ISSN 0233-6723

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ

СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Тематические обзоры

Том 132

Москва 2017

ISSN 0233–6723

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

ВСЕРОССИЙСКИЙ ИНСТИТУТ
НАУЧНОЙ И ТЕХНИЧЕСКОЙ ИНФОРМАЦИИ
(ВИНИТИ РАН)

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ

СЕРИЯ
СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА
И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

ТЕМАТИЧЕСКИЕ ОБЗОРЫ

Том 132

ТРУДЫ МЕЖДУНАРОДНОГО СИМПОЗИУМА

«ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ–2016»,

ПЕРМЬ, 17–18 МАЯ 2016

Москва 2017

СОДЕРЖАНИЕ

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 132 (2017). С. 4–7

УДК 517.988

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ МНОГОТОЧЕЧНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ЛИНЕЙНОГО ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

© 2017 г. **А. Р. АБДУЛЛАЕВ, Е. А. СКАЧКОВА**

Аннотация. Сформулированы условия разрешимости многоточечной краевой задачи для линейного функционально-дифференциального уравнения второго порядка.

Ключевые слова: линейное функционально-дифференциальное уравнение; многоточечная задача; резонанс.

AMS Subject Classification: 34B10, 34G10

Рассмотрим следующую краевую задачу для линейного функционально-дифференциального уравнения:

$$x''(t) = (Sx)(t) + h(t), \tag{1}$$

$$x(0) = \alpha x(\xi), \quad x(1) = \beta x(\eta), \tag{2}$$

где $t \in [0;1]$, функция $h : [0;1] \to \mathbb{R}^1$ измерима, S — линейный оператор, $\xi, \eta \in (0;1)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^1$.

Такого типа задачи весьма актуальны в приложениях, например, в различных областях физики, теории управления, экономике и т.д. Интерес к задачам вида (1), (2), в том числе, с нелинейными операторами проявляли многие исследователи (см., например, [1, 2, 5, 7, 8]).

В работе будем рассматривать резонансные случаи задачи (1), (2). Так как понятие резонанса определяется относительно выбранной модельной краевой задачи, то в качестве таковой в работе будем рассматривать следующую задачу:

$$x''(t) = 0, \quad x(0) = \alpha x(\xi), \quad x(1) = \beta x(\eta), \tag{3}$$

и резонансными будем считать те случаи, в которых такая задача имеет ненулевые решения (см. [3]). В отечественной литературе такие случаи называются критическими (см. [6]).

Пусть $\mathbf{L}_p = \mathbf{L}_p[0;1]$, $1 < p < \infty$, — пространство суммируемых по Лебегу в p-й степени функций $y : [0,1] \to \mathbb{R}^1$ с нормой

$$\|y\|_p = \left(\int\limits_0^1 |y(s)|^p ds\right)^{1/p}.$$

Через $\mathbf{W_p} = \mathbf{W_p}[0;1]$ обозначим пространство таких абсолютно непрерывных вместе с первой производной функций $x : [0,1] \to \mathbb{R}^1$, что $x'' \in \mathbf{L}_p$ с нормой

$$\|x\|_{\mathbf{W}_p} = |x(0)| + |x'(0)| + \|x''\|_p.$$

Всюду далее q — сопряженный с p показатель:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \quad 1 < p < \infty.$$

Определение. Под решением задачи (1), (2) будем понимать всякую функцию $x \in \mathbf{W}_p[0;1]$, удовлетворяющую почти всюду на отрезке $[0;1]$ уравнению (1) и краевым условиям (2).

ISSN 0233–6723

Равенством
$$\mathbf{W}_p^0[0,1] = \Big\{x \in \mathbf{W}_p[0;1] \,\Big|\, x(0) = \alpha x(\xi),\ x(1) = \beta x(\eta)\Big\}$$
определим замкнутое подпространство пространства $\mathbf{W}_p[0;1]$. На этом пространстве задача (1), (2) эквивалентна уравнению (1).

Всюду далее будем предполагать выполненным следующее условие:
$$\alpha\xi(\beta-1) = (\beta\eta-1)(\alpha-1).$$
При выполнении этого условия задача (3) имеет нетривиальные решения, т.е. в рамках принятого определения задача (1), (2) является резонансной.

Введем следующие обозначения:
$$A = \frac{1}{\xi}\int\limits_0^{\xi}\int\limits_0^{t} S(1)(\tau)d\tau dt - \frac{1}{1-\eta}\int\limits_{\eta}^{1}\int\limits_0^{t} S(1)(\tau)d\tau dt,$$

$$B = \int\limits_0^1\int\limits_0^{\tau} S\left(t - \frac{\alpha\xi}{\alpha-1}\right)(t)\,dt\,d\tau - \beta\int\limits_0^{\eta}\int\limits_0^{\tau} S\left(t - \frac{\alpha\xi}{\alpha-1}\right)(t)\,dt\,d\tau + \frac{\beta\eta-1}{\xi}\int\limits_0^{\xi}\int\limits_0^{\tau} S\left(t - \frac{\alpha\xi}{\alpha-1}\right)(t)\,dt\,d\tau.$$

Условия разрешимости задачи (1), (2) сформулируем в виде следующего утверждения.

Теорема 1. *Пусть выполнены следующие условия*:

1) *для любого* $h \in \mathbf{L}_p$
$$\int\limits_0^1\int\limits_0^{\tau} h(s)\,s\,d\tau - \beta\int\limits_0^{\eta}\int\limits_0^{\tau} h(s)\,ds\,d\tau + \frac{\beta\eta-1}{\xi}\int\limits_0^{\xi}\int\limits_0^{\tau} h(s)\,ds\,d\tau = 0;$$

2) *в случае* $\alpha = 1,\ \beta = 1,\ A \neq 0$
$$\|S\|\left(1 + \frac{\xi+\eta+1}{2|A|}\|S\|\right)\left(1 + \frac{q}{(1-\eta)(q+1)}\cdot\left(1-\eta^{\frac{q+1}{q}}\right)\right) < 1$$

в случае $\alpha \neq 1,\ \beta \neq 1,\ B \neq 0$
$$\|S\|\left(1 + \left(\frac{1+|\beta|\eta^2+|\beta\eta-1|\xi}{2|B|}\right)\left(1 + \frac{|\alpha|\xi}{|\alpha-1|}\right)\|S\|\right) < 1.$$

Тогда задача (1), (2) *имеет хотя бы одно решение в пространстве* $\mathbf{W}_p$.

Отметим, что случаи $A = 0$ или $B = 0$ исследуются отдельно.

В пространстве $\mathbf{W}_p^0$ задачу (1), (2) представим в виде операторного уравнения $Lx = Fx$, где операторы $L, F : \mathbf{W}_p^0 \to \mathbf{L}_p$ определяются равенствами
$$(Lx)(t) = x''(t), \quad (Fx)(t) = (Sx)(t) + h(t).$$

Для линейного оператора $L : X \to Y$, где X, Y — банаховы пространства, через $\ker L$ и $\operatorname{im} L$ соответственно обозначим ядро и образ оператора. Другие определения, используемые в данной работе, приведены в [4].

Доказательство теоремы 1 основано на следующих утверждениях. При этом применяется теорема существования для квазилинейного операторного уравнения, приведенная в [4].

Лемма 1. *Если краевые условия таковы, что* $\alpha \neq 1$, $\beta \neq 1$, *то справедливы следующие утверждения.*

1. *Ядро и образ оператора* $L : \mathbf{W}_p^0 \to \mathbf{L}_p$ *определяются равенствами*

$$\ker L = \left\{ x \in \mathbf{W}_p^0 \;\middle|\; x = c(t - \frac{\alpha\xi}{\alpha - 1}),\ c \in \mathbf{R},\ t \in [0,1] \right\},$$

$$\operatorname{im} L = \left\{ y \in \mathbf{L}_p \;\middle|\; \int\limits_0^1 \int\limits_0^\tau y(s)\,ds\,d\tau - \beta \int\limits_0^\eta \int\limits_0^\tau y(s)\,ds\,d\tau + \frac{\beta\eta - 1}{\xi} \int\limits_0^\xi \int\limits_0^\tau y(s)\,ds\,d\tau = 0 \right\}.$$

2. *Следующие операторы являются проекторами соответственно на ядро и образ оператора* L:

$$(Px)(t) = x'(0)\,t + x(0),$$

$$(Qy)(t) = y(t) - \frac{2}{(\beta\eta - 1)\xi + 1 - \beta\eta^2} \Bigg(\int\limits_0^1 \int\limits_0^\tau y(s)\,ds\,d\tau -$$
$$- \beta \int\limits_0^\eta \int\limits_0^\tau y(s)\,ds\,d\tau + \frac{\beta\eta - 1}{\xi} \int\limits_0^\xi \int\limits_0^\tau y(s)\,ds\,d\tau \Bigg).$$

3. *Обобщенно обратный оператор для оператора* L*, ассоциированный с проектором* P*, имеет вид*

$$K_p y = \int\limits_0^t \int\limits_0^s y(\tau)\,d\tau, ds, \quad y \in \operatorname{im} L,$$

и справедлива следующая оценка нормы K_p:

$$\|K_p\| \leqslant 1.$$

Аналогичное утверждение доказывается для случая $\alpha = 1$, $\beta = 1$.

Лемма 2. *Пусть* $h \in \operatorname{im} L$*. Если оператор* $T : X_0 \to \ker L$ *имеет одно из следующих представлений:*

$$Tx = \frac{1}{A} \left(\frac{1}{1-\eta} \int\limits_\eta^1 \int\limits_0^t (Sx)(\tau)\,d\tau\,dt - \frac{1}{\xi} \int\limits_0^\xi \int\limits_0^t (Sx)(\tau)\,d\tau\,dt \right)$$

в случае $\alpha = 1$, $\beta = 1$, $A \neq 0$ *или*

$$Tx = \frac{1}{B} \Bigg(\beta \int\limits_0^\eta \int\limits_0^\tau (Sx)(t)\,dt\,d\tau - \frac{\beta\eta - 1}{\xi} \int\limits_0^\xi \int\limits_0^\tau (Sx)(t)\,dt\,d\tau -$$
$$- \int\limits_0^1 \int\limits_0^\tau (Sx)(t)\,dt\,d\tau \Bigg) \left(t - \frac{\alpha\xi}{\alpha - 1} \right)$$

в случае $\alpha \neq 1$, $\beta \neq 1$, $B \neq 0$, *то* $F(x + Tx) \in \operatorname{im} L$ *для всех* x.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Абдуллаев А. Р., Бурмистрова А. Б.* Обобщенный оператор Грина и разрешимость резонансных задач// Диффер. уравн. — 1990. — *26*, № 11. — С. 1860–1864.
2. *Абдуллаев А. Р., Скачкова Е. А.* Периодическая краевая задача для дифференциального уравнения четвертого порядка// Изв. вузов. Сер. Мат. — 2013. — № 12. — С. 3–10.
3. *Абдуллаев А. Р., Скачкова Е. А.* Об одной многоточечной краевой задаче для дифференциального уравнения второго порядка// Вестн. Перм. ун-та. Сер. Мат. Мех. Инф. — 2014, № 2 (25). — С. 5–9.
4. *Самойленко А. М., Бойчук А. А., Журавлев В. Ф.* Линейные краевые задачи для нормально разрешимых операторных уравнений в банаховом пространстве// Диффер. уравн. — 2014. — *50*, № 3. — С. 317–326.

5. *Feng W., Webb J. R. L.* Solvability of m-point boundary-value problems with nonlinear growth// J. Math. Anal. Appl. — 1997. — *212*. — С. 467–480.
6. *Gupta C. P.* Solvability of a multi-point boundary value problem at resonance// Results Math. — 1995. — *28*. — С. 270–276.
7. *Liu B.* Solvability of multi-point boundary-value problems at resonance, I// Indian J. Pure Appl. Math. — 2002. — *33*, № 4. — С. 475–494.
8. *Przeradzki B., Stanczy R.* Solvability of a multi-point boundary-value problem at resonance// J. Math. Anal. Appl. — 2001. — *264*. — С. 253–261.

А. Р. Абдуллаев
Пермский национальный исследовательский политехнический университет
E-mail: h.m@pstu.ru

Е. А. Скачкова
Пермский государственный национальный исследовательский университет
E-mail: skachkovaea@gmail.com

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 132 (2017). С. 8–12

УДК 517.925.54

АСИМПТОТИКА КОЛЕБЛЮЩИХСЯ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ СО СТЕПЕННОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

© 2017 г. **И. В. АСТАШОВА**

Аннотация. В работе приводятся результаты о существовании колеблющихся решений специального вида («квазипериодических» решений) для нелинейного дифференциального уравнения со степенной нелинейностью. Для колеблющихся решений таких уравнений третьего порядка получена асимптотика экстремумов, которая выражается через асимптотику экстремумов «квазипериодического» решения. Эти результаты уточняют ранее полученные автором асимптотические формулы для модулей экстремумов решений.

Ключевые слова: колеблющееся решение, асимптотическое поведение, нелинейное уравнение.

AMS Subject Classification: 34C10, 34E10

1. Введение. В работе приводятся результаты о колеблющихся решениях уравнения типа Эмдена—Фаулера высокого порядка.

Определение 1. Решение называется *колеблющимся на* $+\infty$ $(-\infty)$, если оно имеет сколь угодно большие нули (сколь угодно большие по модулю отрицательные нули). Решение называется *колеблющимся вблизи точки* $b \in [-\infty, +\infty]$ (или при $x \to b$), если оно принимает как положительные, так и отрицательные значения в любой окрестности точки b. Решение называется *колеблющимся*, если оно является колеблющимся вблизи границ его области определения.

Определение 2. Прямую $x = b$ будем называть *резонансной асимптотой*, если

$$\overline{\lim_{x\to b}}\, |y(x)| = \infty.$$

В [3, 6] доказано существование решений, имеющих вертикальную асимптоту, с нестепенным поведением для уравнений порядков $n = 12$, 13, 14, что опровергает гипотезу, высказанную И. Т. Кигурадзе (см. [4, с. 324]), о степенном характере асимптотики таких решений для уравнений произвольного порядка. Ранее эта гипотеза была подтверждена для $n = 2$ (см. [4, § 20]) и для $n = 3$, 4 (см. [1] и [2, гл. V]), а в работе [11] доказано, что решения с нестепенным поведением существуют для достаточно больших n. Доказательство результатов для $n = 12$, 13, 14 содержится в [5, 6]. Вопрос о существовании решений с нестепенным поведением при $4 < n < 12$ и $n > 14$ до сих пор остается открытым, однако оказалось, что подобное поведение решений является в некотором смысле«типичным», установлено существование колеблющихся решений уравнений произвольного порядка, имеющих поведение, описываемое при помощи аналогичного аналитического выражения.

2. Ранее полученные результаты.

2.1. Существование квазипериодических решений. Рассматривается уравнение

$$y^{(n)} + p_0\, |y|^k \operatorname{sgn} y = 0, \quad n > 2, \quad k \in \mathbb{R}, \quad k > 1, \quad p_0 \neq 0. \tag{1}$$

Многие результаты об асимптотическом поведении решений уравнения (1) подробно описаны в [4,5]. Другие результаты о существовании решений этого уравнения с асимптотикой специального вида содержатся в [1–4, 6, 11].

Приведем результаты о существовании квазипериодических колеблющихся решений уравнения (1). При этом будет использоваться обозначение $\alpha = \dfrac{n}{k-1}$.

Теорема 1. *Для любого целого $n > 2$ и любого действительного $k > 1$ существует такая знакопеременная периодическая функция $h(s)$, что для любых $p_0 > 0$ и $x^* \in \mathbb{R}$ функция*

$$y(x) = p_0^{-\frac{1}{k-1}}(x^* - x)^{-\alpha} h(\log(x^* - x)), \quad -\infty < x < x^*, \tag{2}$$

является решением уравнения (1).

Решения вида (2) будем называть *квазипериодическими.*

Следствие 1. *Для любого четного $n > 2$ и любого действительного $k > 1$ существует такая знакопеременная периодическая функция $h(s)$, что для любых $p_0 > 0$ и $x^* \in \mathbb{R}$ функция*

$$y(x) = p_0^{-\frac{1}{k-1}}(x - x^*)^{-\alpha} h(\log(x - x^*)), \quad x^* < x < \infty, \tag{3}$$

является решением уравнения (1).

Следствие 2. *Для любого нечетного $n > 2$ и любого действительного $k > 1$ существует такая знакопеременная периодическая функция $h(s)$, что для любых $p_0 < 0$ и $x^* \in \mathbb{R}$ функция*

$$y(x) = |p_0|^{-\frac{1}{k-1}}(x - x^*)^{-\alpha} h(\log(x - x^*)), \quad x^* < x < \infty, \tag{4}$$

является решением уравнения (1).

Замечание 1. Аналогичные результаты получены для уравнения (1) в случае $0 < k < 1$. Эти результаты частично опубликованы в [3, 7]. Получена асимптотическая классификация решений уравнения (1) в случае $n = 3$, 4 и $k > 1$, $0 < k < 1$. Доказательство для случая $n = 3$ содержится в [2], для случая $n = 4$, $k > 1$ приведено в [8], для $n = 4$, $0 < k < 1$ — в [9].

Замечание 2. Отметим, что ранее в [11] было доказано существование решений вида (4) с положительной периодической функцией $h(s)$ для уравнения (1) с достаточно большим n и $p_0 = (-1)^{n+1}$. Аналогичный результат для $n = 12$, 13, 14 был доказан в [3].

2.2. Асимптотические формулы для экстремумов колеблющихся решений уравнений третьего порядка.

Теорема 2 (см. [1, 2]). *Пусть в уравнении*

$$y''' = p(x, y, y', y'')|y|^k \operatorname{sgn} y, \quad n > 2, \quad k \in \mathbb{R}, \quad k > 1, \quad p_0 \neq 0, \tag{5}$$

функция $p(x, y_0, y_1, y_2)$ положительна, непрерывна и удовлетворяет условию Липшица по y_0, y_1, y_2. Кроме того, пусть $p(x, y_0, y_1, y_2) \to p_0 > 0$ при $x \to x_* + 0$ равномерно по y_0, y_1, y_2. Тогда любое знакопеременное решение уравнения (5)*, определенное на интервале (x_*, x_0), $-\infty \leqslant x_* < x_0 \leqslant \infty$, удовлетворяет при $i \to \infty$ условию*

$$y(x_i) = |x_* - x_i|^{-\alpha + o(1)}, \tag{6}$$

где $x_1 > x_2 > \cdots > x_i > \cdots$ — такая последовательность, что

$$y'(x_i) = 0 \quad \text{и} y'(x) \neq 0 \quad \text{при} \quad x_{j+1} < x < x_i. \tag{7}$$

3. Асимптотическое поведение колеблющихся решений уравнений третьего порядка. Уточним асимптотику (7), используя квазипериодическое решение, которое существует в силу теоремы 1.

Рассматривается уравнение (1) при $n = 3$:

$$y''' + p_0|y|^k \operatorname{sgn} y = 0, \tag{8}$$

где $k > 1$ и $p_0 > 0$ — действительные числа.

Заметим, что если $y(x)$ — решение уравнения (8), то решением этого уравнения является также и функция

$$z(x) = \pm\lambda^\alpha y(\lambda x + c)$$

при произвольных константах c и $\lambda > 0$ (см. [2, лемма 6.1]) Поэтому среди колеблющихся на всей области определения решений уравнения (8) можно выбрать такое, у которого резонансная асимптота задается соотношением $x = 1$, а один из локальных максимумов достигается в нуле.

Обозначим это решение $Y(x)$. Отметим, что $Y(x)$ — квазипериодическое решение, существование которого гарантируется теоремой 1. Если x' — любая другая точка локального экстремума решения $Y(x)$, то

$$\bigl|Y(x')\bigr| = Y(0)\,(1-x')^{-\alpha}.$$

Теорема 3. *Пусть $y(x)$ — произвольное решение уравнения* (8)*, заданное в левой полуокрестности точки x^*, для которого прямая $x = x^*$ является резонансной асимптотой. Пусть $x_0 < x_1 < \cdots < x_j < \cdots < x^*$ — последовательные точки локальных экстремумов решения $y(x)$. Тогда*

$$\bigl|y(x_j)\bigr| = \bigl(Y(0)+o(1)\bigr)\,\bigl(x^*-x_j\bigr)^{-\alpha}, \quad j\to\infty.$$

Доказательство. Будем считать, что четным номерам j соответствуют точки x_j локальных максимумов, а нечетным — точки x_j локальных минимумов.

Заметим, что последовательность $\bigl|y(x_j)\bigr|$ монотонно возрастает. Действительно,

$$\bigl|y(x_{j+1})\bigr|^{k+1} - \bigl|y(x_j)\bigr|^{k+1} = -\frac{k+1}{p_0}\int\limits_{x_j}^{x_{j+1}} y'''(\xi)\,y'(\xi)\,d\xi =$$

$$= -\frac{k+1}{p_0}\left(y''(\xi)\,y'(\xi)\Bigr|_{x_j}^{x_{j+1}} - \int\limits_{x_j}^{x_{j+1}} y''(\xi)^2\,d\xi \right) = \frac{k+1}{p_0}\int\limits_{x_j}^{x_{j+1}} y''(\xi)^2\,d\xi > 0.$$

То же самое можно сказать и про последовательность $\bigl|y''(x_j)\bigr|$:

$$\frac{y''(x_{j+1})^2 - y''(x_j)^2}{2p_0} = \frac{1}{p_0}\int\limits_{x_j}^{x_{j+1}} y''(\xi)\,y'''(\xi)\,d\xi = -\int\limits_{x_j}^{x_{j+1}} y''(\xi)\,\bigl|y(\xi)\bigr|^k \operatorname{sgn} y(\xi)\,d\xi =$$

$$= -y'(\xi)\,\bigl|y(\xi)\bigr|^k \operatorname{sgn} y(\xi)\Bigr|_{x_j}^{x_{j+1}} + \int\limits_{x_j}^{x_{j+1}} y'(\xi)^2\,\bigl|y(\xi)\bigr|^{k-1}\,d\xi = \int\limits_{x_j}^{x_{j+1}} y'(\xi)^2\,\bigl|y(\xi)\bigr|^{k-1}\,d\xi > 0.$$

Рассмотрим решения уравнения (8), задаваемые соотношениями

$$z_j(x) = (-1)^j\,\lambda_j^{\alpha}\,y(\lambda_j x + x_j),$$

где константы $\lambda_j > 0$ выбраны так, чтобы выполнялись соотношения

$$\bigl|z_j(0)\bigr|^{\alpha+2} + \bigl|z_j''(0)\bigr|^{\alpha} = \lambda_j^{\alpha(\alpha+2)}\Bigl(\bigl|y(x_j)\bigr|^{\alpha+2} + \bigl|y''(x_j)\bigr|^{\alpha}\Bigr) = \bigl|Y(0)\bigr|^{\alpha+2} + \bigl|Y''(0)\bigr|^{\alpha}.$$

Так как $\bigl|y(x_j)\bigr|$ и $\bigl|y''(x_j)\bigr|$ монотонно возрастают, причем

$$\bigl|y(x_j)\bigr| \to \infty \quad \text{при} \quad j\to\infty,$$

то λ_j монотонно стремится к 0 при $j\to\infty$.

Пары $(z_j(0), z_j''(0))$ задают точки, лежащие в плоскости $\{(u,w)\}$ на компактном множестве K, задаваемом соотношениями

$$|u|^{\alpha+2} + |w|^{\alpha} = \bigl|Y(0)\bigr|^{\alpha+2} + \bigl|Y''(0)\bigr|^{\alpha}, \quad u \geqslant 0, \quad w \leqslant 0.$$

Поэтому у этой последовательности точек существует, по крайней мере, одна предельная точка, лежащая в K. Если такая точка одна, то она является и пределом последовательности.

Пусть подпоследовательность $(z_{j_m}(0), z_{j_m}''(0))$ сходится к некоторой точке $(u^*, w^*) \in K$. Рассмотрим максимально продолженное решение $z(x)$ уравнения (8) с начальными условиями

$$z(0) = u^*, \quad z'(0) = 0, \quad z''(0) = w^*.$$

Это нетривиальное решение, так как $(0,0) \notin K$. Поэтому вблизи левой границы области определения оно либо является колеблющимся, либо уходит на вертикальную асимптоту.

В первом случае, согласно лемме 6.3 из [2], имеем

$$z(x) = \pm\lambda^\alpha Y(\lambda x + c)$$

при некоторых λ и c. Учитывая, что 0 является точкой локального максимума решений $z(x)$ и $Y(x)$, а также тот факт, что

$$\bigl|z(0)\bigr|^{\alpha+2} + \bigl|z''(0)\bigr|^\alpha = \bigl|Y(0)\bigr|^{\alpha+2} + \bigl|Y''(0)\bigr|^\alpha,$$

получим $u^* = Y(0)$, $w^* = Y''(0)$ и $z(x) \equiv Y(x)$.

Во втором случае, если асимптота задается уравнением $x = b$, то решения $z_{j_m}(x)$ при достаточно больших m также имеют вертикальные асимптоты $x = b_{j_m}$, причем $b_{j_m} \to b$ при $m \to \infty$. Но тогда для таких m можно утверждать, что решение $y(x)$ имеет слева вертикальную асимптоту

$$x = \lambda_{j_m} b_{j_m} + x_{j_m}.$$

Последнее выражение стремится к x^* при $m \to \infty$, откуда следует, что у решения $y(x)$ пустая область определения.

Это противоречие показывает, что

$$(z_j(0), z_j''(0)) \to (Y(0), Y''(0)) \quad \text{при} \quad j \to \infty.$$

Поэтому, согласно теореме 7.4 из [2], координата x_j^* резонансной асимптоты решения $z_j(x)$ стремится к 1 при $j \to \infty$.

Координата x^* решения $y(x)$ выражается через x_j^* очевидным образом:

$$x^* = \lambda_j x_j^* + x_j.$$

Отсюда при $j \to \infty$ имеем

$$\bigl|y(x_j)\bigr| = \lambda_j^{-\alpha} z_j(0) = \left(\frac{x^* - x_j}{1 + o(1)}\right)^{-\alpha} \bigl(Y(0) + o(1)\bigr) = \bigl(Y(0) + o(1)\bigr)\bigl(x^* - x_j\bigr)^{-\alpha}.$$

Теорема доказана. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Асташова И. В.* Об асимптотическом поведении знакопеременных решений некоторых нелинейных дифференциальных уравнений третьего и четвертого порядка// В сб.: Доклады расширенных заседаний семинара ИПМ имени И. Н. Векуа. — Тбилиси: ТГУ, 1988. — *3*, № 3. — С. 9–12.
2. *Асташова И. В.* Качественные свойства решений квазилинейных обыкновенных дифференциальных уравнений// В сб.: Качественные свойства решений дифференциальных уравнений и смежные вопросы спектрального анализа/ Научное издание под ред. И. В. Асташовой. — М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2012. — С. 22–288.
3. *Асташова И. В.* О положительных решениях с нестепенной асимптотикой и квазипериодических решениях уравнения типа Эмдена—Фаулера высокого порядка// Пробл. мат. анал. — 2015. — *79*. — С. 17–31.
4. *Кигурадзе И. Т., Чантурия Т. А.* Асимптотические свойства решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1990.
5. *Astashova I. V.* On the existence of positive solutions with a non-power-law asymptotics of an equation of the Emden–Fowler type of 13th and 14th order// Differ. Eq. — 2013. — *49*, № 6. — С. 775–777.
6. *Astashova I. V.* On power and non-power asymptotic behavior of positive solutions to Emden–Fowler-type higher-order equations// Adv. Difference Eq. — 2013. — DOI: 10.1186/10.1186/1687-1847-2013-220.
7. *Astashova I.* On quasi-periodic solutions to a higher-order Emden–Fowler-type differential equation// Boundary Value Problems. — 2014. — *174*. — С. 1–8; DOI: 10.1186/s13661-014-0174-7.
8. *Astashova I. V.* On asymptotic classification of solutions to nonlinear third- and fourth-order differential equations with power nonlinearity// Вестн. МГТУ им. Н. Э. Баумана. Сер. Естеств. науки. — 2015. — № 2. — С. 3–25.
9. *Astashova I.* On asymptotic classification of solutions to fourth-order differential equations with singular power nonlinearity// Math. Model. Anal. — 2016. — *21*, № 4. — С. 502–521; DOI: 10.3846/13926292.2016.1185043.
10. *Astashova I.* On asymptotic behavior of solutions to Emden–Fowler-type higher-order differential equations// Math. Bohemica. — 2015. — *140*, № 4. — С. 479–488.

11. *Kozlov V. A.* On Kneser solutions of higher-order nonlinear ordinary differential equations// Ark. Mat. — 1999. — *37*, № 2. — С. 305–322.

И. В. Асташова
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова;
Российский экономический университет им. Г. В. Плеханова
E-mail: `ast@diffiety.ac.ru`

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 132 (2017). С. 13–16

УДК 517.929

О РАЗРЕШИМОСТИ НА ОТРИЦАТЕЛЬНОЙ ПОЛУОСИ ОДНОГО АВТОНОМНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

© 2017 г. **А. С. БАЛАНДИН**

Аннотация. Для автономного дифференциального уравнения с запаздыванием получено описание пространства решений на отрицательной полуоси.

Ключевые слова: функционально-дифференциальное уравнение, последействие, отрицательная полуось, разрешимость.

AMS Subject Classification: 34K06, 34K12

Пусть $\mathbb{N}$ — множество натуральных, $\mathbb{R}$ — вещественных, $\mathbb{C}$ — комплексных чисел, $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$, $\mathbb{R}_- = (-\infty, 0]$. Через D_{loc} обозначим пространство функций, абсолютно непрерывных на каждом конечном интервале из $\mathbb{R}_-$.

Рассмотрим функционально-дифференциальное уравнение вида

$$\dot{x}(t) + ax(t) + bx(t-1) = 0, \quad t \in \mathbb{R}_-, \tag{1}$$

где $a, b \in \mathbb{C}$. Будем считать, что решение уравнения (1) принадлежит классу D_{loc}.

Пусть α — вещественное число. Рассмотрим функциональное пространство

$$L^\alpha = \left\{ x : x \in D_{loc}, \int\limits_{-\infty}^{0} \bigl|x(t)\bigr| e^{-\alpha t}\, dt < \infty \right\}.$$

Важную роль при изучении уравнения (1) играет его характеристическая функция:

$$g(p) = p + a + be^{-p}, \quad p \in \mathbb{C}.$$

Пусть $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ — множество всех корней функции g, занумерованных так, чтобы

$$\operatorname{Re} p_1 \geqslant \operatorname{Re} p_2 \geqslant \dots \geqslant \operatorname{Re} p_n \geqslant \cdots.$$

Порядок нумерации корней с одинаковой вещественной частью произволен. Через k_n обозначим кратность корня p_n.

Для уравнения (1) справедлив следующий результат.

Теорема 1. *Любое решение уравнения* (1) *в пространстве L^α представимо в виде*

$$x(t) = \sum_{\operatorname{Re} p_n > \alpha} q_n(t) e^{p_n t},$$

где q_n — полином степени $k_n - 1$ с произвольными комплексными коэффициентами.

Следствие 1. *Уравнение* (1) *имеет в пространстве L^α только тривиальное решение тогда и только тогда, когда $\alpha \geqslant \operatorname{Re} p_0$.*

Применим теорему 1 и следствие 1 к уравнению (1).

1. Сначала исследуем случай $a, b \in \mathbb{R}$.

ISSN 0233–6723

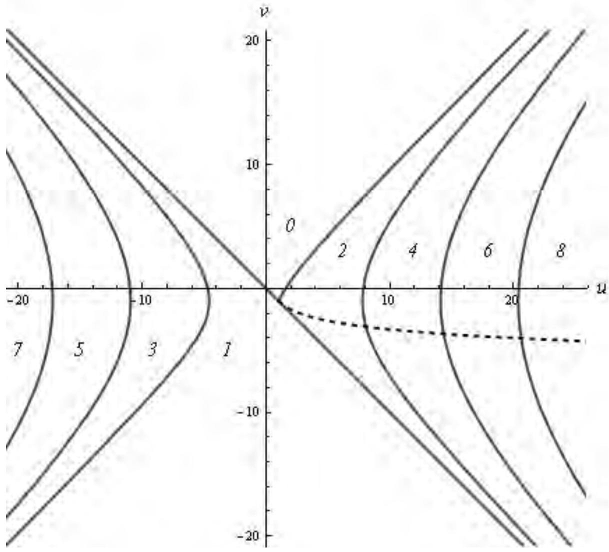

Рис. 1

Пользуясь критерием устойчивости, найденным в [1], из следствия 1 получаем, что уравнение (1) однозначно разрешимо в пространстве L^0 тогда и только тогда, когда

$$-a \leqslant b \leqslant \frac{\theta}{\sin\theta},$$

где θ — корень уравнения $a = -\theta \operatorname{ctg}\theta$ из интервала $(0, \pi)$. Исследуем разрешимость уравнения (1) при других значениях a и b.

На плоскости Ouv зададим прямую $u + v = 0$ и семейство кривых $\{\Gamma_m\}_{m\in\mathbb{N}_0}$, где

$$\Gamma_m = \left\{ u = \frac{\varphi}{\sin\varphi},\ v = -\varphi \operatorname{ctg}\varphi,\ \varphi \in (\pi m, \pi(m+1)) \right\}.$$

Данные прямая и кривые не пересекаются, за исключением единственной точки $(-1, 1)$, из которой выходит кривая Γ_0. Кроме того, кривая Γ_0 имеет асимптоту $u - v = 0$, а кривые Γ_m, $m \in \mathbb{N}$, имеют две асимптоты: $u + v = 0$, $u - v = 0$.

Замкнутое множество, ограниченное кривой Γ_0 и прямой $u + v = 0$, обозначим D_0. Множество, ограниченное кривой Γ_1 и прямой $u + v = 0$, включая саму кривую Γ_1 и часть прямой при $u > 1$, обозначим D_1. Множество, ограниченное кривыми Γ_0 и Γ_2 и прямой $u + v = 0$, включая кривую Γ_2, обозначим D_2. Множество, ограниченное кривыми Γ_{2m-1} и Γ_{2m+1}, включая кривую Γ_{2m+1}, обозначим D_{2m+1} ($m \in \mathbb{N}$). Множество, ограниченное кривыми Γ_{2m} и Γ_{2m+2}, включая кривую Γ_{2m+2}, обозначим D_{2m} ($m \in \mathbb{N}$). Таким образом, плоскость Ouv разбита на непересекающиеся множества D_m, $m \in \mathbb{N}_0$ (см. рис. 1).

Используя метод D-разбиения (см. [2]), несложно убедиться, что если $(b, a) \in D_m$, то функция g имеет ровно m нулей справа от мнимой оси (с учётом кратности нулей). Таким образом, индекс множества совпадает с количеством нулей в правой полуплоскости. На рис. 1 изображены множества D_m, числами обозначены индексы соответствующего множества D_m. Легко видеть, что все кратные нули функции g имеют вид $p = -1 - a$. В правой полуплоскости появляются кратные нули, если и только если точка (b, a) лежит на кривой K, где

$$K = \left\{ (u, v) : ue^{v+1} = 1,\ u > 1 \right\}.$$

На рис. 1 данная кривая обозначена пунктиром.

Таким образом, если $(b, a) \in D_m$, то размерность пространства решений уравнения (1) в пространстве L^0 равна m.

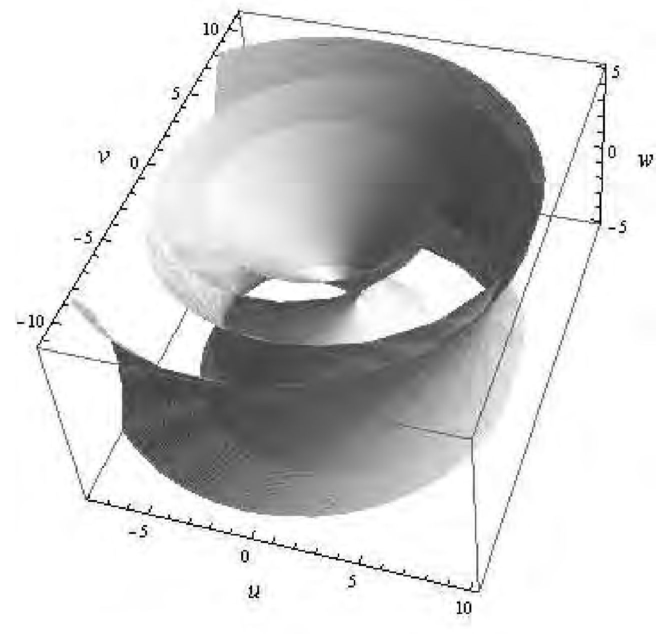

Рис. 2

Пусть $(b, a) \in D_m$, но $(b, a) \notin K$. Тогда любое решение уравнения (1) в пространстве L^0 представимо в виде

$$x(t) = \sum_{n=0}^{m-1} c_n e^{p_n t}, \quad c_n \in \mathbb{C}.$$

Пусть $(b, a) \in D_m$ и $(b, a) \in K$. Тогда любое решение уравнения (1) в пространстве L^0 представимо в виде

$$x(t) = (\alpha_1 t + \alpha_2) e^{-(1+a)t} + \sum_{\substack{\operatorname{Re} p_n > 0 \\ p_n \text{ — простые}}} \beta_n e^{p_n t}, \quad \alpha_1, \alpha_2, \beta_n \in \mathbb{C},$$

причём количество простых корней равно $m - 2$.

2. Рассмотрим случай $a, b \in \mathbb{C}$. Пользуясь приёмом из [3], сделаем в уравнении (1) замену

$$u(t) = e^{(-\alpha + i \operatorname{Im} a)t} x(t).$$

Получаем

$$\dot{u}(t) + \lambda u(t) + \mu x(t-1) = 0, \quad t \in \mathbb{R}_-, \tag{2}$$

где $\lambda = \alpha + \operatorname{Re} a$, $\mu = b e^{-\alpha + i \operatorname{Im} a}$. Так как $\lambda \in \mathbb{R}$, то в результате замены количество параметров уменьшилось. Кроме того, если $x \in L^\alpha$, то $u \in L^0$. Значит, вопрос разрешимости уравнения (1) в пространствах L^α сводится к разрешимости уравнения (2) в пространстве L^0.

В пространстве $Ouvw$ зададим поверхность

$$S = \Big\{ u = -w \cos\varphi + \varphi \sin\varphi, \ v = -w \sin\varphi - \varphi \cos\varphi, \ \varphi \in \mathbb{R} \Big\}.$$

На рис. 2 изображена поверхность S, на рис. 1 — её сечение при $w = 0$. Поверхность S разбивает пространство на семейство непересекающихся множеств, причём все множества пересекаются с плоскостью $w = 0$, а также они симметричны относительно этой плоскости. Используя критерий устойчивости из [3], сразу получаем, что если точка $(\operatorname{Re}\mu, \operatorname{Im}\mu, \lambda)$ принадлежит«конусу»(находится в центре на рис. 2), включая границы, то уравнение (2) в пространстве L^0 имеет только тривиальное решение. Пусть λ и μ принимают другие значения. Можно показать, что если точка $(\operatorname{Re}\mu, \operatorname{Im}\mu, \lambda)$ принадлежит множеству, окружающему «конус», включая внешние границы, то характеристическая функция уравнения (2) имеет ровно один корень справа от мнимой оси. Аналогично, если точка принадлежит множеству, окружающему предыдущее множество, то характеристическая функция уравнения (2) имеет только два корня справа от мнимой оси.

Отметим, что характеристическая функция уравнения (2) имеет кратные корни только при $\mu \in \mathbb{R}$. Значит, если $\operatorname{Im}\mu \neq 0$ и характеристическая функция уравнения (2) имеет ровно m корней справа от мнимой оси, то любое решение уравнения (2) в пространстве L^0 представимо в виде

$$u(t) = \sum_{n=0}^{m-1} c_n e^{p_n t}, \quad c_n \in \mathbb{C}.$$

Случай $\operatorname{Im}\mu = 0$ рассмотрен в первой части статьи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Андронов А. А., Майер А. Т.* Простейшие линейные системы с запаздыванием// Автом. телемех. — 1946. — *7*, №№ 2-3. — С. 95–106.
2. *Неймарк Ю. И.* Динамические системы и управляемые процессы. — М.: Наука, 1978.
3. *Khokhlova T., Kipnis M., Malygina V.* The stability cone for a delay differential matrix equation// Appl. Math. Lett. — 2011. — *24*, № 5. — С. 742–745.

А. С. Баландин
Пермский национальный исследовательский политехнический университет
E-mail: balandin-anton@yandex.ru

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 132 (2017). С. 17–20

УДК 517.929

О ПЕРИОДИЧЕСКИХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ СИСТЕМ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

© 2017 г. **Е. И. БРАВЫЙ**

Аннотация. Получены необходимые и достаточные условия существования единственного решения периодической краевой задачи для всех систем функционально-дифференциальных уравнений первого порядка из заданного семейства систем. Семейства систем функционально-дифференциальных уравнений задаются нормами положительных функциональных операторов уравнений системы. Проверка необходимых и достаточных условий существования единственного периодического решения для всех систем из заданного семейства заключается в проверке положительности конечного числа вещественных функций, заданных на конечномерном множестве.

Ключевые слова: функционально-дифференциальные уравнения, краевые задачи, точные условия разрешимости, периодическая краевая задача.

AMS Subject Classification: 34K06, 34K10, 34K13

1. Введение. Функционально-дифференциальные уравнения и системы таких уравнений широко используются при математическом описании самых разных явлений (например, [1, 5]). Вопрос о возможности существования нетривиальных периодических режимов — один из основных вопросов, возникающий при исследовании моделей [9]. В линейном случае он сводится к условиям существования и единственности решений периодической краевой задачи, обладающей свойством фредгольмовости при естественных предположениях. Рассмотрим два класса периодических краевых условий. Для каждого будут предложены необходимые и достаточные условия существования и единственности решений периодической краевой задачи для всех уравнений из заданного семейства. Ранее такого рода необходимые и достаточные условия разрешимости периодической задачи были известны только для отдельных случаев систем уравнений. В частности, для уравнений с циклической матрицей и периодическими условиями по каждой переменной или для систем двух скалярных уравнений [2–4, 6–8].

Рассмотрим систему $n \geqslant 2$ функционально-дифференциальных уравнений

$$\dot{x}_i(t) = \sum_{j=1}^{n} (T_{ij}x_j)(t) + f_i(t), \quad t \in [0,1], \quad i = 1, \ldots, n, \tag{1}$$

где T_{ij} — линейные ограниченные операторы, действующие из пространства непрерывных на отрезке $[0,1]$ вещественных функций $\mathbf{C}[0,1]$ в пространство суммируемых на этом отрезке вещественных функций $\mathbf{L}[0,1]$, $f_i \in \mathbf{L}[0,1]$, $i, j = 1, \ldots, n$. Предполагается, что каждый из операторов T_{ij} положителен (отображает неотрицательные функции в неотрицательные) или отрицателен (оператор $-T_{ij}$ положителен). Знак оператора T_{ij} определяется знаком обратной связи между переменными x_i и x_j в системе (1). Под решением (1) понимается набор абсолютно непрерывных на отрезке $[0,1]$ вещественных функций x_i, $i = 1, \ldots, n$, удовлетворяющих каждому уравнению системы (1) при почти всех $t \in [0,1]$.

Зададим периодические краевые условия равенствами

$$x_i(0) = x_i(1), \quad i = 1, \ldots, n, \tag{2}$$

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований, проект № 14-01-00338.

или равенствами

$$x_i(1) = x_{i+1}(0), \quad i = 1, \ldots, n-1, \quad x_n(1) = x_1(0). \tag{3}$$

Задача (1), (2) — классическая периодическая задача с единичным периодом. К задаче (1), (3) приводит рассмотрение периодической задачи для функционально-дифференциального уравнения с дополнительными ограничениями на поведение отклоняющегося аргумента.

Наша цель — получить условия существования и единственности решений периодической краевой задачи (1), (2) и задачи (1), (3) для всех систем (1) из заданного семейства. Семейства уравнений будем задавать нормами входящих в систему (1) функциональных операторов следующим образом. Норма положительного оператора $T_{ij} : \mathbf{C}[0,1] \to L[0,1]$ определена равенством

$$\|T_{ij}\|_{\mathbf{C}[0,1]\to\mathbf{L}[0,1]} = \int_0^1 (T_{ij}\mathbf{1})(s)\, ds,$$

где $\mathbf{1}$ — единичная функция. Пусть даны две $n \times n$ матрицы: S с компонентами $s_{ij} \in \{-1, 0, 1\}$ и P с неотрицательными компонентами p_{ij}, причем, если $s_{ij} = 0$, то $p_{ij} = 0$. Семейством (S, P) будем называть множество всех таких систем (1), что $s_{ij}T_{ij}$ — положительный оператор с нормой p_{ij} при каждых $i, j = 1, \ldots, n$.

2. Основные результаты.

Сформулируем основной результат работы.

Теорема 1. *Для каждого семейства систем из n функционально-дифференциальных уравнений первого порядка (S, P) проверка того, что периодическая краевая задача (1), (2) (или (1), (3)) имеет единственное решение для всех систем из данного семейства, заключается в проверке положительности конечного числа вещественных функций на n-мерном множестве, причем каждая из этих функций является многочленом не более второй степени по каждой переменной.*

Доказательство теоремы 1 проводится по следующей схеме. Показывается, что периодическая краевая задача для всех систем из данного семейства является однозначно разрешимой тогда и только тогда, когда она однозначно разрешима для всех систем из явным образом определяемого семейства систем функционально-дифференциальных уравнений первого порядка с конечномерными функциональными операторами специального вида. Оказывается, что для таких специальных систем необходимым и достаточным условием существования единственного периодического решения является отсутствие нулей конечного числа в явном виде записываемых вещественных полиномов.

Проверка в условиях теоремы 1 может быть эффективно осуществлена с помощью компьютерных систем, но в некоторых случаях удается получить аналитические условия разрешимости. Приведем примеры необходимых и достаточных условий разрешимости периодической задачи.

Пусть

$$n = 3, \quad S = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad P = \begin{bmatrix} 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & p \\ p & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{4}$$

Теорема 2. *Для того чтобы периодическая задача (1), (3) имела единственное решение при всех системах (1) из семейства (S, P), определенного равенствами (4), необходимо и достаточно, чтобы было выполнено включение $p \in (0, p^*)$, где $p^* \approx 2{,}7027$ — единственное положительное решение уравнения*

$$8z^7 + 28z^6 + 24z^5 - 152z^4 - 478z^3 - 591z^2 - 326z - 56 = 0.$$

Пусть

$$n = 3, \quad S = \begin{bmatrix} 0 & s_1 & 0 \\ 0 & 0 & s_2 \\ s_3 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad P = \begin{bmatrix} 0 & p_1 & 0 \\ 0 & 0 & p_2 \\ p_3 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{5}$$

где $s_1, s_2, s_3 \in \{-1, 1\}$.

Теорема 3 (см. [7]). *Для того чтобы периодическая задача* (1), (2) *имела единственное решение при всех системах* (1) *из семейства* (S,P), *определенного равенствами* (5), *необходимо и достаточно, чтобы*

$$p_1\, p_2\, p_3 < 64.$$

Пусть

$$n=2,\quad S=\begin{bmatrix} s_1 & s_2\\ s_3 & s_4\end{bmatrix},\qquad P=\begin{bmatrix} A & C\\ D & B\end{bmatrix},\tag{6}$$

где $s_1,s_2,s_3,s_4\in\{-1,1\}$, $s_1s_2s_3s_4=1$.

Теорема 4. *Для того чтобы периодическая задача* (1), (2) *имела единственное решение при всех системах* (1) *из семейства* (S,P), *определенного равенствами* (6), *необходимо и достаточно, чтобы были выполнены неравенства*

$$0<A<4,\qquad 0<B<4,$$
$$CD<AB\,\min\left(\frac{1}{1+A},1-\frac{A}{4}\right)\,\min\left(\frac{1}{1+B},1-\frac{B}{4}\right)$$

или неравенства

$$0\leqslant A<1,\quad 0\leqslant B<1,$$
$$\frac{AB}{(1-A)(1-B)}<CD,$$
$$(CD)^2t^2(1-t)^2+CD(At^2+B(1-t)^2-1)+AB<0\quad \textit{при всех}\quad t\in[0,1].$$

Пусть

$$n=2,\quad S=\begin{bmatrix} s_1 & s_2\\ s_3 & s_4\end{bmatrix},\qquad P=\begin{bmatrix} A & C\\ D & A\end{bmatrix},\tag{7}$$

где $s_1,s_2,s_3,s_4\in\{-1,1\}$, $s_1s_2s_3s_4=1$.

Теорема 5. *Для того чтобы периодическая задача* (1), (2) *имела единственное решение при всех системах* (1) *из семейства* (S,P), *определенного равенствами* (7), *необходимо и достаточно, чтобы были выполнены неравенства*

$$0<A<4,\quad \sqrt{CD}<A\left(\frac{1}{1+A},1-\frac{A}{4}\right)$$

или неравенства

$$0\leqslant A<1,\quad \frac{A}{1-A}<\sqrt{CD}<2(1+\sqrt{1-A}).$$

Пусть

$$n=2,\quad S=\begin{bmatrix} 0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix},\qquad P=\begin{bmatrix} 0 & C\\ D & 0\end{bmatrix}.\tag{8}$$

Теорема 6. *Для того чтобы периодическая задача* (1), (3) *имела единственное решение при всех системах* (1) *из семейства* (S,P), *определенного равенствами* (8), *необходимо и достаточно, чтобы были выполнены условия*

$$C=0,\quad D>0,$$

или

$$D=0,\quad C>0,$$

или

$$C>0,\quad D>0,\qquad \frac{D}{1-D}<C<\frac{2}{D}\left(1+\sqrt{1-D^2}\right),$$

или

$$D>0,\quad C>0,\qquad \frac{C}{1-C}<D<\frac{2}{C}\left(1+\sqrt{1-C^2}\right).$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Азбелев Н. В., Максимов В. П., Рахматуллина Л. Ф.* Элементы современной теории функционально-дифференциальных уравнений. Методы и приложения. — М.: Институт компьютерных исследований, 2002.
2. *Бравый Е. И.* Разрешимость краевых задач для линейных функционально-дифференциальных уравнений. — М.-Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2011.
3. *Бравый Е. И.* О разрешимости периодической краевой задачи для систем функционально-дифференциальных уравнений с циклической матрицей// Изв. вузов. Мат. — 2011. — № 10 — С. 17–27.
4. *Bravyi E.* On the solvability of the periodic problem for systems of linear functional differential equations with regular operator// Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ. — 2011. — № 59. — С. 1–17.
5. *Cao J. D., Lu J. Q.* Adaptive synchronization of neural networks with or without time-varying delay// Chaos. — 2006. — *16*, № 013133.
6. *Hakl R., Lomtatidze A., Puza B.* On a periodic boundary value problem for the first order scalar functional differential equation.// Differ. Equat. — 2003. — *39*, № 3. — С. 310–327.
7. *Mukhigulashvili S.* On a periodic boundary value problem for cyclic feedback type linear functional differential systems// Archiv der Mathematik. — 2006. — *87*, № 3. — С. 255–260.
8. *Mukhigulashvili S.* On a problem with nonlinear boundary conditions for systems of functional-differential equations// Differ. Equat. — 2010. — *46*, № 1. — С. 48–60.
9. *Myshkis A. D.* Periodic solutions of the simplest continuous system with delay and relaxation// Differ. Equat. — 2005. — *41*, № 2. — С. 246–253.

Е. И. Бравый
Пермский национальный исследовательский политехнический университет
E-mail: bravyi@perm.ru

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 132 (2017). С. 21–24

УДК 519.6

МЕТОДИКА ДИСКРЕТИЗАЦИИ ЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

© 2017 г. **В. В. БУЛАЕВ, А. Ф. ШОРИКОВ**

Аннотация. В статье подробно изложена методика формирования линейной дискретной динамической модели объекта управления в рекуррентной форме Коши, соответствующей исходной непрерывной динамической системе. Описываются алгоритмы дискретизации свободного и вынужденного движения линейной непрерывной динамической системы. Приводятся способы формирования переходной матрицы состояния, переходной матрицы управления и переходной матрицы возмущений.

Ключевые слова: дискретизация линейной динамической системы, модель возмущенного движения, формула Коши.

AMS Subject Classification: 34A30, 93C55

1. Введение. Довольно часто для решения поставленной задачи управления необходимо адаптировать динамическую модель управляемого объекта к требуемому классу динамических систем. В частности, для решения задачи стабилизации движения ракеты-носителя прибегают к линеаризации уравнений движения вдоль опорной траектории, получая в итоге линейные модели динамики возмущенного движения в плоскостях крена, рыскания и тангажа. Затем производят дискретизацию полученной линейной динамической модели, чтобы исследовать решение задачи стабилизации движения с позиции теории оптимального управления дискретными динамическими системами [4].

В статье предлагается методика формирования линейной дискретной динамической модели объекта управления на основе его непрерывной линейной модели. Работа базируется на основных положениях теории обыкновенных дифференциальных уравнений [2, 3, 5].

2. Математическая модель управляемого объекта. Допустим, что модель динамики управляемого объекта можно представить в виде линейной непрерывной нестационарной системы в векторно-матричной форме Коши

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(t)x(t) + B(t)u(t) + H(t)\omega(t), \\ y(t) &= C(t)x(t) + D(t)u(t) + \nu(t), \end{aligned} \tag{1}$$

где $x(t)$ — вектор состояния (фазовый вектор), $x(t) \in \mathbb{R}^n$ (здесь и далее $\mathbb{R}$ — множество всех действительных чисел); $u(t)$ — вектор управления, $u(t) \in \mathbb{R}^r$; $\omega(t)$ — вектор возмущений, $\omega(t) \in \mathbb{R}^l$; $y(t)$ — вектор измерений информационного сигнала, $y(t) \in \mathbb{R}^m$; $\nu(t)$ — вектор помех, $\nu(t) \in \mathbb{R}^m$; $A(t)$ — матрица состояния системы, $A(t) \in \mathbb{R}^{n\times n}$; $B(t)$ — матрица управления, $B(t) \in \mathbb{R}^{n\times r}$; $H(t)$ — матрица возмущений, $H(t) \in \mathbb{R}^{n\times l}$; $C(t)$ — матрица выхода системы, $C(t) \in \mathbb{R}^{m\times n}$; $D(t)$ — матрица наблюдения, $D(t) \in \mathbb{R}^{m\times r}$; t — время, $t \in [t_0, T]$.

Поставим системе (1) в соответствие дискретную динамическую систему:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= \Phi(k+1,k)x(k) + \Psi(k+1,k)u(k) + \Gamma(k+1,k)\omega(k), \\ y(k) &= C(k)x(k) + D(k)u(k) + \nu(k), \end{aligned} \tag{2}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 15-01-02368).

где $\Phi(k+1,k)$ — переходная матрица состояния, $\Phi(\cdot) \in \mathbb{R}^{n\times n}$; $\Psi(k+1,k)$ — переходная матрица управления, $\Psi(\cdot) \in \mathbb{R}^{n\times r}$; $\Gamma(k+1,k)$ — переходная матрица возмущений, $\Gamma(\cdot) \in \mathbb{R}^{n\times l}$; k — шаг дискретной системы, соответствующий дискретному моменту времени $t_k = kT_0 + t_0$, $k \in \overline{0, N-1} = \{0, 1, \ldots, N\}$, $N \in \mathbb{N}$ ($\mathbb{N}$ — множество всех натуральных чисел); T_0 — период дискретизации системы (2), $T_0 > 0$.

Как видно из двух последних выражений, чтобы перейти от непрерывной системы (1) к дискретной (2), необходимо произвести дискретизацию только уравнения состояния — первого уравнения (1), уравнение измерений остается неизменным. Осуществим переход от динамической системы (1) к системе (2) в два этапа. На первом этапе произведем дискретизацию свободного движения системы, а на втором этапе — вынужденного движения.

3. Дискретизация свободного движения. Рассмотрим свободное движение непрерывной системы (1):

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t). \tag{3}$$

Согласно формуле Коши [2], решение уравнения (3) можно записать в виде

$$x(t) = \Phi(t, t_0)x(t_0) \quad \forall t \in [t, T], \tag{4}$$

где $x(t_0)$ — начальное состояние системы.

Очевидно, что, определив решение (4), мы можем располагать значениями вектора состояния для любого момента времени $t \in [t, T]$. Так, выражение для вектора состояния в дискретный момент времени $t = t_{k+1}$ можно представить в виде

$$x(t_{k+1}) = x(k+1) = \Phi(t_{k+1}, t_0)x(t_0) = \Phi(t_{k+1}, t_k)x(t_k) = \Phi(k+1, k)x(k).$$

Таким образом, остается только определить значения матрицы $\Phi(t_{k+1}, t_k)$ для каждого шага $k \in \overline{0, N-1}$. Известно [2, 3], что для переходной матрицы состояния вида $\Phi(t, \tau)$ при фиксированном значении τ справедливо выражение

$$\frac{\partial \Phi(t,\tau)}{\partial t} = A(t)\Phi(t,\tau) \quad \forall t, \tau \in [t_0, T].$$

Отсюда следует, что искомую матрицу $\Phi(t_{k+1}, t_k)$ можно получить, решая матричное дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial \Phi(t,t_k)}{\partial t} = A(t)\Phi(t,t_k) \tag{5}$$

на промежутке времени $t \in [t_k, t_{k+1}]$ с начальными условиями $\Phi(t_k, t_k) = I$, где I — единичная матрица соответствующей размерности.

Однако прямое решение матричного дифференциального уравнения (5) весьма затруднительно. Например, функции численного интегрирования в программном пакете MATLAB (такие, как ode23, ode45 и др.) позволяют произвести решение только для систем дифференциальных уравнений первого порядка, представленных в явной векторно-матричной форме Коши: $\dot{x}(t) = f(t, x(t))$. Поэтому удобно привести матричное дифференциальное уравнение (5) к явной векторно-матричной форме Коши.

Введем в рассмотрение вектор $\varphi(t) \in \mathbb{R}^{n^2}$, составленный из столбцов матрицы $\Phi(t, t_k)$, записанных один под другим. Тогда матричному дифференциальному уравнению (5) будет эквивалентно векторно-матричное уравнение

$$\dot{\varphi}(t) = \Theta(t)\varphi(t), \tag{6}$$

где $\Theta(t)$ — матрица, составленная путем повторения n раз вдоль главной диагонали матрицы $A(t)$, $\Theta(t) \in \mathbb{R}^{n^2\times n^2}$.

Таким образом, интегрируя выражение (6) на промежутке времени $t \in [t_k, t_{k+1}]$ для каждого шага $k \in \overline{0, N-1}$ с начальными условиями, формируемыми из условия, что $\Phi(t_k, t_k) = I$, из векторов $\varphi(t_{k+1})$ можно восстановить искомые матрицы $\Phi(t_{k+1}, t_k) = \Phi(k+1, k)$.

4. Дискретизация вынужденного движения. Согласно формуле Коши [2,3], вынужденное движение представляет собой частное решение $x^*(t)$ системы (1).

Рассмотрим частное решение $x^*(t)$ на интервале времени $t \in [t_k, t_{k+1}]$ для некоторого шага $k \in \overline{0, N-1}$. Тогда, предполагая, что управление и возмущения являются кусочно-постоянными функциями $u(t) = u(t_k) = \text{const}$ и $\omega(t) = \omega(t_k) = \text{const}$, выражение для $x^*(t_{k+1})$ можно представить в виде [2–4]

$$\begin{aligned} x^*(t_{k+1}) = x^*(k+1) = \left[\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} \Phi(t_{k+1}, \tau) B(\tau)\, d\tau\right] u(t_k) + \left[\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} \Phi(t_{k+1}, \tau) H(\tau)\, d\tau\right] \omega(t_k) = \\ = \Psi(k+1, k) u(k) + \Gamma(k+1, k) \omega(k). \end{aligned} \tag{7}$$

Далее рассмотрим только процесс формирования переходной матрицы управления $\Psi(k+1, k)$, поскольку для переходной матрицы возмущений $\Gamma(k+1, k)$ все действия полностью повторяются.

Отметим, что, согласно выражению (7), для вычисления матрицы $\Psi(k+1, k)$ необходимо располагать переходной матрицей состояния в виде, в котором ее первый аргумент является постоянным, а второй — переменным. Для этого рассмотрим следующее векторно-матричное дифференциальное уравнение с фиксированным t [2,3]:

$$\frac{\partial \Phi(t, \tau)}{\partial \tau} = -\Phi(t, \tau) A(\tau).$$

Матрицу $\Phi(t_{k+1}, \tau)$ для выражения (7) можно получить, решив матричное дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial \Phi(t_{k+1}, \tau)}{\partial \tau} = -\Phi(t_{k+1}, \tau) A(\tau) \tag{8}$$

в обратном времени на промежутке $\tau \in [t_{k+1}, t_k]$ с начальными условиями $\Phi(t_{k+1}, t_{k+1}) = I$.

Следуя тем же рассуждениям, что и в предыдущем пункте, преобразуем уравнение (8) в векторно-матричное дифференциальное уравнение в явной форме Коши.

Введем в рассмотрение вектор $\varphi'(\tau) \in \mathbb{R}^{n^2}$, составленный из строк матрицы $\Phi(t_{k+1}, \tau)$, записанных одна под другой. Тогда уравнению (8) будет эквивалентно следующее векторно-матричное уравнение:

$$\dot{\varphi}'(\tau) = -\Theta^{\mathrm{T}}(\tau) \varphi'(\tau). \tag{9}$$

Согласно (7), выражение для переходной матрицы управления $\Psi(t_{k+1}, \tau)$ определим как

$$\Psi(t_{k+1}, \tau) = -\int\limits_{t_{k+1}}^{\tau} \Phi(t_{k+1}, \tau) B(\tau)\, d\tau. \tag{10}$$

Аналогичным образом введем в рассмотрение вектор $\psi(\tau) \in \mathbb{R}^{nr}$, составленный из строк матрицы $\Psi(t_{k+1}, \tau)$, записанных одна под другой. Тогда выражению для переходной матрицы управления (10) можно сопоставить следующее векторно-матричное уравнение вида

$$\dot{\psi}(\tau) = -\Omega^{\mathrm{T}}(\tau) \varphi'(\tau), \tag{11}$$

где $\Omega(\tau)$ — матрица, составленная путем повторения n раз вдоль главной диагонали матрицы управления $B(\tau)$, $\Omega(\tau) \in \mathbb{R}^{n^2 \times nr}$.

Таким образом, интегрируя совместно уравнения (9) и (11) в обратном времени на промежутке $\tau \in [t_{k+1}, t_k]$ для каждого шага $k \in \overline{0, N-1}$ с начальными условиями для $\varphi'(t_{k+1})$, формируемыми из условия, что $\Phi(t_{k+1}, t_{k+1}) = I$, и нулевыми начальными условиями для $\psi(t_{k+1})$, из векторов $\psi(t_k)$ можно восстановить искомые матрицы $\Psi(k+1, k)$.

5. Заключение. Определив матрицы $\Phi(k+1, k)$, $\Psi(k+1, k)$, $\Gamma(k+1, k)$ для каждого шага $k \in \overline{0, N-1}$, мы осуществили переход от исходной непрерывной динамической системы (1) к соответствующей ей дискретной (2). С доказательством предельной сходимости дискретной системы (2) к непрерывной системе (1) можно ознакомиться, например, в [3]. Отметим, что в ходе решения уравнения (6) в прямом времени и уравнений (9) и (11) в обратном времени можно сформировать матрицы $\Phi(t, t_k)$ с переменным первым аргументом и $\Phi(t_{k+1}, \tau)$ с переменным вторым аргументом. Это дает некоторое преимущество перед другими методами, например, методом послойной дискретизации [1], позволяя производить дискретизацию систем с переменным периодом дискретизации, а также выполнять вычислительные операции по ходу реализации решения задачи управления. Предложенная методика дискретизации для непрерывных линейных динамических систем (1) является удобным инструментом для разработки алгоритмов управления в цифровых системах. С ее помощью можно достаточно эффективно сформировать модель дискретной динамической системы в форме (2), что позволяет значительно ускорить процессы разработки, моделирования и синтеза цифровых систем управления сложными механическими объектами.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Булаев В. В., Горанов А. Ю.* Формулировка задачи оптимального управления и моделирование динамики упругого механического объекта в фазовом пространстве// Вестник ЮУрГУ. — 2015. — *15*, № 4. — С. 90–100.
2. *Красовский Н. Н.* Теория управления движением. — М.: Наука, 1968.
3. *Медич Дж.* Статистически оптимальные оценки и управление. — М.: Энергия, 1973.
4. *Шориков А. Ф.* Минимаксное оценивание и управление в дискретных динамических системах. — Екатеринбург: Изд-во Урал. ун-та, 1997.
5. *Khalil. H. K.* Nonlinear systems (2nd ed.). — New Jersey: Prentice Hall, 1996.

В. В. Булаев
АО «Научно-производственное объединение автоматики имени академика Н. А. Семихатова», Уральский федеральный университет,
Екатеринбург, Россия
E-mail: bulaev1991@mail.ru

А. Ф. Шориков
Уральский федеральный университет,
Институт математики и механики УрО РАН,
Екатеринбург, Россия
E-mail: afshorikov@mail.ru

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 132 (2017). С. 25–29

УДК 517.929

СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ЛИНЕЙНЫХ МОДЕЛЕЙ ВЯЗКОУПРУГОСТИ

© 2017 г. **В. В. ВЛАСОВ, Н. А. РАУТИАН**

Аннотация. Работа посвящена исследованию вольтерровых интегродифференциальных уравнений с неограниченными операторными коэффициентами в гильбертовом пространстве. Рассматриваемые уравнения представляют собой абстрактное гиперболическое уравнение, возмущенное слагаемыми, содержащими вольтерровы интегральные операторы. Эти уравнения могут быть реализованы как интегродифференциальные уравнения в частных производных, возникающие в теории вязкоупругости, а также как интегродифференциальные уравнения Гуртина—Пипкина, которые описывают процесс распространения тепла в средах с памятью с конечной скоростью. Кроме того, указанные уравнения возникают в задачах усреднения в многофазных средах (закон Дарси).

***Ключевые слова*:** интегродифференциальные уравнения, спектральный анализ, оператор-функция.

***AMS Subject Classification*:** 34D05, 34C23

1. Постановка задачи. Основные определения. Пусть H — сепарабельное гильбертово пространство, A — самосопряженный положительный оператор, $A^* = A \geqslant \kappa_0 I$ ($\kappa_0 > 0$), действующий в пространстве H, имеющий компактный обратный, I — тождественный оператор в пространстве H. Пусть B — симметрический оператор $(Bx, y) = (x, By)$, действующий в пространстве H с областью определения $\mathrm{Dom}\,(A)$ ($\mathrm{Dom}\,(A) \subseteq \mathrm{Dom}\,(B)$), неотрицательный, $(Bx, x) \geqslant 0$ для любых $x, y \in \mathrm{Dom}\,(A)$ и удовлетворяющий неравенству $\|Bx\| \leqslant \kappa \|Ax\|$, $0 < \kappa < 1$, для любого $x \in \mathrm{Dom}\,(A)$. Рассмотрим следующую задачу для интегродифференцильного уравнения второго порядка на положительной полуоси $\mathbb{R}_+ = (0, \infty)$:

$$\frac{d^2u(t)}{dt^2} + Au(t) + Bu(t) - \int_0^t K(t-s)Au(s)ds - \int_0^t Q(t-s)Bu(s)ds = f(t), \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{1}$$

$$u(+0) = \varphi_0, \quad u^{(1)}(+0) = \varphi_1. \tag{2}$$

Предположим, что ядра интегральных операторов $K(t)$ и $Q(t)$ имеют следующее представление:

$$K(t) = \int_0^\infty e^{-t\tau} d\mu(\tau), \qquad Q(t) = \int_0^\infty e^{-t\tau} d\eta(\tau), \tag{3}$$

где $d\mu$ и $d\eta$ — положительные меры, которым соответствуют возрастающие непрерывные справа функции распределения μ и η соответственно. Интеграл понимается в смысле Стильтьеса. Кроме того, будем считать, что выполнены условия

$$\int_0^\infty \frac{d\mu(\tau)}{\tau} < 1, \qquad \int_0^\infty \frac{d\eta(\tau)}{\tau} < 1, \tag{4}$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 14-01-00349а).

$$K(0)=\int\limits_0^\infty d\mu(\tau)\equiv \operatorname{Var}\mu|_0^\infty<+\infty,\qquad Q(0)=\int\limits_0^\infty d\eta(\tau)\equiv \operatorname{Var}\eta|_0^\infty<+\infty, \tag{5}$$

причем носители μ и η принадлежат полуоси $(d_0,+\infty)$, $d_0>0$.

Интегродифференциальное уравнение (1) представляет собой абстрактную форму динамического уравнения вязкоупругости, где операторы A и B порождаются следующими дифференциальными выражениями:

$$A=-\rho^{-1}\mu\left(\Delta u+\frac{1}{3}\mathrm{grad}(\mathrm{div}u)\right),\qquad B=-\frac{1}{3}\rho^{-1}\lambda\cdot\mathrm{grad}(\mathrm{div}u),$$

где $u=\vec{u}(x,t)\in\mathbb{R}^3$ — вектор перемещений вязкоупругой наследственной изотропной среды, среда заполняет ограниченную область $\Omega\subset\mathbb{R}^3$ с достаточно гладкой границей $\partial\Omega$, ρ — постоянная плотность, $\rho>0$, коэффициенты Ламе λ, μ — положительные постоянные, $K(t)$, $Q(t)$ — функции релаксации, характеризующие наследственные свойства среды. На границе области $\partial\Omega$ выполняется краевое условие Дирихле

$$u|_{\partial\Omega}=0. \tag{6}$$

В качестве пространства H рассматривается пространство трехмерных вектор-функций $L_2(\Omega)$. Область определения $\mathrm{Dom}(A)$ принадлежит векторному пространству Соболева $W_2^2(\Omega)$ и естественно выделяется краевым условием (6). Условие (4) имеет конкретный физический смысл (см. [6]).

В случае, когда оператор $B=0$, а самосопряженный положительный оператор A реализован, как $Ay=-\Delta y$ с условиями Дирихле в ограниченной области с достаточно гладкой границей, уравнение (1) представляет собой абстрактную форму уравнения Гуртина—Пипкина, описывающего процесс распространения тепла в средах с памятью с конечной скоростью.

Рассматривая преобразование Лапласа уравнения (1) при однородных начальных условиях, получаем оператор-функцию

$$L(\lambda)=\lambda^2I+A+B-\hat{K}(\lambda)A-\hat{Q}(\lambda)B, \tag{7}$$

которая является символом этого уравнения. Здесь $\hat{K}(\lambda)$ и $\hat{Q}(\lambda)$ — преобразования Лапласа ядер $K(t)$ и $Q(t)$ соответственно, имеющие представления

$$\hat{K}(\lambda)=\int\limits_0^\infty\frac{d\mu(\tau)}{\lambda+\tau},\qquad \hat{Q}(\lambda)=\int\limits_0^\infty\frac{d\eta(\tau)}{\lambda+\tau}. \tag{8}$$

В предлагаемой работе мы исследуем вопрос о локализации спектра для оператор-функции $L(\lambda)$, являющейся символом указанного уравнения, и устанавливаем корректную разрешимость начальной задачи для уравнения (1) в весовых пространствах Соболева на положительной полуоси.

В наших предшествующих работах [2–5] проводилось подробное исследование задачи (1), (2) в случае, когда оператор $B=0$. Наш подход к исследованию основывался на спектральном анализе оператор-функции (7), который также дает возможность получить результат о корректной разрешимости и представление решения указанной задачи в виде ряда по экспонентам, соответствующим точкам спектра оператор-функции $L(\lambda)$. Отметим также, что результаты работ [2–5] подытожены в монографии [4, глава 3].

2. Корректная разрешимость. Обозначим оператор $A_0:=A+B$. Согласно известному результату (теорема [7, с. 361]), оператор A_0 является самосопряженным и положительным. Превратим область определения $\mathrm{Dom}(A_0^\beta)$ оператора A_0^β, $\beta>0$, в гильбертово пространство H_β, введя на $\mathrm{Dom}(A_0^\beta)$ норму $\|\cdot\|_\beta=\|A_0^\beta\cdot\|$, эквивалентную норме графика оператора A_0^β.

Замечание 1. Из свойств операторов A и B следует, что оператор A_0 является обратимым, операторы AA_0^{-1}, BA_0^{-1} — ограниченые, а оператор A_0^{-1} — компактный.

Через $W^n_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, A_0)$ обозначим пространство Соболева вектор-функций на полуоси $\mathbb{R}_+ = (0, \infty)$ со значениями в H, снабженное нормой

$$\|u\|_{W^n_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+,A_0)} \equiv \left(\int_0^\infty e^{-2\gamma t} \left(\|u^{(n)}(t)\|_H^2 + \|A_0 u(t)\|_H^2 \right) dt \right)^{1/2}, \quad \gamma \geqslant 0.$$

Подробнее о пространствах $W^n_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, A_0)$ см. [8, глава 1]. При $n = 0$ полагаем $W^0_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, A_0) \equiv L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, H)$ при $\gamma = 0$, будем писать $W^n_{2,0} = W^n_2$.

Определение 1. Будем называть вектор-функцию u сильным решением задачи (1), (2), если она принадлежит пространству $W^2_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, A_0)$ для некоторого $\gamma \geqslant 0$, удовлетворяет уравнению (1) почти всюду на полуоси $\mathbb{R}_+$ и начальным условиям (2).

Следующая теорема дает достаточное условие корректной разрешимости задачи (1), (2).

Теорема 1. *Пусть выполнено условие* (5), $f'(t) \in L_{2,\gamma_0}(\mathbb{R}_+, H)$ *для некоторого* $\gamma_0 \geqslant 0$ *и* $f(0) = 0$, *кроме того,* $\varphi_0 \in H_1$, $\varphi_1 \in H_{1/2}$. *Тогда существует такое* $\gamma_1 \geqslant \gamma_0$, *что для любого* $\gamma > \gamma_1$ *задача* (1), (2) *имеет единственное решение в пространстве* $W^2_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, A_0)$, *удовлетворяющее неравенству*

$$\|u\|_{W^2_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+,A_0)} \leqslant d \left(\|f'(t)\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+,H)} + \|A_0 \varphi_0\|_H + \|A_0^{1/2} \varphi_1\|_H \right), \tag{9}$$

где константа d *не зависит от вектор-функции* f *и векторов* φ_0, φ_1.

Следует отметить, что метод, используемый нами для доказательства корректной разрешимости начальных задач для абстрактных интегродифференциальных уравнений, существенно отличается от более традиционного подхода, использованного Л. Пандолфи в [15], где разрешимость изучается в функциональном пространстве на конечном временном интервале $(0, T)$. В нашей работе разрешимость изучается в весовых пространствах Соболева $W^2_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, A_0)$ вектор-функций на положительной полуоси $\mathbb{R}_+$, где A_0 — положительный самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве. Доказательство теоремы 1 о разрешимости существенно использует гильбертову структуру пространств $W^2_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, A_0)$, $L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, H)$, а также теорему Пэли—Винера в то время, как в [15] рассмотрения проводятся в банаховом функциональном пространстве гладких функций на конечном временном интервале $(0, T)$.

3. Спектральный анализ.

Лемма 1. *Пусть выполнены условия* (4), (5). *Тогда оператор-функция* $L(\lambda)$ *обратима в замкнутой правой полуплоскости и справедлива оценка*

$$\left\| A^{1/2} L^{-1}(\lambda) A^{1/2} \right\| \leqslant \mathrm{const}, \quad \operatorname{Re}\lambda \geqslant 0.$$

Теорема 2. *Пусть выполнены условия* (4), (5) *и носители мер* $d\mu(\tau)$, $d\eta(\tau)$ *принадлежат полуоси* $[d_0, +\infty)$, $d_0 > 0$. *Тогда спектр оператор-функции* $L(\lambda)$ *принадлежит множеству* $\Omega := \{\lambda \in \mathbb{C} : -\mu \leqslant \operatorname{Re}\lambda < 0\} \cup \{\lambda \in \mathbb{C} : -\infty < \operatorname{Re}\lambda \leqslant d_0, \operatorname{Im}\lambda = 0\}$, *где*

$$\mu = \frac{1}{2} \sup_{\|f\|=1} \frac{((K(0)A + Q(0)B) f, f)}{((A + B) f, f)}, \quad f \in D(A).$$

Замечание 2. Величина μ, фигурирующая в формулировке теоремы 2, допускает оценку

$$\mu \leqslant \frac{1}{2} \left\| A_0^{-1/2} \left(K(0)A + Q(0)B \right) A_0^{-1/2} \right\|.$$

Замечание 3. Согласно [11, лемма 2.1], оператор $A^{-1/2} B A^{-1/2}$ допускает ограниченное замыкание в пространстве H. Отсюда следует, что оператор

$$A^{-1/2} A_0 A^{-1/2} = I + A^{-1/2} B A^{-1/2}$$

допускает ограниченное замыкание в H. В свою очередь, в силу упомянутой леммы [11, лемма 2.1] и в силу самосопряженности оператора $A_0 = A+B$, операторы $A_0^{-1/2}AA_0^{-1/2}$, $A_0^{-1/2}BA_0^{-1/2}$ также допускают ограниченные замыкания в пространстве H.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия теоремы* 2, *тогда невещественный спектр оператор-функции* $L(\lambda)$ *симметричен относительно вещественной оси и состоит из собственных значений конечной алгебраической кратности, причем для любого* $\varepsilon > 0$ *в области*

$$\Omega_\varepsilon := \{\lambda \in \mathbb{C} : -\mu \leqslant \operatorname{Re}\lambda < 0\} \setminus \{\lambda \in \mathbb{C} : -\mu \leqslant \operatorname{Re}\lambda \leqslant 0,\ |\operatorname{Im}\lambda| < \varepsilon\}$$

собственные значения являются изолированными, т.е. не имеют точек накопления.

В заключение отметим, что в нашей предшествующей работе [1] исследовалась корректная разрешимость задачи (1), (2), а также проводился спектральный анализ соответствующей оператор-функции в случае, когда ядра $K(t)$ и $Q(t)$ представимы в виде

$$\begin{aligned} K(t) &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{-\gamma_k t}, \\ Q(t) &= \sum_{k=1}^{\infty} b_k e^{-\gamma_k t}, \end{aligned} \tag{10}$$

где коэффициенты $a_k > 0$, $b_k \geqslant 0$, $\gamma_{k+1} > \gamma_k > 0$, $k \in \mathbb{N}$, $\gamma_k \to +\infty$ $(k \to +\infty)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Власов В. В., Раутиан Н. А.* Корректная разрешимость и спектральный анализ интегро-дифференциальных уравнений, возникающих в теории вязкоупругости// Современная математика. Фундаментальные направления. — 2015. — *58.* — С. 22–42.
2. *Власов В. В., Раутиан Н. А.* Корректная разрешимость и спектральный анализ абстрактных гиперболических интегродифференциальных уравнений// Труды семинара им. И. Г. Петровского.— 2011. — *28.* — С. 75–114.
3. *Власов В. В., Гавриков А. А., Иванов С. А., Князьков Д. Ю., Самарин В. А., Шамаев А. С.* Спектральные свойства комбинированных сред// Современные проблемы математики и механики. — 2009. — *5*, № 1. — С. 134–155.
4. *Власов В. В., Медведев Д. А., Раутиан Н. А.* Функционально-дифференциальные уравнения в пространствах Соболева и их спектральный анализ// Современные проблемы математики и механики. Том VIII. Под редакцией В. А. Садовничего. — М.: Изд-во МГУ им. М. В. Ломоносова, 2011. — 308 с.
5. *Власов В. В., Раутиан Н. А., Шамаев А. С.* Спектральный анализ и корректная разрешимость абстрактных интегродифференциальных уравнений, возникающих в теплофизике и акустике// Современная математика. Фундаментальные направления. — 2011. — *39.* — С. 36–65.
6. *Ильюшин А. А., Победря Б. Е.* Основы математической теории термовязкоупругости. — М.: Наука, 1970. — 280 с.
7. *Като Т.* Теория возмущения линейных операторов. — М.: Мир, 1972.
8. *Лионс Ж. П., Мадженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. — М., 1971.
9. *Лыков А. В.* Проблема тепло- и массообмена. — Минск: Наука и техника, 1976.
10. *Милославский А. И.* Спектральные свойства операторного пучка, возникающего в вязкоупругости// Деп. в Укр. НИИНТИ. 13.07.87. № 1229-УК87. — Харьков, 1987. — С. 53.
11. *Шкаликов А. А.* Сильно демпфированные пучки операторов и разрешимость соответствующих операторно-дифференциальных уравнений// Мат. сб. — 1988. — *135(177)*, № 1. — С. 96–118.
12. *Gurtin M. E., Pipkin A. C.* Theory of heat conduction with finite wave speed// Arch. Rat. Mech. Anal. — 1968. — *31.* — С. 113–126.
13. *Ivanov S., Pandolfi L.* Heat equations with memory: lack of controllability to the rest// J. Math. Anal. Appl. — 2009. — *355.* — С. 1–11.
14. *Kopachevsky N. D., Krein S. G.* Operator approach to linear problems of hydrodynamics, Vol. 2. Nonself adjoint Problems for Viscous Fluids. — Berlin: Basel-Boston, 2003.

15. *Pandolfi L.* The controllability of the Gurtin—Pipkin equations: a cosine operator approach// Appl. Math. Optim. — 2005. *52.* — С. 143–165.

В. В. Власов
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
E-mail: vikmont@yandex.ru

Н. А. Раутиан
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
E-mail: nrautian@mail.ru

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 132 (2017). С. 30–33

УДК 517.977

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С ИМПУЛЬСНЫМ ВОЗДЕЙСТВИЕМ В МАТРИЦЕ СИСТЕМЫ

© 2017 г. **Н. И. ЖЕЛОНКИНА, А. Н. СЕСЕКИН**

Аннотация. В работе рассматриваются свойства устойчивости и асимптотической устойчивости решений линейной системы дифференциальных уравнений с обобщенным воздействием в матрице системы. Получены достаточные условия, обеспечивающие устойчивость и асимптотическую устойчивость решений системы уравнений. Отличительной особенностью исследуемой системы дифференциальных уравнений является то, что правая часть системы содержит некорректную операцию умножения разрывных функций на обобщенные.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения, импульсное воздействие, устойчивость, асимптотическая устойчивость.

AMS Subject Classification: 34K45

1. Введение. Работа посвящена исследованию устойчивости и асимптотической устойчивости для линейных систем с импульсным воздействием в матрице системы. Системы с такого рода с импульсным воздействием встречаются в электрофизике, технике, медицине, биологии (см. [2,6,10]) и экономике (см. [1,5]). Свойства асимптотической устойчивости для таких систем рассматривались в [3,4,9]. Заметим, что в этих работах импульсное воздействие играло роль возмущения, а свойство асимптотической устойчивости обеспечивалось за счет асимптотической устойчивости линейной однородной системы без импульсов. В данной работе предполагается, что однородная система без импульсов неустойчива, а свойство устойчивости и асимптотической устойчивости достигается за счет импульсного воздействия. Родственные случаи рассматривались в [7], но, в отличие от этой работы, здесь используется другая формализация понятия решения, что, в свою очередь, приводит к другим достаточным условиям устойчивости. В отличие от [3,4,9], в данной работе обобщенное воздействие не содержит регулярной составляющей и является обобщенной производной ступенчатой функции. Особенностью рассматриваемой системы также является то, что в правой части системы имеются некорректные операции умножения разрывной функции на δ-функцию.

2. Постановка задачи. Рассмотрим линейную систему дифференциальных уравнений:

$$\dot{x} = \left(A(t) + \sum_{j=1}^{m} D_j(t)\dot{v}_j(t) \right) x(t), \quad t \geqslant t_0, \quad x(t_0) = x_0. \tag{1}$$

Здесь $A(t)$, $D_j(t)$, $j \in \overline{1,m}$, — непрерывные ограниченные матрицы функции размерности $n \times n$, $D_j(t)$ взаимно коммутативны, v_i — компоненты вектор-функции $v(t) = (v_1(t), v_2(t), \dots, v_m(t))^T$ — кусочно-постоянные функции, последовательность точек разрыва $t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n < \dots$ удовлетворяет условию $\lim\limits_{n\to\infty} t_i = \infty$. Функции $v_i(t)$ и $x(t)$ в точках разрыва будем считать непрерывными слева.

Устойчивость системы (1) в случае, когда $v_i(t)$ $(i \in \overline{1,m})$ — произвольные функции ограниченной вариации, рассматривались в [3,4,9]. При сделанных предположениях на функции $v_i(t)$

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект №16-11-10146).

ISSN 0233–6723

систему (1) можно записать в виде

$$\dot{x} = \left(A(t) + \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{\infty} D_j(t) \Delta \upsilon_j(t_i) \delta(t - t_i) \right) x(t),$$

где $\Delta\upsilon_j(t_i) = \upsilon_j(t_i+0) - \upsilon_j(t_i)$ — скачки кусочно-постоянных функций $\upsilon_i(t)$, $\delta(t-t_i)$ — δ-функция Дирака, сосредоточенная в момент t_i.

Как и в [2,3,6,8,10], под аппроксимируемыми решениями системы (1) будем понимать функции ограниченной вариации $x(t)$, являющиеся поточечными пределами последовательностей абсолютно непрерывных функций $x_k(t)$ этих систем, порожденных последовательностями абсолютно непрерывных функций $\upsilon_k(t)$, поточечно сходящихся к вектор-функции ограниченной вариации $\upsilon(t)$, если этот предел не зависит от выбора последовательности. Согласно [8, 10], в силу взаимной коммутативности матриц $D_j(t)$, аппроксимируемое решение уравнения (1) существует и будет удовлетворять интегральному уравнению

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} A(\xi) x(\xi)\, d\xi + \sum_{t_i < t} \tilde{S}(t_i, x(t_i), \Delta\upsilon(t_i)). \tag{2}$$

Скачки траектории $\tilde{S}(t, x, \Delta\upsilon)$ в точках разрыва $t = t_i$ будут определяться с помощью решений вспомогательного дифференциального уравнения

$$\dot{z}(\xi) = \sum_{j=1}^{m} D_j(t) z(\xi)\, \Delta\upsilon_j(t), \quad z(0) = x, \quad \tilde{S}(t, x, \Delta\upsilon) = z(1) - z(0). \tag{3}$$

3. Достаточные условия устойчивости.

Теорема 1. *Пусть справедливо неравенство*

$$\|\tilde{D}_k(s)\| \leqslant G_k e^{\lambda_k s}, \tag{4}$$

где $\tilde{D}_i(s)$ — нормированная фундаментальная матрица для системы (3), *все $\lambda_i < 0$, а также имеет место неравенство*

$$\|Y(t,s)\| \leqslant c e^{\alpha(t-s)}, \tag{5}$$

где $Y(t,s)$ — фундаментальная матрица системы

$$\dot{x} = A(t) x(t). \tag{6}$$

Тогда если выполняется условие

$$\lim_{k\to\infty} \left(k \ln c + \sum_{i=1}^{k-1} (\ln G_i + \lambda_i) + \alpha(t_k - t_0) \right) = \beta < \infty, \tag{7}$$

то система (1) *устойчива, а если выполняется условие*

$$\lim_{k\to\infty} \left(k \ln c + \sum_{i=1}^{k-1} (\ln G_i + \lambda_i) + \alpha(t_k - t_0) \right) = -\infty, \tag{8}$$

то система (1) *асимптотически устойчива.*

Доказательство. Согласно (3),

$$x(t_k + 0) = \tilde{D}_k(1) \cdot x(t_k). \tag{9}$$

Рассмотрим траекторию на отрезке $[t_0, t_1]$. На этом промежутке траектория описывается уравнением (6). Поэтому решение представимо в виде

$$x(t) = Y(t_0, t) x_0.$$

С учетом (5) на $[t_0, t_1]$ справедлива оценка

$$\|x(t)\| \leqslant c e^{\alpha(t_1 - t_0)} \|x_0\|.$$

После действия импульса в момент $t = t_1$ (функцию $x(t)$ считаем непрерывной слева)

$$x(t_1 + 0) = \tilde{D}_1(1)x(t_1) = \tilde{D}_1 Y(t_1, t_0)x_0.$$

Вычисляя модули левой и правой частей последнего неравенства с учетом (4) и (5), получим, что

$$\|x(t_1 + 0)\| \leqslant G_1 e^{\lambda_1} \cdot \|x(t_1)\| \leqslant G_1 e^{\lambda_1} c e^{\alpha(t_1 - t_0)}\|x_0\|. \tag{10}$$

Подобно промежутку $[t_0, t_1]$ рассмотрим полуинтервал $(t_1, t_2]$. На траекторию получим оценку

$$\|x(t)\| \leqslant c e^{\alpha(t_2 - t_1)}\|x(t_1 + 0)\| \leqslant c^2 e^{\alpha(t_2 - t_0)} G_1 e^{\lambda_1}\|x_0\|.$$

Аналогично (10) можно получить оценку

$$\|x(t_2 + 0)\| \leqslant G_2 e^{\lambda_2} \cdot \|x(t_2)\| \leqslant G_2 e^{\lambda_2} c e^{\alpha(t_2 - t_1)}\|x(t_1 + 0)\| \leqslant G_2 G_1 e^{\lambda_2 + \lambda_1} c^2 e^{\alpha(t_2 - t_0)}.$$

Нетрудно показать, что на промежутке $(t_{k-1}, t_k]$ будет справедливо неравенство

$$\|x(t)\| \leqslant c^k e^{\alpha(t_k - t_0)} \prod_{i=1}^{k-1} G_i e^{\sum_{i=1}^{k-1} \lambda_i}\|x_0\|.$$

Полученное неравенство можно переписать в виде

$$\|x(t)\| \leqslant \exp\left[k \ln c + \sum_{i=1}^{k-1}(\ln G_i + \lambda_i) + \alpha(t_k - t_0)\right]\|x_0\|. \tag{11}$$

Из последнего неравенства видно, что траектория системы ограничена на последовательности полуинтервалов $(t_{k-1}, t_k]$ последовательностью чисел

$$\exp\left[k \ln c + \sum_{i=1}^{k-1}(\ln G_i + \lambda_i) + \alpha(t_k - t_0)\right]\|x_0\|.$$

Если эта последовательность имеет конечный предел (условие (7)), то очевидно, что траектория будет ограничена и величина отклонения будет линейно зависеть от $\|x(t_0)\|$. Следовательно, нулевое решение будет устойчиво. Если же выполняется условие (8), то $\lim\limits_{t\to\infty} x(t) = 0$ и будет иметь место асимптотическая устойчивость. □

1. Заключение

В работе получены достаточные условия, обеспечивающие устойчивость и асимптотическую устойчивость нулевого решения системы (1). Линейная система без импульсных воздействий является неустойчивой. Свойство устойчивости обеспечивается импульсными воздействиями. Заметим, что условия (7) и (8) можно использовать для конструирования стабилизирующих импульсных управлений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Андрианов Д. Л., Арбузов В. О., Ивлиев С. В., Максимов В. П., Симонов П. М.* Динамические модели экономики: теория, приложения, программная реализация// Вестн. Перм. ун-та. Сер. Экономика. — 2015. — *27*, № 4. — С. 8–32.
2. *Дыхта В. А., Самсонюк О. Н.* Оптимальное импульсное управление с приложениями.— М.: Физматлит, 2003.
3. *Желонкина Н. И., Сесекин А. Н., Сорокин С. П.* Об устойчивости линейных систем с импульсным воздействием в матрице системы и запаздыванием// Вестн. Удмурт. ун-та. Мат. Мех. Компьют. науки.— 2011. — № 1. — С. 40–46.
4. *Корнилов И. А., Сесекин А. Н.* Об устойчивости линейных систем с матрицей, содержащей обобщенные функции// Вестн. УГТУ-УПИ. — 2004. — *33*, № 3. — С. 386–388.
5. *Максимов В. П.* Позиционное парирование импульсных возмущений в задаче управления линейной системой с последействием// Вестн. Перм. ун-та. Сер. Экономика. — 2014. — *21*, № 2. — С. 6–14.
6. *Миллер Б. М., Рубинович В. Я.* Разрывные решения в задачах оптимального управления и их представление с помощью сингулярных пространственно-временных преобразований// Автомат. и телемех. — 2013. — № 12. — С. 56–103.

7. *Самойленко А. М., Перестюк Н. А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. — Киев: Вища школа, 1987.
8. *Сесекин А. Н.* Динамические системы с нелинейной импульсной структурой// Тр. Ин-та мат. и мех. УрО РАН. — Екатеринбург, 2000. — *6*, № 2. — С. 497–514.
9. *Sesekin A. N., Zhelonkina N. I.* On the stability of linear systems with generalized action and delay// IFAC-PapersOnLine, Proceedings of the 18th IFAC World Congress. Milano. Italy, 2011. — P. 13404–13407.
10. *Zavalishchin S. T., Sesekin A. N.* Dynamic Impulse Systems: Theory and Applications. — Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1997.

Н. И. Желонкина
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
E-mail: 312115@mail.ru

А. Н. Сесекин
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б.Н. Ельцина
E-mail: sesekin@list.ru

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 132 (2017). С. 34–38

УДК 517.977.1, 517.926

РАВНОМЕРНАЯ ГЛОБАЛЬНАЯ ДОСТИЖИМОСТЬ И ГЛОБАЛЬНАЯ ЛЯПУНОВСКАЯ ПРИВОДИМОСТЬ ЛИНЕЙНЫХ УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ В ФОРМЕ ХЕССЕНБЕРГА

© 2017 г. **В. А. ЗАЙЦЕВ**

Аннотация. Для линейной управляемой системы в форме Хессенберга получены новые достаточные условия ляпуновской приводимости к канонической форме Фробениуса, равномерной глобальной достижимости и глобальной ляпуновской приводимости.

Ключевые слова: линейная управляемая система, система в форме Хессенберга, глобальная достижимость, ляпуновская приводимость.

AMS Subject Classification: 93B05, 93B52, 93C05

Рассмотрим линейную систему управления

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^m, \tag{1}$$

с измеримыми, локально суммируемыми и интегрально ограниченными [1, с. 252] на $\mathbb{R}$ коэффициентами. Линейное преобразование $y = L(t)x$ переводит систему (1) в систему

$$\dot{y} = F(t)y + G(t)u, \quad y \in \mathbb{R}^n, \tag{2}$$

где $F(t) = L(t)A(t)L^{-1}(t) + \dot{L}(t)L^{-1}(t)$, $G(t) = L(t)B(t)$. Такое преобразование называется *ляпуновским* (см. [1, с. 247]), если L и L^{-1} ограничены и $\dot{L}$ интегрально ограничена.

Пусть управление в системе (1) строится в виде линейной обратной связи $u = Ux$, где $U = U(\cdot)$ — измеримая ограниченная функция. Замкнутая система принимает вид

$$\dot{x} = (A(t) + B(t)U)x. \tag{3}$$

В системе (3) управляющими воздействиями являются коэффициенты матрицы U. Требуется с помощью выбора матрицы $U(\cdot)$ обеспечить решениям замкнутой системы (3) заданные асимптотические свойства. Обозначим через $X_U(t,s)$ матрицу Коши системы (3).

Определение 1 (см. [6, с. 253])**.** Система (3) называется:

a) глобально достижимой на отрезке $[\tau, \tau+\vartheta]$, если для любой матрицы $H \in M_n$, $\det H > 0$, найдется измеримое ограниченное управление $U : [\tau, \tau+\vartheta] \to M_{m,n}$ такое, что
$$X_U(\tau+\vartheta, \tau) = H; \tag{4}$$

b) ϑ-равномерно глобально достижимой, если для любых $\alpha > 0$ и $\beta > 0$ найдется $\ell > 0$ такое, что для любой матрицы $H \in M_n$, удовлетворяющей неравенствам $|H| \leqslant \alpha$ и $\det H \geqslant \beta$, и для любого $\tau \in \mathbb{R}$ найдется измеримое управление $U : [\tau, \tau+\vartheta] \to M_{m,n}$, $\|U\|_{C([\tau,\tau+\vartheta])} \leqslant \ell$, такое, что выполнено равенство (4);

c) равномерно глобально достижимой, если существует $\vartheta > 0$ такое, что система (3) является ϑ-равномерно глобально достижимой.

В [7] было доказано, что если система (1) стационарная (т.е. $A(t) \equiv A$, $B(t) \equiv B$) и является вполне управляемой (т.е. $\operatorname{rank}[B, AB, \ldots, A^{n-1}B] = n$), то система (3) ϑ-равномерно глобально достижима для любого $\vartheta > 0$ (в классе гладких управлений $U(\cdot)$). Для нестационарной системы (1)

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 16–01–00346) и Минобрнауки РФ в рамках базовой части.

доказано (см. [6, теорема 29.1], что если $n = 2$, $A(\cdot)$ кусочно-непрерывна и ограничена, $B(\cdot)$ кусочно равномерно непрерывна и ограничена и система (1) равномерно вполне управляема в смысле Калмана [6, § 5], то система (3) равномерно глобально достижима (в классе кусочно-непрерывных $U(\cdot)$). Для нестационарных систем произвольной размерности с (кусочно) непрерывными коэффициентами вопрос о достаточных условиях равномерной глобальной достижимости системы (3) остается открытым.

Рассмотрим систему (2), коэффициенты которой измеримы и имеют следующий вид: $m = 1$,

$$\begin{gathered} F(t) = J + e_n\alpha(t), \quad \alpha(t) = [-\alpha_n(t), \ldots, -\alpha_1(t)] \in (\mathbb{R}^n)^T, \quad \|\alpha\|_{C(\mathbb{R})} < \infty, \\ G(t) = \beta(t)e_n, \quad 0 < \sigma \leqslant |\beta(t)| < \infty, \quad t \in \mathbb{R}. \end{gathered} \tag{5}$$

Здесь $J \in M_n$ — первый единичный косой ряд, $e_n \in \mathbb{R}^n$ — n-й столбец единичной матрицы. Скажем, что такая система (2), (5) имеет *каноническую форму* (Фробениуса). Пусть управление в системе (2), (5) имеет вид $u = Vy$. Замкнутая система примет вид

$$\dot{y} = (F(t) + G(t)V)y. \tag{6}$$

Предложение 1. *Система* (5), (6) *является ϑ-равномерно глобально достижимой для любого $\vartheta > 0$.*

Предложение 1 вытекает из [7]. Действительно, система (1) с матрицами $A(t) \equiv J$, $B(t) \equiv e_n$, очевидно, является вполне управляемой. Пусть $U(t)$, $t \in [\tau, \tau + \vartheta]$, — управление, которое (согласно [7]) обеспечивает для матрицы Коши $X_U(t, s)$ системы $\dot{x} = (J + e_nU(t))x$ равенство $X_U(\tau + \vartheta, \tau) = H$ и удовлетворяет равномерной относительно $\tau \in \mathbb{R}$ оценке $\|U\|_{C([\tau,\tau+\vartheta])} \leqslant \ell$. Построим

$$V(t) = \frac{1}{\beta(t)}[\alpha_n(t), \ldots, \alpha_1(t)] + U(t),$$

$t \in [\tau, \tau + \vartheta]$, и подставим $V = V(t)$ в (6). Получим, что матрица Коши $Y_V(t, s)$ системы (6) с управлением $V = V(t)$ удовлетворяет равенству

$$Y_V(\tau + \vartheta, \tau) = X_U(\tau + \vartheta, \tau) = H.$$

При этом выполняется равномерная относительно $\tau \in \mathbb{R}$ оценка

$$\|V\|_{C([\tau,\tau+\vartheta])} \leqslant \ell + \|\alpha\|_{C(\mathbb{R})}/\sigma$$

Рассмотрим следующую задачу: требуется построить преобразование Ляпунова $y = L(t)x$, которое приводит заданную систему (1) с $m = 1$ к канонической форме (2), (5). В [9] такое преобразование, приводящее систему (1) с $m = 1$ к канонической форме с $\beta(t) \equiv 1$, было построено при следующих условиях:

a) коэффициенты матриц $A(\cdot)$ и $B(\cdot)$ имеют непрерывные и ограниченные на $\mathbb{R}$ производные соответственно до порядков $2n - 2$ и $2n - 1$ включительно;
b) система (1) равномерно управляема на $\mathbb{R}$ в смысле Сильвермана, Медоуза [8].

В работах И. В. Гайшуна условия a) были ослаблены. В частности, было доказано следующее предложение.

Предложение 2 (И. В. Гайшун, [2, § 18])**.** *Пусть $m = 1$ и выполнены следующие условия:*

a) *матрицы $P_0(t) = B(t)$, $P_k(t) = -A(t)P_{k-1}(t) + \dot{P}_{k-1}(t)$, $k = \overline{1, n}$, определены для всех $t \in \mathbb{R}$, непрерывны и ограничены;*
b) *матрица $Q(t) = [P_0(t), P_1(t), \ldots, P_{n-1}(t)]$ удовлетворяет условию $|\det Q(t)| \geqslant \varkappa > 0$, $t \in \mathbb{R}$;*
c) *вектор-функция $g(t) := Q^{-1}(t)P_n(t)$ обладает следующим свойством: каждая ее координата $g_i(t)$ $i - 1$ раз непрерывно дифференцируема и ограничена на $\mathbb{R}$ вместе с производными $g_i^{(j)}(t)$, $j = \overline{1, i - 1}$.*

Тогда система (1) *приводима ляпуновским преобразованием к канонической форме* (2), (5) *с $\beta(t) \equiv 1$.*

Условия предложения 2 выполняются только тогда, когда система (1) равномерно управляема в смысле [8]. Между тем, существуют системы, приводимые к канонической форме, не являющиеся равномерно управляемыми.

Пример 1. Пусть

$$A(t)=\begin{Vmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & f(t)\end{Vmatrix},\qquad B(t)=\begin{Vmatrix}0\\0\\1\end{Vmatrix},\quad t\in\mathbb{R},$$

где $f(t)$ — непрерывная на $\mathbb{R}$, нигде не дифференцируемая функция, например,

$$f(t)=\sum_{k=0}^{\infty}v_k(t),$$

где $v_0(t)=|t|-1/4$ при $|t|\leqslant 1/2$ и $v_0(t)$ продолжена периодически на $\mathbb{R}$ с периодом 1; $v_k(t)=v_0(4^kt)/4^k$. Имеем $P_0(t)=B(t)$, $P_1(t)=[0,-1,-f(t)]^T$ и $P_2(t)$ не существует. Следовательно, система (1) не является равномерно управляемой в смысле [8]. Поэтому предложение 2 не применимо. Построим матрицу

$$L(t)=\begin{Vmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{Vmatrix}$$

и применим преобразование $y=L(t)x$ к системе (1). Тогда система (1) перейдет в систему (2) с матрицами вида (5), где $\alpha_3(t)\equiv 0$, $-\alpha_2(t)=1-f(t)$, $-\alpha_1(t)=1+f(t)$, $\beta(t)\equiv 1$. Таким образом, исходная система приводима ляпуновским преобразованием к канонической форме. Здесь получены другие достаточные условия ляпуновской приводимости системы (1) с $m=1$ к канонической форме, но не для произвольной системы (1), а для системы в форме Хессенберга. Эти достаточные условия отличаются от условий, приведенных в предложении 2. Запись $f\in\mathcal{B}^{(k)}(\mathbb{R})$ будет означать, что функция $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ограничена на $\mathbb{R}$, имеет абсолютно непрерывные и ограниченные на $\mathbb{R}$ производные до порядка $(k-1)$ и измеримую ограниченную (п. в. на $\mathbb{R}$) производную порядка k.

Пусть коэффициенты системы (1) имеют следующий вид: $m=1$,

$$A(t)=\begin{Vmatrix}a_{11}(t) & b_1(t) & 0 & \ldots & 0\\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & b_2(t) & \ldots & 0\\ \hdotsfor{5}\\ a_{n-1,1}(t) & \ldots & \ldots & \ldots & b_{n-1}(t)\\ a_{n1}(t) & \ldots & \ldots & \ldots & a_{nn}(t)\end{Vmatrix},\qquad B(t)=\begin{Vmatrix}0\\0\\ \vdots\\0\\b_n(t)\end{Vmatrix}. \tag{7}$$

Система (1) с коэффициентами вида (7) называется *системой в (нижней) форме Хессенберга.*

Теорема 1. *Пусть система* (1) *имеет форму Хессенберга* (7), *и ее коэффициенты удовлетворяют следующим условиям*:

a) *матрицы $A(\cdot)$, $B(\cdot)$ измеримые и ограниченные на* $\mathbb{R}$;
b) $|b_i(t)|\geqslant\eta>0$, $t\in\mathbb{R}$, $i=\overline{1,n}$, *для некоторого* η;
c) b_i, $a_{ij}\in\mathcal{B}^{(n-i)}(\mathbb{R})$, $i=\overline{1,n-1}$, $j=\overline{1,i}$.

Тогда существует преобразование Ляпунова $y=L(t)x$, которое приводит систему (1), (7) *к канонической форме* (2), (5).

Из теоремы 1 и предложения 1 вытекают достаточные условия равномерной глобальной достижимости системы в форме Хессенберга.

Теорема 2. *Пусть система в форме Хессенберга* (1), (7) *имеет коэффициенты, удовлетворяющие условиям теоремы* 1. *Тогда соответствующая замкнутая система* (3) *является ϑ-равномерно глобально достижимой для любого $\vartheta>0$.*

Доказательства теорем 1, 2 даны соответственно в [5, теорема 4.4] и [5, теорема 4.5].

Заметим, что ослабить в теореме 2 условия на гладкость коэффициентов a_{ij}, $i = \overline{1, n-1}$, $j = \overline{1, i}$, например, до непрерывности удается пока лишь для $n = 2$. Это было доказано в [3]. В общем случае, для произвольного n данная проблема о справедливости теоремы 2 при таких условиях на a_{ij} остается открытой.

Пример 1 демонстрирует, когда не применимо предложение 2 и применима теорема 1. Приведем пример, когда не применима теорема 1, но применимо предложение 2.

Пример 2. Пусть

$$A(t) = \begin{Vmatrix} f(t) & g(t) \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}, \qquad B(t) = \begin{Vmatrix} 0 \\ 1 \end{Vmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Здесь $f(t)$ — функция из примера 1,

$$g(t) = \exp\left(\int\limits_0^t f(s)\, ds \right).$$

Система (1) с такими матрицами $A(t)$, $B(t)$ имеет форму Хессенберга. Функция $v_0(t)$ имеет период $\omega = 1$ и

$$\int\limits_0^1 v_0(s)\, ds = 0.$$

Отсюда следует, что для всякого $k \in \mathbb{N}$ функция $v_k(t)$ имеет период $\omega = 1$ и

$$\int\limits_0^1 v_k(s)\, ds = 0.$$

Поскольку ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} v_k(t)$$

сходится равномерно на $[0,1]$, то

$$\int\limits_0^1 f(s)\, ds = \sum_{k=0}^{\infty} \int\limits_0^1 v_k(s)\, ds = 0.$$

Таким образом, функция $f(t)$ периодическая с периодом $\omega = 1$ и средним значением на $[0,1]$, равным нулю. Отсюда следует, что $g(t)$ имеет период, равный 1. Имеем $|v_{k-1}(t)| \leqslant (1/4)^k$, $k \in \mathbb{N}$, поэтому

$$|f(t)| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} |v_{k-1}(t)| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} (1/4)^k = 1/3, \quad t \in [0,1].$$

Следовательно, $e^{-1/3} \leqslant g(t) \leqslant e^{1/3}$ при $t \in [0,1]$, а в силу периодичности, при $t \in \mathbb{R}$. Функция $f(t)$ в первой строке матрицы $A(t)$ нигде не дифференцируема. Поэтому теорема 1 не применима. Построим матрицы $P_i(t)$, получим

$$P_0(t) = B(t), \qquad P_1(t) = [-g(t), 0]^T, \qquad P_2(t) = [0, 0]^T.$$

Условия предложения 2 выполнены. Построим $L(t)$ согласно [2], получим

$$L(t) = \begin{Vmatrix} 1/g(t) & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Преобразование $y = L(t)x$ с такой матрицей $L(t)$ является ляпуновским. Применим его к системе (1). Система (1) перейдет в систему (2) с матрицами вида (5), где $\alpha_2(t) \equiv 0$, $\alpha_1(t) \equiv -1$, $\beta(t) \equiv 1$. Таким образом, достаточные условия в теореме 1 и в предложении 2 не содержатся друг в друге.

Определение 2 (см. [6, с. 259]). Система (3) обладает свойством *глобальной ляпуновской приводимости*, если для любой измеримой, интегрально ограниченной матрицы $C(\cdot)$ найдется измеримое и ограниченное управление $U = U(t)$, $t \in \mathbb{R}$, обеспечивающее асимптотическую эквивалентность системы $\dot{z} = C(t)z$, $t \in \mathbb{R}$, $z \in \mathbb{R}^n$, и системы (3) при $U = U(t)$, т.е. существует преобразование Ляпунова, связывающее эти системы.

Теорема 3. *Если система* (3) *равномерно глобально достижима, то она обладает свойством глобальной ляпуновской приводимости.*

Теорема 3 доказана для кусочно-непрерывных, ограниченных $A(\cdot)$, $B(\cdot)$, $C(\cdot)$ в классе кусочно-непрерывных, ограниченных $U(\cdot)$ (см., например, [6, теорема 25.3]). Доказательство сохраняется для измеримых, интегрально ограниченных $A(\cdot)$, $B(\cdot)$, $C(\cdot)$ в классе измеримых, ограниченных $U(\cdot)$. Вопрос о том, верно ли обратное утверждение для теоремы 3, в общем случае является открытым. Из теорем 2 и 3 вытекают достаточные условия глобальной ляпуновской приводимости системы в форме Хессенберга.

Теорема 4. *Пусть система* (1) *имеет форму Хессенберга* (7) *и выполнены условия теоремы* 1. *Тогда система* (3) *обладает свойством глобальной ляпуновской приводимости.*

Другие достаточные условия глобальной управляемости ляпуновских инвариантов линейной системы в форме Хессенберга получены в [4].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Былов Б. Ф., Виноград Р. Э., Гробман Д. М., Немыцкий В. В.* Теория показателей Ляпунова. — М.: Наука, 1966.
2. *Гайшун И. В.* Введение в теорию линейных нестационарных систем. — М.: Едиториал УРСС, 2004.
3. *Зайцев В. А.* Равномерная полная управляемость и ляпуновская приводимость двумерного квазидифференциального уравнения// Вестн. Удмурт. ун-та. Мат. — 2007. — № 1. — С. 55–66.
4. *Зайцев В. А.* Равномерная полная управляемость и глобальное управление асимптотическими инвариантами линейной системы в форме Хессенберга// Вестн. Удмурт. ун-та. Мат. Мех. Компьют. науки. — 2015. — *25*, № 3. — С. 318–337.
5. *Зайцев В. А.* К теории стабилизации управляемых систем: дис. на соиск. степ. д-ра физ.-матем. наук. — Ижевск: Удмурт. гос. ун-т, 2016. — 293 с.
6. *Макаров Е. К., Попова С. Н.* Управляемость асимптотических инвариантов нестационарных линейных систем. — Минск: Беларуская наука, 2012.
7. *Sergeev I. N.* Controlling solutions to a linear differential equation// Moscow Univ. Math. Bull. — 2009. — Vol. 64. Issue 3. — С. 113–120.
8. *Silverman L. M., Meadows H. E.* Controllability and observability in time-variable linear systems// SIAM J. Control. — 1967. — *5*, № 1. — С. 64–73.
9. *Wolowich W. A.* On the stabilization of controllable systems// IEEE Trans. Automat. Control. — 1968. — *AC-13*, № 5. — С. 569–572.

В. А. Зайцев
Удмуртский государственный университет
E-mail: verba@udm.ru

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 132 (2017). С. 39–43

УДК 517.968.74

О МЕТОДЕ ИССЛЕДОВАНИЯ СПЕЦИФИЧЕСКОЙ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНОГО ВОЛЬТЕРРОВА ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ШЕСТОГО ПОРЯДКА

© 2017 г. **С. ИСКАНДАРОВ**

Посвящается памяти доктора физико-математических наук профессора Н. В. Азбелева и памяти кандидата физико-математических наук А. В. Чистякова

Аннотация. Устанавливаются достаточные условия асимптотической устойчивости на полуоси решений линейного однородного интегродифференциального уравнения шестого порядка типа Вольтерра в случае, когда решения соответствующего линейного однородного дифференциального уравнения шестого порядка асимптотически неустойчивы. Предлагается новый метод и приводится иллюстративный пример.

Ключевые слова: интегродифференциальное уравнение, специфическая асимптотическая устойчивость, метод возведения уравнений в квадрат, метод срезывающих функций, лемма Люстерника—Соболева.

AMS Subject Classification: 53A40, 20M15

Все фигурирующие функции и их производные являются непрерывными и соотношения имеют место при $t \geqslant t_0$, $t \geqslant \tau \geqslant t_0$; $J = [t_0, \infty)$; ИДУ — интегродифференциальное уравнение; под асимптотической устойчивостью решений линейного ИДУ шестого порядка понимается стремление к нулю при $t \to \infty$ всех его решений и их производных до пятого порядка включительно.

Задача. Получить достаточные условия асимптотической устойчивости любого решения линейного однородного ИДУ шестого порядка типа Вольтерра вида

$$x^{(6)}(t) - a_5(t)x^{(5)}(t) + a_4(t)x^{(4)}(t) + a_3(t)x'''(t) + a_2(t)x''(t) + a_1(t)x'(t) + a_0(t)x(t) + \\ + \int\limits_{t_0}^{t} \Big[Q_0(t,\tau)x(\tau) + Q_1(t,\tau)x'(\tau) + Q_2(t,\tau)x''(\tau) + Q_3(t,\tau)x'''(\tau) + Q_4(t,\tau)x^{(4)}(\tau) + \\ + Q_5(t,\tau)x^{(5)}(\tau)\Big] d\tau = 0, \quad t \geqslant t_0, \quad (1)$$

при условии $a_5(t) \geqslant 0$, т.е. в случае, когда любое ненулевое решение дифференциального уравнения

$$x^{(6)}(t) - a_5(t)x^{(5)}(t) + a_4(t)x^{(4)}(t) + a_3(t)x'''(t) + a_2(t)x''(t) + a_1(t)x'(t) + a_0(t)x(t) = 0,$$

$t \geqslant t_0$, не является АУ, что следует из формулы Остроградского—Лиувилля.

Такая задача называется специфической и ранее никем не изучена.

Речь идет о решениях ИДУ (1) $x(t) \in C^6(J, R)$ с любыми начальными данными $x^k(t_0)$, $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$. Каждое такое решение существует и единственно.

Для решения поставленной задачи разработан метод, суть которого состоит в следующем. В ИДУ (1) делается нестандартная замена автора (см. [5]):

$$x^{(4)}(t) + p_3 x'''(t) + p_2 x''(t) + p_1 x'(t) + p_0 x(t) = W(t)y(t), \tag{2}$$

где p_k — некоторые вспомогательные параметры, причем $p_k > 0$ $(k = 0, 1, 2, 3)$; $0 < W(t)$ — некоторая весовая функция, $y(t)$ — новая неизвестная функция.

Тогда ИДУ (1) приводится к следующей эквивалентной системе:

$$\begin{cases} x^{(4)}(t) + p_3 x'''(t) + p_2 x''(t) + p_1 x'(t) + p_0 x(t) = W(t)y(t), \\ y''(t) - b_5(t)y'(t) + b_4(t)y(t) + b_3(t)x'''(t) + b_2(t)x''(t) + b_1(t)x'(t) + b_0(t)x(t) + \\ \qquad + \displaystyle\int_{t_0}^{t} \Big[P_0(t,\tau)x(\tau) + P_1(t,\tau)x'(\tau) + P_2(t,\tau)x''(\tau) + P_3(t,\tau)x'''(\tau) + \\ \qquad + P_4(t,\tau)y(\tau) + K(t,\tau)y(\tau)\Big]d\tau = 0, \quad t \geqslant t_0, \end{cases} \tag{3}$$

где

$$\begin{aligned}
b_5(t) &\equiv a_5(t) + p_3 - 2W'(t)(W(t))^{-1}, \\
b_4(t) &\equiv a_4(t) + [p_3 - W'(t)(W(t))^{-1}]a_5(t) + p_3^2 - p_2 + [W''(t) - p_3 W'(t)](W(t))^{-1}, \\
b_3(t) &\equiv [a_3(t) - p_3 a_4(t) + (p_2 - p_3^2)a_5(t) + p_2 p_3 - p_1 - p_3(p_3^2 - p_2)](W(t))^{-1}, \\
b_2(t) &\equiv [a_2(t) - p_2 a_4(t) + (p_1 - p_2 p_3)a_5(t) + p_1 p_3 - p_0 - p_2(p_3^2 - p_2)](W(t))^{-1}, \\
b_1(t) &\equiv [a_1(t) - p_1 a_4(t) + (p_0 - p_1 p_3)a_5(t) + p_0 p_3 - p_1(p_3^2 - p_2)](W(t))^{-1}, \\
b_0(t) &\equiv [a_0(t) - p_0 a_4(t) - p_0 p_3 a_5(t) - p_0(p_3^2 - p_2)](W(t))^{-1}, \\
P_0(t,\tau) &\equiv [Q_0(t,\tau) - p_0 Q_4(t,\tau) + p_0 p_3 Q_5(t,\tau)](W(t))^{-1}, \\
P_1(t,\tau) &\equiv [Q_1(t,\tau) - p_1 Q_4(t,\tau) + (p_1 p_3 - p_0)Q_5(t,\tau)](W(t))^{-1}, \\
P_2(t,\tau) &\equiv [Q_2(t,\tau) - p_2 Q_4(t,\tau) + (p_2 p_3 - p_1)Q_5(t,\tau)](W(t))^{-1}, \\
P_3(t,\tau) &\equiv [Q_3(t,\tau) - p_3 Q_4(t,\tau) + (p_3^2 - p_2)Q_5(t,\tau)](W(t))^{-1}, \\
P_4(t,\tau) &\equiv (W(t))^{-1}[Q_4(t,\tau)W(\tau) + Q_5(t,\tau)(W'(\tau) - p_3 W(\tau))], \\
K(t,\tau) &\equiv (W(t))^{-1}Q_5(t,\tau)W(\tau).
\end{aligned}$$

Далее для произвольно фиксированного решения $(x(t), y(t))$ обе части первого уравнения системы (3) возводим в квадрат [3, с. 28], [5], второе уравнение системы (3) умножаем на $y'(t)$ [3, с. 25–27], сложим полученные соотношения, затем проводим интегрирование в пределах от t_0 до t, в том числе по частям, при этом, аналогично [1], вводим функции $\psi(t)$, $R(t,\tau)$, делаем преобразования, аналогичные преобразованиям (3.108)–(3.113) из [3, с. 149–151] или преобразованиям (9)–(12) из [2], [4], к полученному интегральному неравенству применим лемму 1 из [1] об интегральном неравенстве, затем используем лемму Люстерника—Соболева.

Лемма 1 (лемма Люстерника—Соболева [6, с. 393–394], [4]). *Если $x^{(k)}(t) \in L^2(J, R)$, $k = 0, 1$, то $x(t) \to 0$ при $t \to \infty$.*

Введем предположения и обозначения (см. [3]). Пусть $\psi(t)$ — некоторая срезывающая функция,

$$R(t,\tau) = K(t,\tau)(\psi(t)\psi(\tau))^{-1},$$

$$D_0 = p_0^2, \quad D_1 = p_1^2 - 2p_0 p_2, \quad D_2 = p_2^2 + 2p_0 - 2p_1 p_3, \quad D_3 = p_3^2 - 2p_2,$$

$$W'(t) \leqslant 0, \quad b_5(t) > 0,$$

$$\alpha(t) \equiv b_5(t)\big(\psi(t)\big)^{-1}, \quad \beta(t) \equiv \Big[\alpha'(t) + b_5(t)\alpha(t)\Big](\psi(t))^{-1}.$$

Аналогично теореме 3.16 из [3, с. 151–153] и теоремам из [4,5] доказывается следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть*

1) *выполняются условия* $a_5(t) \geqslant 0$, $p_k > 0$, $k = 0, 1, 2, 3,$, $W(t) > 0$, $W'(t) \leqslant 0$, $b_5(t) > 0$;
2) $D_k(t) > 0$ $(k = 0, 1, 2, 3)$;
3) *все главные миноры следующей матрицы положительны*:

$$A = \begin{pmatrix} p_0p_1 & p_0p_2 & p_0p_3 & p_0 \\ p_0p_2 & p_1p_2 - p_0p_3 & p_1p_3 - p_0 & p_1 \\ p_0p_3 & p_1p_3 - p_0 & p_2p_3 - p_1 & p_2 \\ p_0 & p_1 & p_2 & p_3 \end{pmatrix};$$

4) $b_4(t) \geqslant b_{40} > 0$, *существует такая функция* $b_4^*(t) \in L^1(J, R_+)$, *что* $b_4'(t) \leqslant b_4^*(t)b_4(t)$;
5) $A(t) \equiv R(t, t_0) + \beta(t) = A_1(t) + A_2(t)$, $A_1(t) > 0$, $A_2(t) \geqslant 0$, *существует такое число* $\varepsilon \in (0, 1)$, *что* $\big(\alpha(t)\big)^2 \leqslant (1 - \varepsilon)A_2(t)$;
6) *существует такая функция* $B^*(t) \in L^1(J, R_+)$, *что*

$$B(t) \equiv R'_t(t, t_0) + \beta'(t) + 2b_5(t)R(t, t) \leqslant B^*(t)A_1(t);$$

7) $R'_\tau(t, \tau) \geqslant 0$, $R''_{t\tau}(t, \tau) \leqslant 0$, $(b_5(t)R'_\tau(t, t_0))' \leqslant 0$, $R''_{\tau\tau}(t, \tau) \geqslant 0$, $(b_5(t)R'_\tau(t, \tau))''_{t\tau} \leqslant 0$;
8)

$$\big(W(t)\big)^2 + \Big[1 + (\alpha(t))^2(A_1(t))^{-1}\Big](b_k(t))^2 + \Big[1 + \big|\alpha(t)\big|(A_1(t))^{-1/2}\Big]\Bigg[\int\limits_{t_0}^{t} (P_k(t, \tau))^2\, d\tau\Bigg]^{\frac{1}{2}} +$$

$$+ \big|\alpha(t)\big|(A_1(t))^{-1/2}\Bigg[\big|b_4(t)\big| + \int\limits_{t_0}^{t} \big|P_4(t, \tau)\big| d\tau\Bigg] \in L^1\big(J, R_+ \setminus \{0\}\big), \quad k = 0, 1, 2, 3.$$

Тогда для любого решения $(x(t),\ y(t))$ *системы* (3) *справедливы следующие утверждения*:

$$x^{(k)}(t) \in L^2(J, R),\ k = 0, 1, 2, 3, 4; \quad y^{(r)}(t) = O(1),\ r = 0, 1.$$

Пусть, кроме того, выполняется условие

9) $W^{(k)}(t) \in L^2(J, R)$, $k = 1, 2$.

Тогда любое решение $x(t)$ *уравнения* (1) *и его производные* $x^{(k)}(t)$ $(k = 1, 2, 3, 4, 5)$ *принадлежат пространству* $L^2(J, R)$ *и функции* $x^{(k)}(t)$, $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$, *стремятся к нулю при* $t \to \infty$, *т.е. решение* $x(t)$ *асимптотически устойчиво.*

Пример. Для ИДУ шестого порядка

$$x^{(6)}(t) - x^{(5)}(t) + \Big[-60 + \frac{1}{t+1}\Big]x^{(4)}(t) + \Big[-210 + \frac{4}{t+1} + e^{-2t}\Big]x'''(t) +$$

$$+ \Big[-295 + \frac{6}{t+1} - \frac{e^t}{t+4}\Big]x''(t) + \Big[-189 + \frac{4}{t+1} + \frac{e^{-t}\sin t}{t}\Big]x'(t) +$$

$$+ \Big[-46 + \frac{1}{t+1} + e^{-t}\sin\Big(\frac{1}{t+2}\Big)\Big]x(t) +$$

$$+ \int\limits_0^t \Bigg\{\Big[Q_5(t, \tau) + \frac{e^{-t+\tau}\sin(t\tau)}{(t+\tau+1)^2} - e^{-t}\sin(e^{-t-\tau})\Big]x(\tau) +$$

$$+ \Big[5Q_5(t, \tau) + \frac{4e^{-t+\tau}\sin(t\tau)}{(t+\tau+1)^2} - \frac{e^{-t}}{(t^2+\tau^2+1)^2}\Big]x'(\tau) +$$

$$+ \Big[10Q_5(t, \tau) + \frac{6e^{-t+\tau}\sin(t\tau)}{(t+\tau+1)^2} + \frac{e^{-t}}{(t+\tau+3)^4}\Big]x''(\tau) +$$

$$+\left[10Q_5(t,\tau)+\frac{4e^{-t+\tau}\sin(t\tau)}{(t+\tau+1)^2}+\frac{e^{-2t-\tau}}{t+\tau+5}\right]x'''(\tau)+$$
$$+\left[5Q_5(t,\tau)+\frac{e^{-t+\tau}\sin(t\tau)}{(t+\tau+1)^2}\right]x^{(4)}(\tau)+\left[Q_5(t,\tau)x^{(5)}(\tau)\right]\Bigg\}d\tau=0,\quad t\geqslant 0,$$

где
$$Q_5(t,\tau)\equiv\frac{201e^{-t+21\tau}}{5t-\tau+1},$$
выполняются все условия теоремы при $p_3=4$, $p_2=6$, $p_1=4$, $p_0=1$, $W(t)\equiv e^{-t}$, где $t_0=0$,
$$b_5(t)\equiv 7,\quad b_4(t)\equiv 8+\frac{1}{t+1},\quad b_3(t)\equiv e^{-t},\quad b_2(t)\equiv -\frac{1}{t+4},$$
$$b_1(t)\equiv\frac{\sin t}{t},\quad b_0(t)\equiv\sin\left(\frac{1}{t+2}\right),$$
$$P_0(t,\tau)\equiv-\sin(e^{-t-\tau}),\quad P_1(t,\tau)\equiv-\frac{1}{(t^2+\tau^2+1)^2},$$
$$P_2(t,\tau)\equiv\frac{1}{(t+\tau+3)^4},\quad P_3(t,\tau)\equiv\frac{e^{-t-\tau}}{t+\tau+5},$$
$$P_4(t,\tau)\equiv\frac{\sin(t\tau)}{(t+\tau+1)^2},\quad K(t,\tau)\equiv\frac{201e^{20\tau}}{5t-\tau+1},$$
$$A=\begin{pmatrix}4&6&4&1\\6&20&15&4\\4&15&20&6\\1&4&6&4\end{pmatrix},$$
$$b_4^*(t)\equiv 0,\quad \psi(t)\equiv e^{20t},\quad R(t,\tau)\equiv\frac{201e^{-20t}}{5t-\tau+1},\quad \alpha(t)\equiv 7e^{-20t},$$
$$\beta(t)\equiv-91e^{-40t},\quad A(t)\equiv\frac{201e^{-20t}}{5t+1}-91e^{-40t},\quad A_1(t)\equiv\frac{e^{-20t}}{5t+1},$$
$$A_2(t)\equiv\frac{200e^{-20t}}{5t+1}-91e^{-40t},\quad \varepsilon=\frac{1}{2},$$
$$B(t)\equiv 201\left(\frac{-20e^{-20t}}{5t+1}-\frac{5e^{-20t}}{(5t+1)^2}\right)+3640e^{-40t}+\frac{14\cdot 201e^{-20t}}{4t+1}\leqslant 3640e^{-40t},$$
$$B^*(t)\equiv 3640(5t+1)e^{-20t}.$$

Значит, для любого решения $x(t)$ этого уравнения справедливы соотношения $x^{(k)}(t)\to 0$, $t\to\infty$, $k=0,1,2,3,4,5$, т.е. любое решение данного уравнения является асимптотически устойчивым.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ведь Ю. А., Пахыров З.* Достаточные признаки ограниченности решений линейных интегро-дифференциальных уравнений// Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям в Киргизии. — Фрунзе: Илим, 1973. — Вып. 9. — С. 68–103.
2. *Иманалиев М. И., Искандаров С.* Специфический признак устойчивости решений линейного однородного вольтеррова интегродифференциального уравнения четвертого порядка// Докл. РАН. — 2009. — *425*, № 4. — С. 447–451.
3. *Искандаров С.* Метод весовых и срезывающих функций и асимптотические свойства решений интегро-дифференциальных и интегральных уравнений типа Вольтерра. — Бишкек: Илим, 2002. 216 с.
4. *Искандаров С.* Об одном нестандартном методе исследования асимптотической устойчивости решений линейного вольтеррова интегро-дифференциального уравнения четвертого порядка// Исслед.по интегро-дифференц. уравнениям. — Бишкек: Илим, 2012. — Вып. 44. — С. 44–51.

5. *Искандаров С.* О методе исследования асимптотической устойчивости решений линейного вольтеррова интегро-дифференциального уравнения пятого порядка// Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям. — Бишкек: Илим, 2014. — Вып. 46. — С. 41-48.
6. *Люстерник Л. А., Соболев С. Л.* Элементы функционального анализа. — М.: Наука, 1965. — 520 с.

С. Искандаров
Институт теоретической и прикладной математики НАН Кыргызской Республики
E-mail: mrmacintosh@list.ru

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 132 (2017). С. 44–50

УДК 517.968.74

ОБ ОЦЕНКАХ СНИЗУ РЕШЕНИЙ И ИХ ПРОИЗВОДНЫХ ЛИНЕЙНОГО ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА ТИПА ВОЛЬТЕРРА

© 2017 г. **С. ИСКАНДАРОВ, Г. Т. ХАЛИЛОВА**

Посвящается памяти доктора физико-математических наук, профессора Н. В. Азбелева и памяти кандидата физико-математических наук А. В. Чистякова

Аннотация. Статья посвящена решению задачи об установлении достаточных условий, обеспечивающих оценки снизу и стремление к бесконечности решений и их производных до третьего порядка включительно линейного интегродифференциального уравнения четвертого порядка типа Вольтерра. Для решения поставленной задачи развивается метод, основанный на идеях метода нестандартного сведения к системе первого автора, метода преобразования уравнений Вольтерра, метода срезывающих функций первого автора, метода интегральных неравенств Ю. А. Ведя, метода Лагранжа для интегрального представления решений линейного неоднородного дифференциального уравнения первого порядка и метода оценки снизу решений Ю. А. Ведя.

Ключевые слова: интегродифференциальное уравнение, априорная оценка, оценка снизу, стремление к бесконечности, многообразие начальных данных, неустойчивость, неосциллируемость.

AMS Subject Classification: 53A40, 20M15

Все фигурирующие функции и их производные являются непрерывными и соотношения имеют место при $t \geqslant t_0$, $t \geqslant \tau \geqslant t_0$; $J = [t_0, \infty)$; ИДУ — интегродифференциальное уравнение; ДУ — дифференциальное уравнение.

Как известно, изучение оценок снизу решений и их производных ИДУ высоких порядков типа Вольтерра является одним из трудных вопросов асимптотической теории таких уравнений на полуоси. Нами же показана принципиальная возможность исследования этого вопроса на примере ИДУ четвертого порядка, а именно, рассматривается следующая задача.

Задача 1. Установить достаточные условия, обеспечивающие оценки снизу и стремления к бесконечности при $t \to \infty$ решений и их производных до третьего порядка включительно линейного ИДУ четвертого порядка типа Вольтерра вида

$$x^{(4)}(t) + a_3(t)x'''(t) + a_2(t)x''(t) + a_1(t)x'(t) + a_0(t)x(t) + \\ + \int_{t_0}^{t} [Q_0(t,\tau)x(\tau) + Q_1(t,\tau)x'(\tau) + Q_2(t,\tau)x''(\tau) + Q_3(t,\tau)x'''(\tau)]d\tau = f(t), \quad t \geqslant t_0. \quad (1)$$

Речь идет о решениях ИДУ (1) $x(t) \in C^4(J, R)$ с любыми начальными данными $x^{(k)}(t_0)$, $k = 0, 1, 2, 3$. Каждое такое решение существует и единственно.

Насколько нам известно, сформулированная нами задача ранее никем не изучена.

Для решения поставленной задачи развивается метод, основанный на идеях метода нестандартного сведения к системе С. Искандарова (2010), метода преобразования уравнений В. Вольтерра (1928), метода срезывающих функций С. Искандарова (1980), метода интегральных неравенств Ю. А. Ведя, З. Пахырова (1973), метода априорных оценок Н. В. Азбелева, В. П. Максимова, Л. Ф. Рахматуллиной, П. М. Симонова (1991, 2001), метода Лагранжа для интегрального представления решений линейного неоднородного ДУ первого порядка и метода оценки снизу решений Ю. А. Ведя, Л. Н. Китаевой (1965).

Схема исследования такова: сначала устанавливаются априорные оценки на полуоси для решений и их производных до третьего порядка включительно, затем производятся оценки снизу, с использованием отдельно интегральных представлений для решений и их первых, вторых, третьих производных, при этом образуются четыре многообразия для начальных данных. Приведем суть метода нестандартного сведения к системе. Согласно работам авторов [6, 7] в ИДУ (1) делаются следующие замены:

$$x'(t) = \delta x(t) + W_1(t)y(t), \tag{2}$$

$$y'(t) + \lambda y(t) = W_2(t)z(t), \tag{3}$$

где $0 < \delta$, λ — некоторые вспомогательные параметры; $0 < W_k(t)$, $k = 1, 2,$ — некоторые весовые функции; $y(t)$, $z(t)$ — новые неизвестные функции.

Тогда ИДУ четвертого порядка (1) сводится к следующей эквивалентной системе:

$$\begin{cases} x'(t) = \delta\, x(t) + W_1(t)y(t), \\ y'(t) + \lambda y(t) = W_2(t)z(t), \\ z''(t) + b_3(t)z'(t) + b_2(t)z(t) + b_1(t)y(t) + b_0(t)x(t) + \displaystyle\int_{t_0}^{t} \Big[P_0(t,\tau)x(\tau) + P_1(t,\tau)y(\tau) \\ \quad + P_2(t,\tau)z(\tau) + K(t,\tau)z'(\tau)]d\tau = F(t), \quad t \geqslant t_0, \end{cases} \tag{4}$$

где

$$b_3(t) \equiv a_3(t) + A_5(t)\Big(W_1(t)W_2(t)\Big)^{-1};$$

$$b_2(t) \equiv a_2(t) + \Big[a_3(t)A_2(t) + A_4(t)\Big]\Big(W_1(t)W_2(t)\Big)^{-1};$$

$$b_1(t) \equiv a_1(t)\big(W_2(t)\big)^{-1} + \Big[a_2(t)W(t) + a_3(t)A_1(t) + A_3(t)\Big]\Big(W_1(t)W_2(t)\Big)^{-1};$$

$$b_0(t) \equiv \Big[a_0(t) + \delta a_1(t) + \delta^2 a_2(t) + \delta^3 a_3(t) + \delta^4\Big]\Big(W_1(t)W_2(t)\Big)^{-1};$$

$$A_5(t) \equiv \Big(W_1(t)W_2(t)\Big)' + A_2(t);$$

$$A_2(t) \equiv \Big(W_1(t)W_2(t)\Big)' + W(t)W_2(t);$$

$$W(t) \equiv W_1'(t) - \lambda W_1(t) + \delta W_1(t);$$

$$A_4(t) \equiv A_2'(t) + A_1(t)W_2(t);$$

$$A_1(t) \equiv W'(t) + \delta^2 W_1(t) - \lambda W(t);$$

$$A_3(t) \equiv A_1'(t) - \lambda A_1(t) + \delta^3 W_1(t);$$

$$P_0(t,\tau) \equiv \Big(W_1(t)W_2(t)\Big)^{-1}\Big[Q_0(t,\tau) + \delta Q_1(t,\tau) + \delta^2 Q_2(t,\tau) + \delta^3 Q_3(t,\tau)\Big];$$

$$P_1(t,\tau) \equiv \Big(W_1(t)W_2(t)\Big)^{-1}\Big[Q_1(t,\tau)W_1(\tau) + Q_2(t,\tau)W(\tau) + Q_3(t,\tau)A_1(\tau)\Big];$$

$$P_2(t,\tau) \equiv \Big(W_1(t)W_2(t)\Big)^{-1}\Big[Q_2(t,\tau)W_1(\tau)W_2(\tau) + Q_3(t,\tau)A_2(\tau)\Big];$$

$$K(t,\tau) \equiv \Big(W_1(t)W_2(t)\Big)^{-1}Q_3(t,\tau)W_1(\tau)W_2(\tau);$$

$$F(t) \equiv \Big(W_1(t)W_2(t)\Big)^{-1}f(t).$$

Отметим, что по сравнению с исходным ИДУ четвертого порядка (1) полученная система (4) легко исследуется, так как мы заданное ИДУ (1) расщепили на систему из трех простейших уравнений. Идея получения простейшей системы (4) вместо сложного ИДУ четвертого порядка

(1) заимствована из идей методов расщепления операторов из монографии академика Г. И. Марчука [10]. Отметим также, что идея введения некоторой весовой функции типа $W_k(t)$ для исследования устойчивости решений ДУ с последействием содержится в монографии академика Н. Н. Красовского [9, с. 199], в монографии Н. В. Азбелева, В. П. Максимова, Л. Ф. Рахматуллиной [1, с. 96–99] и в монографии Н. В. Азбелева и П. М. Симонова [2, с. 42, 43, 54, 55, 132].

Пусть

$$K(t,\tau)=\sum_{i=0}^{n}K_i(t,\tau),\quad F(t)=\sum_{i=0}^{n}F_i(t),$$

(см. [5]), $\psi_i(t)$, $i=1,\dots,n,$ — некоторые срезывающие функции,

$$R_i(t,\tau)\equiv K_i(t,\tau)\big(\psi_i(t)\psi_i(\tau)\big)^{-1},\quad E_i(t)\equiv F_i(t)\big(\psi_i(t)\big)^{-1},\quad i=1,\dots,n,$$
$$R_i(t,t_0)=A_i(t)+B_i(t),\quad i=1,\dots,n,$$

где $c_i(t)$, $i=1,\dots,n,$ — некоторые функции.

К системе (4) применяем метод преобразования уравнений В. Вольтерра [4, с. 194–217] и метод срезывающих функций [5, с. 41].

Устанавливается следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть*

1) $\delta>0$, $\lambda>0$, $W_k(t)>0$, $k=1,2$;
2) $b_3(t)\geqslant 0$;
3) $b_2(t)\geqslant b_{20}>0$, *существует функция* $b_2^*(t)\geqslant 0$ *такая, что* $b_2'(t)\leqslant b_2^*(t)b_2(t)$;
4) $A_i(t)\geqslant 0$, $B_i(t)\geqslant 0$, $B_i'(t)\leqslant 0$, $R'_{i\tau}(t,\tau)\geqslant 0$, *существуют функции* $A_i^*(t)\geqslant 0$, $c_i(t)$, $R_i^*(t)\geqslant 0$ *такие, что*

$$A_i'(t)\leqslant A_i^*(t)A_i(t),\quad (E_i^{(k)}(t))^2\leqslant B_i^{(k)}(t)\,c_i^{(k)}(t),\quad R''_{it\tau}(t,\tau)\leqslant R_i^*(t)R'_{i\tau}(t,\tau), i=1,\dots,n,\ k=0,1.$$

Тогда для любого решения $(x(t),y(t),z(t))$ *системы* (4) *справедливы следующие оценки*:

$$(x(t))^2+(y(t))^2+\lambda\int_{t_0}^{t}(y(s))^2ds+(z'(t))^2+\int_{t_0}^{t}b_3(s)(z'(s))^2ds+b_2(t)(z(t))^2+$$
$$+\sum_{i=1}^{n}\left[A_i(t)\big(Z_i(t,t_0)\big)^2+\int_{t_0}^{t}R'_{i\tau}(t,\tau)\big(Z_i(t,\tau)\big)^2d\tau\right]\leqslant$$
$$\leqslant\left\{\sqrt{c_*}+\int_{t_0}^{t}\big|F_0(s)\big|\exp\left(-\delta s+\delta t_0-\int_{t_0}^{s}G(\tau)d\tau\right)ds\right\}^2\exp\left\{2\delta t-2\delta t_0+2\int_{t_0}^{t}G(s)ds\right\},\quad (5)$$

$$\big|x(t)\big|,\ \big|y(t)\big|,\ (b_{20})^{\frac12}\big|z(t)\big|,\ \big|z'(t)\big|\leqslant E_*(t),\quad (6)$$

где

$$Z_i(t,\tau)\equiv\int_{\tau}^{t}\psi_i(\eta)z'(\eta)d\eta,\quad i=1,\dots,n,$$

$$c_*=\big(x(t_0)\big)^2+\big(y(t_0)\big)^2+\big(z'(t_0)\big)^2+b_2(t_0)(z(t_0))^2+\sum_{i=1}^{n}c_i(t_0),$$

$$E_*(t)\equiv\left[\sqrt{c_*}+\int_{t_0}^{t}\big|F_0(s)\big|\exp\left(-\delta s+\delta t_0-\int_{t_0}^{s}G(\tau)d\tau\right)ds\right]\exp\left(\delta t-\delta t_0+\int_{t_0}^{t}G(s)ds\right),$$

$$G(t) \equiv W_1(t) + W_2(t) + \frac{1}{2}b_2^*(t) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\Big[A_i^*(t) + R_i^*(t)\Big] + |b_1(t)| + |b_0(t)| +$$
$$+ \int\limits_{t_0}^{t}\Big[\big|P_0(t,\tau)\big| + \big|P_1(t,\tau)\big| + \big|P_2(t,\tau)\big|(b_{20})^{-1/2} + \big|K_0(t,\tau)\big|\Big]\,d\tau.$$

Отметим, что оценки (6) называются априорными. Далее, используя априорные оценки (6), будем заниматься оценками снизу решений $x(t)$ и их $x^{(k)}(t)$, $k=1,2,3$) ИДУ (1).

Из ДУ (2) методом Лагранжа имеем следующее интегральное представление для $x(t)$:

$$x(t) = e^{\delta(t-t_0)}\left[x(t_0) + \int\limits_{t_0}^{t} e^{-\delta(s-t_0)}W_1(s)y(s)ds\right]. \tag{7}$$

Отсюда аналогично [3,8] получаем оценку снизу для $|x(t)|$:

$$|x(t)| \geqslant e^{\delta(t-t_0)}\left[\big|x(t_0)\big| - \int\limits_{t_0}^{t} e^{-\delta(s-t_0)}W_1(s)|y(s)|ds\right]. \tag{8}$$

С учетом оценки (6) для $y(t)$ из (8) имеем оценку снизу для $x(t)$:

$$|x(t)| \geqslant e^{\delta(t-t_0)}\left[|x(t_0)| - \int\limits_{t_0}^{t} W_1(s)\exp\left(\int\limits_{t_0}^{s} G(\tau)d\tau\right)\times\right.$$
$$\left.\times\left\{\sqrt{c_*} + \int\limits_{t_0}^{s}\big|F_0(\tau)\big|\exp\left(-\delta\tau + \delta t_0 - \int\limits_{t_0}^{\tau} G(\eta)d\eta\right)d\tau\right\}ds\right]. \tag{9}$$

Устанавливаются априорные оценки $y'(t)$, $y''(t)$, $z''(t)$, $y'''(t)$, которые используются для оценки снизу $x^{(k)}(t)$, $k=1,2,3$.

Из (2) имеем

$$x''(t) = \delta\, x'(t) + W_1'(t)y(t) + W_1(t)y'(t). \tag{10}$$

Рассматривая это соотношение как дифференциальное уравнение для $x'(t)$, получаем следующее интегральное представление:

$$x'(t) = e^{\delta(t-t_0)}\left\{x'(t_0) + \int\limits_{t_0}^{t} e^{-\delta(s-t_0)}\Big[W_1'(s)y(s) + W_1(s)y'(s)\Big]ds\right\}. \tag{11}$$

Теперь из (10) дифференцированием получаем

$$x'''(t) = \delta x''(t) + W_1''(t)y(t) + 2W_1'(t)y'(t) + W_1(t)y''(t). \tag{12}$$

Рассматривая (12) как дифференциальное уравнение для $x''(t)$, получаем интегральное представление аналогично (7):

$$x''(t) = e^{\delta(t-t_0)}\left\{x''(t_0) + \int\limits_{t_0}^{t} e^{-\delta(s-t_0)}\Big[W_1''(s)y(s) + 2W_1'(s)y'(s) + W_1(s)y''(s)\Big]ds\right\}. \tag{13}$$

Далее из (12) дифференцированием имеем

$$x^{(4)}(t) = \delta x'''(t) + W_1'''(t)y(t) + 3W_1''(t)y'(t) + 3W_1'(t)y''(t) + W_1(t)y'''(t). \tag{14}$$

Рассматривая (14) как дифференциальное уравнение для $x'''(t)$, аналогично (7) получаем следующее интегральное представление:

$$x'''(t) = e^{\delta(t-t_0)}\Big\{x'''(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{-\delta(s-t_0)}\Big[W_1'''(s)y(s)+$$

$$+ 3W_1''(s)y'(s) + 3W_1'(s)y''(s) + W_1(s)y'''(s)\Big]ds\Big\}. \quad (15)$$

Из (11)–(15) аналогично (8), (9) получаются оценки снизу для $x^{(k)}(t)$, $k = 1, 2, 3$.

Введем следующие обозначения:

$$M_0\Big[x(t_0),\ x'(t_0),\ x''(t_0),\ x'''(t_0)\Big] \equiv \big|x(t_0)\big| - \int_{t_0}^{\infty} W_1(s)\exp\left(\int_{t_0}^{s} G(\tau)d\tau\right)\times$$

$$\times\left\{\sqrt{c_*} + \int_{t_0}^{s}\big|F_0(\tau)\big|\exp\left(-\delta\tau + \delta t_0 - \int_{t_0}^{\tau} G(\eta)d\eta\right)d\tau\right\}ds, \quad (16)$$

$$M_1\Big[x(t_0),\ x'(t_0),\ x''(t_0),\ x'''(t_0)\Big] \equiv \big|x'(t_0)\big| -$$

$$-\int_{t_0}^{\infty}\Big[\big|W_1'(s)\big| + \lambda W_2(s) + (b_{20})^{-1/2}\big(W_2(s)\big)^2\Big]\times$$

$$\times\exp\left(\int_{t_0}^{s} G(\tau)d\tau\right)\left\{\sqrt{c_*} + \int_{t_0}^{s}\big|F_0(\tau)\big|\exp\left(-\delta\tau + \delta t_0 - \int_{t_0}^{\tau} G(\eta)d\eta\right)d\tau\right\}ds, \quad (17)$$

$$M_2\Big[x(t_0),\ x'(t_0),\ x''(t_0),\ x'''(t_0)\Big] \equiv \big|x''(t_0)\big| -$$

$$-\int_{t_0}^{\infty}\Big\{\big|W_1''(s)\big| + 2\Big[\lambda + (b_{20})^{-1/2}W_2(s)\Big]\big|W_1'(s)\big| + \Delta_1(s)W_1(s)\Big\}\exp\left(\int_{t_0}^{s} G(\tau)d\tau\right)\times$$

$$\times\left\{\sqrt{c_*} + \int_{t_0}^{s}\big|F_0(\tau)\big|\exp\left(-\delta\tau + \delta t_0 - \int_{t_0}^{\tau} G(\eta)d\eta\right)d\tau\right\}ds, \quad (18)$$

$$M_3\Big[x(t_0),\ x'(t_0),\ x''(t_0),\ x'''(t_0)\Big] \equiv |x'''(t_0)| -$$

$$-\int_{t_0}^{\infty} e^{-\delta(s-t_0)}\Big\{\big|W_1'''(s)\big| + 3\big|W_1''(s)\big|\Big[\lambda + (b_{20})^{-1/2}W_2(s)\Big] + 3\big|W_1'(s)\big|\Delta_1(s)\Big\}E_*(s)ds -$$

$$-\int_{t_0}^{\infty} e^{-\delta(s-t_0)}W_1(s)D(s)ds, \quad (19)$$

где

$$\Delta_1(t) \equiv \lambda\Delta(t) + (b_{20})^{-1/2}\big|W_2'(t)\big| + W_2(t), \quad \Delta(t) \equiv \lambda + (b_{20})^{-1/2}W_2(t).$$

Из оценок снизу для $x^{(k)}(t)$, $k = 0, 1, 2, 3$, с учетом обозначений (16)–(19) непосредственно вытекает следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть выполняются все условия теоремы* 1 *и*

$$M_k\Big[x(t_0),\ x'(t_0),\ x''(t_0),\ x'''(t_0)\Big] > 0, \quad k = 0,1,2,3. \tag{20}$$

Тогда для любого решения $x(t)$ *и их производных* $x^{(k)}(t)$, $k = 1,2,3$, *ИДУ* (1) *с начальными данными из многообразий* (20) *соответственно справедливы следующие оценки снизу*:

$$\big|x^{(k)}(t)\big| \geqslant e^{\delta(t-t_0)}M_k\Big[x(t_0),\ x'(t_0),\ x''(t_0),\ x'''(t_0)\Big], \quad k = 0,1,2,3. \tag{21}$$

Следствие. *Если выполняются все условия теоремы* 2, *то для любого решения* $x(t)$ *и их* $x^{(k)}$ *ИДУ* (1) *с начальными данными из многообразий* (20) *соответственно справедливы следующие утверждения*:

$$\lim_{t\to\infty}|x^{(k)}(t)| = \infty, \quad k = 0,1,2,3.$$

Замечание. С учетом соотношений

$$\begin{aligned}
c_* &= (x(t_0))^2 + (y(t_0))^2 + (z'(t_0))^2 + b_2(t_0)(z(t_0))^2 + \sum_{i=1}^{n} c_i(t_0),\\
y(t_0) &= (W_1(t_0))^{-1}\Big[x'(t_0) - \delta x(t_0)\Big],\\
z(t_0) &= \Big(W_1(t_0)W_2(t_0)\Big)^{-1}\Big\{x''(t_0) - \delta^2 x(t_0) - W(t_0)(W_1(t_0))^{-1}\Big[x'(t_0) - \delta x(t_0)\Big]\Big\},\\
z'(t_0) &= \Big(W_1(t_0)W_2(t_0)\Big)^{-1}\Big\{x'''(t_0) - \delta^3 x(t_0) - A_1(t_0)\big(W_1(t_0)\big)^{-1}\Big[x'(t_0) - \delta x(t_0)\Big] -\\
&\quad - A_2(t_0)\Big(W_1(t_0)W_2(t_0)\Big)^{-1}\Big[x''(t_0) - \delta^2 x(t_0) - W(t_0)\big(W_1(t_0)\big)^{-1}\big(x'(t_0) - \delta x(t_0)\big)\Big]\Big\},
\end{aligned}$$

определяются многообразия начальных данных (20).

Таким образом, найден класс ИДУ (1), для которого поставленная задача решаема.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Азбелев Н. В., Максимов В. П., Рахматуллина Л. Ф.* Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1991. — 280 с.
2. *Азбелев Н. В., Симонов П. М.* Устойчивость решений уравнений с обыкновенными производными. — Пермь: Перм. ун-т, 2001. — 230 с.
3. *Ведь Ю. А.* Достаточные признаки отсутствия особенных точек у интегро-дифференциальных уравнений// Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям в Киргизии. — Фрунзе: Илим, 1965. — Вып. 3. — С. 123–135.
4. *Вольтерра В.* Математическая теория борьбы за существование// Пер. с фр. О. Н. Бондаренко/ Под ред. Ю. М. Свирежева. — М.: Наука, 1976. — 288 с.
5. *Искандаров С.* Метод весовых и срезывающих функций и асимптотические свойства решений интегро-дифференциальных и интегральных уравнений типа Вольтерра. — Бишкек: Илим, 2002. — 216 с.
6. *Искандаров С.* Метод нестандартного сведения к системе и экспоненциальная устойчивость линейного обыкновенного дифференциального уравнения третьего порядка// Дифференц. уравнения. — 2010. — *46*, № 6. — С. 898–899.
7. *Искандаров С., Халилова Г. Т.* Оценки снизу решений линейного вольтеррова интегро-дифференциального уравнения третьего порядка// Вестник КНУ им. Ж. Баласагына. — Бишкек: КНУ, 2011. Спец. вып. — С. 61–65.
8. *Китаева Л. Н.* О наличии невертикальных асимптот у решений дифференциальных уравнений второго порядка с запаздывающим аргументом// Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям в Киргизии. — Фрунзе: Илим, 1965. Вып. 3. — С. 213–222.
9. *Красовский Н. Н.* Некоторые задачи теории устойчивости движения. — М.: Физматгиз, 1959. — 212 с.

10. *Марчук Г. И.* Методы расщепления. — М.: Наука, 1988. — 264 с.

С. Искандаров
Институт теоретической и прикладной математики НАН Кыргызской Республики
E-mail: mrmacintosh@list.ru

Г. Т. Халилова
Кыргызско-Российская академия образования
E-mail: g.khalilova@bk.ru

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 132 (2017). С. 51–53

УДК 517.929.5

О РАЗРЕШИМОСТИ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА, НЕ РАЗРЕШЕННОГО ОТНОСИТЕЛЬНО ПРОИЗВОДНОЙ

© 2017 г. **И. Ю. КОЛПАКОВ**

Аннотация. В работе найдены условия разрешимости периодической краевой задачи для одного дифференциального уравнения первого порядка, не разрешенного относительно производной. Условия разрешимости краевой задачи были получены с применением теоремы о неявном операторе.

Ключевые слова: периодическая краевая задача, существование решения, теорема о неявном операторе.

AMS Subject Classification: 39X02

Рассмотрим нелинейную периодическую задачу для дифференциального уравнения первого порядка, не разрешенного относительно производной

$$\dot{x} = f(t, x, \dot{x}), \quad x(0) = x(T), \quad t \in [0; T], \tag{1}$$

где функция $f : [0; T] \times R \times R \to R$ удовлетворяет условию Каратеодори.

Пусть L_p — пространство суммируемых в степени p на отрезке $[0; T]$ функций, D_p — пространство абсолютно непрерывных на отрезке $[0; T]$ функций с нормой $\|x\|_{D_p} = |x(0)| + \|\dot{x}\|_{L_p}$. Под решением понимается такой элемент пространства D_p, который почти всюду на отрезке $[0; T]$ удовлетворяет уравнению и краевому условию задачи (1).

При описании некоторых реальных процессов приходится иметь дело с математическими моделями, которые описываются задачами для обыкновенных дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно старшей производной и, в частности, задачей (1). Обычно при исследовании нелинейных задач, в том числе и задачи (1), используется явная или неявная линеаризация. В частности, в [4, 6, 8] используется редукция нелинейной задачи к некоторой вспомогательной квазилинейной задаче, к которой применяются известные схемы исследования на разрешимость квазилинейных или резонансных краевых задач. К числу методов, использующих неявную линеаризацию нелинейных задач можно отнести метод Ньютона—Канторовича, метод применения теорем о неявной функции, методы теории нелинейных фредгольмовых операторов. В этом случае нелинейный оператор аппроксимируется своей производной [2, 3, 5, 9].

В работе для доказательства разрешимости задачи (1) применяется подход, предложенный автором [7] для доказательства разрешимости квазилинейных краевых задач в случае резонанса. Для этого задача (1) заменяется эквивалентным ей квазилинейным операторным уравнением

$$Lx = Fx \tag{2}$$

в пространстве $X = \{x \in D_p[0; T] | x(0) = x(T)\}$, где операторы $L, F : X \to Y = L_p[0; T]$ определены равенствами: $Lx = \dot{x}$, $Fx = f(t, x, \dot{x})$. Отметим, что краевая задача (1) является резонансной, так как оператор $L : X \to Y$ необратим.

Обозначим ядро и образ линейного оператора L через $\ker L$ и $R(L)$ соответственно. Непосредственная проверка показывает, что ядро оператора имеет вид: $\ker L = \{x \in X | x(t) \equiv \mathrm{const}\}$.

Оператор L является нётеровым. Пространство X представимо в виде $X = X_0 \bigoplus \ker L$, где подпространство $X_0 = \{x \in X | x(0) = 0\}$. Тогда элемент $x \in X$ представим в виде суммы $x = \chi + u$, где $\chi \in X_0$ и $u \in \ker(L)$.

В работе отождествляются пространства $X \bigoplus Y$ и $X \times Y$ с согласованными нормами: $\|(x;y)\| = \|x\|_X + \|y\|_Y$. Поэтому при необходимости прямая топологическая сумма $X_0 \bigoplus \ker L$ рассматривается как прямое произведение $X_0 \times \ker L$ с изометричной нормой, при этом значение оператора F на элементе $x = \chi + u$ записывается в виде $F(\chi, u)$.

Пусть $P : X \to X$ — проектор на $\ker L$ и $Q : Y \to Y$ — проектор на $R(L)$, определены равенствами

$$(Px)(t) = x(0), \qquad Qy = y - \frac{1}{T}\int\limits_0^T y\,(s)\,ds.$$

Тогда соответствующий дополнительный проектор $Q^c = I - Q$ имеет вид

$$Q^c y = \frac{1}{T}\int\limits_0^T y\,(s)\,ds,$$

откуда образ оператора L имеет вид

$$R(L) = \left\{ y \in Y \mid \int\limits_0^T y(s)ds = 0 \right\}.$$

Из нётеровости оператора L следует, что существует обобщенно обратный к L оператор $K : R(L) \to X_0$, ассоциированный с проектором $P : X \to X$ на $\ker L$ [1], определяемый по формуле:

$$(Ky)(t) = \int\limits_0^t y\,(s)\,ds.$$

Для доказательства разрешимости операторного уравнения (2), с учетом необратимости оператора L ($R(L) \neq Y$), сначала доказывается существование множества M и непрерывного оператора $N : X_0 \to \ker L$ таких, что оператор $F(I+N)$ переводит это множество в образ оператора L, т.е. $F(I+N)(M) \subset R(L)$. Для этого применяется теорема о неявном операторе к операторному уравнению $Q^c F(\chi, u) = 0$.

Затем на найденном множестве M доказывается существование решения операторного уравнения $x = KF(I+N)x$ с помощью теоремы существования с условием на границе области, откуда следует разрешимость уравнения (2).

Объединяя требования, накладываемые на операторы, получим условия разрешимости операторного уравнения (2) (см. [7]).

Теорема 1. *Пусть оператор L — нётеров, K — обобщенно обратный к L оператор, произведение KF вполне непрерывно, оператор F непрерывен и имеет частную производную $F'_u(\chi_0, u_0)$, непрерывную в нуле $\theta \in X$ (в дальнейшем полагаем $\theta = (0,0)$). Пусть далее $F(0,0) \in R(L)$, оператор $Q^c F'_u(0,0)$ непрерывно обратим и справедливы следующие оценки*:

1) $\| [Q^c F'_u(0,0)]^{-1} \| \leqslant m$;
2) $\|Q^c (F(\chi,0) - F(0,0))\| \leqslant k\|\chi\|$ *для любого* $\chi \in X_0$;
3) $\|Q^c (F'_u(\chi,u) - F'_u(0,0))\| \leqslant c(\|\chi\| + \|u\|)$ *для любой* $(\chi, u) \in X$;
4) $\|Fx\| \leqslant a + b\|x\|$;
5) $b\|K\| < 1$;
6) $\dfrac{\|K\|(a+b\rho)}{1-b\|K\|} \leqslant \dfrac{1}{mc(\sqrt{mk+1}+\sqrt{mk})^2}$, *где* $\rho = \dfrac{\sqrt{mk}}{mc(\sqrt{mk+1}+\sqrt{mk})}$.

Тогда существует решение уравнения $Lx = Fx$ на шаре $\overline{S_R(0)} \subset X$ с радиусом $R = \dfrac{\|K\|(a+b\rho)}{1-b\|K\|}$.

С учетом приведенной теоремы, условия разрешимости краевой задачи (1) примут вид, к которому приводит следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть функция $f(t,x,\nu)$ удовлетворяет условию Каратеодори и вместе со своей частной производной по x удовлетворяют условиям Липшица*:

$$|f(t,x_1,\nu_1)-f(t,x_2,\nu_2)|\leqslant k_1|x_1-x_2|+k_2|\nu_1-\nu_2|,$$
$$|f_2'(t,x_1,\nu_1)-f_2'(t,x_2,\nu_2)|\leqslant c_1|x_1-x_2|+c_2|\nu_1-\nu_2|.$$

Тогда если $f_2'(t,x,\nu)$ непрерывна в точке $x=0$, $T^{1+\frac{1}{p}}|\int\limits_0^T f_2'(s,0,0)ds|^{-1}=m$ и выполнены условия:

$$\int\limits_0^T f(s,0,0)ds=0,\quad |f(t,x,\nu)|\leqslant a_0+b_0|x|+b_1|\nu|,\quad bT^{1/q}<1,$$

$$\frac{T^{1/q}(a_0T^{1/p}+b\rho)}{1-bT^{1/q}}\leqslant\frac{1}{mc(\sqrt{mk+1}+\sqrt{mk})^2},$$

где

$$\frac{1}{q}+\frac{1}{p}=1\quad(p>1),\qquad \rho=\frac{\sqrt{mk}}{mc(\sqrt{mk+1}+\sqrt{mk})},$$

$$b=\max(b_0T^{1/p};b_0T+b_1),\qquad c=\max(c_1T^{1/p};c_1T+c_2),\qquad k=\max(k_1T^{1/p};k_1T+k_2),$$

то существует решение задачи (1) *на шаре* $\overline{S_R(0)}\subset D_p[0;T]$ *с центром в точке* $x=0$ *и радиусом* $R=\dfrac{T^{1/q}(a_0T^{1/p}+b\rho)}{1-bT^{1/q}}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Абдуллаев А. Р., Бурмистрова А. Б.* Элементы теории топологически нетеровых операторов. — Челябинск: Изд-во ЧелГУ, 1994. — 93 с.
2. *Беллман Р., Калаба Р.* Квазилинеаризация и нелинейные краевые задачи, пер. с англ., М., 1968. 184 с.
3. *Борисович Ю. Г., Звягин В. Г., Сапронов Ю. И.* Нелинейные фредгольмовы отображения и теория Лере—Шаудера// Успехи мат. наук. — 1977. — *32*, № 4. — С. 3–54.
4. *Диблик Й.* Существование и единственность решения начальной краевой задачи для дифференциальных уравнений, частично разрешенных относительно производных// Деп. в ВИНИТИ, 1984. — № 908-84.
5. *Дмитриенко В. Т.* Двухточечная краевая задача для дифференциальных уравнений второго порядка, не разрешенных относительно старшей производной// Приближенные методы исследования дифференциальных уравнений и их приложения. — Куйбышев, 1982. — С. 47–58.
6. *Елисеенко М. Н.* О периодических решениях обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка, не разрешенных относительно производных// Дифференциальные уравнения. — 1985. — *21*, № 9. — С. 1618–1621.
7. *Колпаков И. Ю.* О разрешимости квазилинейных операторных уравнений// Вестн. ПГТУ. Математика и прикладная математика. — Пермь, 2002. — С. 21–27.
8. *Просенюк Л. Г.* Существование и асимптотика О-решений дифференциального уравнения, не разрешенного относительно производной// Укр. мат. ж. — 1987. — *39*, № 6. — С. 796–799.
9. *Щеглова А. А.* Метод Ньютона для решения вырожденных систем обыкновенных дифференциальных уравнений// Сиб. мат. ж. — 1998. — *39*, № 6. — С. 1428–1434.

И. Ю. Колпаков

Пермский национальный исследовательский политехнический университет

E-mail: `kolpakov.ilia@mail.ru`

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 132 (2017). С. 54–57

УДК 517.929

УСТОЙЧИВОСТЬ НЕАВТОНОМНЫХ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ С ОГРАНИЧЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

© 2017 г. **А. Ю. КУЛИКОВ**

Аннотация. Рассмотрено неавтономное разностное уравнение с ограниченными параметрами. Получены признаки его устойчивости, выраженные в терминах оценок функции Коши.

Ключевые слова: разностные уравнения, уравнения с запаздываниями, устойчивость, функция Коши.

AMS Subject Classification: 39A30

1. Постановка задачи. Введем обозначения: $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\Delta = \{(n,m) \in \mathbb{N}_0^2 : n \geqslant m\}$, $\mathbb{R}_+ = [0,\infty)$. Рассмотрим разностное уравнение:

$$x(n+1) - x(n) + \sum_{k=0}^{L} a_k(n)x(n-g_k(n)) = f(n), \quad n \in \mathbb{N}_0, \tag{1}$$

где $a_k : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}_+$, $g_k : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$, $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$. Коэффициенты a_k и запаздывания g_k предполагаются ограниченными, т.е. найдутся $a^* > 0$ такое, что $\sum\limits_{k=0}^{L} a_k(n) \leqslant a^*$ при всех $n \in \mathbb{N}_0$, и $\omega_k \in \mathbb{N}_0$ такое, что $g_k(n) \leqslant \omega_k$ при всех $k \in 1,2,\dots L$, $n \in \mathbb{N}_0$. Обозначим $\omega = \max \omega_k$, введем функцию $a : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}_+$, положив $a(n) = \sum\limits_{k=0}^{L} a_k(n)$. Решением уравнения (1) будем называть функцию $x : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$, удовлетворяющую ему при всех $n \in \mathbb{N}_0$. Функцию x будем доопределять при целых неположительных значениях аргумента некоторой начальной функцией ξ.

Функция $K : \Delta \to \mathbb{R}$, которая при каждом фиксированном $m \in \mathbb{N}_0$ является решением задачи

$$\begin{cases} K(n+1,m) - K(n,m) + \sum\limits_{k=0}^{L} a_k(n)K(n-g_k(n),m) = 0, \quad n \geqslant m, \\ K(m,m) = 1, \quad K(n,m) = 0, \quad n < m, \end{cases}$$

называется (см. [1, 6]) функцией Коши уравнения (1). Функция Коши определяется только коэффициентами и запаздываниями уравнения. В то же время через нее задается представление решения уравнения с любой начальной функцией и любой правой частью.

Действительно, введем функцию $v : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$, положив

$$v(n) = f(n) - \sum_{k=0}^{L} a_k(n)\xi^*(n-g_k(n)),$$

где $\xi^*(i) = \xi(i)$ при $i < 0$ и $\xi^*(i) = 0$ при $i \geqslant 0$. Второе слагаемое функции v определяется начальной функцией ξ. Таким образом, начальную функцию удается перенести в правую часть уравнения (1). Тогда начальная задача ставится указанием лишь начального условия $x(0) = \xi(0)$.

Решение уравнения (1) с начальной функцией ξ имеет представление

$$x(n) = K(n,0)\xi(0) + \sum_{i=0}^{n-1} K(n,i+1)v(i).$$

Возможность такого представления решения делает функцию Коши центральным объектом исследования при изучении асимптотических свойств уравнения (1). В работе [3] показано, что классические определения устойчивости эквивалентны соответствующим оценкам или предельным соотношениям функции Коши.

Определение 1. Уравнение (1) называется

- равномерно устойчивым, если найдется $M > 0$ такое, что $\sup\limits_{(n,m)\in\Delta} |K(n,m)| \leqslant M$;
- асимптотически устойчивым, если при каждом m имеем $\lim\limits_{n\to\infty} K(n,m) = 0$;
- экспоненциально устойчивым, если найдутся $M, \gamma > 0$ такие, что при всех $(n,m) \in \Delta$ выполнена оценка
$$|K(n,m)| \leqslant M \exp(-\gamma(n-m)).$$

Зафиксируем набор параметров $a_k^{\min}, a_k^{\max} \in \mathbb{R}_+$, $\omega_k \in \mathbb{N}_0$, $k = 1, 2, \ldots, L$.

Класс уравнений вида (1), состоящий из уравнений со всевозможными коэффициентами, удовлетворяющими условиям $a_k^{\min} \leqslant a_k(n) \leqslant a_k^{\max}$, и всевозможными запаздываниями, удовлетворяющими условиям $g_k(n) \leqslant \omega_k$, будем называть семейством (1), соответствующим данному набору параметров. Будем обозначать это семейство через G_1.

Определение 2. Назовем семейство G_1 (равномерно, асимптотически, экспоненциально) устойчивым, если все уравнения этого семейства устойчивы (в смысле соответствующего пункта определения 1).

Целью исследования является получение признаков устойчивости семейства G_1.

2. Основные результаты. Рассмотрим начальную задачу

$$\begin{cases} z(n+1) - z(n) + \sum\limits_{k=0}^{L} b_k(n) z(n-\omega_k) = 0, \quad n \in \mathbb{N}_0, \\ z(j) = 1, \quad j < 0, \end{cases}$$

с коэффициентами, заданными следующим образом:

$$b_k(n) = \begin{cases} a_k^{\max}, & n - \omega_k \leqslant n^*, \\ a_k^{\min}, & n - \omega_k > n^*, \end{cases}$$

где точка n^* такова, что $z(n) > 0$ при всех $n \leqslant n^*$, а $z(n^*) < 0$. Если $z(n) > 0$ при всех $n \in \mathbb{N}_0$, то полагаем $n^* = \infty$. Эту задачу будем называть *test-задачей* уравнения (1). Понятие test-задачи разностного уравнения было впервые введено в [5].

Основными характеристиками test-задачи являются первая точка минимума ее решения $l : l = \min\{n \in \mathbb{N}_0 : z(n+1) - z(n) \geqslant 0\}$ и значение решения test-задачи в точке первого минимума $z(l)$. Заметим, что $l = n^* + \omega + 1$. Положим $h = -z(l)$. В случае $n^* = \infty$ будем полагать $l = \infty$ и $h = 0$.

Теорема 1. *Для равномерной устойчивости семейства G_1 необходимо и достаточно выполнение условия $h \leqslant 1$.*

Теорема 2. *Следующие утверждения эквивалентны*:

1. $h < 1$.
2. *Существуют такие $M, \gamma > 0$, что при любых $(n,m) \in \Delta_{\mathbb{N}}$ для функции Коши любого уравнения семейства G_1 справедлива оценка*
$$|K(n,m)| \leqslant M \exp\left(-\gamma \sum_{i=m}^{n-1} a(i)\right). \tag{2}$$

Если функция Коши удовлетворяет оценке (2), то уравнение (1), очевидно, равномерно устойчиво. Расходимость ряда $\sum\limits_{i=0}^{\infty} a(i)$ обеспечивает асимптотическую устойчивость уравнения (1). Экспоненциальная устойчивость уравнения (1) гарантируется оценкой (2) в совокупности с условием

$a(n) \geqslant a_* > 0$. Таким образом, оценка (2) при наличии дополнительной информации о параметрах уравнения позволяет уточнить асимптотическое поведение решения.

Полученные признаки устойчивости обобщают результат статьи [4] на уравнение с переменными коэфиициентами.

Рассмотрим уравнение с одним запаздыванием.

$$x(n+1) - x(n) + a(n)x(n-g(n)) = f(n), \quad n \in \mathbb{N}_0, \tag{3}$$

где найдутся $a^* > 0$ такое, что $a(n) \leqslant a^*$ при всех $n \in \mathbb{N}_0$, и $\omega \in \mathbb{N}_0$ такое, что $g(n) \leqslant \omega$ при всех $n \in \mathbb{N}_0$.

Обозначим

$$\psi(\omega) = \begin{cases} \dfrac{12(\omega+1)}{5\omega+3+\sqrt{9\omega^2+6\omega+9}} & \text{при} \quad \omega \equiv 0(\mathrm{mod} 3), \\ \dfrac{3}{2}\left(1+\frac{1}{2\omega+1}\right) & \text{при} \quad \omega \equiv 1(\mathrm{mod} 3), \\ \dfrac{12(\omega+1)}{5\omega+2+\sqrt{9\omega^2+12\omega+12}} & \text{при} \quad \omega \equiv 2(\mathrm{mod} 3). \end{cases}$$

Следствие 1. *Пусть* $0 \leqslant (\omega+1)a^* \leqslant \psi(\omega)$. *Тогда функция Коши уравнения* (3) *ограничена.*

Следствие 2. *Пусть* $0 < (\omega+1)a^* < \psi(\omega)$. *Тогда для функции Коши уравнения* (3) *справедлива оценка* (2).

3. Сравнение с известными результатами. Для уравнения вида (3) известны (см. [2, 7]) признаки устойчивости, выраженные в терминах оценок на сумму коэффициентов по длине запаздываний, которые являются аналогами теорем о 3/2 для функционально-дифференциальных уравнений.

Предложение 1. *Пусть выполнено неравенство*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}_0} \sum_{i=n-g(n)}^{n} a(i) \leqslant \frac{3}{2} + \frac{1}{2\omega+2}.$$

Тогда функция Коши уравнения (3) *ограничена.*

Предложение 2. *Пусть выполнено неравенство*

$$\varlimsup_{n\to\infty} \sum_{i=n-g(n)}^{n} a(i) < \frac{3}{2} + \frac{1}{2\omega+2}.$$

Тогда существуют такие $M, \gamma > 0$, *что при любых* $(n, m) \in \Delta$ *для функции Коши уравнения* (3) *справедлива оценка* (2).

Покажем, что полученные в настоящей работе и ранее найденные признаки устойчивости имеют разные области применимости.

Пример 1. Пусть в уравнении (3) параметры заданы следующим образом:

$$a(n) = 3/2 \quad \text{при} \quad n = 0, 2, 4 \ldots; \quad a(n) = 0 \quad \text{при} \quad n = 1, 3, 5 \ldots; \quad g(n) = \omega = 1.$$

Имеем

$$\varlimsup_{n\to\infty} \sum_{i=n-g(n)}^{n} a(i) = \frac{3}{2} < \frac{3}{2} + \frac{1}{2\omega+2}$$

и, в силу предложения 2, для функции Коши уравнения (3) выполнена оценка (2)

В то же время $(\omega+1)a^* = 3 > 2 = \psi(\omega)$ и следствие 2 неприменимо.

Пример 2. Пусть в уравнении (3) параметры заданы следующим образом: $a(n) = a^* = 0.9$, $g(n) = \omega = 1$. Имеем

$$(\omega + 1)a^* = 1.8 < 2 = \psi(\omega)$$

и, в силу следствия 2, для функции Коши уравнения (3) выполнена оценка (2).

Тогда

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sum_{i=n-g(n)}^{n} a(i) = 1.8 > 1.75 = \frac{3}{2} + \frac{1}{2\omega + 2}$$

и предложение 2 неприменимо.

Нетрудно построить подобные примеры и для признаков равномерной устойчивости.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Андрианов Д. Л.* Краевые задачи и задачи управления для линейных разностных систем с последействием//Изв. вузов. Мат. — № 5. — 1993. — С. 3–10.
2. *Куликов А. Ю.* Устойчивость линейного неавтономного разностного уравнения с ограниченными запаздываниями// Изв. вузов. Мат. — 2010. — № 11. — С. 22–30.
3. *Куликов А. Ю., Малыгина В. В.* Устойчивость линейного разностного уравнения и оценки его фундаментального решения// Изв. вузов. Мат. — № 12. — 2011. — С. 30–41.
4. *Куликов А. Ю., Малыгина В. В.* Об устойчивости полуавтономных разностных уравнений// Изв. вузов. Мат. — 2011. — № 5. — С. 25—34 .
5. *Малыгина В. В., Чудинов К. М.* Асимптотика решений разностных уравнений с запаздыванями// Изв. вузов. Мат. — № 7. — 2016. — С. 66–82.
6. *Elaydi S. N.* An introduction to difference equations// New York: Springer-Verlag Inc. — 1999. — C. 66–82.
7. *Yu J. S.* Asymptotic stability for a linear difference equation with variable delay// Comp. Math. Appl. — 1998. — *36*, № 10–12. — C. 203–210.

А. Ю. Куликов

Пермский государственный национальный исследовательский университет (ПГНИУ)

E-mail: `stphn@mail.ru`

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 132 (2017). С. 58–61

УДК 517.911, 517.938

РАСШИРЕНИЕ ПОНЯТИЯ ИНВАРИАНТНОСТИ И СТАТИСТИЧЕСКИ СЛАБО ИНВАРИАНТНЫЕ МНОЖЕСТВА УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ

© 2017 г. **Я. Ю. ЛАРИНА, Л. И. РОДИНА**

Посвящается профессору Е. Л. Тонкову

Аннотация. Продолжено исследование, начатое в работах Е. Л. Тонкова, в которых рассматриваются статистически инвариантные и статистически слабо инвариантные множества относительно управляемых систем и дифференциальных включений. Также изучаются свойства статистических характеристик $\mathrm{freq}_*(\varphi)$, $\mathrm{freq}^*(\varphi)$ — нижней и верхней относительных частот попадания решения $\varphi(t)$ дифференциального включения в заданное множество. Получены оценки и условия равенства данных характеристик для функций, предел разности которых на бесконечности равен нулю. В заключение приведены условия статистически слабой инвариантности заданного множества относительно управляемой системы.

Ключевые слова: управляемые системы, динамические системы, множество достижимости, статистические характеристики, статистически слабо инвариантные множества.

AMS Subject Classification: 34A60, 34H05

1. Расширение понятия инвариантности множеств. Работа посвящается одной из задач, которыми Евгений Леонидович Тонков занимался в последние годы, — задаче исследования инвариантности множеств относительно управляемых систем и дифференциальных включений. Эта задача является одной из важнейших в математической теории управления и теории дифференциальных игр и находится в тесной связи с весьма важными задачами о сближении управляемой системы с компактным целевым множеством, изучаемыми Н. Н. Красовским, А. И. Субботиным, В. Н. Ушаковым и многими другими авторами.

Исследованию инвариантных множеств управляемых систем и отвечающих им дифференциальных включений посвящено большое количество работ (см. монографию Ж.-П. Обена [10] и библиографию к ней). Условия инвариантности в этой монографии выражены в терминах непустоты пересечения конуса Булигана к заданному множеству с множеством, задающим правую часть дифференциального включения. В работах Е. Л. Тонкова и Е. А. Панасенко [2, 3] исследованы условия положительной инвариантности, устойчивой инвариантности или асимптотически устойчивой инвариантности заданного множества относительно нестационарного дифференциального включения. Основные утверждения здесь получены в терминах функций Ляпунова, производной Кларка и динамической системы сдвигов, сопутствующей правой части дифференциального включения.

При изучении инвариантных множеств возникает вопрос о том, в какой степени заданное множество не является инвариантным относительно дифференциального включения, порожденного управляемой системой. Один из возможных подходов к решению этого вопроса состоит в применении инфинитезимального представления свойства инвариантности и вычисления дефекта инвариантности, который оценивает степень несогласованности множества и динамики системы с точки зрения понятия инвариантности (см. работы В. Н. Ушакова и его учеников [8, 9]). В работах Е. Л. Тонкова [6, 7] также исследуются множества, не являющиеся инвариантными

Публикация подготовлена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 16-01-00346а) и Министерства образования и науки РФ в рамках базовой части (проект 2003).

в«классическом»смысле; для таких множеств вводится естественное расширение понятия инвариантности, которое названо статистической инвариантностью. Пусть $D(t,X)$ — множество достижимости управляемой системы

$$\dot{x} = f(t,x,u), \quad (t,x,u) \in [0,+\infty) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \tag{1}$$

в момент времени t из начального множества X, т.е. множество, состоящее из всех значений в момент t решений $\varphi(t,x)$ системы (1), когда начальное условие $\varphi(0,x) = x$ пробегает все множество X. Множество $\mathfrak{M} = \{(t,x) \in [0,+\infty) \times \mathbb{R}^n : x \in M(t)\}$ называется *статистически инвариантным* относительно системы (1), если относительная частота пребывания множества достижимости $D(t,X)$ в множестве $\mathfrak{M}$ равна единице; это означает, что выполнено равенство

$$\lim_{\vartheta\to\infty} \frac{\operatorname{mes}\{t \in [0,\vartheta] : D(t,X) \in M(t)\}}{\vartheta} = 1.$$

В настоящей статье исследуются условия *статистически слабой инвариантности* множества $\mathfrak{M}$ относительно управляемой системы (1), которые дополняют результаты работ [4–7].

2. Об оценках относительных частот и статистически слабо инвариантных множествах управляемых систем. Рассмотрим дифференциальное включение, отвечающее управляемой системе (1):

$$\dot{x} \in F(t,x), \quad F(t,x) = \operatorname{co} H(t,x), \tag{2}$$

где $H(t,x)$ является множеством всех предельных значений функции $f\big(t_i, x_i, U(t_i,x_i)\big)$ при $(t_i,x_i) \to (t,x)$, $\operatorname{co} H(t,x)$ — замыканием выпуклой оболочки множества $H(t,x)$. Предполагаем, что правая часть включения (2) принимает значения в пространстве $\operatorname{conv}(\mathbb{R}^n)$, состоящем из непустых компактных выпуклых подмножеств пространства $\mathbb{R}^n$ с метрикой Хаусдорфа; функция $f(t,x,u)$ непрерывна по совокупности переменных, а функция $U(t,x)$ полунепрерывна сверху. Под решением включения (2) на интервале $J \subset \mathbb{R}$ будем понимать всякую абсолютно непрерывную функцию $\varphi : J \to \mathbb{R}^n$, которая при почти всех $t \in J$ удовлетворяет данному включению.

Если решение $\varphi(t)$ включения (2) определено при всех $t \geqslant 0$, то *верхнюю относительную частоту* попадания его графика в множество $\mathfrak{M}$ определим равенством

$$\operatorname{freq}^*(\varphi) \doteq \varlimsup_{\vartheta\to\infty} \frac{\operatorname{mes}\{t \in [0,\vartheta] : \varphi(t) \in M(t)\}}{\vartheta},$$

где mes — мера Лебега на числовой прямой. *Нижнюю* относительную частоту $\operatorname{freq}_*(\varphi)$ определим тем же равенством, но с заменой в нем верхнего предела нижним, а если эти пределы совпадают $\operatorname{freq}^*(\varphi) = \operatorname{freq}_*(\varphi)$, то общий предел обозначим

$$\operatorname{freq}(\varphi) \doteq \lim_{\vartheta\to\infty} \frac{\operatorname{mes}\{t \in [0,\vartheta] : \varphi(t) \in M(t)\}}{\vartheta}$$

и назовем *относительной частотой попадания решения* φ в множество $\mathfrak{M}$.

Определение 1 (см. [6, 7])**.** Множество $\mathfrak{M} = \{(t,x) \in [0,+\infty) \times \mathbb{R}^n : x \in M(t)\}$ называется *статистически слабо инвариантным* относительно управляемой системы (1), если для любой точки $x \in M(0)$ найдется хотя бы одно решение $\varphi(t)$ включения (2), определенное при всех $t \geqslant 0$, удовлетворяющее начальному условию $\varphi(0) = x$ и равенству $\operatorname{freq}^*(\varphi) = 1$.

Обозначим через ∂M границу множества M, $\varrho(x,M) \doteq \inf_{y\in M} |x-y|$ — расстояние от точки x до множества M. Рассмотрим функцию

$$R_\varphi(t) = \begin{cases} \varrho\big(\varphi(t), \partial M(t)\big), & \text{если} \quad \varphi(t) \notin M(t), \\ -\varrho\big(\varphi(t), \partial M(t)\big), & \text{если} \quad \varphi(t) \in M(t). \end{cases}$$

Пусть $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ — сигма-алгебра всех борелевских подмножеств $\mathbb{R}$. Определим для каждого множества $B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$ функции

$$\mu^*(B) \doteq \varlimsup_{\vartheta\to\infty} \frac{\operatorname{mes}\{t \in [0,\vartheta] : R_\varphi(t) \in B\}}{\vartheta}, \qquad \mu_*(B) \doteq \varliminf_{\vartheta\to\infty} \frac{\operatorname{mes}\{t \in [0,\vartheta] : R_\varphi(t) \in B\}}{\vartheta}.$$

Теорема 1. *Предположим, что существуют решения* $\varphi(t)$ *и* $\psi(t)$ *включения* (2) *такие, что* $\lim\limits_{t\to\infty}|\varphi(t)-\psi(t)|=0$ *и выполнено равенство*

$$\lim_{\varepsilon\to 0+0}\mu^*\big([-\varepsilon,\varepsilon]\big)\doteq\lim_{\varepsilon\to 0+0}\varlimsup_{\vartheta\to\infty}\frac{\operatorname{mes}\{t\in[0,\vartheta]:|R_{\varphi}(t)|\leqslant\varepsilon\}}{\vartheta}=0. \tag{3}$$

Тогда $\operatorname{freq}_*(\varphi)=\operatorname{freq}_*(\psi)\leqslant\operatorname{freq}^*(\psi)=\operatorname{freq}^*(\varphi)$. *Следовательно, если один из пределов* $\operatorname{freq}(\varphi)$ *или* $\operatorname{freq}(\psi)$ *существует, то другой предел также существует и* $\operatorname{freq}(\varphi)=\operatorname{freq}(\psi)$.

Доказательство. Из условия (3) следует, что $\lim\limits_{\varepsilon\to 0+0}\mu^*\big((0,\varepsilon]\big)=\lim\limits_{\varepsilon\to 0+0}\mu^*\big((-\varepsilon,0]\big)=0$, поэтому

$$\lim_{\varepsilon\to 0+0}\mu^*\big((-\infty,\varepsilon]\big)=\mu^*\big((-\infty,0]\big)+\lim_{\varepsilon\to 0+0}\mu^*\big((0,\varepsilon]\big)=\mu^*\big((-\infty,0]\big),$$
$$\lim_{\varepsilon\to 0+0}\mu^*\big((-\infty,-\varepsilon]\big)=\mu^*\big((-\infty,0]\big)-\lim_{\varepsilon\to 0+0}\mu^*\big((-\varepsilon,0]\big)=\mu^*\big((-\infty,0]\big).$$

Для любого $\varepsilon>0$ определим замкнутые множества $M^{\varepsilon}(t)$ и $M^{-\varepsilon}(t)$ — *внешнее и внутреннее параллельные множества* выпуклого множества $M(t)$ (см., например, [1, с. 83]). Из неравенства $|\varphi(t)-\psi(t)|\leqslant\varepsilon$, которое верно для всех $t\geqslant t_0=t_0(\varepsilon)$, следуют включения

$$\big\{t\in[t_0,\vartheta]:\varphi(t)\in M^{-\varepsilon}(t)\big\}\subseteq\big\{t\in[t_0,\vartheta]:\psi(t)\in M(t)\big\}\subseteq\big\{t\in[t_0,\vartheta]:\varphi(t)\in M^{\varepsilon}(t)\big\},$$

из которых получаем неравенства

$$\operatorname{mes}\{t\in[t_0,\vartheta]:\varphi(t)\in M^{-\varepsilon}(t)\}\leqslant\operatorname{mes}\{t\in[t_0,\vartheta]:\psi(t)\in M(t)\}\leqslant\operatorname{mes}\{t\in[t_0,\vartheta]:\varphi(t)\in M^{\varepsilon}(t)\}.$$

Следовательно,

$$\operatorname{freq}^*(\psi)\doteq\varlimsup_{\vartheta\to\infty}\frac{\operatorname{mes}\{t\in[0,\vartheta]:\psi(t)\in M(t)\}}{\vartheta}=\varlimsup_{\vartheta\to\infty}\frac{\operatorname{mes}\{t\in[t_0,\vartheta]:\psi(t)\in M(t)\}}{\vartheta}\leqslant$$
$$\leqslant\varlimsup_{\vartheta\to\infty}\frac{\operatorname{mes}\{t\in[t_0,\vartheta]:\varphi(t)\in M^{\varepsilon}(t)\}}{\vartheta}=\varlimsup_{\vartheta\to\infty}\frac{\operatorname{mes}\{t\in[0,\vartheta]:R_{\varphi}(t)\leqslant\varepsilon\}}{\vartheta}=\mu^*\big((-\infty,\varepsilon]\big).$$

Переходя к пределу при $\varepsilon\to 0+0$ в неравенстве $\operatorname{freq}^*(\psi)\leqslant\mu^*\big((-\infty,\varepsilon]\big)$, получаем

$$\operatorname{freq}^*(\psi)\leqslant\lim_{\varepsilon\to 0+0}\mu^*\big((-\infty,\varepsilon]\big)=\mu^*\big((-\infty,0]\big)=\operatorname{freq}^*(\varphi). \tag{4}$$

Далее,

$$\mu^*\big((-\infty,-\varepsilon]\big)\doteq\varlimsup_{\vartheta\to\infty}\frac{\operatorname{mes}\{t\in[0,\vartheta]:R_{\varphi}(t)\leqslant-\varepsilon\}}{\vartheta}=$$
$$=\varlimsup_{\vartheta\to\infty}\frac{\operatorname{mes}\{t\in[t_0,\vartheta]:\varphi(t)\in M^{-\varepsilon}(t)\}}{\vartheta}\leqslant\varlimsup_{\vartheta\to\infty}\frac{\operatorname{mes}\{t\in[t_0,\vartheta]:\psi(t)\in M(t)\}}{\vartheta}=\operatorname{freq}^*(\psi),$$

поэтому

$$\operatorname{freq}^*(\varphi)=\mu^*\big((-\infty,0]\big)=\lim_{\varepsilon\to 0+0}\mu^*\big((-\infty,-\varepsilon]\big)\leqslant\operatorname{freq}^*(\psi). \tag{5}$$

Таким образом, из (4) и (5) следует, что $\operatorname{freq}^*(\psi)=\operatorname{freq}^*(\varphi)$.

Отметим, что из (3) следует равенство

$$\lim_{\varepsilon\to 0+0}\mu_*\big([-\varepsilon,\varepsilon]\big)\doteq\lim_{\varepsilon\to 0+0}\varliminf_{\vartheta\to\infty}\frac{\operatorname{mes}\{t\in[0,\vartheta]:|R_{\varphi}(t)|\leqslant\varepsilon\}}{\vartheta}=0.$$

Поэтому, рассуждая аналогично (с заменой верхнего предела на нижний) для функции множеств μ_*, получим, что $\operatorname{freq}_*(\psi)=\operatorname{freq}_*(\varphi)$. □

Теорема 2. *Пусть для любой точки* $x\in M(0)$ *существует решение* $\psi(t)$ *включения* (2), *удовлетворяющее начальному условию* $\psi(0)=x$ *и равенству* $\lim\limits_{t\to\infty}|\varphi(t)-\psi(t)|=0$, *где* $\varphi(t)$ — *решение данного включения, для которого*

$$\lim_{\varepsilon\to 0+0}\mu^*\big((-\infty,-\varepsilon)\big)=1. \tag{6}$$

Тогда множество $\mathfrak{M}$ *статистически слабо инвариантно относительно системы* (1).

Доказательство. Из равенства (6) следует, что
$$\lim_{\varepsilon\to 0+0}\mu^*\big([-\varepsilon,\varepsilon]\big)\leqslant\lim_{\varepsilon\to 0+0}\mu^*\big([-\varepsilon,+\infty)\big)=0.$$
Далее, из (6) также получаем
$$\mathrm{freq}^*(\varphi)=\mu^*\big((-\infty,0]\big)=\lim_{\varepsilon\to 0+0}\mu^*\big((-\infty,-\varepsilon)\big)+\lim_{\varepsilon\to 0+0}\mu^*\big([-\varepsilon,0]\big)=1.$$
Таким образом, в силу теоремы 1 выполнено равенство $\mathrm{freq}^*(\psi)=\mathrm{freq}^*(\varphi)=1$, которое и означает, что множество $\mathfrak{M}$ статистически слабо инвариантно. □

Отметим, что в теоремах 1 и 2 для решений $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ включения (2) начальные точки $\varphi(0)$ и $\psi(0)$ могут не совпадать.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Лейхтвейс К.* Выпуклые множества. — М.: Наука, 1985.
2. *Панасенко Е. А., Тонков Е. Л.* Инвариантные и устойчиво инвариантные множества дифференциальных включений // Труды Мат. ин-та им. В. А. Стеклова. — 2008. — *262*. — С. 202–221.
3. *Панасенко Е. А., Тонков Е. Л.* Распространение теорем Е. А. Барбашина и Н. Н. Красовского об устойчивости на управляемые динамические системы// Труды Института математики и механики УрО РАН. — 2009. — *15*, № 3. — С. 185–201.
4. *Панасенко Е. А., Родина Л. И., Тонков Е. Л.* Асимптотически устойчивые статистически слабо инвариантные множества управляемых систем// Труды Института математики и механики УрО РАН. — 2010. — *16*, № 5. — С. 135–142.
5. *Родина Л. И.* Оценка статистических характеристик множества достижимости управляемых систем// Изв. вузов. Мат. — 2013. — № 11. — С. 20–32.
6. *Родина Л. И., Тонков Е. Л.* Статистические характеристики множества достижимости управляемой системы, неблуждаемость и минимальный центр притяжения// Нелинейная динамика. — 2009. — *5*, № 2. — С. 265–288.
7. *Родина Л. И., Тонков Е. Л.* Статистически слабо инвариантные множества управляемых систем// Вестн. Удмурт. ун-та. Мат. Мех. Компьют. науки. — 2011. — Вып. 1. — С. 67–86.
8. *Ушаков В. Н., Зимовец А. А.* Дефект инвариантности множеств относительно дифференциального включения// Вестн. Удмурт. ун-та. Мат. Мех. Компьют. науки. — 2011. — Вып. 2. — С. 98–111.
9. *Ушаков В. Н., Котельникова А. Н., Малёв А. Г.* Об оценке дефекта слабой инвариантности множеств с кусочно-гладкой границей// Труды Ин-та мат. и мех. УрО РАН. — 2013. — *19*, № 4. — С. 250–266.
10. *Aubin J.-P.* Viability Theory. — Boston., Basel, Berlin: Birkhauser, 1991.

Я. Ю. Ларина
Удмуртский государственный университет (УдГУ)
E-mail: yana_larina89@mail.ru

Л. И. Родина
Удмуртский государственный университет (УдГУ)
E-mail: LRodina67@mail.ru

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 132 (2017). С. 62–64

УДК 517.927.4, 517.929.7

ОБ ОДНОМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОМ УРАВНЕНИИ ПЕРВОГО ПОРЯДКА С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

© 2017 г. **А. С. ЛАРИОНОВ**

Посвящается памяти доктора физико-математических наук профессора Н. В. Азбелева и памяти кандидата физико-математических наук А. В. Чистякова

Аннотация. Рассматривается квазилинейное дифференциальное уравнение первого порядка с запаздывающим аргументом нейтрального типа. Приводятся достаточные условия существования и единственности решения задачи Коши для этого уравнения. В основе доказательства утверждений о разрешимости нелинейных задач, построения оценок решений, конструирования приближенных методов лежат теоремы о дифференциальных неравенствах типа теоремы Чаплыгина.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение, запаздывание, монотонный оператор, задача Коши, разрешимость.

AMS Subject Classification: 34K10, 34K40

1. В настоящее время все более актуальными становятся такие прикладные задачи, математическими моделями которых являются нелинейные дифференциальные уравнения с запаздыванием. Основным вопросом теории нелинейных задач для дифференциальных уравнений является вопрос о существовании решения. Эффективным методом доказательства существовании решения краевой или начальной задачи является, как отмечено в [7], монотонный итеративный метод. В основе этого метода лежит редукция исходной задачи к операторному уравнению $x = Ax$ с монотонным (изотонным $x_1 \leqslant x_2 \Rightarrow Ax_1 \leqslant Ax_2$ или антитонным $x_1 \leqslant x_2 \Rightarrow Ax_1 \geqslant Ax_2$) оператором A, действующим в некотором частично упорядоченном пространстве. Утверждения о разрешимости исходных задач оказываются справедливыми в силу соответствующих теорем для полученного уравнения. В частности, для уравненияи $x = Ax$ с изотонным оператором A справедлива теорема Тарского—Биркгофа—Канторовича [3, 6] о разрешимости этого уравнения и о существовании упорядоченной пары решений.

Схемы, по которым проводится редукция нелинейной задачи к уравнению $x = Ax$, впервые систематически использовались в работах Н. В. Азбелева; некоторые из этих схем приведены в монографиях [1, 2, 9].

Важную роль при таком подходе к исследованию нелинейных задач играют условия сохранения знака функции Коши соответствующего вспомогательного линейного дифференциального уравнения (в случае краевых задач — условия знакопостоянства функции Грина соответствующей линйной краевой задачи). Достаточные условия знакопостоянства функции Коши функционально-дифференциального уравнения первого (и второго) порядка приведены в работах [4, 5].

2. Рассмотрим задачу Коши

$$\begin{gathered}(\mathcal{L}x)(t) \equiv \dot{x}(t) - q(t)\dot{x}[g(t)] + p(t)x[h(t)] = f(t, x[h(t)]), \quad t \in [a, b],\\ x(\xi) = \dot{x}(\xi) = 0, \quad \text{если} \quad \xi \notin [a, b].\end{gathered} \tag{1}$$

$$x(a) = \alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \tag{2}$$

в следующих предположениях: функция $q : [a, b] \to R$ измерима и ограничена в существенном на $[a, b]$, $q \geqslant 0$ ($q = 0$, если $g(t) \notin [a, b]$); функция $p : [a, b] \to \mathbb{R}$ суммируема; функции $g, h : [a, b] \to \mathbb{R}$

измеримы, причем $g(t) \leqslant t$, $h(t) \leqslant t$ почти всюду на $[a,b]$; функция $f:[a,b]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ удовлетворяет условиям Каратеодори. Для простоты будем в дальнейшем считать, что функция $f(t,u)$ обладает свойством монотонности по второму аргументу.

Решением уравнения (1) будем называть абсолютно непрерывную функцию, удовлетворяющую этому уравнению почти всюду на $[a,b]$.

Будем предполагать, что функция g удовлетворяет условию: для любого множества $e\subset[a,b]$ нулевой меры выполнено

$$\operatorname{mes} g^{-1}(e)=0, \quad \text{где} \quad g^{-1}(e)=\{t\in[a,b]: g(t)\in[a,b]\}, \tag{3}$$

и, кроме того, имеет место

$$\mu=\sup_{e\subset[a,b]}\frac{\operatorname{mes} g^{-1}(e)}{\operatorname{mes} e}<\infty, \tag{4}$$

где верхняя грань берется по всем таким подмножествам e отрезка $[a,b]$, что $\operatorname{mes} e>0$.

Условия (3), (4) обеспечивают (см. [1, 2]) непрерывное действие в пространстве суммируемых функций оператора внутренней суперпозиции $(Sy)(t)=q(t)y[r(t)]$, $y(\xi)=0$, если $\xi\notin[a,b]$.

Ниже считаем, что спектральный радиус оператора S меньше единицы.

Обозначим через $C(t,s)$ функцию Коши уравнения $(\mathcal{L}x)(t)=\eta(t)$, где η — суммируемая функция. Пусть $\Delta_b=\{(t,s): a\leqslant s\leqslant t\leqslant b\}$. Введем обозначение

$$\sigma_m(t)=\begin{cases}1, & \text{если } m(t)\geqslant a,\\ 0, & \text{если } m(t)<a,\end{cases}$$

Теорема 1. *Пусть существуют абсолютно непрерывные функции v, z такие, что $v\leqslant z$, и выполняются дифференциальные неравенства*

$$(\mathcal{L}v)(t)\leqslant f(t,v[h(t)]), \quad (\mathcal{L}z)(t)\geqslant f(t,z[h(t)]), \quad v(a)\leqslant\alpha\leqslant z(a).$$

Пусть функция Коши C(t, s) уравнения $(\mathcal{L}x)(t)=\eta(t)$ неотрицательна в области Δ_b, функция $f(t,u)$ не убывает по u. Тогда задача (1), (2) *имеет решение x, удовлетворяющее неравенствам $v\leqslant x\leqslant z$.*

Если, кроме того, существует такая суммируемая функция r, что функция Коши уравнения

$$(\mathcal{L}x)(t)+r(t)x[h(t)]=\eta_1(t)$$

неотрицательна в области Δ_b, и функция $f_1(t,u)=f(t,u)+r(t)u$ не возрастает по второму аргументу, то это решение x единственно.

Эффективные признаки неотрицательности функции Коши $C(t,s)$ в области Δ_b приведены в [4] (см. также [5]). Используя эти признаки, можно получать утверждения о разрешимости квазилинейной задачи (1), (2).

Будем говорить, что функция $\eta(t)$ удовлетворяет δ-условию, если найдется такое число $\delta>0$, что $t-\eta(t)\leqslant\delta$.

Имеет место следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть существуют абсолютно непрерывные функции v, z такие, что $v\leqslant z$, и выполняются дифференциальные неравенства*

$$(\mathcal{L}v)(t)\leqslant f(t,v[h(t)]), \quad (\mathcal{L}z)(t)\geqslant f(t,z[h(t)]), \quad v(a)\leqslant\alpha\leqslant z(a).$$

Пусть, далее, функция $f(t,u)$ не убывает по u, а функции $g(t)$, $h(t)$ удовлетворяют δ-условию и при почти всех $t\in[a,b]$ имеет место неравенство

$$\frac{1}{\delta}q(t)\sigma_{g(t)}+p(t)x_h(t)\leqslant\frac{1}{\delta e}. \tag{5}$$

Тогда задача (1), (2) *имеет решение x, удовлетворяющее неравенствам $v\leqslant x\leqslant z$.*

Если, кроме того, существует такая суммируемая функция r, что функция $f_1(t,u)=f(t,u)+r(t)u$ не возрастает по второму аргументу, то это решение x единственно.

Неравенство (5), гарантирующее неотрицательность функции Коши уравнения $(\mathcal{L}x)(t) = \eta(t)$, было получено в [4].

Пусть теперь $g(t) = h(t) = \dfrac{t}{k}$, $k > 1$. Справедлива следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть существуют абсолютно непрерывные функции v, z такие, что $v \leqslant z$, и выполняются дифференциальные неравенства*

$$(\mathcal{L}v)(t) \leqslant f(t, v[h(t)]), \quad (\mathcal{L}z)(t) \geqslant f(t, z[h(t)]), \quad v(a) \leqslant \alpha \leqslant z(a).$$

Пусть, далее, функция $f(t,u)$ не убывает по u, и при почти всех $t \in [a,b]$ имеет место неравенство

$$\frac{1}{k \ln k} q(t)\sigma_{g(t)} + tp(t)x_h(t) \leqslant \frac{1}{e \ln k}. \tag{6}$$

Тогда задача (1), (2) *имеет решение x, удовлетворяющее неравенствам $v \leqslant x \leqslant z$.*

Если, кроме того, существует такая суммируемая функция r, что функция $f_1(t,u) = f(t,u) + r(t)u$ не возрастает по второму аргументу, то это решение x единственно.

Неравенство (6), гарантирующее неотрицательность функции Коши уравнения $(\mathcal{L}x)(t) = \eta(t)$, также было получено в [4].

Случай редукции задачи (1), (2) к уравнению с антитонным оператором иллюстрирует следующая теорема.

Теорема 4. *Пусть существуют абсолютно непрерывные функции v, z такие, что $v \leqslant z$, и выполняются дифференциальные неравенства*

$$(\mathcal{L}v)(t) \leqslant f(t, z[h(t)]), \quad (\mathcal{L}z)(t) \geqslant f(t, v[h(t)]), \quad v(a) \leqslant \alpha \leqslant z(a).$$

Пусть функция $f(t,u)$ не возрастает по u, а функция Коши $C(t,s)$ уравнения $(\mathcal{L}x)(t) = \eta(t)$ неотрицательна в области Δ_b. Тогда задача (1), (2) *имеет решение x, удовлетворяющее неравенствам $v \leqslant x \leqslant z$.*

Отметим, что в случае $q = 0$, $h(t) = t - \tau$, $\tau > 0$ получаем дифференциально-разностное уравнение, рассматриваемое в [8] в связи с исследованием циклов в судостроительной промышленности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Азбелев Н. В., Максимов В. П., Рахматуллина Л. Ф.* Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1991. — 280 с.
2. *Азбелев Н. В., Максимов В. П., Рахматуллина Л. Ф.* Элементы современной теории функционально-дифференциальных уравнений. Методы и приложения. — М.: Институт компьютерных исследований, 2002. — 384 с.
3. *Азбелев Н. В., Рахматуллина Л. Ф.* К вопросу о функционально-дифференциальных неравенствах и монотонных операторах. — Пермь: Изд-во Перм. политехн. ин-та, 1986. — С. 3–9.
4. *Березанский Л. М., Ларионов А. С.* Положительность матрицы Коши линейного функционально-дифференциального уравнения// Дифференц. уравнения. — 1988. — *24*, № 11. — С. 1843–1854.
5. *Гусаренко С. А., Домошницкий А. И.* Об асимптотических свойствах линейных функционально-дифференциальных уравнений первого порядка// Дифференц. уравнения. — 1989. — *15*, № 12. — С. 2090–2103.
6. *Канторович Л. В., Вулих Б. З., Пинскер А. Г.* Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах. — М.-Л.: Гостехиздат, 1950. — 546 с.
7. *Митропольский Ю. А., Лила С., Мартынюк А. А.* О некоторых направлениях исследований В. Лакшмикантама по теории дифференциальных уравнений и их приложениям// Дифференц. уравнения. — 1986. — *22*, № 4. — С. 555–572.
8. *Пинни Э.* Обыкновенные дифференциально-разностные уравнения. — М.: Изд-во ИЛ, 1961. — 248 с.
9. *Хатсон В., Пим Дж.* Приложения функционального анализа и теории операторов. — М.: Мир, 1983. — 431 с.

А. С. Ларионов
Братский государственный университет
E-mail: `larios84@yandex.ru`

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 132 (2017). С. 65–68

УДК 517.929, 330.46

ДОКАЗАТЕЛЬНЫЙ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ В ИССЛЕДОВАНИИ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ: ТЕОРИЯ И ПРИЛОЖЕНИЯ

© 2017 г. **В. П. МАКСИМОВ**

Посвящается 95-летию со дня рождения профессора Николая Викторовича Азбелева

Аннотация. Обзор идей и результатов, лежащих в основе современной компьютерной (computer-assisted) технологии исследования краевых задач, задач управления и стабилизации, вариационных задач. Представлены результаты исследования некоторых прикладных задач, в том числе задач, возникающих в математической экономике.

Ключевые слова: функционально-дифференциальные уравнения, краевые задачи, задачи управления, задачи стабилизации, вариационные задачи, модели и задачи экономической динамики.

AMS Subject Classification: 34K10, 34K25, 34K35

1. Введение. Результаты общей теории функционально-дифференциальных уравнений (ФДУ) [1, 2] о структуре множества решений линейных систем с фредгольмовой главной частью и представлении решений таких систем дают основу для разработки и развития конструктивных методов исследования различных задач, представляющих не только теоретический, но и прикладной интерес. К таким задачам относятся краевые и вариационные задачи, задачи управления, задачи устойчивости и стабилизации. При этом теоретические результаты позволяют в рамках единого подхода использовать возможность широкого выбора пространств для траекторных и управляющих переменных. Результаты о разрешимости для упомянутых классов задач в рамках конструктивного подхода формулируются в виде теорем, выполнение условий которых может быть проверено с применением компьютера и специальных вычислительных технологий, разработанных в рамках теории доказательного вычислительного эксперимента (ДВЭ). Ниже предлагается обзор результатов участников Пермского семинара по теории ФДУ, развивающих теорию ДВЭ и расширяющих возможности ее приложений к актуальным прикладным задачам. Представлены примеры таких задач для экономико-математических динамических моделей, конструктивное исследование которых базируется на теории ДВЭ.

2. Доказательный вычислительный эксперимент. Используемая ниже схема ДВЭ [1, 12] основана на сведении исходной задачи к системе линейных алгебраических уравнений или к вспомогательному линейному операторному уравнению второго рода. В первом случае коэффициенты линейной системы могут быть вычислены лишь приближенно, поэтому исследование системы на однозначную разрешимость требует специального подхода и базируется на хорошо известной теореме об обратном операторе, в силу которой из обратимости линейного ограниченного оператора A_0, действующего в банаховом пространстве X, следует обратимость любого линейного ограниченного оператора $A : X \to X$, удовлетворяющего условию $\|A - A_0\| < 1/\|A_0^{-1}\|$. Во втором случае используются теоремы о возмущении спектра линейного оператора. Теоретические основы и практическая реализация ДВЭ требуют разработки специальных конструктивных методов, использующих фундаментальные утверждения общей теории функционально-дифференциальных

Исследования выполнены при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, Минобрнауки России и компании „Прогноз“, г. Пермь.

уравнений, и современные средства вычислений. Доказательные вычисления (reliable computing) как инструмент исследования дифференциальных и интегральных уравнений активно развиваются, начиная с 50-х годов прошлого века. Ограничимся здесь далеко не полным списком авторов, внесших заметный вклад в теорию и практику ДВЭ: Р. Мур, У. Кулиш, К. Бабенко, С. Калмыков, Ю. Шокин, З. Юлдашев, Г. Алефельд, Ю. Херцбергер, С. Годунов, Е. Каучер, В. Миранкер, А. Ноймайер, М. Плум, Г. Корлисс, С. Шарый. Нижеприведенные результаты получены участниками Пермского семинара по ФДУ в последние 25 лет: В. Максимов, А. Румянцев (1986–1993, краевые задачи, задачи управления); Д. Андрианов (1993, краевые задачи, задачи управления с дискретным временем); А. Румянцев (1999, краевые задачи); Ж. Мунембе (2000, задачи стабилизации); А. Колчанов (2003, приложения к задачам управления финансовыми ресурсами); В. Шишкин (2000–2009, вариационные задачи); В. Максимов, А. Чадов (2010–2013, задачи управления для гибридных систем); А. Поносов, Д. Поносов (2010–2015, приложения к многоотраслевым экономико-математическим моделям).

2.1. Краевые задачи. Общая теория ФДУ использует понятие линейного абстрактного ФДУ [1]. Это уравнение $\mathcal{L}x = f$, где $\mathcal{L} : \mathbf{D} \to \mathbf{B}$ — линейный ограниченный оператор, $\mathbf{D}$ и $\mathbf{B}$ — банаховы пространства такие, что $\mathbf{D}$ изоморфно прямому произведению $\mathbf{B} \times \mathbf{R}^n$. Обозначим через $J = \{\Lambda, Y\} : \mathbf{B} \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{D}$ изоформизм, $J^{-1} = [\delta, r]$. Предполагается, что так называемая *главная* краевая задача $\mathcal{L}x = f$, $rx = \alpha$ однозначно разрешима для любых $f \in \mathbf{B}$ и $\alpha \in \mathbf{R}^n$. В таком случае решение задачи предствимо в виде $x = Gf + X\alpha$, где G — оператор Грина, $X = (x_1, \ldots, x_n)$ — фундаментальный вектор однородного уравнения $\mathcal{L}x = 0$. Рассмотрим общую краевую задачу

$$\mathcal{L}x = f, \quad \ell x = \beta \tag{1}$$

с линейным ограниченным вектор-функционалом $\ell : \mathbf{D} \to \mathbf{R}^n$, компоненты которого ℓ^i, $i = 1, \ldots, n$, линейно независимы. Необходимым и достаточным условием однозначной разрешимости задачи (1) является обратимость матрицы $\ell X = (\ell^i x_j)$, $i, j = 1, \ldots, n$. Если можно построить такую обратимую $n \times n$-матрицу Γ, для которой $\|\ell X - \Gamma\| < 1/\|\Gamma^{-1}\|$, то, в силу теоремы об обратном операторе, задача (1) однозначно разрешима. Матрицу Γ целесообразно искать с использованием *вычислимых* (см. [1]) операторов $\ell_a : \mathbf{D} \to \mathbf{R}^n$ и $\mathcal{L}^a : \mathbf{D} \to \mathbf{B}$, достаточно близких к $\ell : \mathbf{D} \to \mathbf{R}^n$ и $\mathcal{L} : \mathbf{D} \to \mathbf{B}$ соответственно, полагая $\Gamma = \ell_a X^a$, где аппроксимация X^a фундаментального вектора X дает достаточно малую невязку $\Delta = \mathcal{L}^a X^a$. Степень близости ℓ_a и ℓ, $\mathcal{L}_a$ и $\mathcal{L}$ и малости Δ, гарантирующие однозначную разрешимоть задачи (1), определяются приводимой ниже теоремой. Обозначим через x_i^a, $i = 1, \ldots, n$, столбцы матрицы X^a, $\Delta_i = \mathcal{L}^a x_i^a$, G_0 — оператор Грина главной краевой задачи. Норму $|\cdot|$ в $\mathbf{R}^n$ определим равенством $|\alpha| = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} |\alpha^i|$ для $\alpha = \mathrm{col}(\alpha^1, \ldots, \alpha^n)$. Определим постоянные λ, g_0, M^a, μ_i^a, ν_i^a, δ_i^a неравенствами

$$\lambda \geqslant \|\ell\|, \quad g_0 \geqslant \|G_0\|, \quad M^a \geqslant \|(\ell^a X^a)^{-1}\|,$$
$$\mu_i^a \geqslant |(\ell - \ell^a) x_i^a|, \quad \nu_i^a \geqslant \|(\mathcal{L} - \mathcal{L}_a) x_i^a\|_{\mathbf{B}}, \quad \delta_i^a \geqslant \|\Delta_i\|_{\mathbf{B}}.$$

Теорема 1 (см. [2])**.** *Пусть операторы $\mathcal{L}_a$, ℓ^a и вектор X^a таковы, что матрица $\ell^a X^a$ обратима и*

$$\sum_{i=1}^n \mu_i^a + \lambda g_0 \sum_{i=1}^n (\nu_i^a + \delta_i^a) < \frac{1}{M^a}.$$

Тогда краевая задача (1) *однозначно разрешима при любых $f \in \mathbf{B}$ и $\alpha \in \mathbf{R}^n$.*

Проверка условий этой теоремы требует использования специальных средств вычислений, в частности, поддерживающих вычисления в рамках арифметики рациональных чисел.

2.2. Задачи управления. Рассмотрим задачу управления

$$\mathcal{L}x = Fu + f, \quad rx = \alpha, \quad \ell x = \beta, \tag{2}$$

с линейным ограниченным оператором $F : \mathbf{H} \to \mathbf{B}$, линейным ограниченным вектор-функционалом $\ell = [\ell_1, \ldots, \ell_m] : \mathbf{D} \to \mathbf{R}^m$, определяющим цель управления, и управлением u, принадлежащим гильбертову пространству $\mathbf{H}$. Равенство $\lambda_i u = \ell_i GFu$ определяет линейный ограниченный функционал $\lambda_i : \mathbf{H} \to \mathbf{R}$. Обозначим тем же символом порождающий элемент этого функционала: $\lambda_i u = \langle \lambda_i, u \rangle$, где скобки $\langle\, ,\, \rangle$ используются для обозначения скалярного произведения в $\mathbf{H}$. Необходимые и достаточные условия разрешимости задачи (2) формулируются в терминах матрицы $\Gamma = \{\langle \lambda_i, \lambda_j \rangle\}_{i,j=1,\ldots,m}$, что позволяет применять вышеописанную схему ДВЭ. Обратимость этой матрицы позволяет строить управляющие воздействия, решающие задачу (2) при любых m, $\alpha \in \mathbf{R}^n$ и $\beta \in \mathbf{R}^m$. Возможность выбора конкретных пространств для траекторий и управлений позволяет охватить широкие классы актуальных прикладных задач управления для линейных систем с последействием, непрерывным [2, 7, 15], дискретным [3] и смешанным временем [8, 14], импульсным и гибридным управлением [5, 7].

2.3. Задачи стабилизации. В [9] рассматривается задача Коши

$$\dot{x}(t) - P(t)x[h(t)] = f(t), \quad t \in [0, \infty), \quad x(0) = \alpha, \tag{3}$$

с T-периодическими ($T > 0$) $n \times n$-матрицей $P(t)$ и запаздыванием $\Delta(t) = t - h(t)$, $0 \leqslant \Delta(t) \leqslant T$. Предполагается, что $x(\xi) = \varphi(\xi)$, если $\xi < 0$. Получены условия стабилизируемости решения $x(t, \alpha)$ задачи (3) к T-периодической функции $y : [0, \infty) \to \mathbf{R}^n$:

$$\lim_{N \to \infty} \max_{t \in [NT, (N+1)T]} |x(t, \alpha) - y(t)| = 0.$$

В основе конструктивного исследования задачи о стабилизируемости решений системы (3) к T-периодической функции лежит сведение ее к операторному уравнению $z = Az + g$ в пространстве $\mathbf{C}$ непрерывных функций $z : [0, T] \to \mathbf{R}^n$. Показано, в частности, что если спектральный радиус оператора $A : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ меньше единицы, то при любом α решение $x(t, \alpha)$ задачи (3) стабилизируется к T-периодической функции y, которая является T-периодическим продолжением на $[0, \infty)$ решения упомянутого уравнения. Получены также оценки скорости стабилизируемости.

2.4. Вариационные задачи. Работа [13] посвящена ДВЭ в исследовании квадратичной вариационной задачи с нелокальным интегрантом

$$\mathcal{I}(x) = \int_0^T \sum_{j=0}^m (\mathcal{T}_{1j}x)(t)(\mathcal{T}_{2j}x)(t) + (\mathcal{T}_0 x)(t)\, dt \to \min, \quad x \in \mathbf{D}, \quad \ell^i x = \alpha^i, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{4}$$

Здесь $\mathbf{D}$ — банахово пространство функций $x : [0, T] \to \mathbf{R}$, изоморфное прямому произведению $\mathbf{L}_2 \times \mathbf{R}^n$, $\mathbf{L}_2$ — пространство суммируемых с квадратом функций $z : [0, T] \to \mathbf{R}$,

$$\|z\|_{\mathbf{L}_2} = \sqrt{\int_0^T z^2(s)\, ds};$$

$\mathcal{T}_{ij} : \mathbf{D} \to \mathbf{L}_2$, $i = 1, 2$, $j = 1, \ldots, m$, $\mathcal{T}_0 : \mathbf{D} \to \mathbf{L}_2$ — линейные ограниченные операторы; ℓ^i, $i = 1, \ldots, N$, — линейно независимая система линейных ограниченных функционалов на $\mathbf{D}$. Рассмотрен случай, когда задача (4) сводится к установлению разрешимости линейного интегрального уравнения Фредгольма второго рода $z - Kz = f$ (интегральное уравнение Эйлера) и проверке положительной определенности оператора $I - K$. При этом используется тот факт, что оператор K по построению является вполне непрерывным самосопряженым оператором. В рамках конструктивного подхода уравнение Эйлера заменяется приближенным уравнением $z - \widetilde{K}z = \widetilde{f}$ с конечномерным вычислимым ядром оператора $\widetilde{K}$ и вычислимой функцией $\widetilde{f}$. При аппроксимации в качестве базиса используются ортогональные многочлены Лагранжа или ортогональные функции Радемахера—Уолша (коэффициенты многочленов и координаты точек разрыва хранятся в виде рациональных чисел).

2.5. Прикладные задачи. Прикладные краевые задачи и задачи управления, допускающие запись в общей форме (1), (2), возникают, в частности, в математической экономике. К таким задачам относятся, например, задача управления инструментами деятельности коммерческого банка [4] и задача о построении программы инвестирования многоотраслевого производственного комплекса с привлечением банковских кредитов [6]. Широкие приложения находят задачи управления для многоотраслевых экономических и эколого-экономических моделей [3, 10, 11]. Для упомянутых прикладных задач на основе общей схемы разработаны и реализованы алгоритмы вычислительного эксперимента, позволяющие исследовать широкий класс реальных задач и расширяющие возможности существующих систем поддержки принятия решений в сфере управления экономическими процессами. В прикладных задачах управления различные режимы управления (в том числе, импульсные и смешанные) имеют естественный содержательный смысл.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Азбелев Н. В., Максимов В. П., Рахматуллина Л. Ф.* Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1991. — 280 с.
2. *Азбелев Н. В., Максимов В. П., Рахматуллина Л. Ф.* Элементы современной теории функционально-дифференциальных уравнений. Методы и приложения. — М.: Ин-т компьютер. исслед., 2002. — 384 с.
3. *Андрианов Д. Л.* Краевые задачи и задачи управления для линейных разностных систем с последействием// Изв. вузов. Мат. — 1993. — № 5. — С. 3–16.
4. *Колчанов А. П.* Задача управления финансовыми ресурсами коммерческого банка: математическое моделирование, исследование и вычислительный эксперимент// Дис. ... канд. физ.-мат. наук. — Пермь: Перм. гос. ун-т, 2003. — 130 с.
5. *Максимов В. П.* Об одном классе управлений для функционально-дифференциальной непрерывно-дискретной системы// Изв. вузов. Мат. — 2012. — № 9. — С. 72–76.
6. *Максимов В. П.* Моделирование и вычислительный эксперимент в задаче банковского кредитования программы развития многоотраслевой производственной системы// Совр. пробл. прикл. мат. и мат. моделир. — Воронеж: Воронеж. гос. ун-т., 2005. — С. 139.
7. *Максимов В. П., Румянцев А. Н.* Краевые задачи и задачи импульсного управления в экономической динамике. Конструктивное исследование// Изв. вузов. Мат. — 1993. — № 5. — С. 56–71.
8. *Максимов В. П., Чадов А. Л.* Гибридные модели в задачах экономической динамики// Вестн. Перм. ун-та. Сер. Экономика. — 2011. — Вып. 2(9). — С. 13–23.
9. *Мунембе Ж. С. П.* Конструктивное исследование асимптотического поведения решений дифференциальных уравнений с запаздыванием и периодическими параметрами// Дис. ... канд. физ.-мат. наук. — Пермь: Перм. гос. ун-т, 2000. — 134 с.
10. *Поносов А. А.* Развитие системы поддержки принятия решений в региональной экономике на основе непрерывно-дискретных экономико-математических моделей// Дис. ... канд. экон. наук. — Пермь: Перм. гос. ун-т, 2016. — 129 с.
11. *Поносов Д. А.* Динамическая коррекция задач управления для экономико-математических моделей// Дис. ... канд. экон. наук. — Пермь: Перм. гос. ун-т, 2012. — 125 с.
12. *Румянцев А.Н.* Вычислительный эксперимент в исследовании функционально-дифференциальных моделей// Дис. ... д-ра физ.-мат. наук. — Пермь: Перм. гос. ун-т, 1999. — 295 с.
13. *Шишкин В.А.* Доказательный выислительный эксперимент в исследовании вариационных задач для квадратичных функционалов// Дис. ... канд. физ.-мат. наук. — Пермь: Перм. гос. ун-т, 2009. — 101 с.
14. *Chadov A.L., Maksimov V.P.* Linear boundary value problems and control problems for a class of functional differential equations with continuous and discrete times// Funct. Differ. Equ. — 2012. — Vol. 19, № 1-2. — P. 49–62.
15. *Maksimov V.P.* On the property of controllability with respect to a family of linear functionals// Funct. Differ. Equ. — 2009. — Vol. 16, № 3. — P. 517–527.

В. П. Максимов
Пермский государственный национальный исследовательский университет (ПГНИУ)
E-mail: `maksimov@econ.psu.ru`

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 132 (2017). С. 69–74

УДК 517.929

КРИТЕРИЙ ОСЦИЛЛЯЦИИ АВТОНОМНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ОГРАНИЧЕННЫМ ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ

© 2017 г. **В. В. МАЛЫГИНА**

Аннотация. Для автономных функционально-дифференциальных уравнений запаздывающего типа установлен критерий осцилляции, который сводит задачу осцилляции к вычислению единственного корня вещественнозначной функции, определяемой коэффициентами исходного уравнения. Работа критерия демонстрируется на примерах уравнений с сосредоточенным и распределенным последействием, для которых получены эффективно проверяемые признаки осцилляции.

***Ключевые слова*:** дифференциальное уравнение с последействием, осцилляция, сосредоточенное и распределенное запаздывание.

***AMS Subject Classification*:** 34K06, 34K11

Рассмотрим функционально-дифференциальное уравнение вида

$$\dot{x}(t) + \mu \int\limits_0^r x(t-s)dk(s) = 0, \quad t \geqslant 0. \tag{1}$$

Параметры уравнения (1) подчинены следующим ограничениям: μ, r — вещественные числа, $r > 0$, k — функция ограниченной вариации, удовлетворяющая условию $k(0) = 0$, интеграл понимается в смысле Римана—Стилтьеса. В этих предположениях, как известно [1], решение уравнения (1) с заданными начальными условиями существует и единственно в классе локально абсолютно непрерывных функций.

Определенную на полуоси непрерывную функцию назовем осциллирующей, если она имеет неограниченную справа последовательность нулей. Уравнение (1) будем называть *осциллирующим*, если все его решения являются осциллирующими функциями.

Поставим уравнению (1) в соответствие характеристическую функцию

$$F(\lambda) \equiv -\lambda + \mu \int\limits_0^r e^{\lambda t}\, dk(t), \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Следующее утверждение связывает осцилляцию уравнения (1) со свойствами характеристической функции.

Теорема 1 (см. [3]). *Для того чтобы уравнение* (1) *было осциллирующим, необходимо и достаточно, чтобы уравнение* $F(\lambda) = 0$ *не имело вещественных корней.*

Функция F имеет, вообще говоря, сложную структуру, и прямое исследование множества ее вещественных корней может оказаться непростой задачей. В настоящей работе мы приведем критерий, позволяющий решать задачу осцилляции для уравнения (1) более эффективно, чем это позволяет сделать теорема 1.

Исключим далее из рассмотрения тривиальный случай, когда (1) — обыкновенное дифференциальное уравнение. Будем полагать k неубывающей на $[0, r]$ функциией. В этом случае, если

Работа выполнена в рамках госзадания Минобрнауки РФ (базовая часть задания № 2014/152, проект №1890).

ISSN 0233–6723

$\mu = 0$, то $F(0) = 0$, а если $\mu < 0$, то $F(0)F(-\infty) < 0$, т.е. при $\mu \leqslant 0$ характеристическая функция имеет вещественные корни. Поэтому далее считаем, что $\mu > 0$.

Обозначим

$$G(\zeta) \equiv \zeta \int_0^r s e^{\zeta s} dk(s) - \int_0^r e^{\zeta s} dk(s),$$

где $\zeta \in \mathbb{R}$. Легко видеть, что $G(\zeta) < 0$ при $\zeta \leqslant 0$, а при $\zeta > 0$ имеем $G'(\zeta) > 0$, т.е. G монотонно возрастает на положительной полуоси. Так как $G(\zeta) \to +\infty$ при $\zeta \to +\infty$, то уравнение $G(\zeta) = 0$ имеет на вещественной оси единственный (причем положительный) корень. Обозначим его через ζ_*.

Теорема 2. *Функция F положительна при всех $\zeta \geqslant 0$ тогда и только тогда, когда*

$$\mu \int_0^r e^{\zeta_* s}\, dk(s) > \zeta_*,$$

где ζ_* — корень уравнения $G(\zeta) = 0$.

Доказательство. Из условий теоремы и свойств ζ_* следует, что

$$\int_0^r e^{\zeta_* s}\, dk(s) > 0.$$

Обозначим

$$\mu_* = \zeta_* \Big/ \int_0^r e^{\zeta_* s}\, dk(s)$$

и рассмотрим на множестве $\mathbb{R}$ функцию

$$F_*(\zeta) = -\zeta + \mu_* \int_0^r e^{\zeta s}\, dk(s)$$

вместе с ее производными

$$F_*'(\zeta) = -1 + \mu_* \int_0^r s\, e^{\zeta s} dk(s), \qquad F_*''(\zeta) = \mu_* \int_0^r s^2\, e^{\zeta s} dk(s).$$

Так как $F_*''(\zeta) > 0$ при всех $\zeta \in \mathbb{R}$, то F_*' монотонно возрастает на $\mathbb{R}$ от -1 до $+\infty$, следовательно, существует единственная точка $\zeta_0 \in \mathbb{R}$, в которой $F_*'(\zeta_0) = 0$. С другой стороны,

$$\int_0^r s e^{\zeta_* s} dk(s) = \frac{1}{\zeta_*} \int_0^r e^{\zeta_* s} dk(s) = \frac{1}{\mu_*},$$

следовательно, $F_*'(\zeta_*) = -1 + \mu_*/\mu_* = 0$, а значит $\zeta_0 = \zeta_*$. Итак, $F_*(\zeta_0) = F_*'(\zeta_0) = 0$, причем ζ_0 — точка минимума функции F_*, следовательно, $F_*(\zeta) \geqslant 0$ при всех $\zeta \geqslant 0$.

Перейдем к доказательству теоремы. Пусть выполнено предположение теоремы, которому с учетом введенных обозначений можно придать вид $\mu > \mu_*$. Тогда для любого $\zeta \in [0, \infty)$ имеем

$$F(\zeta) = -\zeta + \mu \int_0^r e^{\zeta s}\, dk(s) = F_*(\zeta) + (\mu - \mu_*) \int_0^r e^{\zeta s}\, dk(s) > 0,$$

что и требовалось. Обратно, если $\mu \leqslant \mu_*$, то

$$F(\zeta_*) = F_*(\zeta_*) + (\mu - \mu_*) \int_0^r e^{\zeta s}\, dk(s) = (\mu - \mu_*) \int_0^r e^{\zeta s}\, dk(s) \leqslant 0,$$

следовательно, функция F не является положительной на $[0,\infty)$. □

Объединяя теоремы 1 и 2, получаем следующий результат.

Теорема 3. *Пусть k — неубывающая на $[0,r]$ функция. Тогда эквивалентны следующие утверждения.*

1) *Уравнение* (1) *является осциллирующим.*
2) *Характеристическая функция уравнения* (1) *положительна на* $[0,\infty)$.
3) *Имеет место неравенство*
$$\mu\int\limits_0^r e^{\zeta_* s}\,dk(s) > \zeta_*,$$
где ζ_* — корень уравнения $G(\zeta)=0$.
4) *Имеет место неравенство*
$$\mu\int\limits_0^r se^{\zeta_* s}\,dk(s) > 1,$$
где ζ_* — корень уравнения $G(\zeta)=0$.

Доказательство. Очевидно, что $F(\zeta)>0$ при $\zeta<0$, следовательно, по теореме 1, утверждения 1 и 2 эквивалентны. Теорема 2 обеспечивает эквивалентность утверждений 2) и 3), а определение корня ζ_* — утверждений 3) и 4). □

Следствие 1. *Если*
$$\mu\int\limits_0^r s\,dk(s) > 1/e,$$
то уравнение (1) *является осциллирующим.*

Функция k как всякая функция ограниченной вариации может быть представлена в виде суммы $k(t)=k_1(t)+k_2(t)+k_3(t)$, где $k_1(t)$ — «функция скачков», $k_2(t)$ — абсолютно непрерывная составляющая, $k_3(t)$ — сингулярная составляющая. Каждая из этих функций соответствует своему типу функционально-дифференциальных уравнений. Продемонстрируем работу теоремы 3 на примерах уравнений с разными видами последействия.

A. Уравнения с сосредоточенным запаздыванием Пусть $\mu=1$,
$$k(t)=k_1(t)=\sum_{k=1}^n a_k\chi(t-r_k),$$
где $a_k>0$, $0<r_1<r_2<\dots<r_n=r$, а χ — функция Хевисайда. Уравнение (1) принимает вид
$$\dot x(t)+\sum_{k=1}^n a_k x(t-r_k)=0,\quad t\geqslant 0. \tag{2}$$
Применяя к нему следствие 1, получаем известный (см. [4]) признак осцилляции.

Признак 1. *Если $a_k>0$ для любого $k=\overline{1,n}$ и*
$$\sum_{k=1}^n a_k r_k > 1/e,$$
то уравнение (2) *является осциллирующим.*

Положив в уравнении (2) $n=1$, получаем уравнение:
$$\dot x(t)+ax(t-r)=0,\quad t\geqslant 0, \tag{3}$$
для которого $G(\zeta)\equiv e^{\zeta r}(\zeta r-1)$, $\zeta_*=1/r$. Применяя п. 3) или п. 4) теоремы 3, получаем для уравнения (3) критерий осцилляции.

Признак 2 (см. [2]). *Уравнение* (3) *является осциллирующим, если и только если* $ar > 1/e$.

Таким образом, в случае одного слагаемого признак 1 обращается в критерий. Отсюда, в частности, следует, что постоянная $1/e$ в признаке 1 неулучшаема; более того, строгое неравенство нельзя заменить нестрогим.

B. Уравнения с распределенным запаздыванием Пусть

$$k(t) = k_2(t) = \int_0^t p(s)ds,$$

где p — суммируемая на $[0, r]$ неотрицательная функция. Уравнение (1) принимает вид

$$\dot{x}(t) + \mu \int_0^r p(s)x(t-s)ds = 0, \quad t \geqslant 0. \tag{4}$$

Уточним для уравнения (4) следствие 1: в данном случае строгое неравенство можно заменить нестрогим.

Признак 3. *Если*

$$\mu \int_0^r p(s)s\,ds \geqslant 1/e,$$

то уравнение (4) *является осциллирующим.*

Доказательство. Так как $e^{\zeta_* s} > es\zeta_*$ для всех $s \neq 1/\zeta_*$, а из условий признака 3 вытекает, что $\mu > 0$ и

$$\int_0^r p(s)s\,ds > 0,$$

то

$$\mu \int_0^r p(s)\,e^{\zeta_* s}ds > \mu e\zeta_* \int_0^r p(s)s\,ds \geqslant \frac{e\zeta_*}{e} = \zeta_*.$$

Остается использовать п. 3) теоремы 3. □

Применим теорему 3 к уравнению вида (4) для конкретного семейства функций $p(t) = t^\alpha$, где $\alpha > -1$. Уравнение (4) перепишется в виде

$$\dot{x}(t) + \mu \int_0^r s^\alpha x(t-s)\,ds = 0, \quad t \geqslant 0. \tag{5}$$

Обозначим

$$I(\xi) = \int_0^1 s^\alpha e^{\xi s}ds.$$

Тогда

$$\int_0^r k(s)e^{\zeta s}ds = r^{\alpha+1}I(r\zeta), \qquad \zeta\int_0^r k(s)se^{\zeta s}\,ds = r^{\alpha+1}(e^{\zeta r} - (\alpha+1)I(r\zeta)),$$

а уравнение $G(\zeta) = 0$ эквивалентно уравнению

$$(\alpha+2)I(\xi) = e^\xi, \tag{6}$$

где $\xi = r\zeta$. Неравенство из п. 3) теоремы 3 в этих обозначениях принимает вид $\mu r^{\alpha+2} > (\alpha+2)\xi e^{-\xi}$. Таким образом, мы получаем для уравнения (5) следующий критерий осцилляции.

Признак 4. *Уравнение* (5) *является осциллирующим тогда и только тогда, когда* $\mu r^{\alpha+2} > (\alpha+2)\xi_\alpha e^{-\xi_\alpha}$, *где* ξ_α — *корень уравнения* (6).

Отметим простой частный случай уравнения (5) при $\alpha = 0$.

Признак 5. *Уравнение*

$$\dot{x}(t) + \mu \int\limits_0^r x(t-s)\,ds = 0$$

является осциллирующим тогда и только тогда, когда $\mu r^2 > 2\xi_0 e^{-\xi_0}$, *где* ξ_0 — *положительный корень уравнения* $1 - \xi/2 = e^{-\xi}$.

Численные методы дают

$$\xi_0 \approx 1{,}594, \quad 2\xi_0 e^{-\xi_0} \approx 0{,}648.$$

Так же легко находятся корни уравнения (6) и при других $\alpha > -1$:

$$\zeta_{-1/2} \approx 1{,}914, \quad \zeta_1 \approx 1{,}361, \quad \zeta_2 \approx 1{,}262, \quad \zeta_3 \approx 1{,}206, \quad \zeta_{1/2} \approx 1{,}447, \quad \zeta_{3/2} \approx 1{,}303.$$

Каждому корню соответствует свой признак осцилляции.

Отметим следующий интересный факт: признак 4 дает возможность показать точность постоянной $1/e$ в признаке 3. Для этого установим некоторые свойства семейства ξ_α.

Лемма 1. *При всех* $\alpha > -1$ *имеет место неравенство* $\xi_\alpha > 1$; *более того,* $\lim\limits_{\alpha\to\infty} \xi_\alpha = 1$.

Доказательство. Из определения ξ_α имеем

$$(\alpha+2)\int\limits_0^1 s^\alpha e^{\xi_\alpha(s-1)} ds = 1.$$

Интегрируя это равенство по частям, получаем

$$(\alpha+2)\int\limits_0^1 s^{\alpha+1} e^{\xi_\alpha(s-1)} ds = 1/\xi_\alpha.$$

Вычитая из первого равенства второе, имеем

$$1 - 1/\xi_\alpha = (\alpha+2)\int\limits_0^1 s^\alpha(1-s) e^{\xi_\alpha(s-1)} ds, \tag{7}$$

откуда сразу следует, что для любого $\alpha > -1$ справедлива оценка $\xi_\alpha > 1$. С учетом этого неравенства из (7) имеем

$$0 < 1 - 1/\xi_\alpha \leqslant (\alpha+2)\int\limits_0^1 (s^\alpha - s^{\alpha+1}) ds = 1/(\alpha+1),$$

откуда следует, что $\lim\limits_{\alpha\to\infty} \xi_\alpha = 1$. □

Покажем, что в признаке 3 постоянную $1/e$ нельзя уменьшить. Положим в уравнении (5) $r = 1$ и применим к нему признак 3. Получим достаточное условие осцилляции: $\mu r^{\alpha+2} \geqslant (\alpha+2)/e$.

Применение признака 4 дает критерий осцилляции: $\mu r^{\alpha+2} > (\alpha+2)\xi_\alpha e^{-\xi_\alpha}$. В силу леммы 1, $\xi_\alpha > 1$, следовательно, $\xi_\alpha e^{-\xi_\alpha} < 1/e$, но при этом $\xi_\alpha e^{-\xi_\alpha} \to 1/e$, следовательно, в признаке 3 уменьшение константы $1/e$ невозможно.

Примеров функционально-дифференциальных уравнений с сингулярной составляющей известно крайне мало. Отметим работу [5], в которой рассмотрено уравнение вида (1), где $r = 1$, а k — «канторова лестница». Для такого уравнения в [5] найдена точная область положительности фундаментального решения в виде $\mu \leqslant \mu_0$, где μ_0 определяется через корень некоторого вспомогательного трансцендентного уравнения; там же найдено приближенное значение $\mu_0 \approx 0{,}618$.

Так как положительность фундаментального решения эквивалентна наличию у характеристической функции вещественных корней, то из теоремы 1 данной работы следует, что область осцилляции для такого уравнения имеет вид $\mu > \mu_0$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Азбелев Н. В., Максимов В. П., Рахматуллина Л. Ф.* Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1991. — 280 с.
2. *Мышкис А. Д.* О решениях линейных однородных дифференциальных уравнений первого порядка устойчивого типа с запаздывающим аргументом // Матем. сб. — 1951. — *28*, № 3. — С. 641–658.
3. *Сабатулина Т. Л.* Об осциллирующих решениях автономных дифференциальных уравнений с последействием// Вестн. ПГУ. — 2016. — № 3 (в печати).
4. *Győri I., Ladas G.* Oscillation theory of delay differential equations with applications. — New York: The Clarendon Press, Oxford University Press, 1991. — 380 p.
5. *Sabatulina T., Malygina V.* On positiveness of the fundamental solution for a linear autonomous differential equation with distributed delay// Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ. — 2014. — № 61. — P. 1–16.

В. В. Малыгина
Пермский национальный исследовательский политехнический университет
E-mail: mavera@list.ru

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 132 (2017). С. 75–77

УДК 517.929

КЛАССИФИКАЦИЯ ДВУПАРАМЕТРИЧЕСКИХ АВТОНОМНЫХ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

© 2017 г. **М. В. МУЛЮКОВ**

Аннотация. Проведена классификация двупараметрических линейных автономных дифференциальных систем с запаздыванием по типу границ областей D-разбиения.

Ключевые слова: Система с запаздыванием, метод D-разбиения, асимптотическая устойчивость.

AMS Subject Classification: 34K06, 34K20

1. Введение. Рассмотрим систему N уравнений вида

$$\dot{x}(t) + \int_0^h dR(s)x(t-s) = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+ \tag{1}$$

где $h > 0$, R — матрица-функция ограниченной вариации, определённая на $[0, h]$. Интеграл понимается в смысле Римана—Стильтеса. Доопределим x на $[-h, 0]$ некоторой измеримой по Борелю вектор-функцией. Назовём решением системы (1) локально абсолютно непрерывную вектор-функцию x, определённую на $\mathbb{R}_+$, удовлетворяющую данной системе почти всюду на этом множестве. Решение системы (1) в указанных предположениях существует и единственно [1, с. 8–20, 81–84]. Как известно [3, с. 101], асимптотическая устойчивость системы (1) эквивалентна тому, что *характеристическая функция*

$$F(z) = \det\left(Iz + \int_0^h e^{-zs}dR(s)\right), \quad z \in \mathbb{C}. \tag{2}$$

устойчива, то есть все её корни расположены слева от мнимой оси.

Существует ряд методов, позволяющих установить, является ли устойчивой характеристическая функция (2): теорема Чеботарёва—Меймана, теорема Понтрягина (Эрмита—Билера), годограф Найквиста—Михайлова. Однако, если требуется дать описание области в пространстве параметров, то наиболее эффективным является разработанный Ю. И. Неймарком метод D-разбиения [4, 5]. Практическая реализация данного метода состоит из нескольких этапов. Вначале необходимо построить гиперповерхность в пространстве параметров, только при переходе через которую изменяется количество корней справа от мнимой оси. Затем необходимо описать все области, на которые разбивается пространство параметров данной гиперповерхностью. Эти области назовём *областями D-разбиения*. Каждой области D-разбиения можно поставить в соответствие целое неотрицательное число, которое будем называть *индексом*, равное количеству корней функции (2) с положительной вещественной частью. На заключительном этапе требуется установить области с нулевым индексом.

Геометрия областей D-разбиения хорошо изучена в случае, если F — полином [2]. В этом случае количество областей D-разбиения ограничено, поэтому возможно определить индекс каждой области. Специфика применения метода D-разбиения к системе (1) заключается в том, что областей D-разбиения, как правило, бесконечно много, поэтому требуются приёмы, позволяющие оценивать изменение индекса при переходе через границу областей: к ним относится метод «штриховки

Неймарка»и вычисление производных по направлению. Данные приёмы существенно зависят от типа границы D-разбиения. В следующем разделе мы увидим, как эти сложности проявляются в случае, когда F зависит от двух линейных вещественных параметров.

2. Метод D-разбиения для двупараметрической характеристической функции. Обозначим через $\mathrm{E}_{\mathbb{R}}$ пространство целых функций, все коэффициенты ряда Маклорена которых вещественны; для каждого целого неотрицательного n через $\mathrm{E}^n_{\mathbb{R}}$ обозначим пространство функций f из $\mathrm{E}_{\mathbb{R}}$ таких, что, какое бы ни было $\lambda \in \mathbb{R}$, имеем $\varlimsup\limits_{|z|\to\infty} |z^{-n} f(z)| < \infty$, если выбирать z из полуплоскости $\operatorname{Re} z > \lambda$.

Пусть характеристическая функция (2) представима в виде

$$F(z) = f_0(z) + r_1 f_1(z) + r_2 f_2(z), \tag{3}$$

где $f_0(z) = z^N + g_0(z)$ и $g_0, f_1, f_2 \in \mathrm{E}^{N-1}_{\mathbb{R}}$. Будем полагать, что у функций f_0, f_1, f_2 нет общего корня на мнимой оси, поскольку в противном случае F не был бы устойчивым. Обозначим $\vec{r} = \{r_1, r_2\}$. Можно показать, что корни (3) непрерывно зависят от $\vec{r}$.

Функцию $F(z)$ можно рассматривать как оператор $U(\vec{r}, z)$, действующий из $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{C}$ в $\mathbb{C}$. Точку $\{r_1, r_2, \varphi\} \in \mathbb{R}^3$ будем обозначать через $(\vec{r}, \varphi)$. Точку $(\vec{r}, \xi)$ назовём *точкой D-разбиения*, если $U(\vec{r}, i\xi) = 0$, при этом точку $P(r_1, r_2)$ будем называть *проекцией точки D-разбиения.*

Назовём точку D-разбиения $(\vec{p}, \xi)$ *регулярной*, если $\dfrac{\partial}{\partial z} U(\vec{p}, i\xi) \neq 0$. Если $(\vec{p}, \xi)$ — регулярная точка D-разбиения, то уравнение $U(\vec{r}, z) = 0$ имеет единственное решение $z = Z_\xi(\vec{r})$ в некоторой окрестности точки $P(p_1, p_2)$, при этом Z_ξ — аналитическая функция [6, с. 415].

Для того чтобы найти точки D-разбиения, разделим вещественную и мнимую части уравнения $F(i\varphi) = 0$:

$$\begin{cases} r_1 \operatorname{Re} f_1(i\varphi) + r_2 \operatorname{Re} f_2(i\varphi) + \operatorname{Re} f_0(i\varphi) = 0, \\ r_1 \operatorname{Im} f_1(i\varphi) + r_2 \operatorname{Im} f_2(i\varphi) + \operatorname{Im} f_0(i\varphi) = 0. \end{cases} \tag{4}$$

В силу $F \in \mathrm{E}_{\mathbb{R}}$ имеем $F(i\varphi) = \overline{F}(-i\varphi)$, поэтому достаточно рассмотреть неотрицательные значения φ. При каждом φ разрешимость системы (4) определяется тремя функциями: $\Delta(\varphi) = \operatorname{Im} f_1(-i\varphi) f_2(i\varphi)$, $u_1(\varphi) = \operatorname{Im} f_2(-i\varphi) f_0(i\varphi)$, $u_2(\varphi) = \operatorname{Im} f_0(-i\varphi) f_1(i\varphi)$. Возможны три варианта.

- Если $\Delta(\varphi) \neq 0$, то система (4) однозначно разрешима относительно $\vec{r}$; обозначим решение этой системы через $\vec{S}(\varphi) = \vec{u}(\varphi)/\Delta(\varphi)$.
- Если $\Delta(\varphi) = 0$, но $\bigl|\vec{u}(\varphi)\bigr| \neq 0$, где $\vec{u}(\varphi) = \operatorname{col}\{u_1(\varphi), u_2(\varphi)\}$, то система (4) несовместна.
- Если $\Delta(\varphi) = \bigl|\vec{u}(\varphi)\bigr| = 0$, то данная система описывает прямую в пространстве $\mathbb{R}^3$, которую будем называть *прямой D-разбиения.*

Если уравнение $\bigl|\Delta(\varphi)\bigr| + \bigl|u(\varphi)\bigr| = 0$ не выполняется тождественно, то множество его неотрицательных решений не более чем счётно и может быть упорядочено по возрастанию (это вытекает из теоремы единственности). Обозначим корни данного уравнения через θ_n. Проекцию линии D-разбиения, соответствующей значению θ_n, обозначим через L_n.

Можно показать, что если точка $(\vec{r}, \theta_n)$ регулярна, то в точке $P(r_1, r_2)$ прямой L_n имеем

$$\vec{\nabla} \operatorname{Re} Z_{\theta_n} = |F'(i\theta_n)|^{-2} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \left(\vec{u}'(\theta_n) - \Delta'(\theta_n)\vec{r}\right). \tag{5}$$

Если уравнение $\Delta(\varphi) = 0$ не выполняется тождественно, то множество его неотрицательных решений ξ_n не более чем счётно и может быть упорядочено по возрастанию. Данное множество разбивает $\mathbb{R}_+$ на не более чем счётное множество промежутков. Образы промежутков при отображении $\vec{S}$ обозначим через C_n. Кривую $(\vec{r}, \varphi) = (\vec{S}(\varphi), \varphi)$ будем называть *кривой D-разбиения.* Таким образом, C_n — проекция кривой D-разбиения.

Можно показать, что если точка $(\vec{r}, \xi)$ регулярна, то в точке $P(r_1, r_2)$ кривой C_n имеет место

$$\vec{\nabla} \operatorname{Re} Z_\xi = \Delta(\xi) |F'(i\xi)|^{-2} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \vec{S}'(\xi). \tag{6}$$

Таким образом, для того чтобы вычислить разницу индексов соседних областей, необходимо выяснить тип линии на границе: для кривой C_n требуется применить формулу (6), что эквивалентно нанесению штриховки, а для прямой L_n — формулу (5), при этом если $|\vec{\nabla}|Z_{\theta_n}| = 0$, то необходимо вычислять старшие производные функции Z_{θ_n}.

3. Классификация. Структура линий D-разбиения определяется тремя функциями: Δ, u_1, u_2. Возможны четыре варианта:

- будем называть (3) характеристической функцией первого рода, если $\Delta \not\equiv 0$ и функции Δ, u_1, u_2 линейно независимы;
- будем называть (3) характеристической функцией второго рода, если $\Delta \not\equiv 0$, но функции Δ, u_1, u_2 линейно зависимы;
- будем называть (3) характеристической функцией третьего рода, если $\Delta \equiv 0$, но $|\vec{u}| \not\equiv 0$;
- будем называть (3) характеристической функцией четвёртого рода, если все функции Δ, u_1, u_2 тождественно равны нулю.

Для характеристических функций первого и второго рода множества прямых и кривых D-разбиения не пусты. Разница состоит в том, что в первом случае C_n таковы, что каждая из них имеет не более чем счётное множество пересечений с любой прямой, поэтому области D-разбиения имеют как прямолинейные, так и криволинейные границы. Во втором случае все C_n принадлежат некоторой прямой, поэтому областями D-разбиения являются многоугольники.

Для характеристических функций третьего и четвёртого рода множество кривых D-разбиения пусто. В первом случае множество прямых D-разбиения не более чем счётно, поэтому области D-разбиения представляют собой многоугольники, а во втором случае множество прямых D-разбиения может быть несчётным (например, для функции $F(z) = z^4 + r_1 z^2 + r_2$).

Теорема 1. *Характеристическая функция четвёртого рода не является устойчивой ни при каких значениях r_1, r_2.*

Доказательство. Обозначим через a_n, b_n коэффициенты ряда Маклорена функций f_2, f_0 соответственно. Имеют место равенства

$$u_1 = \operatorname{Im} f_2(-i\varphi) f_0(i\varphi) = \operatorname{Im} \sum_{n=1}^{\infty} a_n (-i)^n \varphi^n \sum_{n=1}^{\infty} b_n i^n \varphi^n = \operatorname{Im} \sum_{n,m=1}^{\infty} a_n b_m (-1)^n i^{n+m} \varphi^{n+m} = 0,$$

следовательно, $u_1 \equiv 0$ равносильно тому, что функции f_0, f_2 либо обе чётные, либо обе нечётные. Аналогично $u_2 \equiv 0$, $\Delta \equiv 0$ равносильны тому, что совпадает чётность пар функций f_0, f_1 и f_1, f_2 соответственно. Таким образом, если F — характеристическая функция четвёртого рода, то она либо чётная, либо нечётная при любом $\vec{r}$. В первом случае её корни расположены симметрично относительно мнимой оси, во втором — симметрично относительно нуля. Очевидно, ни в том, ни в другом случае все корни не могут иметь отрицательные вещественные части. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Азбелев Н. В., Максимов В. П., Рахматуллина Л. Ф.* Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1991. — 280 с.
2. *Грязина Е. Н.* К теории D-разбиения// Автомат. и телемех. — 2004. — № 12. — С. 15-–28.
3. *Мышкис А. Д.* Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом. — М.: Наука, 1972.
4. *Неймарк Ю. И.* Об определении значений параметров, при которых система автоматического регулирования устойчива// Автомат. и телемех. — 1948. — *9*, № 3. — С. 190-–203.
5. *Неймарк Ю. И.* Динамические системы и управляемые процессы. — М.: Наука, 1978. — 336 с.
6. *Треногин В. А.* Функциональный анализ. — М.: Наука, 2007. — 488 с.

М. В. Мулюков
Пермский национальный исследовательский политехнический университет (ПНИПУ)
E-mail: `mulykoff@gmail.com`

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 132 (2017). С. 78–80

УДК 517.956.4

СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННАЯ СИСТЕМА ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ В КРИТИЧЕСКОМ СЛУЧАЕ

© 2017 г. **А. С. ОМУРАЛИЕВ, С. КУЛМАНБЕТОВА**

Аннотация. Изучается система сингулярно возмущенных параболических уравнений, когда малый параметр стоит как перед временной производной, так и перед пространственной производной и когда предельный оператор имеет кратную нулевую точку спектра. В таких задачах возникают явления угловых погранслоев, описываемые произведением экспоненциальной и параболической погранслойных функций. В предположении, что предельный оператор является оператором простой структуры, построена регуляризованная асимптотика решения, которая кроме угловых погранслойных функций содержит экспоненциальную и параболическую погранслойные функции. Построение асимптотики основано на методе регуляризации для сингулярно возмущенных задач, разработанном С. А. Ломовым и адаптированном к сингулярно возмущенныем параболическим уравнениям с двумя вязкими границами одним из авторов.

***Ключевые слова*:** сингулярно возмущенное параболическое уравнение, параболический пограничный слой, регуляризованная асимптотика, экспоненциальный погранслой.

***AMS Subject Classification*:** 35K51,35B25

1. Постановка задачи. Рассмотрим первую краевую задачу для системы сингулярно возмущенных параболических уравнений

$$\begin{gathered} L_\varepsilon u(x,t,\varepsilon) \equiv \varepsilon\partial_t u - \varepsilon^2 a(x)\partial_x^2 u - A(t)u = f(x,t), \quad (x,t)\in\Omega, \\ u|_{t=0}=0, \quad u|_{x=0}=u|_{x=1}=0, \end{gathered} \tag{1}$$

где $\varepsilon > 0$ — малый параметр, $\Omega = \{(x,t) : x \in (0,1),\ t \in (0,T]\}$. Задача (1) изучается при следующих предположениях:

1) $0 < a(x) \in C^\infty[0,1]$, $A(t) \in C^\infty([0,T], C^{m^2})$, $f(x,t) \in C^\infty(\overline{\Omega}, C^m)$;
2) $m\times m$ матрица $A(t)$ имеет m простых собственных значений $\{\lambda_i(t)\}$, удовлетворяющих условиям
   a) $\lambda_i(t) \equiv 0$, $(i = 1,2,\ldots,k)$,
   b) $Re\lambda_i(t) \leqslant 0$, $(i = k+1,\ldots,m)$,
   c) $\lambda_i(t) \neq \lambda_j(t)\ \forall\, i \neq j$, $i,j = \overline{k+1,m}$;
3) собственному значению $\lambda_i(t) \equiv 0$, $(i = 1,2,\ldots,k)$ соответствует k линейно независимых собственных векторов $\{b_i(t)\}$, $i = \overline{1,k}$.

Будет построена регуляризованная асимптотика (см. [2]) решения поставленной задачи. Аналогичная задача изучена в [1], однако там получена асимптотика типа пограничного слоя.

2. Регуляризация задачи. Следуя [2], произведем регуляризацию задачи (1), для чего введем регуляризующие переменные [2, 3]

$$\begin{gathered} \tau = \frac{t}{\varepsilon^2}, \quad \mu_i = \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^t \lambda_i(s)ds \equiv \frac{\psi_i(t)}{\varepsilon}, \quad i = k+1,\ldots,m, \quad \xi_l = \frac{\varphi_l(x)}{\sqrt{\varepsilon}}, \\ \eta_l = \frac{\varphi_l(x)}{\sqrt{\varepsilon^3}}, \quad \varphi_l(x) = (-1)^{l-1}\int\limits_{l-1}^x \frac{ds}{\sqrt{a(s)}}, \quad l = 1,2, \end{gathered} \tag{2}$$

и расширенную функцию $\tilde{u}(M,\varepsilon)$, $M = (x,t,\eta,\xi,\tau,\mu)$, $\xi = (\xi_1,\xi_2)$, $\eta = (\eta_1,\eta_2)$, $\mu = (\mu_{k+1},\mu_{k+2},\ldots,\mu_m)$ такую, что

$$\tilde{u}(M,\varepsilon)|_{\theta=\gamma(x,t,\varepsilon)} \equiv u(x,t,\varepsilon), \qquad \gamma(x,t,\varepsilon) = \left(\frac{\varphi(x)}{\sqrt{\varepsilon}}, \frac{\varphi(x)}{\sqrt{\varepsilon^3}}, \frac{t}{\varepsilon^2}, \frac{\psi(t)}{\varepsilon}\right),$$
$$\theta = (\eta,\xi,\tau,\mu), \quad \varphi(x) = (\varphi_1(x),\varphi_2(x)), \quad \psi(t) = (\psi_{k+1}(t),\psi_{k+2}(t),\ldots\psi_m(t)). \tag{3}$$

Тогда на основании (1), (2), (3) относительно расширенной функции получим задачу

$$\tilde{L}_\varepsilon\tilde{u}(M,\varepsilon) \equiv \frac{1}{\varepsilon}T_0\tilde{u} + D_\lambda\tilde{u} - \sqrt{\varepsilon}L_\eta\tilde{u} + \varepsilon T_1\tilde{u} - \varepsilon\sqrt{\varepsilon}L_\xi\tilde{u} - \varepsilon^2 L_x\tilde{u} = f(x,t), \quad M \in Q$$
$$\tilde{u}|_{t=\tau=\mu=0} = 0, \quad \tilde{u}|_{x=0,\xi_1=\eta_1=0} = \tilde{u}|_{x=1,\xi_2=\eta_2=0} = 0, \quad Q = (0,1)\times(0,T)\times(0,\infty)^4, \tag{4}$$
$$T_0 \equiv \partial_\tau - \Delta_\eta, \quad D_\lambda \equiv \sum_{j=k+1}^{m}\lambda_j(t)\partial_{\mu_j}, \quad T_1 \equiv \partial_t - \Delta_\xi,$$

$$L_z \equiv a(x)\sum_{l=1}^{2}\left[2\varphi_l'(x)\partial^2_{x,z_l} + \varphi_l''(x)\partial_{z_l}\right], \quad L_x \equiv a(x)\partial_x^2, \quad Q = (0,1)\times(0,T)\times(0,\infty)^4.$$

Расширенная задача (4) регулярна по ε при $\varepsilon \to 0$, так как справедливо тождество

$$\tilde{L}_\varepsilon\tilde{u}(M,\varepsilon)|_{\theta=\gamma(x,t,\varepsilon)} \equiv L_\varepsilon u(x,t,\varepsilon).$$

Решение задачи (4) будем определять в виде ряда

$$\tilde{u}(M,\varepsilon) = \sum_{k=-2}^{\infty}\varepsilon^{\frac{k}{2}}u_k(M),$$

для коэффициентов которого получим итерационные задачи:

$$T_0u_k(M) = -D_\lambda u_{k-2}(M) + L_\eta u_{k-3})M) - T_1u_{k-4}(M) + L_\xi u_{k-5}(M) + L_xu_{k-6}(M),$$
$$u_k(M)|_{t=0} = 0, \quad u_k(M)|_{x=0,\eta_1=\xi_1=0} = 0, \quad u_k(M)|_{x=1,\eta_2=\xi_2=0} = 0, \quad k \geqslant -2.$$

Введем класс функций, в котором будут решаться итерационные задачи:

$$U = \left\{u_k(M) : u_k(M) = \sum_{i=1}^{m}\left[\upsilon_{k,i}(x,t) + Y_i^k(N) + \right.\right.$$
$$\left. + \sum_{j=k+1}^{m}\left(c_{i,j}^k(x,t) + \sum_{l=1}^{2}\omega_{i,j}^{k,l}(x,t)erfc\left(\frac{\xi_l}{2\sqrt{t}}\right)\right)\exp(\mu_j)\right]b_i(t),\ \upsilon_{k,i}(x,t)) \in C^\infty(\overline{\Omega}),$$
$$\left. \|Y_i^k(N)\| < c\exp\left(-\frac{|\eta|^2}{8\tau}\right),\ |\eta| = \sqrt{\eta_1^2+\eta_2^2},\ c_{i,j}^k(x,t), \omega_{i,j}^{k,l}(x,t) \in C^\infty(\overline{\Omega})\right\},$$

$N = (x,t,\eta,\tau)$, $\eta = (\eta_1,\eta_2)$, $\xi = (\xi_1,\xi_2)$, $b_i(t)$, $i = \overline{k+1,m}$ — собственный вектор матрицы $A(t)$, отвечающий собственному значению $\lambda_i(t)$, $i = k+1,k+2,\ldots,m$.

Пусть функция $u_k(M) \in U$ удовлетворяет граничным условиям (4):

$$\upsilon_{k,i}(x,t)|_{t=0} = \sum_{j=k+1}^{m}c_{i,j}^k(x,0), \quad i = \overline{1,k},$$

$$c_{j,j}^k(x,t)|_{t=0} = -\upsilon_{k,j}(x,0) - \sum_{\substack{r=k+1\\ j\neq r}}^{m}c_{j,r}^k(x,0), \quad j = \overline{k+1,m},$$
$$Y_i^k(N)|_{t=0} = 0, \quad Y_i^k(N)|_{\eta_l=0} = d^{k,l}(x,t), \quad d^{k,l}(x,t)|_{t=0} = \tilde{d}^{k,l}(x), \tag{5}$$
$$d^{k,l}(x,t)|_{x=l-1} = -\upsilon_{k,i}(l-1,t), \quad i = \overline{1,m},$$
$$\omega_{i,j}^{k,l}(x,t)|_{t=0} = \tilde{\omega}_{i,j}^{k,l}(x), \quad \omega_{i,j}^{k,l}(x,t)|_{x=l-1} = -c_{i,j}^k(l-1,t), \quad l = 1,2.$$

Итерационные уравнения разрешимы в классе функций U, если функция $Y_i^k(N)$ будет решением уравнения $T_0 Y_i^k(N) = F_i^k(N)$. Решение этого уравнения при соответствующих условиях из (5) представимо в виде (см. [4, с. 196])

$$Y_i^k(N) = \sum_{l=1}^{2} d_i^{k,l}(x,t) I_{1,l}(\eta,\tau) + I_i^k(N),$$

$$I_{1,l}(\eta,\tau) = \int\limits_0^z \int\limits_0^\infty \frac{\partial}{\partial\theta_l} \left[G(\xi_1,\xi_2,\theta_1,\theta_2,z-\nu)\right]_{\theta_l=0} d\theta_r d\nu, \quad l \neq r, \quad l,r = 1,2,$$

$$I_i^k(N) = \int\limits_0^z \int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty F_i^k(x,t,\theta,z-\nu) G(\xi,\theta,z-\nu) d\theta_1 d\theta_2 d\nu,$$

$$G(\xi,\theta,t) = \frac{1}{(2\sqrt{\pi t})^2} \left[\exp\left(-\frac{(\xi_1-\theta_1)^2}{4t}\right) - \exp\left(-\frac{(\xi_1+\theta_1)^2}{4t}\right)\right] \times$$
$$\times \left[\exp\left(-\frac{(\xi_2-\theta_2)^2}{4t}\right) - \exp\left(-\frac{(\xi_2+\theta_2)^2}{4t}\right)\right].$$

На каждом шаге итерации разрешимость итерационных уравнений обеспечивается выбором функций $\upsilon_{k,i}(x,t)$, $c_{i,j}^k(x,t)$, $\omega_{i,j}^{k,l}(x,t)$, а при дополнительных условиях (5) и $L_\eta u_k(M) = 0$, $L_\xi u_k(M) = 0$ обеспечивается однозначность построенного решения.

Входящие сюда функции $\tilde{d}^{k,l}(x)$, $\tilde{\omega}_{i,j}^{k,l}(x)$ являются произвольными функциями, они определяются из уравнений, которые получаются при выполнении приведенных условий.

В решении множители функций $d_i^{k,l}(x,t)$ и $\omega_{i,j}^{k,l}(x,t)$ обращаются в нуль при $t = 0$, поэтому в качестве значений этих функций при $t = 0$ выбраны произвольные функции $\tilde{d}^{k,l}(x)$, $\tilde{\omega}_{i,j}^{k,l}(x)$.

Показано, что сужение частичной суммы ряда посредством регуляризующих функций является формальным асимптотическим решением исходной задачи (1), т.е. доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* 1)–3). *Тогда сужение частичной суммы при* $\theta = \gamma(x,t,\varepsilon)$, *полученное вышеописанным методом, является асимптотическим решением задачи* (1), *т.е. при достаточно малых* ε *и* $n = -2,-1,0,1,\ldots$ *справедлива оценка*

$$\|u(x,t,\varepsilon) - u_{\varepsilon,n}(x,t,\gamma(x,t,\varepsilon)\| < c\varepsilon^{\frac{n+1}{2}}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бутузов В. Ф., Калачев Л. В.* Асимптотическое приближение решения краевой задачи для сингулярно возмущенного параболического уравнения в критическом случае// Мат. заметки. — 1986. — *89*, вып. 6. — С. 819–830.
2. *Ломов С. А.* Введение в общую теорию сингулярных возмущений. — М.: Наука, 1981. — 400 с.
3. *Омуралиев А. С.* Регуляризация двумерной сингулярно возмущенной параболической задачи// Ж. вычисл. мат. и мат. физ. — 2006. — *46*, № 8. — С. 1423–1432.
4. *Полянин А. Д.* Справочник по линейным уравнениям математической физики. — М., 2001. — 576 с.

А. С. Омуралиев
Кыргызско-Турецкий университет«Манас»
E-mail: `asan.omuraliev@mail.ru`

С. Кулманбетова
Нарынский государственный университет, Кыргызская Республика
E-mail: `sagynkulmanbetova@mail.ru`

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 132 (2017). С. 82–86

УДК 517.978.4

К ЗАДАЧЕ ГРУППОВОГО ПРЕСЛЕДОВАНИЯ В ЛИНЕЙНЫХ РЕКУРРЕНТНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИГРАХ

© 2017 г. **Н. Н. ПЕТРОВ, Н. А. СОЛОВЬЕВА**

Аннотация. Получены достаточные условия разрешимости задачи преследования группой преследователей одного или заданного числа убегающих в рекуррентных дифференциальных играх с равными возможностями всех участников.

Ключевые слова: дифференциальная игра, преследователь, убегающий, рекуррентная функция.

AMS Subject Classification: 49N75, 91A06

Рассматривается линейная нестационарная задача преследования группой преследователей одного или нескольких убегающих с равными динамическими и инерционными возможностями всех участников в предположении, что фундаментальная матрица однородной системы является рекуррентой и ее первая производная равномерно ограничена. Получены достаточные условия разрешимости задачи преследования одного убегающего и заданного числа убегающих. Полученные ниже результаты примыкают к предыдущим исследованиям [1, 3, 4].

1. Поимка одного убегающего. В пространстве $\mathbf{R}^k$ ($k \geqslant 2$) рассматривается дифференциальная игра Γ $n+1$ лиц: n преследователей $P_1, \ldots, P_n$ и убегающий E, описываемая системой вида

$$\dot{z}_i = A(t)z_i + u_i - v, \quad u_i, v \in V, \quad z_i(t_0) = z_i^0. \tag{1}$$

Здесь $z_i, z_i^0, u_i, v \in \mathbf{R}^k$, $i \in I = \{1, \ldots, n\}$, $A(t)$ — непрерывная на $[t_0, \infty)$ квадратная матрица порядка k, V — строго выпуклый компакт с гладкой границей, причем $z_i^0 \notin M_i$, где $M_i \subset \mathbf{R}^k$ — выпуклый компакт.

Определение 1 (см. [2]). Функция $f : \mathbf{R}^1 \to \mathbf{R}^k$ называется *рекуррентной по Зубову*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $T(\varepsilon) > 0$ такое, что для любых $a, t \in \mathbf{R}^1$ существует $\tau(t) \in [a, a + T(\varepsilon)]$, для которых справедливо неравенство

$$\|f(t + \tau(t)) - f(t)\| < \varepsilon.$$

Функция $f : [t_0, \infty) \to \mathbf{R}^k$ называется *рекуррентной на* $[t_0, \infty)$, если существует рекуррентная функция $F : \mathbf{R}^1 \to \mathbf{R}^k$ такая, что $f(t) = F(t)$ для всех $t \in [t_0, \infty)$.

Предположение 1. *Фундаментальная матрица* Φ *системы* $\dot{w} = A(t)w$, $\Phi(t_0) = E$ *является рекуррентной по Зубову функцией, а ее производная равномерно ограничена на* $[t_0, \infty)$.

Обозначим через $\operatorname{Int} A$, $\operatorname{co} A$ соответственно внутренность и выпуклую оболочку множества A.

Предположение 2. $0 \in \operatorname{Int} \operatorname{co}\{z_1^0 - M_1, \ldots, z_n^0 - M_n\}$.

Определение 2. В игре Γ происходит поимка, если для любого $\varepsilon > 0$ найдутся момент $T(\varepsilon) > t_0$, квазистратегии $Q_1, \ldots, Q_n$ преследователей $P_1, \ldots, P_n$ такие, что для любой измеримой функции $v(\cdot)$, $v(t) \in V$, $t \in [t_0, T(\varepsilon)]$ найдутся номер $l \in \{1, \ldots, n\}$ и момент $\tau \in [t_0, T(\varepsilon)]$ такие, что $z_l(\tau) \in M_l^\varepsilon$, где $M_l^\varepsilon = M_l + D_\varepsilon(0)$, $D_\varepsilon(a) = \{z \mid \|z - a\| < \varepsilon\}$.

Работа поддержана грантом РФФИ (16–01–00346) и Минобрнауки в рамках базовой части (проект 2003).

Лемма 1. *Пусть выполнено предположение* 2. *Тогда существует* $\varepsilon_0 > 0$ *такое, что выполнены следующие условия*:

1) $0 \notin D_{2\varepsilon_0}(z_i^0 - M_i)$ *для всех* i,
2) *для любых* $h_1 \in D_{2\varepsilon_0}(z_1^0), \dots, h_n \in D_{2\varepsilon_0}(z_n^0)$ *выполнено* $0 \in \operatorname{Int}\operatorname{co}\{h_1 - M_1, \dots, h_n - M_n\}$.

В дальнейшем считаем, что $\varepsilon_0 > 0$ выбрано в соответствии с условиями леммы 1.

Определим функции

$$\lambda(v, h_i) = \begin{cases} \sup\{\lambda : \ \lambda \geqslant 0, \ -\lambda(h_i - M_i) \cap (V - v) \neq \varnothing\}, & \text{если } h_i \notin M_i, \\ 0, & \text{если } h_i \in M_i, \end{cases}$$

$$F_i(t) = \int\limits_{t_0}^{t} \lambda(v(s), \Phi(s) z_i^0)\, ds.$$

Лемма 2 (см. [4]). *Пусть выполнены предположения* 1, 2. *Тогда существует* $T > t_0$ *такое, что для любого допустимого управления* $v(\cdot)$ *существует* $\alpha \in I$ *такое, что* $F_\alpha(T) \geqslant 1$.

Обозначим

$$T_0 = \inf\big\{t \geqslant t_0 \ \big| \ \inf_{v(\cdot)} \max_i F_i(t) \geqslant 1\big\}.$$

В силу леммы 2 $T_0 < \infty$.

Теорема 1. *Пусть выполнены предположения* 1, 2. *Тогда в игре* Γ *происходит поимка.*

Доказательство. По формуле Коши решение задачи (1)) при любых допустимых управлениях имеет вид

$$z_i(t) = \Phi(t)\left(z_i^0 + \int\limits_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s)(u_i(s) - v(s))ds\right). \tag{2}$$

Пусть $C = \max\limits_{i, m_i \in M_i} \|m_i\|$, $\varepsilon > 0$, $\varepsilon \leqslant \varepsilon_0$. В силу предположения 1 существует $T(\varepsilon) > T_0$, для которого выполнено $\|\Phi(T(\varepsilon)) - E\| < \dfrac{\varepsilon}{C+1}$. Предпишем преследователю P_i строить свое управление u_i следующим образом. Если в момент $t \geqslant t_0$ число $F_i(t) < 1$, то $u_i(t) \in V$, $m_i(t) \in M_i$ выбираются как лексикографический минимум среди решений уравнения

$$u_i(t) = v(t) - \lambda(v(t), \Phi(t) z_i^0)\Phi(t)(z_i^0 - m_i(t)).$$

Если τ_i — первый момент времени, для которого $F_i(\tau_i) = 1$, то полагаем $u_i(t) = v(t)$ для всех $t \geqslant \tau_i$.

Тогда из (2) получаем

$$z_i(T(\varepsilon)) = \Phi(T(\varepsilon))\left(z_i^0 - \int\limits_{t_0}^{T(\varepsilon)} \lambda(v(s), \Phi(s) z_i^0)(z_i^0 - m_i(s))ds\right) =$$

$$= \Phi(T(\varepsilon)) z_i^0 \left(1 - \int\limits_{t_0}^{T(\varepsilon)} \lambda(v(s), \Phi(s) z_i^0) ds\right) + \Phi(T(\varepsilon)) \int\limits_{t_0}^{T(\varepsilon)} \lambda(v(s), \Phi(s) z_i^0) m_i(s) ds.$$

В силу определения T_0, для некоторого $i \in I$ будет выполняться $F_i(T_0) = 1$. Поэтому

$$z_i(T(\varepsilon)) = \Phi(T(\varepsilon)) \int\limits_{t_0}^{T(\varepsilon)} \lambda(v(s), \Phi(s)z_i^0)m_i(s)ds = \int\limits_{t_0}^{T(\varepsilon)} \lambda(v(s), \Phi(s)z_i^0)m_i(s)ds+$$

$$+(\Phi(T(\varepsilon)) - E) \int\limits_{t_0}^{T(\varepsilon)} \lambda(v(s), \Phi(s)z_i^0)m_i(s)ds.$$

Отметим, что

$$\int\limits_{t_0}^{T(\varepsilon)} \lambda(v(s), \Phi(s)z_i^0)m_i(s)ds \in M_i,$$

а

$$\left\|(\Phi(T(\varepsilon)) - E) \int\limits_{t_0}^{T(\varepsilon)} \lambda(v(s), \Phi(s)z_i^0)m_i(s)ds\right\| \leqslant \frac{\varepsilon}{C+1} \cdot C < \varepsilon.$$

Поэтому $z_i(T(\varepsilon)) \in M_i + D_\varepsilon(0) = M_i^\varepsilon$, что и требовалось доказать. □

2. Поимка заданного числа убегающих. В пространстве $\mathbf{R}^k$ ($k \geqslant 2$) рассматривается дифференциальная игра Γ $n+m$ лиц: n преследователей $P_1, \ldots, P_n$ и m убегающих $E_1, \ldots, E_m$, описываемая системой вида

$$\dot{z}_{ij} = A(t)z_{ij} + u_i - v_j, \quad u_i, v_j \in V, \quad z_{ij}(t_0) = z_{ij}^0.$$

Цель группы преследователей — «поймать»не менее чем q ($1 \leqslant q \leqslant m$) убегающих при условии, что сначала убегающие выбирают свои управления сразу на $[t_0, \infty)$, а затем преследователи на основе информации о выборе убегающих выбирают свои управления, и, кроме того, каждый преследователь может «поймать»не более одного убегающего. Считаем, что $n \geqslant q$.

Определение 3. В игре Γ происходит поимка q убегающих, если для любого $\varepsilon > 0$ существует момент $T(\varepsilon) > t_0$, при котором для любой совокупности допустимых управлений $v_j(t)$ убегающих найдутся допустимые управления

$$u_i(t) = u_i\big(t,\ z_{ij}^0, \quad v_j(s), \quad s \in [t_0, \infty)\big),$$

обладающие следующим свойством: существуют множества

$$I_0 \subset I, \quad J_0 \subset J = \{1, \ldots, m\}, \quad |I_0| = |J_0| = q$$

такие, что каждый убегающий E_β, $\beta \in J_0$, ловится не позднее момента $T(\varepsilon)$ преследователем P_α, $\alpha \in I_0$, причем если преследователь P_α ловит убегающего E_β, то остальные убегающие считаются им не пойманными. Выражение«преследователь P_α ловит убегающего E_β»означает, что для некоторого $\tau \in [t_0, T(\varepsilon)]$ выполнено $z_{\alpha\beta}(\tau) \in M_{\alpha\beta}^\varepsilon$. (Предполагается, что $z_{\alpha\beta}^0 \notin M_{\alpha\beta}$).

Предположение 3. *Для каждого* $s \in \{0, 1, \ldots, q-1\}$ *верно следующее*: для любого множества $I_0 \subset I$, $|I_0| = n-s$, найдется такое множество $J_0 \subset J$, $|J_0| = q-s$, что $0 \in \operatorname{Int} \operatorname{co}\{z_{\alpha\beta}^0 - M_{\alpha\beta},\ \alpha \in I_0\}$ для всех $\beta \in J_0$.

Теорема 2. *Пусть выполнены предположения* 1 *и* 3. *Тогда в игре* Γ *происходит поимка не менее* q *убегающих.*

Доказательство. Докажем, что любые $n-s$ преследователей ловят не менее $q-s$ убегающих, где $s \in \{0, 1, \ldots, q-1\}$. При $s = 0$ получим утверждение теоремы.

Пусть $s = q-1$ и $N \subset I$, $|N| = n-s$. В силу предположения 3 по N существует $\beta \in J$ такой, что $0 \in \operatorname{Int} \operatorname{co}\{z_{\alpha\beta}^0 - M_{\alpha\beta},\ \alpha \in N\}$. Из теоремы 1 следует, что преследователи P_α, $\alpha \in N$, ловят убегающего E_β.

Предположим, что утверждение доказано для всех $s \geqslant k_0 + 1$. Докажем утверждение при $s = k_0$. Пусть $N \subset I$, $|N| = n - k_0$. Тогда существует множество $K \subset J$, $|K| = q - k_0$, такое, что $0 \in \operatorname{Int}\operatorname{co}\{z^0_{\alpha\beta} - M_{\alpha\beta},\ \alpha \in N\}$ для любого $\beta \in K$. Пусть $v_1(t), \ldots, v_m(t)$ — управления убегающих $E_1, \ldots, E_m$. Для каждого $\beta \in K$ определим множество

$$J_\beta = \{\alpha \in N: \text{ преследователь } P_\alpha \text{ ловит убегающего } E_\beta\}.$$

Без ограничения общности будем считать, что $K = \{1, 2, \ldots, q - k_0\}$ и $|J_1| \leqslant |J_2| \leqslant \cdots \leqslant |J_{r-k_0}|$. В силу теоремы 1 имеем $J_\beta \neq \varnothing$ для всех $\beta \in J$. Возможны два случая.

1. $\Bigl|\bigcup\limits_{\beta=1}^{n_1} J_\beta\Bigr| \geqslant n_1$ для любого $n_1 = 1, 2, \ldots, q - k_0$. Тогда по теореме Холла для множеств J_β существуют попарно различные $\alpha_\beta \in N$, $\beta \in K$, такие, что $\alpha_\beta \in J_\beta$. Таким образом, доказано, что преследователь P_{α_β} ловит убегающего E_β, $\beta \in K$, и утверждение в этом случае справедливо.

2. Существует $n_1 \in \{1, 2, \ldots, q - k_0\}$, при котором $\Bigl|\bigcup\limits_{\beta=1}^{n_1} J_\beta\Bigr| < n_1$. Пусть n_1 — наименьшее из натуральных чисел, удовлетворяющих данному свойству. Отметим, что

$$n_1 > 1 \quad \text{и} \quad \Bigl|\bigcup_{\beta=1}^{n_2} J_\beta\Bigr| \geqslant n_2 \quad \text{для всех} \quad n_2 \in \{1, 2, \ldots, n_1 - 1\}.$$

При $n_2 = n_1 - 1$ имеем систему неравенств

$$\Bigl|\bigcup_{\beta=1}^{n_1} J_\beta\Bigr| < n_1,$$

$$\Bigl|\bigcup_{\beta=1}^{n_1-1} J_\beta\Bigr| \geqslant n_1 - 1,$$

в силу которой получаем

$$\Bigl|\bigcup_{\beta=1}^{n_1} J_\beta\Bigr| = n_1 - 1.$$

Рассмотрим множество $N_1 = N \setminus \bigcup\limits_{\beta=1}^{n_1} J_\beta$. Множество N_1 не пусто, так как

$$|N| = n - k_0, \quad \Bigl|\bigcup_{\beta=1}^{n_1} J_\beta\Bigr| = n_1 - 1, \quad n_1 \in \{1, 2, \ldots, q - k_0\}, \quad n \geqslant q.$$

По индукционному предположению для числа $s = k_0 + n_1 - 1$ существует множество

$$K_1 \subset J, \quad |K_1| = q - (k_0 + n_1 - 1),$$

такое, что преследователи P_α, $\alpha \in N_1$, ловят убегающих E_β, $\beta \in K_1$, причем

$$\{1, 2, \ldots, n_1 - 1\} \cap K_1 = \varnothing,$$

так как в противном случае существовал бы номер $\alpha \in N_1$ такой, что преследователь P_α ловил бы убегающего E_β, где $\beta \in \{1, 2, \ldots, n_1 - 1\}$, что противоречит построению множества N_1. Тогда

$$\Bigl|\bigcup_{\beta=1}^{n_2} J_\beta\Bigr| \geqslant n_2 \quad \text{для всех} \quad n_2 \in \{1, 2, \ldots, n_1 - 1\}.$$

Применяя теорему Холла, получим, что для J_β существует система различных представителей, т.е. существуют попарно различные $\alpha_\beta \in J_\beta$, где $\beta = 1, 2, \ldots, n_1 - 1$. Значит, преследователи P_α, где $\alpha \in \bigcup\limits_{\beta=1}^{n_1-1} J_\beta$, ловят не менее $n_1 - 1$ убегающих. Таким образом, все преследователи ловят не менее

$$(q - (k_0 + n_1 - 1)) + (n_1 - 1) = q - k_0$$

убегающих. Теорема доказана. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Благодатских А. И.* Почти периодические конфликтно управляемые процессы со многими участниками// Изв. РАН. Теория и системы управления. — 2007. — № 2. — С. 83–86.
2. *Зубов В. И.* К теории рекуррентных функций// Сиб. мат. ж. — 1962. — Т. III, № 4. — С. 532–560.
3. *Петров Н. Н., Соловьева Н. А.* Задача преследования группы скоординированных убегающих в линейных рекуррентных дифференциальных играх// Изв. РАН. Теория и системы управления. — 2012. — № 6. — С. 29–37.
4. *Соловьева Н. А.* Одна задача группового преследования в линейных рекуррентных дифференциальных играх// Математическая теория игр и ее приложения. — 2011. — *3*, Вып. 1. — С. 81–90.

Н. Н. Петров
Удмуртский государственный университет
E-mail: kma3@list.ru

Н. А. Соловьева
Удмуртский государственный университет
E-mail: solov_na@mail.ru

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 132 (2017). С. 87–91

УДК 519.63

ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД ДЛЯ ДРОБНЫХ УРАВНЕНИЙ АДВЕКЦИИ-ДИФФУЗИИ С НАСЛЕДСТВЕННОСТЬЮ

© 2017 г. **В. Г. ПИМЕНОВ**

Аннотация. Рассматривается методика конструирования разностных схем для уравнений в частных производных дробного порядка с эффектом запаздывания по времени. Для уравнения с двухсторонней диффузией дробного порядка и дробным переносом по времени с функциональным последействием строится неявный численный метод. Используются сдвинутые формулы Грюнвальда—Летникова для аппроксимации дробных производных по пространственным переменным и $L1$-алгоритм для аппроксимации дробных производных по времени. Также используются кусочно-постоянная интерполяция и экстраполяция продолжением дискретной предыстории модели по времени. Алгоритм является дробным аналогом чисто неявного метода и сводится на каждом временном шаге к решению линейных алгебраических систем. Метод устойчив и получен порядок его сходимости.

Ключевые слова: уравнения с дробными производными, функциональное запаздывание, сеточные схемы, интерполяция, экстраполяция, порядок сходимости.

AMS Subject Classification: 65N12

Дробные дифференциальные уравнения [5] в последние десятилетия вызывают огромный интерес у прикладников в связи с большой точностью моделей во многих областях науки. В частности, имеется большое число работ по конструированию и исследованию численных алгоритмов решения уравнений с частными производными дробных порядков как по пространственным, так и по временной переменным [4, 6, 7]. Во многих моделях уравнения осложнены эффектом наследственности [8] — функционального запаздывания по времени — который близок по сути к эффекту, создающемуся дробными производными по времени. Оба эти эффекта можно считать частными случаями свойства вольтерровости. Однако уже ставшая традиционной методика исследования численных методов для систем с наследственностью с помощью вложения в общую схему [1, 2] в данном случае оказывается неприменимой. Настоящая работа существенно опирается на результаты работы [6].

Рассмотрим начально-граничную задачу для уравнения адвекции-диффузии с производными дробного порядка по времени и состоянию с эффектом функционального запаздывания

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\beta\frac{\partial^\gamma u}{\partial t^\gamma}=-V\frac{\partial u}{\partial x}+D\left(\frac{1}{2}+\frac{q}{2}\right)\frac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha}+D\left(\frac{1}{2}-\frac{q}{2}\right)\frac{\partial^\alpha u}{\partial(-x)^\alpha}+f(x,t,u(x,t),u_t(x,\cdot)), \tag{1}$$

где $x\in[a,b]$, $t\in[t_0,T]$ — независимые переменные, $u(x,t)$ — искомая функция, $u_t(x,\cdot)=\{u(x,t+s),\ -\tau\leqslant s<0\}$ — предыстория функции, $\tau>0$ — величина запаздывания. Предполагаем, что $\beta\geqslant 0$, $-1\leqslant q\leqslant 1$, $V>0$, $D>0$, $1<\alpha\leqslant 2$, $0<\gamma\leqslant 1$. Производная $\dfrac{\partial^\gamma u}{\partial t^\gamma}$ понимается в смысле Капуто, производные $\dfrac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha}$ и $\dfrac{\partial^\alpha u}{\partial(-x)^\alpha}$ — соответственно левосторонняя и правосторонняя производные Римана—Лиувилля [3]. Заданы также начальные условия $u(x,t)=\varphi(x,t)$, $x\in[a,b]$, $t\in[t_0-\tau,t_0]$, и граничные условия $u(a,t)=\varphi_1(t)$, $u(b,t)=\varphi_2(t)$, $t\in[t_0,T]$. Будем предполагать, что функции $\varphi(x,t)$, $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$, коэффициенты β, q, V, D и функционал f таковы, что эта задача имеет единственное решение $u(x,t)$. Кроме того, будем предполагать, что функционал

Исследования поддержаны Программой повышения конкурентоспособности ведущих университетов РФ (соглашение 02.A03.21.0006 от 27 августа 2013 г.) и проектом РНФ 14-35-00005.

$f(x,t,u,v(\cdot))$, определенный на $[a,b]\times[t_0,T]\times R\times Q$, липшицев по двум последним аргументам с константами L и K. Здесь через $Q=Q[-\tau,0)$ обозначено пространство функций $u(s)$, кусочно-непрерывных на $[-\tau,0)$ с конечным числом точек разрыва первого рода, в точках разрыва непрерывных справа, с нормой $\|u(\cdot)\|_Q=\sup\limits_{s\in[-\tau,0)}|u(s)|$.

Проведем дискретизацию задачи (1). Пусть $h=(b-a)/N$, $\Delta=(T-t_0)/M$, где N, M — положительные целые числа (предполагаем без ограничения общности, что $\tau/\Delta=m$ — положительное целое), введем $x_i=a+ih$, $i=0,\dots,N$, и $t_j=t_0+j\Delta$, $j=0,\dots,M$. Обозначим через u_j^i приближения значений функции $u(x_i,t_j)$ в узлах.

Для каждого фиксированного $i=0,\dots,N$ введем дискретную предысторию к моменту времени t_j, $j=0,\dots,M$: $\{u_k^i\}_j=\{u_k^i, j-m\leqslant k\leqslant j\}$. Отображение I: $\{u_k^i\}_j\to v^i(t)$, $t\in[t_j-\tau,t_j+\Delta]$ будем называть оператором интерполяции-экстраполяции дискретной предыстории. Так как мы будем строить неявный метод первого порядка по времени, будем использовать кусочно-постоянную интерполяцию с экстраполяцией продолжением

$$v^i(t)=\begin{cases}u_{l-1}^i, & t_{l-1}\leqslant t<t_l, \quad 1\leqslant l\leqslant j,\\ u_{j-1}^i, & t_j\leqslant t\leqslant t_j+\Delta,\\ \varphi(x_i,t), & t_0-\tau\leqslant t\leqslant t_0.\end{cases}$$

Для аппроксимации дробных производных по пространству будем использовать сдвинутые формулы Грюнвальда—Летникова

$$\frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha}u(x_i,t_{k+1})=\frac{1}{h^\alpha}\sum_{j=0}^{i+1}\omega_j^\alpha u(x_{i+1-j},t_{k+1})+O(h^p),$$

$$\frac{\partial^\alpha}{\partial(-x)^\alpha}u(x_i,t_{k+1})=\frac{1}{h^\alpha}\sum_{j=0}^{N-i+1}\omega_j^\alpha u(x_{i-1+j},t_{k+1})+O(h^p).$$

Коэффициенты ω_j^α определяются неоднозначно. Положим

$$\omega_j^\alpha=(-1)^j\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-j+1)}{j!},\quad j=0,1,\dots,$$

тогда $p=1$.

Для аппроксимации дробных производных Капуто по времени будем использовать $L1$-алгоритм

$$\frac{\partial^\gamma}{\partial t^\gamma}u(x,t_{k+1})=\frac{1}{\Delta^\gamma\Gamma(2-\gamma)}\sum_{j=0}^{k}b_j^\gamma[u(x,t_{k+1-j}-u(x,t_{k-j})]+O(\Delta^{2-\gamma}),$$

где $b_j^\gamma=(j+1)^{1-\gamma}-j^{1-\gamma}$, $j=0,1,\dots,M$.

Используя также формулы численного дифференцирования для $\dfrac{\partial}{\partial x}u(x_i,t_{k+1})$ и $\dfrac{\partial}{\partial t}u(x_i,t_{k+1})$, получаем следующую неявную разностную схему

$$\frac{u_{k+1}^i-u_k^i}{\Delta}+\frac{\beta}{\Delta^\gamma\Gamma(2-\gamma)}\sum_{j=0}^{k}b_j^\gamma[u_{k+1-j}^i-u_{k-j}^i]=$$
$$=-V\frac{u_{k+1}^i-u_{k+1}^{i-1}}{h}+\left(\frac12+\frac q2\right)\frac{D}{h^\alpha}\sum_{j=0}^{i+1}\omega_j^\alpha u_{k+1}^{i+1-j}+\left(\frac12-\frac q2\right)\frac{D}{h^\alpha}\sum_{j=0}^{N-i+1}\omega_j^\alpha u_{k+1}^{i-1+j}+f_{j+1}^i, \tag{2}$$
$$f_{j+1}^i=f(x_i,t_{j+1},v^i(t_j+\Delta),v_{t_j+\Delta}^i(\cdot)).$$

Схема дополняется начальными условиями $u_0^i=\varphi(t_i)$, $i=0,1,\dots,N$, и граничными условиями $u_k^0=\varphi_1(t_k)$, $u_k^N=\varphi_2(t_k)$, $k=1,2,\dots,M$.

Из результатов работы [6] следует утверждение.

Теорема 1. *Система* (2) *имеет единственное решение.*

Метод (2) может быть сведен к общей схеме разностных схем систем с наследственностью [5]. Определим для каждого временного слоя с номером $j = 0, 1, \ldots, M$ послойный вектор $u_j = (u_j^0, u_j^1, \ldots, u_j^N)$.

Определим накопившуюся предысторию послойных векторов к моменту t_j, $j = 0, 1, \ldots, M$, вектором $y_i = \{u_k\}_j = \{u_k, 0 \leqslant k \leqslant j\}$.

Так как система (2) разрешима, то она может быть записана в виде

$$y_{j+1} = S_j y_j + \Delta\Phi(t_j, I(\{y_k\}_j)).$$

Размерность вектора y_j — $(M+1) \times (j+1)$, соответственно размерность вектора y_{j+1} — $(M+1) \times (j+2)$, следовательно, матрица S_j не квадратная. Хотя в общей разностной схеме вводится определение устойчивости метода и в этом случае, однако эффективные спектральные критерии отсутствуют. Поэтому доказательство сходимости метода (2) и определение порядка его сходимости проведем по определению с использованием техники исследования численных алгоритмов систем с наследственностью [1, 2] и численных алгоритмов для дробных уравнений [6].

Обозначим через $\varepsilon_j^i = u(x_i, t_j) - u_j^i$ погрешность метода в узлах. Будем говорить, что метод сходится с порядком $h^p + \Delta^q$, если существует постоянная C, не зависящая от h и Δ, такая, что $|\varepsilon_j^i| \leqslant C(h^p + \Delta^q)$ для всех $i = 0, 1, \ldots, N$ и $j = 0, 1, \ldots, M$.

Введем для всякого временного слоя $j = 0, 1, \ldots, M$ послойную погрешность $\varepsilon_j = (\varepsilon_j^1, \varepsilon_j^2, \ldots, \varepsilon_j^{N-1})$ и её норму $\|\varepsilon_j\| = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant N-1} |\varepsilon_j^i|$.

Введем также накапливающуюся предысторию погрешности к моменту t_j, $j = 0, 1, \ldots, M$: $\{\varepsilon_k\}_j = \{\varepsilon_k, 0 \leqslant k \leqslant j\}$ и её норму $\|\{\varepsilon_k\}_j\| = \max\limits_{0 \leqslant k \leqslant j} \|\varepsilon_k\|$.

Невязкой (без интерполяции) метода (2) назовем выражение

$$\psi_k^i = \frac{u(x_i, t_{k+1}) - u(x_i, t_k)}{\Delta} + \frac{\beta}{\Delta^\gamma \Gamma(2-\gamma)} \sum_{j=0}^{k} b_j^\gamma [u(x_i, t_{k+1-j}) - u(x_i, t_{k-j})] +$$

$$+ V \frac{u(x_i, t_{k+1}) - u(x_{i-1}, t_{k+1})}{h} - \left(\frac{1}{2} + \frac{q}{2}\right) \frac{D}{h^\alpha} \sum_{j=0}^{i+1} \omega_j^\alpha u(x_{i+1-j}, t_{k+1}) -$$

$$- \left(\frac{1}{2} - \frac{q}{2}\right) \frac{D}{h^\alpha} \sum_{j=0}^{N-i+1} \omega_j^\alpha u(x_{i-1+j}, t_{k+1}) - \hat{f}_{k+1}^i,$$

$$\hat{f}_{k+1}^i = f(x_i, t_{k+1}, u(x_i, t_{k+1}), u_{t_{k+1}}(x_i, \cdot)).$$

Теорема 2. *Пусть в своих областях определения точное решение задачи* (1) $u(x,t)$ *дважды непрерывно дифференцируемо по* t *и дважды непрерывно дифференцируемо по* x*, а также дробные производные* $\dfrac{\partial^\alpha u}{\partial_+ x^\alpha}$ *и* $\dfrac{\partial^\alpha u(x,t)}{\partial(-x)^\alpha}$ *дважды непрерывно дифференцируемы по* x*. Тогда невязка* (*без интерполяции*) *метода имеет порядок* $\Delta + h$*, т.е. найдется такая константа* C_1*, что* $|\psi_j^i| \leqslant C_1(h + \Delta)$ *для всех* $i = 0, 1, \ldots, N$ *и* $j = 0, 1, \ldots, M$.

Утверждение проверяется с помощью тейлоровских разложений входящих в определение невязки значений функции $u(x,t)$ в точке (x_i, t_{k+1}). В дальнейшем будем считать предположения этой теоремы о гладкости точного решения выполненными.

Для каждого фиксированного $i = 0, \ldots, N$ введем дискретную предысторию точного решения в точках разбиения по времени t_j, $j = 0, \ldots, M$: $\{u(x_i, t_k)\}_j = \{u(x_i, t_k), j - m \leqslant k \leqslant j\}$. Мы будем использовать кусочно-постоянную интерполяцию с экстраполяцией по времени точного решения

$$w^i(t) = \begin{cases} u(x_i, t_{l-1}), & t_{l-1} \leqslant t \leqslant t_l, \quad 1 \leqslant l \leqslant j, \\ u(x_i, t_{j-1}), & t_j \leqslant t \leqslant t_j + \Delta, \\ \varphi(x_i, t), & t_0 - \tau \leqslant t \leqslant t_0. \end{cases}$$

Невязкой (с интерполяцией) метода (2) назовем следующую сеточную функцию

$$\nu_k^i = \frac{u(x_i,t_{k+1}) - u(x_i,t_k)}{\Delta} + \frac{\beta}{\Delta^\gamma \Gamma(2-\gamma)} \sum_{j=0}^{k} b_j^\gamma [u(x_i,t_{k+1-j}) - u(x_i,t_{k-j})] +$$

$$+V\frac{u(x_i,t_{k+1}) - u(x_{i-1},t_{k+1})}{h} - \left(\frac{1}{2}+\frac{q}{2}\right)\frac{D}{h^\alpha}\sum_{j=0}^{i+1}\omega_j^\alpha u(x_{i+1-j},t_{k+1}) -$$

$$-\left(\frac{1}{2}-\frac{q}{2}\right)\frac{D}{h^\alpha}\sum_{j=0}^{N-i+1}\omega_j^\alpha u(x_{i-1+j},t_{k+1}) - \check{f}_{k+1}^i,$$

$$\check{f}_{k+1}^i = f(x_i, t_{k+1}, w^i(t_k+\Delta), w_{t_k+\Delta}^i(\cdot)).$$

Из свойств кусочно-постоянной интерполяции с экстраполяцией продолжением вытекает утверждение.

Теорема 3. *В условиях предыдущей теоремы невязка метода с кусочно-постоянной интерполяцией и экстраполяцией продолжением имеет порядок* $\Delta + h$, *т.е. найдется такая константа* C_2, *что* $|\nu_j^i| \leqslant C_2(h+\Delta)$ *для всех* $i = 0,1,\ldots,N$ *и* $j = 0,1,\ldots,M$.

Подобно [6] выводятся оценки для послойной погрешности и накапливающейся предыстории послойной погрешности.

Теорема 4. *Пусть*

$$|\varepsilon_{k+1}^{i_0}| = \max_{1\leqslant i\leqslant N-1} |\varepsilon_{k+1}^i|,$$

тогда

$$(1+\beta r_1)\|\varepsilon_{k+1}\| \leqslant \left|\varepsilon_k^{i_0} + \beta r_1\left[b_k^\gamma \varepsilon_0^{i_0} + \sum_{j=0}^{k-i}(b_j^\gamma - b_{j+1}^\gamma)\varepsilon_{k-j}^{i_0}\right] + \Delta\check{f}_{k+1}^{i_0} - \Delta f_{k+1}^{i_0} + \Delta\nu_k^{i_0}\right|.$$

где $r_1 = \Delta^{1-\gamma}/\Gamma(2-\gamma)$.

Теорема 5.

$$\|\{\varepsilon_j\}_{k+1}\| \leqslant (1+(L+K)\Delta)\|\{\varepsilon_j\}_k\| + C_2\Delta(h+\Delta).$$

Из этих утверждений вытекает теорема о порядке сходимости.

Теорема 6. *Метод* (2) *с кусочно-постоянной интерполяцией и экстраполяцией продолжением сходится с порядком* $\Delta + h$.

Численные эксперименты, проведенные на тестовых примерах, показали хорошее соответствие теоретическим результатам.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Пименов В. Г.* Разностные методы решения уравнений в частных производных с наследственностью. — Екатеринбург: изд-во Уральского университета, 2014.
2. *Пименов В. Г., Ложников А. Б.* Разностные схемы численного решения уравнения теплопроводности с последействием// Труды ИММ УрО РАН. — 2011. — *17*, № 1. — С. 178–189.
3. *Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И.* Интегралы и производные дробного порядка и их приложения. — Минск: Наука и техника, 1987.
4. *Шхануков-Лафишев М. Х., Таукенова Ф. И.* Разностные методы решения краевых задач для дифференциальных уравнений дробного порядка// Ж. вычисл. мат. — 2006. — *46*, № 10. — С. 1871–1881.
5. *Diethelm K.* The Analysis of Fractional differential equations. — Berlin: Springer, 2010.
6. *Liu F., Zhuang P., Burrage K.* Numerical methods and analysis for a class of fractional advetion-dispersional models// Comput. Math. Appl. — 2012. — *64*. — С. 2990–3007.
7. *Tadjeran C., Meerschaert M. M., Scheffler H. P.* A second-order accurate numerical approximation for the fractional diffusion equation// J. Comput. Phys. — 2006. — *213*. — С. 205–214.

8. *Wu J.* Theory and Applications of Partial Functional Differential Equations. — New York: Springer-Verlag, 1996.

В. Г. Пименов
Уральский федеральный университет
Институт математики и механики УрО РАН
E-mail: `V.G.Pimenov@urfu.ru`

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 132 (2017). С. 92–95

УДК 527.927

О РАЗРЕШИМОСТИ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИНГУЛЯРНОГО КВАЗИЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

© 2017 г. **В. П. ПЛАКСИНА, И. М. ПЛАКСИНА, Э. В. ПЛЕХОВА**

Посвящается памяти Н. В. Азбелева

Аннотация. В работе получены условия разрешимости двухточечной краевой задачи для квазилинейного уравнения второго порядка. Уравнение является сингулярным по независимой переменной. Результат базируется на свойствах оператора Грина соответствующей линейной задачи. В частности, доказана его ограниченность, получена оценка его нормы сверху. Условия существования решения исходной задачи получены из условий разрешимости вспомогательного операторного уравнения.

Ключевые слова: сингулярное обыкновенное дифференциальное уравнение, краевая задача, оператор Грина, квазилинейное уравнение.

AMS Subject Classification: 34B05, 34B16

1. Введение. В предлагаемой работе рассматривается полуоднородная двухточечная краевая задача для квазилинейного дифференциального уравнения второго порядка

$$\ddot{x}(t) - \frac{m}{t^2(b-t)^2}x(t) = f\big(t, x(t), \dot{x}(t)\big), \quad t \in [0, b], \tag{1}$$

$$x(0) = 0, \quad x(b) = 0, \quad \dot{x}(0) = 0, \quad \dot{x}(b) = 0. \tag{2}$$

Здесь $m \in \mathbb{R}$, функция $f(\cdot,\cdot,\cdot)$ удовлетворяет условиям Каратеодори, а именно: функция $f(\cdot, u_1, u_2)$ измерима при всех $u_1, u_2 \in \mathbb{R}$; функция $f(t,\cdot,\cdot)$ непрерывна при почти всех $t \in [0, b]$.

Уравнение (1) содержит несуммируемый на отрезке $[0, b]$ коэффициент $\dfrac{m}{t^2(b-t)^2}$ и является сингулярным по независимой переменной, причем сингулярность сосредоточена на концах отрезка $[0, b]$. Кроме того, формально задача является переопределенной.

Сингулярные по независимой переменной уравнения систематически изучались И. Т. Кигурадзе и его учениками. Обзор результатов и состояние проблем в этой области на период до 1987г. приведены в [6]. В основной части этих исследований применяется техника дифференциальных неравенств, позволяющая допускать достаточно общие ограничения на сингулярный коэффициент.

В предлагаемой работе используется подход, связанный с определением пространства решений, изоморфного прямому произведению $\mathbb{B}\times\mathbb{R}^n$, где $\mathbb{B}$ — банахово пространство. Такой подход широко применяется в работах представителей пермской школы ФДУ. При этом оказывается возможным исследование уравнений с сингулярностями специального вида. Так, в [7], в частности, получены условия разрешимости уравнения $\pi(t)\ddot{x}(t) + (Tx)(t) = f(t)$ с условиями $x(0) = 0$, $x(1) = 0$, суммируемой правой частью f и коэффициентом π вида $\pi(t) = t(1-t)$. В [5] $\pi(t) = \prod\limits_{i=1}^{n}(t - a_i)$, где $a_i \in [0, 1]$. В [3] в качестве $\pi(t)$ выступают функции t; $1-t$; $t(1-t)$, а краевые условия имеют вид $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 0$; $x(1) = 0$, $\dot{x}(1) = 0$; $x(0) = 0$, $x(1) = 0$ соответственно.

Работа И. М. Плаксиной поддержана Российским фондом фундаментальных исследований, проект № 14-01-00338.

Все перечисленные результаты подробно изложены в [4, с. 151–182]. Там же приведены условия разрешимости уравнения химического реактора $\ddot{x}(t) + \frac{k}{t}\dot{x}(t) = f\big(t, x(t)\big)$ и соответствующего линейного уравнения.

В [1] получены условия разрешимости полуоднородной задачи Коши для уравнения $\ddot{x}(t) + \frac{m}{t^2}x(t) = f\big(t, x(t)\big)$. Отметим также работу [8], в которой рассматривается уравнение с отклонением в сингулярном слагаемом. Предлагаемая работа является продолжением работ [1, 8].

2. Вспомогательные результаты. Решения задачи (1), (2) будем искать в пространстве W^p абсолютно непрерывных вместе с первой производной функций $x\colon [0, b] \to \mathbb{R}$, имеющих вторую производную в пространстве L^p. Здесь L^p — пространство измеримых функций $z\colon [0, b] \to \mathbb{R}$, удовлетворяющих условию

$$\|z\|_{L^p} = \left(\int\limits_0^b |z(s)|^p\,ds\right)^{1/p} < \infty,$$

где $1 < p < \infty$. Положим $p' = \dfrac{p}{p-1}$.

Рассмотрим вспомогательное уравнение

$$(\delta x)(t) \equiv \ddot{x}(t) - \frac{m}{t^2(b-t)^2}x(t) = z(t), \quad t \in [0, b] \tag{3}$$

и через W_0^p обозначим пространство функций $x \in W^p$, для которых выполняются условия (2), с нормой $\|x\|_{W_0^p} = \|\ddot{x}\|_{L^p}$. Пусть всюду далее

$$m > \frac{1}{p'}\left(1 + \frac{1}{p'}\right)b^2. \tag{4}$$

Лемма 1. *Пространство W_0^p изоморфно пространству L^p.*

Отметим, что изоморфизм определяется равенством (3). Обратное преобразование будет приведено ниже.

Лемма 2. *Оператор $\delta\colon W_0^p \to L^p$ фредгольмов.*

Положим $m = (\gamma^2 - \gamma)b^2$, причем $\gamma > 1 + \dfrac{1}{p'}$. Определим линейный оператор Λ представлением

$$(\Lambda z)(t) = \frac{1}{(1-2\gamma)b}\left[\int\limits_0^t \left(\frac{b-t}{t}\frac{s}{b-s}\right)^{\gamma}(b-s)tz(s)\,ds + \int\limits_t^b \left(\frac{t}{b-t}\frac{b-s}{s}\right)^{\gamma}(b-t)sz(s)\,ds\right].$$

Лемма 3. *Оператор $\Lambda\colon L^p \to W_0^p$ ограничен, причем*

$$\|\Lambda\|_{L^p \to W_0^p} \leqslant 1 + 4m\left[m - \frac{1}{p'}\left(1 + \frac{1}{p'}\right)b^2\right]^{-1}.$$

Основное затруднение в доказательстве леммы 3 состоит в проверке того факта, что

$$\frac{d^2}{dt^2}(\Lambda z)(t) \in L^p.$$

Она проводится с помощью теста Шура [9, с. 33], [2]. Согласно тесту Шура, существование почти всюду неотрицательной функции v_1 и положительной функции v_2 таких, что для почти всех t и s выполняются неравенства

$$\left[\int\limits_0^\infty \mathcal{K}(t, s)v_2(s)\,ds\right]^{p-1} \leqslant \alpha v_1(t)$$

и

$$\int_0^\infty \mathcal{K}(t,s)v_1(t)\,dt \leqslant \beta\big[v_2(s)\big]^{p-1},$$

гарантирует ограниченность линейного интегрального оператора $\mathcal{K}$ с положительным почти всюду ядром $\mathcal{K}(t,s)$ и оценку нормы $\big\|\mathcal{K}\big\|^p_{L^p\to L^p} \leqslant \alpha\beta$.

Оценку $\|\Lambda\|_{L^p\to W^p_0}$ найдем, положив

$$v_1(t) = \begin{cases} t^{-1/p'}, & \text{если} \quad 0 \leqslant t < \dfrac{b}{2}, \\ (b-t)^{-1/p'}, & \text{если} \quad \dfrac{b}{2} \leqslant t \leqslant b; \end{cases} \qquad v_2(s) = \begin{cases} s^{-1/p}, & \text{если} \quad 0 \leqslant s < \dfrac{b}{2}, \\ (b-s)^{-1/p}, & \text{если} \quad \dfrac{b}{2} \leqslant s \leqslant b. \end{cases}$$

Замечание 1. Условие (4) является неулучшаемым в том смысле, что при $m = \dfrac{1}{p'}\left(1+\dfrac{1}{p'}\right)b^2$ оператор Λ не является ограниченным. Действительно, для последовательности функций

$$z_n(t) = \begin{cases} c_n t^{-\frac{1}{p}+\frac{1}{n}}, & \text{если} \quad 0 \leqslant t \leqslant \dfrac{b}{2}, \\ 0, & \text{если} \quad \dfrac{b}{2} < t \leqslant b \end{cases}$$

с единичной нормой в пространстве L^p соответствующая последовательность решений x_n уравнения (3) такова, что $\|x_n\|_{W^p_0} \to \infty$ при $n \to \infty$.

Лемма 4. *Оператор Λ является обратным к оператору δ.*

3. Основной результат.

Теорема 1. *Пусть выполняется неравенство* (4) *и справедливы следующие условия*:

a) *для почти всех $t \in [0,b]$ и любых $u_1, u_2 \in \mathbb{R}$ имеет место оценка $\big|f(t,u_1,u_2)\big| < a(t) + b_1|u_1| + b_2|u_2|$, где функция $a(\cdot)$ суммируема со степенью p, b_1 и b_2 — неотрицательные константы*;

b) $\left(1 + 4m\left[m - \dfrac{1}{p'}\left(1+\dfrac{1}{p'}\right)b^2\right]^{-1}\right)\left(\dfrac{b_1}{p^{1/p}} + \dfrac{b_2}{p^{2/p}}\right) < 1.$

Тогда справедливы следующие утверждения:

1. *задача* (3), (2) *однозначно разрешима в пространстве W^p*;
2. *задача* (1), (2) *имеет хотя бы одно решение.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Абдуллаев А. Р., Конопацкая Е. В., Плехова Э. В.* О дифференциальном операторе второго порядка с сингулярным потенциалом// Науч.-техн. вестн. Поволжья. — 2014. — № 6. — С. 14–18.
2. *Абдуллаев А. Р., Плаксина И. М.* Об оценке спектрального радиуса одного сингулярного интегрального оператора// Изв. вузов. Мат. — 2015. — № 2. — С. 3–9.
3. *Азбелев Н. В., Алвеш М. Ж., Бравый Е. И.* О сингулярных краевых задачах для линейного функционально-дифференциального уравнения второго порядка// Изв. вузов. Мат. — 1999. — № 2. — С. 3–11.
4. *Азбелев Н. В., Максимов В. П., Рахматуллина Л. Ф.* Элементы современной теории функционально-дифференциальных уравнений. Методы и приложения. — М.: Ин-т компьютерных исследований, 2002.
5. *Бравый Е. И.* О регуляризации сингулярных линейных функционально-дифференциальных уравнений// Дифференц. уравнения. — 1994. — *30*, № 1. — С. 26–34.
6. *Кигурадзе И. Т., Шехтер Б. Д.* Сингулярные краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений// Итоги науки и техники/ Сер. Современные проблемы матем.: Новые достижения. — 1987. — *30*. — С. 105–201.
7. *Лабовский С. М.* О положительных решениях двухточечной краевой задачи для линейного сингулярного функционально-дифференциального уравнения// Дифференц. уравнения. — 1988. — *10*, № 24. — С. 1695–1704.

8. *Плаксина В. П., Плаксина И. М., Плехова Э. В.* О разрешимости задачи Коши для квазилинейного сингулярного функционально-дифференциального уравнения// Изв. вузов. Мат. — 2016. — № 2. — С. 54–61.
9. *Халмош П., Сандер В.* Ограниченные интегральные операторы в пространствах L^2. — М.: Наука, 1985.

В. П. Плаксина
Пермский национальный исследовательский политехнический университет
E-mail: vpplaksina@list.ru

И. М. Плаксина
Пермский национальный исследовательский политехнический университет
E-mail: impl@list.ru

Э. В. Плехова
Пермский национальный исследовательский политехнический университет
E-mail: elvira.plekhova@mail.ru

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 132 (2017). С. 96–101

УДК 519.217, 519.676

ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ АНАЛИЗА СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМ С РАЗЛИЧНЫМИ ФОРМАМИ ЗАПАЗДЫВАНИЯ

© 2017 г. **И. Е. ПОЛОСКОВ**

Аннотация. В настоящей работе дан краткий обзор методов качественного и количественного исследования различных классов стохастических систем с последействием, представлены разработанные автором схемы анализа стохастических дифференциальных и интегродифференциальных уравнений в обыкновенных и частных производных, пригодные для анализа и их детерминированных аналогов. Указанные численно-аналитические схемы программно реализованы в среде пакета *Mathematica* и на языке *Intel Fotran*.

Ключевые слова: стохастическая динамическая система, запаздывание, анализ, вектор состояния, моментные характеристики, численно-аналитические методы.

AMS Subject Classification: 34F05, 34K50, 60H35, 65C30

1. Введение. Известно, что первые серьезные исследования, связанные с учетом влияния последействия на динамику систем различных классов, начались еще в середине двадцатого столетия. Но только в последние десятилетия такие исследования стали интенсивно развиваться. Их необходимость диктуется потребностями теории и практики: сначала это были задачи управления, а затем биологии, механики, физики, химии, медицины, экономики, финансов, атомной энергии и т.д.

Математическими моделями соответствующих процессов служат функционально-дифференциальные уравнения (ФДУ) [1, 9, 10, 17] и, в частности, дифференциальные уравнения с отклоняющимися аргументами, включающие уравнения с запаздыванием (ДУсЗ) и нейтрального типа (НДУ), интегродифференциальные уравнения (ИДУ) и др. Такие уравнения применяются для описания процессов автоматического регулирования и управления техническими системами, химико-технологических и других производственных процессов; генерации сигналов в радиосхемах и лазерах, горения в жидкостно-реактивных двигателях, замедления нейтронов и т.д.

В процессе развития методов анализа детерминированных систем с последействием возник интерес к стохастическим ФДУ разных типов [8, 11], с помощью которых могут исследоваться новые эффекты. Но анализ таких систем затруднен. Это привело к тому, что до последнего времени многие попытки анализа стохастических ФДУ (СФДУ) ограничиваются качественными исследованиями поиска условий существования решений и их устойчивости.

Среди СФДУ можно выделить класс линейных и нелинейных стохастических ДУ (СДУ) в обыкновенных и частных производных с конечными сосредоточенными (СОДУсЗ, СДУвЧПсЗ) и распределенными запаздываниями (СОИДУ, СИДУвЧП).

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (проект № 14-01-96019).

Методы количественного исследования таких ФДУ включают (ссылки на конкретные публикации см., например, в [6,16,18]): общие численные схемы (моментов, спектральный, на основе применения сплайнов, интеграла по траекториям, конечных разностей, коллокаций, трапеций, применение вейвлетов); разложения по функциям Уолша, Чебышева, Хаара, Sinc-функциям; алгоритмы численного интегрирования (методы Эйлера (простой, полунеявный, обратный с расщеплением, Эрмита), Эйлера—Маруямы, Рунге—Кутты, Хойна, Мильштейна, θ-метод, многошаговые интеграторы, τ-метод); процедуры статистического моделирования (Монте-Карло); приближенно-аналитические методы (гармонического баланса, эквивалентной линеаризации, усреднения, возмущений, итераций, последовательных приближений, вариационно-итерационный, квазилинеаризации, асимптотический, разложения в ряды Тейлора и Прони, МКЭ, (Петрова—, Бубнова—) Галёркина, неподвижной точки, энергетические, замена ядра ИДУ вырожденным, разложения по гамма-распределениям). Но наряду со значительным спектром процедур решения СФДУ с различными типами запаздываний алгоритмы численного или приближенно-аналитического интегрирования стохастических систем рассматриваемой структуры развиты недостаточно.

Ниже кратко представлены три группы приближенно-аналитических методов, предназначенных на анализа СДУсЗ и СИДУ разных типов. Более подробно эти методы, их модификации и примеры применения представлены в [2–7, 12, 15, 16, 18] и других наших работах.

В следуюших разделах предполагается, что исследуемые стохастические уравнения имеют единственное решение (условия и необходимые определения см. в [13, 14]), и используются общие обозначения: t — время ($t_0 < t \leqslant T < +\infty$); $\boldsymbol{X}(t) = \{X_i(t)\}^\intercal \in \mathbb{R}^n$ — вектор состояния; $\boldsymbol{X}^0$ — случайный вектор с известными статистическими характеристиками, определяющий начальное состояние; $\boldsymbol{W}(t) \in \mathbb{R}^m$ — вектор независимых винеровских процессов с единичными интенсивностями; $\mathcal{E}[\ldots]$ и $\intercal$ — символы математического ожидания и транспонирования соответственно, п.н. — почти наверное.

2. Сочетание метода шагов и расширения пространства состояний. Рассмотрим систему СОДУсЗ (в смысле Стратоновича) вида

$$d\boldsymbol{X}(t) = \boldsymbol{f}\big(\boldsymbol{X}(t), \boldsymbol{X}(t-\tau), t\big)\,dt + \mathcal{G}\big(\boldsymbol{X}(t), \boldsymbol{X}(t-\tau), t\big) \circ d\boldsymbol{W}(t), \quad t > t_1 = t_0 + \tau. \tag{1}$$

Здесь τ — постоянное запаздывание, $\boldsymbol{f}(\cdot,\cdot,\cdot) = \{f_i(\cdot,\cdot,\cdot)\}^\intercal$, $\mathcal{G}(\cdot,\cdot,\cdot) = \{g_{ij}(\cdot,\cdot,\cdot)\}$ — детерминированные вектор и матрица соответственно. Будем считать, что на отрезке $(t_0, t_1]$ вектор состояния $\boldsymbol{X}(t)$ удовлетворяет системе СДУ без запаздывания

$$d\boldsymbol{X}(t) = \boldsymbol{f}_0\big(\boldsymbol{X}(t), t\big)\,dt + \mathcal{G}_0\big(\boldsymbol{X}(t), t\big) \circ d\boldsymbol{W}(t), \quad \boldsymbol{X}(t_0) = \boldsymbol{X}^0 \text{ п.н.} \tag{2}$$

$\boldsymbol{f}_0(\cdot,\cdot) = \{f_{0i}(\cdot,\cdot)\}^\intercal$, $\mathcal{G}_0(\cdot,\cdot) = \{g_{0ij}(\cdot,\cdot)\}$, а вектор $\boldsymbol{X}^0$ имеет плотность вероятности $p^0(\boldsymbol{x})$.

Заметим, что задание на начальном множестве $[t_0, t_0+\tau]$ вектора состояния $\boldsymbol{X}(t)$ в виде $\boldsymbol{X}(t) = \boldsymbol{X}^0$ или $\boldsymbol{X}(t) = \boldsymbol{\varphi}(t)$, где $\boldsymbol{\varphi}(t)$ — заданная детерминированная векторная функция, легко сводится к указанной выше схеме.

Как правило, задачей исследования является вычисление основных вероятностных характеристик вектора $\boldsymbol{X}(t)$ при любом $t \geqslant t_0$ и, в частности, плотности вероятности и моментных функций. Но решение системы (1) в общем случае не является векторным марковским процессом.

Для преобразования немарковского в марковский процесс, что позволит применить к нему аналитический аппарат теории марковских процессов, была реализована идея расширения пространства состояний [2]. Для этого вводятся следующие обозначения ($s \in [0,\tau]$, $t_q = t_0 + q\tau$, q=0, 1, 2, …):

$$\boldsymbol{X}_q(s) = \boldsymbol{X}(s+t_q), \quad \boldsymbol{W}_q(s) = \boldsymbol{W}(s+t_q), \quad p_q(\boldsymbol{X}_q, s) = p(\boldsymbol{X}_q, s+t_q), \quad p_0(\boldsymbol{x}_0, 0) = p^0(\boldsymbol{x}),$$
$$\boldsymbol{Y}(t) \equiv \boldsymbol{X}^0 \text{ п.н.}, \quad \boldsymbol{X}_q(0) = \boldsymbol{X}_{q-1}(\tau) \text{ п.н.}, \quad \boldsymbol{W}_q(0) = \boldsymbol{W}_{q-1}(\tau) \text{ п.н.}, \quad p_q(\boldsymbol{x}_q, 0) = p_{q-1}(\boldsymbol{x}_q, \tau),$$

а затем строится цепочка систем СОДУ без запаздывания для расширенных векторов $\operatorname{col}\big(\boldsymbol{Y}(t), X_0(s)\big)$, $\operatorname{col}\big(\boldsymbol{Y}(t), \boldsymbol{X}_0(s), \boldsymbol{X}_1(s)\big)$, $\operatorname{col}\big(\boldsymbol{Y}(t), \boldsymbol{X}_0(s), \boldsymbol{X}_1(s), \boldsymbol{X}_2(s)\big)$, … вида

$$\mathbf{0^0}. \quad d\boldsymbol{Y}(s) = 0, \qquad d\boldsymbol{X}_0(s) = \boldsymbol{f}_0\big(\boldsymbol{X}_0(s), s_0\big)\,ds + \mathcal{G}_0\big(\boldsymbol{X}_0(s), s_0\big) \circ d\boldsymbol{W}_0(s).$$

$$\mathbf{1^0}.\quad d\boldsymbol{Y}(s)=0,\qquad d\boldsymbol{X}_0(s)=\boldsymbol{f}_0\big(\boldsymbol{X}_0(s),s_0\big)\,ds+\mathcal{G}_0\big(\boldsymbol{X}_0(s),s_0\big)\circ d\boldsymbol{W}_0(s),$$
$$d\boldsymbol{X}_1(s)=\boldsymbol{f}\big(\boldsymbol{X}_1(s),\boldsymbol{X}_0(s),s_1\big)\,ds+\mathcal{G}\big(\boldsymbol{X}_1(s),\boldsymbol{X}_0(s),s_1\big)\circ d\boldsymbol{W}_1(s).$$

$$\mathbf{2^0}.\quad d\boldsymbol{Y}(s)=0,\qquad d\boldsymbol{X}_0(s)=\boldsymbol{f}_0\big(\boldsymbol{X}_0(s),s_0\big)\,ds+\mathcal{G}_0\big(\boldsymbol{X}_0(s),s_0\big)\circ d\boldsymbol{W}_0(s),$$
$$d\boldsymbol{X}_1(s)=\boldsymbol{f}\big(\boldsymbol{X}_1(s),\boldsymbol{X}_0(s),s_1\big)\,ds+\mathcal{G}\big(\boldsymbol{X}_1(s),\boldsymbol{X}_0(s),s_1\big)\circ d\boldsymbol{W}_1(s),$$
$$d\boldsymbol{X}_2(s)=\boldsymbol{f}\big(\boldsymbol{X}_2(s),\boldsymbol{X}_1(s),s_2\big)\,ds+\mathcal{G}\big(\boldsymbol{X}_2(s),\boldsymbol{X}_1(s),s_2\big)\circ d\boldsymbol{W}_2(s).$$

$$\dots\quad\dots\quad\dots\quad\dots\quad\dots\quad\dots\quad\dots\quad\dots\quad\dots$$

Пересчет начальных условий для плотностей вероятности осуществляется следующим образом;

$$p_0(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y},0)=p^{\,0}(\boldsymbol{x}_0)\,\delta(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}_0),$$
$$p_k(\boldsymbol{x}_k,\boldsymbol{x}_{k-1},\dots,\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y},0)=p_{k-1}(\boldsymbol{x}_k,\boldsymbol{x}_{k-1},\dots,\boldsymbol{x}_0,\tau)\delta(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}_0).$$

В случае необходимости начальные условия для моментных функций строятся подобным образом.

Такой подход позволил с единой точки зрения построить схемы анализа детерминированных и стохастических ДУ, включая нейтральные, в обыкновенных и частных производных с запаздываниями разных типов (детерминированными и случайными; сосредоточенными одиночными, кратными, кусочно постоянными и ограниченными распределенными и смешанными) с непрерывными и дискретно-непрерывными возмущениями на входе, а также решить ряд прикладных задач [3, 12, 15, 16].

3. Итерационный метод аппроксимации матричной функции Грина. Данный метод (см. [4]) предназначен для анализа следующей системы линейных СОИДУ:

$$\dot{\boldsymbol{X}}(t)=\mathcal{A}(t)\,\boldsymbol{X}(t)+\int\limits_{t_0}^{t}\mathcal{B}(t,\tau)\,\boldsymbol{X}(\tau)d\tau+\mathcal{G}(t)\,\boldsymbol{U}(t),\quad \boldsymbol{X}(t_0)=\boldsymbol{X}^0\ \text{п.н.},\tag{3}$$

где $\boldsymbol{U}(t)=\{U_j(t)\}^{\intercal}\in\mathbb{R}^m$ — векторный процесс, представляющий собой случайное возмущение, $\mathcal{E}[\boldsymbol{U}(t)]=0$, $\mathcal{E}[\boldsymbol{U}(t)\,\boldsymbol{U}^{\intercal}(t')]=\mathcal{C}_{UU}(t,t')$; $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ и $\mathcal{G}$ — известные непрерывные матрицы-функции своих аргументов. Для начального состояния $\boldsymbol{X}^0$ известны числовые характеристики: $\mathcal{E}[\boldsymbol{X}^0]=\boldsymbol{m}^0$, $\mathcal{E}[(\boldsymbol{X}^0-\boldsymbol{m}^0)(\boldsymbol{X}^0-\boldsymbol{m}^0)^{\intercal}]=\mathcal{C}^0$.

Обозначим через $\mathcal{R}(t,s)$ ($t_0\leqslant s\leqslant t$) матричную функцию Грина. Детерминированное матричное уравнение и начальное условие для $\mathcal{R}(t,s)$, соответствующее (3), можно записать так:

$$\frac{\partial\mathcal{R}(t,s)}{\partial t}=\mathcal{A}(t)\,\mathcal{R}(t,s)+\int\limits_{s}^{t}\mathcal{B}(t,\tau)\,\mathcal{R}(\tau,s)\,d\tau,\quad t>s,\quad \mathcal{R}(s,s)=\mathcal{I},\tag{4}$$

где $\mathcal{I}$ — единичная $n\times n$-матрица. Тогда вектор состояния $\boldsymbol{X}$ может быть представлен следующим образом:

$$\boldsymbol{X}(t)=\mathcal{R}(t,t_0)\,\boldsymbol{X}_0+\int\limits_{t_0}^{t}\mathcal{R}(t,s)\,\mathcal{G}(s)\,\boldsymbol{U}(s)\,ds,$$

а, следовательно, первые моменты этого вектора будут иметь вид

$$\boldsymbol{m}(t)\equiv\mathcal{E}[\boldsymbol{X}(t)]=\mathcal{R}(t,t_0)\,\boldsymbol{m}^0,$$

$$\mathcal{C}_{XX}(t_1,t_2)\equiv\mathcal{E}[\{\boldsymbol{X}(t_1)-\boldsymbol{m}(t_1)\}\{\boldsymbol{X}(t_2)-\boldsymbol{m}(t_2)\}^{\intercal}]=\mathcal{R}(t_1,t_0)\mathcal{C}^0\mathcal{R}^{\intercal}(t_2,t_0)+$$
$$+\int\limits_{t_0}^{t_1}\int\limits_{t_0}^{t_2}\mathcal{R}(t_1,s_1)\mathcal{G}(s_1)\mathcal{C}_{UU}(s_1,s_2)\big[\mathcal{R}(t_2,s_2)\,\mathcal{G}(s_2)\big]^{\intercal}\,ds_1\,ds_2.$$

При этом, если $\boldsymbol{U}(t)$ — вектор независимых белых шумов с единичными интенсивностями ($\mathcal{E}[\boldsymbol{U}(t)\,\boldsymbol{U}^{\mathsf{T}}(t')] = \mathcal{I}\,\delta(t-t')$), то

$$\mathcal{C}_{XX}(t_1,t_2) = \mathcal{R}(t_1,t_0)\,\mathcal{C}^0\,\mathcal{R}^{\mathsf{T}}(t_2,t_0) + \int\limits_{t_0}^{t_*} \mathcal{R}(t_1,s)\,\mathcal{G}(s)\,\big[\mathcal{R}(t_2,s)\,\mathcal{G}(s)\big]^{\mathsf{T}}\,ds, \quad t_* = \min(t_1,t_2).$$

Как правило, для вычисления функции Грина как решения задачи (4) применяется метод последовательных приближений. К сожалению, практическое использование этой схемы затруднено в связи с необходимостью вычисления значительного числа интегралов, причем в аналитическом виде, что не всегда возможно.

Рассмотрим следующий алгоритм расчета $\mathcal{R}(t,s)$, основанный на методе последовательного дифференцирования решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ). Следуя схеме этого метода, представим матрицу $\mathcal{R}(t,s)$ в виде:

$$\mathcal{R}(t,s) = \mathcal{I} + \frac{1}{1!}\frac{\partial\mathcal{R}(t,s)}{\partial t}\bigg|_{t=s}(t-s) + \frac{1}{2!}\frac{\partial^2\mathcal{R}(t,s)}{\partial t^2}\bigg|_{t=s}(t-s)^2 + \frac{1}{3!}\frac{\partial^3\mathcal{R}(t,s)}{\partial t^3}\bigg|_{t=s}(t-s)^3 + \cdots \qquad (5)$$

и будем один за другим находить коэффициенты в представлении (5). Применяя подобную процедуру к обеим частям уравнения (4), будем иметь

$$\mathcal{R}_1 \equiv \frac{\partial\mathcal{R}(t,s)}{\partial t}\bigg|_{t=s} = \mathcal{A}(s), \qquad \mathcal{R}_2 \equiv \frac{\partial^2\mathcal{R}(t,s)}{\partial t^2}\bigg|_{t=s} = \mathcal{A}'(s) + \mathcal{B}(s,s) + \mathcal{A}(s)\,\mathcal{R}_1,$$

$$\mathcal{R}_3 \equiv \frac{\partial^3\mathcal{R}(t,s)}{\partial t^3}\bigg|_{t=s} = \mathcal{A}''(s) + \big[2\,\mathcal{B}'_s(s,q) + \mathcal{B}'_q(s,q)\big]\big|_{q=s} + \big[2\,\mathcal{A}'(s) + \mathcal{B}(s,s)\big]\,\mathcal{R}_1 + \mathcal{A}(s)\,\mathcal{R}_2.$$

Продолжая выкладки подобным образом далее, мы сможем вычислить функцию Грина $\mathcal{R}(t,s)$ в области $\{(t,s)|\, t_0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T\}$ с любой заданной наперед точностью.

В модификациях рассмотренного метода [7], ориентированных на решение прикладных задач, предлагается ограничиться небольшим числом членов ряда (5) при условии вычисления необходимых стохастических характеристик вектора состояния в узлах временно́й сетки с малым шагом.

4. Комбинация аппроксимации ядра и расширения пространства состояний. Известно, что анализ нелинейных СОИДУ существенно затруднен, а спектр приближенных методов ограничен. Представим следующую схему исследования таких уравнений. Рассмотрим систему СОИДУ(в смысле Стратоновича) вида

$$d\boldsymbol{X}(t) = \left[\boldsymbol{f}\big(\boldsymbol{X}(t),t\big) + \int\limits_{t_0}^{t} \mathcal{B}(t,s)\,\boldsymbol{X}(s)\,ds\right]dt + \mathcal{G}\big(\boldsymbol{X}(t),t\big)\circ d\boldsymbol{W}(t), \quad \boldsymbol{X}(t_0) = \boldsymbol{X}^0 \text{ п.н.}, \qquad (6)$$

где $\boldsymbol{f}$, $\mathcal{B}$ и $\mathcal{G}$ — известные неслучайные непрерывные матричные функции своих аргументов. Разобьем отрезок $[t_0,T]$ точками $t_k = t_0 + kh$, $k = 0,1,2,\ldots,M$, $h = (T-t_0)/M$ так, чтобы с достаточной точностью на отрезке $[t_{k-1},t_k]$, $k \geqslant 1$, можно было заменить $\mathcal{B}(t,\tau)$ на $\widehat{\mathcal{B}}_k(t) = \mathcal{B}(t,(t_{k-1}+t_k)/2)$, т.е. представить ядро $\mathcal{B}(t,s)$ кусочно-постоянной по второму аргументу матричной функцией (как вариант, средним значением этой функции на отрезке $[t_{k-1},t_k]$). В результате система (6) приводится к виду

$$d\boldsymbol{X}(t) = \left[\boldsymbol{f}\big(\boldsymbol{X}(t),t\big) + \sum_{k=1}^{m}\widehat{\mathcal{B}}_k(t)\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\boldsymbol{X}(s)\,ds + \widehat{\mathcal{B}}_{m+1}(t)\int\limits_{t_m}^{t}\boldsymbol{X}(s)\,ds\right]dt + \mathcal{G}\big(\boldsymbol{X}(t),t\big)\circ d\boldsymbol{W}(t)$$

при $t_m < t \leqslant t_{m+1}$, m=0, 1, …, $M-1$. Введем обозначение:

$$\boldsymbol{Z}_\ell(t) = \int\limits_{t_{\ell-1}}^{t}\boldsymbol{X}(s)\,ds, \quad t_{\ell-1} < t \leqslant t_\ell, \quad 1 \leqslant \ell \leqslant M. \qquad (7)$$

Тогда с учетом равенств (7) будем иметь

$$d\boldsymbol{X}(t) = \left[\boldsymbol{f}\big(\boldsymbol{X}(t), t\big) + \sum_{k=1}^{m} \widehat{\mathcal{B}}_k(t)\, \boldsymbol{Z}_k(t_k) + \widehat{\mathcal{B}}_{m+1}(t)\, \boldsymbol{Z}_{m+1}(t)\right] dt + \mathcal{G}\big(\boldsymbol{X}(t), t\big) \circ d\boldsymbol{W}(t),$$

$$d\boldsymbol{Z}_{m+1}(t) = \boldsymbol{X}(t)\, dt, \quad \boldsymbol{Z}_{m+1}(t_m) = 0 \text{ п.н..}$$

Если обозначить $\boldsymbol{X}(t)$ через $\boldsymbol{X}_\ell(t)$ для $t_{\ell-1} < t \leqslant t_\ell$, то окончательно получим [5]:

$$d\boldsymbol{X}_{m+1}(t) = \left[\boldsymbol{f}(\boldsymbol{X}_{m+1}(t), t) + \sum_{k=1}^{m} \widehat{\mathcal{B}}_k(t)\, \boldsymbol{Z}_k(t_k) + \widehat{\mathcal{B}}_{m+1}(t)\, \boldsymbol{Z}_{m+1}(t)\right] dt + \mathcal{G}(\boldsymbol{X}_{m+1}(t), t) \circ d\boldsymbol{W}(t),$$

$$d\boldsymbol{Z}_{m+1}(t) = \boldsymbol{X}_{m+1}(t)\, dt, \qquad \boldsymbol{X}_{m+1}(t_m) = \boldsymbol{X}_m(t_m) \text{ п.н.}, \quad \boldsymbol{Z}_{m+1}(t_m) = 0 \text{ п.н.},$$

т.е. на основе аппроксимации ядра и с помощью расширения пространства состояний система СИДУ приведена к СДУ, что позволяет далее применить широкий спектр известных приближенных методов анализа СДУ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Азбелев Н. В., Максимов В. П., Рахматуллина Л. Ф.* Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1991.
2. *Полосков И. Е.* Расширение фазового пространства в задачах анализа дифференциально-разностных систем со случайным входом// Автомат и телемех. — 2002. — № 9. — С. 58–73.
3. *Полосков И. Е.* Компьютерное моделирование динамики загрязнения бассейна реки с учетом запаздывания и случайных факторов// Вычислит. технол. — 2005. — *10*, № 1. — С. 103–115.
4. *Полосков И. Е.* Об одном методе приближенного анализа линейных стохастических интегро-дифференциальных систем// Дифференциальные уравнения. — 2005. — *41*, № 9. — С. 1276–1279.
5. *Полосков И. Е.* О расчете первых моментов линейных интегро-дифференциальных систем с параметрическими возмущениями// Проблемы механики и управления. Нелинейные динамические системы: межвуз. сб. науч. тр./ Перм. ун-т. — Пермь, 2006. — Вып. 38. — С. 133–142.
6. *Полосков И. Е.* Стохастические дифференциальные системы со случайными запаздываниями// Вестн. Удмурт. ун-та. Мат. Мех. Компьют. науки. — 2015. — *25*, № 4. — С. 501–516.
7. *Полосков И. Е., Полосков И. И., Soize C.* Параллельные вычисления в задаче анализа движения механической системы в случайной термовязкоупругой среде// Вестн. Перм. ун-та. Мат. Мех. Информатика. — 2015. — Вып. 4(31). — С. 46–57.
8. *Царьков Е. Ф.* Случайные возмущения дифференциально-функциональных уравнений. — Рига: Зинатне, 1989.
9. *Эльсгольц Л. Э., Норкин С. Б.* Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющим аргументом. — М.: Наука, 1971.
10. *Hale J. K., Lunel S. M. V.* Introduction to functional differential equations. — New York: Springer, 1993.
11. *Kushner H. J.* Numerical methods for controlled stochastic delay systems. — Boston: Birkhauser, 2008.
12. *Malanin V. V., Poloskov I. E.* On some methods for study of stochastic hereditary systems// Procedia IUTAM. — 2013. — *6*. — C. 60-68.
13. *Mao X.* Stochastic differential equations and applications. — Cambridge, UK: Woodhead Publishing, 2011.
14. *Mohammed S.-E. A.* Stochastic functional differential equations. — London: Pitman Publishing, 1984.
15. *Poloskov I. E.* Symbolic-numeric algorithms for analysis of stochastic systems with different forms of aftereffect// Proc. in Appl. Math. and Mech. (PAMM). — 2007. — *7*, № 1. — C. 2080011–2080012.
16. *Poloskov I., Malanin V.* A scheme for study of linear stochastic time-delay dynamical systems under continuous and impulsive fluctuations// Int. J. of Dynam. and Control. — 2016. — *4*, № 2. — C. 195–203.
17. *Smith H.* An Introduction to delay differential equations with applications to the life sciences. — New York: Springer, 2011.

18. *Soize C., Poloskov I.* Time-domain formulation in computational dynamics for linear viscoelastic media with model uncertainties and stochastic excitation// Computers and Math. with Appl. — 2012. — *64*, № 11. — С. 3594–3612.

И. Е. Полосков
Пермский государственный национальный исследовательский университет (ПГНИУ)
E-mail: `polosk@psu.ru, Igor.Poloskov@gmail.com`

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 132 (2017). С. 102–105

УДК 517.929.2

СПЕКТРАЛЬНОЕ МНОЖЕСТВО ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ С ДИСКРЕТНЫМ ВРЕМЕНЕМ

© 2017 г. **С. Н. ПОПОВА, И. Н. БАНЩИКОВА**

Аннотация. Пусть зафиксирован некоторый класс возмущений матрицы коэффициентов $A(\cdot)$ дискретной линейной однородной системы вида

$$x(m+1) = A(m)x(m), \quad m \in \mathbb{N}, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

с вполне ограниченной на $\mathbb{N}$ матрицей $A(\cdot)$. Спектральным множеством этой системы, отвечающим заданному классу возмущений, называется совокупность полных спектров показателей Ляпунова возмущенных систем, когда возмущения пробегают весь заданный класс. Основное внимание в работе уделено классу $\mathcal{R}$ мультипликативно возмущенных систем вида

$$y(m+1) = A(m)R(m)x(m), \quad m \in \mathbb{N}, \quad y \in \mathbb{R}^n,$$

с вполне ограниченными на $\mathbb{N}$ матрицами $R(\cdot)$. Получены условия, обеспечивающие совпадение спектрального множества $\lambda(\mathcal{R})$, отвечающего классу $\mathcal{R}$, со множеством всех упорядоченных по неубыванию наборов из n чисел.

Ключевые слова: линейная система с дискретным временем, показатели Ляпунова, возмущения коэффициентов.

AMS Subject Classification: 39A06, 39A30

Пусть $\mathbb{R}^n$ — евклидово пространство размерности n со стандартной нормой $\|\cdot\|$. Через $M_n(\mathbb{R})$ будем обозначать пространство вещественных матриц размерности $n \times n$ со спектральной нормой, т.е. операторной нормой, индуцируемой в $M_n(\mathbb{R})$ евклидовой нормой в $\mathbb{R}^n$; $E \in M_n(\mathbb{R})$ — единичная матрица. Множество всех упорядоченных по неубыванию наборов из n вещественных чисел будем обозначать $\mathbb{R}^n_\leqslant$. Для фиксированного набора $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_n) \in \mathbb{R}^n_\leqslant$ и произвольного $\delta > 0$ через $\mathcal{O}_\delta(\mu)$ обозначим совокупность всех таких наборов $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_n) \in \mathbb{R}^n_\leqslant$, что $\max\limits_{j=1,\ldots,n} |\nu_j - \mu_j| < \delta$. Таким образом, $\mathcal{O}_\delta(\mu)$ — это δ-окрестность набора μ во множестве $\mathbb{R}^n_\leqslant$.

Рассмотрим линейную однородную систему с дискретным временем

$$x(m+1) = A(m)x(m), \tag{1}$$

где аргумент m пробегает множество $\mathbb{N}$ натуральных чисел; неизвестная функция x принимает значения в $\mathbb{R}^n$; коэффициент $A(m)$ при каждом m принадлежит пространству $M_n(\mathbb{R})$. Всюду ниже будем предполагать, что функция $A(\cdot)$ *вполне ограничена* на $\mathbb{N}$ [4], т.е. при каждом m существует $A^{-1}(m)$, и найдется такое a, что

$$\sup_{m \in \mathbb{N}} \bigl(\|A(m)\| + \|A^{-1}(m)\|\bigr) \leqslant a.$$

Для произвольного нетривиального решения $x(\cdot)$ системы (1) определим его *показатель Ляпунова* равенством

$$\lambda[x] \doteq \varlimsup_{m \to \infty} \frac{1}{m} \ln \|x(m)\|$$

и обозначим через Λ *спектр показателей Ляпунова* системы (1), т.е. множество всех $\lambda \in \mathbb{R}$, для каждого из которых существует нетривиальное решение $x(\cdot)$ системы (1) с показателем λ. Известно [3, с. 51–52], что множество Λ состоит не более, чем из n различных чисел. Пусть $\Lambda =$

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований, проект № 16-01-00346.

$\{\Lambda_1, \dots, \Lambda_p\}$, где $\Lambda_1 < \dots < \Lambda_p$, $p \leqslant n$. Показатель Ляпунова тривиального решения системы (1) полагаем равным $-\infty$.

Для каждого $j \in \{1, \dots, p\}$ рассмотрим множество E_j всех решений системы (1), показатели которых не превосходят Λ_j. Множество E_0 считаем состоящим из тривиального решения системы (1). Тогда (см. [3, с. 54]) каждое из множеств E_j является линейным подпространством, имеют место строгие вложения $E_0 \subset E_1 \subset \dots \subset E_p$ и неравенства

$$0 = \dim E_0 < \dim E_1 < \dots < \dim E_p = n.$$

Положим

$$n_j = \dim E_j - \dim E_{j-1}, \quad j = 1, \dots, p.$$

Назовем n_j *кратностью* показателя Λ_j. Заметим, что $n_1 + \dots + n_p = n$. Набор n чисел $\Lambda_1, \dots, \Lambda_1, \dots, \Lambda_p, \dots, \Lambda_p$, где каждое Λ_j повторяется n_j раз, называется *полным спектром показателей Ляпунова* системы (1). В дальнейшем будем обозначать его

$$\lambda(A) = \bigl(\lambda_1(A), \dots, \lambda_n(A)\bigr),$$

считая при этом, что $\lambda_1(A) \leqslant \lambda_2(A) \leqslant \dots \leqslant \lambda_n(A)$. Таким образом, $\lambda(A) \in \mathbb{R}^n_{\leqslant}$.

Исследуем вопрос о поведении полного спектра показателей Ляпунова системы (1) под действием различных возмущений ее коэффициентов.

Определение 1. Пусть зафиксирован некоторый класс возмущений матрицы коэффициентов $A(\cdot)$ системы (1). *Спектральным множеством* системы (1), отвечающим заданному классу возмущений, называется совокупность полных спектров показателей Ляпунова возмущенных систем, когда возмущения пробегают весь заданный класс.

Сначала рассмотрим возмущенную систему в виде

$$y(m+1) = \bigl(A(m) + Q(m)\bigr)y(m), \quad m \in \mathbb{N}, \quad y \in \mathbb{R}^n. \tag{2}$$

Систему (2) будем называть *аддитивно возмущенной* по отношению к системе (1), а сами возмущения $Q(\cdot)$ — *аддитивными.* Чтобы возмущенная система (2) обладала полным спектром показателей Ляпунова, состоящим из n чисел, достаточно потребовать от аддитивного возмущения $Q(\cdot)$ полной ограниченности матрицы $A(\cdot) + Q(\cdot)$. По этой причине введем понятие допустимого аддитивного возмущения.

Определение 2. Аддитивное возмущение $Q(\cdot)$ будем называть *допустимым* для системы (1), если матрица $A(\cdot) + Q(\cdot)$ вполне ограничена на $\mathbb{N}$.

Рассмотрим также *мультипликативно возмущенную* по отношению к системе (1) систему

$$y(m+1) = A(m)R(m)y(m), \quad m \in \mathbb{N}, \quad y \in \mathbb{R}^n. \tag{3}$$

Матрицу $R(\cdot)$ в этом случае называем *мультипликативным возмущением* системы (1). Если матрица $A(\cdot)R(\cdot)$ вполне ограничена, то полный спектр показателей Ляпунова возмущенной системы (3) состоит из n чисел. Так как по условию матрица $A(\cdot)$ вполне ограничена, то приходим к следующему определению.

Определение 3. Мультипликативное возмущение $R(\cdot)$ будем называть *допустимым*, если матрица $R(\cdot)$ вполне ограничена на $\mathbb{N}$.

Пусть $\mathcal{Q}$ — множество всех допустимо аддитивно возмущенных систем вида (2), $\mathcal{R}$ — множество всех допустимо мультипликативно возмущенных систем вида (3). Для произвольного $\delta > 0$ обозначим через $\mathcal{Q}_\delta$ множество всех допустимо аддитивно возмущенных систем вида (2), возмущения $Q(\cdot)$ которых удовлетворяют неравенству $\sup\limits_{m \in \mathbb{N}} \|Q(m)\| < \delta$, а через $\mathcal{R}_\delta$ — множество всех допустимо мультипликативно возмущенных систем вида (3), возмущения $R(\cdot)$ которых удовлетворяют неравенству $\sup\limits_{m \in \mathbb{N}} \|R(m) - E\| < \delta$.

Для произвольного допустимого аддитивного возмущения $Q(\cdot)$ обозначим через

$$\lambda(A+Q) = \bigl(\lambda_1(A+Q), \dots, \lambda_n(A+Q)\bigr) \in \mathbb{R}^n_{\leqslant}$$

полный спектр показателей Ляпунова системы (2). Спектральное множество системы (1), отвечающее классу всевозможных допустимых для этой системы аддитивных возмущений, будем обозначать $\lambda(\mathcal{Q})$. Аналогично для произвольного $\delta > 0$ положим $\lambda(\mathcal{Q}_\delta)$ — спектральное множество системы (1), отвечающее классу допустимых аддитивных возмущений $Q(\cdot)$, удовлетворяющих оценке $\sup\limits_{m\in\mathbb{N}} \|Q(m)\| < \delta$.

Далее, пусть

$$\lambda(AR) = \big(\lambda_1(AR), \ldots, \lambda_n(AR)\big) \in \mathbb{R}^n_{\leqslant}$$

— полный спектр показателей Ляпунова системы (3) для произвольного допустимого мультипликативного возмущения $R(\cdot)$. Спектральное множество системы (1), отвечающее классу всевозможных мультипликативных возмущений, обозначим $\lambda(\mathcal{R})$, а для произвольного $\delta > 0$ положим $\lambda(\mathcal{R}_\delta)$ — спектральное множество системы (1), отвечающее классу допустимых мультипликативных возмущений $R(\cdot)$, удовлетворяющих оценке $\sup\limits_{m\in\mathbb{N}} \|R(m) - E\| < \delta$.

Теорема 1 (см. [1]). *Множества $\lambda(\mathcal{Q})$ и $\lambda(\mathcal{R})$ совпадают. Для каждого $\delta > 0$ имеют место включения $\lambda(\mathcal{Q}_\delta) \subset \lambda(\mathcal{R}_{a\delta})$, $\lambda(\mathcal{R}_\delta) \subset \lambda(\mathcal{Q}_{a\delta})$.*

Отметим, что в теории линейных систем с непрерывным временем возмущения коэффициентов системы чаще всего выбираются аддитивными (см., например, [2]). В случае систем с дискретным временем более естественным является изучение мультипликативно возмущенных систем, а теорема 1 позволяет получать следствия для аддитивно возмущенных систем.

Ниже получены некоторые результаты о спектральном множестве мультипликативно возмущенных систем. Они выражены в терминах асимптотической теории линейных систем, поэтому приведем соответствующие определения и комментарии к ним.

Определение 4 (см. [3]). Линейное преобразование

$$y = L(m)x, \quad m \in \mathbb{N}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad y \in \mathbb{R}^n,$$

где функция $L : \mathbb{N} \to M_n(\mathbb{R})$ вполне ограничена, называется *преобразованием Ляпунова.* Системы (1) и

$$y(m+1) = C(m)y(m), \quad m \in \mathbb{N}, \quad y \in \mathbb{R}^n, \tag{4}$$

называются *асимптотически эквивалентными*, если существует связывающее их преобразование Ляпунова.

Известно [3], что асимптотически эквивалентные системы имеют одинаковые полные спектры показателей Ляпунова. Кроме того, непосредственно из определения 4 вытекает, что системы (1) и (4) асимптотически эквивалентны тогда и только тогда, когда существует такая вполне ограниченная матричная функция $L : \mathbb{N} \to M_n(\mathbb{R})$, что при каждом $m \in \mathbb{N}$ выполнено равенство

$$C(m) = L(m+1)A(m)L^{-1}(m).$$

Определение 5 (см. [3]). Система (1) называется *правильной*, если для нее имеет место равенство

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i(A) = \varliminf_{m\to\infty} \frac{1}{m} \sum_{j=1}^{m-1} \ln|\det A(j)|.$$

Всякая стационарная и периодическая система является правильной.

Система (1) правильна тогда и только тогда, когда она асимптотически эквивалентна системе (4) с верхней треугольной матрицей $C(m) = \{c_{ij}(m)\}_{i,j=1}^n$, для которой существуют точные пределы

$$\lambda_i = \lim_{m\to\infty} \frac{1}{m} \sum_{j=1}^{m-1} \ln|c_{ii}(j)|, \quad i = 1, \ldots, n,$$

при этом $\lambda_i(A) = \lambda_i$.

Определение 6. Система (1) называется *диагонализируемой*, если она асмптотически эквивалентна системе (4) с диагональной матрицей $C(m) = \operatorname{diag}\bigl(c_1(m), \dots, c_n(m)\bigr)$. В этом случае

$$\lambda_i(A) = \varlimsup_{m\to\infty} \frac{1}{m} \sum_{j=1}^{m-1} \ln |c_i(j)|, \quad i = 1, \dots, n.$$

Определение 7 (см. [1])**.** Показатели Ляпунова системы (1) называются *устойчивыми*, если для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для всякой мультипликативно возмущенной системы вида (3) из множества $\mathcal{R}_\delta$ выполнены неравенства

$$|\lambda_i(A) - \lambda_i(AR)| < \varepsilon, \quad i = 1, \dots, n,$$

т.е. имеет место включение $\lambda\bigl(\mathcal{R}_\delta\bigr) \subset \mathcal{O}_\varepsilon\bigl(\lambda(A)\bigr)$.

Теорема 2. *Пусть выполнено хотя бы одно из условий*:

1) *Система* (1) *правильна.*
2) *Система* (1) *диагонализируема.*
3) *Показатели Ляпунова системы* (1) *устойчивы.*

Тогда спектральное множество $\lambda\bigl(\mathcal{R}\bigr)$ *совпадает со множеством* $\mathbb{R}^n_\leqslant$ *всех упорядоченных по неубыванию наборов* n *вещественных чисел. Кроме того, для каждого* $\delta > 0$ *найдется такое* $\ell > 0$, *что для произвольного набора чисел* $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n) \in \mathcal{O}_\delta\bigl(\lambda(A)\bigr)$ *существует допустимое мультипликативное возмущение* $R(\cdot)$, *что* $\lambda(AR) = \mu$ *и*

$$\sup_{m\in\mathbb{N}} \|R(m) - E\| \leqslant \ell \max_{j=1,\dots,n} |\mu_j - \lambda_j(A)|.$$

Следствие 1. *Пусть выполнено хотя бы одно из условий*:

1) *Система* (1) *правильна.*
2) *Система* (1) *диагонализируема.*
3) *Показатели Ляпунова системы* (1) *устойчивы.*

Тогда для каждого $\delta > 0$ *существует такое* $\ell > 0$, *что*

$$\mathcal{O}_\delta\bigl(\lambda(A)\bigr) \subset \lambda\bigl(\mathcal{R}_{\ell\delta}\bigr).$$

Следствие 2. *Если показатели Ляпунова системы* (1) *устойчивы, то для каждого* $\varepsilon > 0$ *существуют такие* $\delta_1 > 0$ *и* $\delta_2 > 0$, *что*

$$\mathcal{O}_{\delta_1}\bigl(\lambda(A)\bigr) \subset \lambda\bigl(\mathcal{R}_{\delta_2}\bigr) \subset \mathcal{O}_\varepsilon\bigl(\lambda(A)\bigr).$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Банщикова И. Н., Попова С. Н.* О спектральном множестве дискретной системы с устойчивыми показателями// Вестн. Удмурт. ун-та. Мат. Мех. Компьют науки. — 2016. — *26*, Вып. 1. — С. 15–26.
2. *Былов Б. Ф., Виноград Р. Э., Гробман Д. М., Немыцкий В. В.* Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости. — М.: Наука, 1966.
3. *Гайшун И. В.* Системы с дискретным временем. — Минск: Ин-т математики НАН Беларуси, 2001.
4. *Демидович В. Б.* Об одном признаке устойчивости разностных уравнений// Дифференц. уравнения. — 1969. — *5*, № 7. С. 1247–1255.

С. Н. Попова
Удмуртский государственный университет,
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
E-mail: `ps@uni.udm.ru`

И. Н. Банщикова
Удмуртский государственный университет,
Ижевская государственная сельскохозяйственная академия
E-mail: `banshhikova.irina@mail.ru`

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 132 (2017). С. 106–109

УДК 517.962.22

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ СО СЛУЧАЙНЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

© 2017 г. **Л. И. РОДИНА**

Аннотация. Исследуется асимптотическое поведение решений линейной системы разностных уравнений, правая часть каждого из которых в данный момент времени зависит не только от значения в предыдущий момент, но и от случайного параметра, принимающего значения в заданном множестве. Получены условия устойчивости по Ляпунову и асимптотической устойчивости положения равновесия, выполненные для всех значений случайных параметров и выполненные с вероятностью единица.

Ключевые слова: система разностных уравнений со случайными параметрами, устойчивость по Ляпунову, асимптотическая устойчивость, устойчивость с вероятностью единица.

AMS Subject Classification: 37A50, 37H10

1. Система уравнений, зависящих от случайных параметров. Исследуется асимптотическое поведение решений линейной системы разностных уравнений

$$x_{k+1} = A(\omega_k)x_k, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad k = 0, 1, \dots \tag{1}$$

в предположении, что в каждый момент времени k матрица A зависит от случайного параметра ω_k, принимающего значения в заданном множестве Ω. Предполагаем, что для каждого $\omega \in \Omega$ вещественная матирица $A(\omega)$ порядка n невырождена.

Пусть задана также сигма-алгебра подмножеств $\widetilde{\mathfrak{A}}$, на которой определена вероятностная мера $\widetilde{\mu}$. Введем вероятностное пространство $(\Sigma, \mathfrak{A}, \mu)$, где Σ означает множество последовательностей $\sigma = (\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_k, \dots) \in \Omega^\infty$, система множеств $\mathfrak{A}$ является наименьшей сигма-алгеброй, порожденной цилиндрическими множествами

$$D_k \doteq \{\sigma \in \Sigma : \omega_0 \in \Omega_0, \dots, \omega_k \in \Omega_k\}, \quad \text{где} \quad \Omega_j \in \widetilde{\mathfrak{A}}, \quad j = 0, 1, \dots, k,$$

и определим меру $\widetilde{\mu}(D_k) = \widetilde{\mu}(\Omega_0) \cdot \widetilde{\mu}(\Omega_1) \cdots \widetilde{\mu}(\Omega_k)$. Тогда, в силу теоремы А. Н. Колмогорова (например, [8, глава 2, § 3]), на измеримом пространстве $(\Sigma, \mathfrak{A})$ существует единственная вероятностная мера μ, которая является продолжением меры $\widetilde{\mu}$ на сигма-алгебру $\mathfrak{A}$. Отметим, что подобные вероятностные модели исследуются в работах [4], [5].

В настоящей работе получены условия устойчивости по Ляпунову и асимптотической устойчивости положения равновесия системы (1), выполненные для всех значений случайных параметров и выполненные с вероятностью единица.

2. Устойчивость по Ляпунову и асимптотическая устойчивость положения равновесия линейной системы со случайными параметрами.

Определение 1. *Положением равновесия* (неподвижной точкой) системы уравнений со случайными параметрами (1) назовем точку $x_* \in \mathbb{R}^n$ такую, что $A(\omega)x_* = x_*$ для всех $\omega \in \Omega$.

Положением равновесия системы (1) является вектор $x^* = 0$. Кроме того, если единица является собственным значением всех матриц $A(\omega)$, отвечающим одному и тому же собственному вектору $h(\omega) = h$, то $x^* = h$ также является положением равновесия.

Публикация подготовлена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 16-01-00346а) и Министерства образования и науки РФ в рамках базовой части (проект 2003).

Обозначим через $x_k(\sigma, p)$ решение системы (1) при заданном $\sigma \in \Sigma$, удовлетворяющее начальному условию $x_0(\sigma, p) = p \in \mathbb{R}^n$. Пусть

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}.$$

Определение 2. Положение равновесия x_* системы (1) называется *устойчивым по Ляпунову равномерно относительно множества* $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta = \delta(\varepsilon, \Sigma_0) > 0$, что для решений $x_n(\sigma, p)$ данной системы, удовлетворяющих начальному условию $\|p - x_*\| < \delta$, неравенство $\|x_k(\sigma, p) - x_*\| < \varepsilon$ выполнено при всех $\sigma \in \Sigma_0$ и всех $k = 0, 1, \ldots$.

Положение равновесия x_* системы (1) называется *асимптотически устойчивым равномерно относительно множества* Σ_0, если оно устойчиво по Ляпунову равномерно относительно Σ_0 и существует $\Delta > 0$ такое, что для решений $x_k(\sigma, p)$ с начальным условием $\|p - x_*\| < \Delta$ равенство $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_k(\sigma, p) - x_*\| = 0$ выполнено для всех $\sigma \in \Sigma_0$.

Напомним условия устойчивости для детерминированной линейной разностной системы

$$x_{k+1} = Ax_k, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad k = 0, 1, \ldots, \tag{2}$$

которые приведены, например, в [6, с. 90].

Теорема. *Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ — собственные значения матрицы A. Тогда*:

1) *если $|\lambda_i| < 1$ для всех $i = 1, \ldots, n$, то положение равновесия $x_* = 0$ системы* (2) *асимптотически устойчиво*;
2) *если существует хотя бы одно собственное значение матрицы A такое, что $|\lambda_i| > 1$, то положение равновесия $x_* = 0$ системы* (2) *является неустойчивым.*

Покажем, что для систем (1) и (2) условия устойчивости существенно отличаются. Обозначим через $\lambda_1(\omega), \ldots, \lambda_n(\omega)$ собственные значения матрицы $A(\omega)$. Приведем пример системы (2), для которой $|\lambda_i(\omega)| < 1$ для всех $i = 1, \ldots, n$ и всех $\omega \in \Omega$, но положение равновесия $x_* = 0$ не является асимптотически устойчивым равномерно относительно множества Σ.

Пример. Рассмотрим систему (2), где $\Omega = \{v_1, v_2\}$, $\mu(v_1) > 0$, $\mu(v_2) > 0$, $\mu(v_1) + \mu(v_2) = 1$,

$$A(v_1) = \begin{pmatrix} 0 & 1/16 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A(v_2) = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 1/16 & 0 \end{pmatrix}.$$

Пусть $p = (p_0, 0)^* \neq 0$, $\sigma = (\omega_0, \omega_1, \ldots) = (v_1, v_2, v_1, v_2, \ldots)$, звездочкой обозначена операция транспонирования. Тогда

$$x_1(\sigma) = A(\omega_0)p = (0, 4p_0)^*, \quad x_2(\sigma) = A(\omega_1)x_1 = (16p_0, 0)^* = 16p, \quad x_3(\sigma) = A(\omega_2)x_2 = 16x_1.$$

Далее, $x_{2k}(\sigma) = 16^k p$, $x_{2k+1}(\sigma) = 16^k x_1$, откуда, очевидно, следует, что $\|x_k(\sigma, p)\| \to \infty$ при $k \to \infty$, если $p = (p_0, 0)^* \neq 0$. Таким образом, положение равновесия $x_* = 0$ не является асимптотически устойчивым равномерно относительно множества Σ, при этом $\lambda_{1,2}(v_1) = \lambda_{1,2}(v_2) = \pm 1/2$.

Напомним, что сингулярными значениями матрицы A (размером $m \times n$) называются числа $\varrho_i = \sqrt{\nu_i}$, где $\nu_1, \ldots, \nu_n$ — неотрицательные собственные значения эрмитовой матрицы A^*A; пусть $\varrho_{\max}$ и $\varrho_{\min}$ — наибольшее и наименьшее сингулярные значения матрицы A соответственно, тогда

$$\varrho_{min} \cdot \|x\| \leqslant \|Ax\| \leqslant \varrho_{max} \cdot \|x\| \tag{3}$$

(см. [1, с. 411], [3, с. 331]). Доказательство следующего утверждения аналогично доказательству теоремы [4, теорема 1]. Здесь через $\varrho_{\min}(\omega)$ и $\varrho_{\max}(\omega)$ обозначены наименьшее и наибольшее сингулярные значения матрицы $A(\omega)$, $\omega \in \Omega$.

Теорема 1. *Имеют место следующие свойства*:

1) *Если $\varrho_{\max}(\omega) \leqslant 1$ для всех $\omega \in \Omega$, то положение равновесия $x_* = 0$ системы* (1) *устойчиво по Ляпунову равномерно относительно множества* Σ.

2) *Если существует* $C < 1$ *такое, что* $\varrho_{\max}(\omega) \leqslant C$ *для всех* $\omega \in \Omega$, *то положение равновесия* $x_* = 0$ *асимптотически устойчиво равномерно относительно* Σ.
3) *Если существует* $C > 1$ *такое, что* $\varrho_{\min}(\omega) \geqslant C$ *для любого* $\omega \in \Omega$, *то положение равновесия* $x_* = 0$ *не является устойчивым равномерно относительно* Σ.

3. Условия устойчивости, выполненные с вероятностью единица. Пусть задано вероятностное пространство $(\Sigma, \mathfrak{A}, \mu)$. Напомним, что некоторое свойство выполнено *с вероятностью единица,* если существует множество $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$ такое, что $\mu(\Sigma_0) = 1$ и данное свойство верно для всех $\sigma \in \Sigma_0$. В этом разделе мы исследуем свойства устойчивости по Ляпунову и асимптотической устойчивости положения равновесия $x_* = 0$ системы (1), выполненные с вероятностью единица.

Определение 3. Положение равновесия x_* системы (1) называется *устойчивым по Ляпунову с вероятностью единица,* если существует множество $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$ такое, что $\mu(\Sigma_0) = 1$ и x_* устойчиво по Ляпунову равномерно относительно множества Σ_0. Положение равновесия x_* называется *асимптотически устойчивым с вероятностью единица*, если оно асимптотически устойчиво равномерно относительно множества Σ_0.

Буквами M и ς далее будем обозначать соответственно математическое ожидание и квадратическое отклонение случайной величины.

Теорема 2. *Если* $p \neq 0$, *то с вероятностью единица справедливы следующие неравенства*:

$$\varlimsup_{k\to\infty} \frac{\ln \|x_k(\sigma,p)\| - kM(\ln \varrho_{max})}{\sqrt{2k\ln\ln k}} \leqslant \varsigma(\ln \varrho_{max}), \tag{4}$$

$$\varliminf_{k\to\infty} \frac{\ln \|x_k(\sigma,p)\| - kM(\ln \varrho_{min})}{\sqrt{2k\ln\ln k}} \geqslant -\varsigma(\ln \varrho_{min}). \tag{5}$$

Доказательство. Рассмотрим последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин $\{c_k(\sigma)\}_{k=0}^{\infty}$, где $c_k(\sigma) = c_k(\omega_k) = \ln \varrho_{max}(\omega_k)$. Введем также случайные величины

$$\widetilde{c}_k(\omega_k) = \frac{c_k(\omega_k) - M(\ln \varrho_{\max})}{\varsigma(\ln \varrho_{\max})}$$

и последовательности $\{S_k(\sigma)\}_{k=1}^{\infty}$, $\{\widetilde{S}_k(\sigma)\}_{k=1}^{\infty}$:

$$S_k(\sigma) = c_0(\omega_0) + \ldots + c_{k-1}(\omega_k), \quad \widetilde{S}_k(\sigma) = \widetilde{c}_0(\omega_0) + \cdots + \widetilde{c}_{k-1}(\omega_k), \quad k = 1, 2, \ldots.$$

Отметим, что случайные величины $\widetilde{c}_0, \widetilde{c}_1, \ldots$ независимы, одинаково распределены, $M\widetilde{c}_k = 0$, $D\widetilde{c}_k = 1$, $k = 0, 1, \ldots$. Тогда по закону повторного логарифма с вероятностью единица выполнено равенство (см. [2, с. 52])

$$\varlimsup_{k\to\infty} \frac{\widetilde{S}_k(\sigma)}{\sqrt{2k\ln\ln k}} = 1. \tag{6}$$

Из неравенства (3) следует, что

$$\|x_1(\sigma,p)\| = \|A(\omega_0)p\| \leqslant \varrho_{\max}(\omega_0) \cdot \|p\| = e^{c_0(\omega_0)} \cdot \|p\|,$$
$$\|x_2(\sigma,p)\| \leqslant e^{c_1(\omega_1)} \cdot \|x_1(\sigma,p)\| \leqslant e^{c_0(\omega_0)+c_1(\omega_1)} \cdot \|p\|.$$

Аналогично получаем, что для любого $k \in \mathbb{N}$ и всех $\sigma \in \Sigma_0$ справедливо неравенство

$$\|x_k(\sigma,p)\| \leqslant e^{c_0(\omega_0)+\cdots+c_{k-1}(\omega_k)} \cdot \|p\| = e^{S_k(\sigma)} \cdot \|p\| = e^{\varsigma(\ln \varrho_{\max})\widetilde{S}_k(\sigma)+kM(\ln \varrho_{max})} \cdot \|p\|,$$

следовательно,

$$\ln \|x_k(\sigma,p)\| - kM(\ln \varrho_{\max}) \leqslant \varsigma(\ln \varrho_{\max})\widetilde{S}_k(\sigma) + \ln \|p\|. \tag{7}$$

Из (6) и (7) следует (4). Неравенство (5) получается аналогично. □

Теорема 3. *Имеют место следующие утверждения*:

1) *если* $M(\ln \varrho_{\max}) < 0$, *то положение равновесия* $x_* = 0$ *системы* (1) *асимптотически устойчиво с вероятностью единица*;

2) *если* $M(\ln \varrho_{\min}) > 0$, *то для любого* $p \neq 0$ *с вероятностью единица выполнено равенство* $\lim\limits_{k\to\infty} \|x_k(\sigma, p)\| = \infty$.

Доказательство. Докажем первое утверждение. Из (4) следует, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $k_0 = k_0(\varepsilon)$, что для всех $k \geqslant k_0$ выполнено неравенство

$$\|x_k(\sigma, p)\| \leqslant \exp\bigl\{kM(\ln \varrho_{\max}) + \bigl(\varsigma(\ln \varrho_{\max}) + \varepsilon\bigr)\sqrt{2k \ln \ln k}\bigr\}.$$

Тогда, если $M(\ln \varrho_{max}) < 0$, то с вероятностью единица $\lim\limits_{k\to\infty} \|x_k(\sigma, p)\| = 0$.

Для доказательства устойчивости по Ляпунову отметим, что последовательность $\{S_k(\sigma)\}_{k=1}^{\infty}$ является случайным блужданием на прямой. Из неравенства $M(\ln \varrho_{max}) < 0$ следует, что с вероятностью единица $S_k(\sigma)$ уходит в минус бесконечность и достигает конечного максимума $S \geqslant 0$ (см. [7, глава 12, § 2]). Это означает, что существует множество $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$ такое, что $\mu(\Sigma_0) = 1$, $\lim\limits_{k\to\infty} S_k(\sigma) = -\infty$ для всех $\sigma \in \Sigma_0$ и найдется такое $S \geqslant 0$, что $S_k(\sigma) \leqslant S$ для всех $k = 0, 1, \ldots$ и всех $\sigma \in \Sigma_0$. Поэтому неравенство

$$\|x_k(\sigma, p)\| \leqslant e^{S_k(\sigma)} \cdot \|p\| \leqslant e^{S} \cdot \|p\| \tag{8}$$

выполнено для всех $k = 1, 2, \ldots$ и всех $\sigma \in \Sigma_0$. Для заданного $\varepsilon > 0$ определим $\delta = \varepsilon e^{-S}$, тогда из (8) следует, что если $\|p\| < \delta$, то $\|x_k(\sigma, p)\| < \varepsilon$ для всех $k \in \mathbb{N}$ и всех $\sigma \in \Sigma_0$. Таким образом, положение равновесия системы (1) асимптотически устойчиво с вероятностью единица.

Второе утверждение теоремы получаем из неравенства (5). □

Следствие 1. *Если* $M\varrho_{\max} < 1$, *то положение равновесия* $x_* = 0$ *системы* (1) *асимптотически устойчиво с вероятностью единица.*

Доказательство. Рассмотрим случайную величину $\xi(\omega) = \varrho_{\max}(\omega)$, для которой $M\xi < 1$. Из неравенства Иенсена [8, глава 2, § 6] следует, что для выпуклой вверх функции $\ln x$ имеет место неравенство $\ln(M\xi) \geqslant M(\ln \xi)$. Далее, поскольку $M\varrho_{\max} < 1$ равносильно неравенству $\ln(M\xi) < 0$, то $M(\ln \xi) \leqslant \ln(M\xi) < 0$, т.е. выполнено $M(\ln \varrho_{\max}) < 0$. Таким образом, в силу теоремы 3, положение равновесия $x_* = 0$ асимптотически устойчиво с вероятностью единица. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. — М.: Наука, 1966. — 576 с.
2. *Королюк В. С., Портенко Н. И., Скороход А. В., Турбин А. Ф.* Справочник по теории вероятностей и математической статистике. — М.: Наука, 1985.
3. *Прасолов В.В.* Задачи и теоремы линейной алгебры. — М.: Наука, 2008. — 536 с.
4. *Родина Л. И., Тютеев И. И.* Об асимптотических свойствах решений разностных уравнений со случайными параметрами// Вестн. Удмурт. ун-та. Мат. Мех. Компьют. науки. — 2016. — *26*, Вып. 1. — С. 79–86.
5. *Родина Л. И.* Об отталкивающих циклах и хаотических решениях разностных уравнений со случайными параметрами// Труды Ин-та мат. и мех. УрО РАН. — 2016. — *22*, № 2. — С. 227–235.
6. *Романко В. К.* Курс разностных уравнений. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2012. — 200 с.
7. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 1. — М.: Мир, 1984. — 738 с.
8. *Ширяев А. Н.* Вероятность. — М.: Наука, 1989. — 580 с.

Л. И. Родина
Удмуртский государственный университет (УдГУ)
E-mail: LRodina67@mail.ru

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 132 (2017). С. 110–113

УДК 519.622.2

ДИСКРЕТНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМОЙ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

© 2017 г. **С. В. РУСАКОВ, М. В. ЧИРКОВ**

Аннотация. Цель работы заключается в численном решении задачи дискретного управления иммунным ответом при инфекционном заболевании в условиях неопределенности. Задача дискретного управления представлена нелинейной системой обыкновенных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом. Условия неопределенности означают, что значения параметров модели неизвестны, а их оценка корректируется по мере поступления новых экспериментальных данных. Для решения данной задачи предложен алгоритм, позволяющий в рамках математической модели инфекционного заболевания одновременно строить управление и идентифицировать параметры. С помощью предложенного алгоритма построены программы лечения, основанные на реализации иммунотерапии. Показано, что иммунотерапия позволяет проводить эффективное лечение при трех основных формах заболевания: острой, хронической и летальной.

Ключевые слова: математическая модель инфекционного заболевания, идентификация параметров, дискретное управление, иммунотерапия.

AMS Subject Classification: 92C50

Математические модели инфекционных заболеваний широко используются для исследования динамики иммунной защиты организма при вирусных или бактериальных инфекциях [2]. Подавляющее большинство данных моделей представлено нелинейными системами обыкновенных дифференциальных уравнений с запаздыванием, содержащих большое количество параметров, которые характеризуют иммунный статус организма и свойства антигенов. Оценка параметров модели, полученная на основе экспериментальных данных, позволяет исследовать динамику иммунного ответа у конкретного человека, а также давать рекомендации по выбору наиболее подходящего лечения. Основная сложность заключается в том, что при традиционных подходах получить оценку можно только к концу заболевания, когда прогноз его течения и выбор рекомендаций по лечению теряют свою актуальность. Поэтому необходима разработка методов, позволяющих строить управление в условиях неопределенности, когда значения параметров неизвестны, а их оценка корректируется по мере поступления новых лабораторных данных.

Фундаментальные механизмы функционирования иммунной системы при инфекционных заболеваниях отражены в базовой математической модели инфекционного заболевания [5]. Одним из эффективных способов лечения инфекционных заболеваний является иммунотерапия, основанная на введении донорских антител. С учетом иммунотерапии базовая модель инфекционного заболевания может быть представлена в следующем виде [1]:

$$
\begin{aligned}
\frac{d\nu}{dt} &= a_1\nu - a_2 f\nu,\\
\frac{ds}{dt} &= a_3\xi(m)f(t-\tau)\nu(t-\tau) - a_3(s-1),\\
\frac{df}{dt} &= a_4(s-f) - a_8 f\nu + u,\\
\frac{dm}{dt} &= a_6\nu - a_7 m,
\end{aligned}
\tag{1}
$$

где v, s, f — соответственно относительные концентрации антигенов, плазматических клеток и антител, m — доля разрушенных антигенами клеток органа. Функция $\xi(m)$ имеет вид

$$\xi(m) = \begin{cases} 1, & 0 \leqslant m < m^*, \\ \dfrac{m-1}{m^*-1}, & m^* \leqslant m \leqslant 1. \end{cases} \tag{2}$$

Начальные условия характеризуют заражение здорового организма:

$$\nu(0) = \nu_0, \quad s(0) = 1, \quad f(0) = 1, \quad m(0) = 0, \quad f(t) = \nu(t) = 0, \quad t \in [-\tau, 0). \tag{3}$$

В рамках модели описаны основные формы заболевания: острая с выздоровлением, хроническая и летальная. Наборы параметров, взятые из [1], которые характеризуют ту или иную форму заболевания, представлены в табл. 1.

Таблица 1. Значения параметров базовой модели инфекционного заболевания

Форма заболевания	Параметры										
	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	τ	m^*	ν_0
Острая	2	0,8	10000	0,17	0,5	10	0,12	8	0,5	0,1	10^{-6}
Хроническая	1	0,8	1000	0,17	0,5	10	0,12	8	0,5	0,1	10^{-6}
Летальный исход	1,54	0,77	880	0,15	0,5	12	0,12	8	2,5	0,1	10^{-6}

Будем считать, что лабораторные показатели можно получить в определенные моменты времени, соответствующие узлам сетки

$$\prod = \{t_i : \ t_i = i\Delta t, \ i = \overline{1, N}, \ \Delta t = T/N\}. \tag{4}$$

Управляющая функция $u = u(t)$, характеризующая скорость введения донорских антител, выбирается из множества

$$U = \{u(t) : \ u(t) = u_{i-1} \in [0, B], \ t \in [t_{i-1}, t_i), \ i = \overline{1, N}, \ u(T) = u_{N-1}\}, \tag{5}$$

где параметр $B > 0$ учитывает физиологически допустимые дозы применения препаратов.

Для построения управления в условиях неопределенности использовался алгоритм, предложенный в [3]. Для оценки параметров использовался метод Монте-Карло. Управляющая функция формировалась с помощью алгоритма, предложенного в [4]. Идея алгоритма заключается в том, что динамику антигенов необходимо вывести на желаемое состояние, которому соответствует некоторое решение базовой математической модели инфекционного заболевания. Это решение названо опорным.

При острой форме заболевания опорное решение определяется исходя из минимизации функционала энергетической цены иммунного ответа [4]. На рис. 1 представлена реализация алгоритма при острой форме заболевания. Сплошными линиями показана управляющая функция. Также на рисунке изображена динамика антигенов в случае опорного решения (штриховые кривые) и при естественном течении заболевания (штрих-пунктир). Реализация иммунотерапии позволяет в три раза снизить максимальное значение концентрации антигенов.

Если при заражении здорового организма реализуется хроническая форма, то в этом случае в качестве опорного решения следует брать траекторию, соответствующую острой форме с выздоровлением. Реализация алгоритма при хронической форме заболевания представлена на рис. 2. Сплошными линиями показана управляющая функция. Момент времени начала лечения $t = 33$ сут. Опорное решение изображено штриховой кривой. Также на рисунке представлена динамика антигенов без управления (штрих-пунктир).

Острая форма с возможным летальным исходом характеризуется экспоненциальным ростом антигенов. На рис. 3 сплошными линиями изображена управляющая функция. Штриховой кривой показано опорное решение, соответствующее острой форме заболевания с выздоровлением. Также представлена динамика антигенов при реализации данного управления (штрих-пунктир).

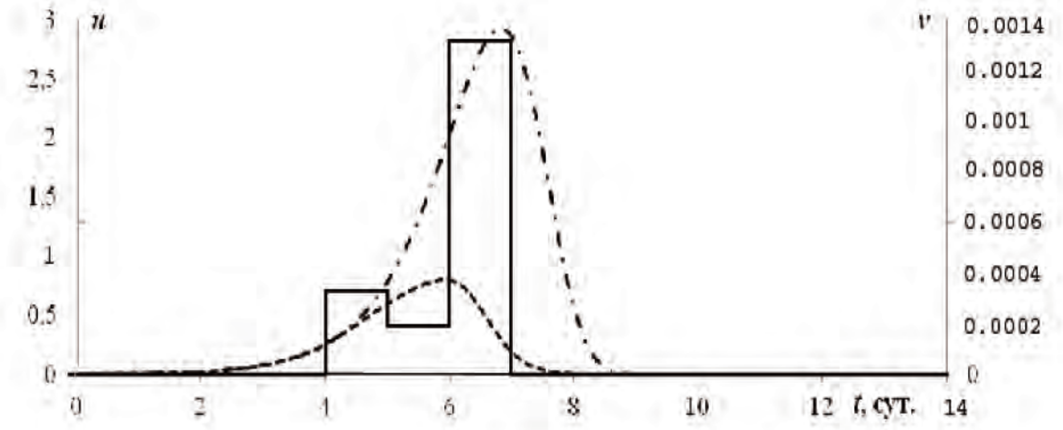

Рис. 1. Управление при острой форме заболевания с выздоровлением

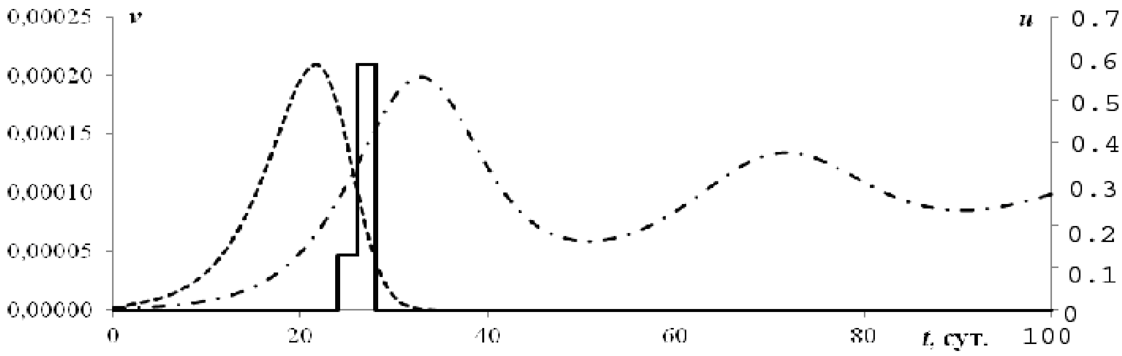

Рис. 2. Управление при хронической форме заболевания

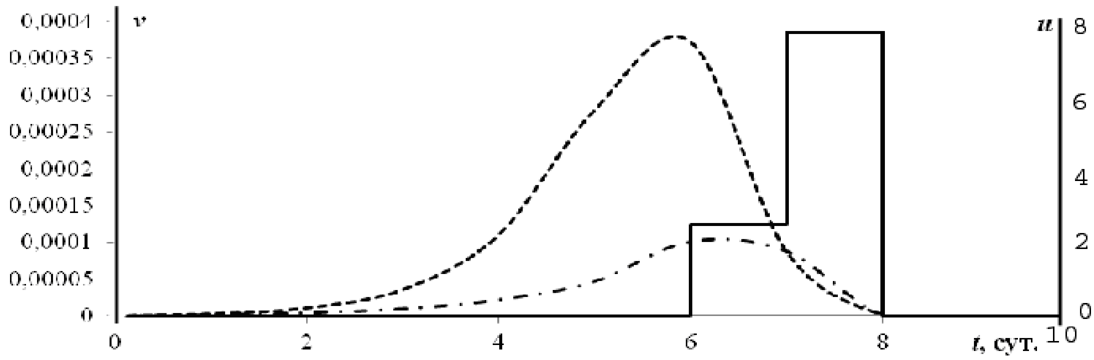

Рис. 3. Управление при острой форме заболевания с возможным летальным исходом

Введение донорских антител начинается при $t = 6$. Иммунотерапия позволяет переломить ход заболевания и приводит к выздоровлению.

Результаты расчетов показывают, что иммунотерапия позволяет проводить эффективное лечение при трех основных формах заболевания: острой, хронической и летальной. С помощью рассмотренного алгоритма можно строить управление иммунным ответом в условиях неопределенности, уточняя оценку параметров по мере поступления новых лабораторных данных.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Болодурина И. П., Луговскова Ю. П.* Оптимальное управление иммунологическими реакциями организма человека// Пробл. управл. — 2009. — № 5. — С. 44–52.
2. *Русаков С. В., Чирков М. В.* О некоторых подходах к математическому моделированию иммунного ответа при инфекционных заболеваниях// Вестн. Перм. ун-та. Мат. Мех. Информат. — 2015. — *1*, № 28. — С. 45–55.
3. *Русаков С. В., Чирков М. В.* Идентификация параметров и управление в математических моделях иммунного ответа// Росс. ж. биомех. — 2014. — *18*, № 2. — С. 259–269.
4. *Русаков С. В., Чирков М. В.* Математическая модель влияния иммунотерапии на динамику иммунного ответа// Пробл. управл. — 2012. — № 6. — С. 45–50.
5. *Marchuk G. I.* Mathematical Modeling of Immune Response in Infectious Diseases. — Dordrecht: Springer Science and Business Media, 2013. — 350 с.

С. В. Русаков
Пермский государственный национальный исследовательский университет
E-mail: rusakov@psu.ru

М. В. Чирков
Пермский государственный национальный исследовательский университет
E-mail: rusakov@psu.ru

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 132 (2017). С. 114–117

УДК 517.929

ОБ ОСЦИЛЛИРУЮЩИХ И ЗНАКООПРЕДЕЛЕННЫХ РЕШЕНИЯХ АВТОНОМНЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

© 2017 г. **Т. Л. САБАТУЛИНА**

Аннотация. В работе рассматривается класс автономных функционально-дифференциальных уравнений, для которых свойство осцилляции всех решений и положительность фундаментального решения являются дополнениями друг к другу.

Ключевые слова: функционально-дифференциальные уравнения, последействие, осцилляция, знакоопределённость.

AMS Subject Classification: 34K06, 34K11

Для обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) задачи отыскания знакоопределенных и осциллирующих решений ставились и решались, начиная с классических работ С. А. Чаплыгина [9]. Для функционально-дифференциальных уравнений (ФДУ) эти задачи не утратили актуальности, но их решение оказалось намного более сложным. Это связано не только с существенным расширением объекта изучения и спецификой, связанной с наличием у таких уравнений «памяти». Немалую роль в выборе направления исследования и расстановке приоритетов сыграли разные подходы к пониманию решения ФДУ.

1. Решение как продолжение начальной функции. Осциллирующие уравнения. Рассмотрим ФДУ вида:

$$(Lx)(t) \equiv \dot{x}(t) + \sum_{k=0}^{N} a_k x(t - r_k) = 0, \quad t > 0, \tag{1}$$

где $a_k \in \mathbb{R}$, $r_k \geqslant 0$. При $\xi < 0$ полагаем $x(\xi) = \varphi(\xi)$, под решением понимаем (см. [3, 5, 8]) непрерывное продолжение начальной функции φ, обращающее (1) в тождество.

Решение уравнения (1) назовем *осциллирующим*, если оно имеет неограниченную справа последовательность нулей. Наиболее интересна ситуация, когда осциллируют все решения уравнения (при любой начальной функции). Следующий результат дает критерий осцилляции любого решения в терминах корней характеристической функции.

Теорема 1 (см. [7, 10]). *Все решения уравнения* (1) *являются осциллирующими тогда и только тогда, когда функция*

$$F(\lambda) = \lambda + \sum\nolimits_{k=0}^{N} a_k e^{-\lambda r_k}$$

не имеет вещественных корней.

Итак, основная задача — нахождение условий осцилляции всех решений уравнения (1), а теорема 1 — инструмент для решения этой задачи. Дополнительная к ней задача — существование хотя бы одного решения, сохраняющего знак, — не привлекала особого внимания.

Работа выполнена в рамках госзадания Министерства образования и науки Российской Федерации (задание №2014/152, проект №1890).

2. Определение решения по Н. В. Азбелеву. Положительность функции Коши. Рассмотрим соответствующее (1) неоднородное уравнение

$$(Lx)(t) = f(t), \quad t > 0,$$

доопределим $x(\xi) \equiv 0$ при $\xi < 0$, функцию φ отнесем к правой части, а начальное условие будем задавать только в начальной точке (подробнее см. [1]). Тогда решение представимо в виде [1]:

$$x(t) = X(t)x(0) + \int\limits_0^t X(t-s)f(s)\,ds,$$

где функция X (фундаментальное решение) становится центральным объектом исследования. В отличие от ОДУ, *фундаментальное решение для уравнений вида* (1) *не обязательно положительно, и одной из актуальных задач оказывается описание класса уравнений, для которых это свойство сохраняется.* Важность этого свойства несомненна: если $X(t) > 0$, то интегральный оператор является изотонным, что позволяет получать тонкие двусторонние оценки на решение. Напротив, ситуация, когда *фундаментальное решение является осциллирующим* — выглядит малоинтересной и неперспективной.

Обе задачи интенсивно изучались, причем исследования успешно доводились до коэффициентных признаков [2, 4–7, 10, 11]. Обнаружилось, что для некоторых ФДУ области осцилляции и положительности фундаментального решения оказались дополнением друг друга. Например, для простейшего автономного уравнения $\dot{x}(t) + ax(t-r) = 0$, $t \geqslant 0$, критерием осцилляции является неравенство $ar > 1/e$, а критерием положительности фундаментального решения — неравенство $ar \leqslant 1/e$. К сожалению, такая дополнительность имеет место не для всех уравнений.

Пример 1. Рассмотрим уравнение

$$\dot{x}(t) + 1.5x(t-1) - x(t-2) = 0, t \geqslant 0.$$

В [2] показано, что его фундаментальное решение осциллирует; с другой стороны, из критерия осцилляции, установленного в [4], следует, что это уравнение имеет знакопостоянные решения.

Тем не менее класс ФДУ, для которых два указанных выше свойства оказываются взаимно-дополнительными, весьма широк. Далее рассмотрим именно такие уравнения и приведем для них области осцилляции, являющиеся дополнением к областям положительности фундаментального решения.

Рассмотрим автономное ФДУ с ограниченным последействием

$$\dot{x}(t) + ax(t) + \int\limits_0^\omega x(t-s)\,dr(s) = 0, \quad t \geqslant 0, \tag{2}$$

где $a \in \mathbb{R}$, $\omega > 0$, функция $r\colon [0,\omega] \to \mathbb{R}$ не убывает, $r(0) = 0$. При отрицательных значениях аргумента полагаем решение доопределенным заданной начальной функцией.

В исследовании уравнения (1) важное место занимает его характеристическая функция

$$P(\lambda) = \lambda + a + \int\limits_0^\omega e^{-\lambda\xi}\,dr(\xi), \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Оказывается, для уравнения (2) справедливы следующие утверждения.

Теорема 2 (см. [11])**.** *Фундаментальное решение уравнения* (2) *положительно на полуоси* $[0, +\infty)$ *тогда и только тогда, когда функция* P *имеет хотя бы один вещественный корень.*

Теорема 3. *Все решения уравнение* (2) *являются осциллирующими тогда и только тогда, когда функция* P *не имеет вещественных корней.*

Пример 2. Рассмотрим уравнение

$$\dot{x}(t) + ax(t) + b\int\limits_{t-\tau-h}^{t-\tau} x(s)\,ds = 0, \quad t \geqslant 0, \tag{3}$$

где $a, b \in \mathbb{R}$, $\tau, h \geqslant 0$.

В декартовой системе координат $Ouvw$ зададим параметрически поверхность S:

$$\left\{ u = \zeta + \frac{\zeta\left(1 - e^{\zeta}\right)}{e^{\zeta}(\zeta(w+1)-1) + (1-\zeta w)}, \quad v = \frac{\zeta^2 e^{-\zeta w}}{e^{\zeta}(\zeta(w+1)-1) + (1-\zeta w)} \right\}, \quad \zeta \in \mathbb{R}, \quad w \geqslant 0.$$

На рис. 1, слева, изображена поверхность S. Если точка $(ah, bh^2, \tau/h)$ лежит выше поверхности S (ближе к нам на рис. 1), то все решения уравнения (3) являются осциллирующими, а если ниже или на поверхности S, то фундаментальное решение уравнения (3) положительно.

Рис. 1

Пример 3. Рассмотрим уравнение

$$\dot{x}(t) + ax(t) + k\int\limits_{0}^{1} x(t-s)\,dc(s) = 0, \quad t \geqslant 0, \tag{4}$$

где $a, k \in \mathbb{R}$, c — «канторова лестница». В [6] найдена область положительности фундаментального решения уравнения (4) D (на рис. 1, справа, она закрашена, граница принадлежит D). Из теорем 2 и 3 следует, что если $(k, a) \in D$, то фундаментальное решение уравнения (4) положительно, если $(k, a) \notin D$, то все решения уравнения (4) осциллируют.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Азбелев Н. В., Максимов В. П., Рахматуллина Л. Ф.* Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1991.
2. *Баландин А. С.* О положительности фундаментального решения линейных автономных дифференциально-разностных уравнений с коэффициентами разных знаков// Сб. трудов международной конференции ПМТУКТ-2014. Воронеж, 2014. — С. 22–25.
3. *Беллман Р., Кук К.* Дифференциально-разностные уравнения. — М.: Мир, 1967.
4. *Малыгина В. В.* О построении области осцилляции автономных дифференциальных уравнений с запаздыванием// Сб. трудов международной конференции ПМТУКТ-2015. Воронеж, 2015. — С. 223–225.
5. *Мышкис А. Д.* Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом. — М.: Наука, 1972.
6. *Сабатулина Т. Л.* Об осцилляции решений одного неавтономного дифференциального уравнения с запаздыванием// Сб. трудов международной конференции ПМТУКТ-2015. Воронеж, 2014. — С. 314–315.

7. *Трамов М. И.* Условия колеблемости решений дифференциальных уравнений первого порядка с запаздывающим аргументом// Изв. вузов. Мат. — 1975. — № 3. — С. 92–96.
8. *Хейл Дж.* Теория функционально-дифференциальных уравнений. — М.: Мир, 1984.
9. *Чаплыгин С. А.* Новый метод приближенного интегрирования дифференциальных уравнений. — М.-Л., Гостехиздат, 1950.
10. *Györi I., Ladas G.* Oscillation theory of delay differential equations with applications. — New York: The Clarendon Press, Oxford University Press, 1991.
11. *Sabatulina T., Malygina V.* On positiveness of the fundamental solution for a linear autonomous differential equation with distributed delay// Electro. J. Qual. Theory Differ. Equ. — 2014. — № 61. — С. 1–16.

Т. Л. Сабатулина
Пермский национальный исследовательский политехнический университет (ПНИПУ)
E-mail: `TSabatulina@gmail.com`

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 132 (2017). С. 118–122

УДК 517.926.4, 517.925.56

КОЛЕБЛЕМОСТЬ, ВРАЩАЕМОСТЬ И БЛУЖДАЕМОСТЬ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ

© 2017 г. **И. Н. СЕРГЕЕВ**

Аннотация. Для решений линейной системы на полупрямой определен целый ряд ляпуновских показателей, отвечающих за их колеблемость, вращаемость и блуждаемость. В случае системы с постоянной матрицей они тесно связаны с мнимыми частями ее собственных значений. Изучается вопрос о наличии аналогичной связи в случае кусочно постоянной или произвольной системы.

***Ключевые слова*:** дифференциальное уравнение, линейная система, автономная система, нули решения, колеблемость, вращаемость, блуждаемость, характеристические показатели.

***AMS Subject Classification*:** 34C10, 34D08

1. Понятия и факты. Для заданного $n > 1$ через $\mathcal{M}^n$ обозначим множество ограниченных кусочно непрерывных оператор-функций $A : \mathbb{R}^+ \to \operatorname{End}\mathbb{R}^n$, отождествляемых с задаваемыми ими системами вида

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}^+,$$

а через $\mathcal{C}^n, \mathcal{P}^n \subset \mathcal{M}^n$ — подмножества, состоящие из автономных и периодических систем соответственно. Пусть $\mathcal{S}(A)$ — множество ненулевых решений системы $A \in \mathcal{M}^n$.

Определение 1 (см. [3])**.** Для функции $x \in \mathrm{PC}^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^n_*)$ (непрерывной, кусочно непрерывно дифференцируемой и нигде не равной нулю) по произвольному *функционалу*

$$\mathrm{K} : \mathrm{PC}^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^n_*) \times \mathbb{R}^+ \to \overline{\mathbb{R}} \tag{1}$$

определим *сильный* и соответственно *слабый верхние* показатели

$$\hat{\varkappa}^{\bullet}(x) \equiv \inf_{L \in \operatorname{Aut}\mathbb{R}^n} \varlimsup_{t \to \infty} \frac{1}{t}\,\mathrm{K}(Lx, t), \qquad \hat{\varkappa}^{\circ}(x) \equiv \varlimsup_{t \to \infty} \inf_{L \in \operatorname{Aut}\mathbb{R}^n} \frac{1}{t}\,\mathrm{K}(Lx, t), \tag{2}$$

а также аналогичные *нижние* показатели $\check{\varkappa}^{\bullet}(x)$, $\check{\varkappa}^{\circ}(x)$ с заменой в формулах (2) верхних пределов нижними. При совпадении верхних показателей с нижними будем называть их *точными* $\varkappa^{\bullet}(x)$, $\varkappa^{\circ}(x)$, а при совпадении слабых с сильными — *абсолютными* $\check{\varkappa}(x)$, $\hat{\varkappa}(x)$.

Замечание 1 (см. [4])**.** Из определения 1 вытекает, что нижний показатель какой-либо функции не превосходит ее одноименного верхнего показателя, а слабый — одноименного сильного.

Определение 2 (см. [3])**.** Обозначив через P_1, P_2 ортогональные проекторы на некоторые фиксированные в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ прямую и двумерную плоскость соответственно, следуя определению 1, построим для функции $x \in \mathrm{PC}^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^n_*)$ показатели $\varkappa = \nu, \rho, \theta, \omega, \gamma$ *колеблемости*, *блуждаемости* и *ориентированной*, *неориентированной* и *частотной вращаемости* соответственно по следующим функционалам $\mathrm{K} = \mathrm{N}, \mathrm{P}, \Theta, \Omega, \Gamma$ вида (1):

a) $\mathrm{N}(x,t)$ — *нормированное* (умноженное на π) *число нулей* на промежутке $(0;t]$ проекции P_1x, причем если хотя бы один ее нуль на отрезке $[0;t]$ *кратен*, то считаем $\mathrm{N}(x,t) = \infty$;

b)
$$\mathrm{P}(x,t) \equiv \int\limits_0^t \left|(x(\tau)/|x(\tau)|)^{\cdot}\right| d\tau$$
— *вариация следа* функции x за время от 0 до t;

c) $\Theta(x,t) \equiv |\varphi(x,t)|$ — модуль непрерывного *ориентированного угла* $\varphi(x,t)$ между подвижным вектором $P_2x(t)$ и начальным вектором $P_2x(0)$ при условии $\varphi(x,0)=0$, причём если функция P_2x имеет при хотя бы один нуль на отрезке $[0;t]$, то считаем $\Theta(x,t)=\infty$;

d)
$$\Omega(x,t) \equiv \int\limits_0^t |\partial\varphi(x,\tau)/\partial\tau|\,d\tau$$
— *вариация угла* $\varphi(x,\tau)$ за время от 0 до t, причём если функция P_2x имеет при хотя бы один нуль на отрезке $[0;t]$, то считаем $\Omega(x,t)=\infty$;

e) $\Gamma(x,t) \equiv \mathrm{P}(P_2x,t) + \mathrm{N}(x,t)$ — *частотная вариация* функции x за время от 0 до t.

Замечание 2. Согласно [5, лемма 6], подсчет показателя $\hat\nu^\bullet$ в формуле (2) можно вести по значениям t, образующим, например (но и не только), произвольную возрастающую арифметическую прогрессию. Этот факт имеет место и для остальных показателей из определения 2 (правда, в случае ориентированной вращаемости — лишь для решений ограниченных систем).

Теорема 1 (см. [1,3])**.** *Для любой функции* $x \in \mathrm{PC}^1(\mathbb{R}^+,\mathbb{R}^n_*)$ *верны соотношения*
$$\check\theta^\circ(x) \leqslant \check\nu^\circ(x) = \check\gamma^\circ(x) = \check\omega^\circ(x) = \check\rho^\circ(x),$$
$$\hat\theta^\circ(x) \leqslant \hat\nu^\circ(x) = \hat\gamma^\circ(x) = \hat\omega^\circ(x) = \hat\rho^\circ(x),$$
$$\check\theta^\bullet(x) \leqslant \check\nu^\bullet(x) \leqslant \check\gamma^\bullet(x) \leqslant \check\omega^\bullet(x) \leqslant \check\rho^\bullet(x),$$
$$\hat\theta^\bullet(x) \leqslant \hat\nu^\bullet(x), \quad \hat\theta^\bullet(x) \leqslant \hat\omega^\bullet(x), \quad \hat\gamma^\bullet(x) \leqslant \hat\omega^\bullet(x),$$
а при $n=2$ — *еще и соотношения*
$$\check\theta(x) \leqslant \check\gamma^\bullet(x) = \check\omega^\bullet(x) = \check\rho^\bullet(x),$$
$$\hat\theta(x) \leqslant \hat\gamma^\bullet(x) = \hat\omega^\bullet(x) = \hat\rho^\bullet(x).$$

Замечание 3 (см. [3])**.** Никакие другие, кроме перечисленных в теореме 1, утверждения об упорядочении показателей из определения 2, вообще говоря, не верны.

Для решений *автономной* системы $A \in \mathcal{C}^n$ введенные показатели тесно связаны с мнимыми частями *собственных чисел системы*, т.е. ее оператора $A \in \operatorname{End}\mathbb{R}^n$.

Теорема 2 (см. [4,6])**.** *Для любого собственного значения* λ *любой системы* $A \in \mathcal{C}^n$ *существует решение* $x \in \mathcal{S}(A)$, *удовлетворяющее равенствам*
$$\theta(x) = \nu(x) = \omega(x) = \gamma(x) = \rho(x) = |\operatorname{Im}\lambda|.$$

Теорема 3 (см. [7])**.** *Для любого решения* $x \in \mathcal{S}(A)$ *любой системы* $A \in \mathcal{C}^n$ *некоторые ее собственные значения* λ_1, λ_2 *удовлетворяют равенствам*
$$\nu(x) = \rho^\circ(x) = |\operatorname{Im}\lambda_1|, \quad \rho^\bullet(x) = |\operatorname{Im}\lambda_2|.$$

Теорема 4 (см. [4])**.** *В пространстве решений любой системы* $A \in \mathcal{C}^4$ *с собственными значениями* $\lambda_{1,2} = \pm i$ *и* $\lambda_{3,4} = \pm 2i$ *найдутся такие двумерные подпространства решений* S_1, S_2, *что любое решение* $x \in \mathcal{S}(A) \setminus (S_1 \cup S_2)$ *удовлетворяет равенству* $\theta(x) = 0$.

2. Основные результаты. Для произвольной *неавтономной* системы не существует прямой связи между ее собственными значениями и введенными показателями ее решений (см. также *метод замораживания* применительно к показателям Ляпунова, например, в [2, § 7]). Именно такое впечатление создает следующая теорема.

Теорема 5. *Для любого* $\beta \in [0,1]$ *существует такая система* $A_\beta \in \mathcal{P}^2$, *что при каждом* $t \in \mathbb{R}^+$ *оператор* $A_\beta(t) \in \operatorname{End}\mathbb{R}^2$ *самосопряжен и имеет собственные значения* $\lambda_{1,2} = \pm 1 + 0i$, *а показатели всех решений* $x \in \mathcal{S}(A_\beta)$ *точны, абсолютны и удовлетворяют равенствам*
$$\theta(x) = \nu(x) = \omega(x) = \gamma(x) = \rho(x) = \beta. \tag{3}$$

Замечание 4. Утверждение теоремы 5, без требования в нем самосопряженности операторов $A_\beta(t)$, окажется верным также и для любого $\beta > 1$.

Теорема 6. *Для любого оператора $A \in \operatorname{End}\mathbb{R}^2$ с собственными значениями $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i$ ($\alpha \in \mathbb{R}$) и любого $\beta \in [0,1]$ существует такая система $A_\beta \in \mathcal{P}^2$, что функция $A_\beta(\cdot)$ кусочно постоянна и принимает ровно два значения $\pm A$, а показатели всех решений $x \in \mathcal{S}(A_\beta)$ точны, абсолютны и удовлетворяют равенствам* (3).

И все же некоторую связь мнимых частей собственных значений *кусочно постоянной* системы со всеми показателями из определения 2, кроме ориентированной вращаемости, обнаруживает следующая теорема.

Теорема 7. *Если система $A \in \mathcal{M}^2$ кусочно постоянна и длины промежутков ее постоянства удовлетворяют хотя бы одному из условий*:

а) *кратны числу π*;

б) *неограниченно растут* (*не обязательно монотонно*) *со временем, а при каждом $t \in \mathbb{R}^+$ модули мнимых частей собственных значений оператора $A(t) \in \operatorname{End}\mathbb{R}^2$ равны* 1, *то показатели всех решений $x \in \mathcal{S}(A)$ абсолютны и удовлетворяют соотношениям*

$$0 \leqslant \hat{\theta}(x) \leqslant \nu(x) = \omega(x) = \gamma(x) = \rho(x) = 1. \tag{4}$$

Замечание 5. Утверждение теоремы 7 распространяется и на неограниченные системы.

Теорема 8. *Для каждой пары $\alpha, \beta \in [0,1]$, $\alpha \leqslant \beta$, существует система $A_{\alpha,\beta} \in \mathcal{M}^2$, обладающая сразу всеми свойствами, описанными в теореме 7, включая оба свойства* а) *и* б), *и такая, что показатели ориентированной вращаемости всех решений $x \in \mathcal{S}(A_{\alpha,\beta})$ абсолютны и удовлетворяют соотношениям*

$$0 \leqslant \alpha = \check{\theta}(x) \leqslant \hat{\theta}(x) = \beta \leqslant 1. \tag{5}$$

3. Доказательства теорем 5–8.

Пусть задана ориентированная евклидова плоскость $\mathbb{R}^2$.

Замечание 6. Для любых $A \in \operatorname{End}\mathbb{R}^2$, $L \in \operatorname{Aut}\mathbb{R}^2$ и $x \in \mathcal{S}(A)$ функция $\varphi(Lx,t)$ монотонна, причем если модули β мнимых частей собственных значений оператора A положительны, то $|\varphi(Lx,\pi/\beta)| = \pi$, а если равны нулю, то $|\varphi(Lx,t)| < \pi$ при всех $t \in \mathbb{R}^+$.

Доказательство теоремы 5. Пусть $R(t)$ — ортогональный оператор, осуществляющий поворот плоскости $\mathbb{R}^2$ на угол t, а A — самосопряженный оператор с собственными значениями $\lambda_{1,2} = \pm 1$. Тогда для заданного $\beta \in [0,1]$ любое решение $x \in \mathcal{S}(A)$ системы $A_\beta \in \mathcal{M}^2$ требуемого вида с оператор-функцией

$$A_\beta(t) = R(\beta t) \cdot A \cdot R(-\beta t), \quad t \in \mathbb{R}^+,$$

удовлетворяет равенствам (3). Действительно, преобразование $y = R(-\beta t)x$ приводит эту систему к системе с постоянным оператором

$$R(-\beta t)A_\beta(t)R(\beta t) + \dot{R}(-\beta t)R(\beta t) = A - \beta R(\pi/2) \equiv B_\beta,$$

собственные значения которого равны $\pm\sqrt{1-\beta^2} \in \mathbb{R}$. Значит, для любого решения $x \in \mathcal{S}(A_\beta)$ все показатели из определения 2, в силу теоремы 1, равны β, поскольку

$$-\pi \leqslant -\mathrm{P}(Ly,t) \leqslant \Theta(Lx,t) - \beta t \leqslant \mathrm{P}(Lx,t) - \beta t \leqslant \mathrm{P}(Ly,t) \leqslant \pi, \quad t \in \mathbb{R}^+, \quad L \in \operatorname{Aut}\mathbb{R}^2,$$
$$\beta \leqslant \check{\theta}^\circ(x) \leqslant \hat{\rho}^\bullet(x) \leqslant \beta.$$

Теорема 5 доказана. □

Доказательство теоремы 6. По заданному $\beta \in (0,1)$ и оператору $A \in \operatorname{End}\mathbb{R}^2$ с собственными значениями $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i$ подберем такое $\delta > 0$, чтобы для любого $x \in \mathcal{S}(A)$ выполнялась оценка $\mathrm{P}(x,\delta) \leqslant 1$, а затем уменьшим число δ так, чтобы для некоторого $m \in \mathbb{N}$ выполнялось равенство $\beta = \pi/(\pi + m\delta)$, затем:

1) при $t \in [0, 2\pi)$ положим $A_\beta(t) = A$, тогда любое решение $x \in \mathcal{S}(A_\beta)$ за это время повернется в точности на угол 2π (здесь и ниже его растяжение значения не имеет);

2) на идущих далее $2m$ промежутках длины δ положим A_β поочередно равным то A, то $-A$, тогда любое решение $x \in \mathcal{S}(A_\beta)$ сделает m пар поворотов туда-обратно на некоторый угол, не превосходящий 1, а значит, вариация следа $\mathrm{P}(Lx,\delta)$ за время каждого из этих поворотов может быть, за счет выбора оператора $L \in \operatorname{Aut}\mathbb{R}^2$ (сильно растягивающего вектор $x(0)$ при фиксированном ортогональном дополнении к нему), сделана меньше любого наперед заданного $\varepsilon > 0$.

Построенную на промежутке $[0,T) \equiv [0,2\pi+2m\delta)$ систему A_β продолжим на $\mathbb{R}^+$ T-периодически. Для нее будут верны соотношения (влекущие за собой, по теореме 1, все равенства (3))

$$\Theta(Lx,kT) = \frac{2\pi}{2\pi+2m\delta} = \beta \leqslant \mathrm{P}(Lx,kT) \leqslant \beta + \frac{2m\,\mathrm{P}(Lx,\delta)}{2\pi+2m\delta}, \quad L \in \operatorname{Aut}\mathbb{R}^2, \quad k \in \mathbb{N}, \quad x \in \mathcal{S}(A_\beta).$$

Наконец, в случае $\beta = 0$ достаточно в описанном построении провести только второй шаг при $m = 1$, а в случае $\beta = 1$ — наоборот, только первый. Теорема 6 доказана. $\square$

Доказательство теоремы 7. Если для системы $A \in \mathcal{M}^2$ из предпосылки теоремы 7 выполнено ее условие а), то

$$\mathrm{N}(Lx,k\pi) = k\pi = \mathrm{P}(Lx,k\pi), \quad L \in \operatorname{Aut}\mathbb{R}^2, \quad k \in \mathbb{N}, \quad x \in \mathcal{S}(A_\beta),$$

откуда по теореме 1 имеем все соотношения (4). Если же выполнено условие б), то для каждого $m \in \mathbb{N}$ можно выбрать такое $K \in \mathbb{N}$, что каждый из промежутков постоянства функции A, расположенных на оси правее точки $K\pi$, имеет длину не меньше $m\pi$, откуда имеем

$$\left[\frac{k-K}{m}\right](m-2)\pi \leqslant \mathrm{N}(Lx,k\pi),$$
$$\mathrm{P}(Lx,k\pi) \leqslant 2K\pi + \left[\frac{k}{m}\right](m+2)\pi, \quad L \in \operatorname{Aut}\mathbb{R}^2, \quad K < k \in \mathbb{N},$$
$$1 - \frac{2}{m} \leqslant \check{\nu}^\circ(x), \quad \hat{\rho}^\bullet(x) \leqslant 1 + \frac{2}{m}, \quad x \in \mathcal{S}(A_\beta),$$

что, в силу произвольности $m \in \mathbb{N}$ и теоремы 1, дает все соотношения (4). Теорема 7 доказана. $\square$

Доказательство теоремы 8. Сначала по данным числам $0 \leqslant \alpha \leqslant \beta \leqslant 1$ построим последовательность $a_1, a_2, \ldots$, состоящую из чисел ± 1 с неограниченно растущими промежутками постоянства и удовлетворяющую требованиям

$$0 \leqslant \varliminf_{k\to\infty} S_k = \alpha \leqslant \beta = \varlimsup_{k\to\infty} S_k \leqslant 1, \quad S_k \equiv \frac{a_1 + \ldots + a_k}{k},$$

для чего положим:

1) $\varepsilon = 1/3$, $m = 10 > \varepsilon^{-2}$ и $a_1 = \ldots = a_m = -1$, причем далее, как только $m > (\varepsilon/2)^{-2}$, уменьшаем число ε вдвое, но и для него число членов в каждой серии ниже будет больше, чем
$$\frac{(\beta-\varepsilon)-(\alpha-2\varepsilon)}{1/m} \geqslant \varepsilon m > \sqrt{m};$$

2) $a_{m+1} = \cdots = a_l = 1$ до такого первого l, что $S_l > \beta - \varepsilon$, и $a_{l+1} = \cdots = a_k = -1$ до такого первого k, что $S_k < \alpha - 2\varepsilon$, затем, положив $m = k$, еще раз повторим настоящий пункт, и т.д.

Теперь для оператора $A \in \operatorname{End}\mathbb{R}^2$ с собственными значениями $\lambda_{1,2} = \pm i$ положим $A_{\alpha,\beta}(t) \equiv a_k A$ при каждом $k \in \mathbb{N}$ и $t \in [(k-1)\pi, k\pi)$. Тогда будут верны все соотношения (5), в силу равенств

$$\Theta(Lx,k\pi) = k\pi|S_k|, \quad L \in \operatorname{Aut}\mathbb{R}^2, \quad k \in \mathbb{N}, \quad x \in \mathcal{S}(A_{\alpha,\beta}).$$

Теорема 8 доказана. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бурлаков Д. С., Цой С. В.* Совпадение полной и векторной частот решений линейной автономной системы// Тр. семинара им. И. Г. Петровского. — 2014. — Вып. 30. — С. 75–93.
2. *Изобов Н. А.* Введение в теорию показателей Ляпунова. — Минск: БГУ, 2006.
3. *Сергеев И. Н.* Полный набор соотношений между показателями колеблемости, вращаемости и блуждаемости решений дифференциальных систем// Изв. Ин-та мат. и информ. УдГУ. — 2015. Вып. 2(46). С. 171–183.
4. *Сергеев И. Н.* Показатели колеблемости, вращаемости и блуждаемости решений дифференциальных систем// Мат. заметки. — 2016. — *99*, № 5. — С. 732–751.
5. *Сергеев И. Н.* Определение и свойства характеристических частот линейного уравнения// Тр. семинара им. И. Г. Петровского.— 2006. — Вып. 25. — С. 249–294.
6. *Сергеев И. Н.* Характеристики поворачиваемости решений дифференциальных систем// Дифференц. уравнения. — 2014. — *50*, № 10. — С. 1353–1361.
7. *Сергеев И. Н.* Характеристики колеблемости и блуждаемости решений линейной дифференциальной системы// Изв. РАН. Сер. мат. — 2012. — *76*, № 1. — С. 149–172.

И. Н. Сергеев
Механико-математический факультет,
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова
E-mail: `igniserg@gmail.com`

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 132 (2017). С. 123–127

УДК 517.962.8

ТЕОРЕМА БОЛЯ—ПЕРРОНА ДЛЯ ГИБРИДНЫХ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ

© 2017 г. **П. М. СИМОНОВ**

Посвящается памяти доктора физико-математических наук профессора Н. В. Азбелева и памяти кандидата физико-математических наук А. В. Чистякова

Аннотация. Рассматривается абстрактная гибридная система функционально-дифференциальных уравнений. Одно уравнение по части переменных функционально-дифференциальное, по другой части переменных — разностное, второе уравнение по части переменных разностное, по другой части переменных — функционально-дифференциальное. Возникает система двух уравнений с двумя неизвестными. Применен W-метод Н. В. Азбелева к двум уравнениям. Изучены два модельных уравнения: одно — это система функционально-дифференциальных уравнений, второе — это система разностных уравнений. Изучены пространства решений. Получена теорема Боля—Перрона об экспоненциальной устойчивости для гибридной системы функционально-дифференциальных уравнений.

Ключевые слова: теорема Боля—Перрона об экспоненциальной устойчивости, гибридная линейная система фунционально-дифференциальных уравнений, метод модельных уравнений.

AMS Subject Classification: 34K20, 34K25

1. Схема W-метода. Здесь и ниже $\mathbb{R}^n$ — пространство векторов $\alpha = \mathrm{col}\{\alpha^1, \ldots, \alpha^n\}$ с действительными компонентами и с нормой $\|\alpha\|_{\mathbb{R}^n}$.

Обозначим через $y = \{y(-1), y(0), y(1), \ldots, y(N), \ldots\}$ бесконечную матрицу со столбцами $y(-1), y(0), y(1), \ldots, y(N), \ldots$ размерами n, где каждый столбец лежит в пространстве $\mathbb{R}^n$, а через $g = \{g(0), g(1), \ldots, g(N), \ldots\}$ бесконечную матрицу со столбцами $g(0), g(1), \ldots, g(N), \ldots$ размерами n, $g(i) \in \mathbb{R}^n$ для каждого $i = 0, 1, \ldots$. Каждой бесконечной матрице $y = \{y(-1), y(0), y(1), \ldots, y(N), \ldots\}$ можно сопоставить вектор-функцию $y(t) = y(-1)\chi_{[-1,0)}(t) + y(0)\chi_{[0,1)}(t) + y(1)\chi_{[1,2)}(t) + \cdots + y(N)\chi_{[N,N+1)}(t) + \ldots$. Аналогично, каждой бесконечной матрице $g = \{g(0), g(1), \ldots, g(N), \ldots\}$ можно сопоставить вектор-функцию $g(t) = g(0)\chi_{[0,1)}(t) + g(1)\chi_{[1,2)}(t) + \cdots + g(N)\chi_{[N,N+1)}(t) + \cdots$.

Символом $y(t) = y[t]$ обозначим вектор-функцию $y(t) = y([t])$, $t \in [-1, \infty)$. Символом $g[t]$ обозначим вектор-функцию $g(t) = g([t])$, $t \in [0, \infty)$. Множество таких вектор-функций $y[\cdot]$ обозначим символом ℓ_0. Множество таких вектор-функций $g[\cdot]$ обозначим символом ℓ. Обозначим $(\Delta y)(t) = y(t) - y(t-1) = y[t] - y[t-1]$ при $t \geqslant 1$, $(\Delta y)(t) = y(t) = y[t] = y(0)$ при $t \in [0, 1)$.

Запишем абстрактную гибридную функционально-дифференциальную систему в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{11}x + \mathcal{L}_{12}y = \dot{x} - F_{11}x - F_{12}y = f, \\ \mathcal{L}_{21}x + \mathcal{L}_{22}y = \Delta y - F_{21}x - F_{22}y = g. \end{aligned} \tag{1}$$

Пусть пространство L локально суммируемых $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}^n$ с полунормами

$$\|f\|_{L[0,T]} = \int_0^T \|f(t)\|_{\mathbb{R}^n}\, dt$$

Работа выполнена при финансовой поддержке АО «ПРОГНОЗ».

для всех $T > 0$. Пространство D локально абсолютно непрерывных функций $x : [0, \infty) \to \mathbb{R}^n$ с полунормами
$$\|x\|_{D[0,T]} = \|\dot{x}\|_{L[0,T]} + \|x(0)\|_{\mathbb{R}^n}$$
для всех $T > 0$. Пусть пространство ℓ бесконечных матриц $g = \{g(0), g(1), \ldots, g(N), \ldots\}$ с полунормами
$$\|g\|_{\ell_T} = \sum_{i=0}^{T} \|g_i\|_{\mathbb{R}^n}$$
для всех $T > 0$. Пространство ℓ_0 бесконечных матриц $y = \{y(-1), y(0), y(1), \ldots, y(N), \ldots\}$ с полунормами
$$\|y\|_{\ell_{0T}} = \sum_{i=-1}^{T} \|y_i\|_{\mathbb{R}^n}$$
для всех $T > -1$.

Операторы $\mathcal{L}_{11}$, $F_{11} : D \to L$, $\mathcal{L}_{12}$, $F_{12} : \ell_0 \to L$, $\mathcal{L}_{21}$, $F_{21} : D \to \ell$, $\mathcal{L}_{22}$, $F_{22} : \ell_0 \to \ell$ предполагаются линейными непрерывными и вольтерровыми.

Если элементы $\{x, y\} : [0, \infty) \times [-1, \infty) \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ образуют банахово пространство
$$\mathbf{D} \times \mathbf{M}_0 \cong (\mathbf{B} \times \mathbb{R}^n) \times (\mathbf{M} \times \mathbb{R}^n)$$
(пространство $\mathbf{D} \subset D$, пространство $\mathbf{M}_0 \subset \ell_0$, пространство $\mathbf{B} \subset L$, пространство $\mathbf{M} \subset \ell$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{M}$ — банаховы пространства) обладают какими-нибудь специфическими свойствами, например, $\sup\limits_{t\geqslant 0} \|x(t)\|_{\mathbb{R}^n} + \sup\limits_{k=-1,0,1,\ldots} \|y(k)\|_{\mathbb{R}^n} < \infty$, и для уравнения $\mathcal{L}\{x, y\} = \mathrm{col}\{f, g\}$ с линейным ограниченным оператором $\mathcal{L} : \mathbf{D} \times \mathbf{M}_0 \to \mathbf{B} \times \mathbf{M}$ однозначно разрешима задача Коши, то и решения этой задачи будут обладать такими же асимптотическими свойствами. Пусть модельное уравнение [1–4] $\mathcal{L}_{11}x = z$ и банахово пространство $\mathbf{B}$ с элементами из пространства L ($\mathbf{B} \subset L$ и это вложение непрерывно) выбраны так, что решения этого уравнения обладают интересующими нас асимптотическими свойствами. Пусть его решение при любом $z \in \mathbf{B}$ записывается в виде формулы Коши $x(t) = U_{11}(t)x(0) + (W_{11}z)(t)$. Для банахова пространства $\mathbf{B} \subset L$ можно ввести банахово пространство $D(\mathcal{L}_{11}, \mathbf{B})$ с нормой $\|x\|_{D(\mathcal{L}_{11}, \mathbf{B})} = \|\mathcal{L}_{11}x\|_{\mathbf{B}} + \|x(0)\|_{\mathbb{R}^n}$. Здесь вложение $\mathbf{B} \subset L$ непрерывно. Предположим, что оператор W_{11} непрерывно действует из пространства $\mathbf{B}$ в пространство $\mathbf{B}$, и оператор U_{11} действует из пространства $\mathbb{R}^n$ в пространство $\mathbf{B}$. Это условие эквивалентно тому [3], [4, гл. IV], что пространство $D(\mathcal{L}_{11}, \mathbf{B})$ линейно изоморфно пространству С. Л. Соболева $W^{(1)}_{\mathbf{B}}[0, \infty)$ с нормой $\|x\|_{W^{(1)}_{\mathbf{B}}[0,\infty)} = \|\dot{x}\|_{\mathbf{B}} + \|x\|_{\mathbf{B}}$. Будем это пространство обозначать как $W_{\mathbf{B}}$. При этом, $W_{\mathbf{B}} \subset D$, и это вложение непрерывно. Будем говорить, что уравнение $\mathcal{L}_{11}x = z$ с оператором $\mathcal{L}_{11} : D(\mathcal{L}_{11}) \to \mathbf{B}$ $D(\mathcal{L}_{11}, \mathbf{B})$-устойчиво, если для каждой правой части $z \in \mathbf{B}$ каждое решение $x \in D(\mathcal{L}_{11}, \mathbf{B})$ [4]. $D(\mathcal{L}_{11}) \subset D$ — область определения оператора $\mathcal{L}_{11}$. Уравнение $\mathcal{L}_{11}x = z$ с оператором $\mathcal{L}_{11} : D(\mathcal{L}_{11}, \mathbf{B}) \cong W_{\mathbf{B}} \to \mathbf{B}$, удовлетворяющим вышеприведенному условию, $D(\mathcal{L}_{11}, \mathbf{B})$-устойчиво ($W_{\mathbf{B}}$-устойчиво) тогда и только тогда, если оно сильно $\mathbf{B}$-устойчиво. Уравнение $\mathcal{L}_{11}x = z$ сильно $\mathbf{B}$-устойчиво, если для любого $z \in \mathbf{B}$ каждое решение x этого уравнения обладает свойством: $x \in \mathbf{B}$ и $\dot{x} \in \mathbf{B}$ [3], [4, гл. IV, § 4.6].

Операторы $\mathcal{L}_{11} : D \to L$, $\mathcal{L}_{12} : \ell_0 \to L$, $\mathcal{L}_{21} : D \to \ell$, $\mathcal{L}_{22} : \ell_0 \to \ell$ рассматриваются как приведения на пары $(D(\mathcal{L}_{11}, \mathbf{B}), \mathbf{B})$, $(\mathbf{M}_0, \mathbf{B})$, $(D(\mathcal{L}_{11}, \mathbf{B}), \mathbf{M})$, $(\mathbf{M}_0, \mathbf{M})$. Эти операторы предполагаются линейными вольтерровыми и ограниченными.

Предположим, что общее решение уравнения $\mathcal{L}_{22}y = g$ для $g \in \ell$ принадлежит пространству ℓ_0 и представляется формулой Коши:
$$y[t] = (Y_{22}y(-1))[t] + (C_{22}g)[t] = Y_{22}[t]y(-1) + \sum_{s=0}^{t} C_{22}[t, s]g[s], \quad t \geqslant 0.$$

Обозначим: $\mathcal{L} = \begin{pmatrix} \mathcal{L}_{11} & \mathcal{L}_{12} \\ \mathcal{L}_{21} & \mathcal{L}_{22} \end{pmatrix}$. Тогда (1) записывается в виде $\mathcal{L}\{x, y\} = \mathrm{col}\{f, g\}$. Предположим, что для любых $x(0) \in \mathbb{R}^n$ и $y(-1) \in \mathbb{R}^n$ однозначно разрешима задача Коши для«модельной»системы $\dot{x} = F^0_{11}x + F^0_{12}z + z$, $\Delta y = F^0_{21}z + F^0_{22}y + u$, где операторы $F^0_{11} : D \to L$,

$F_{12}^0 : \ell_0 \to L$, $F_{21}^0 : D \to \ell$, $F_{22}^0 : \ell_0 \to \ell$ предполагаются непрерывными и вольтерровыми. Тогда модельную систему можно коротко записать так: $\mathcal{L}_0\{x, y\} = \mathrm{col}\{z, u\}$. Пусть её решение имеет представление

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} \\ U_{21} & U_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(0) \\ y(-1) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} W_{11} & W_{12} \\ W_{21} & W_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ u \end{pmatrix}.$$

Здесь $\mathcal{W} : L \times \ell \to D \times \ell_0$ — непрерывный вольтерров оператор Коши для системы,

$$\mathcal{W} = \begin{pmatrix} W_{11} & W_{12} \\ W_{21} & W_{22} \end{pmatrix},$$

$\mathcal{U} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to D \times \ell_0$ — фундаментальная матрица для системы, $\mathcal{U} = \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} \\ U_{21} & U_{22} \end{pmatrix}$.

2. Теоремы Боля—Перрона об экспоненциальной устойчивости. Для обыкновенного дифференциального уравнения еще в монографиях [6], [9] отмечались явления, которые в терминах $D(\mathcal{L}_{11}, \mathbf{B})$-устойчивости можно сформулировать следующим образом. При определенных условиях относительно оператора $\mathcal{L}_{11}$ из $D(\mathcal{L}_{11}, \mathbf{B})$-устойчивости следует более тонкое асимптотическое свойство, а именно $D(\mathcal{L}_{11}, \mathbf{B}_1)$-устойчивость, где $\mathbf{B}_1$ — некоторое подпространство пространства $\mathbf{B}$. Следуя традиции Пермского семинара [1–4], соответствующие утверждения будем называть *теоремами Боля—Перрона.* В основе следующих доказательств таких теорем лежат свойства подпространства $\mathbf{B} \subset L$, вытекающие из их *порядковой структуры*, которую определим следующим образом. В векторном пространстве $\mathbb{R}^n$ введем *частичную упорядоченность*: $\alpha = \mathrm{col}\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} \geqslant 0$, если $\alpha_i \geqslant 0$, $i = 1, \ldots, n$; $\alpha \geqslant \beta$, если, $\alpha - \beta \geqslant 0$. Через $|\alpha|$ будем обозначать вектор, определяемый равенством $|\alpha| = \mathrm{col}\{|\alpha_1|, \ldots, |\alpha_n|\}$. Будем предполагать, что в пространстве $\mathbb{R}^n$ зафиксирована норма $\|\cdot\|_{\mathbb{R}^n}$, обладающая свойством *монотонности*: $\|\alpha\|_{\mathbb{R}^n} \leqslant \|\beta\|_{\mathbb{R}^n}$, если $|\alpha| \leqslant |\beta|$. В соответствии с порядком в пространстве $\mathbb{R}^n$ введем *отношение порядка* в пространстве L. А именно, $y \geqslant 0$, если $y(t) \geqslant 0$ почти всюду на $[0, \infty)$; $y \geqslant z$, если $y - z \geqslant 0$. Через $|y|$ будем обозначать функцию, почти всюду на $[0, \infty)$ определяемую равенством $|y|(t) = |y(t)|$. Относительно банахова пространства $\mathbf{B} \subset L$ будем предполагать, что норма в пространстве $\mathbf{B}$ согласована с порядком через условие *идеальности*: если $z \in L$, $y \in \mathbf{B}$ и $|z| \leqslant |y|$, то $z \in \mathbf{B}$ и $\|z\|_{\mathbf{B}} \leqslant \|y\|_{\mathbf{B}}$. Среди прочих свойств пространств, удовлетворяющих этому условию (*банаховых идеальных пространств* [7]), отметим следующие:

1) норма в таком пространстве $\mathbf{B}$ обладает свойством монотонности;
2) любое ограниченное по порядку подмножество пространства $\mathbf{B}$ имеет точные грани ($\mathbf{B}$ — *K-пространство*);
3) в пространстве $\mathbf{B}$ определены *«срезки»* — операторы умножения на характеристические функции χ_M измеримого множества $M \subset [0, \infty)$;
4) вложение $\mathbf{B} \subset L$ непрерывно.

Определим на пространстве L при каждом $m \in \mathbb{Z}_+$ оператор *«сдвига»* $\mathcal{S}_m$ и оператор *«срезки»* $\mathcal{P}_m$ равенствами:

$$(\mathcal{S}_m y)(t) = \begin{cases} y(t-m), & \text{если} \quad t \geqslant m, \\ 0, & \text{если} \quad t < m, \end{cases} \qquad (\mathcal{P}_m y)(t) = \chi_{\Delta_m}(t) y(t),$$

где $\Delta_m = [m, m+1]$. Будем говорить, что в банаховом пространстве $\mathbf{B}$ выполнены условия:

(**S**1) из $z \in \mathbf{B}$ следует $\mathcal{S}_m z \in \mathbf{B}$ при всех $m \in \mathbb{Z}_+$ и $\sup\limits_{m \in \mathbb{Z}_+} \|\mathcal{S}_m z\|_{\mathbf{B}} < +\infty$;

(**P**) из того, что $y \in L$, $z \in \mathbf{B}$, $\mathcal{P}_m y \in \mathbf{B}$ и $\|\mathcal{P}_m y\|_{\mathbf{B}} = \|\mathcal{P}_m z\|_{\mathbf{B}}$, $m \in \mathbb{Z}_+$, следует, что $y \in \mathbf{B}$ и $\|y\|_{\mathbf{B}} = \|z\|_{\mathbf{B}}$.

Всюду ниже через $\mathbf{B}_\gamma$ обозначим *«весовое пространство»*, элементы которого y связаны с элементами z пространства $\mathbf{B}$ соотношением $y = z_\gamma$, где $z_\gamma(t) = e^{-\gamma t} z(t)$, $z \in \mathbf{B}$, причем $\|y\|_{\mathbf{B}_\gamma} = \|z\|_{\mathbf{B}}$. Всюду будем предполагать, что для пространства $\mathbf{B}$ и модельного уравнения $\mathcal{L}_{11}^0 x = z$ выполнены условия: существует число такое $\beta > 0$, что а) оператор Коши W_{11} модельного уравнения действует из пространства $\mathbf{B}_\beta$ в пространство C_β и ограничен; б) столбцы фундаментальной матрицы U_{11} первого модельного уравнения принадлежат пространству C_β. Здесь и ниже C — пространство непрерывных и ограниченных функций $x:[0,\infty)\to\mathbb{R}^n$ с нормой $\|x\|_C=\sup\limits_{t\geqslant 0}\|x(t)\|_{\mathbb{R}^n}$, C_β — весовое пространство функций y, представимых в виде $y(t)=u_\beta$, где $u_\beta(t)=e^{-\beta t}u(t)$, $u\in C$, $\|y\|_{C_\beta}=\|u\|_C$. Приведенные условия гарантируют непрерывное вложение $D(\mathcal{L}_{11}^0,\mathbf{B}_\beta)\subset C_\beta$. Таким образом, в частности, первое модельное уравнение *экспоненциально устойчиво*: $\|U_{11}(t)\|_{\mathbb{R}^n}\leqslant N_1e^{-\beta t}$ при всех $t\geqslant 0$ для некоторого положительного N_1.

Пусть банахово пространство $\mathbf{b}\subset\ell$ бесконечных матриц $g=\{g(0),g(1),\ldots,g(N),\ldots\}$ с нормой $\|g\|_{\mathbf{b}}$. Банахово пространство $\mathbf{b}_0\subset\ell_0$ бесконечных матриц $y=\{y(-1),y(0),y(1),\ldots,y(N),\ldots\}$ с нормой $\|y\|_{\mathbf{b}_0}$. Причем вложение $\mathbf{b}\subset\ell$ ($\mathbf{b}_0\subset\ell_0$) непрерывно. Пусть в банаховом пространстве $\mathbf{b}$ ($\mathbf{b}_0$) выполнены все условия п. 2 и пусть выполнены условия ($\mathbf{S}1$) и ($\mathbf{P}$). Здесь в качестве оператора срезки $\mathcal{P}_m$ берём оператор $(\mathcal{P}_m y)(t)=(\mathcal{P}_{\{m\}}y)(t)=\chi_{\{m\}}(t)y(t)$, где $m\in\mathbb{Z}_+$. Введем $\mathbf{b}_\gamma$ ($\mathbf{b}_{0\gamma}$) — весовое пространство, элементы которого y связаны с элементами z пространства $\mathbf{b}$ ($\mathbf{b}_0$) соотношением $y=z_\gamma$, где $z_\gamma(t)=e^{-\gamma t}z(t)$, $z\in\mathbf{b}$ ($z\in\mathbf{b}_0$), причем $\|y\|_{\mathbf{b}_\gamma}=\|z\|_{\mathbf{b}}$ ($\|y\|_{\mathbf{b}_{0\gamma}}=\|z\|_{\mathbf{b}_0}$). Всюду будем предполагать, что для пространства $\mathbf{b}$ и модельного уравнения $\mathcal{L}_{22}^0y=g$ выполнены условия: существует то же самое число $\beta>0$, что а) оператор Коши W_{22} модельного уравнения действует из пространства $\mathbf{b}_\beta$ в пространство $\mathbf{b}_{0\beta}$ и ограничен; б) столбцы фундаментальной матрицы U_{22} второго модельного уравнения принадлежат пространству $\mathbf{b}_{0\beta}$. Приведенные условия гарантируют непрерывное вложение $D(\mathcal{L}_{22}^0,\mathbf{b}_\beta)\subset\mathbf{b}_{0\beta}$. Таким образом, в частности, второе модельное уравнение *экспоненциально устойчиво*: $\|U_{22}(t)\|_{\mathbb{R}^n}\leqslant Me^{-\beta t}$ при всех $t\in\mathbb{Z}_+$ для некоторого положительного M.

Сформулируем распространение теоремы Боля—Перрона на уравнение $\mathcal{L}\{x,y\}=\mathrm{col}\{f,g\}$.

Теорема 1. *Пусть в пространствах* $\mathbf{B}$ *и* $\mathbf{b}$ *выполнены условия* ($\mathbf{S}1$) *и* ($\mathbf{P}$), *операторы*

$$\mathcal{L}_{11}:D(\mathcal{L}_{11})\to L,\quad \mathcal{L}_{12}:D(\mathcal{L}_{12})\to L,\quad \mathcal{L}_{21}:D(\mathcal{L}_{21})\to\ell,\quad \mathcal{L}_{22}:D(\mathcal{L}_{22})\to\ell$$

непрерывно действуют из пространств $D(\mathcal{L}_{11}^0,\mathbf{B}_\alpha)$ *и* $D(\mathcal{L}_{22}^0,\mathbf{b}_\alpha)$ *в пространства* $\mathbf{B}_\alpha$ *и* $\mathbf{b}_\alpha$ *при некотором* $\alpha\in(0,\beta]$.

Пусть, уравнение $\mathcal{L}_{11}x=f$ $D(\mathcal{L}_{11}^0,\mathbf{B})$*-устойчиво и уравнение* $\mathcal{L}_{22}y=g$ $D(\mathcal{L}_{22}^0,\mathbf{b})$*-устойчиво. Пусть, далее, уравнение* $\mathcal{L}_1x=(\mathcal{L}_{11}-\mathcal{L}_{12}C_{22}\mathcal{L}_{21})x=f_1$ $D(\mathcal{L}_{11}^0,\mathbf{B})$*-устойчиво и оператор* $\mathcal{L}_1W_{11}:\mathbf{B}_\alpha\to\mathbf{B}_\alpha$ *ограничен.*

Тогда существует такое число $\gamma_0\in(0,\alpha]$, *что уравнение* $\mathcal{L}\{x,y\}=\mathrm{col}\{f,g\}$ *будет* $D(\mathcal{L}_0,\mathbf{B}_\gamma\times\mathbf{b}_\gamma)$*-устойчивым для всех* $\gamma\in(0,\gamma_0)$.

Примеры $D(\mathcal{L}_{11}^0,\mathbf{B})$-устойчивости уравнения $\mathcal{L}_1x=f_1$ изучались в [5, 8, 10].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Азбелев Н. В., Березанский Л. М., Симонов П. М., Чистяков А. В.* Устойчивость линейных систем с последействием. II// Дифференциальные уравнения. — 1991. — *27*, № 4. — С. 555–562.
2. *Азбелев Н. В., Березанский Л. М., Симонов П. М., Чистяков А. В.* Устойчивость линейных систем с последействием. III// Дифференциальные уравнения. — 1991. — *27*, № 10. — С. 1659–1668.
3. *Азбелев Н. В., Березанский Л. М., Симонов П. М., Чистяков А. В.* Устойчивость линейных систем с последействием. IV// Дифференциальные уравнения. — 1993. — *29*, № 2. — С. 196–204.
4. *Азбелев Н. В., Симонов П. М.* Устойчивость решений уравнений с обыкновенными производными. Пермь: Перм. ун-т, 2001. 230 с.
5. *Андрианов Д. Л., Арбузов В. О., Ивлиев С. В., Максимов В. П., Симонов П. М.* Динамические модели экономики: теория, приложения, программная реализация// Вестн. Перм. ун-та. Сер. Эконом. — 2015. — № 4 (27). — С. 8–32.
6. *Барбашин Е. А.* Введение в теорию устойчивости. — М.: Наука, 1967. — 224 с.
7. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ. 4-е изд., испр. СПб. — БХВ-Петербург: Невский Диалект, 2004. — 816 с.
8. *Ларионов А. С., Симонов П. М.* Устойчивость гибридных функционально-дифференциальных систем с последействием (ГФДСП). II// Вестн. РАЕН. — 2014. — *14*, № 5. — С. 38–45. Изд-во: РАЕН, Москва.
9. *Массера Х. Л., Шеффер Х. Х.* Линейные дифференциальные уравнения и функциональные пространства. — М.: Мир, 1970. — 456 с.

10. *Симонов П. М.* Об устойчивости линейных гибридных функционально-дифференциальных систем// Изв. Ин-та мат. и информат. Удмурт. гос. ун-та. — 2015. — Выпу. 2 (46). — С. 184–192. Изд-во Удмурт. гос. ун-т, Ижевск.

П. М. Симонов
Пермский государственный национальный исследовательский университет
E-mail: simpm@mail.ru

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 132 (2017). С. 128–131

УДК 517.983.5, 517.968.7

ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОР-ФУНКЦИИ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ В БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

© 2017 г. **М. В. ФАЛАЛЕЕВ**

Аннотация. В работе методами теории обобщенных функций в банаховых пространствах исследуется задача Коши для абстрактного интегродифференциального уравнения специального типа. В предположениях существования полной жордановой структуры дифференциальной части уравнения и порядка нуля ядра интегральной части построена фундаментальная оператор-функция (фундаментальное решение) для соответствующего интегродифференциального оператора, с помощью которой можно проводить дальнейшие исследования поставленной задачи.

***Ключевые слова*:** банаховы пространства, фредгольмов оператор, обобщенная функция, фундаментальное решение.

***AMS Subject Classification*:** 34G10, 45K05, 45N05

1. Постановка задачи. Одним из средств математического моделирования эволюции физических явлений и процессов, на текущее состояние которых усредненно влияют все предыдущие наблюдения, является аппарат интегродифференциальных уравнений в частных производных. В этом классе проблем выделяются начально-краевые задачи с необратимым оператором при старшей по времени производной, например, описывающие колебательные процессы в вязкоупругих средах [3]:

$$(\lambda-\Delta)\,u_{tt}-(\mu-\Delta)\,u-\int\limits_0^t g(t-\tau)\,(\gamma-\Delta)\,u(\tau,\bar{x})d\tau=f(t,\bar{x}), \tag{1}$$

$$u\Big|_{t=0}=u_0(\bar{x}),\qquad u_t\Big|_{t=0}=u_1(\bar{x}),\quad \bar{x}\in\Omega;\qquad u\Big|_{\bar{x}\in\partial\Omega}=0,\quad t\geqslant 0, \tag{2}$$

где $g(t)$, $f(t,\bar{x})$ — заданные функции, $u=u(t,\bar{x})$ — искомая функция, $\bar{x}\in\Omega\subset\mathbf{R}^m$ — ограниченная область с бесконечно гладкой границей $\partial\Omega$, Δ — оператор Лапласа, $u=u(t,\bar{x})$ определена на цилиндре $R_+\times\Omega$, $\lambda\in\sigma(\Delta)$.

В наиболее общей постановке такие задачи можно решать путем их редукции к вырожденным интегродифференциальным уравнениям в банаховых пространствах. Поэтому в данной работе исследуется задача Коши вида

$$Bu^{(N)}(t)=Au(t)+\int\limits_0^t K(t-s)u(s)ds+f(t), \tag{3}$$

$$u(0)=u_0,\quad u'(0)=u_1,\dots,u^{(N-1)}(0)=u_{N-1}, \tag{4}$$

здесь B, A, $K(t)$ — замкнутые линейные операторы с плотными областями определения, действующие из E_1 в E_2; E_1, E_2 — банаховы пространства, оператор B фредгольмов [1], $f(t)$ — достаточно гладкая функция со значениями в E_2.

2. Вспомогательные сведения и обозначения. Далее будем предполагать, что

A) $D(B) \subset D(A)$, $D(K(t)) = D(K) \subset D(B)$, $D(K)$ не зависит от t,

$$\overline{D(A)} = \overline{D(B)} = \overline{D(K)} = E_1, \qquad \overline{R(B)} = R(B), \qquad \dim N(B) = \dim N(B^*) = n \geqslant 1.$$

Введем обозначения: $\{\varphi_i\} \in E_1$ — базис ядра оператора B, $\{\psi_i\} \in E_2^*$ — базис ядра сопряженного оператора B^*, $i = 1, \ldots, n$, $\{z_i\} \in E_2$ и $\{\gamma_i\} \in E_1^*$ — соответствующие им биортогональные системы элементов. Тогда существует ограниченный оператор [1]

$$\Gamma = \left(B + \sum_{i=1}^{n} \langle \cdot, \gamma_i \rangle z_i \right)^{-1} \in L(E_2, E_1),$$

называемый оператором Треногина—Шмидта.

Также будем предполагать выполненными следующие два условия:

B) существуют полные A-жорданов набор [1,2] $\left\{\varphi_i^{(j)}\right\} \in E_1$ оператора B и A^*-жорданов набор $\left\{\psi_i^{(j)}\right\} \in E_2^*$ оператора B^*, $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, p_i$. Соответствующие определения и формулы для присоединенных элементов $\left\{\varphi_i^{(j)}\right\}$ и $\left\{\psi_i^{(j)}\right\}$ можно найти в [1,2].

C) оператор-функция $K(t)$ — достаточно гладкая функция, причем

$$K^{(\nu)}(0) = 0, \quad \nu = 0, 1, \ldots, N \cdot (p-1) - 1, \quad \text{если} \quad p = \max p_i > 1.$$

Введем обозначения для проектора

$$\tilde{Q} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p_i} \left\langle \cdot, \psi_i^{(j)} \right\rangle A\varphi_i^{(p_i+1-j)},$$

оператор-функций

$$U_N(A\Gamma t) = \sum_{k=1}^{\infty} (A\Gamma)^{k-1} \frac{t^{kN-1}}{(kN-1)!}$$

и резольвенты $R(t)$ ядра

$$K(t)\theta(t) * \Gamma U_N(A\Gamma t) \left[I - \tilde{Q} \right] \theta(t) - \sum_{i=1}^{n} \left[\sum_{k=0}^{p_i-1} \left\{ \sum_{j=1}^{p_i-k} \left\langle \cdot, \psi_i^{(j)} \right\rangle K^{(N\cdot k)}(t) \varphi_i^{(p_i-k+1-j)} \right\} \right] \theta(t).$$

3. Теорема о фундаментальной оператор-функции. Известно, что в случаях вырожденности оператора B задача Коши (3), (4) разрешима в классе функций конечной гладкости лишь при выполнении жестких условий связи между начальными условиями (4) и функцией $f(t)$. Поэтому естественным представляется строить обобщенные решения в пространстве распределений $K'_+(E_1)$ с носителем на положительной полуоси [2], а такую задачу эффективно можно решить с помощью фундаментальной оператор-функции (фундаментального решения) для интегродифференциального оператора уравнения (3). А именно, справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Если выполнены условия* **A)** , **B)**, **C)**, *то интегродифференциальный оператор* $B\delta^{(N)}(t) - A\delta(t) - K(t)\theta(t)$ (*соответствующий уравнению* (3)) *имеет на классе распределений с ограниченным слева носителем* $K'_+(E_1)$ *фундаментальную оператор-функцию вида*

$$E_N(t) = \left(\Gamma U_N(A\Gamma t) \left[I - \tilde{Q} \right] \theta(t) - \sum_{i=1}^{n} \left[\sum_{k=0}^{p_i-1} \left\{ \sum_{j=1}^{p_i-k} \left\langle \cdot, \psi_i^{(j)} \right\rangle \varphi_i^{(p_i-k+1-j)} \right\} \delta^{(N\cdot k)}(t) \right] \right) *$$

$$* \left(I\delta(t) + R(t)\theta(t) \right).$$

В условиях сформулированной теоремы единственным обобщенным решением задачи Коши (3), (4) в классе $K'_+(E_1)$ обобщенных функций с ограниченным слева носителем является обобщенная функция вида

$$\tilde{u}(t) = E_N(t) * \left(f(t)\theta(t) + Bu_{N-1}\delta(t) + Bu_{N-2}\delta'(t) + \cdots + Bu_1\delta^{(N-2)}(t) + Bu_0\delta^{(N-1)}(t) \right).$$

Анализируя далее это представление для обобщенного решения, можно получить утверждения о разрешимости задачи Коши (3), (4) в классах функций конечной гладкости.

Если ядро интегрального оператора из (3) имеет следующее специальное представление $K(t) = \alpha(t)A + \beta(t)B$, то формулировка теоремы 1 принимает вид (см. [2]) теоремы 2.

Теорема 2. *Если выполнены условия* **A)**, **B)**, *то интегродифференциальный оператор*

$$B\delta^{(N)}(t) - A\delta(t) - (\alpha(t)A + \beta(t)B)\theta(t) = \left(\delta^{(N)}(t) - \beta(t)\theta(t)\right) B - (\delta(t) + \alpha(t)\theta(t))A$$

имеет на классе $K'_+(E_2)$ *фундаментальную оператор-функцию вида*

$$\tilde{E}_N(t) = \Gamma\tilde{U}_N(A\Gamma t)\theta(t)\left[I - \tilde{Q}\right] -$$

$$- \sum_{i=1}^{n} \left[\sum_{k=0}^{p_i-1} \left\{ \sum_{j=1}^{p_i-k} \left\langle \cdot, \psi_i^{(j)} \right\rangle \varphi_i^{(p_i-k+1-j)} \right\} \times \left(\delta^{(N)}(t) - \beta(t)\theta(t)\right)^k * (\delta(t) + \Lambda(t)\theta(t))^{k+1} \right],$$

где

$$\tilde{U}_N(A\Gamma t)\theta(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^{kN-1}}{(kN-1)!}\theta(t) * \left(\delta(t) + \tilde{R}(t)\theta(t)\right)^k * (\delta(t) + \alpha(t)\theta(t))^{k-1}(A\Gamma)^{k-1},$$

$\tilde{R}(t)$ — *резольвента ядра*

$$\frac{t^{N-1}}{(N-1)!}\theta(t) * \beta(t)\theta(t),$$

$\Lambda(t)$ — *резольвента ядра* $(-\alpha(t))$, *под* k-*ой степенью обобщенной функции понимается ее* k-*кратная свертка с собой, нулевая степень обобщенной функции есть* $\delta(t)$.

С помощью теоремы 2 начально-краевая задача (1), (2) была исследована в [2]. А именно, справедлива следующая теорема.

Теорема 3. *Задача Коши—Дирихле* (1), (2) *однозначно разрешима в классе* $C^2(t \geqslant 0, E_1)$ *тогда и только тогда, когда начально-краевые условия* (2) *и функция* $f(t,\bar{x})$ *удовлетворяют соотношениям*

$$\left\langle (\mu-\lambda)^2 u_1(\bar{x}) + (\mu-\lambda)f'_t(0,\bar{x}) + (\gamma-\mu)g(0)f(0,\bar{x}), \varphi_i(\bar{x}) \right\rangle = 0,$$

$$\langle (\mu-\lambda)u_0(\bar{x}) + f(0,\bar{x}), \varphi_i(\bar{x}) \rangle = 0, \quad i = 1, \ldots, n,$$

где

$$E_1 \equiv \left\{ v(\bar{x}) \in W_2^2(\Omega) : \, v|_{\partial\Omega} = 0 \right\}, \quad E_2 \equiv W_2(\Omega), \quad B = \lambda - \Delta, \quad A = \mu - \Delta, \quad \lambda \in \sigma(\Delta), \quad \mu \neq \lambda,$$

а $\varphi_i(\bar{x})$, $i = 1, \ldots, n$, — *базис пространства решений однородной задачи*

$$\lambda\varphi_i = \Delta\varphi_i, \quad \varphi_i|_{\bar{x}\in\partial\Omega} = 0.$$

Другие частные случаи представления ядра, а именно, $K(t) = \beta(t)B$ и $K(t) = \alpha(t)A$ были исследованы в цикле работ автора и его учеников (см. библиографию в [2]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Вайнберг М. М.* Теория ветвления решений нелинейных уравнений — М.: Наука, 1969. — 528 с.
2. *Фалалеев М. В.* Сингулярные интегро-дифференциальные уравнения специального вида в банаховых пространствах и их приложения// Изв. Иркут. гос. ун-та. Сер. Мат. — 2013. — *6*, № 4. — С. 128–137.
3. *Cavalcanti M. M.* Existence and Uniform Decay for a Non-Linear Viscoelastic Equation with Strong Damping// Math. Meth. Appl. Sci. — 2001. — *24.* — С. 1043–1053.

М. В. Фалалеев
Иркутский государственный университет (ФГБОУ ВО "ИГУ")
E-mail: mvfalaleev@gmail.com

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 132 (2017). С. 132–135

УДК 517.929

ГЛАДКИЕ РЕШЕНИЯ НЕКОТОРЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ

© 2017 г. **В. Б. ЧЕРЕПЕННИКОВ**

Аннотация. В работе рассматривается скалярное линейное дифференциально-разностное уравнение (ЛДРУ) нейтрального типа $\dot{x}(t)+p(t)\dot{x}(t-1)=a(t)x(t-1)+f(t)$. Исследуется начальная задача с начальной функцией, когда начальное условие задается на начальном множестве. В качестве метода исследования применяется метод полиномиальных квазирешений, который основан на представлении неизвестной функции $x(t)$ в виде полинома степени N. При подстановке этой функции в исходное уравнение возникает невязка $\Delta(t)=O(t^N)$, для которой получено точное аналитическое представление. Доказана теорема о том, что если для исследуемой начальной задачи выбрать в качестве начальной функции полиномиальное квазирешение степени N, то порождаемое решение будет иметь в точках стыковки решений гладкость не ниже N.

Ключевые слова: дифференциально-разностные уравнения, начальная задача с начальной функцией, полиномиальные квазирешения, гладкие решения.

AMS Subject Classification: 34K15

1. Введение. Изучение различных процессов математическими методами сводится к исследованию математических моделей этих процессов. В ряде случаев в качестве таких моделей используются линейные дифференциально-разностные уравнения (ЛДРУ). Одним из методов нахождения решений начальной задачи для таких уравнений является метод последовательного интегрирования (метод шагов), при котором на начальном множестве, равном запаздыванию, тем или иным способом задается начальная функция. В этом случае решение ЛДРУ сводится к решению последовательности задач Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений без отклонения аргумента (см. [1]). С другой стороны известно (см. [1]), что, как правило, в точках стыковки решений, т.е. в точках, кратных запаздыванию, решение имеет разрывную производную. Показано, что если для ЛДРУ запаздывающего типа гладкость решения в последующих точках стыковки возрастает, то для ЛДРУ нейтрального типа разрыв производных сохраняется во всех следующих точках стыковки решений. Поэтому достаточно важной является задача изучения класса начальных функций, которые порождают решения исследуемого ЛДРУ, обладающего в точках, кратных запаздыванию, необходимой гладкостью. В данной работе для решения задачи о гладких решениях применяется метод полиномиальных квазирешений (см. [3], [2]), который был разработан для исследования начальной задачи с начальной точкой для ЛДРУ различных типов.

2. Постановка задачи. Рассмотрим начальную задачу с начальной функцией для скалярного линейного дифференциально-разностного уравнения нейтрального типа

$$\dot{y}(t)+p(t)\dot{y}(t-1)=a(t)y(t-1)+\bar{f}(t), \quad t\in[0,\infty); \tag{1}$$

$$y(t)=g(t), \quad t\in[-1,0], \tag{2}$$

где

$$g(t)\in C^{\infty}[-1,0], \quad a(t)=a_0+a_1t, \quad p(t)=p_0+p_1t, \tag{3}$$

$$\bar{f}(t)=\sum_{n=0}^{F}\bar{f}_nt^n. \tag{4}$$

Сформулируем задачу о гладких решениях: определить условия существования и способы нахождения начальной функции $g(t)$, $t \in [-1, 0]$, такой, что порождаемое ею решение начальной задачи (1)–(4) обладает в точках, кратных запаздыванию, необходимой гладкостью.

Покажем, что в случае однородного уравнения (1) с постоянными коэффициентами, т.е.

$$\dot{y}(t) + p_0\dot{y}(t-1) = a_0 y(t-1), \tag{5}$$

эта задача имеет очевидные решения.

Действительно, следуя методу Эйлера, будем искать решение (5) в виде

$$y(t) = Ce^{kt}, \quad C^{-} \operatorname{const}.$$

Подставляя эту формулу в (5) и проводя соответствующие преобразования, приходим к характеристическому квазиполиному

$$e^k = \frac{a_0}{k} - p_0,$$

имеющему на комплексной плоскости бесконечное множество корней. При этом, каждый корень k_i квазиполинома порождает точное решение (5) на всей числовой оси в виде $y_i(t) = C_i e^{k_i t}$.

Тогда справедливо следующее утверждение.

Утверждение 1. Если на начальном множестве $[-1, 0]$ в качестве начальной функции выбрано любое частное точное решение

$$y^*(t) = \sum_{i=1}^{M} C_i^{k_i t},$$

то порождаемое решение начальной задачи для уравнения (5) с такой начальной функцией будет аналитически продолжимо на полуинтервал $[0, \infty)$.

Для переменных коэффициентов ЛДРУ аналогичные результаты не известны.

В данной работе решение поставленной задачи для (1)–(4) будем искать на основе метода полиномиальных квазирешений.

3. Метод полиномиальных квазирешений. Приведем основные положения метода полиномиальных решений. Рассмотрим начальную задачу с начальной точкой для скалярного ЛДРУ нейтрального типа (1), (3), (4), которую перепишем в виде

$$\dot{x}(t) + p(t)\dot{x}(t-1) = a(t)x(t-1) + \bar{f}(t), \quad t \in R, \quad x(0) = x_0. \tag{6}$$

Согласно методу полиномиальных квазирешений [3], введем полином

$$x(t) = \sum_{n=0}^{N} x_n t^n, \quad t \in R. \tag{7}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \sum_{n=0}^{N} n x_n t^{n-1}, \\ x(t-1) &= \sum_{n=0}^{N} x_n (t-1)^n = \sum_{n=0}^{N} \tilde{x}_n t^n, \\ \dot{x}(t-1) &= \sum_{n=0}^{N} n \tilde{x}_n t^{n-1}, \end{aligned} \tag{8}$$

где

$$\tilde{x}_n = x_n + \sum_{i=1}^{N-n} \bar{C}_{n+i}^{i} x_{n+i}, \quad n = \overline{1, N-1}; \quad \tilde{x}_N = x_N. \tag{9}$$

Здесь

$$\bar{C}_p^q = (-1)^q C_p^q, \qquad C_p^q = \frac{p!}{q!(p-q)!}$$

— биномиальные коэффициенты.

Проведем анализ размерностей полиномов, входящих в уравнение (6). Производные $\dot{x}(t)$ и $\dot{x}(t-1)$ имеют размерность $N-1$, слагаемое $a(t)x(t-1)$ имеет размерность $N+1$, а $\bar{f}(t)$ — размерность F. Тогда для того чтобы последний коэффициент x_N в (7) определялся последним коэффициентом $\bar{f}_F$ в (4), необходимо, чтобы в (7) было $N=F+1$. В этом случае в (6), слагаемое $a(t)x(t-1)$ будет полиномами степени $N+1$. Полагая в (4) $N=F+1$, определим функцию $f(t)$ в виде

$$f(t)=\bar{f}(t)+\Delta(t)=\sum_{n=0}^{N+1} f_n t^n, \tag{10}$$

где $f_n=\bar{f}_n$, $n=\overline{0,N-1}$, а невязка $\Delta_N(t)=f_N t^N+f_{N+1}t^{N+1}$, f_N и f_{N+1} — неизвестные коэффициенты.

С учетом введенных обозначений рассмотрим начальную задачу

$$\dot{x}(t)+p(t)\dot{x}(t-1)=a(t)x(t-1)+f(t), \quad t\in R, \quad x(0)=x_0. \tag{11}$$

Определение 1. Задачу (11) будем называть согласованной по размерности полиномов относительно задачи (6).

Подставляя (7), (8) и (10) в (11), методом неопределенных коэффициентов получаем

$$nx_n=\begin{cases} a_0\tilde{x}_0-p_0\tilde{x}_1+f_0, & n=1,\\ \sum_{i=0}^{1}(a_i\tilde{x}_{n-1-i}-p_i(n-i)\tilde{x}_{n-i})+f_{n-1}, & 2\leqslant n\leqslant N,\end{cases} \tag{12}$$

$$0=a_1\tilde{x}_{N-1}+(a_0-Np_1)\tilde{x}_N+f_N, \quad n=N+1,$$

$$0=a_1\tilde{x}_N+f_{N+1}, \quad n=N+2.$$

Отметим следующее замечание

Замечание 1. Поскольку степень полинома $x(t)$ равна $F+1$, это позволяет выбрать степень полинома $\bar{f}(t)$ в (4) в зависимости от желаемой степени полинома $x(t)$, добавляя к $\bar{f}(t)$ соответствующее число нулевых членов.

Определение 2. Если существует полином степени $N=F+1$

$$x(t)=\sum_{n=0}^{N} x_n t^n, \quad t\in R, \tag{13}$$

тождественно удовлетворяющий начальной задаче (11), то этот полином будем называть полиномиальным квазирешением (ПК-решением) задачи (6).

Теорема, устанавливающая условия существования ПК-решений начальной задачи (6), приведена в [3].

4. Гладкие решения ЛДРУ. Перепишем начальную задачу с начальной функцией (1), (2) в виде

$$\dot{y}(t)+p(t)\dot{y}(t-1)=a(t)y(t-1)+\bar{f}(t), \quad t\in[0,\infty); \tag{14}$$

$$y(t)=x^N(t), \quad t\in[-1,0], \tag{15}$$

где $x^N(t)\in C^\infty[-1,0]$ — полиномиальное квазирешение степени N начальной задачи с начальной точкой (6).

Теорема 1. *Если для начальной задачи* (1), (2) *начальная функция* $g(t)$ *представляет собой полиномиальное квазирешение* $x^N(t)$ *степени* N *начальной задачи* (2), *то решение задачи* (1), (2) *на отрезке* $[0,T]$, $T>1$, *порождаемое этой начальной функцией, имеет в точках стыковки решений непрерывные производные не ниже порядка* N.

Доказательство. Методом последовательного интегрирования на первом шаге для $t \in [0,1]$ из (14) с учетом начального условия (15) получаем

$$\frac{dy(t)}{dt} = -p(t)\frac{dx^N(t-1)}{dt} + a(t)x^N(t-1) + \bar{f}(t), \quad t \in [0,1]. \tag{16}$$

Так как, согласно (3), (4), (7) и (8), правая часть уравнения представляет собой полином степени $N+1$, то данное уравнение есть обыкновенное дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными. Тогда решением уравнения (16) будет полином

$$y(t) = \sum_{n=0}^{N+2} y_n t^n. \tag{17}$$

С другой стороны, для нахождения коэффициентов y_n подставим (3), (4), (7) и (8) для $x_n = x_n^N$ в (16). Собирая слагаемые при одинаковых степенях переменной t, приходим к рекуррентной формуле

$$ny_n = \begin{cases} a_0\tilde{x}_0^N - p_0\tilde{x}_1^N + \bar{f}_0, \quad n = 1, \\ \displaystyle\sum_{i=0}^{1}(a_i\tilde{x}_{n-1-i}^N - p_i(n-i)\tilde{x}_{n-i}^N) + \bar{f}_{n-1}, \quad 2 \leqslant n \leqslant N, \end{cases} \tag{18}$$

$$y_{N+1} = a_1\tilde{x}_{N-1}^N + (a_0 - Np_1)\tilde{x}_N^n,$$

$$y_{N+2} = a_1\tilde{x}_N^N.$$

Сравнение формул (12) и (18) с учетом (10) показывает, что

$$y_k = x_k^N, \quad k = \overline{1,N}. \tag{19}$$

Поскольку из (13) и (17) вытекает, что при $t = 0$

$$x_n^N = \frac{(x^N(0))^{(n)}}{n!} \quad \text{и} \quad y_n = \frac{y^{(n)}(0)}{n!},$$

из (19) следует, что в точке $t = 0$ стыковки начальной функции $x^N(t)$ и порождаемого решения $y(t)$ имеет место равенство производных

$$y^{(n)}(0) = (x^N(0))^{(n)}.$$

Как известно [1], для исследуемого ЛДРУ нейтрального типа (1) это означает, что в последующих точках стыковки решений $t = 1, 2, \ldots$ гарантировано существование N непрерывных производных у порождаемого решения $y(t)$. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Мышкис А.* Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом. — М.-Л.: Гостехиздат, 1951.
2. *Черепенников В.* Численно-аналитический метод исследования некоторых линейных функционально-дифференциальных уравнений. — Новосибирск: СибЖВМ, 2013.
3. *Cherepennikov V., Ermolaeva P.* Polynomial quasisolutions of linear differential difference equations. — Opuscula Math. — 2006.

В. Б. Черепенников

Институт систем энергетики им Л. А. Мелентьева СО РАН (ИСЭМ СО РАН)

E-mail: `vbcher@mail.ru`

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 132 (2017). С. 136–139

УДК 517.929

ТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ ОСЦИЛЛЯЦИИ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С НЕСКОЛЬКИМИ ЗАПАЗДЫВАНИЯМИ

© 2017 г. **К. М. ЧУДИНОВ**

Аннотация. Получены новые неулучшаемые условия осцилляции всех решений линейного дифференциального уравнения с несколькими переменными запаздываниями и положительными коэффициентами. Условия имеют вид верхнего и нажнего пределов суммы интегралов от коэффициентов по множествам, каждое из которых определяется только соответствующим данному коэффициенту запаздыванием. Этим результаты отличаются от известных, которые предполагают то или иное загрубление множеств интегрирования.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение с несколькими запаздываниями, осцилляция, эффективные условия.

AMS Subject Classification: 34K06, 34K11

1. Два типа условий осцилляции. В работе А. Д. Мышкиса [2] было, в частности, установлено, что все решения уравнения

$$\dot{x}(t) + p(t)x(\tau(t)) = 0, \quad t \geqslant 0, \tag{1}$$

где функции p и τ непрерывны и неотрицательны, осциллируют, если $\inf p(t) \inf \tau(t) > 1/e$; при этом константу $1/e$ нельзя уменьшить.

Спустя более четверти века в работах разных авторов появились обобщения этого результата для уравнений с одним и несколькими запаздываниями в виде оценок интегралов от коэффициентов по длине запаздывания. Так, если $\tau(t) = t - r$, где $r = \mathrm{const} > 0$, то достаточным условием осцилляции всех решений уравнения (1) является неравенство

$$\varliminf_{t\to\infty} \int\limits_{t-r}^{t} p(s)\,ds > 1/e.$$

Будем называть такие утверждения *условиями осцилляции типа* $1/e$.

Такие условия для уравнений с переменным запаздыванием впервые были получены Р. Г. Коплатадзе и Т. А. Чантурия [1]: если $\tau(t) \to +\infty$ при $t \to +\infty$ и

$$\varliminf_{t\to+\infty} \int\limits_{\tau(t)}^{t} p(s)\,ds > \frac{1}{e},$$

то все решения уравнения (1) осциллируют.

Этот результат обобщается на случай уравнения с несколькими запаздываниями

$$\dot{x}(t) + \sum_{k=1}^{m} p_k(t)x(\tau_k(t)) = 0, \quad t \geqslant 0, \tag{2}$$

Работа выполнена в рамках базовой части госзадания Минобрнауки РФ (задание № 2014/152, проект № 1890).

с неотрицательными коэффициентами, например, следующим образом (см. [6]). Пусть функция $\tau\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ непрерывна и не убывает и $\max\limits_k \tau_k(t) \leqslant \tau(t) \leqslant t$; тогда если

$$\varliminf_{t\to+\infty} \int\limits_{\tau(t)}^{t} \sum_{k=1}^{m} p_k(s)\,ds > \frac{1}{e},$$

то все решения уравнения (2) осциллируют. Обратим внимание на загрубление длин промежутков интегрирования. Все известные уточнения приведенных результатов для уравнений с несколькими переменными запаздываниями так или иначе наследуют это свойство. Однако в случае постоянного запаздывания интегралы от коэффициентов по соответствующим длинам запаздывания можно суммировать. Именно, если

$$\varliminf_{t\to+\infty} \sum_{k=1}^{m} \int\limits_{t}^{t+r_k} p(s)\,ds > \frac{1}{e},$$

то все решения уравнения (2), где $\tau_k(t) = t - r_k$, осциллируют (см. [10]).

Рассмотрим условия осцилляции другого типа. В начале 70-х гг. в двух независимых работах [3, 9] было получено следующее: если $\tau(t)$ не убывает с ростом t, $\tau(t) \to +\infty$ при $t \to +\infty$ и

$$\varlimsup_{t\to+\infty} \int\limits_{\tau(t)}^{t} p(s)\,ds > 1,$$

то все решения уравнения (1) осциллируют. Константа типа 1, как и $1/e$, не может быть уменьшена.

Обобщения этого факта будем называть *условиями осцилляции типа* 1.

Такие обобщения встретили трудности, аналогичные описанным выше для условий типа $1/e$. Так, для уравнения (2) имеем (см. [7]): если $\tau_k(t)$ не убывают с ростом t и $\tau_k(t) \to +\infty$ при $t \to +\infty$ для всех $k = \overline{1,m}$, и при этом

$$\varlimsup_{t\to+\infty} \int\limits_{\max_k \tau_k(t)}^{t} \sum_{k=1}^{m} p_k(s)\,ds > 1,$$

то все решения уравнения (2) осциллируют. И снова оказывается, что если запаздывания постоянны, то можно суммировать интегралы по различным длинам запаздывания [11].

В последние два десятилетия условия как типа $1/e$, так и типа 1 неоднократно уточнялись (см., например, недавние статьи [4, 8] и библиографию в них), появились также работы, предлагающие условия смешанных типов. В частности, немало работ посвящено«сближению»констант $1/e$ и 1, где вопрос обычно ставится так: предположим, что условия осцилляции типа $1/e$ не выполняются, и обозначим соответствующий нижний предел (не превышающий $1/e$) через α; установить в терминах α, насколько можно уменьшить константу 1 в оценке верхнего предела, гарантируя осцилляцию всех решений. Здесь не будем обсуждать подобные вопросы.

Ниже представим результаты применения нового подхода к рассмотренным проблемам.

2. Новые результаты. Пусть $p_k, \tau_k\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, функции p_k локально суммируемы, функции τ_k измеримы по Лебегу, $k = \overline{1,m}$.

Решением уравнения (2) будем называть локально абсолютно непрерывную функцию $x\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, удовлетворяющую для почти всех $t \in \mathbb{R}_+$ уравнению (2), где для $\xi < 0$ полагается $x(\xi) = \varphi(\xi)$, функция φ измерима по Борелю на $(-\infty, 0)$.

Будем говорить, что решение уравнения (2) *осциллирует*, если оно имеет неограниченную справа последовательность нулей.

Условие осцилляции типа 1, позволяющее суммировать коэффициенты по множествам, определяемым только длинами соответствующих запаздываний, было предложено в [5].

Определим семейство множеств

$$E_k(t) = \{s \mid \tau_k(s) \leqslant t \leqslant s\}, \quad t \geqslant 0, \quad k = \overline{1, m}.$$

Нетрудно видеть, что все множества семейства измеримы.

Теорема 1 (см. [5]). *Если* $\tau_k(t) \to +\infty$ *при* $t \to +\infty$ *для* $k = \overline{1, m}$ *и*

$$\varlimsup_{t\to\infty} \sum_{k=1}^{m} \int\limits_{E_k(t)} p_k(s)\, ds > 1,$$

то все решения уравнения (2) *осциллируют.*

Доказательство теоремы 1 коротко и элементарно, а все основные известные условия осцилляции типа 1 для уравнения (2) оказываются ее следствиями. Отметим не установленное ранее следствие.

Следствие 1. *Пусть* $p_k, \tau_k \colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, $\tau_k(t)$ *строго возрастают и* $\tau_k(t) \to +\infty$ *при* $t \to +\infty$, $k = \overline{1, m}$. *Если при этом*

$$\varlimsup_{t\to\infty} \sum_{k=1}^{m} \int\limits_{t}^{\tau_k^{-1}(t)} p_k(s)\, ds > 1,$$

то все решения уравнения (2) *осциллируют.*

Недавно выяснилось, что аналогичный приведенному подход применим к признакам типа $1/e$. Именно, на основе идей цитированной выше работы [1] было доказано следующее.

Теорема 2. *Если* $\tau_k(t) \to +\infty$ *при* $t \to +\infty$ *для* $k = \overline{1, m}$ *и*

$$\varliminf_{t\to\infty} \sum_{k=1}^{m} \int\limits_{E_k(t)} p_k(s)\, ds > \frac{1}{e},$$

то все решения уравнения (2) *осциллируют.*

Следствие 2. *Пусть* $p_k, \tau_k \colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, $\tau_k(t)$ *строго возрастают и* $\tau_k(t) \to +\infty$ *при* $t \to +\infty$, $k = \overline{1, m}$. *Если при этом*

$$\varliminf_{t\to\infty} \sum_{k=1}^{m} \int\limits_{t}^{\tau_k^{-1}(t)} p_k(s)\, ds > \frac{1}{e},$$

то все решения уравнения (2) *осциллируют.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Коплатадзе Р. Г., Чантурия Т. А.* О колеблющихся и монотонных решениях дифференциальных уравнений первого порядка с отклоняющимся аргументом// Дифференц. уравнения. — 1982. — *18*, № 8. — С. 1463–1465.
2. *Мышкис А. Д.* О решениях линейных однородных дифференциальных уравнений первого порядка устойчивого типа с запаздывающим аргументом// Мат. сб. — 1951. — *28*, № 3. — С. 641–658.
3. *Трамов М. И.* Условия колеблемости решений дифференциальных уравнений первого порядка с запаздывающим аргументом// Изв. вузов. Мат. — 1975. — № 3 (154). — С. 92–96.
4. *Braverman E., Chatzarakis G. E., Stavroulakis I. P.* Iterative oscillation tests for differential equations with several non-monotone arguments// Adv. Difference Equ. — 2016. — *87*. — С. 1–18.
5. *Chudinov K.* Note on oscillation conditions for first-order delay differential equations// Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ. — 2016. — № 2. — С. 1–10.
6. *Fukagai N., Kusano T.* Oscillation theory of first order functional-differential equations with deviating arguments// Ann. Mat. Pura Appl. — 1984. — *136*, № 4. — С. 95–117.
7. *Győri I., Ladas G.* Oscillation theory of delay differential equations. — New York: Oxford Mathematical Monographs, The Clarendon Press, Oxford University Press, 1991.

8. *Infante G., Koplatadze R., Stavroulakis I. P.* Oscillation criteria for differential equations with several retarded arguments// Funkcial. Ekvac. — 2015. — *58*, № 3. — С. 347–364.
9. *Ladas G., Lakshmikantham V., Papadakis J. S.* Oscillations of higher-order retarded differential equations generated by the retarded argument// Delay and functional differential equations and their applications (Proc. Conf., Park City, Utah, 1972). — New York: Academic Press, 1972 — С. 219–231.
10. *Li B.* Oscillation of first order delay differential equations// Proc. Amer. Math. Soc. — 1996. — *124*, № 12. — С. 3729–3737.
11. *Tang X. H.* Oscillation of first order delay differential equations with distributed delay// J. Math. Anal. Appl. — 2004. — *289*, № 2. — С. 367–378.

К. М. Чудинов
Пермский национальный исследовательский политехнический университет
E-mail: `cyril@list.ru`

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 132 (2017). С. 140–144

УДК 517.9

О РАЗРЕШИМОСТИ МАТРИЧНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

© 2017 г. С. М. ЧУЙКО

Аннотация. Найдены условия разрешимости, а также конструкция обобщенного оператора Грина линейной матричной краевой задачи; при этом предложен оператор, который приводит линейное матричное уравнение к традиционной линейной нётеровой краевой задаче. Для решения линейной матричной системы использован оператор, который приводит линейное матричное уравнение к линейному алгебраическому уравнению с прямоугольной матрицей.

Ключевые слова: оператор Грина, нётеровы краевые задачи, матричные дифференциальные уравнения.

AMS Subject Classification: 34B15, 34B40, 34C11

1. Постановка задачи. В [1, 14] разработаны конструктивные методы решения нётеровых краевых задач для систем дифференциальных, функционально-дифференциальных, интегродифференциальных и разностных уравнений в предположении, что неизвестная является вектор-функцией, определенной в банаховом пространстве. Предложенные методы решения нётеровых краевых задач опирались на эффективную схему исследования условий разрешимости, а также на конструкцию общего решения линейного алгебраического уравнения, основанную на псевдообращении матриц по Муру—Пенроузу. Целью данной работы является перенесение конструктивных методов решения линейных неётеровых краевых задач для систем дифференциальных, функционально-дифференциальных, интегродифференциальных и разностных уравнений для решения матричных краевых задач общего вида. Основой предложенной техники является схема исследования условий разрешимости, а также конструкция общего решения линейных матричных уравнений [2, 9, 11]. Продемонстрирована возможность и эффективность перехода от матричных краевых задач общего вида к нётеровым краевым задачам для систем уравнений, обобщающих дифференциально-алгебраические системы [3, 6, 13, 16–18].

Обозначим через $\mathbb{R}^n$ пространство действительных векторов с нормой

$$\|a\|_{\mathbb{R}^n} := \max_{1\leqslant i\leqslant n} |a_i|, \quad a \in \mathbb{R}^n,$$

а также пространство $\mathbb{R}^{m\times n}$ пространство действительных $(m \times n)$-матриц с нормой

$$\|A\|_{\mathbb{R}^{m\times n}} := \max_{1\leqslant i\leqslant m} \sum_{k=1}^{n} |a_{ik}|, \qquad A := \{a_{ij}\} \in \mathbb{R}^{m\times n}.$$

Обозначим также через $\mathcal{B}[a,b]$, $\check{\mathcal{B}}[a,b]$ банаховы пространства скалярных функций

$$z(t) : \mathcal{B}[a,b], \check{\mathcal{B}}[a,b] : [a,b] \to \mathbb{R}^1, \quad -\infty < a \leqslant t \leqslant b < +\infty.$$

Исследуем задачу о построении решений

$$Z(t) \in \mathbb{B}_{\alpha\times\beta}[a,b] := \mathcal{B}[a,b] \otimes \mathbb{R}^{\alpha\times\beta}$$

матричного операторного уравнения

$$(LZ)(t) = F(t), \qquad F(t) \in \check{\mathbb{B}}_{\gamma\times\delta}[a,b], \tag{1}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Государственного Фонда фундаментальных исследований Украины (номер государственной регистрации 0115U003182).

ISSN 0233–6723

подчиненных краевому условию

$$\mathcal{L}Z(\cdot) = \mathcal{A}, \quad \mathcal{A} \in \mathbb{R}^{\lambda\times\mu}. \tag{2}$$

Здесь

$$L : \mathbb{B}_{\alpha\times\beta}[a,b] \to \check{\mathbb{B}}_{\gamma\times\delta}[a,b] := \check{\mathcal{B}}[a,b] \otimes \mathbb{R}^{\gamma\times\delta}$$

— линейный ограниченный матричный оператор и

$$\mathcal{L} : \mathbb{B}_{\alpha\times\beta}[a,b] \to \mathbb{R}^{\lambda\times\mu}$$

— линейный ограниченный матричный функционал. Условия разрешимости и структура решений

$$Z(t) \in \mathbb{C}^1_{\alpha\times\alpha}[a,b] := \mathbb{C}^1[a,b] \otimes \mathbb{R}^{\alpha\times\alpha}$$

системы

$$Z'(t) = AZ(t) + Z(t)B + F(t),$$
$$F(t) \in \mathbb{C}_{\alpha\times\alpha}[a,b]$$

были приведены в [2]; конструктивные условия разрешимости и структура периодического решения этой системы при условии $\alpha = \beta = \lambda = \mu$ получены в [12] с использованием обобщенного обращения матриц и операторов, описанного в [11]. Здесь $\mathbb{C}_{m\times n}[a,b]$ — линейное нормированное пространство действительных $(m\times n)$-матриц $A(t)$, непрерывных на отрезке $[a,b]$ с нормой

$$\|A(t)\|_{\mathbb{C}_{m\times n}} := \max_{[a;b]} \|A(t)\|_{\mathbb{R}^{m\times n}},$$
$$A(t) \in \mathbb{C}_{m\times n}[a,b],$$

а также пространство $\mathbb{C}^1_{m\times n}[a,b]$ — линейное нормированное пространство действительных $(m\times n)$-матриц $A(t)$, непрерывно дифференцируемых на отрезке $[a,b]$ с нормой

$$\|A(t)\|_{\mathbb{C}^1_{m\times n}} := \max_{[a;b]} \sum_{k=0}^{1} \|A^{(k)}(t)\|_{\mathbb{R}^{m\times n}},$$
$$A(t) \in \mathbb{C}^1_{m\times n}[a,b].$$

2. Условия разрешимости. Определим оператор [9] $\mathcal{M}[\mathcal{A}] : \mathbb{R}^{m\times n} \to \mathbb{R}^{m\cdot n}$ как оператор, который ставит в соответствие матрице $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ действительный вектор-столбец $\mathcal{B} := \mathcal{M}[\mathcal{A}] \in \mathbb{R}^{m\cdot n}$, составленный из n столбцов матрицы $\mathcal{A}$, а также обратный оператор [9] $\mathcal{M}^{-1}[\mathcal{B}] : \mathbb{R}^{m\cdot n} \to \mathbb{R}^{m\times n}$, который ставит в соответствие вектор-столбцу $\mathcal{B} \in \mathbb{R}^{m\cdot n}$ матрицу $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Линейный матричный оператор $(\ell z)(t) := \mathcal{M}(LZ)(t) : \mathbb{B}_{\alpha\beta}[a,b] \to \check{\mathbb{B}}_{\gamma\delta}[a,b]$, в силу ограниченности оператора L, представляет собой линейный ограниченный оператор. Предположим, что оператор ℓ нётеров [1, 14]:

$$\dim \mathbb{N}(\ell) - \dim \mathbb{N}(\ell^*) = s - k < \infty.$$

Здесь $\mathbb{N}(\ell)$ и $\mathbb{N}(\ell^*)$ — нуль-пространства операторов ℓ и ℓ^*. Обозначим матричную функцию $\varphi(t) := (\mathcal{M}F)(t) : [a,b] \to \check{\mathbb{B}}_{\gamma\delta}[a,b]$. Таким образом, задача о построении решений $Z(t) \in \mathbb{B}_{\alpha\times\beta}[a,b]$ матричного операторного уравнения (1) приведена к задаче о нахождении решений $z(t) := (\mathcal{M}Z)(t) \in \mathbb{B}_{\alpha\beta}[a,b]$ операторного уравнения

$$(\ell z)(t) = \varphi(t). \tag{3}$$

Как известно [14, с. 97], нётерово операторное уравнение (3) разрешимо для тех и только тех правых частей $\varphi(t)$, которые удовлетворяют условию

$$(P_{\ell^*}\varphi)(t) = 0, \tag{4}$$

при этом общее решение уравнения (3) имеет вид

$$z(t,c) = X(t)c + (\ell^-\varphi)(t), \quad c \in \mathbb{R}^s, \quad s := \dim \mathbb{N}(\ell).$$

Здесь

$$X(t) \in \mathbb{B}_{\alpha\beta\times s}[a,b]$$

— матрица, составленная из полной системы s линейно независимых векторов нуль-пространства оператора ℓ;

$$\ell^{-} : \check{\mathbb{B}}_{\gamma\delta}[a,b] \to \mathbb{B}_{\alpha\beta}[a,b]$$

— ограниченный обобщенно-обратный оператор к оператору ℓ, кроме того,

$$P_{\ell^*} : \check{\mathbb{B}}_{\gamma\delta}[a,b] \to \mathbb{N}\,(\ell^*)$$

— проектор на нуль-пространство оператора ℓ^*. Общее решение уравнения (1)

$$Z(t,c) = W(t,c) + (KF)(t),$$
$$W(t,c) := \mathcal{M}^{-1}(X\,c)(t), \qquad (KF)(t) := \mathcal{M}^{-1}(\ell^{-}\varphi)(t)$$

состоит из суммы $W(t,c)$ — общего решения однородной части операторного уравнения (1) и $(KF)(t)$ — частного решения неоднородного матричного уравнения (1). Подставляя общее решение задачи Коши $Z(a) = \Theta$ для матричного операторного уравнения (1) в краевое условие (1), приходим к алгебраическому уравнению [9, 10]

$$\mathcal{L}W(\cdot,\Theta) = \mathcal{A} - \mathcal{L}(KF)(\cdot) \tag{5}$$

относительно матрицы $\Theta \in \mathbb{R}^{\alpha\times\beta}$. Обозначим

$$\Xi^{(j)} \in \mathbb{R}^{\alpha\times\beta}, \quad j = 1, 2, \ldots, \alpha\cdot\beta,$$

— естественный базис [4] пространства $\mathbb{R}^{\alpha\times\beta}$. Уравнение (5)) разрешимо тогда и только тогда, когда [9, 10]

$$P_{\mathcal{Q}_d^*}\mathcal{M}\,[\mathcal{A} - \mathcal{L}(KF)(\cdot)] = 0. \tag{6}$$

Здесь $\mathcal{Q} \in \mathbb{R}^{\lambda\cdot\mu\times\alpha\cdot\beta}$ — постоянная матрица:

$$\mathcal{Q} := \left[\mathcal{M}\left(\mathcal{Q}^{(1)}\right)\mathcal{M}\left(\mathcal{Q}^{(2)}\right)\cdots\mathcal{M}\left(\mathcal{Q}^{(\alpha\beta)}\right)\right],$$
$$\mathcal{Q}^{(j)} := \mathcal{L}\left(\Xi^{(j)}\right) \in \mathbb{R}^{\lambda\times\mu}, \quad j = 1, 2, \ldots \alpha\cdot\beta,$$

$P_{\mathcal{Q}^*}$ — ортопроектор: $\mathbb{R}^{\lambda\cdot\mu} \to \mathbb{N}(\mathcal{Q}^*)$; матрица $P_{\mathcal{Q}_d^*}$ составлена из d линейно-независимых строк ортопроектора $P_{\mathcal{Q}^*}$.

3. Основной результат. При условии (6) и только при нем общее решение матричного уравнения (5)

$$\Theta = \mathcal{M}^{-1}\left\{\mathcal{Q}^{+}\left[\mathcal{A} - \mathcal{L}(KF)(\cdot)\right]\right\} + \mathcal{M}^{-1}\left[P_{\mathcal{Q}_r}c_r\right], \quad c_r \in \mathbb{R}^r$$

определяет общее решение матричной краевой задачи (1)

$$Z(t,c_r) = W(t,c_r) + G\left[F;\mathcal{A}\right](t),$$
$$W(t,c_r) := \mathcal{M}^{-1}\left[X(t)P_{\mathcal{Q}_r}c_r\right].$$

Здесь $P_{\mathcal{Q}}$ — ортопроектор: $\mathbb{R}^{\alpha\cdot\beta} \to \mathbb{N}(\mathcal{Q})$; матрица $P_{\mathcal{Q}_r} \in \mathbb{R}^{\alpha\cdot\beta\times r}$ составлена из r линейно независимых столбцов ортопроектора $P_{\mathcal{Q}}$, $\mathcal{Q}^{+}$ — псевдообратная по Муру—Пенроузу матрица. Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть*

$$L : \mathbb{B}_{\alpha\times\beta}[a,b] \to \check{\mathbb{B}}_{\gamma\times\delta}[a,b]$$

— линейный ограниченный матричный оператор и

$$\mathcal{L} : \mathbb{B}_{\alpha\times\beta}[a,b] \to \mathbb{R}^{\lambda\times\mu}$$

— линейный ограниченный матричный функционал. Предположим, что оператор

$$(\ell z)(t) := \mathcal{M}(LZ)(t) : \mathbb{B}_{\alpha\beta}[a,b] \to \check{\mathbb{B}}_{\gamma\delta}[a,b]$$

нётеров и выполнено условие (4). *Неоднородная матричная краевая задача* (1), (2) *разрешима тогда и только тогда, когда выполнено условие* (6). *При условии* (6) *и только при нем общее решение краевой задачи* (1), (2)

$$Z(t,c_r) = W(t,c_r) + G\left[F;\mathcal{A}\right](t),$$

$$W(t, c_r) := \mathcal{M}^{-1}\left[X(t)P_{\mathcal{Q}_r}c_r\right]$$

определяет обобщенный оператор Грина линейной матричной краевой задачи (1), (2)

$$G\left[F; \mathcal{A}\right](t) := W\left\{t, \mathcal{M}^{-1}\left\{\mathcal{Q}^{+}\left[\mathcal{A} - \mathcal{L}(KF)(\cdot)\right]\right\}\right\} + (KF)(t)$$

и $W(t, c_r)$ *— общее решение однородной части матричной краевой задачи* (1), (2).

При условии $P_{\mathcal{Q}^*} \neq 0$ будем говорить, что для краевой задачи (1), (2) имеет место критический случай, при этом задача (1), (2) разрешима лишь для тех неоднородностей $F(t)$ и $\mathcal{A}$, для которых выполнено условие (6). При условии $P_{\mathcal{Q}^*} = 0$ будем говорить, что для краевой задачи (1), (2) имеет место некритический случай, при этом задача (1), (2) разрешима для любых неоднородностей $F(t)$ и $\mathcal{A}$. Утверждение доказанной леммы является обобщением соответствующих утверждений [14] на случай матричной краевой задачи (1), (2).

Найденные условия разрешимости, а также конструкция обобщенного оператора Грина линейной матричной краевой задачи (1), (2) обобщают традиционные результаты для нётеровых краевых задач для систем обыкновенных дифференциальных, а также дифференциально-алгебраических уравнений [1, 3, 7, 14, 16]. С другой стороны, найденные условия разрешимости, а также конструкция обобщенного оператора Грина обобщают соответствующие результаты линейных матричных краевых задач [8, 12, 15].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Азбелев Н. В., Максимов Н. П., Рахматуллина Л. Ф.* Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1991. — 277 с.
2. *Беллман Р.* Введение в теорию матриц. — М.: Наука, 1969. — 367 с.
3. *Бояринцев Ю. Е., Чистяков В. Ф.* Алгебро-дифференциальные системы. Методы решения и исследования. — Новосибирскю — Наука: 1998. — 224 с.
4. *Воеводин В. В., Кузнецов Ю. А.* Матрицы и вычисления. — М.: Наука, 1984. — 318 с.
5. *Лаптинский В. Н., Маковецкий И. И.* К конструктивному анализу двухточечной краевой задачи для нелинейного уравнения Ляпунова// Дифференц. уравнения. — 2005. — *41*, № 7. — С. 994–996.
6. *Самойленко А. М., Шкіль М. I., Яковець В. П.* Лінійні системи диференціальних рівнянь з виродженням. — Киев: Вища школа, 2000. — 296 с.
7. *Чуйко С. М.* Линейные нётеровы краевые задачи для дифференциально-алгебраических систем// Компл. исслед. и моделир. — 2013. — *5*, № 5. — С. 769–783.
8. *Чуйко С. М.* Оператор Грина линейной нётеровой краевой задачи для матричного дифференциального уравнения// Динам. сист. — 2014. — *4(32)*, № 1-2. — С. 101–107.
9. *Чуйко С. М.* О решении обобщенного матричного уравнения Сильвестра// Чебышевский сб. — 2015. — *16*, вып. 1. — С. 52–66.
10. *Чуйко С. М.* О решении линейных матричных уравнений// Науч. вестн. Харьк. ун-та им. В. Н. Каразина. Сер. мат., прикл. мат. мех. — 2015. — *81*. — С. 28–34.
11. *Boichuk A. A., Krivosheya S. A.* Criterion of the solvability of matrix equations of the Lyapunov type// Ukr. Math. — 1998. — *50*, № 8. — C. 1162–1169.
12. *Boichuk A. A., Krivosheya S. A.* A Critical Periodic Boundary Value Problem for a Matrix Riccati Equations// Differ. Equations — 2001. — *37*, № 4. — C. 464–471.
13. *Boichuk A. A., Pokutnyi A. A., Chistyakov V. F.* Application of perturbation theory to the solvability analysis of differential algebraic equations// Comput. Math. and Math. Phys. — 2013. — *53*, № 6. — C. 777–778.
14. *Boichuk A. A., Samoilenko A. M.* Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems. — Utrecht; Boston: VSP, 2004. — XIV+317 c.
15. *Bondarev A. N., Laptinskii V. N.* Multipoint boundary value problem for the Lyapunov equation in the case of strong degeneration of the boundary conditions// Differ. Equations — 2011. — *47*. — C. 778–786.
16. *Campbell S.L.* Singular Systems of differential equations. — San Francisco – London – Melbourne: Pitman Advanced Publishing Program, 1980. — 178 c.
17. *Chuiko S. M.* The Green's operator of a generalized matrix linear differential-algebraic boundary value problem// Siberian Mathematical Journal. — 2015. — *56*, № 4. — C. 752–760.
18. *Chuiko S. M.* A generalized matrix differential-algebraic equation// J. Math. Sci. (N.Y.). — 2015. — *210*, № 1. — C. 9–21.

19. *Chuiko S. M.* Generalized Green Operator of Noetherian boundary-value problem for matrix differential equation// Rus. Math. — 2016. — *60*, № 8. — С. 64–73.

С. М. Чуйко
Донбасский государственный педагогический университет
E-mail: `chujko-slav@inbox.ru`

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 132 (2017). С. 145–149

УДК 517.9

АВТОНОМНЫЕ НЁТЕРОВЫ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ, НЕ РАЗРЕШЕННЫЕ ОТНОСИТЕЛЬНО ПРОИЗВОДНОЙ

© 2017 г. **С. М. ЧУЙКО, О. В. НЕСМЕЛОВА (СТАРКОВА)**

Аннотация. В монографиях Н. В. Азбелева, А. М. Самойленко и А. А. Бойчука разработаны конструктивные методы исследования нётеровых краевых задач, продолжающие изучение периодических задач А. Пуанкаре, А. М. Ляпунова, Н. М. Крылова, Н. Н. Боголюбова, И. Г. Малкина и О. Вейводы методами малого параметра. Нами предложена усовершенствованная схема исследования автономных нётеровых краевых задач для нелинейных систем в критических случаях. В случае кратных корней уравнения для порождающих констант получены достаточные условия существовании решений автономной краевой задачи, не разрешенной относительно производной. Эффективность предложенной схемы исследования автономных краевых задач продемонстрирована на примере периодической задачи для уравнения Льенара.

Ключевые слова: автономные краевые задачи, обыкновенные дифференциальные уравнения, уравнение Льенара.

AMS Subject Classification: 34B15

1. Постановка задачи. Исследуем задачу о построении решений $z(t,\varepsilon) : z(\cdot,\varepsilon) \in \mathbb{C}^1[a, b(\varepsilon)]$, $z(t) \in \mathbb{C}[0,\varepsilon_0]$ автономной нётеровой $(m \neq n)$ краевой задачи $[1, 2, 8, 10, 11]$:

$$z' = Az + f + \varepsilon Z(z, z', \varepsilon), \quad (\ell z)(\cdot,\varepsilon) = \alpha + \varepsilon J(z(\cdot,\varepsilon), z'(\cdot,\varepsilon), \varepsilon). \tag{1}$$

Решения краевой задачи (1) ищем в окрестности решения $z_0(t) \in \mathbb{C}^1[a, b^*]$, $b(\varepsilon) \in \mathbb{C}[0,\varepsilon_0]$, $b^* := b(0)$, порождающей задачи $z_0' = Az_0 + f$, $(\ell z_0)(\cdot) = \alpha \in \mathbb{R}^m$ и его производной. Здесь $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $f \in \mathbb{R}^n$, $Z(z, z', \varepsilon)$ — нелинейная вектор-функция, непрерывно дифференцируемая по неизвестной z в малой окрестности решения $z_0(t)$ порождающей задачи и его производной, а также непрерывно-дифференцируемая по малому параметру ε на отрезке $[0,\varepsilon_0]$; $(\ell z)(\cdot,\varepsilon)$ — линейный и $J(z(\cdot,\varepsilon), z'(\cdot,\varepsilon), \varepsilon)$ — нелинейный векторный функционалы:

$$(\ell z)(\cdot,\varepsilon),\ \varepsilon J(z(\cdot,\varepsilon), z'(\cdot,\varepsilon), \varepsilon) : \mathbb{C}[a, b] \to \mathbb{R}^m,$$

причем второй функционал непрерывно дифференцируем по неизвестной z, z' и по малому параметру ε в малой окрестности решения порождающей задачи и на отрезке $[0,\varepsilon_0]$. Кроме того, $\mathbb{R}^n$ — пространство действительных векторов с нормой $[1, 8]$

$$\|a\|_{\mathbb{R}}^n := \max_{1\leqslant i\leqslant n} |a_i|, \quad a \in \mathbb{R}^n,$$

а также пространство $\mathbb{R}^{m\times n}$ — пространство действительных $(m \times n)$-матриц с нормой

$$\|A\|_{\mathbb{R}}^{m\times n} := \max_{1\leqslant i\leqslant m} \sum_{k=1}^{n} |a_{ik}|, \qquad A := \{a_{ik}\} \in \mathbb{R}^{m\times n}.$$

В критическом случае $(P_{Q^*}) \neq 0$, при условии

$$P_{Q^*}\{\alpha - \ell(Kf)(\cdot)\} = 0$$

порождающая задача имеет семейство решений $[1, 2, 5, 8, 10]$

$$z_0(t, c_r) = X_r(t)c_r + G(f; \alpha)(t), \quad c_r \in \mathbb{R}^r.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Государственного фонда фундаментальных исследований Украины (номер государственной регистрации 0115U003182).

Здесь $Q := (\ell X)(\cdot) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ — постоянная матрица, $\operatorname{rank} Q := n_1$, $r := n - n_1$, $P_{Q^*} \in \mathbb{R}^{m\times m}$ — ортопроектор $P_{Q^*} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{N}(Q^*)$, $X(t)$ — нормальная $(X(a) = I_n)$ фундаментальная матрица однородной части порождающей системы, $X_r(t) := X(t)P_{Q_r}$, матрица P_{Q_r} составлена из r линейно-независимых столбцов ортопроектора $P_Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{N}(Q)$,

$$G(f;\alpha)(t) := X(t)Q^+ [\alpha - \ell(Kf)(\cdot)] + (Kf)(t)$$

— обобщенный оператор Грина порождающей задачи, Q^+ — псевдообратная матрица по Муру—Пенроузу [1,8], $(Kf)(t)$ — оператор Грина задачи Коши порождающей системы.

2. Необходимое условие существования решения. В критическом случае правый конец $b(\varepsilon)$ промежутка $[a, b(\varepsilon)]$ неизвестен [1,2,8,11]. Замена

$$t = a + (\tau - a)(1 + \varepsilon\beta(\varepsilon)), \quad b(\varepsilon) := b^* + \varepsilon(b^* - a)\beta(\varepsilon), \qquad \beta(\varepsilon) \in \mathbb{C}[0, \varepsilon_0], \quad \beta(0) := \beta^*,$$

приводит краевую задачу (1) к виду

$$\begin{aligned} z' &= Az + f + \varepsilon\tilde{Z}(z, z', \beta(\varepsilon), \varepsilon), \\ (\ell z)(\cdot, \varepsilon) &= \varepsilon\tilde{J}(z(\cdot, \varepsilon), z'(\cdot, \varepsilon), \beta(\varepsilon), \varepsilon). \end{aligned} \tag{2}$$

Здесь

$$\tilde{Z}(z, z', \beta(\varepsilon), \varepsilon) := \beta(\varepsilon)A(z + f) + (1 + \varepsilon\beta(\varepsilon))Z\left(z, \frac{z'}{(1 + \varepsilon\beta(\varepsilon))}, \beta(\varepsilon), \varepsilon\right).$$

Обозначим

$$\varphi_0(c^*) := \alpha\beta^* + J(z_0(\cdot, c_r^*), z_0'(\cdot, c_r^*), 0),$$
$$f_0(s, c_0^*) := \beta^* [Az_0(s, c_r^*) + f] + Z(z_0(s, c_r^*), z_0'(s, c_r^*), 0).$$

Лемма. *Если краевая задача* (1) *в критическом случае* $(P_{Q^*}) \neq 0$ *имеет решение* $z(t, \varepsilon)$, *при* $\varepsilon = 0$ *обращающееся в порождающее* $z_0(t, c_r^*)$, $c_r^* \in \mathbb{R}^r$, *то вектор*

$$c_0^* := \operatorname{col}(c_r^*, \beta^*) \in \mathbb{R}^{r+1}$$

удовлетворяет уравнению

$$F(c_0) := P_{Q^*} [\varphi(c_0) - \ell(Kf_0)(\cdot, c_0)] = 0. \tag{3}$$

Для построения решений краевой задачи (1) для каждого простого корня $c_r^* \in \mathbb{R}^r$ уравнения (3) нами получены достаточные условия существовании решений автономной краевой задачи, а также итерационная схема, построенная с использованием техники наименьших квадратов [9,10].

3. Периодическая задача для уравнения типа Льенара. Примером задачи (1) в случае кратных корней уравнения (3) является задача о нахождении условий существования и построении $T_1(\varepsilon)$-периодических решений (см. [2])

$$y(t, \varepsilon) : y(\cdot, \varepsilon) \in \mathbb{C}^2[0, T_1(\varepsilon)], \quad T_1(0) = 2\pi, \quad y(t, \cdot) \in \mathbb{C}[0, \varepsilon_0],$$

уравнения типа Льенара, не разрешенного относительно производной [12]

$$y''(t, \varepsilon) + y(t, \varepsilon) = \varepsilon \cdot Y(y(t, \varepsilon), y'(t, \varepsilon), y''(t, \varepsilon), \varepsilon).$$

Периодические решения уравнения типа Льенара ищем в малой окрестности решения порождающего уравнения $y_0''(t) + y_0(t) = 0$. Здесь $Y(y, y', y'', \varepsilon)$ — нелинейная скалярная функция, непрерывно дифференцируемая по неизвестной y и ее производным y' и y'' в малой окрестности решения порождающей задачи и его производных y_0' и y_0'', а также непрерывно дифференцируемая по малому параметру ε на отрезке $[0, \varepsilon_0]$. Существенным отличием автономной периодической задачи для уравнения типа Льенара от аналогичной неавтономной периодической задачи является тот факт, что любое периодическое решение $z(t, \varepsilon)$ уравнения типа Льенара существует наряду с серией периодических решений вида $z(t + h, \varepsilon)$, $h \in \mathbb{R}^1$. Этот факт позволяет зафиксировать начало отсчета независимой переменной таким образом, чтобы решение порождающей задачи стало однопараметрическим [4, с. 148]. Совершая в уравнении типа Льенара замену независимой переменной [4]

$$t = \tau(1+\varepsilon\beta(\varepsilon)), \quad 1+\varepsilon\beta(\varepsilon) \neq 0,$$
$$T_1(\varepsilon) = 2\pi(1+\varepsilon\beta(\varepsilon)), \quad \beta(\varepsilon) \in \mathbb{C}[0,\varepsilon_0], \quad \beta(0) := \beta_0,$$

приходим к задаче об отыскании 2π-периодических решений

$$y(\cdot,\varepsilon) \in \mathbb{C}^2[0,2\pi],$$
$$y(\tau,\cdot) \in \mathbb{C}[0,\varepsilon_0]$$

уравнения

$$y''(\tau,\varepsilon) + y(\tau,\varepsilon) = \varepsilon\, \mathcal{Y}(y(\tau,\varepsilon), y'(\tau,\varepsilon), y''(\tau,\varepsilon), \beta(\varepsilon), \varepsilon). \tag{4}$$

При условии $1+\varepsilon\beta(\varepsilon) \neq 0$ функция

$$\mathcal{Y}(y(\tau,\varepsilon), y'(\tau,\varepsilon), y''(\tau,\varepsilon), \beta(\varepsilon), \varepsilon) :=$$
$$:= -(2+\varepsilon\beta(\varepsilon))\beta(\varepsilon)\, y(\tau,\varepsilon) + (1+\varepsilon\beta(\varepsilon))^2\, Y\left(y(\tau,\varepsilon), \frac{y'(\tau,\varepsilon)}{(1+\varepsilon\beta(\varepsilon))}, \frac{y''(\tau,\varepsilon)}{(1+\varepsilon\beta(\varepsilon))^2}, \varepsilon\right)$$

непрерывно дифференцируема по неизвестной $y(\tau,\varepsilon)$ и ее производным $y'(\tau,\varepsilon)$ и $y''(\tau,\varepsilon)$ в малой окрестности решения порождающей задачи и его производных $y_0'(\tau,c_0)$ и $y_0'(\tau,c_0)$, непрерывно дифференцируема по функции $\beta(\varepsilon)$ в малой окрестности точки β_0, а также непрерывно дифференцируема по малому параметру ε на отрезке $[0,\varepsilon_0]$. Необходимое и достаточное условие существования 2π-периодических решений уравнения (4):

$$\int_0^{2\pi} H(s)\, \mathcal{Y}(y(s,\varepsilon), y'(s,\varepsilon), y''(s,\varepsilon), \beta(\varepsilon), \varepsilon)\, ds = 0$$

приводит к уравнению для порождающих амплитуд

$$F(\check{c}_0) := \int_0^{2\pi} H(s)\, \mathcal{Y}(y_0(s,c_0), y_0'(s,c_0), y_0''(s,c_0), \beta_0, 0)\, ds = 0,$$
$$\check{c}_0 = \mathrm{col}(c_0, \beta_0) \in \mathbb{R}^2. \tag{5}$$

Теорема. *Если периодическая задача для уравнения типа Льенара имеет решение, при* $\varepsilon = 0$ *обращающееся в порождающее* $y_0(t,c_0) = c_0 \cdot \cos t$*, то вектор* $\check{c}_0$ *удовлетворяет уравнению* (5).

Предположим, что уравнение для порождающих амплитуд (5) имеет действительные корни. Фиксируя одно из решений $\check{c}_0 \in \mathbb{R}^2$ уравнения (5), приходим к задаче об отыскании периодических решений уравнения типа Льенара $y(\tau,\varepsilon) = y_0(\tau,c_0) + x(\tau,\varepsilon)$ в окрестности порождающего решения

$$y_0(\tau,c_0) = c_0 \cdot \cos\tau.$$

Обозначим матрицу

$$B_0 = F'_{\check{c}}(\check{c}_0) \in \mathbb{R}^{2\times 2}.$$

В случае простых ($\det B_0 \neq 0$) корней уравнения для порождающих амплитуд (5) уравнение типа Льенара имеет единственное периодическое решение [2, 4], при $\varepsilon = 0$ обращающееся в порождающее $y_0(t,c_0) = c_0 \cdot \cos t$. Данный критический случай назван критическим случаем первого порядка [2, 4]. Менее изученным является случай [10] кратных корней ($\det B_0 = 0$) уравнения (5); при этом, согласно традиционной классификации периодических краевых задач, поставленная задача для уравнения типа Льенара не может быть отнесена к критическому случаю второго или более высокого порядка [8]. При наличии кратных корней уравнения для порождающих амплитуд, оставляя одну линейно независимую строку уравнения (5), получаем эквивалентное условие разрешимости периодической задачи для уравнения типа Льенара

$$F_\rho(\check{c}_0) := \int\limits_0^{2\pi} H_\rho(s)\, \mathcal{Y}(y_0(s,c_0), y_0'(s,c_0), y_0''(s,c_0), \beta_0, 0)\, ds = 0;$$

здесь $H_\rho(t) = \cos t$ либо $H_\rho(t) = \sin t$, в зависимости от нелинейности $Y(y, y', y'', \varepsilon)$ уравнения типа Льенара. При наличии кратных корней уравнения (5) будем говорить, что для периодической задачи для уравнения типа Льенара имеет место частный критический случай [10].

Пример. Частный критический случай имеет место в задаче о нахождении периодического решения $z(t,\varepsilon) := (\ z^{(a)}(t,\varepsilon) z^{(b)}(t,\varepsilon))^*$ уравнения Лотки—Вольтерра [3]

$$\begin{gathered} z'(t,\varepsilon) = Az(t,\varepsilon) + Z(z(t,\varepsilon)), \qquad A := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \\ Z(z(t,\varepsilon)) := \begin{pmatrix} -z^{(a)}(t,\varepsilon) z^{(b)}(t,\varepsilon) \\ z^{(a)}(t,\varepsilon) z^{(b)}(t,\varepsilon) \end{pmatrix}. \end{gathered} \tag{6}$$

Уравнение (6) в окрестности положения равновесия $z^{(a)}(t,\varepsilon) \equiv 1$, $z^{(b)}(t,\varepsilon) \equiv 1$ посредством замены

$$z^{(a)}(t,\varepsilon) := 1 + \varepsilon\, u(t,\varepsilon),$$
$$z^{(b)}(t,\varepsilon) := 1 + \varepsilon\, y(t,\varepsilon)$$

приводится к виду

$$(1 + \varepsilon y(t,\varepsilon)) y''(t,\varepsilon) = \varepsilon (y'(t,\varepsilon))^2 - y(t,\varepsilon)(1 + \varepsilon y(t,\varepsilon))(1 + \varepsilon y(t,\varepsilon) + \varepsilon y'(t,\varepsilon)). \tag{7}$$

В свою очередь, уравнение (7) приводится к виду (4) посредством функции

$$\mathcal{Y}(y(\tau,\varepsilon), y'(\tau,\varepsilon), y''(\tau,\varepsilon), \beta(\varepsilon), \varepsilon) :=$$

$$:= (y'(\tau,\varepsilon))^2 - \varepsilon\,(1 + \varepsilon\beta(\varepsilon))^2\, y^3(\tau,\varepsilon)(1 + \varepsilon\beta(\varepsilon))\, y^2(\tau,\varepsilon)(2 + 2\,\varepsilon\beta(\varepsilon) -$$

$$- y(\tau,\varepsilon)(\beta(\varepsilon)(2 + \varepsilon\beta(\varepsilon)) + \varepsilon y'(\tau,\varepsilon)) + (1 + \varepsilon\beta(\varepsilon)) y'(\tau,\varepsilon) + y''(\tau,\varepsilon)).$$

Уравнение для порождающих амплитуд в случае задачи о нахождении периодического решения уравнения (7) имеет корни $\beta_0 = 0$, $c_0 = 0, 1$; матрица B_0 при этом вырождена

$$B_0 = -\frac{\pi}{5} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \neq 0;$$

таким образом, задача о нахождении периодического решения уравнения (6) представляет частный критический случай. Заметим, что для корня $\check{c}_0 \in \mathbb{R}^2$ имеет место неравенство $1 + \varepsilon\beta_0 \equiv 1 \neq 0$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Азбелев Н. В., Максимов В. П., Рахматуллина Л. Ф.* Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1991.
2. *Бойчук А. А., Чуйко С. М.* Автономные слабонелинейные краевые задачи// Дифференц. уравнения. — 1992. — *28*, № 10. — С. 1668–1674.
3. *Вольтерра В.* Математическая теория борьбы за существование. — М.: Наука. — 1976.
4. *Малкин И. Г.* Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. — М.: Гостехиздат, 1956.
5. *Чуйко С. М., Старкова О. В.* Автономные краевые задачи в частном критическом случае// Динамические системы. — 2009. — *27*. — С. 127–142.
6. *Чуйко С. М., Старкова О. В., Пирус О. Е.* Нелинейные нётеровы краевые задачи, не разрешенные относительно производной// Динамические системы. — 2012. — *30*, № 1–2. — С. 169–186.
7. *Чуйко С. М., Чуйко А. С.* О приближенном решении автономных нётеровых краевых задач методом наименьших квадратов// Динамические системы. — 2011. — *29*. — С. 103–111.

8. *Boichuk A. A., Samoilenko A. M.* Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems. — Utrecht; Boston: VSP, 2004.
9. *Chuiko S. M.* On an approximate solution of boundary value problems by the least square method// Nonlinear Oscillations (N.Y.) — 2008. — *11*, № 4. — С. 585 — 604.
10. *Chuiko S. M., Starkova O. V.* On the approximate solution of autonomous boundary value problems by the least square method// Nonlinear Oscillations. — 2009. — *12*, № 4. — С. 556–573.
11. *Vejvoda O.* On perturbed nonlinear boundary-value problems// Czech. Math. J. — 1961. — № 11. — С. 323—364.
12. *Zaitsev V. F., Polyanin A. D.* Handbook of Ordinary Differential Equations. — M.: Fizmatlit, 2001.

С. М. Чуйко
Донбасский государственный педагогический университет
E-mail: chujko-slav@inbox.ru

О. В. Несмелова (Старкова)
Институт прикладной математики и механики Национальной академии наук Украины
E-mail: star-o@ukr.net

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 132 (2017). С. 150–153

УДК 517.928.4, 517.538.53

МЕТОД СОЕДИНЕНИЯ ВНУТРЕННИХ И ВНЕШНИХ АСИМПТОТИК В КРАЕВЫХ ЗАДАЧАХ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

© 2017 г. **А. В. ШАТРОВ**

Аннотация. В данной работе описываются применения асимптотических методов в задачах математической физики и механики. В первую очередь это относится к решению нелинейных сингулярно возмущенных задач в локальной области. Обсуждается применение метода Паде-аппроксимант для перестройки асимптотического разложения в дробно-рациональную или квазидробную функцию.

Ключевые слова: асимптотические методы, Паде-аппроксиманты, краевые задачи математической физики, пограничные слои.

AMS Subject Classification: 35Q35, 41A21

1. Методическое обоснование. Принципиальной особенностью асимптотических методов является локальность получаемых с их помощью решений [2, 5, 10]. При этом в сложных задачах зависимость от малого параметра редко бывает линейной. Источники нелинейности, как правило, локализованы. Неравномерность асимптотических разложений в окрестности таких мест значительно затрудняет оценку и анализ локально-нелинейных асимптотик.

Использование асимптотического ряда в качестве приближения в окрестностях особенностей всегда приводит к необходимости определения числа членов разложения, адекватно приближающих искомое решение. Существует много подходов к этим задачам (см. [5, 7]). Метод аналитического продолжения (например, преобразование Эйлера $\overline{\varepsilon} = \varepsilon(1+\varepsilon)^{-1}$ или растяжения координат в локальной области) требует знания области единственности разложения искомой функции малого параметра (см. [5, 10]). Эти методы полезно применять, когда известно большое количество членов ряда разложения. Тогда становится возможным выполнить, зная области единственности разложения, аналитическое продолжение, пользуясь, например, диаграммой Домба—Сайкса [5,8]. На практике в этих рядах обычно известны 3–5 компонентов и именно из этого сегмента ряда приходится извлекать имеющуюся информацию. Для этой цели может быть очень полезен метод Паде-аппроксимант (см. [1, 6–9]). Паде-аппроксиманта (PA) выполняет мероморфное продолжение функции, заданной в виде степенного ряда, и по этой причине позволяет достичь успеха в случаях, когда аналитическое продолжение применить нельзя. Если PA сходится к заданной функции, то корни в знаменателе стремятся к сингулярным точкам. В математической литературе исследовались, главным образом, одноточечные дробно-рациональные PA (см. [7, 9]). Двухточечные аппроксимации Паде (TPPA), соединяющие асимптотики в переходных слоях использовались в прикладных задачах (см. [1, 3, 4, 6, 8, 11, 12]).

2. Применение двухточечных Паде-аппроксимант в краевых задачах. Для решения краевых задач будем использовать гипотезу о существовании двух асимптотик для предельных значений параметра. Наиболее часто при этом используется метод сращиваемых асимптотических разложений (Matching method) [5]. Однако для корректного применения метода сращивания

Публикация подготовлена при финансовой поддержке Минобрнауки
(базовая часть государственного задания по научным исследованиям высших учебных заведений № 2014/66, код проекта 1281, рег. № 114123040133).

необходимо знать точку сращивания или, по крайней мере, область перекрытия асимптотик. Точное описание всего переходного слоя $0 < \varepsilon < \infty$ существует лишь в тех случаях, когда имеются специальные функции типа функции Эйри, связывающие в один узел разное поведение решений по обе стороны слоя.

Для соединения неперекрывающихся асимптотик в последнее время интенсивно разрабатывается метод, опирающийся на ТРРА. В [1,3,12] таким путем построены температурные профили в пограничном слое газа. В последующих работах [4,6] метод хорошо зарекомендовал себя при исследовании теплообмена в гиперзвуковом пограничном слое. Двухточечные Паде-аппроксиманты вводятся следующим образом: пусть существуют внутренняя асимптотика

$$\varphi^i(\varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \varepsilon^i \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0 \tag{1}$$

и внешняя асимптотика

$$\varphi^e(\varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} b_i \varepsilon^{-i} \quad \text{при} \quad \varepsilon \to \infty. \tag{2}$$

Тогда функция

$$\Phi_{mn}(\varepsilon) = \sum_{k=0}^{m} \alpha_k \varepsilon^k \Big/ \sum_{l=0}^{n} \beta_l \varepsilon^l \tag{3}$$

будет называться двухточечной Паде-аппроксимантой асимптотических разложений (1), (2). Коэффициенты функции (3) определяются так, что первые p коэффициентов правильной части разложения функции (3) в ряд Лорана совпадают с коэффициентами (1), а $(m+n+2-p)$ коэффициентов главной части ряда Лорана совпадают с коэффициентами (2). Рассмотрим в качестве примера применения ТРРА краевую задачу Эйри [5, 10]:

$$y'' - \lambda^2 xy = g(x)y \quad \text{при} \quad y(0) = 0, \quad y(\infty) = 0, \quad \text{где} \quad \lambda \gg 1. \tag{4}$$

Асимптотическое решение имеет вид

$$y(x) = U(\xi)\Big[1 + O(\lambda^{-1})\Big], \quad \text{где} \quad \xi = x\lambda^{2/3}.$$

Здесь функция $U(\xi)$ — функция Эйри, определяемая из уравнения

$$U'' - \varepsilon U = 0 \quad \text{при} \quad U(0) = 1, \quad U(\infty) = 0. \tag{5}$$

Переходный слой задается областью $x = c_*\lambda^{2/3}$, где c_* — постоянная. Внутренняя область переходного слоя $x \in [0, x_-(\lambda)]$, $x_- = o(\lambda^{-2/3})$. Внутренняя асимптотика функции Эйри

$$U_a^i = 1 - a\xi + \frac{1}{6}\xi^3 + O(\xi^4), \quad \text{где} \quad \xi \to 0, \quad a = 3^{1/3}\frac{\Gamma(2/3)}{\Gamma(1/3)} \approx 0.7287. \tag{6}$$

Внешняя область переходного слоя $x \in [x_+(\lambda), \infty)$, $\lambda^{-2/3} = j(x_+)$. Внешняя асимптотика функции Эйри

$$U_a^e = b\xi^{-1/4} \exp\Big(-\frac{2}{3}\,\xi^{3/2}\Big)\Big[1 - \frac{5}{48}\xi^{-3/2} + O(\xi^{-3})\Big], \quad \text{где} \quad \xi \to \infty, \quad b \approx 0.7922. \tag{7}$$

Паде-аппроксиманта функции Эйри имеет вид

$$U_a = \frac{1 - ax + \frac{2}{3}\,x^{2/3} - \frac{2}{3}\,ax^{5/2} + \frac{32}{5}\,ax^4}{1 + \frac{32}{5}\,\frac{a}{b}\,x^{17/4}} \exp\Big(-\frac{2}{3}\,x^{3/2}\Big). \tag{8}$$

Аппроксимация функции Эйри (8) сохраняет по три члена асимптотик (6) и (7) на обоих концах и обеспечивает хорошую точность внутри слоя. Специфика краевой задачи учитывается в форме модифицированной ТРРА "— умножая ее на добавочную функцию $\exp\Big(-\frac{2}{3}\,\xi^{3/2}\Big)$, мы обеспечиваем мягкий выход на асимптотики вплоть до полного совпадения с ними в граничных точках области.

3. Применение Паде-аппроксимант в задачах механики жидкости и газа. Для уравнения Блазиуса ламинарного пограничного слоя на плоской пластине

$$\varphi''' + \varphi\varphi'' = 0 \quad \text{при} \quad \varphi(0) = \varphi'(0) = 0, \quad \varphi(\infty) = 2, \tag{9}$$

где $\varphi(\zeta) = \psi/\sqrt{x}$, $\psi(y)$ — функция тока, $\zeta = \dfrac{y}{2}\sqrt{\dfrac{\mathrm{Re}}{x}}$ — автомодельная переменная; x, y — декартовы координаты, ось x направлена вдоль потока. Внутренняя асимптотика ($\zeta \to 0$) имеет вид

$$\varphi = a_2\zeta^2 - \frac{a_2^2}{30}\zeta^5 + O(\zeta^8) \quad \text{или} \quad \varphi' = 2a_2\zeta - \frac{a_2^2}{6}\zeta^4 + O(\zeta^7). \tag{10}$$

Процедура получения внешней асимптотики нетривиальна из-за наличия в главных членах логарифмических слагаемых. В [1,3,4] описывается механизм получения и оценки как главного, так и второстепенных членов асимптотики. Выражение для внешней асимптотики ($\zeta \to \infty$) имеет вид

$$\varphi' \sim 2 - \frac{2a_2D}{2\zeta - c}\exp(-\zeta^2 + c\,\zeta) \quad \text{или} \quad \varphi \sim 2\zeta - c + \frac{2a_2D}{(2\zeta - c)^2}\exp(-\zeta^2 + c\zeta). \tag{11}$$

Постоянные a_2, c, D, входящие в (10)–(11), подлежат определению через интегральные соотношения. Паде-аппроксиманта решения Блазиуса имеет вид

$$\varphi_a'(\zeta) = 2\left[1 - \frac{(1 + a_2D\zeta^3)\exp(-\zeta^2 + c\zeta)}{1 + (a_2 + c)\zeta + \left(a_2^2 + a_2c + \dfrac{c^2}{2} - 1\right)\zeta^2 + 2\zeta^4}\right]. \tag{12}$$

Величины D, a_2, c определяются соотношениями

$$D = \exp\left(-\int_0^\infty (\varphi_a - 2\zeta + c)\,d\zeta\right), \qquad a_2 = \frac{1}{2}\int_0^\infty \varphi_a'(2 - \varphi_a')\,d\zeta, \qquad c = \int_0^\infty (2 - \varphi_a')\,d\zeta. \tag{13}$$

Вычисляя (13) с учетом (12), получим $a_2 = 0.6641$, $c = 1.7308$, $D = 0.3357$.

4. Заключение. Метод соединения асимптотик с помощью двухточечных Паде-аппроксимант альтернативен известному методу сращивания (Matching method) и применяется в локальной области переходного слоя, где асимптотики неравномерны. Метод опробован на решениях известных задач математической физики и продемонстрировал свою эффективность при решении задач механики жидкости и газа. Основное преимущество метода заключается в том, что решение имеет аналитическую форму.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Алексеева Е. А., Баранцев Р. Г., Шатров А. В.* Соединение температурных асимптотик в пограничном слое// Вестн. СПбГУ. Сер. 1. — 1996. — № 8. — С. 96–99.
2. *Баранцев Р. Г.* Дефиниция асимптотики и системные триады// Асимптотические методы в теории систем. — Иркутск, 1980. — С. 70–81.
3. *Баранцев Р. Г., Пашкевич Д. А.* Соединение асимптотик в переходном слое// Асимптотические методы в задачах аэродинамики и проектирования летательных аппаратов. — Иркутск, 1994. — С. 67–70.
4. *Баранцев Р. Г., Пашкевич Д. А., Шатров А. В.* Теплоперенос в пограничном слое реагирующего газа// Тепломассообмен-2000 (MIF-2000). — Минск, 2000. — С. 185–188.
5. *Ван-Дайк М.* Методы возмущений в механике жидкости. — М.: Мир, 1967.
6. *Шатров А. В.* Соединение внутренних и внешних асимптотик в переходных слоях вязкой жидкости и газа// VIII всероссийский съезд по теоретической и прикладной механике/ Аннотации докладов. (Пермь, 23-29 августа 2001 г.). — Екатеринбург: УрО РАН, 2001. — С. 602–603.
7. *Andrianov I. V.* Application of Pade Approximants in Perturbation Methods// Adv. in Mech. — 1991. — *14*, № 2. — С. 3–15.
8. *Andrianov I. V. , Mikhlin Yu. V., Tokarzhewsky S.* Two-Point Pade Approximants and Their Applications to Solving Mechanical Problems// J. Theor. And Appl. Mech. — 1997. — *35*, № 3. — С. 577–606.
9. *Baker G. A., Baker G. A., jr., Gammel T. L.* The Pade approximants// J. Math. Anal. And Appl. — 1961. — *2*, № 1. — С. 21.

10. *Kruskal M. B.* Asymptotology// Math. Models in Phys. Sci. N-J. — 1963. — C. 17–48.
11. *Martin P., Baker G. A, jr.* Two-point quasifractional approximant in physics. Truncation error// J. Math. Phys. — 1991. — *32*, № 6. — C. 1476–1477.
12. *Shatrov A. V.* Combination of asymptotics in boundary problems of hydrodynamics// OFEA'2001. Abstracts of Intern. Conf., June, 25–29, 2001. — St.-Petersburg, 2001. — C. 59–60.

А. В. Шатров
Вятский государственный университет (ВятГУ)
E-mail: shatrov@vyatsu.ru

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 132 (2017). С. 154–157

УДК 519.83

МИНИМАКСНОЕ ПРОГРАММНОЕ ТЕРМИНАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ В ДВУХУРОВНЕВОЙ ИЕРАРХИЧЕСКОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИСКРЕТНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ

© 2017 г. **А. Ф. ШОРИКОВ**

Аннотация. В данной работе рассматривается дискретная динамическая система, состоящая из набора управляемых объектов, динамика каждого из которых описывается соответствующим векторным нелинейным дискретным рекуррентным соотношением при наличии управляемых параметров и возмущений (помех). В системе выделены два уровня принятия управленческих решений — доминирующий (первый уровень) и подчиненный (второй уровень), имеющие различные критерии функционирования и объединенные между собой априори определенными информационными и управленческими связями. Рассматривается задача двухуровневого минимаксного программного терминального управления в дискретной динамической системе. Для исследуемой задачи в данной работе предлагается математическая формализация и общая схема ее решения.

Ключевые слова: иерархическая дискретная динамическая система, минимаксное программное терминальное управление.

AMS Subject Classification: 37N35, 37N40, 91A50, 91A65

1. Введение. В работе рассматривается дискретная динамическая система, состоящая из набора управляемых объектов, динамика каждого из которых описывается соответствующим векторным нелинейным дискретным рекуррентным соотношением при наличии управляемых параметров и возмущений (помех или ошибок моделирования). В данной системе выделены два уровня принятия управленческих решений — доминирующий уровень I, управляемый доминирующим игроком P, и подчиненный уровень II, управляемый n игроками E_i, $i \in \overline{1,n}$, $n \in \mathbb{N}$ (здесь и далее $\mathbb{N}$ — множество всех натуральных чисел), коалиция которых образует обобщенного подчиненного игрока E. Оба уровня управления объединены между собой априори определенными информационными и управляющими связями. Качество управления рассматриваемыми динамическими объектами на каждом уровне управления оценивается соответствующими им выпуклыми функционалами, которые определены на их терминальных (финальных) фазовых состояниях и удовлетворяют соответствующим условиям Липшица. Предполагается, что управляющие воздействия и возмущения в рассматриваемой динамической системы в каждый момент времени стеснены заданными конечными множествами или выпуклыми многогранниками в соответствующих конечномерных векторных пространствах. Для исследуемой динамической системы в данной работе предложены математическая формализация в форме решения многошаговой задачи двухуровневого иерархического минимаксного (оптимизации гарантированного результата) программного терминального управления и общая схема ее решения. Полученные в работе результаты основываются на исследованиях [2, 3, 5–7] и могут быть использованы при компьютерном моделировании и создании многоуровневых систем управления для сложных динамических процессов, функционирующих в условиях риска и неопределенности. Математические модели таких процессов представлены, например, в [2–7].

2. Динамика дискретной управляемой системы. На заданном целочисленном промежутке времени $\overline{0,T} = \{0, 1, \dots, T\}$ ($T \in \mathbb{N}$) рассматривается многошаговая динамическая система, которая состоит из $(n+1)$-го управляемого объекта. Динамика объекта I (основного объекта

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект № 15-01-02368.

динамической системы), управляемого доминирующим игроком , описывается векторным нелинейным дискретным рекуррентным уравнением вида

$$y(t+1) = f(t, y(t), u(t), v(t), w(t)), \quad y(0) = y_0, \tag{1}$$

динамика объекта II_i (i-го вспомогательного объекта динамической системы), управляемого подчиненным игроком E_i $(i \in \overline{1,n})$, описывается следующим уравнением:

$$z^{(i)}(t+1) = f^{(i)}(t, z^{(i)}(t), u(t), v^{(i)}(t), w^{(i)}(t)), \quad z^{(i)}(0) = z_0^{(i)}, \tag{2}$$

где $t \in \overline{0, T-1}$; $y(t) = (y_1(t), y_2(t), \dots, y_r(t)) \in \mathbb{R}^r$ — фазовый вектор объекта I в момент времени t; $z^{(i)}(t) = (z_1^{(i)}(t), z_2^{(i)}(t), \dots, z_{s_i}^{(i)}(t)) \in \mathbb{R}^{s_i}$ — фазовый вектор объекта II_i в момент времени t $(r, s_i \in \mathbf{N}$; здесь и далее, для $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{R}^n$ — n-мерное векторное пространство векторов-столбцов); $u(t) = (u_1(t), u_2(t), \dots, u_p(t)) \in \mathbb{R}^p$ — вектор управляющего воздействия (управления) доминирующего игрока P в момент времени t, который удовлетворяет заданному ограничению:

$$u(t) \in \mathbf{U}_1(t) \subset \mathbb{R}^p, \quad \mathbf{U}_1(t) = \{u(t) : \ u(t) \in \{u^{(1)}(t), u^{(2)}(t), \dots, u^{(N_t)}(t)\} \subset \mathbb{R}^p\}, \tag{3}$$

где $\mathbf{U}_1(t)$ для каждого момента времени $t \in \overline{0, T-1}$ есть конечное множество, состоящее из N_t $(N_t \in \mathbb{N})$ векторов в пространстве $\mathbb{R}^p$ $(p \in \mathbb{N})$; $v^{(i)}(t) = (v_1^{(i)}(t), v_2^{(i)}(t), \dots, v_{q_i}^{(i)}(t)) \in \mathbb{R}^{q_i}$ — вектор управляющего воздействия (управления) подчиненного игрока E_i $(i \in \overline{1,n})$ в момент времени t, который зависит от допустимой реализации управления $u^{(j)}(t) \in \mathbf{U}_1(t)$ игрока P $(j \in \overline{1, N_t})$ и должен удовлетворять заданному ограничению:

$$v^{(i)}(t) \in \mathbf{V}_1^{(i)}(u^{(j)}(t)) \subset \mathbb{R}^{q_i},$$

$$\mathbf{V}_1^{(i)}(u^{(j)}(t)) = \{v^{(i)}(t) : \ v^{(i)}(t) \in \{v^{(i,1)}(t), v^{(i,2)}(t), \dots, v^{(i, Q_t^{(i)}(j))}(t)\} \subset \mathbb{R}^{q_i}\}, \tag{4}$$

где $\mathbf{V}_1^{(i)}(u^{(j)}(t))$ для каждых момента времени $t \in \overline{0, T-1}$ и управления $u^{(j)}(t) \in \mathbf{U}_1(t)$ игрока P, $j \in \overline{1, N_t}$, есть конечное множество, состоящее из $Q_t^{(i)}(j)$ $(Q_t^{(i)}(j) \in \mathbb{N})$ векторов в пространстве $\mathbb{R}^{q_i}$ $(q_i \in \mathbb{N})$; $v(t) = (v^{(1)}, v^{(2)}, \dots, v^{(n)}) \in \mathbb{R}^q$ — вектор управляющего воздействия (управления) обобщенного подчиненного игрока E в момент времени t, который объединяет всех подчиненных игроков E_i, $i \in \overline{1,n}$ $(q = \sum\limits_{i=1}^{n} q_i \in \mathbb{N})$.

В уравнении (1), описывающем динамику объекта I, $w(t) = (w_1(t), w_2(t), \dots, w_m(t)) \in \mathbb{R}^m$ есть вектор помехи (возмущения), который в каждый момент времени t $(t \in \overline{0, T-1})$ зависит от допустимой реализации управления $u^{(j)}(t) \in \mathbf{U}_1(t)$ игрока P $(j \in \overline{1, N_t})$ и удовлетворяет заданному ограничению:

$$w(t) = (w_1(t), w_2(t), \dots, w_m(t)) \in \mathbf{W}_1(u^{(j)}(t)) \subset \mathbb{R}^m, \tag{5}$$

где множество $\mathbf{W}_1(u^{(j)}(t))$, ограничивающее допустимые значения реализации помехи $w(t)$ в момент времени t, есть выпуклый, замкнутый и ограниченный многогранник (с конечным числом вершин) в пространстве $\mathbb{R}^m$.

В уравнении (2), описывающем динамику объекта II_i $(i \in \overline{1,n})$, $w^{(i)}(t) = (w_1^{(i)}(t), w_2^{(i)}(t), \dots,$ $w_{m_i}^{(i)}(t)) \in \mathbb{R}^{m_i}$ есть вектор помехи (возмущения) для этого объекта, который в каждый момент времени t $(t \in \overline{0, T-1})$ зависит от допустимой реализации управления $u^{(j)}(t) \in \mathbf{U}_1(t)$ игрока P $(j \in \overline{1, N_t})$ и от допустимой реализации управления $v^{(i,k)}(t) \in \mathbf{V}_1^{(i)}(u^{(j)}(t))$ игрока E_i $(i \in \overline{1,n}$; $k \in \overline{1, Q_t^{(i)}(j)})$ и удовлетворяет заданному ограничению:

$$w^{(i)}(t) = (w_1^{(i)}(t), w_2^{(i)}(t), \dots, w_{m_i}^{(i)}(t)) \in \mathbf{W}_1^{(i)}(u^{(j)}(t), v^{(i,k)}(t)) \subset \mathbb{R}^{m_i}, \tag{6}$$

где множество $\mathbf{W}_1^{(i)}(u^{(j)}(t), v^{(i,k)}(t))$, ограничивающее допустимые значения реализации помехи $w^{(i)}(t)$ в момент времени t, есть выпуклый, замкнутый и ограниченный многогранник (с конечным числом вершин) в пространстве $\mathbb{R}^{m_i}$.

Предполагается, что в векторном рекуррентном уравнении (1), описывающем динамику объекта I, для каждого фиксированного и допустимого набора $(t, y, u, v) \in \overline{0, T-1} \times \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ вектор-функция $f : \overline{0, T-1} \times \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^r$ является непрерывной по переменной w и для каждых фиксированных и допустимых набора $(t, u, v) \in \overline{0, T-1} \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ и выпуклого компакта $Y \subset \mathbb{R}^r$ множество $f(t, Y, u, v, \mathbf{W}_1(u)) = \{f(t, y, u, v, w),\ y \in Y,\ w \in \mathbf{W}_1(u)\}$, является выпуклым компактом в $\mathbb{R}^r$. В векторном рекуррентном уравнении (2), описывающем динамику объекта II_i $(i \in \overline{1, n})$, для каждого фиксированного и допустимого набора $(t, z^{(i)}, u, v^{(i)}) \in \overline{0, T-1} \times \mathbb{R}^{s_i} \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{q_i}$ вектор-функция $f^{(i)} : \overline{0, T-1} \times \mathbb{R}^{s_i} \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{q_i} \times \mathbb{R}^{m_i} \longrightarrow \mathbb{R}^{s_i}$ является непрерывной по переменной $w^{(i)}$, и для каждых фиксированных и допустимых набора $(t, u, v^{(i)}) \in \overline{0, T-1} \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{q_i}$ и выпуклого компакта $Z^{(i)} \subset \mathbb{R}^{s_i}$ множество $f^{(i)}(t, Z^{(i)}, u, v^{(i)}, \mathbf{W}_1^{(i)}(u, v^{(i)})) = \{f^{(i)}(t, z^{(i)}, u, v^{(i)}, w^{(i)}),$ $z^{(i)} \in Z^{(i)},\ w^{(i)} \in \mathbf{W}_1^{(i)}(u, v^{(i)})\}$ является выпуклым компактом в $\mathbb{R}^{s_i}$.

3. Информационные условия в процессе управления. В сфере интересов игрока P находятся возможные терминальные (финальные) состояния фазовых векторов $y(T)$ объекта I и $z^{(i)}(T)$ каждого объекта II_i, $i \in \overline{1, n}$. При этом, для каждого промежутка времени $\overline{\tau, T} \subseteq \overline{0, T}$ $(\tau < T)$ игроку P известен набор $g(\tau) = \{\tau, y(\tau), z^{(1)}(\tau), z^{(2)}(\tau), \ldots, z^{(n)}(\tau)\} \in \overline{0, T} \times \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^{s_1} \times \mathbb{R}^{s_2} \times \cdots \times \mathbb{R}^{s_n} = \overline{0, T} \times \mathbb{R}^r \times \prod\limits_{i=1}^{n} \mathbb{R}^{s_i}$ $(g(0) = \{0, y(0), z^{(1)}(0), z^{(2)}(0), \ldots, z^{(n)}(0)\} = \{0, y_0, z_0^{(1)}, z_0^{(2)}, \ldots, z_0^{(n)}\} = g_0)$, который будем называть его τ-позицией. Игроку P известен также принцип формирования управления $v^{(i)}(\cdot) = \{v^{(i)}(t)\}_{t \in \overline{\tau, T-1}}$ $(\forall\, t \in \overline{\tau, T-1} :\ v^{(i)}(t) \in \mathbf{V}_1^{(i)}(u(t)))$ каждым из игроков E_i, $i \in \overline{0, n}$, на промежутке времени $\overline{\tau, T}$, который зависит от выбора на этом промежутке управления $u(\cdot) = \{u(t)\}_{t \in \overline{\tau, T-1}}$ $(\forall\, t \in \overline{\tau, T-1} :\ u(t) \in \mathbf{U}_1(t))$ игроком P, которое сообщается им, и для каждого $i \in \overline{1, n}$ описывается соотношением (4), причем выбранное каждым игроком E_i управление сообщается игроку P. Результат реализации рассматриваемого процесса управления с позиции игрока P оценивается значением выпуклого функционала α, определенного на допустимых финальных фазовых состояниях $y(T)$ и $z^{(i)}(T)$ объектов I и II_i, $i \in \overline{1, n}$, который $\forall((y^{(1)}, z^{(1)}), (y^{(2)}, z^{(2)})) \in \mathbb{R}^{r+s} \times \mathbb{R}^{r+s}$ удовлетворяет соответствующему условию Липшица:

$$\|\alpha(y^{(1)}, z^{(1)}) - \alpha(y^{(2)}, z^{(2)})\|_{r+s} \leqslant L \cdot \|(y^{(1)}, z^{(1)}) - (y^{(2)}, z^{(2)})\|_{r+s}; \quad s = \sum_{i=1}^{n} s_i \in \mathbb{N}; \quad L = \mathrm{const}\,.$$

Тогда на промежутке времени $\overline{\tau, T}$ целью игрока P в рассматриваемом процессе управления является минимизация значения выбранного функционала α. Учитывая эти обстоятельства, мы будем говорить, что такие возможности поведения игрока P совместно с объектами I и II_i, $i \in \overline{1, n}$, определяют доминирующий или уровень управления I для рассматриваемого процесса управления в дискретной динамической системе (1)–(6).

Предполагается, что в сфере интересов каждого игрока E_i $(i \in \overline{1, n})$ находятся только возможные терминальные фазовые состояния $z^{(i)}(T)$ объекта II_i и для любого рассматриваемого промежутка времени $\overline{\tau, T}$ ему сообщается реализация управления $u(\cdot) = \{u(t)\}_{t \in \overline{\tau, T-1}}$ $(\forall\, t \in \overline{\tau, T-1} :\ u(t) \in \mathbf{U}_1(t))$ игрока P на этом промежутке времени, которую он должен учитывать при формировании своего управления $v^{(i)}(t) \in \mathbf{V}_1^{(i)}(u(t))$ для всех $t \in \overline{\tau, T-1}$. При этом для каждого промежутка времени $\overline{\tau, T} \subseteq \overline{0, T}$ $(\tau < T)$ ему также известен набор $g^{(i)}(\tau) = \{\tau, z^{(i)}(\tau)\} \in \overline{0, T} \times \mathbb{R}^{s_i}$ $(g^{(i)}(0) = \{0, z^{(i)}(0)\} = \{0, z_0^{(i)}\} = g_0^{(i)})$, который будем называть τ-позицией игрока E_i. Результат реализации рассматриваемого процесса управления с позиции игрока E_i оценивается значением выпуклого функционала $\beta^{(i)}$, определенного на допустимых финальных фазовых состояниях $z^{(i)}(T)$ объекта II_i, который $\forall\, (z^{(i,1)}, z^{(i,2)}) \in \mathbb{R}^{s_i} \times \mathbb{R}^{s_i}$ удовлетворяет соответствующему условию Липшица:

$$\|\beta^{(i)}(z^{(i,1)}) - \beta^{(i)}(z^{(i,2)})\|_{s_i} \leqslant L^{(i)} \cdot \|z^{(i,1)} - z^{(i,2)}\|_{s_i}, \quad L^{(i)} = \mathrm{const}\,.$$

Тогда на промежутке времени $\overline{\tau, T}$ целью каждого игрока E_i в рассматриваемом процессе управления является минимизация значения функционала $\beta^{(i)}$. Совокупность n игроков E_i, $i \in \overline{1, n}$, называемых также игроком E, и управляемых ими объектов II_i, $i \in \overline{1, n}$, образуют подчиненный или уровень управления II для рассматриваемого процесса управления (подчиненный доминирующему или уровню управления I).

Предполагается также, что при реализации рассматриваемого процесса управления каждому из игроков P и E_i, $i \in \overline{1,n}$, известны уравнения и ограничения в дискретной динамической системе (1)–(6).

4. Заключение. Для исследуемой в данной работе задачи управления для дискретной динамической системы (1)–(6) предложены математическая формализация в форме решения многошаговой задачи двухуровневого иерархического минимаксного программного терминального управления с неполной информацией и общая схема ее решения. Данная задача представляет собой совокупность из трех задач минимаксного программного терминального управления, решения каждой из которых представляют собой реализацию соответствующей конечной последовательности решений задач линейного или выпуклого математического программирования, а также задач конечной дискретной оптимизации. Отметим, что конкретные алгоритмы формирования предлагаемой двухуровневой системы управления могут быть разработаны на основе результатов работ [5–7]. Полученные в работе результаты могут быть использованы при компьютерном моделировании и создании многоуровневых систем управления для сложных динамических процессов, функционирующих в условиях риска и неопределенности, а также для разработки и создания соответствующих им автоматизированных навигационных и управляющих систем. Например, в рамках рассмотренной дискретной динамической системы может быть сформирована математическая модель для решения задачи оптимизации гарантированного результата управления летательным аппаратом с упругими элементами конструкции.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Базара М., Шетти К.* Нелинейное программирование. Теория и алгоритмы. — М.: Мир, 1982.
2. *Красовский Н. Н.* Теория управления движением. — М.: Наука, 1968.
3. *Красовский Н. Н., Субботин А. И.* Позиционные дифференциальные игры. — М.: Наука, 1974.
4. *Месарович М., Мако Д., Такахара И.* Теория иерархических многоуровневых систем. — М.: Мир, 1973.
5. *Шориков А. Ф.* Минимаксное оценивание и управление в дискретных динамических системах. — Екатеринбург: Изд-во Урал. ун-та, 1997.
6. *Шориков А. Ф.* Двухуровневое минимаксное управление в нелинейной многошаговой системе// Тез. докл. V Всесоюз. конф. по оптимальному управлению в механических системах. — Казань: Изд-во КАИ, 1985. — С. 62.
7. *Шориков А. Ф.* Алгоритм решения задачи ϵ-оптимального программного терминального управления для дискретной динамической системы// Теория управления и теория обобщенных решений уравнения Гамильтона—Якоби/ Тр. Междунар. семинара, посв. 60-летию акад. А. И. Субботина: в 2 т. — Екатеринбург: Изд-во Урал. гос. ун-та. — Т. 2. — С. 190–196.

А. Ф. Шориков
Уральский федеральный университет,
Институт математики и механики УрО РАН,
Екатеринбург, Россия
E-mail: afshorikov@mail.ru

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 132 (2017). С. 158–161

УДК 532.517.2

ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ—СТОКСА, ОПИСЫВАЮЩЕЕ НЕИЗОТЕРМИЧЕСКОЕ КРУПНОМАСШТАБНОЕ ТЕЧЕНИЕ ВО ВРАЩАЮЩЕМСЯ СЛОЕ ЖИДКОСТИ СО СВОБОДНОЙ ВЕРХНЕЙ ГРАНИЦЕЙ

© 2017 г. **К. Г. ШВАРЦ**

Аннотация. Аналитически представлено точное решение уравнений Навье—Стокса, описывающих течение жидкости во вращающемся горизонтальном слое с твердой и теплоизолированной нижней и свободной верхней границей. На верхней границе задано постоянное тангенциальное напряжение внешней силы и имеется теплоотдача по закону Ньютона. Температура среды над поверхностью слоя является линейной функцией горизонтальных координат. Решение находится из краевой задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений для скорости и температуры. Исследуется вид решения в зависимости от чисел Тейлора, Грасгофа, Рейнольдса и Био. При наличии вращения движение жидкости спиралевидное, учет неоднородности температуры делает спиральное движение более сложным.

***Ключевые слова*:** горизонтальная конвекция, точное решение, неизотермическое течение.

***AMS Subject Classification*:** 76U05

В современных моделях, описывающих океаническую циркуляцию, на верхней границе слоя для скорости задается величина тангенциальных напряжений внешней силы (ветра). При этом поперек слоя формируется крупномасштабное пограничное течение экмановского типа [6, 8, 12]. Подобные течения, описанные аналитически в бесконечном горизонтальном слое вращающейся жидкости со свободной верхней границей, используются для исследования нелинейных эффектов экмановского слоя [1] и для получения моделей двумерного вихревого движения жидкости в рамках теории мелкой воды [2, 5, 10, 11].

В данной работе описывается комбинированное крупномасштабное течение, возникающее во вращающемся горизонтальном слое жидкости, нижняя граница которого твердая и теплоизолированная, а верхняя — свободная. На ней задаются постоянное тангенциальное напряжение внешней силы и линейное распределение температуры.

Рассматривается бесконечный горизонтальный слой несжимаемой жидкости с твердыми границами $z = \pm h$, который вращается с постоянной угловой скоростью Ω_0. Ось вращения сонаправлена с вертикальной осью координат Oz. Нижняя граница ($z = -h$) твердая и теплоизолированная,

$$\overrightarrow{v} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial z} = 0, \tag{1}$$

где $\overrightarrow{v}(t,x,y,z) = (v_x, v_y, v_z)$ — вектор скорости, $T(t,x,y,z)$ — температура жидкости. На свободной верхней границе ($z = h$) задано постоянное тангенциальное напряжение некоторой внешней силы, условие «жесткой крышки» для вертикальной компоненты скорости [3, 9], а температура линейно меняется с горизонтальной координатой x,

$$\rho_0 \nu \frac{\partial v_{x,y}}{\partial z} = \tau_{x.y}, \quad v_z = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial z} = -\gamma_A (T - Ax), \quad (A = \mathrm{const}), \tag{2}$$

где $\overrightarrow{\tau} = (\tau_x, \tau_y)$ — вектор тангенциальных напряжений, ρ_0 — средняя плотность жидкости, ν — вязкость, γ_A — эмпирический коэффициент теплообмена [7], Ax — температура внешней среды

ISSN 0233–6723

над верхней границей слоя. Задано условие замкнутости потока

$$\int_{-h}^{h} v_x dz = 0, \qquad \int_{-h}^{h} v_y dz = 0. \tag{3}$$

Исследование течений будем проводить на основе уравнений конвекции в приближении Буссинеска во вращающейся системе отсчета с использованием декартовых координат [4, 6]. Отношение конвективной силы, возникающей за счет неоднородности плотности в центробежном поле, к конвективной силе в поле тяжести определяется числом Фруда Fr [4]. Рассмотрим случай, когда $\mathrm{Fr} = \Omega_0^2 l/g \ll 1$, где l — характерный горизонтальный масштаб, g — ускорение силы тяжести. В этом случае влияние поля тяжести существенно и можно пренебречь влиянием центробежной силы.

Выбрав в качестве единиц измерения длины x, y, z, времени t, скорости v_x, v_y, v_z, температуры T и давления P соответственно h, h^2/ν, ν/h, Ah и $\rho_0\nu^2/h^2$ (где $\tau_0 = \sqrt{\tau_x^2 + \tau_y^2}$), получим уравнения в безразмерном виде:

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_x}{\partial z} - \sqrt{\mathrm{Ta}}\cdot v_y = -\frac{\partial P}{\partial x} + \Delta v_x, \tag{4}$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_y}{\partial z} + \sqrt{\mathrm{Ta}}\cdot v_x = -\frac{\partial P}{\partial y} + \Delta v_y, \tag{5}$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_z}{\partial z} = -\frac{\partial P}{\partial z} + \Delta v_z + \mathrm{Gr}\cdot T, \tag{6}$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0, \tag{7}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + v_x\frac{\partial T}{\partial x} + v_y\frac{\partial T}{\partial y} + v_z\frac{\partial T}{\partial z} = \frac{1}{\mathrm{Pr}}\Delta T. \tag{8}$$

Здесь $\mathrm{Ta} = \left(2\Omega_0 h^2/\nu\right)^2$ — число Тейлора, $R = \tau_0 h^2/\rho_0\nu^2$ — число Рейнольдса, $\mathrm{Gr} = g\beta A h^4/\nu^2$ — число Грасгофа, $\mathrm{Pr} = \nu/\chi$ — число Прандтля, β — коэффициент теплового расширения [3], χ — коэффициент температуропроводности, оператор Лапласа $\Delta \equiv \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2$.

Граничные условия для безразмерной скорости и температуры с учетом (1)–(3) примут следующий вид:

при $z = 1$

$$\frac{\partial v_x}{\partial z} = R\cos\alpha, \quad \frac{\partial v_y}{\partial z} = R\sin\alpha, \quad v_z = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial z} = -\mathrm{Bi}(T - Ax), \tag{9}$$

при $z = -1$

$$v_x = v_y = v_z = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial z} = 0, \tag{10}$$

где $\cos\alpha = \tau_x/\sqrt{\tau_x^2 + \tau_y^2}$, $\sin\alpha = \tau_y/\sqrt{\tau_x^2 + \tau_y^2}$. Угол α определяет направление вектора тангенциальных напряжений в заданной системе координат, $\mathrm{Bi} = \gamma_A h$ — число Био.

Учитывая граничные условия (9)–(10) и условие несжимаемости жидкости (7), точное решение системы (4)–(8) будем искать в следующем виде:

$$v_x = u_0(z), \quad v_y = v_0(z), \quad v_z = 0, \quad T = x + \theta_0(z), \quad P = p_0(x, y, z). \tag{11}$$

Подставив формулы (11) в систему (4)–(8), получим систему уравнений для скорости, температуры и давления. Введем комплексную функцию скорости $M(z) = u_0(z) + iv_0(z)$, $i = \sqrt{-1}$, обозначим $\lambda = \sqrt[4]{\mathrm{Ta}/4}\cdot(1+i)$. Избавившись от давления, получим краевую задачу для скорости

$$M'''(z) - \lambda^2 M'(z) = \mathrm{Gr}, \quad M(-1) = 0, \quad M'(1) = R\exp(i\alpha), \quad \int_{-1}^{1} M(z)dz = 0. \tag{12}$$

Решение задачи (12) имеет вид

$$M(z) = \frac{\mathrm{Gr}}{\lambda^2}\left[f_1(z) - f_2(z) - z\right] + R\exp(i\alpha) f_1(z), \tag{13}$$

где

$$f_1(z) = \frac{\operatorname{sh}(\lambda(z+1)) - (\operatorname{sh}\lambda + \operatorname{sh}(\lambda z))\operatorname{sh}\lambda/\lambda}{\lambda\operatorname{ch}(2\lambda) - \operatorname{sh}(2\lambda)/2},$$

$$f_2(z) = \frac{\lambda\operatorname{ch}(\lambda(z-1)) - \operatorname{sh}(2\lambda)/2}{\lambda\operatorname{ch}(2\lambda) - \operatorname{sh}(2\lambda)/2},$$

$$u_0(z) = \operatorname{Re} M(z), \qquad v_0(z) = \operatorname{Im} M(z). \tag{14}$$

Решение (13), (14) параметрическое, профиль скорости зависит от числа Тейлора (т.е. от интенсивности вращения), первое слагаемое описывает влияние адвекции, а второе слагаемое — воздействие тангенциальных напряжений на профиль скорости течения жидкости. Температура также является решением краевой задачи, получаемой после подстановки (11) в (8) с учетом соответствующих граничных условий (9) и (10),

$$\theta_0(z) = \frac{\mathrm{Pr}}{\sqrt{\mathrm{Ta}}}\left(\operatorname{Im} C_3\cdot f_3(z) + f_4(z)\right),$$

где $f_3(z) = (3-2z-z^2)/2$, $f_4(z) = v_0(z) - v_0(1) - v_0'(-1)(z-1-1/\mathrm{Bi}) - (R/\mathrm{Bi})\sin\alpha$, $C_3 = C_1\operatorname{sh}\lambda$, $C_1 = \mathrm{Gr}(-\operatorname{sh}\lambda + \lambda\operatorname{ch}\lambda)/\lambda^2 + R\exp(i\alpha)\operatorname{sh}\lambda$.

При $\mathrm{Ta} = 0$ (отсутствие вращения) математическое описание скорости и температуры упрощается:

$$u_0(z) = \mathrm{Gr}\,\frac{1-6z-3z^2+4z^3}{24} + R\cos\alpha\frac{-1+2z+3z^2}{8}, \qquad v_0(z) = R\sin\alpha\frac{-1+2z+3z^2}{8}, \tag{15}$$

$$\theta_0(z) = \mathrm{Pr}\,\mathrm{Gr}\,\frac{4z^5-5z^4-20z^3+10z^2+40z-29}{96} + \mathrm{Pr}\,R\cos\alpha\frac{3z^4+4z^3-6z^2-12z+11}{480}. \tag{16}$$

В изотермическом случае ($\mathrm{Gr} = 0$) скорость (15) имеет параболический профиль. Минимальное значение скорость принимает при $z = -1/3$, максимальное — при $z = 1$, скорость меняет направление при $z = 1/3$. Температура $\theta_0(z)$ положительна. В случае отсутствия тангенциальных напряжений на верхней границе ($R = 0$) профиль скорости кубический, жидкость движется в противоположном направлении по сравнению с изотермическим случаем, температура $\theta_0(z)$ отрицательна. Расчеты, сделанные при $\alpha = 0$, показали, что с ростом числа Грасгофа профиль скорости течения меняется. При $\mathrm{Gr}/R \leqslant 1,01$ в верхней части слоя жидкость движется вправо, а в нижней части — влево. При $\mathrm{Gr}/R > 1,01$ в слое формируются три струи, а при $\mathrm{Gr}/R \geqslant 3$ их снова две. Температура (16) становится разных знаков при $\mathrm{Gr}/R > 5/3$ и отрицательной при $\mathrm{Gr}/R \geqslant 3$.

В изотермическом случае течение, возникающее во вращающемся слое, будет меняться в зависимости от числа Тейлора и направления вектора $\vec{\tau}$ на свободной поверхности. При всех значениях Ta профили скорости $u_0(z)$ и $v_0(z)$ описывают спиралевидное движение. Скорость принимает максимальные значения вблизи верхней границы или непосредственно на ней. С ростом числа Тейлора влияние тангенциальных напряжений на скорость течения падает, максимум скорости уменьшается, движение локализуется вблизи свободной границы. Вторая компонента скорости при $0 \leqslant \mathrm{Ta} \leqslant 35$ монотонно возрастает по модулю, а затем начинает убывать. Представляет интерес зависимость угла α от числа Тейлора Ta, когда x–вая компонента скорости на верхней границе при $z = 1$ принимает максимальное по модулю значение, а вторая компонента скорости там же равна нулю. Эта зависимость определяется из (11) по формуле $\operatorname{tg}\alpha = -\operatorname{Im} f_1(1)/\operatorname{Re} f_1(1)$. С ростом числа Тейлора угол растет от нуля градусов при $\mathrm{Ta} = 0$, а при $\mathrm{Ta} \gg 1$ угол стремится к 45^o.

Для неизотермического случая при $R = 0$ скорость чисто адвективного течения также принимает максимальные значения вблизи верхней границы. Вторая компонента скорости при $0 \leqslant \mathrm{Ta} \leqslant 24$ монотонно возрастает по модулю, а затем начинает убывать. Движение спиральное (см. Рис. 1), но направление спирали противоположное.

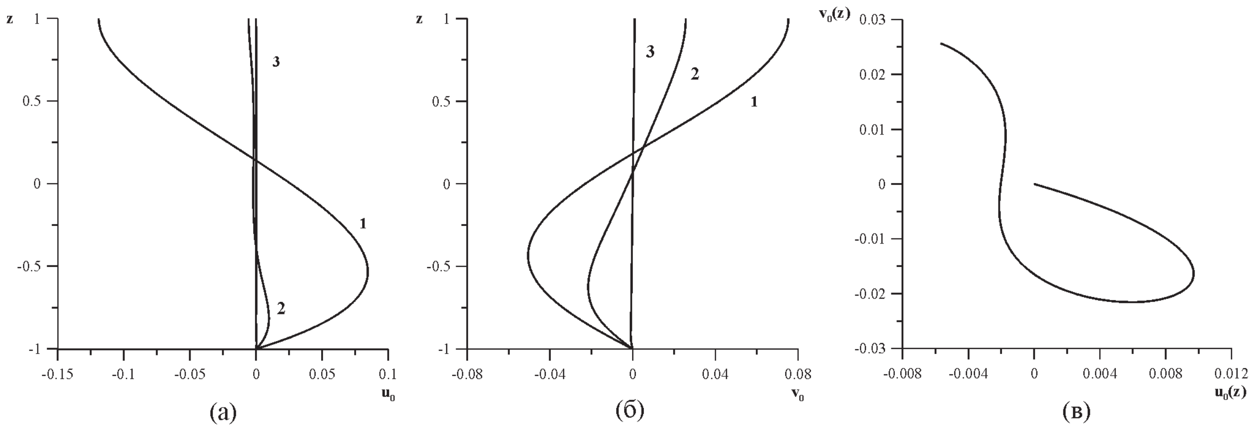

Рис. 1. Зависимость компонент скорости $u_0(z)$ (а) и $v_0(z)$ (б) для $\alpha = 0$ и $R = 0$ при $1 - \mathrm{Ta} = 10$, $2 - \mathrm{Ta} = 10^3$, $3 - \mathrm{Ta} = 10^6$, (в) годограф вектора скорости чисто адвективного течения при $\mathrm{Ta} = 10^3$ и $\alpha = 0$.

В общем случае течение является комбинацией ветрового и адвективного течения и является спиральным. Таким образом, адвекция формирует спиральное движение, накладывающееся на спиральное течение, возникающее под воздействием ветрового напряжения на верхней свободной границе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Аристов С. Н., Фрик П. Г.* Нелинейные эффекты влияния экмановского слоя на динамику крупномасштабных вихрей в мелкой воде// ПМТФ. — 1991. — № 2. — С. 49–54.
2. *Аристов С. Н., Шварц К. Г.* Эволюция ветровой циркуляции в неизотермическом океане// Океанология. — 1990. — *30*, вып. 4. С. 562–566.
3. *Аристов С. Н., Шварц К. Г.* Вихревые течения в тонких слоях жидкости. — Киров: ВятГУ, 2011. — 207 с.
4. *Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М.* Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. — М.: Наука, 1972. — 392 с.
5. *Козлов В. Ф.* Модель двумерного вихревого движения жидкости с механизмом вовлечения// Изв. РАН. МЖГ. — 1992. — № 6. — С. 49–56.
6. *Педлоски Дж.* Геофизическая гидродинамика: В 2-х томах. — М.: Мир, 1981. — 396 с.
7. *Сеидов Д. Г.* Моделирование синоптической и климатической изменчивости океана. — Л.: Гидрометеоиздат, 1985. — 208 с.
8. *Шварц К. Г.* Об устойчивости течения, возникающего под действием тангенциальных напряжений на верхней границе вращающегося слоя жидкости// Зимняя школа по механике сплошных сред (пятнадцатая). Сборник статей. В 3–х частях. Ч. 3. — Екатеринбург: УрО РАН, 2007. — С. 266–269.
9. *Шварц К. Г.* Модели геофизической гидродинамики// Учеб. пособие по спецкурсу. Изд. 2-е, доп. и испр. / К. Г. Шварц; — Пермь: Перм. ун-т, 2006. — 66 с.
10. *Aristov S. N., Shvarts K. G.* On the influence of salinity exchange on the circulation of a fluid in an enclosed basin// Soviet journal of physical oceanography. — 1991. — *2*, № 4. — С. 293–298. DOI 10.1007/BF02346081
11. *Aristov S. N., Schwarz K. G.* New two-dimensional model of large-scale oceanic circulation// Proc. of 2nd International Conference of Computer Modelling in Ocean Engineering'91, Barcelona/30 September–4 October 1991. — Balkema, Rotterdam, 1991. — С. 49–54.
12. *Haeusser T. M., Leibovich S.* Pattern formation in the marginally unstable Ekman layer// J. Fluid Mech. — 2003. — Vol. 479. — С.125–144. DOI: 10.1017/S0022112002003415.

К. Г. Шварц
Пермский государственный национальный исследовательский университет
E-mail: kosch@psu.ru

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 132 (2017). С. 162–165

УДК 517.925

ИССЛЕДОВАНИЕ ГРАНИЦ ОБЛАСТЕЙ УСТОЙЧИВОСТИ ТОЧЕК РАВНОВЕСИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, ЗАВИСЯЩИХ ОТ ПАРАМЕТРОВ

© 2017 г. **М. Г. ЮМАГУЛОВ, Л. С. ИБРАГИМОВА, И. Ж. МУСТАФИНА**

Аннотация. Рассматриваются автономные и периодические дифференциальные уравнения, зависящие от двух скалярных параметров. Изучаются вопросы построения границ областей устойчивости точек равновесия таких уравнений в плоскости параметров. Указываются условия, при которых через данную точку проходит единственная гладкая граничная кривая. Предлагается схема приближенного построения этой кривой.

Ключевые слова: Автономные системы, периодические системы, точка равновесия, устойчивость, область устойчивости, параметр.

AMS Subject Classification: 34D20

1. Введение. В работе рассматриваются вопросы построения областей устойчивости точек равновесия дифференциальных уравнений, зависящих от двух параметров. Рассматривается дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = A(t,\alpha,\beta)x + a(x,t,\alpha,\beta), \quad x \in \mathbf{R}^N, \tag{1}$$

в котором α и β — скалярные параметры, $A(t,\alpha,\beta)$ — квадратная матрица, а нелинейность $a(x,t,\alpha,\beta)$ начинается с квадратичных по x слагаемых. Предполагается, что матрица $A(t,\alpha,\beta)$ и функция $a(x,t,\alpha,\beta)$ непрерывно дифференцируемы по совокупности переменных и при этом являются T-периодическими по t.

Уравнение (1) при всех значениях параметров α и β имеет точку равновесия $x = 0$, которая при одних значениях параметров может быть устойчивой, а при других — неустойчивой. Связное множество G в плоскости Π параметров (α,β) будем называть *областью устойчивости* (*областью неустойчивости*) точки равновесия $x = 0$ системы (1), если для любого $(\alpha,\beta) \in G$ точка равновесия $x = 0$ является устойчивой (неустойчивой). Точку $(\alpha_0,\beta_0) \in \Pi$ будем называть *граничной точкой* области устойчивости G, если в любой ее окрестности содержатся точки как из области устойчивости G, так и из области неустойчивости. Совокупность граничных точек множества G будем называть *границей Γ* множества G.

Задача построения областей устойчивости и их границ является одной из важных и интересных задач теории дифференциальных уравнений и ее приложений. Здесь предложены эффективные методы исследования, решен ряд важных с теоретической и практической точек зрения задач (см., например, [3–6] и имеющуюся там библиографию).

Пусть некоторая точка $(\alpha_0,\beta_0) \in \Pi$ является граничной точкой области устойчивости системы (1). В этом случае, как правило, через точку (α_0,β_0) проходят одна или несколько гладких кривых, состоящие из граничных точек. Такие кривые будем называть *граничными кривыми*. Будем также говорить, что граничная точка $(\alpha_0,\beta_0) \in \Pi$ является *регулярной*, если через точку (α_0,β_0) проходит единственная граничная кривая γ_0; в противном случае точку $(\alpha_0,\beta_0) \in \Pi$ будем называть *сингулярной*.

В настоящей статье предлагается новый подход, позволяющий определить условия, при которых граничная точка области устойчивости системы (1) является регулярной, а также получать

ISSN 0233–6723

приближенные формулы в задаче построения соответствующей граничной кривой. Подход основан на модификации метода М. Розо [2] и асимптотических формулах теории возмущений линейных операторов [1].

2. Автономное уравнение. Рассмотрим сначала случай, когда уравнение (1) является автономным:

$$\frac{dx}{dt} = A(\alpha,\beta)x + a(x,\alpha,\beta), \quad x \in \mathbf{R}^N. \tag{2}$$

Очевидна следующая теорема.

Теорема 1. *Для того чтобы точка $(\alpha_0,\beta_0) \in \Pi$ была граничной для области устойчивости системы* (2), *необходимо, чтобы матрица $A_0 = A(\alpha_0,\beta_0)$ имела хотя бы одно собственное значение с нулевой вещественной частью и не имела собственных значений с положительной вещественной частью.*

Ясно также, что указанное в этой теореме условие не является достаточным, чтобы точка $(\alpha_0,\beta_0) \in \Pi$ была граничной для области устойчивости системы (2).

Основными являются следующие два случая:

1^0. A_0 имеет простое собственное значение 0;

2^0. A_0 имеет пару простых собственных значений $\pm i\omega_0$, где $\omega_0 > 0$.

При этом предполагается, что остальные собственные значения матрицы A_0 имеют отрицательные вещественные части. Случай 1^0 будем называть простым вырождением, а случай 2^0 — кратным вырождением. Ниже показывается, что, как правило, в обоих этих случаях точка $(\alpha_0,\beta_0) \in \Pi$ будет регулярной граничной точкой для области устойчивости системы (2).

2.1. Простое вырождение. Обозначим через e и g собственные векторы матрицы A_0 и транспонированной матрицы A_0^* соответственно, отвечающие собственному значению 0. Эти векторы можно считать нормированными равенствами: $\|e\| = 1$ и $(e,g) = 1$. Здесь и ниже символ $\|\cdot\|$ означает евклидову норму векторов и матриц, а символ $(\cdot,\cdot)$ — скалярное произведение векторов.

Положим $\zeta_1 = (A'_\alpha e, g)$ и $\zeta_2 = (A'_\beta e, g)$; здесь A'_α и A'_β — производные матрицы $A(\alpha,\beta)$, вычисленные в точке (α_0,β_0).

Теорема 2. *Пусть $\zeta_1^2 + \zeta_2^2 \neq 0$. Тогда точка $(\alpha_0,\beta_0) \in \Pi$ является регулярной граничной точкой области устойчивости решения $x = 0$ уравнения* (2). *При этом проходящая через точку (α_0,β_0) единственная граничная кривая γ_0 является гладкой.*

Пусть условия теоремы 2 выполнены. Для приближенного построения кривой γ_0 предлагается использовать методы, разработанные в [1] и [2]. Ограничимся здесь приведением схемы построения касательной к кривой γ_0. Так как $\zeta_1^2 + \zeta_2^2 \neq 0$, то уравнение $\zeta_1 \cos\varphi + \zeta_2 \sin\varphi = 0$ имеет на промежутке $0 \leqslant \varphi < 2\pi$ в точности два решения $\varphi = \varphi_0$ и $\varphi = \varphi_0 + \pi$.

Теорема 3. *Параметрически заданная прямая*

$$\alpha = \alpha_0 + \mu\cos\varphi_0, \quad \beta = \beta_0 + \mu\sin\varphi_0$$

является касательной к граничной кривой γ_0 в точке (α_0,β_0).

2.2. Кратное вырождение. В этом случае существуют ненулевые векторы e, g, e^*, $g^* \in \mathbf{R}^N$ такие, что выполняются равенства:

$$A_0(e+ig) = i\omega_0(e+ig),$$
$$A_0^*(e^*+ig^*) = -i\omega_0(e^*+ig^*).$$

Эти векторы можно считать нормированными равенствами:

$$\|e\| = \|g\| = 1, \quad (e,e^*) = (g,g^*) = 1, \quad (e,g^*) = (g,e^*) = 0. \tag{3}$$

Положим

$$\eta_1 = (A'_\alpha e, e^*) + (A'_\alpha g, g^*),$$
$$\eta_2 = (A'_\beta e, e^*) + (A'_\beta g, g^*);$$

здесь A'_α и A'_β — производные матрицы $A(\alpha,\beta)$, вычисленные в точке (α_0,β_0).

Теорема 4. *Пусть $\eta_1^2+\eta_2^2\neq 0$. Тогда точка (α_0,β_0) плоскости (α,β) является регулярной граничной точкой области устойчивости решения $x=0$ уравнения* (2)*. При этом проходящая через точку (α_0,β_0) единственная граничная кривая γ_0 является гладкой.*

Пусть условия теоремы 4 выполнены. Схема построения касательной к кривой γ_0 здесь аналогично той, что указана в случае простого вырождения. А именно, так как $\eta_1^2+\eta_2^2\neq 0$, то уравнение $\eta_1\cos\varphi+\eta_2\sin\varphi=0$ имеет на промежутке $0\leqslant\varphi<2\pi$ в точности два решения $\varphi=\varphi_0$ и $\varphi=\varphi_0+\pi$. Далее остается привести аналог теоремы 3.

3. Неавтономное уравнение. Рассмотрим теперь неавтономное уравнение (1). Матрица $A(\alpha,\beta,t)$ может быть представлена в виде:

$$A(\alpha,\beta,t)=A_0(t)+(\alpha-\alpha_0)A_1(t)+(\beta-\beta_0)B_1(t)+A_2(\alpha,\beta,t),$$

где матрицы $A_0(t)$, $A_1(t)$, $B_1(t)$ и $A_2(\alpha,\beta,t)$ являются T-периодическими по t, при этом $A_2(\alpha,\beta,t)$ равномерно по t удовлетворяет соотношению:

$$\|A_2(\alpha,\beta,t)\|=O((\alpha-\alpha_0)^2+(\beta-\beta_0)^2)\quad\text{при}\quad(\alpha,\beta)\to(\alpha_0,\beta_0).$$

Обозначим через V_0 матрицу монодромии линейной периодической системы $\dfrac{dx}{dt}=A_0(t)x$. Очевидна следующая теорема.

Теорема 5. *Для того чтобы точка $(\alpha_0,\beta_0)\in\Pi$ была граничной для области устойчивости системы* (1) *необходимо, чтобы матрица монодромии V_0 имела хотя бы одно собственное значение λ_0 такое, что $|\lambda_0|=1$, и не имела собственных значений, модуль которых превосходит единицу.*

Ясно также, что указанное в этой теореме условие не является достаточным, чтобы точка $(\alpha_0,\beta_0)\in\Pi$ была граничной для области устойчивости системы (2).

Основными являются следующие два случая:

1^0. Матрица V_0 имеет простое собственное значение 1.

2^0. Матрица V_0 имеет пару простых собственных значений вида $e^{\pm i\omega_0}$, где $\omega_0>0$.

При этом предполагается, что остальные собственные значения матрицы V_0 по модулю меньше единицы. Как и при рассмотрении автономной системы (2), случай 1^0 будем называть простым вырождением, а случай 2^0 — кратным вырождением. Рассмотрим эти случаи.

3.1. Простое вырождение. Обозначим через e и g собственные векторы матрицы V_0 и транспонированной матрицы V_0^* соответственно, отвечающие собственному значению 1. Эти векторы можно считать нормированными равенствами: $\|e\|=1$ и $(e,g)=1$.

Положим

$$\zeta_1=\int\limits_0^T(A_1(t)e,g)dt,$$

$$\zeta_2=\int\limits_0^T(B_1(t)e,g)dt.$$

Теорема 6. *Пусть $\zeta_1^2+\zeta_2^2\neq 0$. Тогда точка $(\alpha_0,\beta_0)\in\Pi$ является регулярной граничной точкой области устойчивости решения $x=0$ уравнения* (1)*). При этом проходящая через точку (α_0,β_0) единственная граничная кривая γ_0 является гладкой.*

Здесь также имеет место аналог теоремы 3.

3.2. Кратное вырождение. Этот случай можно разделить на два подслучая:

2.1^0. Матрица V_0 имеет пару простых собственных значений $e^{\pm i\omega_0}$, где $\omega_0 > 0$ и $\omega_0 \neq \dfrac{\pi k}{T}$, k — натуральное число.

2.2^0. Матрица V_0 имеет пару простых собственных значений $e^{\pm i\omega_0}$, где $\omega_0 = \dfrac{\pi k_0}{T}$ при некотором натуральном k_0.

Случай 2.1^0 будем называть нерезонансным, а случай 2.2^0 — резонансным. Здесь будет рассматриваться только случай 2.1^0. Отметим лишь, что случай 2.2^0, как правило, приводит к сингулярным граничным точкам.

В случае 2.1^0 существуют ненулевые векторы $e, g, e^*, g^* \in R^N$ такие, что выполняются равенства:

$$V_0(e + ig) = e^{i\omega_0}(e + ig), \quad V_0^*(e^* + ig^*) = e^{-i\omega_0}(e^* + ig^*).$$

Эти векторы можно считать нормированными равенствами (3).

Положим

$$\eta_1 = \int_0^T [(A_1(t)e, e^*) + (A_1(t)g, g^*)]dt, \quad \eta_2 = \int_0^T [(B_1(t)e, e^*) + (B_1(t)g, g^*)]dt.$$

Теорема 7. *Пусть $\eta_1^2 + \eta_2^2 \neq 0$. Тогда точка $(\alpha_0, \beta_0) \in \Pi$ является регулярной граничной точкой области устойчивости решения $x = 0$ уравнения* (1). *При этом проходящая через точку (α_0, β_0) единственная граничная кривая γ_0 является гладкой.*

Здесь также имеет место аналог теоремы 3.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Красносельский М. А., Юмагулов М. Г.* Метод функционализации параметра в проблеме собственных значений// Докл. РАН. — 1999. — *365*, № 2. — С. 162–164.
2. *Розо М.* Нелинейные колебания и теория устойчивости. — М.: Наука. 1971. — 288 с.
3. *Чезари Л.* Асимптотическое поведение и устойчивость решений обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: Мир, 1964. — 477 с.
4. *Якубович В. А., Старжинский В. М.* Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения. — М.: Наука, 1972. — 720 с.
5. *Amaral F. M., Alberto L. F. C.* Stability Boundary Characterization of Nonlinear Autonomous Dynamical Systems in the Presence of a Saddle-Node Equilibrium Point// Tend. Mat. Apl. Comput. — 2012. — *13*, № 2. — С. 143–154.
6. *Chiang H. D., Alberto L. F. C.* Stability regions of nonlinear dynamical systems : Theory, estimation, and applications. — Cambridge University Press, 2015. — 484 с.

М. Г. Юмагулов
Башкирский государственный университет
E-mail: yum_mg@mail.ru

Л. С. Ибрагимова
Башкирский государственный аграрный университет
E-mail: lilibr@mail.ru

И. Ж. Мустафина
Башкирский государственный университет
E-mail: fanina84@bk.ru