, t) \in \mathbb{R}^2$. Идею примера подобного вида для задачи Коши автору сообщил И. В. Тихонов. Критерий единственности для абстрактных уравнений в случае скалярной функции $h(t)$ и при минимальных ограничениях на оператор имеется в [56].

Пример 7.2. Многомерный случай с условиями Дирихле.

Из рассмотренного выше ясно, что комплексные собственные значения играют ключевую роль в получении примеров неединственности в обратных задачах. Автору удалось построить примеры эллиптических операторов второго порядка с вещественными коэффициентами и соответствующими граничными условиями, у которых имеются комплексные собственные значения. Один из таких примеров приведём здесь и используем для построения нетривиальных решений однородных обратных задач.

Рассмотрим в круге $D = \{x^2 + y^2 < 1\}$ следующую задачу на собственные значения:

$$\Delta v - xv_y + yv_x + \lambda v = 0, \quad (x, y) \in D, \quad v(x, y) = 0, \quad (x, y) \in \partial D. \quad (7.10)$$

Здесь $\Delta v = v_{xx} + v_{yy}$ — оператор Лапласа, $v(x, y)$ — искомая комплекснозначная функция, $\lambda \in \mathbb{C}$. Решая задачу (7.10) в полярных координатах, найдём её собственные функции:

$$v_{n,k}(r, \varphi) = J_n(\gamma_k(n)r) \exp(\pm i n \varphi)$$

и собственные значения

$$\lambda_{n,k} = \gamma_k^2(n) \pm i n,$$

где $k \in \mathbb{N}$, $n = 0, 1, 2, \dots$, $J_n(x)$ — функция Бесселя порядка n , а $\gamma_k(n)$ — положительные корни уравнения $J_n(x) = 0$, занумерованные в порядке возрастания. Из полноты и ортогональности собственных функций в $L_2(D)$ следует, что других собственных значений у задачи (7.10) нет.

Возьмём одно из комплексных собственных значений $\lambda = \gamma^2 + i$, где γ — первый положительный корень уравнения $J_1(x) = 0$ ($\gamma \approx 3.831706$, см. [8, стр. 553]). В единичном круге D рассмотрим обратную задачу, состоящую в нахождении пары функций $\{w(x, y, t), p(x, y)\}$ из условий

$$\begin{cases} w_t - \Delta w + xw_y - yw_x - (\gamma^2 - \zeta)w = e^{-\zeta t}p, & (x, y, t) \in D \times [0, 2\pi], \\ w|_{t=0} = w|_{t=2\pi} = 0, & (x, y) \in D, \quad w = 0, \quad (x, y, t) \in \partial D \times [0, 2\pi], \end{cases} \quad (7.11)$$

где $\zeta \geq 0$ — некоторое фиксированное число. Переходя к полярным координатам, непосредственной проверкой убеждаемся, что пара комплекснозначных функций

$$w = iJ_1(\gamma r)e^{-\zeta t} \left(e^{i(\varphi-t)} - e^{i\varphi} \right), \quad p = J_1(\gamma r)e^{i\varphi} \quad (7.12)$$

есть решение однородной обратной задачи (7.11). Функция $p(x, y)$ является вещественно аналитической при $(x, y) \in D$ как собственная функция задачи Дирихле в круге для эллиптического уравнения с аналитическими коэффициентами. Это нетрудно установить и непосредственно, воспользовавшись разложением функции Бесселя

$$p = J_1(\gamma r)e^{i\varphi} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+2)\Gamma(k+1)} \left(\frac{\gamma r}{2} \right)^{2k+1} e^{i\varphi} = \frac{\gamma}{2}(x+iy) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k+1)!k!} \left(\frac{\gamma}{2} \right)^{2k} (x^2 + y^2)^k,$$

где ряд сходится в $\mathbb{R}^2$ по признаку Даламбера. Отсюда следует аналитичность $p(x, y)$ при $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Следовательно, и функция $w(x, y, t) \equiv ie^{-\zeta t}(e^{-it} - 1)p(x, y)$ является аналитической по переменным $(x, y, t) \in \mathbb{R}^3$, а поэтому уравнение выполнено во всём пространстве переменных (x, y, t) . В частности, это решение и все его производные принадлежат пространству Гёльдера и выполнены условия согласования всех порядков. Таким образом, доказано утверждение.

Предложение 7.3. Однородная обратная задача (7.11) имеет нетривиальное комплексное решение (7.12). Функции, составляющие это решение, есть аналитические функции своих аргументов, а уравнение выполнено во всём пространстве $\mathbb{R}^3$ переменных (x, y, t) . Действительная и мнимая части решения (7.12) дают две пары вещественных решений:

$$\begin{cases} w_1 = J_1(\gamma r)e^{-\zeta t}[\sin \varphi - \sin(\varphi - t)], \\ p_1 = J_1(\gamma r) \cos \varphi, \\ w_2 = J_1(\gamma r)e^{-\zeta t}[\cos(\varphi - t) - \cos \varphi], \\ p_2 = J_1(\gamma r) \sin \varphi, \end{cases}$$

удовлетворяющих тем же свойствам гладкости и уравнению во всём пространстве $\mathbb{R}^3$. Эти же функции являются решениями следующей обратной задачи в неограниченной области:

$$\begin{cases} w_t - \Delta w + xw_y - yw_x - (\gamma^2 - \zeta)w = e^{-\zeta t}p(x, y), & (x, y, t) \in \mathbb{R}^2 \times [0, 2\pi], \\ w(x, y, 0) = w(x, y, 2\pi) = 0, & (x, y) \in \mathbb{R}^2. \end{cases}$$

Замечание 7.4. В обратной задаче (7.11) функция $h(t) \equiv \exp(-\zeta t) \geq \exp(-2\pi\zeta) > 0$ и убывает, а младший коэффициент оператора $c(x, y) \equiv \gamma^2 - \zeta \leq 0$ при $\zeta \geq \gamma^2$. Таким образом, требование $h_t \geq 0$ в условиях (7.5) без дополнительных ограничений не может быть отброшено, теряется свойство единственности решения обратной задачи. С этой же функцией $h(t)$ получаем пример несуществования решения в классе $p \in L_2(D)$, $u \in W_2^{2,1}(Q)$ для следующей обратной задачи:

$$\begin{cases} w_t - \Delta w + xw_y - yw_x - (\gamma^2 - \zeta)w = e^{-\zeta t}p(x, y), & (x, y, t) \in D \times [0, 2\pi], \\ w(x, y, 0) = 0, & (x, y) \in D, \quad w(x, y, t) = 0, & (x, y, t) \in \partial D \times [0, 2\pi], \\ w|_{t=2\pi} = J_1(\gamma r)e^{i\varphi}, & (r, \varphi) \in [0, 1] \times [0, 2\pi], \end{cases}$$

что является проявлением свойства её фредгольмовости (см. [46, 43]).

7.3. Примеры для эллиптической обратной задачи. Для эллиптических уравнений аналогом задачи (7.1)–(7.3) является следующая обратная задача. Требуется найти пару функций $\{w(x, t), p(x)\}$, удовлетворяющих условиям:

$$w_{tt}(x, t) + Lw(x, t) = h(x, t)p(x), \quad (x, t) \in Q \equiv \Omega \times (0, T), \quad (7.13)$$

$$w(x, 0) = w_t(x, 0) = 0, \quad x \in \Omega; \quad w(x, t) = 0, \quad (x, t) \in S \equiv \partial\Omega \times [0, T], \quad (7.14)$$

$$w(x, T) = \chi(x), \quad x \in \Omega, \quad (7.15)$$

где $h(x, t)$, $\chi(x)$, как и выше, — заданные достаточно гладкие функции, а оператор L имеет вид (7.4). Нас будет интересовать единственность, поэтому положим в условии (7.15) функцию $\chi(x) \equiv 0$ и будем иметь дело с однородной обратной задачей. В [47, 37, 59, 52] доказано, что для единственности решения задачи (7.13)–(7.15) достаточными являются следующие условия:

$$c_0(x) \leq 0 \quad \text{в } \Omega; \quad h(x, t) \geq 0, \quad h_t(x, t) \leq 0 \quad \text{в } Q; \quad h(x, T) > 0 \quad \text{в } \Omega. \quad (7.16)$$

Как и в параболическом случае, единственность решения, вообще говоря, нарушается, если допустить, что $h(x, t)$ меняет знак по $t \in [0, T]$. В этом параграфе мы приведём примеры, показывающие, что условие монотонности функции h по переменной t в (7.16) отбросить без каких-либо дополнительных ограничений нельзя. Особенно просто пример получается, если $c_0 > 0$ или, как говорят, задача на спектре. С этого примера мы и начнём.

Пример 7.5. Пример для уравнения Гельмгольца ($n = 1$). Рассмотрим задачу нахождения пары функций $\{w(x, t), p(x)\}$ из условий:

$$\begin{cases} w_{tt}(x, t) + w_{xx}(x, t) + \gamma^2 w(x, t) = p(x), & (x, t) \in (0, l) \times (0, t_1), \\ w(x, 0) = w_t(x, 0) = w(x, t_1) = 0, & x \in [0, l], \\ w(0, t) = w(l, t) = 0, & t \in [0, t_1], \end{cases} \quad (7.17)$$

где число $\gamma^2 > 0$ фиксировано (задача на спектре), а положительные числа l и t_1 выберем позднее. Возьмём $p(x) = e_k(x) \equiv \sin(\pi kx/l)$, $k \in \mathbb{N}$, и будем искать решение задачи (7.17) в виде $w = T(t)e_k(x)$. Тогда для $T(t)$ получим задачу:

$$\begin{cases} T''(t) + \left[\gamma^2 - \left(\frac{\pi k}{l} \right)^2 \right] T(t) = 1, & t \in [0, t_1], \\ T(0) = T'(0) = T(t_1) = 0. \end{cases}$$

Для любого $k \in \mathbb{N}$ найдётся $l > 0$ такое, что $\varkappa^2 \equiv \gamma^2 - (\pi k/l)^2 > 0$. Выберем и фиксируем такие k, l и будем считать $\varkappa > 0$. Решение $T(t)$ записывается по формуле

$$T(t) = \int_0^t \frac{\sin \varkappa(t-s)}{\varkappa} ds = \frac{1 - \cos \varkappa t}{\varkappa^2}.$$

Выберем теперь число $t_1 > 0$ так, чтобы $t_1 = 2\pi n/\varkappa$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$. Тогда получим нетривиальное решение однородной обратной задачи (7.17) с выбранными t_1, l и при $k \in \mathbb{N}$:

$$w(x, t) = \frac{1 - \cos \varkappa t}{\varkappa^2} \sin\left(\frac{\pi k x}{l}\right); \quad p(x) = \sin\left(\frac{\pi k x}{l}\right), \quad \varkappa^2 = \gamma^2 - \left(\frac{\pi k}{l}\right)^2 > 0.$$

Уравнение из задачи (7.17) при этом выполняется для всех $(x, t) \in \mathbb{R}^2$. Отметим ещё, что при $0 < \pi l < \gamma$ (малость области) такой пример невозможен, нарушается условие $\varkappa^2 > 0$.

Пример 7.6. Эллиптическое уравнение с условиями периодичности ($n = 1$). В прямоугольной области $(0, l) \times (0, t_1)$ переменных (x, t) речь пойдёт о задаче нахождения пары (комплекснозначных) функций $\{w(x, t), p(x)\}$ из следующих условий:

$$\begin{cases} w_{tt}(x, t) + w_{xx}(x, t) + w_x(x, t) = h(t)p(x), & (x, t) \in (0, l) \times (0, t_1), \\ w(x, 0) = w_t(x, 0) = w(x, t_1) = 0, & x \in [0, l], \\ w(0, t) = w(l, t), \quad w_x(0, t) = w_x(l, t), & t \in [0, t_1], \end{cases} \quad (7.18)$$

где $h(t)$ — некоторая положительная гладкая функция, которую выберем ниже. Ищем решение этой задачи в виде (число $k \in \mathbb{N}$ фиксируем):

$$p(x) = \exp\left(\frac{2\pi k x}{l}i\right), \quad w(x, t) = T(t) \exp\left(\frac{2\pi k x}{l}i\right).$$

Обозначим

$$\lambda_0 = \frac{2\pi k}{l}i - \frac{4\pi^2 k^2}{l^2}, \quad \varkappa_0 = \frac{2\pi k}{l}.$$

Тогда для функции $T(t)$ получим задачу:

$$\begin{cases} T''(t) + \lambda_0 T(t) = h(t), & t \in [0, t_1], \\ T(0) = T'(0) = T(t_1) = 0. \end{cases} \quad (7.19)$$

Пусть $\sqrt{\lambda_0}$ — значение корня с положительной действительной частью. Запишем решение

$$T(t) = \int_0^t \frac{\sin \sqrt{\lambda_0}(t-s)}{\sqrt{\lambda_0}} h(s) ds. \quad (7.20)$$

Условия $T(0) = T'(0) = 0$ выполнены, требуется подобрать функцию $h(t) \geq 1$ и положительные числа l, t_1 так, чтобы выполнялось $T(t_1) = 0$. Подставим $t = t_1$, обозначим $t_1 \sqrt{\lambda_0} = z_0$ и сделаем в интеграле замену $t = (t_1 - s)/t_1$. Введём $f(t) = h(t_1(1 - t))$, $t \in [0, 1]$, получим целую функцию

$$V_0(z) \equiv \int_0^1 \frac{\sin zt}{z} f(t) dt, \quad (7.21)$$

при этом имеем

$$T(t_1) \equiv t_1^2 V_0(z_0).$$

Таким образом, задача построения нетривиального решения (7.18) свелась к построению гладкой положительной функции $f(t)$ такой, чтобы функция $V_0(z)$ имела заданный нуль $z_0 = \alpha + i\beta$ с

$\beta > \alpha > 0$. Действительно, тогда для нахождения t_1 и l из равенства $t_1 \sqrt{\kappa_0(i - \kappa_0)} = \alpha + i\beta$ получим систему:

$$\begin{cases} \beta^2 - \alpha^2 = \kappa_0^2 t_1^2, \\ 2\alpha\beta = \kappa_0 t_1^2, \end{cases} \quad (7.22)$$

откуда находим величины

$$t_1 = \frac{2\alpha\beta}{\sqrt{\beta^2 - \alpha^2}} \quad \text{и} \quad l = 2\pi k \frac{2\alpha\beta}{\beta^2 - \alpha^2}.$$

В следующем пункте покажем, что такие функции $f(t) \in C^\infty(\mathbb{R})$ существуют. Отметим, что целые функции вида $V(z) \equiv zV_0(z)$ называют финитным $\sin$ -преобразованием Фурье, информацию о распределении их нулей можно найти в [50].

Пример 7.7. Эллиптическое уравнение с условиями Дирихле ($n = 2$). Как следует из предыдущего пункта, наличие у оператора комплексных собственных значений позволяет строить примеры неединственности решений обратных задач и для эллиптических уравнений. В круге $D_R = \{x^2 + y^2 < R^2\}$ будем искать комплексные функции $\{w(x, y, t), p(x, y)\}$ из условий

$$\begin{cases} l c w_{tt} + \Delta w + x w_y - y w_x = h(t) p(x, y), & (x, y, t) \in D_R \times (0, t_1), \\ w(x, y, 0) = w_t(x, y, 0) = w(x, y, t_1) = 0, & (x, y) \in D_R, \\ w(x, y, t) = 0, & (x, y, t) \in \partial D_R \times [0, t_1], \end{cases} \quad (7.23)$$

где $\Delta w = w_{xx} + w_{yy}$ — оператор Лапласа. В задаче (7.23) условия, достаточные для единственности решения, имеют вид

$$h(t) > 0, \quad h'(t) \leq 0 \quad \text{на} \quad [0, t_1],$$

где $h(t)$ — заданная гладкая функция, т.е. требования (7.16) даже усилены. Покажем, что отбросить ограничение $h'(t) \leq 0$ без дополнительных условий нельзя, теряется свойство единственности решения такой задачи.

Построим гладкую положительную функцию $h(t)$ и положительные числа R и t_1 , для которых однородная обратная задача (7.23) имеет нетривиальное решение. Это построение проведём в два этапа. Сначала построим разрывную положительную функцию $h(t)$, а затем уже из неё получим гладкую с нужными свойствами.

Перейдём в задаче (7.23) к полярным координатам и будем искать её решение в виде $w = T(t)J_1(\mu r)e^{i\varphi}$, где $\mu R = \gamma$ — первый положительный корень $J_1(x) = 0$. Обозначим $v(r, \varphi) = J_1(\mu r)e^{i\varphi}$. Тогда вычислением убеждаемся, что $(\Delta_{r,\varphi} + \partial_\varphi)v \equiv [-(\gamma/R)^2 + i]v$, а, взяв $p = v(r, \varphi)$, для $T(t)$ получим задачу (7.19), в которой $\lambda_0 = -(\gamma/R)^2 + i$ — одно из комплексных собственных значений эллиптического оператора. Как и в п. 3, решение запишется по формуле (7.20), а задача сведётся после замены к нахождению $f(t)$ и чисел R и t_1 таких, чтобы функция $V_0(z)$, введённая в (7.21), имела нуль $z_0 = t_1 \sqrt{\lambda_0} = \alpha + i\beta$, где для определённости считаем $\operatorname{Re} z_0 > 0$. В случае $\beta > \alpha > 0$ для нахождения R и t_1 получим систему:

$$\begin{cases} \beta^2 - \alpha^2 = (\gamma/R)^2 t_1^2, \\ 2\alpha\beta = t_1^2, \end{cases}$$

откуда находим величины

$$t_1 = \sqrt{2\alpha\beta} \quad \text{и} \quad R = \gamma \sqrt{\frac{2\alpha\beta}{\beta^2 - \alpha^2}}. \quad (7.24)$$

В качестве $f(t)$ возьмём ступеньку следующего вида, считая $a > 1$,

$$f(t) = \begin{cases} a, & t \in [0, 1/2), \\ 1, & t \in [1/2, 1]. \end{cases} \quad (7.25)$$

Для такой функции $f(t)$ нули $V_0(z)$ находятся, и среди них имеются комплексные вида

$$z = \pm i2 \ln \left(A + \sqrt{A^2 - 1} \right) + 2\pi(2k + 1), \quad k \in \mathbb{Z}, \quad A = \frac{a + 1}{2}. \quad (7.26)$$

Пусть, например, $k = 0$, $z_0 = 2\pi + i2 \ln \left(A + \sqrt{A^2 - 1} \right)$. Условие $\beta > \alpha > 0$ приводит к $A = \operatorname{ch}(\pi + \delta)$ с $\delta > 0$. Возьмём для удобства $\delta = \pi$, т.е. $A = \operatorname{ch}(2\pi)$, получим, что одним из нулей функции $V_0(z)$ является $z_0 = 2\pi(1 + 2i)$. По формулам (7.24) находим $t_1 = 4\pi$, $R = 2\gamma/\sqrt{3}$, $\lambda_0 = -3/4 + i$, $\sqrt{\lambda_0} = 1/2 + i$, выбирая корень с положительной действительной частью. Возвращаясь к исходной задаче, найдём

$$h(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0, 2\pi), \\ 2 \operatorname{ch}(2\pi) - 1, & t \in [2\pi, 4\pi]. \end{cases}$$

Пара функций $\{w, p\}$ вида

$$w = \int_0^t \frac{\sin \sqrt{\lambda_0}(t-s)}{\sqrt{\lambda_0}} h(s) ds J_1(\mu r) e^{i\varphi}, \quad p = J_1(\mu r) e^{i\varphi}, \quad \mu = \frac{\gamma}{R} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad (7.27)$$

является нетривиальным решением однородной обратной задачи (7.23), но с разрывной по t правой частью. Отделяя действительную и мнимую части, получим вещественные решения.

Теперь покажем, что $f(t)$ может быть выбрана гладкой так, чтобы нуль функции $V_0(z)$ $z_0 = \alpha + i\beta$ удовлетворял условиям $\beta > \alpha > 0$. Если такой нуль имеется, то, как показано выше, числа t_1 и R находятся по формулам (7.24). Доказательство существования такой функции $f(t)$ опирается на следующие две леммы.

Лемма 7.8. Пусть $f(t)$ — ступенька вида (7.25), где $a > 1$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует $f_\varepsilon(t) \in C^\infty[0, 1]$ такая, что $f_\varepsilon(t) \geq 1$ на $[0, 1]$ и $\|f - f_\varepsilon\|_{L_1(0,1)} < \varepsilon$, причём выполняется неравенство $f'_\varepsilon(t) \leq 0$ на $[0, 1]$.

Доказательство. Продолжим $f(t)$ по непрерывности значением a при $t < 0$ и значением 1 при $t > 1$, возьмём сглаженную функцию

$$g_\delta(t) = \int_{\mathbb{R}} \omega_\delta(t - \tau) f(\tau) d\tau, \quad \delta > 0,$$

где ядро усреднения

$$\omega_\delta(t) = \begin{cases} C_\delta \exp\left(\frac{1}{t^2 - \delta^2}\right), & |t| < \delta, \\ 0, & |t| \geq \delta. \end{cases}$$

Функция $f_\varepsilon(t) \equiv g_\delta(t)$ удовлетворяет всем необходимым условиям при подходящем выборе $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, поскольку, считая $\delta < 1/2$, имеем

$$\int_0^1 |f_\varepsilon(t) - f(t)| dt = \int_{1/2-\delta}^{1/2+\delta} |f_\varepsilon(t) - f(t)| dt \leq 2(a-1)\delta < \varepsilon,$$

например, при

$$\delta(\varepsilon) = \min \left\{ \frac{\varepsilon}{2a}, \frac{1}{2} \right\}.$$

Лемма 7.8 доказана. $\square$

Лемма 7.9. Найдётся $f_\varepsilon(t) \in C^\infty[0, 1]$, удовлетворяющая неравенствам $f_\varepsilon(t) \geq 1$, $f'_\varepsilon(t) \leq 0$ на $[0, 1]$ и такая, что функция

$$zV_0(z) = \int_0^1 \sin zt f_\varepsilon(t) dt$$

будет иметь нуль $z_0 = \alpha + i\beta$, для которого $\beta > \alpha > 0$.

Доказательство. Рассмотрим целую функцию

$$V(z) = \int_0^1 f(t) \sin zt \, dt,$$

где $f(t)$ — ступенчатая функция вида

$$f(t) = \begin{cases} 2 \operatorname{ch}(2\pi) - 1, & t \in [0, 1/2), \\ 1, & t \in [1/2, 1]. \end{cases}$$

Как установлено выше, число $z_0 = 2\pi(1 + 2i)$ — её нуль. Выберем число $r > 0$ так, чтобы окружность $C_r(z_0) = \{|z - z_0| = r\}$ целиком лежала в полуплоскости $\operatorname{Im} z > \operatorname{Re} z$, и так, чтобы в круге $|z - z_0| \leq r$ не было других нулей функции $V(z)$, кроме z_0 . В силу этого найдётся число $m > 0$ такое, что $|V(z)| \geq m$ на $C_r(z_0)$. По лемме 7.8, для любого $\varepsilon > 0$ найдётся $f_\varepsilon(t) \in C^\infty[0, 1]$ такая, что $f_\varepsilon(t) \geq 1$, $f'_\varepsilon(t) \leq 0$ на $[0, 1]$ и $\|f - f_\varepsilon\|_{L_1(0,1)} < \varepsilon$. Рассмотрим функцию

$$V_\varepsilon(z) = \int_0^1 f_\varepsilon(t) \sin zt \, dt \equiv V(z) + V_\varepsilon(z) - V(z) \equiv V(z) + g(z).$$

Для функции $g(z) \equiv V_\varepsilon(z) - V(z)$ справедлива оценка

$$|g(z)| \leq \max\{|\sin zt| \mid t \in [0, 1], z \in C_r(z_0)\} \int_0^1 |f_\varepsilon(t) - f(t)| \, dt < C\varepsilon,$$

где $C = C(r, z_0)$ — положительная постоянная. Выберем

$$\varepsilon = \frac{m}{2C} > 0.$$

Тогда

$$|V_\varepsilon(z) - V(z)| = |g(z)| \leq \frac{m}{2} < m \leq |V(z)|$$

на $C_r(z_0)$. Отсюда, по теореме Руше (см. [35, стр. 425]), существует z_1 — корень функции $V_\varepsilon(z)$, лежащий внутри окружности $C_r(z_0)$. Для этого нуля по построению выполняется неравенство $\operatorname{Im} z_1 > \operatorname{Re} z_1 > 0$. Лемма 7.9 доказана. $\square$

По корню $z_1 = \alpha + i\beta$ такому, что $\beta > \alpha > 0$, находим по формулам (7.24) числа R и t_1 , а затем функцию $h(t) \equiv f_\varepsilon(1 - t/t_1)$ при $t \in [0, t_1]$. Нетривиальное решение обратной задачи с такой функцией $h(t)$ даётся формулами (7.27). Отметим ещё, что построенная функция $h(t)$ удовлетворяет неравенствам $h(t) \geq 1$, $h'(t) \geq 0$ на $[0, t_1]$. Таким образом, доказано утверждение.

Предложение 7.10. Однородная обратная задача (7.23) с построенной выше функцией $h(t) \equiv f_\varepsilon(1 - t/t_1)$, удовлетворяющей условиям

$$h \in C^\infty[0, t_1]; \quad h(t) \geq 1, \quad h'(t) \geq 0$$

на $[0, t_1]$, имеет нетривиальное решение, которое задаётся формулами (7.27). Функции $w(x, y, t)$ и $p(x, y)$, составляющие это решение, являются аналитическими функциями переменных $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, причём $w(x, y, t)$ имеет производные по t всех порядков, непрерывные на $\mathbb{R}^2 \times [0, t_1]$ и аналитические по $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ при каждом фиксированном $t \in [0, t_1]$. Отделяя действительную и мнимую части, получим две пары вещественных решений задачи (7.23). Эти же пары функций являются решениями следующей обратной задачи в неограниченной области:

$$\begin{cases} w_{tt} + \Delta w + xw_y - yw_x = h(t)p(x, y), & (x, y, t) \in \mathbb{R}^2 \times (0, t_1), \\ w(x, y, 0) = w_t(x, y, 0) = w(x, y, t_1) = 0, & (x, y) \in \mathbb{R}^2, \end{cases}$$

причём уравнение выполняется при всех $(x, y, t) \in \mathbb{R}^2 \times [0, t_1]$.

Замечание 7.11. Аналогичное рассуждение справедливо для задачи с условиями периодичности (задача (7.18)) для собственного значения $\lambda_0 = -4\pi^2/l^2 + i2\pi/l$. Следовательно, может быть построена гладкая, положительная, неубывающая функция $h(t)$, для которой функция $V_0(z)$ с $f(t) = h(t_1(1-t))$ и $t \in [0, 1]$ имела бы нуль $z_0 = \alpha + i\beta$, в котором α и β удовлетворяют (7.22). После этого выписывается нетривиальное решение задачи (7.18), как это было сделано выше. Это решение $\{w(x, t), p(x)\}$ будет обладать дифференциальными свойствами, описанными в предложении 7.10. Оно будет являться также и решением следующей обратной задачи в неограниченной области

$$\begin{cases} w_{tt}(x, t) + w_{xx}(x, t) + w_x(x, t) = h(t)p(x), & (x, t) \in \mathbb{R} \times [0, t_1], \\ w(x, 0) = w_t(x, 0) = w(x, t_1) = 0, & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Для этой же функции $h(t)$ получаем пример несуществования решения у следующей обратной задачи в классе функций $p \in L_2(0, l)$, $u \in W_2^2(Q)$:

$$\begin{cases} w_{tt}(x, t) + w_{xx}(x, t) + w_x(x, t) = h(t)p(x), & (x, t) \in Q \equiv (0, l) \times (0, t_1), \\ w(x, 0) = w_t(x, 0) = 0, \quad w(x, t_1) = \exp\left(\frac{2\pi x}{l}i\right), & x \in [0, l], \\ w(0, t) = w(l, t), \quad w_x(0, t) = w_x(l, t), & t \in [0, t_1]. \end{cases}$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Агранович М. С. О рядах по корневым векторам операторов, определяемых формами с самосопряженной главной частью// Функци. анализ и его прил. — 1994. — 28, № 3. — С. 1–21.
2. Агранович М. С. Спектральные задачи для сильно эллиптических систем второго порядка в областях с гладкой и негладкой границей// Успехи мат. наук. — 2002. — 57, № 5(347). — С. 3–78.
3. Агранович М. С. Спецкурс по теории линейных операторов. — М.: НМУ, 2005.
4. Асланян А. Г., Лидский В. Б. О спектре эллиптического уравнения// Мат. заметки. — 1970. — 7, № 4. — С. 495–502.
5. Ахиезер Н. И., Глазман И. М. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. — М.: Наука, 1966.
6. Банах С. Теория линейных операций. — Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2001.
7. Бари Н. К. Биортогональные системы и базисы в гильбертовом пространстве// Уч. записки Моск. гос. ун-та. Математика. — 1951. — Т. IV.(148). — С. 69–107.
8. Ватсон Г. Н. Теория бесселевых функций. Т. 1. — М.: Наука, 1949.
9. Гилбарт Д., Трудингер Н. Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка. — М.: Наука, 1989.
10. Гохберг И. Ц., Крейн М. Г. Введение в теорию несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. — М.: Наука, 1965.
11. Ильин В. А. О сходимости разложений по собственным функциям оператора Лапласа// Успехи мат. наук. — 1958. — 13, № 1(79) — С. 87–180.
12. Ильин В. А., Шишмарев И. А. Об эквивалентности систем обобщенных и классических собственных функций// Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1960. — 24, № 5. — С. 757–774.
13. Ильин В. А. Спектральная теория дифференциальных операторов. Самосопряженные дифференциальные операторы. — М.: Наука, 1991.
14. Ильин В. А., Моисеев Е. И. Об отсутствии свойства базисности у системы корневых функций задачи с наклонной производной// Дифференц. уравнения. — 1994. — 30, № 1. — С. 128–143.
15. Ильин В. А., Крицков Л. В. Свойства спектральных разложений, отвечающих несамосопряженным дифференциальным операторам// Итоги науки и техники. Серия «Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры». — 2006. — 96. — С. 5–105.
16. Исаков В. М. Об одном классе обратных задач для параболических уравнений// Докл. АН СССР. — 1982. — 263, № 6. — С. 1296–1299.
17. Искендеров А. Д., Тагиев Р. Г. Обратная задача определения правых частей эволюционных уравнений в банаховом пространстве// Вопросы прикл. мат. и кибернет. — 1979. — 1. — С. 51–55.
18. Кабанчикин С. И. Обратные и некорректные задачи. Учебник для студентов высших учебных заведений. — Новосибирск: Сиб. научн. издат., 2009.

19. Келдыш М. В. О собственных значениях и собственных функциях некоторых классов несамосопряженных уравнений// Докл. АН СССР. — 1951. — 77, № 1. — С. 11–14.
20. Келдыш М. В. О полноте собственных функций некоторых классов несамосопряженных линейных операторов// Успехи мат. наук. — 1971. — 26, № 4(160). — С. 15–41.
21. Костин А. Б. Разрешимость одной проблемы моментов и её связь с параболической обратной задачей// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. Вычислит. матем. и киберн. — 1995. — № 1. — С. 28–33.
22. Костин А. Б. Базисность одной системы функций, связанной с обратной задачей// Алгоритмический анализ некорректных задач. — Екатеринбург. — 1998. — С. 135–136.
23. Костин А. Б. Базисность одной системы функций, связанной с обратной задачей нахождения источника// Дифференц. уравнения. — 2008. — 44, № 2. — С. 246–256.
24. Костин А. Б. Обратная задача восстановления источника в параболическом уравнении по условию нелокального наблюдения// Мат. сб. — 2013. — 204, № 10. — С. 3–46.
25. Костин А. Б. О комплексных собственных значениях эллиптического оператора и примере неединственности решения обратной задачи// Докл. РАН. — 2013. — 453, № 2. — С. 138–141.
26. Костин А. Б. Контрпримеры в обратных задачах для параболических, эллиптических и гиперболических уравнений// Ж. вычисл. мат. и мат. физ. — 2014. — 54, № 5. — С. 779–792.
27. Крейн С. Г. (ред.) Функциональный анализ. СМБ. — М.: Наука, 1964.
28. Крейн С. Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. — М.: Наука, 1967.
29. Леонов А. С. Решение некорректно поставленных обратных задач. Очерк теории, практические алгоритмы и демонстрации в МАТЛАБ. — М.: Либроком, 2010.
30. Лидский В. Б. Условия полноты системы корневых подпространств у несамосопряженных операторов с дискретным спектром// Труды Моск. мат. об-ва. — 1959. — 8. — С. 83–120.
31. Лидский В. Б. О разложении в ряд Фурье по главным функциям несамосопряженного эллиптического оператора// Мат. сб. — 1962. — 57(99), № 2. — С. 137–150.
32. Лидский В. Б. О суммируемости рядов по главным векторам несамосопряженных операторов// Труды Моск. мат. об-ва. — 1962. — 11. — С. 3–35.
33. Лидский В. Б. Об одной оценке резольвенты эллиптического дифференциального оператора// Функц. анализ и его прил. — 1976. — 10, № 4. — С. 89–90.
34. Маркус А. С. Введение в спектральную теорию полиномиальных операторных пучков. — Кишинёв: Штиинца, 1986.
35. Маркушевич А. И. Теория аналитических функций. Т. 1. — М.: Наука, 1967.
36. Новиков П. С. Единственность решения обратной задачи потенциала// Докл. АН СССР. — 1938. — 18, № 3. — С. 165–168.
37. Орловский Д. Г. Об одной обратной задаче для дифференциального уравнения в банаховом пространстве// Дифференц. уравнения. — 1989. — 25, № 6. — С. 1000–1009.
38. Орловский Д. Г. К задаче определения параметра эволюционного уравнения// Дифференц. уравнения. — 1990. — 26, № 9. — С. 1614–1621.
39. Прасолов В. В. Многочлены. — М.: МЦНМО, 1999.
40. Прилепко А. И. Обратные задачи теории потенциала// Дифференц. уравнения. — 1967. — 3, № 1. — С. 30–44.
41. Прилепко А. И. Обратные задачи теории потенциала (эллиптические, параболические, гиперболические уравнения и уравнение переноса)// Мат. заметки. — 1973. — 14, № 5. — С. 755–767.
42. Прилепко А. И., Костин А. Б. Об обратных задачах определения коэффициента в параболическом уравнении. I// Сиб. мат. ж. — 1992. — 33, № 3. — С. 146–155.
43. Прилепко А. И., Костин А. Б. О некоторых обратных задачах для параболических уравнений с финальным и интегральным наблюдением// Мат. сб. — 1992. — 183, № 4. — С. 49–68.
44. Прилепко А. И., Костин А. Б. Оценка спектрального радиуса одного оператора и разрешимость обратных задач для эволюционных уравнений// Мат. заметки. — 1993. — 53, № 1. — С. 89–94.
45. Прилепко А. И., Соловьёв В. В. Теоремы разрешимости и метод Ротэ в обратных задачах для уравнений параболического типа// Дифференц. уравнения. — 1987. — 23, № 11. — С. 1971–1980.
46. Прилепко А. И., Соловьёв В. В. О разрешимости обратных краевых задач определения коэффициента перед младшей производной в параболическом уравнении// Дифференц. уравнения. — 1987. — 23, № 1. — С. 136–143.
47. Прилепко А. И. Избранные вопросы в обратных задачах математической физики// Условно-корректные задачи математической физики и анализа. — Новосибирск: Наука, 1992. — С. 51–63.
48. Прилепко А. И., Тихонов И. В. Восстановление неоднородного слагаемого в абстрактном эволюционном уравнении// Изв. РАН. Сер. мат. — 1994. — 58, № 2. — С. 167–188.

49. Прилепко А. И., Тихонов И. В. Обратная задача с финальным переопределением для абстрактного эволюционного уравнения в упорядоченном банаховом пространстве// Функци. анал. и его прил. — 1993. — 27, № 1. — С. 81–83.
50. Седлецкий А. М. Классы аналитических преобразований Фурье и экспоненциальные аппроксимации. — М.: Физматлит, 2005.
51. Смирнов В. И. Курс высшей математики. Т. 4 (часть 2). — М.: Наука, 1981.
52. Соловьёв В. В. Обратные задачи для эллиптических уравнений в пространстве. II// Дифференц. уравнения. — 2011. — 47, № 5. — С. 714–723.
53. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. — М.: Наука, 1986.
54. Тихонов И. В. Несохранение свойства полноты ортогональной системы при умножении на положительные функции// Сборник науч. тр. XXVI Воронежской зимней математической школы. — Воронеж: Изд. ВГУ, 1994. — С. 89.
55. Тихонов И. В. Соображения монотонности в обратной задаче для абстрактного дифференциального уравнения// Интегральные преобразования и спец. функции. Информ. бюллетень. — 2001. — 2, № 1. — С. 119–128.
56. Тихонов И. В., Эйдельман Ю. С. Критерий единственности в обратной задаче для абстрактного дифференциального уравнения с нестационарным неоднородным слагаемым// Мат. заметки. — 2005. — 77, № 2. — С. 273–290.
57. Тихонов И. В. Обратные, нелокальные и краевые задачи для эволюционных уравнений// Автореф. дис. докт. физ.-матем. наук: 01.01.02. — Москва, 2008.
58. Тихонов И. В. Обратные, нелокальные и краевые задачи для эволюционных уравнений// Дис. докт. физ.-матем. наук: 01.01.02. — Москва, 2008.
59. Хайдаров А. Один класс обратных задач для эллиптических уравнений// Докл. АН СССР. — 1984. — 277, № 6. — С. 1335–1337.
60. Хёрмандер Л. Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. Т. 1. — М.: Мир, 1986.
61. Шкаликов А. А. О базисности корневых векторов возмущенного самосопряженного оператора// Теория функций и дифференциальные уравнения. Сборник статей к 105-летию со дня рождения академика Сергея Михайловича Никольского/ Тр. МИАН. — 2010. — 269. — С. 290–303.
62. Эйдельман Ю. С. Единственность решения обратной задачи для дифференциального уравнения в банаховом пространстве// Дифференц. уравнения. — 1987. — 23, № 9. — С. 1647–1649.
63. Эйдельман Ю. С. Условия разрешимости обратных задач для эволюционных уравнений// Докл. АН УССР. Сер. А. — 1990. — № 7. — С. 28–31.
64. Эйдельман Ю. С. Некоторые обратные задачи для параболических и эллиптических дифференциальнооператорных уравнений// Укр. мат. ж. — 1993. — 45, № 1. — С. 120–127.
65. Ягола А. Г. Обратные задачи и методы их решения : приложение к геофизике. — М.: Бином, 2014.
66. Agmon S. On the eigenfunctions and on the eigenvalues of general elliptic boundary value problems// Commun. Pure and Appl. Math. — 1962. — 15. — С. 119–147.
67. Agmon S. On Kernels, Eigenvalues and Eigenfunctions of Operators Related to Elliptic Problems// Commun. Pure and Appl. Math. — 1965. — 18. — С. 627–663.
68. Agmon S. Lectures on elliptic boundary value problems. — New York: D. Van Nostrand Company, 1965.
69. Bary N. Sur la stabilité de certaines propriétés des systèmes orthogonaux (PREMIÈRE PARTIE)// Мат. сб. — 1943. — 12(54), № 1. — С. 3–27.
70. Bary N. Sur les systèmes complets de fonctions orthogonales// Мат. сб. — 1944. — 14(56), № 1-2. — С. 51–108.
71. Browder F. On the eigenfunctions and eigenvalues of the general linear elliptic differential operator// Proc. Nat. Acad. Sci. USA. — 1953. — 39. — С. 433–439.
72. Browder F. On the spectral theory of strongly elliptic differential operators// Proc. Nat. Acad. Sci. USA. — 1959. — 45. — С. 1423–1431.
73. Eidelman Y. S. An inverse problem for a second order differential equation in a Banach space// Abstr. Appl. Anal. — 2004. — 9, № 12. — С. 997–1005.
74. Isakov V. M. Inverse parabolic problems with the final overdetermination// Commun. Pure and Appl. Math. — 1991. — 44. — С. 185–209.
75. Isakov V. M. Inverse problems for partial differential equations. — New York: Springer, 2006.
76. Pazy A. Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations. — New York: Springer, 1983.

- 77. *Prilepko A. I., Orlovsky D. G., Vasin I. A.* Methods for solving inverse problems in mathematical physics. — New York: Marcel Dekker, 2000.
- 78. *Tychonoff A.* Théorèmes d'unicité pour l'équation de la chaleur // Мат. сб. — 1935. — 42, № 2. — С. 199–216.

А. Б. Костин

Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»

E-mail: abkostin@yandex.ru



КОНЕЧНО-РАЗНОСТНЫЕ МЕТОДЫ ДЛЯ ДРОБНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПОРЯДКА $1/2$

© 2017 г. М. Ю. КОКУРИН, С. И. ПИСКАРЕВ, М. СПРЕАФИКО

Аннотация. В работе изучается аппроксимация решений дробного дифференциального уравнения порядка $1/2$. Предлагается новый метод аппроксимации и для него получена скорость сходимости. Изложение ведется на общей аппроксимационной схеме, которая включает метод конечных элементов, конечно-разностные и проекционные методы.

Ключевые слова: дробная задача Коши, банаховое пространство, α раз разрешающее семейство, дискретизационные методы, разностные схемы, оценка погрешности.

AMS Subject Classification: 45L05; 65M12

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение	120
2. Полудискретная аппроксимация	121
3. Разностные схемы	123
4. Уравнения с самосопряженным оператором в гильбертовом пространстве	124
5. Косопряженные операторы	127
Список литературы	128

1. ВВЕДЕНИЕ

Дискретной аппроксимации дробных уравнений посвящено много работ (см. [15–19]). Недавно V. Keyantuo и C. Lizama [12], а также M. Li [9] рассмотрели соотношение между корректно поставленными задачами Коши

$$v'(t) = A^l v(t) + g(t), \quad t \geq 0; \quad v(0) = u^0 \quad (1.1)$$

и

$$(\mathbf{D}_t^{1/l} u)(t) = Au(t), \quad t \geq 0; \quad u(0) = u^0. \quad (1.2)$$

В частности, они показали, что если оператор A порождает C_0 -полугруппу, $l = 2$ и $g(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} Au^0$, то решения задач (1.1) и (1.2) совпадают при $t > 0$ и явно выражаются формулой

$$u(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty e^{-s^2/(4t)} e^{sA} u^0 ds, \quad t \geq 0 \quad (1.3)$$

(см. [12]). Вероятно, одним из первых, кто использовал интегральные соотношения между решениями различного типа задач в вычислительной практике, был Э. А. Полянский (см. [4]). В настоящей работе мы используем подобные соотношения для дискретизации дифференциальных уравнений дробного порядка $1/2$, как и в [3, 20].

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты 15-01-00026а, 16-01-00039а).

2. ПОЛУДИСКРЕТНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ

Пусть $\alpha > 0$ и $m = \lceil \alpha \rceil$. Обозначим через $S_\alpha(t, A)$, $t > 0$, разрешающий оператор $x \mapsto u(t)$ (называемый также α раз полугруппой) равномерно корректной задачи Коши

$$(\mathbf{D}_t^\alpha u)(t) = Au(t), \quad t \geq 0; \quad u(0) = x, u^{(k)}(0) = 0, k = 1, \dots, m-1, \quad (2.1)$$

в банаховом пространстве E , где $\mathbf{D}_t^\alpha$ — производная Джрбашьяна—Капуто. Задача (2.1) называется *корректно поставленной*, если для любого $x \in D(A)$ существует единственное решение $u_{[x]}(t)$ задачи 2.1,

$$u_{[x]} \in C(\mathbb{R}_+, D(A)) \cap C^{m-1}(\mathbb{R}_+, E), \quad g_{m-\alpha} * (u - x) \in C^m(\mathbb{R}_+, E),$$

и предельное соотношение

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x^n\|_E = 0, \quad x^n \in D(A),$$

влечет

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_{[x^n]}(t)\|_E = 0 \quad \text{равномерно на компактных интервалах.}$$

Заметим, что для ограниченного оператора $A \in B(E)$ разрешающий оператор $S_\alpha(t, A)$ дается функцией Миттаг-Леффлера $E_\alpha(z)$:

$$S_\alpha(t, A) = E_\alpha(t^\alpha A) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(t^\alpha A)^j}{\Gamma(\alpha j + 1)}, \quad t \geq 0. \quad (2.2)$$

Полудискретная аппроксимация задачи (2.1) на общей аппроксимационной схеме определяется как задачи Коши в банаховых пространствах E_n :

$$(\mathbf{D}_t^\alpha u_n)(t) = A_n u_n(t), \quad t \geq 0; \quad u_n(0) = x_n, u_n^{(k)}(0) = 0, k = 1, \dots, m-1. \quad (2.3)$$

Общая аппроксимационная схема, согласно [22], может быть описана следующим образом. Пусть E_n и E являются банаховыми пространствами и пусть $\{p_n\}$ — последовательность связывающих отображений $p_n \in B(E, E_n)$, $n \in \mathbb{N}$, со свойством согласованности норм

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|p_n x\|_{E_n} = \|x\|_E \quad \forall x \in E.$$

Definition 2.1. Последовательность элементов $\{x_n\}$, $x_n \in E_n$, $n \in \mathbb{N}$, называется $\mathcal{P}$ -сходящейся к $x \in E$, если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - p_n x\|_{E_n} = 0.$$

Будем записывать это так: $x_n \xrightarrow{\mathcal{P}} x$.

Definition 2.2. Последовательность ограниченных линейных операторов $B_n \in B(E_n)$, $n \in \mathbb{N}$, называется $\mathcal{PP}$ -сходящейся к $B \in B(E)$, если для любого $x \in E$ и каждой последовательности $\{x_n\}$, $x_n \in E_n$, $n \in \mathbb{N}$, удовлетворяющей условию $x_n \xrightarrow{\mathcal{P}} x$, имеет место сходимость $B_n x_n \xrightarrow{\mathcal{P}} Bx$. Будем записывать это так: $B_n \xrightarrow{\mathcal{PP}} B$.

Напомним теорему Троттера—Катою

Theorem 2.1 (теорема ABC; см. [11]). Пусть $A \in \mathcal{C}(E)$, $A_n \in \mathcal{C}(E_n)$ и они порождают C_0 -полугруппы. Следующие условия (A) и (B) эквивалентны условию (C).

(A) *Согласованность*: существует такое $\lambda \in \rho(A) \cap \bigcap_n \rho(A_n)$, что резольвенты сходятся:

$$(\lambda I_n - A_n)^{-1} \xrightarrow{\mathcal{PP}} (\lambda I - A)^{-1}.$$

(B) *Устойчивость*: существуют такие константы $M \geq 1$ и ω , не зависящие от n , что

$$\|e^{tA_n}\|_{B(E_n)} \leq M e^{\omega t} \quad \forall t \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

(C) Сходимость: для любого конечного числа $T > 0$ имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{t \in [0, T]} \|e^{tA_n} x_n^0 - p_n e^{tA} x^0\|_{E_n} = 0,$$

при $n \rightarrow \infty$, как только $u_n^0 \xrightarrow{\mathcal{P}} u^0$ при любых $u_n^0 \in E_n$, $u^0 \in E$.

В дальнейшем мы будем использовать следующее обозначение:

$$\Sigma(\theta) = \{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : |\arg z| \leq \theta\} \cup \{0\}, \quad \Sigma(\theta, \mu) = \{z \in \Sigma(\theta) : |z| \leq \mu\}.$$

Remark 2.1 (see [2]). Для аналитических C_0 -полугрупп имеют место следующие изменения в формулировке теоремы 2.1:

(B₁) Устойчивость: существуют такие константы $M_1 \geq 1$ и $\omega_1 \in \mathbb{R}$, не зависящие от n , что

$$\|(\lambda I_n - A_n)^{-1}\|_{B(E_n)} \leq \frac{M}{|\lambda - \omega|} \quad \forall \lambda \in \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > \omega\} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

(C₁) Сходимость: для некоторого конечного числа $\mu > 0$ и некоторого $0 < \theta < \pi/2$ имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{\eta \in \Sigma(\theta, \mu)} \|e^{\eta A_n} x_n^0 - p_n e^{\eta A} x^0\|_{E_n} = 0,$$

при $u_n^0 \xrightarrow{\mathcal{P}} u^0$.

Для полудискретной аппроксимации семейства $S_\alpha(t, A)$ мы имеем следующую АВС теорему (см. [16, 18]).

Theorem 2.2. Предположим, что $0 < \alpha \leq 2$ и операторы A и A_n порождают экспоненциально ограниченные α -раз резольвентные семейства $S_\alpha(t, A)$ и $S_{\alpha, n}(t, A_n)$ в банаховых пространствах E и E_n соответственно. Следующие условия (A) и ($\tilde{B}$) эквивалентны условию ($\tilde{C}$).

(A) Согласованность: существует такое $\lambda \in \rho(A) \cap \bigcap_n \rho(A_n)$, что резольвенты сходятся:

$$(\lambda I_n - A_n)^{-1} \xrightarrow{\mathcal{PP}} (\lambda I - A)^{-1}.$$

($\tilde{B}$) Устойчивость: существуют такие константы $M \geq 1$ и ω , не зависящие от n , что

$$\|S_\alpha(t, A_n)\|_{B(E_n)} \leq M e^{\omega t} \quad \forall t \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

($\tilde{C}$) Сходимость: для некоторого числа $\omega_1 > 0$ имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{t \in [0, \infty)} e^{-\omega_1 t} \|S_\alpha(t, A_n) x_n - p_n S_\alpha(t, A) x\|_{E_n} = 0,$$

при $x_n \xrightarrow{\mathcal{P}} x$ для любых $x_n \in E_n$, $x \in E$.

Theorem 2.3. Пусть $0 < \alpha \leq 2$ и операторы A и A_n порождают экспоненциально ограниченные аналитические α -раз разрешающие семейства $S_\alpha(\cdot, A)$ и $S_\alpha(\cdot, A_n)$ в банаховых пространствах E и E_n , соответственно. Следующие условия (A) и (B') эквивалентны условию (C').

(A) Согласованность: существует такое $\lambda \in \rho(A) \cap \bigcap_n \rho(A_n)$, что резольвенты сходятся:

$$(\lambda I_n - A_n)^{-1} \xrightarrow{\mathcal{PP}} (\lambda I - A)^{-1}.$$

(B') Устойчивость: существуют такие константы $M \geq 1$, $0 < \theta \leq \pi/2$ и ω , не зависящие от n , что $\omega + \Sigma(\theta + \pi/2) \subset \rho(A_n)$ и

$$\|\lambda^{\alpha-1} (\lambda^\alpha I_n - A_n)^{-1}\|_{B(E_n)} \leq \frac{M}{|\lambda - \omega|} \quad \forall \lambda \in \omega + \Sigma(\beta + \pi/2) \quad \forall \beta \in (0, \theta) \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (2.4)$$

(C') Сходимость: для некоторого числа $\omega_1 > 0$ имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{z \in \Sigma(\beta)} e^{-\omega_1 \operatorname{Re} z} \|S_\alpha(z, A_n) x_n - p_n S_\alpha(z, A) x\|_{E_n} = 0 \quad \forall \beta \in (0, \theta),$$

при $x_n \xrightarrow{\mathcal{P}} x$ для любых $x_n \in E_n$, $x \in E$.

3. РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ

Рассмотрим аппроксимацию задачи (2.3) при $\alpha \in (0, 1)$:

$$(\mathbf{D}_t^\alpha u_n)(t) = A_n u_n(t), \quad 0 \leq t \leq T; \quad u_n(0) = u_n^0. \quad (3.1)$$

В этом разделе мы кратко рассмотрим дискретизационную схему по времени для задачи (3.1).

Для получения скорости сходимости разностных схем при аппроксимации $(\mathbf{D}_t^\alpha u_n)(t)$ из (3.1) по времени обычно мы нуждаемся в том, чтобы решение $u_n(\cdot)$ имело непрерывную вторую производную, т.е. $u_n(\cdot) \in C^2([0, T]; E_n)$. Известно, что $u_n(\cdot) = S_\alpha(\cdot, A_n)u_n^0 \in C^2([0, T]; E_n)$, но u_n не принадлежит $C^2([0, T]; E_n)$ (см. (2.2)). Чтобы преодолеть эту трудность, можно разложить функцию $u_n(\cdot)$ на два слагаемых $u_n(\cdot) = w_n(\cdot) + v_n(\cdot)$, где $w_n(\cdot)$ содержит сингулярную часть, а $v_n(\cdot)$ обладает желаемой гладкостью. Поясним это подробнее. Пусть $l = \lceil 2/\alpha - 1 \rceil$. Очевидно, l — такое наименьшее натуральное число, что $(l+1)\alpha \geq 2$. Тогда из [13, (4.4)] и [5] следует представление $u_n(t) = S_\alpha(t, A_n)x_n := w_n(t) + v_n(t)$, где для гладких $x_n \in D(A_n^{l+1})$

$$\begin{aligned} w_n(t) &= u_n^0 + \frac{t^\alpha A_n u_n^0}{\Gamma(\alpha+1)} + \dots + \frac{t^{l\alpha} A_n^l u_n^0}{\Gamma(l\alpha+1)}, \\ v_n(t) &= (g_{(l+1)\alpha} * S_\alpha)(t, A_n) A_n^{l+1} u_n^0 \in C^2([0, T], E_n), \\ v_n''(t) &= (g_{(l+1)\alpha-2} * S_\alpha)(t, A_n) A_n^{l+1} u_n^0, \end{aligned}$$

где $\Gamma(\alpha)$ — гамма функция и

$$g_\alpha(t) := \begin{cases} \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, & t > 0, \\ 0, & t \leq 0. \end{cases}$$

Кроме того, легко видеть, что при $(l+1)\alpha \geq 2$ задача

$$(\mathbf{D}_t^\alpha v_n)(t) = A_n v_n(t) + f_n(t), \quad 0 \leq t \leq T; \quad v_n(0) = 0, \quad (3.2)$$

где

$$f_n(t) = \frac{t^{l\alpha} A_n^{l+1} u_n^0}{\Gamma(l\alpha+1)},$$

имеет решение $v_n(\cdot) \in C^2([0, T], E_n)$. Действительно, из соотношений

$$(\mathbf{D}_t^\alpha (u_n - w_n))(t) = A_n (u_n - w_n)(t) + f_n(t), \quad (\mathbf{D}_t^\alpha u_n)(t) = A_n u_n(t)$$

с использованием (3.1) получаем

$$f_n(t) = A_n w_n(t) - (\mathbf{D}_t^\alpha w_n)(t).$$

Таким образом, следуя [5], находим

$$\begin{aligned} A_n w_n(t) &= A_n u_n^0 + \frac{t^\alpha A_n^2 u_n^0}{\Gamma(\alpha+1)} + \dots + \frac{t^{(l-1)\alpha} A_n^l u_n^0}{\Gamma((l-1)\alpha+1)} + \frac{t^{l\alpha} A_n^{l+1} u_n^0}{\Gamma(l\alpha+1)}, \\ (\mathbf{D}_t^\alpha w_n)(t) &= A_n u_n^0 + \frac{t^\alpha A_n^2 u_n^0}{\Gamma(\alpha+1)} + \dots + \frac{t^{(l-1)\alpha} A_n^l u_n^0}{\Gamma((l-1)\alpha+1)}. \end{aligned}$$

Отсюда получаем, что $v_n(t)$ удовлетворяет уравнению (3.2). Итак, $v_n(t) \in C^2([0, T], E_n)$.

Ясно, что для получения скорости сходимости конечно разностной аппроксимации функции $u_n(\cdot)$, нужно получить скорость сходимости аппроксимаций каждого из слагаемых $v_n(\cdot)$ и $w_n(\cdot)$. Порядок погрешности при аппроксимации функции $w_n(\cdot)$ зависит от точности вычисления $A_n^j u_n^0$ при $1 \leq j \leq l$. Если A_n являются неограниченными операторами (или аппроксимациями неограниченного оператора), то вычисление $A_n^j u_n^0$ — некорректная задача (см. [7]). В этом случае аппроксимация функции $w_n(\cdot)$ может быть проведена, как в [14].

Для аппроксимации задачи (3.2) можно использовать, например, следующую неявную разностную схему:

$$\Delta_{t_k}^\alpha \bar{V}_n = A_n \bar{V}_n(t_k) + f_n(t_k), \quad \bar{V}_n(0) = 0; \quad 0 \leq k \leq M_n, \quad (3.3)$$

где $t_k = k\tau_n$, $0 \leq k \leq M_n$, $M_n\tau_n = T$, и

$$\Delta_{t_k}^\alpha \Theta_n = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{j=0}^{k-1} (t_{j+1}^{1-\alpha} - t_j^{1-\alpha}) \frac{\Theta_n(t_{k-j}) - \Theta_n(t_{k-j-1})}{\tau_n}. \quad (3.4)$$

Схема (3.4) обеспечивает скорость сходимости $O(\tau_n)$ для гладких начальных данных u_n^0 . Устойчивость схемы (3.3)–(3.4) с членом $f(\cdot)$ специального вида проанализирована в [17].

Далее мы будем изучать задачи (2.3) и (3.1) с $\alpha \in (0, 1)$ и операторами A , A_n , действующими в гильбертовых пространствах E , E_n .

4. УРАВНЕНИЯ С САМОСОПРЯЖЕННЫМ ОПЕРАТОРОМ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Предположим, что $A^* = A \leq 0$ и $A_n^* = A_n \leq 0$ — неположительные самосопряженные операторы в гильбертовых пространствах E и E_n соответственно. Рассмотрим корректно поставленную задачу Коши

$$(\mathbf{D}_t^{1/2} u)(t) = Au(t), \quad 0 \leq t \leq T; \quad u(0) = u^0, \quad (4.1)$$

и ее полудискретную аппроксимацию

$$(\mathbf{D}_t^{1/2} u_n)(t) = A_n u_n(t), \quad 0 \leq t \leq T; \quad u_n(0) = u_n^0. \quad (4.2)$$

Предположим, что $u_n^0 \xrightarrow{\mathcal{P}} u^0$ при $n \rightarrow \infty$. Пусть операторы A и A_n согласованы, как в условии (A) теоремы 2.2. Предполагается, что A и A_n порождают ограниченные $1/2$ -раз полугруппы

$$S_{1/2}(t, A) = E_{1/2}(t^{1/2} A), \quad S_{1/2}(t, A_n) = E_{1/2}(t^{1/2} A_n), \quad t \geq 0,$$

и выполняется условие $(\tilde{B})$ теоремы 2.2 с $\omega = 0$. Согласно теореме 2.2 имеет место следующее утверждение.

Theorem 4.1. Пусть выполняется условие (A) теоремы 2.2. Тогда полудискретная аппроксимация (4.2) дает такие решения $u_n(\cdot)$, что $u_n(t) \xrightarrow{\mathcal{P}} u(t)$ равномерно по $t \in [0, T]$.

Построим конечно-разностную схему для аппроксимации элементов $u_n(t)$. Хорошо известно (см. [10, р. 95–96]), что задача Коши для параболического уравнения

$$\begin{aligned} w_t'(t, \eta) &= w_{\eta\eta}''(t, \eta), \quad t > 0, \quad \eta \in \mathbb{R}; \\ w(0, \eta) &= \varphi(\eta), \quad \eta \in \mathbb{R}, \end{aligned} \quad (4.3)$$

с непрерывной и ограниченной функцией $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow E_n$ имеет решение

$$w(t, \eta) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\eta-s)^2/(4t)} \varphi(s) ds. \quad (4.4)$$

В случае четной функции φ , где $\varphi(s) = \varphi(-s)$, $s \geq 0$, в силу (4.4) получаем

$$w(t, 0) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \int_0^{\infty} e^{-s^2/(4t)} \varphi(s) ds, \quad t \in \mathbb{R}_+. \quad (4.5)$$

Последнее представление похоже на соотношение (1.3), которое было получено в [12]. Это наблюдение позволяет провести следующие рассуждения.

Дискретизация (4.3) имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{W_j^{k+1} - W_j^k}{\tau_h} &= \frac{W_{j+1}^k - 2W_j^k + W_{j-1}^k}{h^2}, \quad j \in \mathbb{Z}; \\ W_j^0 &= V_n^j, \quad j \in \mathbb{Z}, \end{aligned} \quad (4.6)$$

где h и τ_h являются шагами дискретизации по пространству и времени соответственно. Мы предполагаем, что $\tau_h/h^2 = \lambda \equiv \text{const}$, где $\lambda \in (0, 1/2]$ и $h \rightarrow 0$, $\tau_h \rightarrow 0$. Легко видеть, что для $\lambda \in (0, 1/2]$ схема (4.6), переписанная в виде

$$W_j^{k+1} = \lambda W_{j-1}^k + (1 - 2\lambda)W_j^k + \lambda W_{j+1}^k, \quad j \in \mathbb{Z}, \quad k \geq 0,$$

является устойчивой в смысле оценки

$$\max_{j_1 \leq j \leq j_2} \|W_j^{k+1}\|_{E_n} \leq \max_{j_1-1 \leq j \leq j_2+1} \|W_j^k\|_{E_n}, \quad j_1 \leq j_2, \quad k \geq 0.$$

Рассмотрим в E_n следующие корректные задачи Коши:

$$v'_n(\eta) = A_n v_n(\eta), \quad \eta \geq 0; \quad v_n(0) = u_n^0. \quad (4.7)$$

Из (4.5) и (1.3) ясно, что $u_n(t) = w(t, 0)$ при выборе

$$\varphi(s) = v_n(|s|) = e^{|s|A_n} u_n^0, \quad s \in \mathbb{R}.$$

Определим аппроксимацию элементов $u_n(t_k)$ при $t_k = k\tau_h$ формулой $U_n^k = W_0^k$. Далее мы ограничимся случаем, когда начальные данные V_n^j , $j \geq 0$, в (4.6) определяются по схеме Кранка—Николсон

$$\frac{V_n^{j+1} - V_n^j}{h} = A_n \frac{V_n^{j+1} + V_n^j}{2}, \quad j \in \mathbb{N}; \quad V_n^0 = u_n^0. \quad (4.8)$$

Положим $V_n^{-j} = V_n^j$ для любых $j \in \mathbb{N}$. Пусть $T = N_h \tau_h$. Тогда для нахождения W_0^k с $1 \leq k \leq N_h$, необходимо вычислить $k+1$ значений V_n^j , $0 \leq j \leq k$.

Следуя [8], в наших условиях $A_n^* = A_n \leq 0$ имеет место оценка

$$\|V_n^j - v_n(\eta_j)\|_{E_n} \leq C_0 h^2 |\eta_j| \|A_n^3 u_n^0\|_{E_n}, \quad \eta_j = jh, \quad j \in \mathbb{N},$$

когда $u_n^0 \in D(A_n^3)$. Поскольку

$$\max_{0 \leq j \leq N_h} |\eta_j| \leq N_h h = \frac{T}{\lambda h},$$

для $|j| \leq N_h$, мы получаем

$$\|V_n^j - v_n(\eta_j)\|_{E_n} \leq C_1 h \|A_n^3 u_n^0\|_{E_n}, \quad |j| \leq N_h. \quad (4.9)$$

Следующая теорема дает оценку скорости сходимости при аппроксимации по указанному методу.

Theorem 4.2. Пусть $A^* = A \leq 0$ и $A_n^* = A_n \leq 0$. Предположим, что выполняется условие (A) теоремы 2.2 и $u_n^0 \in D(A_n^3)$. Тогда, пользуясь схемами (4.6) и (4.8), получаем устойчивую аппроксимацию решения (4.2) и

$$\|U_n^k - u_n(t_k)\|_{E_n} \leq C_2 h \|A_n^3 u_n^0\|_{E_n}, \quad C_2 = C_2(T), \quad (4.10)$$

для $t_k = k\tau_h$ и $0 \leq k \leq N_h$.

Доказательство. Покажем сначала, что схема (4.6) имеет аппроксимацию порядка $O(h)$ на первом временном слое $t = \tau_h$, т.е. докажем, что

$$\|W_j^1 - w(\tau_h, jh)\|_{E_n} \leq C_3 h \|A_n^3 u_n^0\|_{E_n}, \quad |j| \leq N_h - 1. \quad (4.11)$$

В силу построения $\{V_n^j\}_{j \in \mathbb{Z}}$, мы имеем $W_{-j}^1 = W_j^1$ для всех $j \in \mathbb{N}$. Поэтому

$$\|W_{-j}^1 - w(\tau_h, -jh)\|_{E_n} = \|W_j^1 - w(\tau_h, jh)\|_{E_n}, \quad j \geq 0.$$

Следовательно, достаточно рассмотреть в (4.11) числа $0 \leq j \leq N_h - 1$. Предположим, что $1 \leq j \leq N_h - 1$. Используя (4.6), (4.9) и неравенства

$$\|e^{sA_n}\|_{B(E_n)} \leq 1, \quad s \geq 0,$$

получаем

$$\begin{aligned}
W_j^1 &= \lambda V_n^{j-1} + (1-2\lambda)V_n^j + \lambda V_n^{j+1} \\
&= \left(\lambda e^{(j-1)hA_n} + (1-2\lambda)e^{jhA_n} + \lambda e^{(j+1)hA_n} \right) u_n^0 + O\left(h\|A_n^3 u_n^0\|_{E_n}\right) \\
&= e^{jhA_n} u_n^0 + \lambda \left(e^{(j-1)hA_n} - e^{jhA_n} + e^{(j+1)hA_n} - e^{jhA_n} \right) u_n^0 + O\left(h\|A_n^3 u_n^0\|_{E_n}\right) \\
&= e^{jhA_n} u_n^0 + \lambda \left(- \int_{(j-1)h}^{jh} e^{sA_n} A_n u_n^0 ds + \int_{jh}^{(j+1)h} e^{sA_n} A_n u_n^0 ds \right) + O\left(h\|A_n^3 u_n^0\|_{E_n}\right) \\
&= e^{jhA_n} u_n^0 + O\left(h\|A_n u_n^0\|_{E_n} + h\|A_n^3 u_n^0\|_{E_n}\right).
\end{aligned}$$

Более того,

$$\begin{aligned}
e^{jhA_n} u_n^0 - w(\tau_h, jh) &= e^{jhA_n} u_n^0 - \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau_h}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(s-jh)^2}{4\tau_h}} e^{|s|A_n} u_n^0 ds \\
&= \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau_h}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(s-jh)^2}{4\tau_h}} \left(e^{jhA_n} - e^{|s|A_n} \right) u_n^0 ds
\end{aligned}$$

с $s = jh + 2\sqrt{\tau_h}\sigma$, что дает

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\sigma^2} \left(e^{|jh|A_n} - e^{|jh+2\sqrt{\tau_h}\sigma|A_n} \right) u_n^0 d\sigma \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\sigma^2} \left(\int_{|jh+2\sqrt{\tau_h}\sigma|}^{|jh|} e^{\gamma A_n} A_n u_n^0 d\gamma \right) d\sigma = O\left(h\|A_n u_n^0\|_{E_n}\right).
\end{aligned}$$

Предельные соотношения

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n^0 - p_n u^0\|_{E_n} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n^0\|_{E_n} = \|u^0\|_E < \infty$$

и неравенство моментов

$$\|B^p v\|_{E_n} \leq \|B^q v\|_{E_n}^{p/q} \|v\|_{E_n}^{1-p/q}, \quad 0 \leq p \leq q, \quad B^* = B \geq 0, \quad B \in B(E_n), \quad v \in E_n,$$

влекут

$$\|A_n u_n^0\|_{E_n} \leq C_4 \|A_n^3 u_n^0\|_{E_n}$$

с $C_4 = C_4(\|u_n^0\|_{E_n})$. Следовательно для $1 \leq j \leq N_h - 1$ мы получаем

$$\begin{aligned}
\|W_j^1 - w(\tau_h, jh)\|_{E_n} &\leq \|W_j^1 - e^{jhA_n} u_n^0\|_{E_n} + \|e^{jhA_n} u_n^0 - w(\tau_h, jh)\|_{E_n} \\
&\leq C_5 h \left(\|A_n u_n^0\|_{E_n} + \|A_n^3 u_n^0\|_{E_n} \right) \leq C_6 h \|A_n^3 u_n^0\|_{E_n}.
\end{aligned}$$

Ясно, что для $j = 0$ имеет место неравенство

$$\|W_0^1 - w(\tau_h, 0)\|_{E_n} \leq C_7 h \|A_n u_n^0\|_{E_n} \leq C_8 h \|A_n^3 u_n^0\|_{E_n}.$$

Таким образом оценка (4.11) доказана.

Пусть $\widetilde{W}_j^k, j \in \mathbb{Z}, k \geq 1$, является решением, определенным по схеме (4.6) с начальным условием $\widetilde{W}_j^1 = w(\tau_h, jh), j \in \mathbb{Z}$, поставленным на первом временном уровне $t = \tau_h$. Согласно (4.11),

$$\|W_j^1 - \widetilde{W}_j^1\|_{E_n} \leq C_3 h \|A_n^3 u_n^0\|_{E_n}, \quad |j| \leq N_h - 1.$$

Отсюда в силу устойчивости (4.6) имеем

$$\|W_0^k - \widetilde{W}_0^k\|_{E_n} \leq \max_{0 \leq j \leq N_h-1} \|W_j^1 - \widetilde{W}_j^1\|_{E_n} \leq C_3 h \|A_n^3 u_n^0\|_{E_n}, \quad 1 \leq k \leq N_h.$$

Кроме того,

$$\|W_0^k - w(k\tau_h, 0)\|_{E_n} \leq \|\widetilde{W}_0^k - w(k\tau_h, 0)\|_{E_n} + \|W_0^k - \widetilde{W}_0^k\|_{E_n}, \quad 1 \leq k \leq N_h.$$

Условие гладкости $u_n^0 \in D(A_n^3)$ для функции

$$w(t, \eta) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\sigma^2} e^{|\eta+2\sqrt{t}\sigma|A_n} u_n^0 d\sigma$$

влечет ограниченность производной $w''_{\eta\eta}(t, \eta)$ при $t > 0$. Используя [21, лемма 1.1], получаем

$$\begin{aligned} \|\widetilde{W}_0^k - w(k\tau_h, 0)\|_{E_n} &\leq C_9 h^2 \sup_{\eta \in \mathbb{R}} \|w''_{\eta\eta}(\tau_h, \eta)\|_{E_n} = C_9 h^2 \sup_{\eta \in \mathbb{R}} \|w'_t(\tau_h, \eta)\|_{E_n} \\ &\leq C_{10} h \|A_n u_n^0\|_{E_n} \leq C_{11} h \|A_n^3 u_n^0\|_{E_n}, \quad 1 \leq k \leq N_h. \end{aligned}$$

Действительно,

$$w'_t(\tau_h, \eta) = \frac{1}{\sqrt{\pi\tau_h}} \int_{-\infty}^{\infty} \sigma \operatorname{sign}(\eta + 2\sqrt{\tau_h}\sigma) e^{-\sigma^2} e^{|\eta+2\sqrt{\tau_h}\sigma|A_n} A_n u_n^0 d\sigma, \quad \tau_h = \lambda h^2,$$

и, таким образом,

$$\sup_{\eta \in \mathbb{R}} \|w'_t(\tau_h, \eta)\|_{E_n} \leq \frac{\|A_n u_n^0\|_{E_n}}{\sqrt{\lambda\pi}h}.$$

Поэтому

$$\|W_0^k - w(k\tau_h, 0)\|_{E_n} \leq C_{12} h \|A_n^3 u_n^0\|_{E_n}, \quad C_{12} = C_3 + C_{11},$$

равномерно по $1 \leq k \leq N_h$. Итак, мы установили оценку

$$\|U_n^k - u_n(t_k)\|_{E_n} = \|W_0^k - w(k\tau_h, 0)\|_{E_n} \leq C_{12} h \|A_n^3 u_n^0\|_{E_n}, \quad 1 \leq k \leq N_h.$$

Это завершает доказательство теоремы 4.2. $\square$

5. КОСОСОПРЯЖЕННЫЕ ОПЕРАТОРЫ

В этом разделе мы рассмотрим уравнение

$$(\mathbf{D}_t^{1/2} u)(t) = iAu(t), \quad t \geq 0; \quad u(0) = u^0, \quad (5.1)$$

и его аппроксимацию

$$(\mathbf{D}_t^{1/2} u_n)(t) = iA_n u_n(t), \quad t \geq 0; \quad u_n(0) = u_n^0, \quad (5.2)$$

в предположении, что $A^* = A \geq 0$ и $A_n^* = A_n \geq 0$ являются неотрицательными самосопряженными операторами в гильбертовых пространствах E и E_n , соответственно. Очевидно, что iA и iA_n являются кососопряженными операторами в E и E_n .

В случае $\alpha = 1/l = 1/2$ задача Коши, соответствующая (1.1), может быть записана в виде

$$q'_n(t) = -A_n^2 q_n(t) + \frac{i}{\sqrt{\pi t}} A_n u_n^0, \quad t \geq 0; \quad q_n(0) = u_n^0, \quad (5.3)$$

с оператором $-A_n^2$, порождающим C_0 -полугруппу. Обобщенное решение задачи (5.3) дается в виде

$$q_n(t) = e^{-tA_n^2} u_n^0 + \int_0^t \frac{i}{\sqrt{\pi s}} e^{-(t-s)A_n^2} A_n u_n^0 ds. \quad (5.4)$$

Поскольку C_0 -полугруппа $e^{-tA_n^2}$ аналитична, то выполняется оценка

$$\|A_n e^{-tA_n^2}\|_{B(E_n)} \leq \frac{C_{13}}{\sqrt{t}}, \quad t > 0.$$

Следовательно,

$$\left\| \int_0^t \frac{1}{\sqrt{\pi s}} e^{-(t-s)A_n^2} A_n u_n^0 ds \right\|_{E_n} \leq C_{13} B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \|u_n^0\|_{E_n} = C_{14} \|u_n^0\|_{E_n}, \quad 0 < t \leq 1,$$

Здесь $B(\cdot, \cdot)$ обозначает бета-функцию. Отсюда

$$\|q_n(t)\|_{E_n} \leq C_{15} \|u_n^0\|_{E_n}, \quad 0 < t \leq 1.$$

Интегральная часть в (5.4) может быть аппроксимирована непосредственно (см. [23]).

Можно поступить и иначе, интегрируя по частям второй член в (5.4):

$$\begin{aligned} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{\pi s}} e^{-(t-s)A_n^2} A_n u_n^0 ds &= \frac{2\sqrt{t}}{\sqrt{\pi}} A_n u_n^0 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-(t-s)A_n^2} \sqrt{s} A_n^3 u_n^0 ds \\ &= \frac{2\sqrt{t}}{\sqrt{\pi}} A_n u_n^0 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{2}{3} t^{3/2} A_n^3 u_n^0 - \frac{2}{3} \int_0^t s^{3/2} e^{-(t-s)A_n^2} ds A_n^5 u_n^0 \right) = \dots \end{aligned} \quad (5.5)$$

В случае достаточно гладких начальных данных u_n^0 , а именно, $u_n^0 \in D(A_n^{11})$, можно аппроксимировать $e^{-tA_n^2}$ в (5.5) по схеме Кранка—Николсон:

$$\left(\frac{I_n - \tau_n A_n^2/2}{I_n + \tau_n A_n^2/2} \right)^{n_k}, \quad t = \tau_n k_n.$$

Для получения скорости сходимости порядка $O(\tau_n^2)$ можно комбинировать схему Кранка—Николсон с подходящей квадратурной формулой, которая дает аппроксимацию

$$\int_0^t e^{-(t-s)A_n^2} s^{5/2} A_n^7 u_n^0 ds \approx \tau_n \sum_{j=1}^{n_k} c_j \left(\frac{I_n - \tau_n A_n^2/2}{I_n + \tau_n A_n^2/2} \right)^{n_k-j} s_j^{5/2} A_n^7 u_n^0. \quad (5.6)$$

Обычно (5.6) требует ограниченности $(e^{-(t-s)A_n^2} s^{5/2})''_{ss}$.

Theorem 5.1. Пусть $A^* = A \geq 0$ и $A_n^* = A_n \geq 0$. Предположим, что выполняется условие (A) теоремы 2.2. Тогда задача Коши (5.1) корректно поставлена и ее полудискретная аппроксимация (5.2) дает такое решение, что $u_n(t) \xrightarrow{P} u(t)$ равномерно по $t \in [0, T]$. Если $u^0 \in D(A^{11})$, $u_n^0 \in D(A_n^{11})$ и $A_n^{11} u_n^0 \xrightarrow{P} A^{11} u^0$, то аппроксимация $u_n(t)$ порядка $O(\tau_n^2)$ может быть получена при помощи схемы Кранка—Николсон и формулы (5.6).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кокурин М. М. О единственности решения обратной задачи Коши для дифференциального уравнения с дробной производной в банаховом пространстве // Изв. вузов. Сер. мат. — 2013. — 12. — С. 19–35.
2. Пискарев С. И. Дифференциальные уравнения в банаховых пространствах и их аппроксимации. — М.: МГУ, 2005.
3. Пискарев С. И. Аппроксимации дробных уравнений в абстрактных пространствах // Тез. докл. Междунар. конф. «Дифференциальные уравнения и динамические системы», Суздаль, 8–12 июня 2016. — Суздаль, 2016. — С. 273.
4. Полянский Э. А. Метод коррекции решения параболического уравнения в неоднородном волноводе. — М.: Наука, 1985.
5. Alikhanov A. A. A new difference scheme for the time fractional diffusion equation // J. Comput. Phys. — 2015. — 280. — С. 424–438.
6. Bajlekova E. G. Fractional evolution equations in Banach spaces / Ph.D. Thesis. — Eindhoven University of Technology, 2001.

7. *Bakushinsky A. B., Kokurin M. Yu.* Iterative methods for approximate solution of inverse problems. — Dordrecht: Springer-Verlag, 2004.
8. *Brenner P., Thomee V.* On rational approximations of semigroups// SIAM J. Numer. Anal. — 1979. — 16. — C. 683–694.
9. *Chen C., Li M.* On fractional resolvent operator functions// Semigroup Forum. — 2010. — 80. — C. 121–142.
10. *Farlow S. J.* Partial differential equations for scientists and engineers. — New York: Dover Publ., 1993.
11. *Guidetti D., Karasozen B., Piskarev S.* Approximation of abstract differential equations// J. Math. Sci. — 2004. — 122. — C. 3013–3054.
12. *Keyantuo V., Lizama C.* On a connection between powers of operators and fractional Cauchy problems// J. Evol. Equ. — 2012. — 12. — C. 245–265.
13. *Li M., Chen C., Li F.-B.* On the fractional powers of generators of fractional resolvent families// J. Funct. Anal. — 2010. — 259. — C. 2702–2726.
14. *Li M., Morozov V., Piskarev S.* On the approximations of derivatives of integrated semigroups, II// J. Inverse Ill-Posed Probl. — 2011. — 19. — C. 643–688.
15. *Lin Y., Xu C.* Finite difference spectral approximations for the time-fractional diffusion equation// J. Comput. Phys. — 2007. — 225. — C. 1533–1552.
16. *Liu R., Li M., Pastor J., Piskarev S.* On the approximation of fractional resolution families// Differ. Equ. — 2014. — 50. — C. 927–937.
17. *Liu R., Li M., Piskarev S.* Stability of difference schemes for fractional equations// Differ. Equ. — 51, № 7. — C. 908–927.
18. *Liu R., Li M., Piskarev S.* Approximation of semilinear fractional Cauchy problem// Comput. Meth. Appl. Math. — 2015. — 15. — C. 203–212.
19. *Meerschaert M. M., Tadjeran C.* Finite difference approximations for fractional advection-dispersion flow equations// J. Comput. Appl. Math. — 2004. — 172. — C. 65–77.
20. *Piskarev S.* Fractional equations and difference schemes// Proc. Int. Conf. on Computational Methods in Applied mathematics, July 31–August 6, 2016. — Finland, Javaskyla (2016).
21. *Thomee V., Vasudeva Murthy A. S.* Approximate solution of $u' = -A^2u$ using a relation between $\exp(-tA^2)$ and $\exp(itA)$ // Numer. Funct. Anal. Optim. — 1995. — 16. — C. 1087–1096.
22. *Vainikko G.* Approximative methods for nonlinear equations (two approaches to the convergence problem)// Nonlin. Anal. — 1978. — 2. — C. 647–687.
23. *Vainikko G., Pedas A.* The properties of solutions of weakly singular integral equations// J. Austr. Math. Soc., Ser. B. — 1981. — 22. — C. 419–430.

М. Ю. Кокурин

Марийский государственный университет, Йошкар-Ола

E-mail: kokurinm@yandex.ru

С. И. Пискарев

Научно-исследовательский вычислительный центр МГУ им. М. В. Ломоносова;

Всероссийский институт научной и технической информации (ВИНИТИ РАН)

E-mail: piskarev@gmail.com

M. Spreafico

Department of Mathematics and Physics, Istituto Nazionale di Fisica Nucleare, Lecce, Italy

E-mail: mauro.spreafico@unisalento.it