ISSN 0233-6723

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ

СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Тематические обзоры

Том 131

Москва 2017

ISSN 0233–6723

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

ВСЕРОССИЙСКИЙ ИНСТИТУТ
НАУЧНОЙ И ТЕХНИЧЕСКОЙ ИНФОРМАЦИИ
(ВИНИТИ РАН)

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ

СЕРИЯ
СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

ТЕМАТИЧЕСКИЕ ОБЗОРЫ

Том 131

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

Москва 2017

СОДЕРЖАНИЕ

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 131 (2017). С. 3–109

УДК 517.986.7

ПРОИНТЕГРИРОВАННЫЕ ПОЛУГРУППЫ, C-ПОЛУГРУППЫ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

© 2017 г. **В. В. ВАСИЛЬЕВ, С. И. ПИСКАРЕВ, Н. Ю. СЕЛИВАНОВА**

Аннотация. В настоящем обзоре представлена теория проинтегрированных полугрупп, которая является обобщением теории C_0-полугрупп, а также даны приложения этих обобщений. Работа состоит из трех частей: «Проинтегрированые полугруппы», «C-полугруппы» и «Приложения». Обсуждаются различные подходы к построению теории. Рассмотренный материал взят в основном из работ, вышедших в последние 20 лет и содержит и некоторые результаты авторов. Представлено большое количество приложений, многие из которых касаются некорректных задач Коши.

Ключевые слова: полугруппа, проинтегрированная полугруппа, C-полугруппа, задача Коши, дифференциальное уравнение.

AMS Subject Classification: 47D60, 47D62, 65Y20

СОДЕРЖАНИЕ

ISSN 0233–6723

ВВЕДЕНИЕ

В настоящем обзоре представлены общая теория и некоторые интересные исследования разрешающих семейств для абстрактной задачи Коши $(ACP; A, T, x)$ в банаховом пространстве E

$$\frac{du(t)}{dt} = Au(t), \quad 0 \leqslant t < T, \quad u(0) = x, \tag{1}$$

которые недавно появились в литературе, касающиеся регуляризованных полугрупп, C-полугрупп и проинтегрированных полугрупп операторов.

Определение 1. Сильным (или классическим) решением задачи $(ACP; A, T, x)$ называется функция

$$u(\cdot) \in C([0,T); \mathcal{D}(A)) \cap C^1([0,T); E),$$

удовлетворяющая уравнению на $[0,T)$ и начальным данным в (1). Здесь T конечно или $T = \infty$. В случае $T = \infty$ мы будем просто писать $(ACP; A, x)$.

Такие разрешающие семейства, как регуляризованные полугруппы, C–полугруппы и проинтегрированные полугруппы для (1) являются обобщениями C_0-полугрупп и касаются случая, когда оператор A не порождает сильно непрерывную в нуле C_0-полугруппу. Примерами таких ситуаций могут быть обратное уравнение теплопроводности, уравнение Шрёдингера в L^p при $p \neq 2$ и задача Коши для уравнения Лапласа.

Несмотря на тот факт, что решение задачи (1) определяется функцией e^{tA}, она, однако, не всегда обладает свойствами C_0-полугрупп. Грубо говоря, такое обобщение теории C_0-полугрупп в первую очередь касается ситуации, когда оператор A не удовлетворяет условиям теоремы Хилле—Филлипса—Миядеры и вместо C_0-полугрупп порождает другие операторные семейства [90].

Другое обобщение C_0-полугрупп, которое не будет рассматриваться в настоящем обзоре, — это разрешающее семейство абстрактной равномерно корректной задачи Коши в банаховом пространстве E [90]:

$$\begin{gathered}(D_t^\alpha w)(t) = Aw(t), \quad t \geqslant 0, \quad w(0) = w^0, \quad \text{если } 0 < \alpha \leqslant 1, \\ \text{а также} \quad w'(0) = w^1, \quad \text{если } 1 < \alpha \leqslant 2.\end{gathered} \tag{2}$$

В этом случае решение задачи (2) дается функцией Миттаг—Леффлера

$$w(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(t^\alpha A)^j}{\Gamma(\alpha j + 1)} w^0 \tag{3}$$

вместо полугруппы e^{tA}, и справедливо соотношение (см. (12)–(13))

$$\lambda^{\alpha-1}(\lambda^\alpha I - A)^{-1} w^0 = \int\limits_0^\infty e^{-\lambda t} w(t) dt, \tag{4}$$

где $0 < \alpha \leqslant 2$. Отметим, что здесь D_t^α — производная Капуто—Джарбашьяна. Напомним некоторые основные определения (см. [211]). Дробный интеграл порядка $\alpha > 0$ определяется равенством

$$\left(I_{0+}^\alpha f\right)(t) := (g_\alpha * f)(t), \quad t > 0,$$

где $g_\alpha(t) := \begin{cases} \dfrac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, & t > 0, \\ 0, & t \leqslant 0, \end{cases}$ и $\Gamma(\alpha)$ — гамма-функция. Положем $m = \lceil \alpha \rceil + 1$. Производная Римана—Лиувилля порядка $\alpha > 0$ определяется как

$$\left(D_{0+}^\alpha f\right)(t) = \left(\frac{d}{dt}\right)^m (I_{0+}^{m-\alpha} f)(t),$$

а дробная производная Капуто—Джарбашьяна порядка $\alpha > 0$ как

$$(D_t^\alpha f)(t) = \left(D_{0+}^\alpha f\right)(t) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(k)}(0)}{\Gamma(k - \alpha + 1)} t^{k-\alpha}.$$

Для гладких функций $f(\cdot)$ выполнено равенство

$$(D_t^\alpha f)(t) := I_{0+}^{m-\alpha} f^{(m)}(t).$$

Обозначим через $T_\alpha(t, A)$, $t > 0$, разрешающий оператор $x \mapsto u(t)$ (иногда также называемый α-полугруппой) равномерно корректной задачи Коши (2).

Каждая α-полугруппа $T_\alpha(t, A)$ с $0 < \alpha < 1$ удовлетворяет следующему уравнению (см. [348]):

$$\int\limits_0^{t+s} \frac{T_\alpha(\tau, A) d\tau}{(t + s - \tau)^\alpha} - \int\limits_0^{t} \frac{T_\alpha(\tau, A) d\tau}{(t + s - \tau)^\alpha} - \int\limits_0^{s} \frac{T_\alpha(\tau, A) d\tau}{(t + s - \tau)^\alpha} = \alpha \int\limits_0^{t} \int\limits_0^{s} \frac{T_\alpha(\tau_1, A) T_\alpha(\tau_2, A) d\tau_1 d\tau_2}{(t + s - \tau_1 - \tau_2)^\alpha} \tag{5}$$

и α-резольвентное семейство $S_\alpha(t)$ для $0 < \alpha < 1$ удовлетворяет уравнению (см. [128]):

$$S_\alpha(s) I_{0+,t}^\alpha S_\alpha(t) - I_{0+,s}^\alpha S_\alpha(s) S_\alpha(t) = I_{0+,t}^\alpha S_\alpha(t) - I_{0+,s}^\alpha S_\alpha(s). \tag{6}$$

Эти равенства могут служить и аксиоматическими определениями дробного разрешающего оператора, не включающими явно A, но позволяющими восстановить оператор A.

Задача Коши

$$(D_t^\alpha u)(t) = Au(t), \quad u(0) = x, \tag{7}$$

где $0 < \alpha < 1$, равномерно коррректна тогда и только тогда, когда интегральное уравнение Вольтерра

$$u(t) = x + \int\limits_0^t g_\alpha(t - s) A u(s) ds \tag{8}$$

корректно в смысле [353].

Определение 2. Предположим, что A — оператор, порождающий равномерно корректную задачу Коши (7). Семейство операторов $\{S_\alpha(t) : t \geqslant 0\} \subset B(E)$ называют α–резольвентным семейством, порожденным оператором A, если выполняются следующие условия:

(a) семейство $S_\alpha(t)$ сильно непрерывно при $t \geqslant 0$, и $S_\alpha(0) = I$;

(b) $S_\alpha(t)D(A) \subseteq D(A)$ и $AS_\alpha(t)x = S_\alpha(t)Ax$ для всех $x \in D(A)$, $t \geqslant 0$;

(c) для любого $x \in D(A)$ функция $S_\alpha(t)x$ удовлетворяет резольвентному уравнению

$$S_\alpha(t)x = x + \int\limits_0^t g_\alpha(t-s)S_\alpha(s)Ax\,ds, \quad t \geqslant 0. \tag{9}$$

В [90] было доказано, что задача Коши (7) равномерно корректна тогда и только тогда, когда A порождает α-резольвентное семейство. Следовательно, в действительности имеем $S_\alpha(t) \equiv T_\alpha(t), t \geqslant 0$. В [90] также были рассмотрены такие топологические свойства, как порождение, аналитичность, возмущения и принцип подчиненности для таких семейств.

Когда $\alpha = 1$, 1-резольвентное семейство есть обычная C_0-полугруппа, а когда $\alpha = 2$, 2-резольвентное семейство в действительности есть C_0-косинус оператор-функция.

Поэтому теория α-резольвентных семейств представляет собой расширение теории C_0-полугрупп и теории C_0-косинус оператор-функций. В связи с этим см. также [12]. Мы предполагаем описать подобные обобщения теории C_0-полугрупп в следующем обзоре.

Первая глава обзора содержит теорию проинтегрированных полугрупп, вторая касается теории C-полугрупп. Глава 3 посвящена приложениям абстрактной теории к задачам, не являющимся равномерно корректными в обычном смысле.

Приведем теперь основные обозначения, часть из которых уже вводились в [173, 5, 414], которые также будут использоваться и здесь.

Множество натуральных чисел обозначается $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$, множество целых — $\mathbb{Z}$, множество вещественных — $\mathbb{R}$ и множество комплексных — $\mathbb{C}$. Набор чисел $1, 2, \ldots, m$, $m \in \mathbb{N}$, обозначается $\overline{1, m}$, вещественная полуусь $(0, \infty)$ – $\mathbb{R}_+$, и $[0, \infty)$ – $\overline{\mathbb{R}_+}$.

Обозначим через E банахово пространство над полем комплексных чисел с нормой $\|\cdot\|$. Для гильбертова пространства со скалярным произвелением $(\cdot, \cdot)$ мы используем обозначение H.

Граница множества Ω обозначается $\partial\Omega$, внутренность множества Ω — $\mathrm{int}(\Omega)$, а замыкание в сильной топологии $\overline{\Omega}$.

Как обычно, сопряженное пространство к E обозначается через E^* с элементами x^*, y^*, …, а значение функционала $x^* \in E^*$ на элементе $x \in E$ записывается как $\langle x, x^* \rangle$.

Область определения и область значений оператора A будем обозначать через $D(A)$ и $\mathcal{R}(A)$ соответственно, а нулевое пространство (ядро) через $\mathcal{N}(A)$. Множество линейных операторов, действующих из $D(A) \subseteq E$ в E, обозначается через $L(E)$, а множество линейных непрерывных операторов через $B(E)$. Замкнутые линейные операторы с плотной в E областью определения ($\overline{D(A)} = E$) образуют множество $\mathcal{C}(E) \subset L(E)$. В случае, когда операторы действуют из одного пространства E в другое F, будем писать $L(E, F)$ и $B(E, F)$ соответственно. Линейное многообразие $D(A)$, оснащенное нормой $\|x\|_A := \|x\| + \|Ax\|$, в случае линейного замкнутого оператора становится банаховым пространством, которое мы обозначаем $\mathcal{D}(A)$.

Мы используем традиционные обозначения для резольвентного множества $\rho(A)$ и для спектра $\sigma(A)$ оператора A; как обычно, спектр делится на точечный спектр $P\sigma(A)$, непрерывный спектр $C\sigma(A)$ и остаточный спектр $R\sigma(A)$.

Предварительные сведения

Хорошо известно [14], что абстрактная задача Коши в банаховом пространстве E

$$\zeta'(t) = A\zeta(t), \quad t \geqslant 0, \quad \zeta(0) = \zeta^0, \tag{10}$$

равномерно корректна тогда и только тогда, когда оператор A порождает C_0-полугруппу $\exp(\cdot A)$ (см. [207]), а задача Коши для уравнения второго порядка

$$\xi''(t) = A\xi(t), \quad t \geqslant 0, \quad \xi(0) = \xi^0, \quad \xi'(0) = \xi^1,$$

равномерно корректна тогда и только тогда, когда оператор A порождает C_0-косинус оператор функцию $C(\cdot, A)$ (см. [152, 28]). Обобщенные решения этих задач могут быть записаны в форме

$$\zeta(t) = \exp(tA)\zeta^0, \qquad \xi(t) = C(t, A)\xi^0 + S(t, A)\xi^1, \tag{11}$$

где

$$S(t, A) = \int\limits_0^t C(s, A)ds.$$

Более того, следующие соотношения имеют место [28]:

$$(\lambda I - A)^{-1} = \int\limits_0^\infty e^{-\lambda t} \exp(tA)dt, \tag{12}$$

$$\lambda(\lambda^2 I - A)^{-1} = \int\limits_0^\infty e^{-\lambda t} C(t, A)dt, \qquad (\lambda^2 I - A)^{-1} = \int\limits_0^\infty e^{-\lambda t} S(t, A)dt. \tag{13}$$

Напомним также, что имеют место следующие хорошо известные теоремы о порождении.

Теорема 3 (см. [14])**.** *Для того чтобы оператор $A \in \mathcal{C}(E)$ порождал C_0-полугруппу, необходимо и достаточно, чтобы для некоторых констант M, $\omega \geqslant 0$, резольвента $(\lambda I - A)^{-1}$ существовала при $\operatorname{Re}\lambda > \omega$ и выполнялись следующие неравенства*:

$$\|(\lambda I - A)^{-n}\| \leqslant \frac{M}{(\operatorname{Re}\lambda - \omega)^n}, \quad n \in \mathbb{N}_0. \tag{14}$$

Теорема 4 (см. [152])**.** *Для того чтобы оператор $A \in \mathcal{C}(E)$ порождал C_0-косинус оператор-функцию, необходимо и достаточно, чтобы при некоторых константах M, $\omega \geqslant 0$, резольвента $(\lambda^2 I - A)^{-1}$ существовала при $\operatorname{Re}\lambda > \omega$ и имели место следующие неравенства*:

$$\left\| \frac{d^n}{d\lambda^n}\Big(\lambda(\lambda^2 I - A)^{-1}\Big) \right\| \leqslant \frac{Mn!}{(\operatorname{Re}\lambda - \omega)^{n+1}}, \quad n \in \mathbb{N}_0. \tag{15}$$

Обозначим через $L^1_\omega(\mathbb{R}_+)$ банахово пространство функций $\psi(\cdot)$, для которых функция $\{e^{-\lambda\xi}\psi(\xi)\}_{\xi\in\mathbb{R}_+}$ принадлежит $L^1(\mathbb{R}_+)$ с нормой $\|\psi(\cdot)\|_{L^1_\omega(\mathbb{R}_+)} = \|e^{-\omega\cdot}\psi(\cdot)\|_{L^1(\mathbb{R}_+)}$ для $\lambda \geqslant \omega$. В случае вещественнозначных или комплекснозначных измеримых по Лебегу функций $f(\cdot) \in L^1_\omega(\mathbb{R}_+)$ экспоненциального роста $\omega \in \mathbb{R}$ функция $r(\cdot)$, заданная соотношением

$$r(\lambda) = \int\limits_0^\infty e^{-\lambda t} f(t)dt, \tag{16}$$

бесконечно дифференцируема и допускает оценку

$$\left| \frac{d^n}{d\lambda^n} r(\lambda) \right| \leqslant \frac{Mn!}{(\lambda - \omega)^{n+1}}, \quad \lambda > \omega, \quad n \in \mathbb{N}_0. \tag{17}$$

Имеет место замечательный факт [430], утверждающий, что оценка (17) дает необходимое и достаточное условие того, что бесконечно дифференцируемая функция $r(\cdot)$ есть преобразование Лапласа некоторой экспоненциально ограниченной функции $f(\cdot) \in L^1_\omega(\mathbb{R}_+)$. Поскольку для $r(\lambda) = (\lambda I - A)^{-1}$ имеет место равенство

$$\frac{d^n}{d\lambda^n} r(\lambda) = (-1)^n n! r(\lambda)^{n+1}, \tag{18}$$

легко видеть, что оценки (14)–(15) выглядят точно так же, как и оценки (17). Отчасти поэтому в работах [136, 137, 361, 362] была допущена серьезная ошибка — они предполагали, что теорема Уиддера справедлива для любой функции со значениями в произвольном банаховом пространстве E. На самом деле функции, непрерывные по Липшицу со значениями в банаховом пространстве, не обязательно непрерывно дифференцируемы, хотя это и имеет место для вещественных и комплексных функций. В действительности, в [80] было доказано, что теорема Уиддера справедлива тогда и только тогда, когда $r(\cdot)$ действует в банахово пространство, обладающее свойством Радона—Никодима.

Теорема 5 (см. [80]). *Банахово пространство E обладает свойством Радона—Никодима тогда и только тогда, когда выполняется теорема Уиддера.*

Имеет место следующая теорема.

Теорема 6 (см. [100]). *Пусть дано $\omega \in \mathbb{R}$. Бесконечно дифференцируемая функция $r(\cdot)$ со значениями в банаховой алгебре $B(E)$ удовлетворяет условию (17) тогда и только тогда, когда существует линейный ограниченный оператор $\mathcal{H} : L^1_\omega(\mathbb{R}_+) \to B(E)$ такой, что $r(\lambda) = \mathcal{H}(e_\lambda(\cdot))$, $\lambda > \omega$, где $e_\lambda(t) = e^{-\lambda t}$.*

Оператор $\mathcal{H}$, возникший в этой теореме, есть гоморфизм пространства $L^1_\omega(\mathbb{R}_+)$ в $B(E)$ тогда и только тогда, когда $r(\cdot)$ есть псевдорезольвента. Функция $r(\cdot) : (\omega, \infty) \to B(E)$ называется псевдорезольвентой тогда и только тогда, когда она удовлетворяет тождеству Гильберта:

$$r(\lambda) - r(\mu) = (\mu - \lambda) r(\lambda) r(\mu). \tag{19}$$

Отметим, что при выполнении условия $\mathcal{N}(r(\lambda_0)) = \{0\}$ при некотором λ_0 (см. [207, p. 533]) существует линейный замкнутый оператор A такой, что $r(\lambda) = (\lambda I - A)^{-1}$ для любого $\lambda \in \rho(A)$. Область значений оператора $r(\lambda)$, не зависящую от λ, обозначим через $\mathcal{E}$.

Теорема 7 (см. [80]). *Бесконечно дифференцируемая функция $r(\cdot)$ со значениями в банаховой алгебре $B(E)$ удовлетворяет условию типа (17) тогда и только тогда, когда существует функция $U(\cdot)$ такая, что для $t > s$*

$$\|U(t) - U(s)\| \leqslant M \int\limits_s^t e^{\omega\xi} d\xi, \quad U(0) = 0,$$

и

$$\lambda \int\limits_0^\infty e^{-\lambda t} U(t) dt = r(\lambda), \quad \lambda > \omega. \tag{20}$$

В случае, когда $r(\lambda) = (\lambda I - A)^{-1}$ удовлетворяет условию $\limsup\limits_{\lambda\to\infty} \|\lambda r(\lambda)\| < \infty$, можно показать [100], что $\overline{\mathcal{E}} = \{x \in E : \lim\limits_{\lambda\to\infty} \lambda r(\lambda) x = x\}$ и оператор $A_0 = \lambda - (r(\lambda)|_{\overline{\mathcal{E}}})^{-1}$ корректно определен на $\overline{\mathcal{E}}$ и порождает на $\overline{\mathcal{E}}$ C_0-полугруппу $\exp(tA_0)$, $t \geqslant 0$, в силу теоремы 6.

Ясно, что

$$(\lambda I - A_0)^{-1} x = \int\limits_0^\infty e^{-\lambda t} \exp(tA_0) x dt$$

для любого $x \in \overline{\mathcal{E}}$. С другой стороны, в силу теоремы 7 существует семейство $U(\cdot)$ такое, что

$$(\lambda I - A_0)^{-1} x = \lambda \int\limits_0^\infty e^{-\lambda t} U(t) x dt$$

для $x \in \overline{\mathcal{E}}$, откуда следует, что

$$U(t) x = \int\limits_0^t \exp(tA_0) x dt$$

для того же x. Мы не можем проверить, что такое соотношение выполнено для $x \notin \overline{\mathcal{E}}$, но тем не менее для удобства будем называть семейство $U(\cdot)$ проинтегрированной полугруппой, даже если C_0-полугруппа $\exp(\cdot A_0)$ не определена на E. Более точно, такое семейство $U(\cdot)$ называется один раз проинтегрированной полугруппой.

Проинтегрированные полугруппы расматриваются в случаях, когда условия, налагаемые на оператор A, менее ограничительны, чем те, что обеспечивают порождение C_0-полугруппы (или C_0-косинус оператор-функции). Например, оператор Шрёдингера $i\Delta$ порождает [81] C_0-полугруппу в $L^p(\mathbb{R}^n)$ тогда и только тогда, когда $p=2$, однако если $\alpha > n\left|\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right|$, то $i\Delta$ порождает [81] α раз проинтегрированную полугруппу в $L^p(\mathbb{R}^n)$ для $p \neq 2$.

Глава 1

ПРОИНТЕГРИРОВАННЫЕ ПОЛУГРУППЫ

Понятие проинтегрированной полугруппы впервые было введено в [77]. Но необходимо отметить, что идеи, которые привели к проинтегрированным полугруппам, появились ранее (см. [387, 14]). Существует несколько подходов (см. [314, 6]) , которые приводят к проинтегрированным полугруппам.

Начнем с подхода через операторное тождество, который назовем «алгебраическим подходом», см. [80, 81, 85, 106, 115, 183, 184, 209, 267, 314, 339, 407, 6].

Определение 1.1. Пусть $n \in \mathbb{N}$. Однопараметрическое семейство ограниченнных линейных операторов $\{S(t) : t \geqslant 0\}$ называется *n-раз проинтегрированной полугруппой* , если

(v1) выполнено следующее условие:

$$S(t)S(s)x = \frac{1}{(n-1)!}\left(\int\limits_t^{t+s}(t+s-\tau)^{n-1}S(\tau)x\,d\tau - \int\limits_0^s(t+s-\tau)^{n-1}S(\tau)x\,d\tau\right) \tag{1.1}$$

для всех $s, t \geqslant 0$ и $x \in E$;

(v2) операторное семейство $S(\cdot)$ сильно непрерывно по $t \geqslant 0$.

Определение 1.2. n раз проинтегрированная полугруппа $\{S(t) : t \geqslant 0\}$ называется *экспоненциально ограниченной*, если

(v3) существуют $K > 0$ и $\omega \in \mathbb{R}$ такие, что

$$\|S(t)\| \leqslant Ke^{\omega t}, \quad t \geqslant 0. \tag{1.2}$$

Определение 1.3. Проинтегрированная полугруппа $\{S(t), t \geqslant 0\}$ называется *невырожденной*, если

(v4) равенство $S(t)x = 0 \;\; t \geqslant 0$ влечет $x = 0$.

Определение 1.4 (см. [407])**.** Для проинтегрированной полугруппы $\{S(t) : t \geqslant 0\}$ множество

$$\mathcal{N}(S(t)) := \{x \in E;\; S(t)x = 0,\; t \geqslant 0\}$$

называется *пространством вырождения* проинтегрированной полугруппы $\{S(t) : t \geqslant 0\}$.

В этом обзоре мы будем рассматривать только невырожденные принтегрированные полугруппы. Некоторые утверждения о вырожденных 1 раз проинтегрированных полугруппах приведены в [407].

Определение 1.5. Для экспоненциально ограниченной функции $\phi(t)$ определим *тип* как

$$\omega(\phi(\cdot)) := \inf\{\omega : \|\phi(t)\| \leqslant Ke^{\omega t} \text{ для } t \geqslant 0 \text{ при некотором } K\}.$$

Замечание 1.6 (см. [80, 115, 314])**.** Для удобства C_0-полугруппу будем рассматривать как 0 раз проинтегрированную полугруппу.

Замечание 1.7. В первых работах, посвященных проинтерированным полугруппам, рассматривались только проинтегрированные полугруппы целого порядка (см. [77, 80, 407] и др.).

Если в определении 1.1 мы заменим (1.1) на равенство

$$S(t)S(s)x = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left(\int\limits_t^{t+s}(t+s-\tau)^{\alpha-1}S(\tau)x\,d\tau - \int\limits_0^s(t+s-\tau)^{\alpha-1}S(\tau)x\,d\tau\right) \tag{1.3}$$

для $s,t \geqslant 0$ и $\alpha > 0$, $\alpha \notin \mathbb{N}$ (см. [185, 330, 331]), то получим определение *α-раз проинтегрированной полугруппы дробного порядка.* α раз проинтегрированные полугуппы изучались в [185, 209, 322, 330, 331]. Ясно, что для $\alpha = n \in \mathbb{N}$ целых, равенства (1.1) и (1.3) совпадают.

Предложение 1.8 (см. [6]). *Пусть $T > 0$ и $\{S(t),\, t \geqslant 0\}$ — невырожденная α раз проинтегрированная полугруппа ($\alpha > 0$). Тогда*

(i) *$\|S(t)\|$ равномерно ограничена на $[0,T]$;*
(ii) *$S(t)S(s) = S(s)S(t)$ для всех $s,t \geqslant 0$;*
(iii) *$S(0)x = 0$ для любого $x \in E$.*

Определение 1.9 (см. [115, 331, 330, 407]). Пусть $\{S(t); t \geqslant 0\}$ — α раз проинтегрированная полугруппа с $\alpha \geqslant 0$. *Генератор* A полугруппы $S(t)$ определяется так: $x \in D(A)$ и $Ax = y$ тогда и только тогда, когда

$$S(t)x = \int\limits_0^t S(\tau)y d\tau + \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}x \quad \text{для всех} \quad t \geqslant 0.$$

Когда $\alpha = 0$, это определение совпадает с обычным определением генератора C_0-полугруппы.

Известно, что существуют проинтегрированные полугруппы, которые не являются экспоненциально ограниченными, проинтегрированные полугруппы с неплотно определенными генераторами и проинтегрированные полугруппы, которые определены только на интервале $[0;T)$ с конечным $T < \infty$ (см. [314, 209, 6]).

Предложение 1.10 (см. [81, 314, 6]). (Наиболее простой пример экспоненциально ограниченной n раз проинтегрированной полугруппы.) *Пусть $U(t)$ — C_0-полугруппа в банаховом пространстве E. Тогда $S(t)$, сильный интеграл от $U(t)$:*

$$S(t)x := \int\limits_0^t U(s)x\;ds, \quad x \in E, \tag{1.4}$$

есть 1 раз проинтегрированная полугруппа в E.

n-кратный сильный интеграл от $U(\cdot)$:

$$S(t)x := \int\limits_0^t dt_1 \int\limits_0^{t_1} dt_2 \cdots \int\limits_0^{t_{n-1}} U(t_n)x\,dt_n, \quad x \in E, \tag{1.5}$$

дает пример n раз проинтегрированной полугруппы на E.

Предложение 1.11 (см. [80, 209, 314, 6]). *Существует проинтегрированная полугруппа с неэкспоненциальным ростом. А именно, операторное семейство*

$$S(t)x = \left\{\int\limits_0^t e^{a_n s} ds \cdot x_n\right\}_{n=1}^\infty \quad c \quad a_n := 2n + e^{n^2} i \tag{1.6}$$

есть 1 раз проинтегрированная полугруппа в пространстве l_2 с порадком роста e^{t^2}.

Если мы возьмем $a_n := \gamma n + e^{n^\gamma} i$ с $\gamma \in (1,2)$ в (1.6), то 1 раз проинтегрированная полугруппа (в l_2) имеет порядок роста $t^{1+1/\gamma-1}$.

Предложение 1.12 (см. [314]). *Существуют проинтегрированные полугруппы с неплотно определенными генераторами. Рассмотрим оператор $A = -d/dx$ в $E = C[0,\infty)$ с*

$$D(A) = \{u \in C[0,\infty) \ : \ u'(\cdot) \in C[0,\infty),\, u(0) = 0\}.$$

Так как $\overline{D(A)} \neq E$, то оператор A не может быть генератором C_0-полугруппы. В этом случае A есть генератор 1 раз проинтегрированной полугруппы $S(t)$, определенной как

$$(S(t)f)(x) = \begin{cases} -\int\limits_x^{x-t} f(s)\,ds, & x \geqslant t, \\ -\int\limits_x^{0} f(s)\,ds, & 0 \leqslant x \leqslant t. \end{cases}$$

Заметим, что A является генератором C_0-полугруппы в пространстве $C_0[0,\infty)$ непрерывных на $[0,\infty)$ функций, вырождающихся в нуле.

Предложение 1.13 (см. [314]). *Пусть*

$$E = \left\{L^p(\mathbb{R}) \times L^p(\mathbb{R}),\, \|u\|_E = \|u_1\|_{L^p} + \|u_2\|_{L^p}\right\}, \quad \text{где} \quad u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим оператор A, определенный как

$$Au = \begin{pmatrix} -h & -f \\ 0 & -h \end{pmatrix} u$$

с

$$D(A) = \left\{ \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \in E \ : \ hu_1 + fu_2 \in L^p(\mathbb{R}),\, hu_2 \in L^p(\mathbb{R}) \right\},$$

где $h(x) = 1 + |x|$, $f(x) = |x|^\gamma$, $\gamma > 0$. Для формально определенной оператор-функции

$$V(t) = \int\limits_0^t e^{As}\,ds, \quad t \geqslant 0,$$

мы можем записать

$$V(t)u = \begin{pmatrix} 1 - e^{-ht} & tfe^{-ht} \\ 0 & 1 - e^{-ht} \end{pmatrix} u, \quad u \in E.$$

Если $\gamma \in (1,2]$, то семейство ограниченных линейных операторов $\{V(t),\, t \geqslant 0\}$ есть 1 раз проинтегрированная полугруппа. Оператор A является генератором этой полугруппы, т.к.

$$\lambda I - R(\lambda, A)^{-1} = \lambda I - \left(\int\limits_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} V(t)\,dt \right)^{-1} = \lambda I - \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\lambda + h} & \dfrac{f}{(\lambda+h)^2} \\ 0 & \dfrac{1}{\lambda + h} \end{pmatrix} = A.$$

Далее, если $\gamma \leqslant 2$, то оператор-функции $V_k(t)$, $t \geqslant 0$, определенные равенствами

$$V_k(t)u = \int\limits_0^t V_{k-1}(s)u\,ds, \quad u \in E, \quad k \geqslant 2, \quad V_1 = V,$$

образуют k раз проинтегрированные полугруппы на E. В частности, равенство

$$V_2(t)u = \int\limits_0^t V(s)u\,ds = \frac{1}{h} \begin{pmatrix} 1 - \dfrac{1 - e^{-ht}}{h} & -tfe^{-ht} + \dfrac{(1 - e^{-ht})f}{h} - \dfrac{tf}{h} \\ 0 & t - \dfrac{1 - e^{-ht}}{h} \end{pmatrix} u, \quad u \in E,$$

определяет 2*-раза проинтегрированную полугруппу* V_2 *на* E*. Также заметим, что если* $\gamma > 2$*, то все* $\lambda > 0$ *не принадлежат резольвентному множеству оператора* A*, и поэтому для любого* n *оператор* A *не может порождать* n *раз проинтегрированную полугруппу на* E*.*

Предложение 1.14 (см. [314, 339] (пример))**.** *Дифференциальный оператор*

$$A = \sum_{|\alpha|\leqslant k} a_\alpha D^\alpha,$$

где

$$D^\alpha = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n}, \qquad |\alpha| = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j, \quad \max|\alpha| > n/2,$$

и его символ

$$p(x) = \sum_{|\alpha|\leqslant k} a_\alpha (ix)^\alpha$$

эллиптический полиномиальный с $\operatorname{Re} p(x) < \infty$*, является генератором* $([n/2]+2)$ *раз проинтегрированной полугруппы в пространствах* $C_0(\mathbb{R}^n)$*,* $L^p(\mathbb{R}^n)$*,* $1 \leqslant p \leqslant \infty$*.*

Предложение 1.15 (см. [339] (примеры))**.** (i) *Если оператор* A *порождает полугруппу* $T(\cdot)$ *класса* $(0, A)$*,* $(1, A)$*,* $(0, C_1)$ *или* $(1, C_1)$ *в соответствии с определениями в* [187, Разд. 10.6]*, то* A *порождает* 1 *раз проинтегрированную полугруппу* $S(\cdot)$ *в* E*, где*

$$S(t)x := \int_0^t T(s)x\,ds.$$

(ii) *Пусть* A *является генератором полугруппы* $T(\cdot)$*, которая сильно непрерывна при* $t > 0$ *и имеет сингулярность в точке* 0 *порядка роста* α*, т.е.* $\|T(t)\| < Mt^{-\alpha}$ *для некоторого* $0 < \alpha < 1$ *(см.* [143, 341]*). Тогда*

$$S(t)x := \int_0^t T(s)x\,ds$$

есть 1 *раз проинтегрированная полугруппа в* E*.*

Предложение 1.16 (см. [80, 81, 330, 331, 407, 6])**.** *Пусть* A *является генератором* α *раз проинтегрированной полугруппы* $\{S(t); t \geqslant 0\}$*. Тогда*

(i) A *есть замкнутый линейный оператор*;

(ii) $S(t)x \in D(A)$ *и* $AS(t)x = S(t)Ax$ *для* $x \in D(A)$ *и* $t \geqslant 0$;

(iii)
$$\int_0^t S(\tau)x\;d\tau \in D(A)$$
и
$$A\int_0^t S(\tau)x\,d\tau = S(t)x - \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}x \tag{1.7}$$
при всех $x \in E$ *и* $t \geqslant 0$;

(iv) $S(t)x \in \overline{D(A)}$ *для всех* $x \in E$ *и* $t \geqslant 0$;

(v) *при* $\alpha = n \in \mathbb{N}$ *и* $x \in E$*, функция* $S(\cdot)x$ *диффференцируема при* $t \geqslant 0$ *тогда и только тогда, когда* $S(t)x \in D(A)$*. При этом*

$$\frac{dS(t)x}{dt} = AS(t)x + \frac{t^{n-1}x}{(n-1)!}, \quad n \in \mathbb{N};$$

(vi) (см. [115]). *Для $r \in \mathbb{N}$ и $\alpha = n \in \mathbb{N}$ имеем*

$$S(t)x - \sum_{k=0}^{r-1} \frac{t^{n+k}}{(n+k!)} A^k x = \begin{cases} \dfrac{1}{(r-1)!} \displaystyle\int_0^t (t-u)^{r-1} S(u) A^r x \, du & \text{при } x \in D(A^r), \\ \dfrac{1}{(r-1)!} A \displaystyle\int_0^t (t-u)^{r-1} S(u) A^{r-1} x \, du & \text{при } x \in D(A^{r-1}). \end{cases}$$

Предложение 1.17 (см. [330]). *Пусть A является генератором α раз проинтегрированной полугруппы $\{S(t) : t \geqslant 0\}$ в E, где $\alpha \geqslant 0$. Пусть $\gamma > 0$ и*

$$V(t)x := \int_0^t \frac{(t-s)^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)} S(s)x \, ds \quad \text{для} \quad x \in E$$

есть интеграл Римана—Лиувилля порядка γ от α раз проинтегрированной полугруппы. Тогда $\{V(t) : t \geqslant 0\}$ есть $(\alpha + \gamma)$ раз проинтегрированная полугруппа и A — ее генератор.

Предложение 1.18 (см. [330]). *Если A порождает α раз проинтегрированную полугруппу, то A порождает β раз проинтегрированную полугруппу для любого $\beta > \alpha$.*

Для $\beta, \alpha \in \mathbb{N}$ это утверждение было получено в [81, 339].

Предложение 1.19 (см. [77, 339]). *Во множестве плотно определенных операторов класс всех операторов, которые порождают n раз проинтерированные полугруппы при некотором $n \in \mathbb{N}_0$, совпадает с классом всех генераторов экспоненциальных полугрупп распределений в смысле Лионса (см. [284]).*

Предложение 1.20 (см. [77, 339]). *Плотно определенный оператор A является генератором n раз проинтегрированной полугруппы при некотором $n \in \mathbb{N}_0$ тогда и только тогда, когда существует такое $w \geqslant 0$, $m \in \mathbb{N}$, $M > 0$, что $\{\lambda : \operatorname{Re}\lambda > w\} \subseteq \rho(A)$ и $\|R(\lambda, A)\| \leqslant M(1 + |\lambda|^m)$ при $\operatorname{Re}\lambda > w$.*

Проинтегрированные полугруппы представляют собой эффективное средство для исследования как однородной абстрактной задачи Коши $(ACP; A, x)$

$$\frac{du(t)}{dt} = Au(t), \quad u(0) = x, \quad t \geqslant 0, \tag{1.8}$$

так и неоднородной задачи Коши $(ACP; A, x, f(\cdot))$

$$\frac{du(t)}{dt} = Au(t) + f(t), \quad u(0) = x, \quad t \geqslant 0, \tag{1.9}$$

в банаховом пространстве E, где A — линейный замкнутый оператор.

Определение 1.21 (см. [80, 330, 331, 339]). Функция $u(t) : [0, \infty) \to D(A)$, где $u(t) \in C^1([0,\infty), E)$ и $u(0) = x$ удовлетворяют условиям $(ACP; A, x)$ (или $(ACP; A, x, f)$) называется (классическим) решением задачи (1.8) (или (1.9)).

Определение 1.22 (см. [314, 339]). Пусть $n \in \mathbb{N}$. Задача Коши $(ACP; A, x)$ называется *экспоненциально (n)-корректной на $\tilde{E} \subseteq D(A^{n+1})$ с типом* ω, если для любого $x \in \tilde{E}$:

(i) существует единственное решение

$$u(\cdot) \in C([0,\infty); D(A)) \cap C^1([0,\infty); E);$$

(ii) $\exists K > 0$, $\omega \in \mathbb{R}^+$ такие, что $\|u(t)\| \leqslant Ke^{\omega t}\|x\|_{\mathcal{D}(A^n)}$.

Если $\tilde{E} = D(A^{n+1})$, то будем говорить, что задача (ACP;A,x) *экспоненциально (n)-корректна с типом ω.*

Теорема 1.23 (см. [314]). *Пусть A — плотно определенный линейный оператор в E с непустым резольвентным множеством. Тогда следующие утверждения эквивалентны*:

(i) *A есть генератор n раз проинтегрированной полугруппы $\{S(t), t \geqslant 0\}$;*
(ii) *задача Коши $(ACP; A, x)$ экспоненциально (n)-корректна с типом ω.*

Для $\alpha \geqslant 0$ также будем рассматривать однородную $(ACP, A, x)_\alpha$ и неоднородную $(ACP; A, x, f(\cdot))_\alpha$, *$\alpha$-проинтегрированные эволюционные семейства*

$$v(t) = A \int_0^t v(\tau) d\tau + \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} x \tag{1.10}$$

и

$$v(t) = A \int_0^t v(\tau) d\tau + \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} x + \int_0^t \frac{(t-s)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} f(s)\, ds. \tag{1.11}$$

Предложение 1.24 (см. [330, 331])**.** *Пусть $\alpha \geqslant 0$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

(i) *оператор A является генератором α раз проинтегрированной полугруппы;*
(ii) *оператор A замкнут и линеен и $(ACP; A, x)_\alpha$ имеет единственное решение $v(\cdot, x) \in C([0,T]; E)$ для любого $x \in E$.*

В этом случае эволюционный оператор $S(t)x := v(t, x)$ интегрального уравнения (1.10) *есть проинтегрированная полугруппа порядка α, порожденная оператором A.*

Для $\alpha = 1$ это утверждение было доказано в [407].

Это утверждение показывает, что проинтегрированная полугруппа порядка α может быть получена как эволюционное семейство интегрального уравнения (1.10). Поэтому это утверждение называется “подход через интегральное уравнение” к проинтегрированным полугруппам.

Предложение 1.25 (см. [330])**.** *Пусть $\alpha = n \in \mathbb{N}$ и A — генератор n раз проинтегрированной полугруппы $\{S(t); t \geqslant 0\}$. Если $S(t)x \in C^{n+1}([0,\infty); E)$, то n-я производная $S^{(n)}(t)x$ есть единственное решение в $C([0,T]; E)$ задачи $(ACP; A, x)_n$.*

Следующее утверждение касается неоднородной задачи $(ACP; A, x, f(\cdot))_\alpha$.

Предложение 1.26 (см. [330])**.** *Пусть A является генератором α раз проинтегрированной полугруппы $\{S(t) : t \geqslant 0\}$, где $\alpha \geqslant 0$, $x \in E$ и $f(\cdot) \in L^1((0,T); E)$. Положим*

$$v(t) := S(t)x + \int_0^t S(t-s) f(s)\, ds \quad \text{для} \quad 0 \leqslant t \leqslant T. \tag{1.12}$$

Тогда $v(t)$ есть единственное решение задачи $(ACP; A, x, f(\cdot))_\alpha$.

Для $\alpha = 1$ это утверждение было доказано в [407].

Предложение 1.27 (см. [80])**.** *Пусть $\alpha = n \in \mathbb{N}$ и A — генератор n раз проинтегрированной полугруппы $\{S(t); t \geqslant 0\}$. Если существует решение $u(t)$ задачи $(ACP; A, x, f)$, то функция $v(t)$ (см. (1.12)) принадлежит $C^{n+1}([0,T]; E)$ и $u(t) = v^{(n)}(t)$.*

Обратно, если $v(t) \in C^{n+1}([0,T], E)$, то $u(t) = v^{(n)}(t)$ является решением задачи $(ACP; A, x, f)$.

Предложение 1.28 (см. [80])**.** *Для $v(\cdot)$ из* (1.12) *и любого $t \geqslant 0$ имеем*

$$\int_0^t v(s)\, ds \in D(A)$$

и

$$A \int_0^t v(s)\, ds = v(s) - \frac{t^n}{n!} x - \int_0^t \frac{(t-r)^n}{n!} f(r)\, dr, \quad t \in [0,T).$$

Следующее утверждение дает достаточное условие на $f(\cdot)$ и x для существования решения задачи $(ACP; A, x, f)$.

Предложение 1.29 (см. [80]). *Если $f \in C^{n+1}([O,T],E)$ и $x \in D(A)$, $x_1 := Ax + f(0) \in D(A)$, $x_2 := Ax_1 + f'(0) \in D(A)$, $\dots$, $x_{k+1} := Ax_k + f^{(k)}(0) \in D(A)$, $\dots$, $x_n := Ax_{n-1} + f^{(n)}(0) \in D(A)$, то задача $(ACP; A, x, f)$ имеет единственное решение.*

Предложение 1.30 (см. [330, 331]). *Пусть $\{V(t) : t \geqslant 0\}$ — сильно непрерывное семейство в $B(E)$ и B — линейный замкнутый оператор в E. Если $V(t)$ удовлетворяет двум условиям:*

(i)

$$\int\limits_0^t V(\tau)x\,d\tau \in D(B)$$

и

$$V(t)x = B\int\limits_0^t V(\tau)x\,d\tau + \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}x$$

для $x \in E$ и $t \geqslant 0$;

(ii)

$$V(t)x = \int\limits_0^t V(\tau)Bx\,d\tau + \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}x$$

для $x \in D(B)$ и $t \geqslant 0$,

то существует такое $\omega > 0$, что (ω, ∞) является подмножеством резольвентного множеству $\rho(B)$ оператора B.

Предложение 1.31 (см. [330, 331, 339]). *Пусть $\alpha \geqslant 0$.*

1) *[(i)] Если A — генератор α раз проинтегрированной полугруппы $\{S(t); t \geqslant 0\}$, то существует такое $\omega > 0$, что $(\omega, \infty) \subset \rho(A)$. (Для $\alpha = 1$, см. также [407].)*

(ii) *Каждая α раз проинтегрированная полугруппа однозначно определена своим генератором.*

Следующие утверждения касаются спектральных свойств проинтегрированных полугрупп.

Предложение 1.32 (см. [147]). *Пусть $\{S(t); t \geqslant 0\}$ — проинтегрированная полугруппа порядка $\alpha \in \mathbb{R}_+$ и A — ее генератор. Тогда*

(i) *для любого $t \geqslant 0$ имеем*

$$\int\limits_0^t e^{\lambda(t-s)}S(s)x\,ds \in D(A)$$

и

$$(\lambda I - A)\int\limits_0^t e^{\lambda(t-s)}S(s)x\,ds = \int\limits_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}e^{\lambda(t-s)}S(s)x\,ds - S(t)x; \tag{1.13}$$

(ii)

$$P\sigma(S(t)) \cup \{0\} = \left\{ \int\limits_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}e^{\lambda s}\,ds : \lambda \in P\sigma(A) \right\} \cup \{0\}; \tag{1.14}$$

(iii)

$$C\sigma(S(t)) \cup \{0\} = \left\{ \int\limits_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}e^{\lambda s}\,ds : \lambda \in C\sigma(A) \right\} \cup \{0\}; \tag{1.15}$$

(iv)

$$R\sigma(S(t)) \cup \{0\} = \left\{ \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{\lambda s}\, ds : \lambda \in R\sigma(A) \right\} \cup \{0\}. \quad (1.16)$$

Предложение 1.33 (см. [147]). *Пусть $\{S(t); t \geqslant 0\}$ — проинтегрированная полугруппа A — ее генератор, $\alpha \in \mathbb{R}_+$. Если $\mu \in C\sigma(S(t_0)) \setminus \{0\}$, то существует такое $\lambda \in C\sigma(A)$, что*

$$\mu = \int_0^{t_0} \frac{(t_0-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{\lambda s}\, ds.$$

1.1. Экспоненциально ограниченные проинтегрированные полугруппы

Характеристика экспоненциально ограниченных n раз проинтегрированных полугрупп была дана в [80, 248, 339].

Предложение 1.1.1 (см. [80, 330, 339]). *Если $\{S(t) : t \geqslant 0\}$ — невырожденная экспоненциально ограниченная α раз проинтегрированная полугруппа, то существует единственный замкнутый линейный оператор A, такой что $(\omega, \infty) \in \rho(A)$ и для $x \in E$ и $\lambda > a$,*

$$(\lambda I - A)^{-1} x = \lambda^{\alpha} \int_0^{\infty} e^{\lambda t} S(t) x\, dt. \quad (1.1.1)$$

Определение 1.1.2 (см. [81, 314]). Пусть A — оператор в банаховом пространстве E и $k \in \mathbb{N}_0$. Назовем A *генератором k раз проинтегрированной полугруппы*, если существуют $\omega \geqslant 0$ и сильно непрерывная функция $S : \mathbb{R}_+ \to B(X)$ такие, что $\omega(S) \leqslant \omega$, $(\omega, \infty) \subset \rho(A)$, и

$$R(\lambda; A)x = \lambda^k \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} S(t) x\, dt \quad (\lambda > \omega) \quad \text{для всех} \quad x \in E.$$

В этом случае семейство $S(\cdot)$ называется *экспоненциально ограниченной k раз проинтегрированной полугруппой, порожденной оператором A*. Если $k = 1$, мы также будем называть это семейство один раз проинтегрированной полугруппой.

Определение 1.1.3 (см. [81]). Оператор A из определения 1.1.1 называется *генератором* экспоненциально ограниченной проинтегрированной полугруппы $\{S(t) : t \geqslant 0\}$. $S(\cdot)$ называется *k раз проинтегрированной полугруппой, порожденной оператором A*.

Это определение легко обобщается для $\alpha \in \mathbb{R}_+$. Этот вариант определения проинтегрированной полугруппы и ее генератора называется «резольвентным подходом».

Следующее утверждение играет важную роль в резольвентном подходе.

Предложение 1.1.4 (см. [80, 81, 314]). *Пусть $S(\cdot) : \overline{\mathbb{R}_+} \to B(E)$ — сильно непрерывная функция, удовлетворяющая $\left\| \int_0^t S(s) x\, ds \right\| \leqslant M e^{\omega t} \|x\|$, $t \geqslant 0$ при некоторых $M, \omega \geqslant 0$ и любом $x \in E$. Пусть $k \in \mathbb{N}$. Для $\lambda > \omega$, $x \in E$ положим*

$$R(\lambda)x := \lambda^k \int_0^{\infty} e^{\lambda t} S(t) x\, dt.$$

Тогда следующие предложения эквивалентны:

(i) *Существует такой оператор A, что $(\omega, \infty) \subset \rho(A)$ и $R(\lambda) = (\lambda I - A)^{-1}$ для $\lambda > \omega$.*

(ii) *Для* $s, t \geqslant 0$ *и* $x \in E$

$$S(t)S(s)x = \frac{1}{(k-1)!}\left[\int\limits_t^{t+s}(s+t-r)^{k-1}S(r)x\,dr - \int\limits_0^t (s+t-r)^{k-1}S(r)x\,dr\right], \qquad (1.1.2)$$

и равенство $S(t)x = 0$ *для всех* $t \geqslant 0$ *влечет* $x = 0$.

Предложение 1.1.5 (см. [330]). *Определения* 1.1.3 *и* 1.9 *эквивалентны, если* α *раз проинтегрированная полугруппа* $\{S(t) : t \geqslant 0\}$ *экспоненциально ограничена.*

Заметим, что, в противоположность ситуации с C_0-полугруппами, генераторы k раз проинтегрированных полугрупп при $k \geqslant 1$ не обязаны быть плотно определены (см. предложение 1.12).

Предложение 1.1.6 (см. [81, 314, 339]). *Пусть* $k \in \mathbb{N}$ *и* $\{S(t) : t \geqslant 0\}$ — n *раз принтегрированная полугруппа в* E *с генератором* A. *Тогда имеют место следующие утверждения*:

(a) $R(\mu, A)S(t) = S(t)R(\mu, A)$, $t \geqslant 0$, $\mu \in \rho(A)$;

(b) *если* $x \in D(A)$, *то* $S(t)x \in D(A)$ *и* $AS(t)x = S(t)Ax$ *для всех* $t \geqslant 0$;

(c) *пусть* $x \in D(A)$ *и* $t \geqslant 0$, *тогда*

$$\int\limits_0^t S(s)Ax\;ds = S(t)x - \frac{t^n}{n!}x \quad \text{и} \quad \frac{d}{dt}(S(t)x) = S(t)Ax + \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}x; \qquad (1.1.3)$$

(d) *для* $x \in E$, $t \geqslant 0$

$$\int\limits_0^t S(s)x\,ds \in D(A) \quad \text{и} \quad A\int\limits_0^t S(s)x = S(t)x - \frac{t^n}{n!}x;$$

(e) *для* $x \in D(A^n)$, $n \in \mathbb{N}$,

$$S^{(n)}(t)x = S(t)A^n x + \sum_{k=0}^{n-1}\frac{t^k}{k!}A^k x;$$

(f) *для* $x \in D(A^{n+1})$, $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{d}{dt}S^{(n)}(t)x = AS^{(n)}(t)x = S^{(n)}(t)Ax \qquad (1.1.4)$$

и

$$R(\mu; A)x = \mu^{-(n+1)}R(\mu; A)A^{n+1} = \sum_{k=o}^{n}\mu^{-(k+1)}A^k x;$$

(g) *для* $x \in D(A^{n+1})$, $n \in \mathbb{N}$, *для решения* $u(t)$ *задачи* $(ACP; A, x)$ *имеет место следующая формула представления Фрагмена*:

$$u(t) = \lim_{\mu\to\infty}\mu\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{1}{(k-1)!}e^{k\mu t}R(k\mu; A)x;$$

(h) *для* $x \in D(A^{n+1})$, $n \in \mathbb{N}$, *для решения* $u(t)$ *задачи* $(ACP; A, x)$ *имеет место следующая формула*

$$S(t)u(0) = \int\limits_0^t \frac{1}{(n-1)!}(t-s)^{n-1}u(s)\,ds.$$

Предложение 1.1.7 (см. [**?**]). *Пусть* A *является генератором* k *раз проинтегрированной полугруппы* $\{S(t) : t \geqslant 0\}$ *в* E *для некоторого* $k \in \mathbb{N}$ *и пусть* $a \in \mathbb{C}$. *Тогда оператор* $A - aI$ *тоже порождает* k *раз проинтегрированную полугруппу* $S_a(\cdot)$ *в* E, *которая дается формулой*

$$S_a(t)x = e^{-at}S(t)x + \sum_{j=1}^{k}C_k^j a^j\int\limits_0^t\frac{(t-s)^{j-1}}{(j-1)!}e^{-\alpha s}S(s)x\,ds.$$

Предложение 1.1.8 (см. [81]). *Предположим, что A — линейный оператор на E и $k \in \mathbb{N}$.*

(a) *Предположим, что существуют $\omega \geqslant 0$, $M \geqslant 0$, $b > 0$ такие, что $\lambda \in \rho(A)$ и $\|R(\lambda; A)\| \leqslant M|\lambda|^{k-1-b}$ при $\operatorname{Re}\lambda > \omega$. Тогда A порождает k раз проинтегрированную полугруппу $S(\cdot)$, для которой $\omega(S) \leqslant \omega$.*

(b) *Обратно, если A порождает k раз проинтегрированную полугруппу $S(\cdot)$ такую, что $\omega(S) < \infty$, то для $\omega > \max(\omega(S), 0)$ существует такое M, что $\lambda \in \rho(A)$ и $\|R(\lambda; A)\| \leqslant M|\lambda|^k$ при $\operatorname{Re}\lambda > \omega$.*

Определение 1.1.9 (см. [339, 407]). Пусть $\{S(t) : t \geqslant 0\}$ — n раз проинтегрированная полугруппа в E с генератором A. Множество $C^m := \{x \in E : S(\cdot)x \in C^m(\mathbb{R}_+; E)\}$ называется *пространством дифференцируемости m-го порядка для $S(\cdot)$.*

Для пространства дифференцируемости m-го порядка для один раз проинтегрированной полугруппы имеют место следующие соотношения.

Предложение 1.1.10 (см. [407]). *Пусть $\{S(t) : t \geqslant 0\}$ — 1 раз проинтегрированная полугруппа с генератором A. Тогда*

$$S(t)x \in C^1 \quad \text{и} \quad S'(r)S(t)x = S(r+t)x - S(r)x \quad \text{для любого} \quad x \in E; \tag{1.1.5}$$
$$S(t) : C^n \to C^{n+1}, \quad n \geqslant 0; \tag{1.1.6}$$
$$S'(t) : C^n \to C^n, \quad n \geqslant 1; \tag{1.1.7}$$
$$S''(t) : C^{n+1} \to C^n \quad n \geqslant 1; \tag{1.1.8}$$
$$S'(r)S(t) - S'(t)S(r) = S(t) - S(r) \quad \text{на} \quad E; \tag{1.1.9}$$
$$S'(r)S(t) = S(t)S'(r) \quad \text{на} \quad C^1; \tag{1.1.10}$$
$$S'(r)S'(t) = S'(r+t) \quad \text{на} \quad C^1; \tag{1.1.11}$$
$$S'(t) = S''(0)S(t) + S'(0) \quad \text{на} \quad C^1; \tag{1.1.12}$$
$$S(t)S''(0) = S''(0)S(t) \quad \text{на} \quad C^2; \tag{1.1.13}$$
$$S''(t) = S''(0)S'(t) = S'(t)S''(0) \quad \text{на} \quad C^3; \tag{1.1.14}$$
$$S(r)S'(t) = S(t+r) - S(t) \quad \text{на} \quad C^1; \tag{1.1.15}$$
$$S(r)S''(t) = S'(t+r) - S'(t) \quad \text{на} \quad C^2; \tag{1.1.16}$$
$$S'(r)S''(t) = S''(t+r) = S''(t)S'(t) \quad \text{на} \quad C^2; \tag{1.1.17}$$
$$C^2 \subseteq D(A), \quad AC^2 \subseteq C^1 \quad \text{и} \quad Ax = C''(0)x \quad \text{для} \quad x \in C^2; \tag{1.1.18}$$
$$S(t)C^1 \subseteq C^2 \quad \text{и} \quad AS(t)x = S''(0)S(t)x = S'(t)x - x. \tag{1.1.19}$$

Предложение 1.1.11 (см. [339]). *Пусть A — генератор $(n-1)$ раз проинтегрированной полугруппы $\{S(t) : t \geqslant 0\}$ с $\|S(t)\| < Me^{\omega t}$.*

Тогда

(i) $\cdots \subset D(A^{3n-3}) \subset C^{3n-3} \subset D(A^{2n-2}) \subset C^{2n-2} \subset D(A^{n-1}) \subset C^{n-1}$;

(ii) $\|x\|_F := \sup\limits_{t \geqslant 0} \|e^{-\omega t} S^{(n-1)}(t)x\|$ *определяет норму на $D(A^{n-1})$, для которой $\|x\| \leqslant \|x\|_F \leqslant M_1\|x\|_{n-1}$, где*
$$\|x\|_k := \|x\| + \|Ax\| + \cdots + \|A^k x\|; \tag{1.1.20}$$

(iii) *пусть F — банахово пространство, полученное замыканием множества C^{2n-2} в норме $\|\cdot\|_F$; тогда $\overline{D(A^{2n-2})}^{\|\cdot\|_F} = F \subset C^{n-1}$;*

(iv) *если A плотно определен, то $\overline{D(A^{n-1})}^{\|\cdot\|_F} = F \subset C^{n-1}$;*

(v) *сужение $A|_F$ оператора A на F с областью определения $D(A|_F) := \{x \in D(A) \cap F : Ax \in F\}$ и $A|_F x = Ax$ для всех $x \in D(A|_F)$ есть генератор сильно непрерывной полугруппы $T(t) := (S^{(n-1)}(t)|_F) \subset B(F)$, допускающей оценку $\|T(t)\|_{B(F)} \leqslant e^{\omega t}$.*

Предложение 1.1.12 (см. [339]). *Пусть A — плотно определенный оператор в банаховом пространстве E. Тогда следующие утверждения эквивалентны*:

(i) *A есть генератор $(n-1)$ раз проинтегрированной полугруппы*;

(ii) *резольвентное множество оператора A непусто и существует норма $\|\cdot\|_F$ на $D(A^{n-1})$ такая, что $\|x\| \leqslant \|x\|_F \leqslant M_1\|x\|_{n-1}$. Сужение A на $F = \overline{D(A^{n-1})}^{\|\cdot\|_F}$ порождает сильно непрерывную полугруппу на F.*

Определение 1.1.13 (см. [339]). Будем говорить, что задача Коши (1.8) *экспоненциально (n,k)-корректна* (или просто корректна), если существуют $1 < n \in \mathbb{N}$ и $k \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant k \leqslant n$, такие, что для всех $x \in D(A^n)$ существует единственное решение $u(\cdot)$ задачи $(ACP; A, x)$, для которого справедлива оценка $\|u(t)\| \leqslant e^{\omega t}\|x\|_k$ для всех $t > 0$.

Для проинтегрированных полугрупп имеет место следующая теорема типа Хилле—Иосиды.

Предложение 1.1.14 (см. [80, 339, 314]). *Пусть A — линейный оператор в E. Пусть $M \geqslant 0$, $\omega \in \mathbb{R}$ и $k \in \mathbb{N}_0$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

(i) $(\omega, \infty) \subset \rho(A)$ *и*

$$\sup_{k\in N_0}\sup_{\lambda>\omega}\left\|\frac{(\lambda-\omega)^{k+1}}{k!}\left(\frac{R(\lambda;A)}{\lambda^n}\right)^{(k)}\right\| \leqslant M;$$

(ii) *A порождает $(n+1)$ раз проинтегрированную экспоненциально ограниченную полугруппу $S(\cdot)$, удовлетворяющую условию*

$$\limsup_{h\to 0}\frac{1}{h}\|S(t+h)-S(t)\| \leqslant Me^{\omega t};$$

(iii) *$(ACP; A, x)$ (1.8) экспоненциально $(n, n-1)$-корректна.*

Предложение 1.1.15. *Пусть A — замкнутый оператор в E и пусть $k \in \mathbb{N}_0$. Следующие утверждения эквивалентны:*

(i) *A порождает экспоненциально ограниченную k раз проинтегрированную полугруппу на E;*
(ii) *для любого $x \in E$ существует единственное классическое решение задачи $(ACP; A, x)_{k+1}$, которое экспоненциально ограничено;*
(iii) *$\rho(A) \neq \varnothing$, и для любого $x \in D(A^{k+1})$ существует единственное классическое решение задачи $(ACP; A, x)$, которое экспоненциально ограничено.*

Теорема 1.1.16 (см. [339]). *Пусть оператор A имеет непустое резольвентное множество. Тогда*

(a) *если A порождает $(n-1)$ раз проинтегрированную полугруппу, то задача Коши $(ACP; A, x)$ (1.8) экспоненциально $(n, n-1)$-корректна;*
(b) *если A плотно определен и если задача $(ACP; A, x)$ (1.8) экспоненциально $(n, n-1)$-корректна, то A порождает $(n-1)$ раз проинтегрированную полугруппу.*

Если в определении 1.1 проинтегрированной полугруппы мы рассмотрим $k \in \mathbb{R}_+$ вместо $k \in \mathbb{N}$, то получим проинтегрированную полугруппу дробного порядка, которая была введена в [185].

Проинтегрированные полугруппы дают решения однородной задачи Коши, если она корректна на $D(A^n)$.

Следующее утверждение показывает, что для любого $n \in \mathbb{N}$ возможна ситуация, когда задача $(ACP; A, x)$ имеет единственное решение при любом $x \in D(A^{n+1})$, но не при любом $x \in D(A^n)$.

Предложение 1.1.17 (см. [339] (пример)). *Пусть $n \geqslant 2$ и пусть A — генератор неаналитической сжимающей полугруппы $T(t)$ в банаховом (гильбертовом) пространстве E. Обозначим через E^n пространство $E \times \cdots \times E$, оснащенное максимум (гильбертовой)-нормой. Положим*

$$B := \begin{pmatrix} A & A & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A & A & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & A & A & \cdots & 0 \\ \multicolumn{6}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & A & A \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & A \end{pmatrix}.$$

Тогда задача $(ACP; B, x)$ с оператором B имеет единственное решение при любом $x \in D(B^{n+1})$, но не при любом $x \in D(B^n)$.

Предложение 1.1.18 (см. [330]). *Если A — генератор n раз проинтегрированной полугруппы и если $B \in B(E)$ и $R(B) \subseteq D(A^n)$, то $A+B$ порождает n раз проинтегрированную полугруппу.*

Предложение 1.1.19 (см. [339]). *Для любого $n > 1$ существует плотно определенный линейный оператор A в банаховом (гильбертовом) пространстве E такой, что*

(a) *резольвента $R(\mu; A)$ существует при $\operatorname{Re}\mu > 0$ и удовлетворяет оценке $\|R(\mu; A)\| < (2n-1)/\mu$ при всех вещественных $\mu > 0$ и*

(b) *абстрактная задача Коши $(ACP; A, x)$ имеет единственное решение для любого $x \in D(A^n)$, но не для любого $x \in D(A^{n-1})$.*

Предложение 1.1.20 (см. [339]). *Пусть A — линейный оператор в банаховом пространстве E с непустым резольвентным множеством. Если задача $(ACP; A, x)$ имеет единственное решение $u(\cdot)$ для любого $x \in D(A^n)$, то следующие утверждения относительно непрерывной зависимости решения от начальных данных имеют место.*

(i) *Если $(u_k(\cdot))_{k\in\mathbb{N}}$ — последовательность решений задачи $(ACP; A, u_k(0))$, для которой $u_k(0) \to 0$ при $k \to \infty$ в $D(A^{n-1})$, то решения $u_k(\cdot)$ сходятся к нулю равномерно на любом компакте из $\mathbb{R}_+$.*

(ii) *Если $1 < j < n-1$ и если $\{u_k(\cdot)\}_{k\in\mathbb{N}}$ — последовательность решений задачи $(ACP; A, u_k(0))$ с $u_k(0) \to 0$ в $[D(A^{n-k-1})]$, то j раз проинтегрированные решения $u_k^{(-j)}(\cdot)$,*

$$u_k^{(-j)}(t) = \int\limits_0^t \frac{1}{(j-1)!}(t-s)^{j-1} u_k(s)\; ds,$$

сходятся к нулю равномерно на компактах из $\mathbb{R}_+$.

(iii) *Существует локально ограниченная функция $p(\cdot)$ такая, что для любых $0 \leqslant j \leqslant n-1$ и $x \in D(A^n)$ j раз проинтегрированное решение удовлетворяет условию $\|u_k^{(-j)}(t)\| < p(t)\|x\|_{n-j-1}$.*

Предложение 1.1.21 (см. [339]). *Пусть A — линейный оператор в банаховом пространстве E с непустым резольвентным множеством.*

(i) *Если A порождает экспоненциально ограниченную $(n-1)$ раз проинтегрированную полугруппу, то задача (ACP) экспоненциально $(n, n-1)$-корректна.*

(ii) *Если A плотно определен и если задача (ACP) экспоненциально $(n, n-1)$-корректна, то A порождает $(n-1)$ раз проинтегрированную полугруппу.*

Предложение 1.1.22 (см. [339]). *Пусть A — плотно определенный линейный оператор в банаховом пространстве E. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

(a) *задача (ACP) экспоненциально $(n, n-1)$-корректна;*

(b) *оператор A замкнут, и существует D — линейное плотное подмножество E такое, что для любого $x \in D$ задача (ACP) имеет решение. Существуют такие M, ω, что для любого решения $u(\cdot)$ с $u(0) \in D$ $(n-1)$ раз проинтегрированное решение $f(\cdot)$ удовлетворяет оценке $\|f(t)\| \leqslant Me^{\omega t}\|u(0)\|$ для всех $t \geqslant 0$;*

(c) *A порождает $(n-1)$ раз проинтегрированную полугруппу;*

(d) *существуют $M, \omega > 0$ и семейство $T(t)$ в $L(\mathcal{D}(A^{n-1})), E)$, для которого $T(\cdot)x \in C(\mathbb{R}^+; E)$ и $\|T(t)x\| \leqslant Me^{\omega t}\|x\|_{n-1}$ для всех $x \in D(A^{n-1})$, такие, что $R(\mu; A)$ существует и представляется формулой*

$$R(\mu; A)x = \int\limits_0^\infty e^{-\mu t} T(t)x\, dt$$

для всех $\mu \in \mathbb{C}$ с $\operatorname{Re}\mu > \omega$ и любого $x \in D(A^{n-1})$;

(e) *существуют $M, \omega > 0$ такие, что $R(\mu; A)$ существует и удовлетворяет оценке $\|R(\mu; A)^k x\| \leqslant M(\mu - \omega)^{-k}\|x\|_{n-1}$ для всех $\mu > \omega$, $k \in \mathbb{N}$ и всех $x \in D(A^{n-1})$;*

(f) *существуют $M, \omega > 0$ такие, что $R(\mu, A)$ существует и удовлетворяет оценке*

$$\left\| \frac{1}{k!} \left(\mu^{1-n} R(\mu; A) \right)^{(k)} x \right\| \leqslant M \left(\frac{1}{\mu - \omega} \right)^{k+1}$$

для всех $\mu > \omega$ и $k \in \mathbb{N}_0$.

Предложение 1.1.23 (см. [339]). *Пусть A — плотно определенный линейный оператор в банаховом пространстве E. Тогда следующие утверждения эквивалентны*:

(a) *A порождает проинтегрированную полугруппу*;
(b) *существуют вещественные константы M, ω, и $k \in \mathbb{N}_0$ такие, что $R(\mu; A)$ существует и удовлетворяет оценке $\|R(\mu; A)\| \leqslant M(l + |\mu|)^k$ для всех $\mu \in \mathbb{C}$ с $\operatorname{Re} \mu > \omega$*;
(c) *A порождает экспоненциально ограниченную полугруппу-распределение.*

Замечание 1.1.24. В [316] установлена связь между α раз проинтегрированными полугруппами и гладкими полугруппами-распределениями для случая $\|S_\alpha(t)\| \leqslant Mt^\alpha$ для $t \geqslant 0$.

Предложение 1.1.25 (см. [339]). *Пусть A — линейный оператор в банаховом пространстве E. Если существуют такие константы M, ω, k, что $R(\mu; A)$ существует и удовлетворяет условию $\|R(\mu; A)\| \leqslant M(1 + |\mu|)^k$ для всех $\mu \in \mathbb{C}$ с $\operatorname{Re} \mu > \omega$, то задача $(ACP; A, x)$ (по крайней мере) экспоненциально $(k+3, k+3)$-корректна. Если дополнительно A плотно определен, то A порождает (по крайней мере) $(k+3)$ раз проинтегрированную полугруппу.*

Предложение 1.1.26 (см. [339]). *Пусть A — плотно определенный оператор в банаховом пространстве E с нормальным воспроизводящим конусом. Если существует такое $\omega \in \mathbb{R}$, что любое $\mu > \omega$ принадлежит резольвентному множеству оператора A, и если $R(\mu; A)x \geqslant 0$ для всех $x \geqslant 0$ и $\mu > \omega$, то задача $(ACP; A, x)$ экспоненциально $(2, 1)$-корректна.*

Предложение 1.1.27 (см. [339]). *Пусть A — линейный оператор с непустым резольвентным множеством. Тогда для $n \geqslant 2$ выполнено равенство*

$$(\mu^{1-n} R(\mu; A)x)^k = (-1)^k \frac{k!}{(n-2)!} \mu^{1-n-k} \sum_{j=0}^{k} \frac{(n+k-j-2)!}{(k-j)!} \mu^j R(\mu; A)^{j+1} x.$$

Предложение 1.1.28 (см. [339]). *Пусть A — плотно определенный генератор $(n-1)$ раз проинтегрированной полугруппы в нерефлексивном банаховом пространстве E.*

(i) *Тогда A^* порождает n раз проинтегрированную полугруппу $(S(\cdot)^*)$ на E^* и сопряженная задача Коши $u'(t) = A^* u(t), u(0) = x^*$, экспоненциально $(n+1, n)$-корректна на E^*.*

(ii) *Существует норма $\|\cdot\|_F$ на $D(A^{*n})$ такая, что $\|x^*\| \leqslant \|x^*\|_F \leqslant M_2 \|x^*\|_n$. Пусть $C^{2n}_{S^*} := \{x^* \in E^* : t \to S(t)^* x^* \in C^{2n}(\mathbb{R}_+; E^*)\}$. Тогда $C^{2n} \in D(A^{*n})$. Пусть F — замыкание C^{2n} относительно нормы $\|\cdot\|_F$. Тогда сужение A^* на F порождает сильно непрерывную полугруппу на F.*

Предложение 1.1.29 (см. [330]). *Если A — плотно определенный генератор α раз проинтегрированной полугруппы $\{S(t); t \geqslant 0\}$, то сопряженный A^* к A порождает $(\alpha + \gamma)$ раз проинтегрированную полугруппу на сопряженном к E пространстве E^* при любом $\gamma > 0$ и, более того, $S(t)^*|_{\overline{D(A^*)}}$, $t \geqslant 0$, есть α раз проинтегрированная полугруппа на $\overline{D(A^*)}$, генератор которой есть часть A^* в $\overline{D(A^*)}$.*

(Для целых $\alpha \in \mathbb{N}$ и $\gamma \in \mathbb{N}$ это предложение было установлено в [80].)

Предложение 1.1.30 (см. [109]). *Пусть $S(t)$ — один раз проинтегрированная полугруппа с генератором A. Тогда*

$$S(t)x = \lim_{n \to \infty} \left(I - \frac{tA}{n} \right)^{-n} x.$$

Это утверждение допускает следующее обобщение для k раз проинтегрированных полугрупп.

Предложение 1.1.31 (см. [108]). *Пусть $S(t)$ — k раз проинтегрированная полугруппа такая, что $\|S(t)\| \leqslant Mt^{\alpha}e^{\omega t}$ с $k-1<\alpha\leqslant k$ и $k\in\mathbb{N}$. Пусть $R(\lambda)=\lambda^k\hat{S}(\lambda)$ — соответствующая резольвента (псевдорезольвента). Тогда k раз проинтегрированная формула Эйлера имеет место в сильной операторной топологии: положим $F(t):=t^{-1}R(t^{-1})$, $0<t<\omega^{-1}$; тогда для любого $t_0>0$, функция $F^n(t/n)$ для n достаточно больших интегрируема по Бохнеру на $(0,t_0)$ и*

$$\operatorname*{s-lim}_{n\to\infty}\int\limits_0^{t_0}\frac{(t_0-\tau)^{k-1}}{(k-1)!}F\left(\frac{\tau}{n}\right)^n d\tau = S(t_0).$$

Следующие утверждения касаются исследования скорости сходимости в нуле проинтегрированных полугрупп. Ясно, что для простейшего примера проинтегрированной полугруппы — k-кратного интеграла от C_0-полугруппы — в нуле выполняется оценка $\|S(t)\|=O(t^k)$.

Известно (см. [108]), что для k раз проинтегрированных полугрупп $S(\cdot)$, для которых выполнена оценка $\|S(t)\|=O(t^{k+\alpha})$, $\alpha>0$, имеем $S(t)=0$ — вырожденная полугруппа.

Предложение 1.1.32 (см. [108]). *Пусть $\{R(\lambda)\}_{\lambda\in\Omega}$ — псевдорезольвента, для которой $(\omega,\infty)\subset\Omega\subset\mathbb{C}$ при некотором вещественном ω. Для любого $\alpha\in[0,k]$ следующие утверждения эквивалентны:*

(i) *существуют $M>0$ и $a\geqslant\max\{\omega,0\}$ такие, что*

$$\sup_{n\geqslant 0,\lambda>a}\left\|\frac{(\lambda-\omega)^{n+\alpha+1}}{\Gamma(n+\alpha+1)}\left(\frac{R(\lambda)}{\lambda^k}\right)^{(n)}\right\|\leqslant M;$$

(ii) *для любого $\delta>0$ существует такая $(k+\delta)$ раз проинтегрированная полугруппа $\{S_\delta(t):t\geqslant 0\}$, что $R(\lambda)=\lambda^{k+\delta}\int\limits_0^\infty e^{-\lambda t}S_\delta(t)\,dt$, $\lambda>\omega$, и $M-1>0$, для которой*

$$\|S_\delta(t)-S_\delta(s)\|\leqslant M_1|t-s|^\delta t^\alpha e^{\omega t},\quad t>s\geqslant 0.$$

Определение 1.1.33 (см. [115]). Будем говорить, что $A\in I_n$, если A порождает n раз проинтегрированную полугруппу $\{S(t),t\geqslant 0\}$, для которой $\|S(t)\|=O(t^n)$ при $t\to 0+$.

Предложение 1.1.34 (см. [115]). *Пусть $A\in I_n$ порождает n раз проинтегрированную полугруппу $\{S(t),t\geqslant 0\}$. Тогда*

(i) *Предел $y:=\lim\limits_{t\to 0+}\dfrac{n!}{t^n}S(t)x$ существует тогда и только тогда, когда $x\in\overline{D(A)}$. Более того, в этом случае $y=x$ и $\lim\limits_{t\to 0+}\dfrac{(n+1)!}{t^{n+1}}\int\limits_0^t S(\tau)x\,d\tau=x$.*

(ii) *Пусть $x\in\overline{D(A)}$. Тогда предел $z:=\lim\limits_{t\to 0+}\dfrac{n+1}{t}\left(\dfrac{n!}{t^n}S(t)x-x\right)$ существует тогда и только тогда, когда $x\in D(A|_{\overline{D(A)}})$. В этом случае справедливы следующие соотношения:*

(a) $\lim\limits_{t\to 0+}\dfrac{n+1}{t}\left(\dfrac{(n+1)!}{t^n}S(t)x-x\right)=A|_{\overline{D(A)}}x$;

(b) $\lim\limits_{t\to 0+}\frac{n+2}{t}\left(\dfrac{(n+1)!}{t^{n+1}}S(t)x-x\right)=A|_{\overline{D(A)}}x$.

Определение 1.1.35 (см. [115]). Пусть $r\in\mathbb{N}$, $t>0$ и оператор $B_t^{(r)}$ задан следующим образом:

$$B_t^{(r)}x:=\frac{(n+r)!}{t^{n+r}}\left[S(t)x-\sum_{k=0}^{r-1}\frac{t^{n+k}}{(n+k)!}A^kx\right],\quad x\in D(A^{r-1}).$$

r-й оператор Тейлора $B^{(r)}$ для $S(\cdot)$ определим как

$$B^{(r)}x := \lim_{t\to 0+} B_t^{(r)}x,$$

если предел существует.

Определение 1.1.36 (см. [115]). Пусть $r\in\mathbb{N}$. Для $x\in E$ в случае, если существуют такие элементы $g_{k,r}\in E$, $k=0,1,\dots,r-1$, что величина

$$P_t^{(r)}(g_{0,r},g_{1,r},\dots,g_{r-1,r})x = \frac{(n+r)!}{t^{n+r}}\left[S(t)x-\sum_{k=0}^{r-1}\frac{t^{n+k}}{(n+k)!}g_{k,r}\right]$$

имеет предел при $t\to 0+$, то мы будем писать $x\in D(P^{(r)})$ и использовать для этого предела обозначение $P^{(r)}(g_{0,r},g_{1,r},\dots,g_{r-1,r})x$. Из этого определения легко видеть, что $D(P^{(r)})$ есть линейное многообразие в E, а также, что $g_{0,r},g_{1,r},\dots,g_{r-1,r}$ и соответствующий предел $P^{(r)}(g_{0,r},g_{1,r},\dots,g_{r-1,r})x$ однозначно определяются элементом x. Поэтому мы можем обозначить $P^{(r)}x=P^{(r)}(g_{0,r},g_{1,r},\dots,g_{r-1,r})x$. $P^{(r)}$ называется *r-ым оператором Пеано*.

Предложение 1.1.37 (см. [115]). *Пусть $A\in I_n$ — генератор n раз проинтегрированной полугруппы $S(\cdot)$ и пусть $r\in\mathbb{N}$. Предположим, что $x\in D(P^{(r)})$, т.е. $P^{(r)}(g_{0,r},g_{1,r},\dots,g_{r-1,r})x$ существует. Тогда*

(a) *$g_{0,r}=x$ и $x\in\overline{D(A)}$;*
(b) *если $r=1$, то $x\in D(A|_{\overline{D(A)}})$ и $P^{(1)}x=A_{\overline{D(A)}}x$;*
(c) *если $r\geqslant 2$, то $x\in D(P^{(k)})$ и $P^{(k)}(g_{0,r},g_{1,r},\dots,g_{k-1,r})x=g_{k,r}$ для каждого $k=1,2,\dots,r-1$. В частности, $g_{1,r}=P^{(1)}x=A_{\overline{D(A)}}x$.*

Определение 1.1.38 (см. [115]). Пусть $r\in\mathbb{N}$, и для любого $t>0$ зададим оператор $C_t^{(r)}x$ формулой

$$C_t^{(r)}x := \frac{(n+1)^r}{t^r}\left[\frac{n!S(t)}{t^n}-I\right]^r x,\quad x\in E.$$

Определим оператор $C^{(r)}$ как

$$C^{(r)}x := \lim_{t\to 0+} C_t^{(r)}x,$$

если предел существует. Назовем $C^{(r)}$ *r-ым оператором Римана*.

Предложение 1.1.39 (см. [115]). *Пусть $A\in I_n$ — генератор n раз проинтегрированной полугруппы $S(\cdot)$ и пусть $r\in\mathbb{N}$. Тогда*

(a) $D(B^{(r)})\subset\overline{D(A)}$,
(b) $D(P^{(r)})\subset\overline{D(A)}$,
(c) $D(C^{(r)})\subset\overline{D(A)}$.

Предложение 1.1.40 (см. [115]). *Пусть $A\in I_n$ — генератор n раз проинтегрированной полугруппы $S(\cdot)$ и пусть $r\in\mathbb{N}$. Если $x\in\overline{D(A)}$, то для любой последовательности $t_k\geqslant 0$, $k=1,2,\dots,r$, справедливо соотношение*

$$\left[S(t_r)-\frac{t_r^n}{n!}I\right]\left[S(t_{r-1})-\frac{t_{r-1}^n}{n!}I\right]\cdots\left[S(t_1)-\frac{t_1^n}{n!}I\right]=$$

$$=\lim_{t\to 0+}\int_0^{t^r}S(u_r)\int_0^{t^{r-1}}S(u_{r-1})\cdots\int_0^{t^1}S(u_1)C_t^{(r)}x\,du_1du_2\cdots du_r.$$

Предложение 1.1.41 (см. [115]). *Пусть $A\in I_n$ — генератор n раз проинтегрированной полугруппы $S(\cdot)$ и пусть $r\in\mathbb{N}$. Если x и y принадлежат $\overline{D(A)}$ и удовлетворяют условию*

$$\left[S(t_r)-\frac{t_r^n}{n!}I\right]\left[S(t_{r-1})-\frac{t_{r-1}^n}{n!}I\right]\cdots\left[S(t_1)-\frac{t_1^n}{n!}I\right]=$$

$$= \int_0^{t_r} S(u_r) \int_0^{t_{r-1}} S(u_{r-1}) \cdots \int_0^{t_1} S(u_1) y \; du_1 du_2 \cdots du_r$$

для любых $t_k \geqslant 0$, $k = 1, 2, \ldots, r$, *то* $x \in D\Big(\Big(A|_{\overline{D(A)}}\Big)^r\Big)$ *и* $\Big(A|_{\overline{D(A)}}\Big)^r x = y$.

Предложение 1.1.42 (см. [115]). *Пусть* $A \in I_n$ *— генератор* n *раз проинтегрированной полугруппы* $S(\cdot)$ *и пусть* $r \in \mathbb{N}$. *Следующие утверждения эквивалентны*:

(a) $x \in D\Big(\Big(A|_{\overline{D(A)}}\Big)^r\Big)$;

(b) $x \in D(B^{(r)})$;

(c) $x \in D(P^{(r)})$;

(d) $x \in D(C^{(r)})$.

Более того, справедливы равенства $\Big(A|_{\overline{D(A)}}\Big)^r x = B^{(r)}x = P^{(r)}x = C^{(r)}x$ *для любого* $x \in D\Big(\Big(A|_{\overline{D(A)}}\Big)^r\Big)$.

Напомним определение K-функционала.

Определение 1.1.43 (см. [115]). Пусть E — банахово пространство с нормой $\|\cdot\|_E$ и Y — подмногообразие с полунормой $\|\cdot\|_Y$. K-функционал определяется как

$$K(t,x) := K(t,x,E,Y,\|\cdot\|_Y) = \inf_{y \in Y}\{\|x-y\|_E + t\|y\|_Y\}.$$

Предложение 1.1.44 (см. [115]). *Пусть* $A \in I_n$ *— генератор* n *раз проинтегрированной полугруппы* $S(\cdot)$. *Тогда следующие утверждения эквивалентны для* $0 < \beta \leqslant 1$ *и* $x \in \overline{D(A)}$:

(a) $\Big\|\dfrac{n!}{t^n}S(t)x - x\Big\| = O(t^\beta)$ *при* $t \to 0+$;

(b) $K(t,x,E,D(A),\|\cdot\|_{D(A)}) = O(t^\beta)$ *при* $t \to 0+$.

Предложение 1.1.45 (см. [115]). *Пусть* $A \in I_n$ *порождает* n *раз проинтегрированную полугруппу* $S(\cdot)$ *и пусть* $r \geqslant 1$ *— натуральное число. Тогда следующие утверждения эквивалентны для* $0 < \beta \leqslant 1$ *и* $x \in D\Big(\Big(A|_{\overline{D(A)}}\Big)^{r-1}\Big)$:

(a)
$$\left\|\left[S(t) - \sum_{j=n}^{n+r-1} \frac{t^j}{j!}\Big(A|_{\overline{D(A)}}\Big)^{j-n}\right]x\right\| = O(t^{(r-1+n+\beta)}) \quad \textit{при} \quad t \to 0+;$$

(b) *существуют такие последовательности* $g_{k,r} \in E$ *для* $k = 0, 1, \ldots, r-1$, *что*
$$\left\|S(t)x - \sum_{j=n}^{n+r-1} \frac{t^j}{j!} g_{j-n,r}\right\| = O(t^{(r-1+n+\beta)}) \quad \textit{при} \quad t \to 0+;$$

(c) $K(t, A^{r-1}x, E, D(A), \|\cdot\|_{D(A)}) = O(t^\beta)$ *при* $t \to 0+$.

Определение 1.1.46 (см. [108]). k раз проинтегрированую полугруппу будем называть *голоморфной* с углом θ, если она допускает голоморфное продолжение в открытый сектор $\Sigma_\theta := \{z \in \mathbb{C} : \; z \neq 0, \; |\arg z| < \theta\}$.

Предложение 1.1.47 (см. [108]). *Пусть* A *— (многозначный) оператор в банаховом пространстве* E *с резольвентным множеством* $\rho(A)$. *Тогда следующие утверждения эквивалентны для* $\omega \geqslant 0$ *и* $0 < \theta \leqslant \pi/2$:

(i) A *есть генератор голоморфной* k *раз проинтегрированной полугруппы с углом* θ *(в расширенном смысле)*: $S(\cdot) : \Sigma_\theta \to B(E)$ *такой, что для любого* $0 < \phi < \theta$, *имеет место оценка*
$$\sup_{z \in \Sigma_\theta} \|e^{-\omega z} S(z)\| < \infty;$$

(ii) *сектор* $\omega + \Sigma_{\phi+\pi/2}$ *входит в* $\rho(A)$, *и для любого* $0 < \theta < \phi$ *имеет место оценка*

$$\sup_{\lambda-\omega\in\Sigma_{\phi+\pi/2}} \|(\lambda-\omega)R(\lambda;A)/\lambda^k\| < \infty.$$

Более того, если утверждение (i) *или* (ii) *выполнено, то имеют место представления*

$$R(\lambda;A) = \lambda^k \int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t)\,dt \quad \text{или} \quad S(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C e^{\lambda z}\frac{R(\lambda;A)}{\lambda^k}\,d\lambda,$$

где C — *ориентированный путь в области* $\omega + \Sigma_{\phi+\pi/2}$, *проходящий от* $\infty e^{-i(\phi+\pi/2)}$ *к* $\infty e^{i(\phi+\pi/2)}$.

Предложение 1.1.48 (см. [108]). *Пусть* $T(\cdot)$ — *полугруппа на* E, *допускающая преобразование Лапласа с абсциссой сходимости* ω. *Тогда* $\widehat{T(\lambda)}$ *есть резольвента* $R(\lambda;A)$ *(многозначного) оператора* A *в* E *с* $(\omega,\infty)\subset\rho(A)$.

Более того, следующие утверждения эквивалентны для любых чисел $\gamma > 0$ *и* $0 \leqslant \beta < 1$:

(i) $T(t)$ *имеет голоморфное продолжение в открытую правую полуплоскость, и для любого* $\alpha > \gamma$ *существуют такие* $M > 0$ *и* $\omega \geqslant 0$, *что*

$$\|T(z)\| \leqslant Me^{\omega|z|}\frac{|z|^\alpha}{(\operatorname{Re} z)^{\alpha+\beta}};$$

(ii) *для любого* $\alpha > \gamma$ *оператор* A *есть генератор голоморфной* $(\alpha+\beta)$ *раз проинтегрированной полугруппы* $S_{\alpha+\beta}(\cdot)$ *в открытой правой полуплоскости с граничными значениями на мнимой оси* $i\mathbb{R}$ *и существуют такие* $M,\omega > 0$, *что* $\|S_{\alpha+\beta}(z)\| \leqslant Me^{\omega|z|}|z|^\alpha$, $\operatorname{Re} z \geqslant 0$.

Предложение 1.1.49 (см. [108] (пример)). *Пусть* A — *дифференциальный оператор в* $L_p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, *с максимальной областью определения такой, что его символ имеет форму* $ia(\xi)$, *где функция* $a(\xi)$ *вещественна, однородна, эллиптически полиномиальна в* $\mathbb{R}^n$. *Тогда* A *порождает* α *раз проинтегрированную полугруппу* $S(\cdot)$ *на* $L_p(\mathbb{R}^n)$, *допускающую оценку* $\|S(t)\| \leqslant Mt^\alpha$ *при некотором* $M > 0$ *и всех* $t > 0$ *при* $\alpha > n|1/2 - 1/p|$. *Более того, если символ* A *имеет вид* $\pm i|\xi|^m$ *при некотором* $m > 0$ *с* $m \neq 1$, *то* A *порождает* α *раз проинтегрированную полугруппу тогда и только тогда, когда* $\alpha > n/2$ *для* $p = 1$ *или* $p = \infty$, *и тогда и только тогда, когда* $\alpha \geqslant n/2|1/2 - 1/p|$ *для* $1 < p < \infty$.

Предложение 1.1.50 (см. [417]). *Пусть* $(S(t))_{t\geqslant 0}$ — *один раз проинтегрированная экспоненциально ограниченная полугруппа в банаховом пространстве* E *с генератором* A. *Тогда для* $x \in E$ *и* $t \geqslant 0$ *справедливо соотношение*

$$S(t)x = \lim_{h\to 0+}\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n!}A^{n-1}S^n(h)x,$$

где предел существует равномерно по t *на любом конечном интервале* $[0,T]$.

Предложение 1.1.51 (см. [417]). *Пусть* $\{S(t) : t \geqslant 0\}$ — α *раз проинтегрированная экспоненциально ограниченная полугруппа в банаховом пространстве* E, $\alpha \in \mathbb{R}_+$, *и пусть* A — *генератор* $(S(t))_{t\geqslant 0}$. *Пусть* $M \geqslant 0$ *и* $\omega_0 \in \mathbb{R}$ — *такие константы, что* $\|S(t)\| \leqslant Me^{\omega_0 t}$ *для* $t \geqslant 0$. *Тогда для всех* $x \in E$, $t \geqslant 0$ *и* $\gamma > \max(0,\omega_0)$ *справедливо равенство*

$$\int_0^t S(s)x\,ds = \lim_{\omega\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\omega}^{\gamma+i\omega} e^{\lambda t}\frac{R(\lambda;A)x}{\lambda^{1+\alpha}}\,d\lambda.$$

Также для всех $x \in D(A)$, $t > 0$, *и* $\gamma > \max(0,\omega_0)$ *выполнено равенство*

$$S(t)x = \lim_{\omega\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\omega}^{\gamma+i\omega} e^{\lambda t}\frac{R(\lambda;A)x}{\lambda^{\alpha}}\,d\lambda.$$

Предложение 1.1.52 (см. [416]). *Пусть $\{S(t) : t \geqslant 0\}$ — дважды проинтегрированная экспоненциально ограниченная полугруппа в банаховом пространстве E с генератором A. Тогда для любых $x \in D(A)$ и $t \geqslant 0$ выполнено равенство*

$$S(t)x = \lim_{h\to 0+}\left[\frac{t}{h} + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n!}A^{n-2}(AS(h)x + hI)^n\right]x,$$

где предел существует равномерно по t на любом конечном отрезке $[0,T]$.

Предложение 1.1.53 (см. [416]). *Пусть $\{S(t) : t \geqslant 0\}$ —ъ k раз проинтегрированная экспоненциально ограниченная полугруппа в банаховом пространстве E с генератором A, $k \in \mathbb{N}$. Тогда для любых $x \in C^k$ и $t \geqslant 0$ справедливо равенство*

$$S(t)x = \lim_{h\to 0+}\left[\frac{1}{(j-1)!}\left(\frac{t}{h}\right)^{j-1}\sum_{i=0}^{j-1}(-1)^i C_{j-1}^i S((j-1-i)h)x + \sum_{n=k}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{t}{h}\right)^n A^{n-k}\bigl(S^{(k-1)(h)}\bigr)^n x\right],$$

где предел существует равномерно по t на любом конечном отрезке $[0,T]$.

Предложение 1.1.54 (см. [80] (пример)). *Оператор $i\Delta$ (где Δ обозначает оператор Лапласа) с максимальной (в смысле распределений) областью определения порождает 3-раза проинтегрированную полугруппу в пространствах $L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $C^b(\mathbb{R}^n)$ и $C_0(\mathbb{R}^n)$, если $n \leqslant 3$ и один раз проинтегрированную полугруппу, если $n = 1$.*

Предложение 1.1.55 (см. [80]). *Пусть E — полуупорядоченное банахово пространство с нормальным воспроизводящим конусом (в частности, E может быть банаховой решеткой или C^*-алгеброй). Пусть A — такой оператор в E, что $(a,\infty) \subseteq \rho(A)$ для некоторого $a \in \mathbb{R}$ и $R(\lambda; A) \geqslant 0$ для всех $\lambda > a$.*

Тогда A есть генератор дважды проинтегрированной полугруппы. Если $D(A)$ плотно, то A порождает один раз проинтегрированную полугруппу.

Интересные результаты, касающиеся интерполяции и экстраполяции, были получены в [85]. Было показано, что каждая C_0-полугруппа в банаховом пространстве F порождает проинтегрированные полугруппы на непрерывно вложенных подпространствах, и обратно, каждая проинтегрированная полугруппа на F может быть "вложена" в C_0-полугруппы в экстраполяционных и интерполяционных пространствах. Более точно, см. следующее предложение.

Предложение 1.1.56 (см. [85] (интерполяционная теорема)). *Пусть A — генератор C_0-полугруппы $\{\exp(tA) : t \geqslant 0\}$ в банаховом пространстве F.*

(a) *Предположим, что E — такое банахово пространство, что $\mathcal{D}(A^k) \hookrightarrow E \hookrightarrow F$ при некотором $k \in \mathbb{N}$, где вложения непрерывны. В случае $k \geqslant 2$ предположим дополнительно, что $R(\mu_0; A)E \subset E$ для некоторого $\mu_0 \in \rho(A)$. Тогда $A|_E$ порождает экспоненциально ограниченную k раз проинтегрированную полугруппу $S(\cdot)|_E$ на E.*

(b) *Предположим, что $D(B) \neq F$. Тогда для любого заданного $k \in \mathbb{N}$ существует такое банахово пространство E, что $\mathcal{D}(A^k) \hookrightarrow E \hookrightarrow F$ при некотором $k \in \mathbb{N}$, и $B|_E$ порождает k раз проинтегрированную экспоненциально ограниченную полугруппу, но не $(k-1)$ раз проинтегрированную полугруппу.*

И обратный результат:

Предложение 1.1.57 (см. [85] (экстраполяционная теорема)). *Пусть A — генератор экспоненциально ограниченной, k раз проинтегрированной полугруппы типа $\omega > 0$ в банаховом пространстве E. Пусть $\alpha > \omega$. Тогда существует такой оператор B — генератор C_0-полугруппы типа α в банаховом пространстве F, что*

(a) *$\mathcal{D}(B^k) \subseteq E \subseteq F$ и $A = B|_E$;*

(b) *банахово пространство $\mathcal{D}(B^k)$ максимально и единственно в следующем смысле: если W такое банахово пространство, что $W \subseteq E$ и $A|_W$ порождает C_0-полугруппу типа α на W, то $W \subseteq \mathcal{D}(B^k)$.*

Предложение 1.1.58 (см. [150]). *Пусть A — генератор один раз проинтегрированной полугруппы $\{S(t); t \geqslant 0\}$. Предположим, что*

(i) $0 \in \rho(A)$,
(ii) $\sigma(A) \cap i\mathbb{R}$ *счетно,*
(iii) $R\sigma(A) \cap i\mathbb{R} = \varnothing$.

Тогда $S(t)x \to -A^{-1}x$ при $t \to \infty$ для любого $x \in \overline{D(A)}$.

Определение 1.1.59 (см. [150]). Пусть A – генератор экспоненциально ограниченной α раз проинтегрированной полугруппы $\{S(t) : t \geqslant 0\}$ (для некоторого $\alpha \geqslant 0$).

(i) Будем говорить, что $\{S(t) : t \geqslant 0\}$ *эргодична*, если $\lim\limits_{t\to+\infty} S(t)x/t^\alpha$ существует для всех $x \in E$.

(ii) Будем говорить, что $S(\cdot)$ *эргодична по Чезаро*, если предел

$$C\text{-}\lim_{t\to+\infty} \frac{S(t)x}{t^\alpha} := \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t} \int\limits_1^t \frac{S(s)x}{s^\alpha}\, ds$$

существует при всех $x \in E$.

(iii) Наконец, назовем $S(\cdot)$ *эргодичной по Абелю*, если $\lim\limits_{\lambda\to 0} \lambda R(\lambda; A)x$ существует для любого $x \in E$.

Предложение 1.1.60 (см. [150]). *Пусть $\alpha \geqslant 0$ и пусть A — генератор α раз проинтегрированной полугруппы $\{S(t) : t \geqslant 0\}$. Имеют место следующие утверждения.*

(i) *Если $\{S(t) : t \geqslant 0\}$ эргодична, то $S(\cdot)$ эргодична по Чезаро и*

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{S(t)x}{t^\alpha} = C\text{-}\lim_{t\to+\infty} \frac{S(t)x}{t^\alpha}.$$

(ii) *Если $\{S(t) : t \geqslant 0\}$ эргодична по Чезаро, то $S(\cdot)$ эргодична по Абелю и*

$$\Gamma(\alpha+1) C\text{-}\lim_{t\to+\infty} \frac{S(t)x}{t^\alpha} = \lim_{\lambda\to 0} \lambda R(\lambda; A) = P,$$

где P — проекция на $\mathcal{N}(A)$ «вдоль» $\overline{\mathcal{R}(A)}$.

В [24] рассматриваются два типа семейств: «классические», которые определены на всем банаховом пространстве и обладают полугрупповым свойством, и «регуляризованные», которые могут быть определены на некоторых подпространствах, вообще говоря, не обладают полугрупповым свойством, но некоторые их преобразовония обладают. Из классических полугрупп рассмотрены полугруппы класса C_0, полугруппы, суммируемые по Чезаро, полугруппы, суммируемые по Абелю, полугруппы классов C_k и $\mathcal{C}_k$, полугруппы роста α. Из регуляризованных полугрупп рассмотрены проинтегрированные полугруппы, R-полугруппы, полугруппы сверток. Для каждого вида регуляризованных полугрупп описан метод регуляризации, который позволяет рассматривать полугрупповое свойство на всем банаховом пространстве. Также для каждого типа регуляризованных полугрупп рассматриваются определения генераторов, а также экспоненциальная ограниченность и локальные семейства. В [24] приводится диаграмма разрешающих операторов полугрупповых включений. Импликации, которые включают регуляризованные полугруппы, получены через вложения генераторов. Импликации между парами классических полугрупп получены через вложения самих полугрупп или, как следствие, также через вложения генераторов. Особое внимание уделяется примерам, которые доказывают строгость некоторых из вложений. Для простоты основной диаграммы соотношение между полугруппами, суммируемыми по Абелю (т.е. полугруппами классов Ab, $(0, Ab)$, $(1, Ab)$) и их отношениям с полугруппами класса C_k, продемонстрировано в отдельной диаграмме.

1.2. Локально проинтегрированные полугруппы

Рассмотрим $(k+1)$ *раз проинтегрированную задачу Коши*

$$\begin{cases} v(\cdot) \in C([0,\tau); \mathcal{D}(A)) \cap C^1([0,\tau]); E), \\ v'(t) = Av(t) + \left(\dfrac{t^k}{k!}\right)x, \quad t \in [0,\tau), \\ v(0) = 0. \end{cases} \tag{1.2.1}$$

Определение 1.2.1. Задачу Коши (1.2.1) *назовем корректно поставленной или просто корректной*, если для любого $x \in E$ существует единственное решение задачи (1.2.1).

Определение 1.2.2 (см. [82])**.** Если задача Коши (1.2.1) с $k \in \mathbb{N}$ корректно поставлена и ее эволюция описывается операторнозначной функцией $S(\cdot)$, то назовем $S(\cdot)$ *локальной k раз проинтегрированной полугруппой*.

Следующее утверждение хорошо известно.

Предложение 1.2.3. *Задача Коши* (1.2.1) *с $k = 0$ корректна, если и только если A порождает C_0-полугруппу.*

Определение 1.2.4. Пусть $\alpha > 0$ и $\beta > 0$. Через $E(\alpha,\beta)$ обозначим экспоненциальную область

$$E(\alpha,\beta) := \{x + iy : x \geqslant \beta, \, |y| \leqslant e^{\alpha x}\}.$$

Предложение 1.2.5 (см. [82])**.** *Пусть $k \in \mathbb{N}$, $0 < \tau \leqslant \infty$. Предположим, что задача* (1.2.1) *с $k \in \mathbb{N}$ корректна. Тогда для любого $0 < \alpha < \tau/k$ существуют такие $\beta > 0$, $M \geqslant 0$, что*

$$E(\alpha,\beta) \subset \rho(A) \quad \text{и} \quad \|R(\lambda; A)\| \leqslant M|\lambda|, \quad \lambda \in E(\alpha,\beta).$$

Обратная теорема имеет место с некоторой потерей регулярности.

Предложение 1.2.6 (см. [82])**.** *Пусть $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $M \geqslant 0$, $-1 < k \in \mathbb{R}$, и предположим, что $E(\alpha,\beta) \subset \rho(A)$ и $\|R(\lambda; A)\| \leqslant M|\lambda|^k$, $\lambda \in E(\alpha,\beta)$. Пусть $p \in \mathbb{N}$ и $p > k+1$, $\tau = \alpha(p-(k+1))$. Тогда $(k+1)$ раз проинтегрированная задача Коши* (1.2.1) *корректна.*

Предложение 1.2.7 (см. [82])**.** *Пусть задача Коши* (1.2.1) *с $k \in \mathbb{N}$ корректна и $S(t)$ — локальная k раз проинтегрированная полугруппа, порожденная задачей* (1.2.1)*. Тогда имеют место следующие утверждения.*

(a) *$S(t)x = 0$ для всех $t \in [0,\tau)$ влечет $x = 0$ (т.е. проинтегрированная полугруппа $S(\cdot)$ невырождена).*
(b) *$R(\lambda; A)S(t) = S(t)R(\lambda; A)$ для всех $\lambda \in \rho(A)$, $t \in [0,\tau)$.*
(c) *Если $x \in D(A)$, то $S(t)x \in D(A)$ и $AS(t)x = S(t)Ax$.*
(d) *Пусть $x \in E$. Тогда $x \in D(A)$ тогда и только тогда, когда существует такое $y \in E$, что $S(t) = \int\limits_0^t S(s)y\,ds + (t^k/k!)x$ при всех $t \in [0,\tau)$. В этом случае $y = Ax$.*
(e) *$S(s)S(t) = S(t)S(s)$ для всех $0 \leqslant s$, $t < \tau$.*

Предложение 1.2.8 (см. [82])**.** *Пусть $k \in \mathbb{N}$, $\tau \in \mathbb{R}_+$. Предположим, что $(k+1)$ раз проинтегрированная задача Коши* (1.2.1) *корректна, т.е. A порождает локальную k раз проинтегрированную полугруппу $S(t)$ на $[0,\tau)$. Пусть $r \in \mathbb{R}$. Тогда $A - rI$ также порождает локальную k раз проинтегрированную полугруппу $S_r(t)$ на $[0,\tau)$, допускающую представление*

$$S_r(t) = e^{-rt}S(t) + \int\limits_0^t e^{-rs}p_k(t-s)\,ds, \quad 0 \leqslant t \leqslant \tau,$$

где p_k — *многочлен степени* $(k-1)$, *для которого*

$$\sum_{j=1}^{k} C_k^j r^j \mu^{-j} = \int_0^\infty e^{-\mu t} p_k(t)dt, \quad \mu > 0.$$

Предложение 1.2.9 (см. [82]). *Пусть* $k \in \mathbb{N}$ *и* $0 < \tau \leqslant \infty$. *Следующие утверждения эквивалентны*:

(i) $(k+1)$ *раз проинтегрированная задача Коши* (1.2.1) *корректна*;

(ii) $\rho(A) \neq \varnothing$ *и для всех* $x \in D(A^{k+1})$ *существует единственное решение задачи Коши*

$$\begin{cases} u(\cdot) \in C([0,\tau); \mathcal{D}(A)) \cap C^1([0,\tau]); E), \\ u'(t) = Au(t), \quad t \in [0,\tau), \\ u(0) = x. \end{cases} \tag{1.2.2}$$

Предложение 1.2.10 (см. [82]). *Пусть* $\tau_0 > 0$, $k \in \mathbb{N}$ *и* $(k+1)$ *раз проинтегрированная задача Коши* (1.2.1) *корректна на* $[0, \tau_0)$. *Тогда* $(2k+1)$ *раз проинтегрированная задача Коши* (1.2.1) *корректна на* $[0, 2\tau_0)$.

1.2.1. Локально проинтегрированные косинус-семействаs. В этом пункте мы введем проинтегрированные косинус-семейства и поясним сотношение между локально проинтегрированными косинус-семействами, локальными C-косинус семействами и абстрактной задачей Коши

Определение 1.2.11. Пусть $n \geqslant 2$ и $T \in (0, \infty]$. Семейство операторов $\{U(t) : |t| < T\}$ в $B(E)$ называется *локальным* n *раз притегрированным* (*невырожденным*) *косинус-семейством* на E, если

$$U(\cdot)x : (-T, T) \to X \quad \text{непрерывно для} \quad x \in E; \tag{1.2.3}$$

$$\begin{aligned} 2U(t)U(s)x = \frac{1}{(n-1)!}\left[\int_t^{t+s}(t+s-r)^{n-1}U(r)x\,dr - \int_0^s (t+s-r)^{n-1}U(r)x\,dr\right] + \\ + \frac{(-1)^n}{(n-1)!}\left[\int_t^{t-s}(t-s-r)^{n-1}U(r)x\,dr - \int_0^{-s}(t-s-r)^{n-1}U(r)x\,dr\right] \end{aligned} \tag{1.2.4}$$

для $0 \leqslant |t|$, $|s|$, $|t+s|$, $|t-s| < T$ и $U(0) = 0$;

$$U(t)x = 0 \quad \text{для} \quad t \in (-T, T) \quad \text{влечет} \quad x = 0. \tag{1.2.5}$$

Определение 1.2.11 несколько отличается от определений, введенных в [266, 267, 269, 270]. Из (1.2.4) имеем $U(t)U(-s)x = (-1)^n U(t)U(s)x$. Более того, получаем, что

$$\begin{aligned} \int_s^{s-t}(s-t-r)^{n-1}U(r)x\,dr - \int_0^{-t}(s-t-r)^{n-1}U(r)\,dr = \\ = (-1)^n \int_{-s}^{t-s}(t-s-r)^{n-1}U(-r)x\,dr - (-1)^n\int_0^t (t-s-r)^{n-1}U(-r)x\,dr = \\ = \int_t^{t-s}(t-s-r)^{n-1}U(r)x\,dr - \int_0^{-s}(t-s-r)^{n-1}U(r)x\,dr. \end{aligned}$$

Это означает, что $U(t)U(s)x = U(s)U(t)x$.

Обозначим $C^n(\delta) = \{x \in E : U(\cdot)x : (-\delta, \delta) \to X \ n \text{ раз непрерывно дифференцируемо}\}$.

Лемма 1.2.12. *Пусть $U(\cdot)$ — локальное n раз проинтегрированное косинус-семейство, $|t| < T$ и $x \in C^k(\delta)$, $1 \leqslant k \leqslant n-1$, $\delta > 0$. Тогда имеет место следующее утверждение*:

$$2U(t)U^{(k)}(s)x$$

$$= \frac{1}{(n-(k+1))!}\left[\int_t^{t+s}(t+s-r)^{n-k-1}U(r)xdr - \int_0^s (t+s-r)^{n-k-1}U(r)xdr\right]+$$

$$+\frac{(-1)^{n-k}}{(n-(k+1))!}\left[\int_t^{t-s}(t-s-r)^{n-k-1}U(r)xdr - \int_0^{-s}(t-s-r)^{n-k-1}U(r)xdr\right]-$$

$$-\sum_{i=1}^{k}\frac{t^{n-i}}{(n-i)!}\Big(U^{(k-i)}(s)x + (-1)^{n-k}U^{(k-i)}(-s)x\Big) \qquad (1.2.6)$$

для $|s| < \min(\delta, T-|t|)$;

$$U(t)U^{(k)}(0)x = 0 \quad \text{и, следовательно,} \quad U^{(k)}(0)x = 0. \qquad (1.2.7)$$

Лемма 1.2.13. *Пусть $U(\cdot)$ — локальное n раз проинтегрированное косинус-семейство, $|t| < T$ и $x \in C^n(\delta)$, $\delta > 0$. Тогда имеет место равенство*:

$$2U(t)U^{(n)}(s)x = U(t+s)x + U(t-s)x - \sum_{k=1}^{n}\frac{t^{n-k}}{(n-k)!}\Big(U^{(n-k)}(s) + U^{(n-k)}(-s)\Big)x \qquad (1.2.8)$$

при $|s| < \min(\delta, T-|t|)$;

$$U(t)U^{(n)}(0)x = U(t)x \quad \text{и, следовательно,} \quad U^{(n)}(0)x = x.$$

Лемма 1.2.14. *Пусть $|t| < T$ и $x \in C^k(\delta)$, $\leqslant k \leqslant n$, $\delta > 0$. Тогда $U(t)x \in C^k(\min(\delta, T-|t|))$ и $U(t)U^{(k)}(s)x = U^{(k)}(s)U(t)x$ для $|s| < \min(\delta, T-|t|)$.*

Доказательство этой леммы подобно доказательству в [405, лемма 4.4].

Лемма 1.2.15. *Пусть $u(\cdot) : \mathbb{R} \to E$ — непрерывная функция. Тогда $u(\cdot)$ дважды непрерывно дифференцируема тогда и только тогда, когда*

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h^2}\Big(u(t+h) - 2u(t) + u(t-h)\Big)$$

существует равномерно на любом компактном подмножестве $\mathbb{R}$. Если предел существует равномерно на компактных подмножествах $\mathbb{R}$, то он равен $d^2u(t)/dt^2$.

Определение 1.2.16. Инфинитезимальный генератор A_0 локального n раз проинтегрированного косинус-семейства $U(\cdot)$ определяется как предел

$$A_0x = \lim_{h\to 0} 2h^{-2}(U^{(n)}(h)x - x) \quad \text{для} \quad x \in D(A_0) \qquad (1.2.9)$$

с областью определения

$$D(A_0) = \left\{x \in \bigcup_{0<\delta<T} C^n(\delta) : \lim_{h\to 0} 2h^{-2}(U^{(n)}x - x) \text{ существует}\right\}.$$

Предложение 1.2.17. *Пусть A_0 — инфинитезимальный генератор локального n раз проинтегрированного косинус-семейства $U(\cdot)$ на E. Тогда справедливы следующие утверждения*:

$$U(t)x \in D(A_0) \quad \text{и} \quad A_0U(t)x = U(t)A_0x \quad \text{для} \quad |t| < T \quad \text{и} \quad x \in D(A_0); \qquad (1.2.10)$$

$$\frac{d^2}{dt^2}U(t)x = U(t)A_0x + \frac{t^{n-2}}{(n-2)!}x \quad \text{для} \quad |t| < T \quad \text{и} \quad x \in D(A_0); \qquad (1.2.11)$$

оператор A_0 допускает замыкание;

$$\text{если } C^n(T) \text{ плотно в } E, \text{ то } D(A_0) \text{ плотно в } E. \qquad (1.2.12)$$

Глава 2

C-ПОЛУГРУППЫ

Формулы (4), (12), (13), (1.1.1) могут быть использованы для того, чтобы показать, что для генератора $A \in L(E)$ справедливо вложение $(\omega, \infty) \subset \rho(A)$ с некоторым ω. Обратно, если мы предположим, что $(\omega, \infty) \subset \rho(A)$ для произвольного (неограниченного) оператора $A \in L(E)$, обладающего свойством

$$\left\| \prod_k (\lambda_k - \omega) R(\lambda_k; A) \right\| \leqslant M \tag{2.1}$$

для любого конечного множества $\lambda_k > \omega$, $k = 1, \ldots, m$, то это может быть использовано для построения такого максимального банахова подпространства Z в E, что $A|_Z$, «часть A в Z», порождает C_0-полугруппу на Z.

Если A — произвольный оператор на E с областью определения $D(A)$ и W — линейное многообразие в E, то часть A на W, обозначаемая $A|_W$, есть сужение A на его максимальную область определения как оператора в W:

$$D(A|_W) = \{x \in D(A) : x, Ax \in W\}.$$

Определение 2.1. Пусть A — произвольный оператор, для которого $(\omega, \infty) \subset p(A)$ с некоторым вещественным ω. Обозначим

$$\|x\|_Y = \sup \left\| \prod_k (\lambda_k - \omega) R(\lambda_k; A) x \right\|_E,$$

где supremum берется по всем конечным подмножествам $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ полуоси (ω, ∞) (в случае, когда множество пусто, полагаем, что произведение равно x). Положим

$$Y = \{x \in E : \|x\|_Y < \infty\}.$$

Определение 2.2. Банахово подпространство Y пространства E есть линейное многообразие $Y \subset E$, которое является банаховым пространством с нормой $\|\cdot\|_Y \geqslant \|\cdot\|_E$.

Лемма 2.3 (см. [205]). *Пространство $Y = (Y, \|\cdot\|_Y)$ есть банахово подпространство пространства E, инвариантное относительно любого ограниченного оператора $B \in B(E)$, который коммутирует с A, и $\|B\|_{B(Y)} \leqslant \|B\|_{B(E)}$.*

Определение 2.4. Пространство Хилле—Иосиды Z для оператора A есть замыкание $D(A|_Y)$ в Y.

Следующая теорема проясняет терминологию.

Теорема 2.5 (см. [198]). *Пусть A — неограниченный оператор, для которого $(\omega, \infty) \subset \rho(A)$ для некоторого вещественного ω. Пусть Z — пространство Хилле—Иосиды для оператора A. Тогда $A|_Z$, часть A в Z, порождает C_0-полугруппу $\exp(\cdot A|_Z)$ в Z, для которой $\|\exp(\cdot A|_Z)\|_{B(Z)} \leqslant e^{\omega t}$. Более того, Z максимально в следующем смысле: если $W = (W, \|\cdot\|_W)$ — такое банахово подпространство пространства E, что $A|_W$ порождает C_0-полугруппу в W с вышеуказанным экспоненциальным ростом, то W есть банахово подпространство пространства Z.*

Замечание 2.6. Отметим, в частности, случай $\omega = 0$: если $(0, \infty) \subset \rho(A)$, то пространство Хилле—Иосиды для оператора A есть такое максимальное банахово подпространство, что часть A в нем порождает полугруппу сжатий.

Эти рассуждения позволяют нам построить сильно непрерывное семейство операторов.

$$\mathcal{S}(tA) := \exp(tA|_Z)C, \quad t \geqslant 0,$$

с некоторым инъективным оператором $C \in B(E, Z)$, который коммутирует с A, и назвать такое семейство C-полугруппой. Понятно, что семейство $\mathcal{S}(tA), t \geqslant 0$, удовлетворяет уравнению

$$\mathcal{S}(tA)\mathcal{S}(sA) = \mathcal{S}((t+s)A)C \quad \text{для любых} \quad t, s \geqslant 0. \tag{2.2}$$

Если $E = Z$ и $C = I$, получаем случай C_0-полугруппы $\exp(tA|_Z)C = \exp(tA)$. Однако конструкция $\mathcal{S}(tA)$, $t \geqslant 0$, является более общей, чем конструкция проинтегрированных полугрупп. Например, резольвентное множество генератора проинтегрированной полугруппы должно быть [453] непусто (даже в локальном случае), а резольвентное множество генератора C-полугруппы может быть пустым. Вот почему локальные C-полугруппы могут быть использованы [277, 278, 310, 311, 312, 19, 17, 18, 20, 313, 21, 314, 315, 22] при изучении некорректных задач, когда вложение $(\omega, \infty) \subset \rho(A)$ не имеет места.

В [309] авторы представили понятие сверточной дробной C-полугруппы в банаховом пространстве. Там же изучалась корректность соответствующей дробной задачи Коши. Детали мы рассмотрим подробнее в следующем обзоре. Также мы хотели бы отметить, что если рассматривается задача Коши

$$B\frac{d}{dt}u(t) = Au(t), \quad t \geqslant 0, \quad u(0) = x, \tag{2.3}$$

то для описания решения (2.3) при условии $\mathcal{N}(B) \neq \{0\}$ авторы [309] используют C-полугруппы, где оператор C не инъективен. Обычно семейства операторов, относящиеся к такой задаче (2.3), называются вырожденными. Мы не касаемся этой теории в даннном обзоре, но приведем некоторые работы в этом направлении: [54, 56, 8, 63, 55, 52, 31, 53, 51, 39, 50, 38, 61, 30, 62, 48, 57, 47, 29, 32, 35, 393, 60, 34, 33, 46, 154, 153, 45, 44, 58, 59, 43, 42, 41, 40]. Вырожденные проинтегрированные полугруппы в таком контексте также использовались в [314].

2.1. Экспоненциально ограниченные C-полугруппы и C-косинус оператор-функции

Многие авторы дают характеристику полного инфинитезимального генератора экспоненциально ограниченных C-полугрупп (см., например, [145, 242, 248, 333]). В случае уравнения второго порядка по времени C-косинус семейства и n раз проинтегрированные косинус семейства также изучаются, и получаются аналогичные результаты.

В [269, 373] Y.-Ch. Li and S.-Y. Shaw дали характеристику генератора экспоненциально ограниченного проинтегрированного C-косинус семейства.

2.1.1. Определение C-полугрупп. Пусть C — инъективный оператор в $B(E)$. При этом мы не предполагаем, что область значений $\mathcal{R}(C)$ плотна в E.

Определение 2.1.1. Семейство операторов $\{S(t) : t \geqslant 0\}$ в $B(E)$ называется экспоненциально ограниченной C-полугруппой в E, если

$$S(t+s)C = S(t)S(s) \quad \text{для} \quad t, s \geqslant 0 \quad \text{и} \quad S(0) = C, \tag{2.1.1}$$

$$\text{функция} \quad S(\cdot)x : [0, \infty) \to E \quad \text{непрерывна для любого} \quad x \in E, \tag{2.1.2}$$

$$\text{существуют константы} \quad M > 0 \text{ и } \omega \in \mathbb{R} \quad \text{такие, что} \quad \|S(t)\| \leqslant Me^{\omega t} \quad \text{при} \quad t \geqslant 0. \tag{2.1.3}$$

Определим $L(\lambda) \in B(E)$ для $\lambda > \omega$ посредством формулы

$$L(\lambda)x = \int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t)x dt \quad \text{для} \quad x \in E. \tag{2.1.4}$$

Легко видеть [145], что $L(\lambda)$ инъективно для $\lambda > \omega$ и замкнутый линейный оператор Z, определенный как

$$D(Z) = \{x \in E : Cx \in \mathcal{R}(L(\lambda))\}, \tag{2.1.5}$$

$$Zx = (\lambda I - L(\lambda)^{-1}C)x \quad \text{для} \quad x \in D(Z) \tag{2.1.6}$$

не зависит от $\lambda > \omega$.

Пусть $\{S(t) : t \geqslant 0\}$ — C-полугруппа в E с генератором Z. Определим линейные операторы G и $\mathfrak{A}$ как сильные пределы

$$D(G) = \left\{x \in \mathcal{R}(C) : \lim_{t\to 0+} \frac{C^{-1}S(t)x - x}{t} \text{ существует}\right\}, \tag{2.1.7}$$

$$Gx = \lim_{t\to 0+} \frac{C^{-1}S(t)x - x}{t} \quad \text{для} \quad x \in D(G) \tag{2.1.8}$$

и

$$D(\mathfrak{A}) = \left\{ x \in E : \lim_{t\to 0+} \frac{S(t)x - Cx}{t} \in \mathcal{R}(C) \right\} \tag{2.1.9}$$

$$\mathfrak{A}x = C^{-1} \lim_{t\to 0+} \frac{S(t)x - Cx}{t} \quad \text{при} \quad x \in D(\mathfrak{A}) \tag{2.1.10}$$

соответственно. Оператор G называется генератором C-полугруппы $\{S(t) : t \geqslant 0\}$ в смысле Miyadera. Инфинитезимальный оператор $\mathfrak{A}$ C-полугруппы $\{S(t) : t \geqslant 0\}$ будем называть генератором в смысле Da Prato.

Предложение 2.1.2 (см. [403]). *Соотношения между $G, \mathfrak{A}$, and Z следующие*:

$$G \subset \overline{G} \subset \mathfrak{A} = Z, \quad \text{где } \overline{G} \text{ означает замыкание } G, \tag{2.1.11}$$

$$C^{-1}GC = C^{-1}\overline{G}C = C^{-1}ZC = Z. \tag{2.1.12}$$

Предложение 2.1.3 (см. [403]). *Имеют место следующие свойства*:

$$\begin{aligned} &(\lambda I - Z)L(\lambda)x = Cx \quad \text{для любого} \quad x \in E \quad \text{и} \quad \lambda > \omega, \\ &L(\lambda)(\lambda I - Z)x = Cx \quad \text{для любого} \quad x \in D(Z) \quad \text{и} \quad \lambda > \omega, \end{aligned} \tag{2.1.13}$$

где ω — константа из (2.1.3). *Более того,*

$$S(t)x \in D(Z) \quad \text{и} \quad ZS(t)x = S(t)Zx \quad \text{для всех} \quad x \in D(Z) \quad \text{и} \quad t \geqslant 0, \tag{2.1.14}$$

$$\int_0^t S(s)x\,ds \in D(Z) \quad \text{и} \quad S(t)x - Cx = Z\int_0^t S(s)x\,ds \quad \text{для всех} \quad x \in E \quad \text{и} \quad t \geqslant 0. \tag{2.1.15}$$

Следствие 2.1.4 (см. [403]). *Для любого $x \in C(D(Z))$ функция $u(t) = C^{-1}S(t)x$ есть единственное C^1 (непрерывно дифференцируемое) решение задачи Коши $(ACP; Z, x)$* (1). *Более того, функция $u(\cdot)$ удовлетворяет оценке $\|u(t)\| \leqslant Me^{\omega t}\|C^{-1}x\|$, где M и ω — константы из* (2.1.3).

Предложение 2.1.5 (см. [403]). *Оператор Z удовлетворяет следующим условиям*:

1^0. *$\lambda I - Z$ инъективно для $\lambda > \omega$*;
2^0. *$D((\lambda I - Z)^{-m}) \supseteq \mathcal{R}(C)$ для $\lambda > \omega$ и $m \geqslant 1$*;
3^0. *$\|(\lambda I - Z)^{-m}C\| \leqslant M/(\lambda - \omega)^m$ для $\lambda > \omega$ и $m \geqslant 1$, где M и ω — константы из* (2.1.3);
4^0. *$Cx \in D(Z)$ и $ZCx = CZx$ при $x \in D(Z)$.*

Замечание 2.1.6. Заметим, что предложение 2.1.3 не имеет места, если (2.1.3) не выполнено.

Обратно, обозначим через A замкнутый линейный оператор в E, удовлетворяющий с некоторым инъективным оператором $C \in B(E)$ следующим условиям (которые соответствуют условиям 1^0–4^0):

(a1) существует такое $\omega \in \mathbb{R}$, что $\lambda I - A$ инъективно для $\lambda > \omega$;
(a2) $D((\lambda I - A)^{-m}) \supseteq \mathcal{R}(C)$ при $\lambda > \omega$ и $m \geqslant 1$;
(a3) существует такое $M > 0$, что $\|(\lambda I - A)^{-m}C\| \leqslant M/(\lambda - \omega)^m$ при $\lambda > \omega$ и $m \geqslant 1$;
(a4) $Cx \in D(A)$ и $ACx = CAx$ при $x \in D(A)$.

Замечание 2.1.7. Легко видеть, что условие (a4) эквивалентно следующему условию (a4′):
(a4′) $(\lambda I - A)^{-1}Cx = C(\lambda I - A)^{-1}x$ для $\lambda > \omega$ и $x \in D((\lambda I - A)^{-1})$.

Теорема 2.1.8 (см. [403]). *Пусть A — замкнутый линейный оператор, удовлетворяющий условиям* (a1)–(a4). *Тогда для любого $x \in \overline{D(A)}$ сильный предел*

$$\tilde{S}(t)x := \lim_{n\to\infty} \left(I - \frac{tA}{n} \right)^{-n} Cx$$

существует равномерно на каждом ограниченном подмножестве полуоси $\overline{\mathbb{R}_+}$. Семейство операторов $\{\tilde{S}(t) : t \geqslant 0\}$ обладает следующими свойствами:

(1′) $\tilde{S}(t) : \overline{D(A)} \to \overline{D(A)}$;
(2′) $\tilde{S}(t+s)Cx = \tilde{S}(t)\tilde{S}(s)x$ *и* $\tilde{S}(0)x = Cx$ *при* $x \in \overline{D(A)}$ *и* $t, s \geqslant 0$;
(3′) $\|\tilde{S}(t)x\| \leqslant Me^{\omega t}\|x\|$ *при* $x \in \overline{D(A)}$ *и* $t \geqslant 0$;
(4′) $\|\tilde{S}(t)x - \tilde{S}(s)x\| \leqslant Me^{|t-s|\omega \max\{t,s\}}\|Ax\|$ *при* $x \in D(A)$ *и* $t, s \geqslant 0$, *и следовательно, функция* $S(\cdot)x : \overline{\mathbb{R}_+} \to \overline{D(A)}$ *непрерывна при* $x \in \overline{D(A)}$;
(5′) $\tilde{S}(t)x - Cx = A\int\limits_0^t \tilde{S}(s)xds$ *при* $x \in \overline{D(A)}$ *и* $t \geqslant 0$;
(6′) $(\lambda I - A)^{-1}Cx = \int\limits_0^\infty \tilde{S}(t)xdt$ *при* $x \in \overline{D(A)}$ *и* $\lambda > \omega$.

Поэтому, полагая $\tilde{C} = C|_{\overline{D(A)}}$, *получим, что* $\{\tilde{S}(t) : t \geqslant 0\}$ *есть* $\tilde{C}$-*полугруппа в банаховом пространстве* $\overline{D(A)}$. *Более того,* $\tilde{C}^{-1}A_1\tilde{C}$ *есть генератор этой* $\tilde{C}$-*полугруппы* $\{\tilde{S}(t) : t \geqslant 0\}$, *где* A_1 *означает часть оператора* A *в* $\overline{D(A)}$.

Всюду далее будем обозначать инфинитезимальный генератор $\mathfrak{A}$ C-полугруппы $\{S(t) : t \geqslant 0\}$ в смысле Da Prato как A, и записывать это следующим образом $\mathfrak{E}_C^{tA} \equiv S(t)$, $t \geqslant 0$.

Теорема 2.1.9 (см. [403]). *Пусть* A — *замкнутый линейный оператор в* E *с* $\rho(A) \neq \varnothing$. *Пусть* $c \in \rho(A)$ *и* $m \geqslant 0$ *целые. Следующие условия эквивалентны*:

(i) *оператор* A *является генератором* $(m+1)$ *раз проинтегрированной полугруппы* e_{m+1}^{tA} *в* E, *удовлетворяющей оценке* $\|e_{m+1}^{(t+h)A} - e_{m+1}^{tA}\| \leqslant Me^{\omega(t+h)}$ *для* $t, h \geqslant 0$ *с некоторыми* M, ω;
(ii) *оператор* A *является генератором* C-*полугруппы* $\mathfrak{E}_C^{tA}$ *в* E *с* $C = (cI - A)^{-(m+1)}$, *удовлетворяющей условию* $\|\mathfrak{E}_C^{(t+s)A} - \mathfrak{E}_C^{tA}\| \leqslant Me^{\omega(t+h)}$ *при* $t, h \geqslant 0$ *с некоторыми* M, ω;
(iii) *существуют такие* M, ω, *что* $(\omega, \infty) \subset \rho(A)$ *и* $\|(cI - A)^{-k}(cI - A)^{-m}\| \leqslant M/(\lambda - \omega)^k$ *для всех* $\lambda > \omega$ *и* $k \geqslant 0$.

В этом случае при $t \geqslant 0$ *имеем*:

$$e_{m+1}^{tA}x = (cI - A)^{m+1}\int\limits_0^t\int\limits_0^{t_1}\cdots\int\limits_0^{t_m}\mathfrak{E}_C^{t_{m+1}A}x\,dt_{m+1}\cdots dt_2dt_1$$

для всех $x \in E$.

Более того, если A — *замкнутый линейный оператор в* E *с* $\rho(A) \neq \varnothing$, *удовлетворяющий эквивалентным условиям, приведенным выше, и* A_1 — *часть* A *в* $\overline{D(A)}$, *то*:

(c_1) *оператор* A_1 *есть генератор* $\tilde{C}$-*полугруппы* $\mathfrak{E}_{\tilde{C}}^{tA_1}, t \geqslant 0$, *в* $\overline{D(A)}$ *с* $\tilde{C} = (cI - A)^{-m}|_{\overline{D(A)}}$;
(c_2) *оператор* A_1 *есть генератор* m *раз проинтегрированной полугруппы* $e_m^{tA_1}$ *в* $\overline{D(A)}$;
(c_3) $e_m^{tA_1}x = (cI - A_1)^m\int\limits_0^t\int\limits_0^{t_1}\cdots\int\limits_0^{t_{m-1}}\mathfrak{E}_{\tilde{C}}^{t_mA_1}x\,dt_m\cdots dt_2dt_1$ *при всех* $x \in \overline{D(A)}$ *и* $t \geqslant 0$.

Определение 2.1.10. C-резольвентное множество оператора A определяется следующим образом:

$$\rho_C(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} :\ \lambda I - A \text{ инъективен и } \mathcal{R}(C) \subseteq \mathcal{R}(\lambda I - A)\}$$

и C-резольвента оператора A определяется как

$$R_C(\lambda; A) = (\lambda I - A)^{-1}C \quad \text{для} \quad \lambda \in \rho_C(A).$$

Предложение 2.1.11 (см. [240, 453]). (a) *Если оператор* A *замкнут, то* $R_C(\lambda; A) \in B(E)$ *при* $\lambda \in \rho_C(A)$. *Обратно, если* $R_C(\lambda; A) \in B(E)$ *для некоторого* $\lambda \in \rho_C(A)$, *то* $C^{-1}AC$ *замкнут. Более того, оператор* $C^{-1}AC$ *замкнут, если* A *замкнут.*

(b) *Если* $R_C(\lambda, A) = R_C(\lambda; \tilde{A})$ *при некотором* $\lambda \in \rho_C(A)\bigcap\rho_C(\tilde{A})$, *то* $C^{-1}AC = C^{-1}\tilde{A}C$. *Более того,* $C(D(C^{-1}AC)) \subseteq \mathcal{R}(R_C(\lambda; A))$ *при* $\lambda \in \rho_C(A)$.

(c) *$CA \subseteq AC$ тогда и только тогда, когда $C(\lambda I - A)^{-1} \subseteq R_C(\lambda, A)$ при $\lambda \in \rho_C(A)$. Более того,*

$$R_C(\lambda; A) - R_C(\mu; A) = (\mu - \lambda)(\mu I - A)^{-1}(\lambda I - A)^{-1}C$$

для любого $\lambda, \mu \in \rho_C(A)$.

(d) *Если A замкнут и $CA \subseteq AC$, то $C(D(A)) = \mathcal{R}(R_C(\lambda; A))$ тогда и только тогда, когда $\lambda \in \rho(A)$. В частности, $A = C^{-1}AC$, если $\rho(A) \neq \varnothing$.*

(e) *Если $\tilde{A} \subseteq A$ и $A = C^{-1}AC$, то $C^{-1}\tilde{A}C = A$ тогда и только тогда, когда $C(D(A)) \subseteq D(\tilde{A})$.*

Предложение 2.1.12 (см. [81]). *Пусть $\mathfrak{E}_C^{tA}$ — экспоненциально ограниченная C-полугруппа. Тогда для $\operatorname{Re}\lambda > \omega$ и $n \in \mathbb{N}$ имеем $\lambda \in \rho_C(A), \mathcal{R}(C) \subseteq \mathcal{R}((\lambda I - A)^n)$ и*

$$(\lambda I - A)^{-n}Cx = \frac{1}{(n-1)!}\int\limits_0^\infty t^n e^{-\lambda t}\mathfrak{E}_C^{tA}x\,dt \tag{2.1.16}$$

для $x \in E$. Следовательно, справедливы следующие утверждения

(a) *$\|(\lambda I - A)^{-n}C\| \leqslant M(\operatorname{Re}\lambda - \omega)^{-n}$ для $\operatorname{Re}\lambda > \omega$ и $n \in \mathbb{N}$;*

(b) *отображение $R_C(\lambda, A) : \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda > \omega\} \to B(E)$ является аналитическим, и*

(c) *$\lim\limits_{\lambda\to\infty} \lambda(\lambda I - A)^{-1}x = x$ для $x \in \mathcal{R}(C)$.*

Определение 2.1.13. Сильно непрерывное семейство $T(t) : \mathbb{R} \to B(E)$ называется C-группой, если $T(0) = C$ и $T(t+s)C = T(t)T(s)$ для $t, s \in \mathbb{R}$. Генератор A определяется равенством $Ax = \lim\limits_{t\to 0}\dfrac{T(t)x - Cx}{t}$ с максимальной областью определения. Более того, C-группа $\{T(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ называется целой, если она может быть продолжена до целой $B(E)$-значной функции $\{T(t)\}_{t\in\mathbb{C}}$.

Теорема 2.1.14 (см. [453]). *Следующие условия эквивалентны*:

(a) *оператор A порождает C-группу $\{T(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$;*

(b) *операторы A и $-A$ порождают C-полугруппы $\{T_+(t)\}_{t\geqslant 0}$ и $\{T_-(t)\}_{t\geqslant 0}$ соответственно. Более того, $T(t) = T_+(t)$ и $T(-t) = T_-(t)$ для $t \geqslant 0$.*

2.1.2. Теоремы о порождении.

Теорема 2.1.15 (см. [145]). *Пусть $M > 0$, $\omega \in \mathbb{R}$. Тогда следующие условия эквивалентны*:

(a) *оператор A порождает экспоненциально ограниченную C-полугруппу*;

(b) *$A = C^{-1}AC, (\omega, \infty) \subset \rho_C(A)$, и существует сильно непрерывное семейство $S(\cdot) : [0, \infty) \to B(E)$, удовлетворяющее условию $\|S(t)\| \leqslant Me^{\omega t}$ при $t \geqslant 0$ и такое, что*

$$R_C(\lambda; A)x = \int\limits_0^\infty e^{-\lambda t}S(t)x\,dt, \tag{2.1.17}$$

где $x \in E$, $\lambda > \omega$. Более того, $\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$ есть экспоненциально ограниченная C-полугруппа $\{\mathfrak{E}_C^{tA}\}_{t\geqslant 0}$, порожденная оператором A.

Предложение 2.1.16 (см. [453]). *Пусть оператор A является генератором экспоненциально ограниченной $\mathfrak{E}_C^{tA}, t \geqslant 0$. Тогда для любого $a > \omega$ оператор $(aI - A)^{-1}$ также порождает C-полугруппу*

$$\mathfrak{E}_C^{t(aI-A)^{-1}} = \sum_{m=0}^\infty \frac{t^m}{m!}(aI - A)^{-m}C.$$

В частности, оператор A^{-1} порождает экспоненциально ограниченную C-полугруппу, если $\omega < 0$.

Приведем аналог теоремы Хилле—Иосиды—Филлипса—Миядеры.

Теорема 2.1.17 (см. [240]). *Пусть $M > 0$, $\omega \in \mathbb{R}$. Тогда следующие утверждения эквивалентны*:

(a) $A = C^{-1}AC$, $(\omega, \infty) \subseteq \rho_C(A)$, $\mathcal{R}(C) \subseteq \mathcal{R}((\lambda I - A)^m)$, *и*

$$\|(\lambda - \omega)^m(\lambda I - A)^{-m}C\| \leqslant M, \quad \lambda > \omega, \quad m \in \mathbb{N}; \tag{2.1.18}$$

(b) *оператор A порождает экспоненциально ограниченную $(aI - A)^{-1}C$-полугруппу $\mathfrak{E}^{tA}_{(aI-A)^{-1}C}$, $t \geqslant 0$, для всех $a \in \rho_C(A)$, и функция $\{e^{-\tilde{\omega}t}\mathfrak{E}^{tA}_{(aI-A)^{-1}C}, t \geqslant 0\}$ непрерывна по Липшицу для любого $\tilde{\omega} \in \mathbb{R}$.*

Если дополнительно $D(A)$ плотно в E, то (a) *эквивалентно условию*

(c) *оператор A порождает экспоненциально ограниченную C-полугруппу.*

Определение 2.1.18. Говорят, что C-полугруппа является сжимающей, если $\|\mathfrak{E}^{tA}_C x\| \leqslant \|Cx\|$ при $x \in E$ и $t \geqslant 0$.

Если A порождает C-полугруппу сжатий, представляет интерес, будет ли оператор $A|_{\overline{\mathcal{R}(C)}}$ порождать C_0-полугруппу сжатий на $\overline{\mathcal{R}(C)}$. Ответ, вообще говоря, отрицательный, как было показано в [453].

Теорема 2.1.19 (см. [259]). *Пусть $A = C^{-1}AC$, $\overline{C(D(A))} = \overline{\mathcal{R}(C)}$ и $D(A) \subseteq \mathcal{R}(aI - A)$ для некоторого $a > 0$. Тогда следующие условия эквивалентны*:

(a) *оператор A порождает C-полугруппу сжатий на E*;
(b) $(0, \infty) \subseteq \rho_C(A)$ *и* $\lambda\|R_C(\lambda, A)x\| \leqslant \|Cx\|$ *для* $\lambda > 0$ *и* $x \in E$;
(c) $A|_{\overline{\mathcal{R}(C)}}$ *порождает C_0-полугруппу сжатий на $\overline{\mathcal{R}(C)}$.*

Эквивалентность (a) и (b) следует из обобщения теоремы Хилле—Иосиды для C-полугрупп. Отсюда немедленно может быть получено обобщение теоремы Люмера—Филлипса для C-полугрупп. Действительно, подобно случаю C_0-полугрупп, если $CA \subseteq AC$, то $\|(\lambda I - A)Cx\| \geqslant \lambda\|x\|$ для $\lambda > 0$ и $x \in D(A)$ тогда и только тогда, когда оператор A C-диссипативен, т.е., для любого $x \in D(A)$, существует $x^* \in E^*$ (двойственное к E) такое, что $\langle x^*, Cx\rangle = \|Cx\|^2 = \|x^*\|^2$ и $\mathrm{Re}\langle x*, CAx\rangle \leqslant 0$, где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — соотношение двойственности между E^* и E.

Наконец, целые C-группы могут быть охарактеризованы в терминах множества целых векторов для их генераторов:

$$\mathfrak{A}_c(A) = \left\{ x \in \bigcap_{m=0}^{\infty} D(A^m) : \sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^m}{m!}\|A^m x\| < \infty \quad \text{для любого} \quad t > 0 \right\}. \tag{2.1.19}$$

Теорема 2.1.20 (см. [453]). *Пусть A замкнут и $A = C^{-1}AC$. Тогда следующие условия эквивалентны*:

(a) $\mathcal{R}(C) \subseteq \mathfrak{A}_c(A)$;
(b) *оператор A порождает целую C-группу $\{\mathfrak{E}^{tA}_C\}_{t \in \mathbb{C}}$.*

При этом $\mathfrak{E}^{tA}_C x = \sum\limits_{m=0}^{\infty} \dfrac{t^m}{m!} A^m Cx$ *и* $\mathfrak{E}^{tA}_C : E \to \mathfrak{A}_c(A)$ *при* $t \in \mathbb{C}$.

2.1.3. Интерполяция и экстраполяция.

В теореме 2.1.19 установлена связь между сжимающими C-группами и сжимающими C_0-полугруппами. Обозначим через $[\mathcal{R}(C)]$ банахово пространство $(\mathcal{R}(C), \|C^{-1} \cdot \|)$.

Теорема 2.1.21 (см. [240]). *Пусть $A = C^{-1}AC$. Тогда следующие утверждения эквивалентны*:

(a) *оператор A порождает экспоненциально ограниченную C-полугруппу*;
(b) *Существует такое банахово пространство Y, что $[\mathcal{R}(C)] \hookrightarrow Y \hookrightarrow E$, и $A|_Y$ порождает C_0-полугруппу на Y.*

В [453] приведен пример, показывающий, что в общем случае не существует максимального банахова пространства Y, удовлетворяющего (b).

Определение 2.1.22. Экспоненциально ограниченная C-полугруппа $\{\mathfrak{E}_C^{tA}\}_{t\geqslant 0}$ называется равномерно непрерывной, если для любого $x \in E$ функция $\mathfrak{E}_C^{tA}x$ равномерно непрерывна на $[0, \infty)$.

Следующее следствие показывает, что максимальное банахово пространство, удовлетворяющее условию (b), существует, если C_0-полугруппа в (b) удовлетворяет некоторому условию роста.

Следствие 2.1.23. *Пусть $A = C^{-1}AC$. Тогда следующие утверждения эквивалентны*:

(a) *оператор A есть генератор ограниченной равномерно непрерывной C-полугруппы*;
(b) *существует такое банахово пространство Y, что $[\mathcal{R}(C)] \hookrightarrow Y \hookrightarrow E$ и $A|_Y$ порождает сжимающую C_0-полугруппу на Y.*

При этом

$$Y_0 = \{x \in E: \text{ функция } C^{-1}\mathfrak{E}_C^{\cdot A}x \text{ ограничена и равномерно непрерывна на } [0, \infty)\}$$

с нормой $\|x\|_{Y_0} = \sup\limits_{t\geqslant 0} \|C^{-1}\mathfrak{E}_C^{tA}x\|$ есть максимальное банахово пространство, удовлетворяющее условию (b).

Рассмотрим далее экстраполирование C-полугрупп.

Теорема 2.1.24 (см. [453]). *Пусть $A = C^{-1}AC$. Тогда следующие утверждения эквивалентны*:

(a) *оператор A порождает экспоненциально ограниченную C-полугруппу*;
(b) *существует банахово пространство Z и такая C_0-полугруппа $\{e^{tB}\}_{t\geqslant 0}$ на Z, что оператор C может быть продолжен до оператора $\tilde{C} \in B(Z)$, $e^{tB}\tilde{C} = \tilde{C}e^{tB}, [\mathcal{R}(\tilde{C})] \hookrightarrow E \hookrightarrow Z$, и $A = B|_E$.*

Подобно следствию 2.1.23, справедлив следующий результат, который показывает совпадение скорости роста C-полугруппы и скорости роста C_0-полугруппы.

Следствие 2.1.25 (см. [240]). *Пусть $A = C^{-1}AC$. Тогда следующие утверждения эквивалентны*:

(a) *оператор A является генератором сильно равномерно непрерывной C-полугруппы*;
(b) *существуют банахово пространство Z и C_0-полугруппа сжатий $\{e^{tB}\}_{t\geqslant 0}$ на Z такие, что C может быть продолжена до оператора $\tilde{C} \in B(Z)$, $e^{tB}\tilde{C} = \tilde{C}e^{tB}$, $[\mathcal{R}(\tilde{C})] \hookrightarrow E \hookrightarrow Z$ и $A = B|_E$.*

Для оператора A, порождающего экспоненциально ограниченную C-полугруппу, мы построили экстраполяционное пространство Z такое, что расширение A порождает C_0-поугруппу на Z. В дальнейшем введем более узкое экстраполяционное пространство $\hat{Z}$ такое, что расширение A порождает специальную C-полугруппу на $\hat{Z}$, и рассмотрим соответствующие приложения. Для простоты мы рассматриваем только ограниченные C-полугруппы.

Предложение 2.1.26 (см. [273]). *Пусть A порождает ограниченную C-полугруппу. Тогда существуют такие банахово пространство $\hat{Z}$ и оператор B, что*

(a) *оператор C может быть продолжен до ограниченного оператора $\hat{C}$ на Z, с $\mathcal{R}(\hat{C}) \subseteq \overline{\mathcal{R}(C)}$*;
(b) *оператор B порождает равномерно непрерывную $\hat{C}$-полугруппу сжатий на $\hat{Z}$*;
(c) *$[\mathcal{R}(\hat{C})] \hookrightarrow E \hookrightarrow \hat{Z}$ и $A = B|_E$.*

2.1.4. Классы C-полугрупп. Здесь мы опишем такие классы C-полугрупп, как дифференцируемые C-полугруппы, аналитические C-полугруппы, сопряженные C-полугруппы и почти периодические C-группы.

Определение 2.1.27. Пусть A — генератор C-полугруппы. Тогда C-полугруппу называют непрерывной по норме, если $\mathfrak{E}_C^{tA} \in C([0, \infty), B(X))$, дифференцируемой, если $\mathfrak{E}_C^{\cdot A}x \in C^1((0, \infty), E)$ для любого $x \in E$ и бесконечно дифференцируемой, если $\mathfrak{E}_C^{\cdot A}x \in C^{\infty}((0, \infty), E)$ для любого $x \in E$.

В отличие от случая C_0-полугрупп, существуют неограниченные операторы, порождающие C-полугруппы, непрерывные по норме в точке $t = 0$.

Предложение 2.1.28 (см. [453]). *Предположим, что A порождает экспоненциально ограниченную C-полугруппу $\{\mathfrak{E}_C^{tA}\}_{t\geqslant 0}$. Тогда*

(a) *если $\mathfrak{E}_C^{tA}$ дифференцируема, то при $t>0$ $\mathfrak{E}_C^{tA} : E \to D(A)$, $(\mathfrak{E}_C^{tA})'_t = A\mathfrak{E}_C^{tA} \in B(E)$ и $\mathfrak{E}_C^{\cdot A} \in C((0,\infty), B(E))$;*

(b) *если $\mathfrak{E}_C^{tA}$ бесконечно дифференцируема, то для всех $m \in \mathbb{N}$, $t > 0$, $\mathfrak{E}_C^{tA} : E \to D(A^m)$, $(\mathfrak{E}_C^{tA})_t^{(m)} = A^m \mathfrak{E}_C^{tA}$ и $\mathfrak{E}_C^{\cdot A} \in C^\infty((0,\infty), B(E))$.*

Заметим, что из дифференцируемости $\{\mathfrak{E}_C^{tA}\}_{t\geqslant 0}$ следует, что $\mathfrak{E}_C^{\cdot A}x \in C^2((0,\infty), E)$ для $x \in \mathcal{R}(C)$, но не для $x \in E$. Соответствующий пример приведен в [453].

Рассмотрим аналитичность C-полугрупп. Положим $\Sigma_\alpha = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\arg\lambda| < \alpha\} \setminus \{0\}$, где $0 < \alpha \leqslant \pi$.

Определение 2.1.29. Пусть $\alpha \in (0, \pi/2]$. C-полугруппу $\{\mathfrak{E}_C^{tA}\}_{t\geqslant 0}$ назовем аналитической C-полугруппой с углом α, если

(i) она может быть продолжена до аналитической функции из Σ_α в $B(E)$;

(ii) $\mathfrak{E}_C^{\cdot A} : \overline{\Sigma_\beta} \to B(E)$ сильно непреывна для любого $\beta \in (0,\alpha)$.

Будем говорить, что $\{\mathfrak{E}_C^{tA}\}_{t\in\Sigma_\alpha}$ экспоненциально ограничена, если

(iii) для любого $\beta \in (0,\alpha)$ существует такая константа $\omega_\beta \in \mathbb{R}$, что $\sup\limits_{\eta\in\Sigma_\beta} \|e^{-\omega_\beta \eta}\mathfrak{E}_C^{\eta A}\| < \infty$.

Иногда используется условие

(iv) $\sup\limits_{\eta\in\Sigma_\beta} \|e^{-\omega\eta}\mathfrak{E}_C^{\eta A}\| < \infty$ для любого $\beta \in (0,\alpha)$.

Приведем характеристику аналитических регуляризованных полугрупп.

Теорема 2.1.30 (см. [451]). *Пусть $\omega \in \mathbb{R}$ и $\alpha \in (0,\pi/2]$. Тогда следующие утверждения эквивалентны*:

(a) *оператор A порождает аналитическую экспоненциально ограниченную C-полугруппу и $\sup\limits_{\eta\in\Sigma_\beta} \|e^{-\omega\eta}\mathfrak{E}_C^{tA}\| < \infty$ для любого $\beta \in (0,\alpha)$;*

(b) *оператор $A = C^{-1}AC, (\omega,\infty) \subset \rho_C(A)$ и существует такая аналитическая функция $T(\cdot) : \Sigma_\alpha \to B(E)$, удовлетворяющая условиям* (ii) *и* (iv) *из определения* 2.1.29*, что*
$$R_C(\lambda; A) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)\,dt, \quad \lambda > \omega;$$

(c) *для любого $\beta \in (0,\alpha)$ существует такое $M_\beta \geqslant 0$, что оператор $e^{i\theta}A$ порождает аналитическую экспоненциально ограниченную C-полугруппу для $\theta \in (-\beta,\beta)$, и*
$$\lim_{t\downarrow 0} \sup_{|\theta|\leqslant\beta} \|\mathfrak{E}_C^{te^{i\theta}A}x - Cx\| = 0 \quad \text{для любого} \quad x \in E. \tag{2.1.20}$$

Если дополнительно $D(A)$ плотно в E, то утверждения (a)–(f) *эквивалентны*:

(d) *утверждение* (b) *без условия* (ii) *из определения* 2.1.29;

(e) *утверждение* (c) *без условия* (2.1.20);

(f) *$A = C^{-1}AC$, $\omega + \Sigma_{\alpha+\pi/2} \subset \rho_C(A)$, $R_C(\cdot, A) : \omega + \Sigma_{\alpha+\pi/2} \to B(E)$ аналитична и $\|(\lambda - \omega)R_C(\lambda, A)\| \leqslant M_\beta$, $\lambda \in \omega + \Sigma_{\beta+\pi/2}$, для любого $\beta \in (0,\alpha)$.*

Пусть $\{\mathfrak{E}_C^{tA}\}_{t\geqslant 0}$ — C-полугруппа. Для $t > 0$ положим $(\mathfrak{E}_C^{tA})^*$ — оператор, сопряженный к $\mathfrak{E}_C^{tA}$. Ясно, что $(\mathfrak{E}_C^{tA})^* \in B(E^*)$ $(t \geqslant 0)$, $(\mathfrak{E}_C^{0A})^* = C^*$ и $(\mathfrak{E}_C^{(t+s)A})^* C^* = (\mathfrak{E}_C^{tA})^*(\mathfrak{E}_C^{sA})^*$ $(t, s \geqslant 0)$. Поэтому будем говорить, что $\{(\mathfrak{E}_C^{tA})^*\}_{t\geqslant 0}$ — полугруппа, сопряженная к $\{\mathfrak{E}_C^{tA}\}_{t\geqslant 0}$. Известно [5], что даже в случае $C = I$ сопряженная полугруппа не является сильно непрерывной на E^*. Поэтому приведем построения, аналогичные случаю C_0-полугрупп [5]. Для этого положим

$E^{\odot} = \{x^* \in E^* : (\mathfrak{E}_C^{tA})^* x^* \in C([0,\infty), E^*)\}$. Ясно, что $E^{\odot}$ есть замкнутое подпространство E^*, и $(\mathfrak{E}_C^{tA})^* : E^{\odot} \to E^{\odot}$ для $t \geqslant 0$. Для $t \geqslant 0$ обозначим через $(\mathfrak{E}_C^{tA})^{\odot}$ сужение $(\mathfrak{E}_C^{tA})^*$ на $E^{\odot}$ и положим $C^{\odot} = (\mathfrak{E}_C^{0A})^{\odot}$.

Теорема 2.1.31 (см. [252]). *Пусть $\{\mathfrak{E}_C^{tA}\}_{t\geqslant 0}$ — экспоненциально ограниченная C-полугруппа и пусть $\overline{\mathcal{R}(C)} = E$. Тогда имеют место следующие утверждения*:

(a) $\{(\mathfrak{E}_C^{tA})^{\odot}\}_{t\geqslant 0}$ *есть $C^{\odot}$-полугруппа на $E^{\odot}$ с генератором $(C^{\odot})^{-1}A^*|_{E^{\odot}}C^{\odot}$*;

(b) *если оператор A порождает экспоненциально ограниченную C-полугруппу $\mathfrak{E}_C^{tA}$ для некоторых $M > 0$ и $\omega \in \mathbb{R}$, то $(C^{\odot})^{-1}A^*|_{E^{\odot}}C^{\odot}$ порождает экспоненциально ограниченную $C^{\odot}$-полугруппу*;

(c) *если $C(D(A))$ — сердцевина оператора A, то $A^*|_{E^{\odot}} = (C^{\odot})^{-1}A^*|_{E^{\odot}}C^{\odot}$*;

(d) *если A^* плотно определен, то A^* порождает C^*-полугруппу $\{(\mathfrak{E}_C^{tA})^*\}_{t\geqslant 0}$ на E^*.*

Рассмотрим далее почти периодичность для C-групп. Мы рассматриваем именно группы, а не полугруппы, поскольку подобно [5] для C_0-полугрупп почти периодические C-полугруппы могут быть расширены до почти периодических C-групп.

Определение 2.1.32. Пусть $C_b(\mathbb{R}, E) = \{f(\cdot) \in C(\mathbb{R}, E) : f(\cdot)\,\text{ограничена}\}$. Функция $f(\cdot) \in C_b(\mathbb{R}, E)$ почти периодична, записывается $f(\cdot) \in AP(\mathbb{R}, E)$, если $\{f(\tau + \cdot) : \tau \in \mathbb{R}\}$ относительно компактно в $C_b(\mathbb{R}, E)$. C-группа $\{\mathfrak{E}_C^{tA}\}_{t\in\mathbb{R}}$ почти периодична, если $\mathfrak{E}_C^{\cdot A}x \in AP(\mathbb{R}, E)$ для любого $x \in E$. Более того, мы положим $\mathcal{E} = \operatorname{span}\{x \in D(A) : Ax = irx$ для некоторого $r \in \mathbb{R}\}$.

Теорема 2.1.33 (см. [454]). *Пусть $\{\mathfrak{E}_C^{tA}\}_{t\in\mathbb{R}}$ — C-полугруппа с генератором A и пусть $\overline{\mathcal{R}(C)} = E$. Тогда $\{\mathfrak{E}_C^{tA}\}_{t\in\mathbb{R}}$ почти периодична тогда и только тогда, когда она ограничена и $E = \overline{\mathcal{E}}$.*

Теорема 2.1.34 (см. [454]). *Предположим, что A — генератор C-группы $\{\mathfrak{E}_C^{tA}\}_{t\geqslant 0}$. Пусть $\mathcal{R}(C) = E$ и $T > 0$. Тогда функция $\{\mathfrak{E}_C^{tA}\}_{t\geqslant 0}$ T-периодична, т.е., $\mathfrak{E}_C^{(t+T)A} = \mathfrak{E}_C^{tA}$ для $t \in \mathbb{R}$ тогда и только тогда, когда $\mathbb{C} \setminus \dfrac{2\pi i}{T}\mathbb{Z} \subseteq \rho_C(A)$ и $E = \overline{\mathcal{E}}$. В этом случае следующие утверждения имеют место*:

(a) $\mathbb{C} \setminus \rho_C(A)$ *состоит только из простых полюсов функции $\lambda \to R_C(\lambda; A)$. В частности, $\mathbb{C} \setminus \rho_C(A) = P\sigma(A)$*;

(b) *если $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \dfrac{2\pi i}{T}\mathbb{Z}$, то*

$$R_C(\lambda; A)x = (1 - e^{-\lambda T})^{-1} \int_0^T e^{-\lambda s}\mathfrak{E}_C^{sA}x\,ds, \quad x \in E;$$

(c) *пусть P_k — вычет функции $R_C(\lambda, A)$ в точке $\lambda = \dfrac{2\pi i}{T}$. Тогда*

$$\mathfrak{E}_C^{tA}x = \sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{2\pi ikt/T}P_k x, \quad x \in D(A), \quad t \in \mathbb{R},$$

и

$$CAx = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{2\pi ik}{T}P_k x, \quad x \in D(A^2).$$

2.1.5. Спектральные отображения для C-полугрупп. Пусть E — банахово пространство и C — инъективный ограниченный оператор в E с плотной областью значений $\mathcal{R}(C)$ в E. Пусть A есть генератор экспоненциально ограниченной C-полугруппы $\{\mathfrak{E}_C^{tA}\}_{t\geqslant 0}$.

Для любого $t > 0$ определим $T(t)$ как замкнутый линейный оператор $T(t)x = C^{-1}\mathfrak{E}_C^{tA}x$ для любого $x \in D(T(t)) = \{x \in E : \mathfrak{E}_C^{tA}x \in \mathcal{R}(C)\}$.

Теорема 2.1.35 (см. [175]). *Для любого $t \geqslant 0$ справедливо вложение* $\exp(t\sigma(A)) \subset \sigma(T(t))$.

Теорема 2.1.36 (см. [175]). *Для любого $t \geqslant 0$ справедливы вложения*

$$\exp(tP\sigma(A)) \subset P\sigma(T(t)) \subset \exp(tP\sigma(A)) \cup \{0\}.$$

Теорема 2.1.37 (см. [175]). *Имеют место следующие утверждения.*

(i) *Пусть $t > 0$. Если $\lambda \in R\sigma(A)$ и $\mu_n = \lambda + 2\pi i n/t \notin P\sigma(A)$ для любого целого n, то $e^{\lambda t} \in R\sigma(T(t))$.*

(ii) *Пусть $t > 0$. Если $e^{\lambda t} \in R\sigma(T(t))$, то $\mu_n \notin P\sigma(A)$ для любого целого n и существует некоторое целое k такое, что $\mu_k \in R\sigma(A)$.*

(iii) *Пусть $t > 0$. Если $\lambda \in C\sigma(A)$ и $\mu_n = \lambda + 2\pi i n/t \notin P\sigma(A) \cup R\sigma(A)$ для любого целого n, то $e^{\lambda t} \in C\sigma(T(t))$.*

Замечание 2.1.38 (см. [175]). Если $e^{\lambda t} \in C\sigma(T(t))$ для любого $t \geqslant 0$, то $\lambda \notin P\sigma(A) \cup R\sigma(A)$ и $\lambda \in \rho(A) \cup C\sigma(A)$.

2.1.6. Связь C-полугрупп с абстрактной задачей Коши. В этом пункте мы рассмотрим задачу Коши (1) в E. Напомним, что функция $u(\cdot) : [0, \infty) \to E$ называется решением задачи (1), если $u(t) \in D(A)$ при $t \geqslant 0$, $u(\cdot) \in C([0, \infty); D(A)) \cap C^1((0, \infty); E)$, и уравнение (1) имеет решение. Функция $u(\cdot) \in C([0, \infty); E)$ называется слабым решением задачи (1), если $\int\limits_0^t u(s)\, ds \in D(A)$ для $t \geqslant 0$ и $u(t) = x + A \int\limits_0^t u(s)\, ds$ при $t \geqslant 0$.

Предложение 2.1.39 (см. [453]). *Пусть A — генератор экспоненциально ограниченной C-полугруппы $\mathfrak{E}_C^{tA}$ и пусть $u(t) = \mathfrak{E}_C^{tA} C^{-1} x$ при $x \in \mathcal{R}(C)$, $t \in [0, \infty)$.*

(a) *И сильное, и слабое решения задачи (1) единственны.*

(b) *Предположим, что функция $u(\cdot)$ есть слабое решение задачи (1). Если дополнительно $x \in C(D(A))$, то $u(\cdot)$ есть решение задачи (1) и $u(\cdot) \in C^1([0, \infty); E)$.*

(c) *Если $\mathfrak{E}_C^{tA}$ дифференцируема, то $u(\cdot)$ есть решение задачи (1). Если дополнительно $\mathfrak{E}_C^{tA}$ бесконечно дифференцируема, то $u(\cdot) \in C^\infty((0, \infty); E)$.*

Следующая теорема характеризует C-полугруппы через решения задачи (1).

Теорема 2.1.40 (см. [453]). *Предположим, что $\rho_C(A) \neq \varnothing$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

(a) *оператор A является генератором экспоненциально ограниченной C-полугруппы;*

(b) *$C^{-1}AC = A$ и задача (1) имеет единственное решение $u(\cdot) \in C^1([0, \infty); E)$ для любого $x \in \mathcal{R}(R_C(r, A))$, где $r \in \rho_C(A)$.*

Следствие 2.1.41 (см. [453]). *Предположим, что $\rho(A) \neq \varnothing$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

(i) *оператор A есть генератор C-полугруппы;*

(ii) *$CA \subseteq AC$ и задача (1) имеет единственное слабое решение $u(\cdot) \in C([0, \infty); E)$ для любого $x \in \mathcal{R}(C)$;*

(iii) *$CA \subseteq AC$ и задача (1) имеет единственное решение $u(\cdot) \in C^1([0, \infty); E)$ для любого $x \in C(D(A))$.*

Охарактеризуем далее экспоненциально ограниченные C-полугруппы в терминах решений задачи (1).

Теорема 2.1.42 (см. [453]). *Пусть $\omega \in \mathbb{R}$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

(i) *оператор A порождает экспоненциально ограниченную C-полугруппу;*

(ii) *для $r \in \rho_C(A) \neq \varnothing$, $C^{-1}AC = A$, и для любого $x \in \mathcal{R}(R_C(r, A))$ задача (1) имеет единственное решение $u(\cdot) \in C^1([0, \infty); E)$ такое, что $\|u(t)\|$ и $\|u'(t)\|$ имеют порядок $O(e^{\omega t})$ при $t \to \infty$.*

Подобно следствию 2.1.41 здесь также имеем следствие.

Следствие 2.1.43 (см. [453]). *Предположим, что $\rho(A) \neq \varnothing$. Тогда следующие утверждения эквивалентны*:

(i) *оператор A порождает экспоненциально ограниченную C-полугруппу*;
(ii) $CA \subseteq AC$ *и для любого* $x \in \mathcal{R}(C)$ *задача* (1) *имеет единственное слабое решение* $u(\cdot) \in C([0,\infty); E)$ *такое, что* $\|u(t)\| = O(e^{\omega t})$ *при* $t \to \infty$;
(iii) $CA \subseteq AC$ *и для любого* $x \in CD(A)$ *задача* (1) *имеет единственное решение* $u(\cdot) \in C^1([0,\infty); E)$ *такое, что* $\|u(t)\|$ *и* $\|u'(t)\|$ *имеют порядок* $O(e^{\omega t})$ *при* $t \to \infty$.

2.1.7. Возмущения C-полугрупп. Для C-полугрупп могут быть получены теоремы, отчасти аналогичные теоремам о возмущении для C_0-полугрупп. Начнем с аналога теоремы Миядеры о возмущении.

Теорема 2.1.44 (см. [253]). *Пусть A — генератор экспоненциально ограниченной C-полугруппы $\mathfrak{E}_C^{tA}$. Предположим, что B — линейный оператор в E, удовлетворяющий следующим условиям*:

(a) $D(A) \subseteq D(B)$, $B : D(A) \to C(\overline{D(A)})$ *и* $B(\lambda_0 I - A)^{-1}$ — *замкнутый оператор для некоторого* $\lambda_0 \notin P\sigma(A)$;
(b) $C^{-1}B\mathfrak{E}_C^{tA}x \in C([0,\infty); E)$ *для* $x \in D(A)$ *и* $l_\infty := \lim\limits_{\lambda\to\infty} l_\lambda < \infty$, *где*

$$l_\lambda = \sup\left\{ \int\limits_0^\infty e^{-\lambda t}\|C^{-1}B\mathfrak{E}_C^{tA}x\|dt : \, x \in D(A),\, \|x\| < 1 \right\};$$

(c) *существует такой инъективный оператор* $\hat{C} \in B(\overline{D(A)})$, *что* $\mathcal{R}(\hat{C}) \subseteq C(\overline{D(A)})$ *и* $\hat{C}(A|_{\overline{D(A)}} + \epsilon B) \subseteq (A|_{\overline{D(A)}} + \epsilon B)\hat{C}$ *для некоторого* $|\epsilon| < l_\infty^{-1}$.

Тогда $\hat{C}^{-1}(A|_{\overline{D(A)}} + \epsilon B)\hat{C}$ *порождает экспоненциально ограниченную* $\hat{C}$*-полугруппу.*

В случае, если B — замкнутый оператор, приведенная теорема допускает уточнение.

Теорема 2.1.45 (см. [453]). *Пусть A — генератор экспоненциально ограниченной C-полугруппы $\mathfrak{E}_C^{tA}$. Предположим, что B — замкнутый оператор и что он удовлетворяет следующим условиям*:

(a) $D(A) \cup \mathcal{R}(\mathfrak{E}_C^{tA}) \subseteq D(B)$ *и* $B : D(A) \cup \mathcal{R}(\mathfrak{E}_C^{tA}) \to \mathcal{R}(C)$ *для всех* $t \geqslant 0$;
(b) $C^{-1}B\mathfrak{E}_C^{tA}x \in C([0,\infty); E)$ *для* $x \in E$, *и* $l_\infty := \lim\limits_{\lambda\to\infty} l_\lambda < \infty$, *где*

$$l_\lambda = \sup\left\{ \int\limits_0^\infty e^{-\lambda t}\|C^{-1}B\mathfrak{E}_C^{tA}x\|dt : \, x \in D(A),\, \|x\| < 1 \right\};$$

(c) *существует такой инъективный оператор* $\hat{C} \in B(E)$, *что* $\mathcal{R}(\hat{C}) \subseteq \mathcal{R}(C)$ *и* $\hat{C}(A + \epsilon B) \subseteq (A + \epsilon B)\hat{C}$ *для некоторого* $|\epsilon| < l_\infty^{-1}$.

Тогда $\hat{C}^{-1}(A + \epsilon B)\hat{C}$ *порождает экспоненциально ограниченную* $\hat{C}$*-полугруппу.*

Следствие 2.1.46 (см. [453]). *Предположим, что $B \in B(E)$, оператор A порождает экспоненциально ограниченную C-полугруппу $\mathfrak{E}_C^{tA}$, и $B : \overline{D(A)} \to \mathcal{R}(C)$. Предположим, что существует такой инъективный оператор $\hat{C} \in B(E)$, что $\mathcal{R}(\hat{C}) \subseteq \mathcal{R}(C)$ и $\hat{C}(A+B) \subseteq (A+B)\hat{C}$. Тогда $\hat{C}^{-1}(A+B)\hat{C}$ порождает экспоненциально ограниченную $\hat{C}$-полугруппу.*

Условие $B : \overline{D(A)} \to \mathcal{R}(C)$ можно заменить на следующее: оператор B коммутирует с A и C.

Теорема 2.1.47 (см. [453]). *Предположим, что $B \in B(E)$, оператор A порождает экспоненциально ограниченную C-полугруппу $\mathfrak{E}_C^{tA}$ с $\|\mathfrak{E}_C^{tA}\| \leqslant Me^{\omega t}$ и $BC = CB, BA \subseteq AB$. Если $\hat{C} \in B(E)$ удовлетворяет тому же условию, что и в следствии 2.1.46, то оператор $Q = \hat{C}^{-1}(A +$

$B)\hat{C}$ *порождает экспоненциально ограниченную* $\hat{C}$*-полугруппу, допускающую оценку* $\|\mathfrak{E}_{\hat{C}}^{tQ}\| \leqslant M_1 e^{(\omega+\|B\|)t}$, *где* $\mathfrak{E}_{\hat{C}}^{tQ} = \exp(tB)\mathfrak{E}_C^{tA}C^{-1}\hat{C}$.

Рассмотрим далее возмущения экспоненциально ограниченных аналитических C-полугрупп.

Теорема 2.1.48 (см. [453]). *Пусть* A — *генератор аналитической* C*-полугруппы с углом* $0 < \alpha \leqslant \pi/2$. *Предположим, что линейный оператор* B *в* E *удовлетворяет следующим условиям*:

(a) *оператор* B *удовлетворяет условию* (a) *теоремы* 2.1.44, *и существуют такие константы* $a, b > 0$, *что*
$$\|C^{-1}Bx\| < a\|Ax\| + b\|x\| \quad \text{для любого} \quad x \in D(A); \tag{2.1.21}$$

(b) *для любого* $\beta \in (0, \alpha)$ *существует такая константа* $\omega_\beta \in \mathbb{R}$, *что* $C^{-1}BR_C(\cdot, A) : \omega_\beta + \Sigma_{\beta+\pi/2} \to B(E)$ *аналитична*;

(c) *существует инъективный оператор* $\hat{C} \in B(\overline{D(A)})$ *такой, что* $\mathcal{R}(\hat{C}) \subseteq C(\overline{D(A)})$ *и* $\hat{C}(A|_{\overline{D(A)}} + B) \subseteq (A|_{\overline{D(A)}} + B)\hat{C}$.

Тогда для любого $\beta \in (0, \alpha)$ *существует такое* $a_\beta > 0$, *что оператор* $\hat{C}^{-1}(A|_{\overline{D(A)}} + B)\hat{C}$ *порождает аналитическую* $\hat{C}$*-полугруппу с углом* β, *если условие* (2.1.21) *выполнено для* $a \in [0, a_\beta)$.

Следствие 2.1.49 (см. [453]). *Пусть* A — *генератор аналитической* C*-полугруппы с углом* $0 < \alpha \leqslant \pi/2$. *Предположим, что* $B \in B(E)$ *и* $\hat{C} \in B(E)$ *удовлетворяют тому же условию, что и в следствии* 2.1.46.

(a) *Если* $B : \overline{D(A)} \to \mathcal{R}(C)$, *то* $\hat{C}^{-1}(A+B)\hat{C}$ *порождает аналитическую* $\hat{C}$*-полугруппу с углом* β *для любого* $\beta \in (0, \alpha)$.

(b) *Если* $BC = CB$ *и* $BA \subseteq AB$, *то* $\hat{C}^{-1}(A+B)\hat{C}$ *порождает аналитическую* $\hat{C}$*-полугруппу с углом* α.

2.1.8. Представления C-полугрупп.

Теорема 2.1.50 (см. [274]). *Пусть* A — *генератор экспоненциально ограниченной* C*-полугруппы* $\mathfrak{E}_C^{\cdot A}$. *Тогда следующие утверждения имеют место*:

(a) *для любого* $x \in E$ *и* $t \geqslant 0$
$$\mathfrak{E}_C^{tA}x = \lim_{n\to\infty}\left(I - \frac{t}{n}A\right)^{-n}Cx = \lim_{\gamma\to\infty} e^{\gamma t}S_\gamma(\gamma^2 t)x,$$
где $\{S_\gamma(t)\}_{t\geqslant 0}$ — C*-полугруппа, порожденная оператором* $(\gamma I - A)^{-1}$;

(b) (*формула Фрагмена*) *для любых* $x \in E$ *и* $t \geqslant 0$
$$\mathfrak{E}_C^{tA}x = \lim_{\gamma\to\infty}\gamma\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m-1}}{(m-1)!}e^{m\gamma t}R_C(m\gamma, A)x.$$
Более того, все пределы равномерны по t *на любом конечном отрезке.*

Теорема 2.1.51 (см. [453]). (a) *Если* A *порождает* C*-полугруппу* $\mathfrak{E}_C^{\cdot A}$, *допускающую оценку* $\|\mathfrak{E}_C^{tA}\| \leqslant Me^{\omega t}$, *то для* $x \in D(A)$, $t > 0$ *и* $\sigma > \omega$ *имеет место формула*
$$\mathfrak{E}_C^{tA}x = \lim_{\gamma\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\gamma}^{\sigma+i\gamma} e^{\lambda t}R_C(\lambda, A)x\,d\lambda.$$

(b) *Если* A *порождает аналитическую* C*-полугруппу, допускающую оценку* $\|\mathfrak{E}_C^{tA}\| \leqslant Me^{\omega t}$ *в угле* α, *то*
$$\mathfrak{E}_C^{tA} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma e^{\lambda t}R_C(\lambda, A)\,d\lambda, \quad t > 0,$$

где Γ — *путь, состоящий из границы области* $\{\lambda \in \omega + \overline{\Sigma}_\beta : |\lambda - \omega| \geqslant 1\}$ *и части лучей от* $\omega + \infty e^{-i\beta}$ *к* $\omega + \infty e^{i\beta}$ *с* $\pi/2 \leqslant \beta < \alpha + \pi/2$.

Более того, оба предела равномерны по $t \in [1/a, a]$, $a > 1$.

Теорема 2.1.52 (см. [453]). *Пусть* A — *генератор* C*-полугруппы, допускающей оценку* $\|\mathfrak{E}_C^{tA}\| \leqslant Me^{\omega t}$, *и пусть* $\{F(r)\}_{r\geqslant 0}$ — *семейство линейных операторов в* E *с* $F(0) = I$, *удовлетворяющее следующим условиям*:

(a) *существуют такие инъективные операторы* $C_r \in B(E)$ *для любого* $r \geqslant 0$, *что* $C_r x \to Cx$ *при* $r \to 0$ *для* $x \in E$;

(b) $C_r F(r) \subseteq F(r) C_r$ *для* $r \geqslant 0$ *и существуют такие константы* $M > 0$ *и* $\omega \in \mathbb{R}$, *что* $\mathcal{R}(C_r) \subseteq D(F(r)^k)$ *и* $\|F(r)^k C_r\| \leqslant Me^{\omega r k}$ *для* $r \geqslant 0$ *и* $k \in \mathbb{N}_0$;

(c) *существует подмножество* D *области определения* $D(A)$ *такое, что* $C(D) \subseteq \overline{(\lambda I - A)(D)}$ *для* $\lambda > \omega$ *и для любого* $x \in D$ *существуют* $x_r \in D(F(r))$ *такие, что* $x_r \to x$ *и* $(F(r)x_r - x_r)/r \to Ax$ *при* $r \to 0$.

Тогда для $x \in \overline{C(D)}$,

$$\mathfrak{E}_C^{tA} x = \lim_{n\to\infty} F\left(\frac{t}{n}\right)^n C_{1/n} x \tag{2.1.22}$$

равномерно по t *на любом конечном интервале из* $[0, \infty)$.

Полагая $D = C(D(A))$ в теореме 2.1.52, получаем следствие.

Следствие 2.1.53. *Предположим, что выполнены условия теоремы* 2.1.52, *кроме условия* (c), *которое заменено на*

(c′) $(F(r)x - x)/r \to Ax$ *при* $r \to 0$ *для* $x \in C(D(A))$.

Тогда для любого $x \in \overline{C^2(D(A))}$ *равенство* (2.1.22) *выполняется равномерно по* t *на любом конечном интервале из* $[0, \infty)$.

Теорема 2.1.54 (см. [453]). *Пусть* $\{F(r)\}_{r\geqslant 0}$ — *семейство линейных операторов в* E, *удовлетворяющее условию* $F(0) = I$, *и пусть* C — *инъективный оператор в* $B(E)$ *с плотной областью значений. Предположим, что условия* (a) *и* (b) *из теоремы* 2.1.52 *и следующее условие* (c″) *выполнены.*

(c″) *Существует плотно определенный линейный оператор в* E *такой, что* $CA \subseteq AC, \overline{\mathcal{R}(\lambda_0 I - A)} = E$ *для некоторого* λ_0 *с* $\operatorname{Re}\lambda_0 > \omega$, *и для любого* $x \in D(A)$ *существует такое* $x_r \in D(F(r))$, *что* $x_r \to x$ *и* $(F(r)x_r - x_r)/r \to Ax$ *при* $r \to 0$.

Тогда A *допускает замыкание и* $C^{-1}\bar{A}C$ *порождает экспоненциально ограниченную* C*-полугруппу. Более того, соотношение* (2.1.22) *выполнено для* $\mathfrak{E}_C^{tC^{-1}\bar{A}C}$ *вместо* $\mathfrak{E}_C^{tA}$ *для любого* $x \in E$ *равномерно по* t *на любом ограниченном отрезке из* $[0, \infty)$.

Следствие 2.1.55 (см. [453]). *Предположим, что выполнены следующие условия*:

(a) *оператор* A_j *порождает* $\mathfrak{E}_{C_j}^{\cdot A_j}$ *и* $\overline{\mathcal{R}(C_j)} = \overline{D(A_1) \cap D(A_2)} = E$ *для* $j = 1, 2$;

(b) $\mathfrak{E}_{C_1}^{tA_1} C_2 = C_2 \mathfrak{E}_{C_1}^{tA_1}$ *и* $\mathfrak{E}_{C_2}^{tA_2} C_1 = C_1 \mathfrak{E}_{C_2}^{tA_2}$ *для* $t \geqslant 0$;

(c) *существуют такие константы* $M > 0$, $\omega \in \mathbb{R}$, *что* $\mathcal{R}(C_1C_2) \subseteq D((C_1^{-1}\mathfrak{E}_{C_1}^{tA_1} C_2^{-1}\mathfrak{E}_{C_2}^{tA_2})^k)$ *и*

$$\|(C_1^{-1}\mathfrak{E}_{C_1}^{tA_1} C_2^{-1}\mathfrak{E}_{C_2}^{tA_2})^k C_1C_2\| \leqslant Me^{\omega kt}, \quad t \geqslant 0, \quad k \in \mathbb{N}_0;$$

(d) $\overline{\mathcal{R}(\lambda_0 I - A)} = E$ *для некоторого* λ_0 *с* $\operatorname{Re}\lambda_0 \geqslant \omega$, *где* $A = (A_1 + A_2)|_{C_1C_2D(A_1+A_2)}$.

Тогда $C_2^{-1}C_1^{-1}AC_1C_2$ *порождает* C_1C_2*-полугруппу* $T(\cdot)$, *где*

$$T(t)x = \lim_{n\to\infty} (C_1^{-1}\mathfrak{E}_{C_1}^{(t/n)A_1} C_2^{-1}\mathfrak{E}_{C_2}^{(t/n)A_2})^n C_1C_2 x$$

равномерно по t *из любого конечного отрезка, входящего в* $[0, \infty)$.

Следствие 2.1.56. *Пусть* A_j — *генератор* C_j*-полугруппы* $\mathfrak{E}_{C_j}^{\cdot A_j}$ *для* $j = 1, 2$ *и пусть* $\mathfrak{E}_{C_1}^{tA_1}\mathfrak{E}_{C_2}^{tA_2} = \mathfrak{E}_{C_2}^{tA_2}\mathfrak{E}_{C_1}^{tA_1}$ *при* $t \geqslant 0$. *Тогда* $\{\mathfrak{E}_{C_1}^{tA_1}\mathfrak{E}_{C_2}^{tA_2}\}_{t\geqslant 0}$ *есть* C_1C_2*-полугруппа, порожденная расширением оператора* $A_1 + A_2$.

2.1.9. C-косинус оператор-функции. Многие результаты для C-полугрупп допускают аналоги и для косинус оператор-функций. Отметим также книгу [218], где можно найти формулировки «дробных результатов».

Определение 2.1.57. Сильно непрерывное семейство операторов $C(\cdot) : [0, \infty) \to B(E)$ называется C-косинус оператор-функцией, если оператор $C = C(0)$ инъективен и

$$2C(t)C(s) = C(t+s)C + C(|t-s|)C, \quad t, s \geqslant 0. \tag{2.1.23}$$

Генератор A определяется как

$$Ax = C^{-1} \lim_{t \downarrow 0} 2t^{-2}(C(t)x - Cx)$$

с максимальной областью определения в E.

Ассоциированная C-синус оператор-функция $\{S(t)\}_{t \geqslant 0}$ задается формулой $S(t)x = \int\limits_0^t C(s)x\,ds$ для любого $x \in E$ и $t \geqslant 0$. Будем говорить, что $\{C(t)\}_{t \geqslant 0}$ экспоненциально ограничена, если $\|C(t)\| \leqslant Me^{\omega t}$ с некоторыми константами $M, \omega \geqslant 0$.

Если подобно тому, как делалось в C_0-теории, продолжить $\{C(t)\}$, $t \geqslant 0$, на $\mathbb{R}$, положив $C(t) := C(-t)$ для $t < 0$, то характеристическое уравнение косинуса в определении 2.1.57 эквивалентно

$$2C(t)C(s) = C(t+s)C + C(t-s)C, \quad t, s \in \mathbb{R},$$

и его генератор A также может быть определен равенством

$$Ax = C^{-1} \lim_{t \to 0} 2t^{-2}(C(t)x - Cx)$$

с максимальной областью определения в E.

Обозначим такую C-косинус оператор-функцию через $C(t, A)$, $t \geqslant 0$. В этом случае $S(-t, A) = -S(t, A)$ для $t \in \mathbb{R}$. Определим также $C(t, A) = C(-t, A)$ при $t < 0$.

Теорема 2.1.58 (см. [233]). *Пусть A — генератор C-косинус оператор-функции $\{C(t, A)\}_{t \geqslant 0}$. Тогда справедливы следующие утверждения*:

(a) $C(t, A)$, $C(s, A)$, $S(t, A)$ *и* $S(s, A)$ *коммутируют при* $t, s \geqslant 0$;

(b) *если* $f(\cdot) \in C^1([0, \infty); E)$, *то* $\int\limits_0^t S(s, A)f(s)ds \in D(A)$ *и*

$$A \int\limits_0^t S(s, A)f(s)\,ds = C(t, A)f(t) - Cf(0) - \int\limits_0^t C(s, A)f'(s)\,ds, \quad t > 0.$$

В частности,

$$A \int\limits_0^t S(s)x\,ds = C(t)x - Cx, \quad x \in E, \quad t \geqslant 0;$$

(c) *для* $x \in D(A)$ *и* $t \geqslant 0$ *имеем* $C(t, A)x \in D(A)$ *и* $C''(t, A)x = AC(t, A)x = C(t, A)Ax$.
Следовательно,

$$C(t, A)x - Cx = \int\limits_0^t S(s, A)Ax\,ds, \quad x \in D(A), \quad t \geqslant 0;$$

(d) $D(A) = \Big\{x \in E :$ *существует такое* $y \in E$, *что* $C(t, A)x - Cx = \int\limits_0^t S(s, A)y\,ds$ *для* $t \geqslant 0$ *с* $Ax = y\Big\}$;

(e) *оператор A замкнут, $\mathcal{R}(C) \subseteq \overline{D(A)}$ и $A = C^{-1}AC$;*
(f) *$\{C(t,A)\}_{t\geqslant 0}$ — единственная C-косинус оператор-функция, порожденная оператором A.*

Теорема 2.1.59 (см. [453]). *Пусть $M, \omega \geqslant 0$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*
(a) *оператор A порождает экспоненциально ограниченную C-косинус оператор-функцию $\{C(t,A)\}_{t\geqslant 0}$, удовлетворяющую условию $\|C(t,A)\| \geqslant Me^{\omega t}$, $t \geqslant 0$;*
(b) *$A = C^{-1}AC$, $(\omega^2, \infty) \subset \rho_C(A)$ и существует сильно непрерывное семейство $\tilde{C}(\cdot) : [0,\infty) \to B(E)$, удовлетворяющее условию $\|\tilde{C}(t)\| \leqslant Me^{\omega t}$ при $t \geqslant 0$, такое, что*

$$\lambda R_C(\lambda^2; A)x = \int\limits_0^\infty e^{-\lambda t}\tilde{C}(t)x\,dt, \quad \lambda > \omega, \quad x \in E.$$

Если, дополнительно, $D(A)$ плотно в E, то условие (a) *эквивалентно*
(c) *$A = C^{-1}AC$, $(\omega^2, \infty) \subseteq \rho_C(A)$ и*

$$\|(\lambda R_C(\lambda^2; A))^{(n)}\| \leqslant Mn!(\lambda - \omega)^{-n-1}, \quad \lambda > \omega, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Теорема 2.1.60 (см. [233]). (a) *Пусть A — генератор экспоненциально ограниченной C-косинус оператор-функции $\{C(t,A)\}_{t\geqslant 0}$, удовлетворяющей оценке $\|C(t,A)\| \leqslant Me^{\omega t}$, $t \geqslant 0$. Тогда A порождает C-полугруппу, удовлетворяющую оценке $\|\mathfrak{E}_C^{tA}\| \leqslant 2Me^{\omega^2 t}$, $t \geqslant 0$, и*

$$\mathfrak{E}_C^{tA}x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^\infty e^{-s^2} C(2s\sqrt{t}, A)x\,ds, \quad t \geqslant 0, \quad x \in E.$$

(b) *Пусть A — генератор экспоненциально ограниченной C-группы $\{T(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$. Тогда расширение оператора A^2 порождает C-косинус оператор-функцию $\{C(t)\}_{t\geqslant 0}$, где $C(t) = \dfrac{1}{2}(T(t)+T(-t))$ при $t \geqslant 0$.*

2.2. Локальные C-полугруппы и C-косинус оператор-функции

В [405] приведена теория локальных C-полугрупп и локальных n раз проинтегрированных полугрупп.

2.2.1. Теория локальных C-полугрупп. Теория C-полугрупп была развита в работах [145, 242, 248, 267, 404]. Здесь мы рассмотрим локальные семейства операторов. Пусть C — ограниченный линейный оператор в банаховом пространстве E, т.е., $C \in B(E)$, и положим $T > 0$.

Определение 2.2.1. Семейство ограниченных операторов $\{\mathcal{S}(t),\ 0 \leqslant t < T\}$ называется *локальной C-полугруппой* в E, если
(i) $\mathcal{S}(t+s)C = \mathcal{S}(t)\mathcal{S}(s)$ для $t, s, t+s \in [0,T)$;
(ii) $\mathcal{S}(0) = C$;
(iii) семейство $\mathcal{S}(\cdot)$ сильно непрерывно на $[0,T)$.

Ясно, что $\mathcal{S}(\cdot)$ — коммутативное семейство. Локальная C-полугруппа называется невырожденной, если $\mathcal{S}(t)x = 0$ для всех $t \in (0,T)$ влечет $x = 0$. Из определения 2.2.1 следует, что локальная C-полугруппа невырождена, если C инъективен, т.е., если $\mathcal{N}(C) = \{0\}$.

Везде далее будем рассматривать только случай, когда $C \in B(E)$ — инъективный оператор.

Определение 2.2.2. Генератор $\{\mathcal{S}(t),\ 0 \leqslant t < T\}$ определяется как предел

$$-Gx := C^{-1} \lim_{h\to 0+} \frac{1}{h}\,(\mathcal{S}(h)x - Cx), \quad x \in D(G), \qquad (2.2.1)$$

с естественной областью определения

$$D(G) := \left\{ x \in E : \lim_{h\to 0+} \frac{1}{h}(\mathcal{S}(h)x - Cx) \quad \text{существует в } E \text{ и принадлежит } R(C) \right\}.$$

Предложение 2.2.3 (см. [371]). *Оператор G замкнут, $R(C) \subseteq \overline{D(G)}$ и $C^{-1}GC = G$.*

Обозначим C-полугруппу $\mathcal{S}(\cdot)$ с генератором $-G$ через $\mathcal{S}(\cdot G)$. Далее, пусть $\tau \in (0,T)$. Положим

$$L_\tau(\lambda)x := \int_0^\tau e^{-\lambda t}\mathcal{S}(tG)x\,dt, \quad x \in E, \quad \lambda > 0. \tag{2.2.2}$$

Это — так называемое *локальное преобразование Лапласа* семейства $\mathcal{S}(\cdot G)$.

Предложение 2.2.4 (см. [405]). *Пусть $\mathcal{S}(\cdot G)$ — локальная C-полугруппа и $L_\tau(\cdot)$ — локальное преобразование Лапласа от $\mathcal{S}(\cdot G)$. Тогда для любого $x \in E$ вектор $L_\tau(\lambda)x$ принадлежит $D(G)$ и*

$$(\lambda + G)L_\tau(\lambda)x = Cx - e^{-\lambda\tau}\mathcal{S}(\tau G)x \quad \text{для всех} \quad \tau \in [0,T) \quad \text{и} \quad \lambda > 0. \tag{2.2.3}$$

В общем случае преобразование Лапласа от локальной C-полугруппы и C-резольвента ее генератора не всегда существуют и мы нуждаемся в идее асимптотической C-резольвенты из [95, 405, 371]. Понятие асимптотического резольвентного семейства впервые было введено Ouchi в [343].

Рассмотрим далее следующую абстрактную задачу Коши $(ACP;-A,T,y)$ на $[0,T)$:

$$u'(t) = -Au(t), \quad t \in [0,T), \quad u(0) = y. \tag{2.2.4}$$

Функция $u(\cdot)$ называется решением задачи $(ACP;-A,T,y)$, если $u(\cdot)$ непрерывно дифференцируема по $t \in [0,T)$, $u(t) \in D(A)$ для всех $0 \leqslant t < T$ и $u(\cdot)$ удовлетворяет задаче $(ACP;-A,T,y)$. Обозначим $(ACP;-A,T,y)$ с $y \in CD(A)$ также через $(ACP;-A,T,CD(A))$. Типичный случай приложения задачи $(ACP;-A,T,y)$ в (2.2.4), который мы будем иметь в виду, — это случай, когда оператор A порождает аналитическую C_0-полугруппу.

Определение 2.2.5. Пусть A — замкнутый линейный оператор в E, $a \in \mathbb{R}$, $\tau \in (0,T)$. Семейство операторов $\{L_\tau(\lambda), \lambda > a\} \subseteq B(E)$ называется *асимптотической C-резольвентой оператора* $-A$, если выполнены следующие условия:

(i) $L_\tau(\cdot)x \in C^\infty((a,\infty);E)$ для любого $x \in E$;

(ii) $L_\tau(\lambda)L_\tau(\mu) = L_\tau(\mu)L_\tau(\lambda)$ для $\lambda, \mu > a$;

(iii) $L_\tau(\lambda)x \in D(A)$ при всех $x \in E$ и

$$(\lambda + A)L_\tau(\lambda)x = Cx + V_\tau(\lambda)x, \tag{2.2.5}$$

где $V_\tau(\cdot) \in C^\infty((a,\infty);E)$, и существует такое $M_\tau > 0$, что

$$\left\|\frac{d^m}{d\lambda^m}V_\tau(\lambda)x\right\| \leqslant M_\tau\tau^m e^{-\lambda\tau}\|x\|, \quad m \in \mathbb{N}\cup\{0\}, \quad \lambda > a; \tag{2.2.6}$$

(iv) $AL_\tau(\lambda)x = L_\tau(\lambda)Ax$ при всех $x \in D(A)$.

Теорема 2.2.6 (см. [371]). *Пусть A — замкнутый линейный оператор в E и пусть оператор $C \in B(E)$ инъективен.*

(i) *Если A — генератор локальной C-полугруппы $\{S(t), 0 \leqslant t < T\}$ в E, то существует асимтотическая C-резольвента $L_\tau(\lambda)$ оператора $-A$ такая, что*

$$\left\|\frac{d^m}{d\lambda^m}L_\tau(\lambda)x\right\| \leqslant M_\tau\,\frac{m!}{\lambda^{m+1}}\,\|x\|, \quad x \in E, \tag{2.2.7}$$

где $0 \leqslant m/\lambda \leqslant \tau$, $\lambda > a$, $m \in \mathbb{N}\cup\{0\}$, и оператор A удовлетворяет равенству $C^{-1}AC = A$.

(ii) *Если оператор $-A$ имеет асимптотическую C-резольвенту, удовлетворяющую условию (2.2.7) и $CD(A)$ плотно в $D(A)$, $D(C^{-1}AC) \subset D(A)$, т.е., $Cx \in D(A)$ и $ACx \in R(C)$ влечет $x \in D(A)$, то часть A_0 оператора A в $E_0 := \overline{D(A)}$ порождает локальную C-полугруппу в E_0, где C равно $C_0 := C|E_0$.*

В частности, в предположении, что $\overline{CD(A)} = E$, оператор $-A$ порождает локальную C-полугруппу в E тогда и только тогда, когда $C^{-1}AC = A$ и существует асимптотическая C-резольвента, удовлетворяющая (2.2.7). В этом случае оператор A имеет плотную область определения.

Отметим, что подобная версия теоремы о порождении, использующая иное определение генератора (который не обязательно замкнут) и предположение, что C имеет плотную область определения, приведена в [405].

Определение 2.2.7. Говорят, что задача Коши $(ACP; -A, T, CD(A))$ корректна, если для любого $y \in CD(A)$ существует единственное решение $u(\cdot; y)$ задачи $(ACP; -A, T, y)$, такое что $\|u(t; y)\| \leqslant M(t)\|C^{-1}y\|$ для $0 \leqslant t < T$ и $y \in CD(A)$, где функция $M(t)$ ограничена на любом компакте, входящем в $[0, T)$.

Мы должны подчеркнуть здесь тот факт, что корректность в смысле определения 2.2.7 — более общее понятие, чем корректность в смысле (10). В каком-то смысле мы можем сказать, что эта корректность есть условие разрешимости задачи (2.2.4), если существует регуляризатор (см. § 3).

Теорема 2.2.8 (см. [371]). *Пусть C — линейная ограниченная инъекция в E и A — замкнутый линейный оператор. Тогда следующие условия эквивалентны*:

(i) *оператор $-A$ есть генератор локальной C-полугруппы*;

(ii) $C^{-1}AC = A$ *и задача* $v'(t) = -Av(t) + Cx$, $t \in [0, T)$, $v(0) = 0$, *имеет единственное решение при любом* $x \in E$.

Если $\rho(A) \neq \varnothing$ или A имеет плотную область определения, то (i) *и* (ii) *также эквивалентны условию*

(iii) $C^{-1}AC = A$ *и задача* $\Big(ACP; -A, T, CD(A)\Big)$ *корректна.*

Более того, $u(t; y) = C^{-1}\mathcal{S}(tA)y$, $t \in [0, T)$, *есть единственное решение задачи* (2.2.4) *с любыми начальными данными* $y \in CD(A)$.

Определение 2.2.9. Предположим, что A замкнут, $C \in B(E)$ инъективен и $T > 0$. Сильно непрерывное семейство $\{W(t) : 0 \leqslant t \leqslant T\}$ ограниченных операторов есть локальная слабая C-полугруппа с генератором A, если (см. предложение 2.1.3 (2.1.15))

(i) $\displaystyle\int_0^t W(s)x\,ds \in D(A)$ и отображение $t \to A\displaystyle\int_0^t W(s)x\,ds$ непрерывно на $[0, T]$ для всех $x \in E$;

(ii) $A\displaystyle\int_0^t W(s)x\,ds = W(t)x - Cx$ для всех $x \in E, t \in [0, T]$.

Определим семейство

$$W_k(t) = \begin{cases} W_{k-1}(t)C & \text{для любого} \quad 0 \leqslant t \leqslant (k-1)T, \\ W_1(t - (k-1)T) + W_{k-1}((k-1)T) & \text{для любого} \quad (k-1)T \leqslant t \leqslant kT, \end{cases} \tag{2.2.8}$$

где $W_1(t) = W(t)$ для любого $0 \leqslant t \leqslant T$.

Теорема 2.2.10 (см. [427]). *Предположим, что A замкнут, $C \in B(E)$ инъективен и $\{W(t)\}_{0\leqslant t\leqslant T}$ — локальная C-полугруппа. Тогда выполнены следующие условия*:

(i) $\{W_k(t)\}_{0\leqslant t\leqslant kT}$ *есть локальная C^k-полугруппа при любом* $k \in \mathbb{N}$;

(ii) *если* $\{W(t)\}_{0\leqslant t\leqslant T}$ *имеет генератор A, то* $\{W_k(t)\}_{0\leqslant t\leqslant kT}$ *при любом* $k \in \mathbb{N}$ *также имеет генератор A.*

Под слабым решением задачи $(ACP; A, kT, x)$ будем понимать функцию $u_k(\cdot) \in C([0, kT]; E)$ такую, что $v_k(t) = \displaystyle\int_0^t u_k(s)\,ds \in D(A)$ для всех $t \in [0, kT]$ и $\dfrac{d}{dt}v_k(t) = Av_k(t) + x$, $t \in [0, kT]$).

Задачу $(ACP; A, kT, x)$ назовем C^k-корректной, если она имеет единственное слабое решение $u_k(\cdot) \in C([0, kT]; E)$ при любом $x \in \mathcal{R}(C^k)$.

Следствие 2.2.11 (см. [427]). *Предположим, что оператор A замкнут и $CA \subseteq AC$. Тогда следующие условия эквивалентны*:

(a) *задача* $(ACP; A, T, x)$ C*-корректна*;
(b) *существует локальная* C*-полугруппа* $\{W(t)\}_{0\leqslant t\leqslant T}$ *с генератором* A;
(c) *задача* $(ACP; A, kT, x)$ C^k*-корректна при любом* $k \in \mathbb{N}$;
(d) *существует локальная* C^k*-полугруппа* $\{W_n(t)\}_{t\in[0,kT]}$ *с генератором* A *для любого* $k \in \mathbb{N}$.

Следствие 2.2.12 (см. [427]). *Предположим, что оператор* A *замкнут,* $C \in B(E)$ *инъективен и* $\{W(t)\}_{0\leqslant t\leqslant T}$ *—ъ локальная* C*-полугруппа. Тогда следующие условия эквивалентны*:
(a) *семейство* $\{W(t)\}_{0\leqslant t\leqslant T}$ *может быть продолжено до* C*-полугруппы во всем пространстве*;
(b) *для любого* $k \in \mathbb{N}$ $\mathcal{R}\Big(W(t)(W(T))^{k-1}\Big) \subseteq \mathcal{R}(C^{k-1})$ *и семейство* $C^{-(k-1)}W(t)(W(T))^{k-1}$ *сильно непрерывно по* $t \in [0, T]$;
(c) *для любого* $k \in \mathbb{N}$ $\mathcal{R}((W_k(t)) \subseteq \mathcal{R}(C^{k-1})$ *и семейство* $C^{-(k-1)}W_k(t)$ *сильно непрерывно при* $t \in [0, kT]$.

Если одно из эквивалентных условий (a), (b) *или* (c) *выполнено, обозначим глобальное расширение семейства* $\{W(t)\}_{0\leqslant t\leqslant T}$ *через* $\{W_0(t)\}_{0\leqslant t\leqslant\infty}$*. Если* $\{W(t)\}_{0\leqslant t\leqslant T}$ *имеет генератор* A*, то семейство* $\{W_0(t)\}_{0\leqslant t\leqslant\infty}$ *также имеет генератор* A.

Следствие 2.2.13 (см. [427]). *Предположим, что* A *замкнут,* $\rho(A)$ *непусто,* $r \in \rho(A)$ *и* $k \in \mathbb{N}$*. Тогда следующие условия эквивалентны*:
(a) *задача* $(ACP; A, T, x)$ $(A - rI)^{-k}$*-корректна*;
(b) *существует локальная* $(A - rI)^{-k}$*-полугруппа, порожденная оператором* A;
(c) *задача* $(ACP; A, nT, x)$ $(A - rI)^{-nk}$*-корректна для любого* $n \in \mathbb{N}$;
(d) *существует локальная* $(A - rI)^{-nk}$*-полугруппа, порожденная оператором* A *для любого* $n \in \mathbb{N}$.

2.2.2. Локальные α раз проинтегрированные C-полугруппы. Определим $j_r(t) := t^r/(\Gamma(r + 1))$, $t = 0$, где $\Gamma(\cdot)$ — гамма-функция.

Определение 2.2.14 (см. [270]). Сильно непрерывное семейство $\{T(t) : 0 \leqslant t < T\} \subset B(E)$ называется локальной α раз $(\alpha \neq 0)$ проинтегрированной C-полугруппой в E, если оно удовлетворяет условию $T(t)C = CT(t)$ при любом $0 \leqslant t < T$, $T(0) = 0$ и выполнено равенство

$$T(s)T(t)x = C\int_0^{s+t} - \int_0^{s} - \int_0^{t} j_{\alpha-1}(s + t - r)CT(r)\,dr =$$

$$= \int_0^{s} \Big(j_{\alpha-1}(r)CT(s + t - r) - j_{\alpha-1}CT(r)\Big)x\,dr$$

для всех $x \in E$, $0 \leqslant s, t \leqslant s + t < T$. Если $T = \infty$, то локальная α раз проинтегрированная C-полугруппа называется α раз проинтегрированной C-полугруппой. Если $C = I$ — единичный оператор, то $T(\cdot)$ называется α раз проинтегрированной полугруппой. Будем говорить, что $\{T(t) : 0 \leqslant t < T\}$ есть локальная (0 раз проинтегрированная) C-полугруппа, если $T(0) = C$ и

$$T(t)T(s) = T(s + t)C, \quad 0 \leqslant t, s \leqslant s + t < T.$$

Пусть $T(\cdot) : [0, T) \to B(E)$ — сильно непрерывная функция. Рассмотрим свойства таких линейных операторов G, удовлетворяющих условию $\mathcal{R}(S(t)) \subset D(G)$, где $S(t) := \int_0^t T(s)\,ds$, и $S(t)G \subset GS(t) = T(t)x - j_\alpha(t)C$, т.е., выполнены следующие условия:
(i) $T(t)x - j_\alpha(t)Cx = S(t)Gx$ для $x \in D(G)$, $0 \leqslant t < T$;
(ii) $\mathcal{R}(S(t)) \subset D(G)$, $T(t)x - j_\alpha(t)Cx = GS(t)x$ для $x \in E$, $0 \leqslant t < T$.

Такой оператор G будем называть (C, α)-субгенератором $T(\cdot)$. Для заданной локальной α раз проинтегрированной C-полугруппы (C, α)-субгенератор может существовать или не существовать, а также может определяться неоднозначно. Если существует (C, α)-субгенератор, который является расширением всех (C,α)-субгенераторов семейства $T(\cdot)$, то будем называть такой максимальный (C,α)-субгенератор (C,α)-генератором $T(\cdot)$. Как мы увидим в следующей теореме, если C инъективен и если существует замкнутый (C,α)-субгенератор G семейства $T(\cdot)$, то $T(\cdot)$ есть α раз проинтегрированная C-полугруппа и $A = C^{-1}GC$ — ее (C,α)-генератор. (C,α)-субгенератор и (C,α)-генератор локальной α раз проинтегрированной C-полугруппы будем называть просто субгенератором и генератором соответственно.

Теорема 2.2.15 (см. [270]). *Пусть $C \in B(E)$ инъективен и пусть $T(\cdot) : [0,T) \to B(E)$ — сильно непрерывная функция с замкнутым (C,α)-субгенератором G. Тогда следующие свойства имеют место*:

(a) $CT(t) = T(t)C$ *для всех* $0 \leqslant t < T$ *(или, эквивалентно,* $CS(t) = S(t)C$ *для всех* $0 \leqslant t < T$*), т.е.* $T(\cdot)$ *есть локальная* α *раз проинтегрированная* C*-полугруппа*;
(b) $T(t)T(s) = T(s)T(t)$ *для всех* $0 \leqslant s,t < T$;
(c) $CG \subset GC$ *и* $C^{-1}GC$ *есть генератор* $T(\cdot)$.

Предложение 2.2.16 (см. [270]). *Пусть $T(\cdot)$ — локальная α раз проинтегрированная C-полугруппа.*

(i) *Если $T(\cdot)$ имеет субгенератор, то $T(\cdot)$ имеет максимальный субгенератор, который содержит все субгенераторы $T(\cdot)$, и называется генератором семейства $T(\cdot)$.*

(ii) *Если $T(\cdot)$ невырождено, то $T(\cdot)$ имеет генератор.*

(iii) *Предположим, что $T(\cdot)$ невырождено. Любой субгенератор G допускает замыкание, это замыкание $\overline{G}$ также является субгенератором $T(\cdot)$, и $A := C^{-1}\overline{G}C$ — генератор $T(\cdot)$.*

Теорема 2.2.17 (см. [270]). *Пусть $C \in B(E)$ инъективен и $\alpha \geqslant 0$, и пусть A — замкнутый линейный оператор в E. Тогда следующие утверждения эквивалентны*:

(i) A *есть субгенератор локально* α *раз проинтегрированной* C*-полугруппы* $T(\cdot)$;
(ii) $CA \subset AC$ *(т.е.,* $Cx \in D(A)$ *и* $CAx = ACx$ *при* $x \in D(A)$*) и уравнение* $v(t) = A(1 * v)(t) + j_\alpha(t)Cx$, $0 \leqslant t < T$, *имеет единственное решение* v_x *для любого* $x \in E$;
(iii) $CA \subset AC$ *и уравнение* $u'(t) = Au(t) + j_\alpha(t)Cx$, $0 \leqslant t < T$; $u(0) = 0$, *имеет единственное решение* u_x *для любого* $x \in E$.

Более того, указанные решения представляются в виде $v_x = T(\cdot)x$ *и* $u_x(t) = \int\limits_0^t T(s)x\,ds$, $t \geqslant 0$.

Теорема 2.2.18 (см. [270]). *Пусть $T(\cdot)$ — локальная α раз проинтегрированная C-полугруппа на полуинтервале $[0,T)$ с генератором A. Для любого $T_0 \in (0,T)$ функция $\mathcal{T}_0(\cdot)$,*

$$\mathcal{T}_0(\cdot) = \begin{cases} (j_{n-1} * T)(t)C \quad \text{для} \quad 0 \leqslant t \leqslant T_0, \\ T(T_0)\,H(t-T_0) + \sum j_{\alpha-k-1}(T_0)(j_k * H)(t-T_0)C + \\ + \sum\limits_{k=0}^{n-1} j_{\alpha-k-1}(t-T_0)(j_k * T)(T_0)C \quad \text{для} \quad T_0 \leqslant t \leqslant 2T_0, \end{cases} \tag{2.2.9}$$

есть локальная $(\alpha+n)$ раз проинтегрированная C^2-полугруппа на отрезке $[0,2T_0)$ с генератором A. Поэтому функция $\mathcal{T}(\cdot) : [0,2T) \to B(E)$, определенная равенством $\mathcal{T}(t) := \mathcal{T}_0(t)$ для $0 \leqslant t < 2T_0 < 2T$, есть локальная $(\alpha+n)$ раз проинтегрированная C^2-полугруппа на отрезке $[0,2T)$ с генератором A.

В соотношении (2.2.9), $H(t) := (j_{n-\alpha-1} * T)(t)$, $T > t \geqslant 0$, и k в первой сумме принимает неотрицательные целые значения такие, что $k-\alpha$ не являются неотрицательными целыми, т.е. k изменяется от 0 до $\alpha-1$, где α — целое, и принимает все неотрицательные целые значения, если α не является целым.

Замечание 2.2.19. Авторы [267] привели ряд примеров, показывающих, что для любого $N \geqslant 0$ существует N раз проинтегрированная C-полугруппа ($C \neq I$), генератор которой не порождает $(N-1)$ раз проинтегрированную C-полугруппу.

2.2.3. Локальная C-косинус теория. Пусть $C \in B(E)$ — такой инъективный оператор, что $R(C)$ плотно в E, т.е., $\overline{R(C)} = E$.

Определение 2.2.20. Семейство ограниченных операторов $\{\mathfrak{C}(t) : |t| < T\}$ называется *локальным C-косинус семейством* в E, если

(i) $\Big(\mathfrak{C}(t+s) + \mathfrak{C}(t-s)\Big)C = 2\mathfrak{C}(t)\mathfrak{C}(s)$ для любых $t, s, t \pm s \in (-T, T)$;
(ii) $\mathfrak{C}(0) = C$;
(iii) $\mathfrak{C}(\cdot)$ сильно непрерывно на $(-T, T)$.

Напомним, что локальное C-косинус семейство называют *невырожденным*, если из условия $\mathfrak{C}(t)x = 0$ для всех $t \in (0, T)$ следует $x = 0$.

Предложение 2.2.21. *Локальное C-косинус семейство невырождено тогда и только тогда, когда C инъективен.*

Доказательство. Пусть C инъективен. Тогда из того, что $\mathfrak{C}(t)x = 0$ для всех $t \in (-T, T)$, следует, что $\mathfrak{C}(t)x \to Cx = 0$ при $t \to 0$. Это означает, что $x = 0$.

Обратно, предположим, что $C\bar{x} = 0$ для некоторого $\bar{x} \neq 0$. Тогда из условия (i) определения 2.2.20 получаем, что $\mathfrak{C}(t)\mathfrak{C}(s)\bar{x} = 0$ при любом $t \in (0, T)$ и любом s. Таким образом, из условия невырожденности следует, во-первых, что $\mathfrak{C}(s)\bar{x} = 0$ для некоторого $s \in (0, T)$, и, во-вторых, что $\bar{x} = 0$. Это противоречие завершает доказательство. $\square$

Везде далее мы будем рассматривать только случай, когда $C \in B(E)$ — инъективный оператор, для которого $R(C)$ плотно в E, т.е. $\overline{R(C)} = E$.

Замечание 2.2.22. Локальное C-косинус семейство в E имеет следующие свойства:

1^0 $\mathfrak{C}(-s) = \mathfrak{C}(s)$;
2^0 $\mathfrak{C}(s)C = C\mathfrak{C}(s)$.

Действительно, полагая $t = 0$ в условии (i) определения 2.2.20, получаем

$$[\mathfrak{C}(s) + \mathfrak{C}(-s)]C = 2C\mathfrak{C}(s), \tag{2.2.10}$$

откуда следует 1^0. Действительно, $C\mathfrak{C}(-s) = \dfrac{1}{2}[\mathfrak{C}(-s) + \mathfrak{C}(s)]C = C\mathfrak{C}(s)$, т.е., $C[\mathfrak{C}(-s) - \mathfrak{C}(s)] = 0$, откуда видно, что $\mathfrak{C}(-s) = \mathfrak{C}(s)$. 2^0 следует из 1^0 и (2.2.10).

Определение 2.2.23. *Инфинитезимальный оператор* семейства $\{\mathfrak{C}(t) : |t| < T\}$ определяется как предел

$$G_0 x := \lim_{h\to 0+} \frac{2}{h^2}(C^{-1}\mathfrak{C}(h)x - x), \quad x \in D(G_0), \tag{2.2.11}$$

с естественной областью определения $D(G_0) := \Big\{x \in R(C) : \exists \lim\limits_{h\to 0+} \dfrac{2}{h^2}(C^{-1}\mathfrak{C}(h)x - x)\Big\}$.

Предложение 2.2.24. *Оператор G_0 допускает замыкание и $D(G_0)$ плотно в E.*

Определение 2.2.25. Оператор $G = \overline{G_0}$ называется *полным инфинитезимальным генератором* локального C-косинус семейства $\mathfrak{C}(\cdot)$.

Для $x \in D(G)$ имеем

$$\int_0^t (t-s)\mathfrak{C}(s)Gx\,ds = G\int_0^t (t-s)\mathfrak{C}(s)x\,ds = \frac{t^2}{2}Gx^t = \mathfrak{C}(t)x - Cx. \tag{2.2.12}$$

Следовательно, функция $\mathfrak{C}(\cdot)$ дважды непрерывно дифференцируема по t при $|t| < T$ и

$$\mathfrak{C}''(t)x = \mathfrak{C}(t)Gx = G\mathfrak{C}(t)x, \quad x \in D(G). \tag{2.2.13}$$

Сопоставим семейству $\mathfrak{C}(\cdot)$ локальное C-синус семейство по формуле

$$\mathfrak{S}(t)x = \int_0^t \mathfrak{C}(s)x\,ds, \quad x \in E. \tag{2.2.14}$$

Предложение 2.2.26. *Следующие соотношения имеют место*:

(i) $\Big(\mathfrak{S}(t+h)+\mathfrak{S}(t-h)\Big)C = 2\mathfrak{S}(t)\mathfrak{C}(h)$;

(ii) $\mathfrak{S}(t+h)C = \mathfrak{S}(t)\mathfrak{C}(h) + \mathfrak{S}(h)\mathfrak{C}(t)$;

(iii) $\Big(\mathfrak{C}(t+h)-\mathfrak{C}(t-h)\Big)C = 2G\mathfrak{S}(t)\mathfrak{S}(h)$;

(iv) $\mathfrak{C}'(t)x = \mathfrak{S}(t)Gx = G\mathfrak{S}(t)x$ *для любого* $x \in D(G)$;

(v) $\mathfrak{C}''(t)x = \mathfrak{C}(t)Gx = G\mathfrak{C}(t)x$ *для любого* $x \in D(G)$;

(vi) $\mathfrak{S}''(t)x = \mathfrak{S}(t)Gx = G\mathfrak{S}(t)x$ *для любого* $x \in D(G)$.

Положим далее $\tau \in (0,T)$. Определим

$$L_\tau(\lambda)x := \int_0^\tau e^{-\lambda t}\mathfrak{S}(t)xdt, \quad x \in E, \tag{2.2.15}$$

это — так называемое «*локальное преобразование Лапласа*» семейства $\mathfrak{S}(\cdot)$.

Предложение 2.2.27 (см. [395]). *Пусть оператор G — полный инфинитезимальный генератор семейства $\mathfrak{C}(\cdot)$ и $L_\tau(\lambda)$ — локальное преобразование Лапласа семейства $\mathfrak{S}(\cdot)$. Тогда*

$$\lambda L_\tau(\lambda) = \int_0^\tau e^{-\lambda t}\mathfrak{C}(t)x\,dt - e^{-\lambda\tau}\mathfrak{S}(\tau)x, \tag{2.2.16}$$

$L_\tau(\lambda)x \in D(G)$ *и справедливо равенство*

$$(\lambda^2 I - G)L_\tau(\lambda)x = Cx - e^{-\lambda\tau}\Big[\mathfrak{C}(\tau)x + \lambda\mathfrak{S}(\tau)x\Big] \quad \textit{для любого} \quad x \in E. \tag{2.2.17}$$

Полагая $V_\tau(\lambda)x := -e^{-\lambda\tau}\Big(\mathfrak{C}(\tau)x + \lambda\mathfrak{S}(\tau)x\Big)$, получаем

$$\frac{d^n}{d\lambda^n}V_\tau(\lambda)x = -(-\tau)^n e^{-\lambda\tau}\mathfrak{C}(\tau)x - \Big(\lambda(-\tau)^n + n(-\tau)^{n-1}\Big)e^{-\lambda\tau}\mathfrak{S}(\tau)x,$$

$$\left\|\frac{d^n}{d\lambda^n}V_\tau(\lambda)x\right\| \leqslant M_\tau\Big[(n+1)\tau^n + \lambda\tau^{n+1}\Big]e^{-\lambda\tau}\|x\|,$$

где $M_\tau := \sup\limits_{0\leqslant t\leqslant\tau}\|\mathfrak{C}(t)\|$.

Предложение 2.2.28. *Имеют место следующие оценки*:

$$\left\|\frac{d^n}{d\lambda^n}L_\tau(\lambda)x\right\| \leqslant M_\tau\frac{(n+1)!}{\lambda^{n+2}}\|x\|,$$

$$\left\|\frac{d^n}{d\lambda^n}[\lambda L_\tau(\lambda)x]\right\| \leqslant M_\tau\left(\frac{n!}{\lambda^{n+1}} + \tau^{n+1}e^{-\lambda\tau}\right)\|x\|.$$

Следующее утверждение доказывается так же, как в [405].

Предложение 2.2.29. *Множество $CD(G)$ есть сердцевина для оператора G, т.е., $\overline{G|_{CD(G)}} = G$.*

Замечание 2.2.30. Асимптотическая резольвента $L_\tau(\lambda)$ компактна при некотором λ (и, следовательно, для любого достаточно большого λ) тогда и только тогда, когда $\mathfrak{S}(\cdot)$ компактно. Действительно, если $\mathfrak{S}(\cdot)$ компактно, то отсюда, в силу (2.2.15), следует, что $L_\tau(\lambda)$ компактно. Обратно, дифференцируя $L_\tau(\lambda)$ по τ и пользуясь тем, что $\mathfrak{S}(\cdot)$ равномерно непрерывно по t, получаем, что $\mathfrak{S}(\cdot)$ компактно как равномерный предел компактных операторов.

2.2.4. Теорема о порождении для локальных C-косинус семейств.

Определение 2.2.31. Пусть A — замкнутый линейный оператор в X, $a \in \mathbb{R}$, $\tau \in (0,T)$. Семейство операторов $\{L_\tau(\lambda) : \lambda > a\} \subset B(E)$ называется *асимптотической C-резольвентой* оператора A, если выполнены следующие условия:

(i) $L_\tau(\cdot)x \in C^\infty((a,\infty); E)$ для любого $x \in E$;

(ii) $L_\tau(\lambda)L_\tau(\mu) = L_\tau(\mu)L_\tau(\lambda)$;

(iii) $L_\tau(\lambda)x \in D(A)$ для любых $x \in E$ и

$$(\lambda^2 I - A)L_\tau(\lambda)x = Cx + V_\tau(\lambda)x, \tag{2.2.18}$$

где $V_\tau(\lambda) \in C^\infty((a,\infty); E)$, и

$$\left\| \frac{d^n}{d\lambda^n} V_\tau(\lambda)x \right\| \leqslant M_\tau \tag{2.2.19}$$

(iv) $AL_\tau(\lambda)x = L_\tau(\lambda)Ax$ для любого $x \in D(A)$.

Теорема 2.2.32 (см. [395](теорема о порождении))**.** *Пусть A — замкнутый линейный оператор в E. Тогда A есть полный инфинитезимальный оператор локального C-косинус семейства $\mathfrak{C}(\cdot)$ в E тогда и только тогда, когда*

(i) *$D(A)$ плотно в E;*

(ii) *существует асимптотическая C-резольвента $L_\tau(\lambda)$ оператора A такая, что*

$$\left\| \frac{d^n}{d\lambda^n} [\lambda L_\tau(\lambda)x] \right\| \leqslant M_\tau \frac{n!}{\lambda^{n+1}} \|x\|, \quad x \in E, \tag{2.2.20}$$

где $0 \leqslant n/\lambda \leqslant \tau$, $\lambda > a$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$;

(iii) *множество $CD(A)$ есть сердцевина оператора A.*

Введем следующие обозначения:

$$F^n_{\lambda,\tau}x = \left(\frac{d}{d\lambda}\right)^n L_\tau(\lambda)x, \qquad G^n_{\lambda,\tau}x = \left(\frac{d}{d\lambda}\right)^n \Big(\lambda L_\tau(\lambda)x\Big).$$

Лемма 2.2.33. *Пусть A — замкнутый линейный оператор в E, удовлетворяющий условиям* (i) *и* (ii) *теоремы* 2.2.32. *Тогда имеют место утверждения*:

$$\lambda F^n_{\lambda,\tau} + nF^{n-1}_{\lambda,\tau} = G^n_{\lambda,\tau}, \tag{2.2.21}$$

$$\lambda G^n_{\lambda,\tau} + nG^{n-1}_{\lambda,\tau} = AF^n_{\lambda,\tau} + V^{(n)}_\tau(\lambda), \tag{2.2.22}$$

$$\left\| \frac{\lambda^{n+1}}{n!} F^{n-1}_{\lambda,\tau} \right\| \equiv \left\| \frac{\lambda^{n+1}}{n!} \frac{d^{n-1}}{d\lambda^{n-1}} L_\tau(\lambda) \right\| \leqslant M_\tau, \tag{2.2.23}$$

где $0 \leqslant n/\lambda \leqslant \tau$, $\lambda > a$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Лемма 2.2.34. *Пусть A удовлетворяет условиям леммы* 2.2.33. *Тогда справедливы следующие утверждения*:

$$Cx \in D(A) \quad \text{и} \quad ACx = CAx \quad \text{для} \quad x \in D(A); \tag{2.2.24}$$

$$L_\tau(\lambda)Cx = CL_\tau(\lambda)x \quad \text{для} \quad x \in E и \lambda > 0; \tag{2.2.25}$$

$$\lim_{\lambda\to\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \lambda^{n+1} F^n_{\lambda,\tau}x = 0 \quad \text{для любого} \quad n \in \mathbb{N}; \tag{2.2.26}$$

$$\lim_{\lambda\to\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \lambda^{n+1} G^n_{\lambda,\tau}x = Cx \quad \text{для любого} \quad n \in \mathbb{N}. \tag{2.2.27}$$

Предложение 2.2.35. *Пусть оператор A — полный инфинитезимальный генератор локального C-косинус семейсства. Тогда A порождает локальную C-полугруппу.*

В [427] приведено автоматическое расширение теоремы 2.2.10 и Следствий 2.2.11–2.2.13 для локальных C-косинус функций.

2.2.5. Абстрактная задача Коши второго порядка. Пусть A, как и прежде, — линейный оператор в банаховом пространстве E, $T \in (0,\infty]$ и $x, y \in E$. Рассмотрим абстрактную задачу Коши на отрезке $(-T,T)$ вида $(ACP; A,T,x,y)$:

$$\left(\frac{d^2}{dt^2}\right)u(t) = Au(t), \quad |t| < T, \quad u(0) = x, \quad u'(0) = y.$$

Функция $u(\cdot)$ называется решением задачи $(ACP; A,T,x,y)$, если $u(\cdot)$ дважды непрерывно дифференцируема на $t \in (-T,T)$, для любого $|t| < T$ имеет место вложение $u(t) \in D(A)$ и функция $u(\cdot)$ удовлетворяет условиям $(ACP; A,T,x,y)$. Также обозначим $(ACP; A,T,x,y)$ с $x, y \in CD(A)$ через $(ACP; A,T,CD(A))$.

Определение 2.2.36. Задачу Коши $(ACP; A,T,CD(A))$ назовем корректной, если для любых $x, y \in CD(A)$ существует единственное решение $u(t;x,y)$ задачи $(ACP; A,T,x,y)$ такое, что $\|u(t;x,y)\| \leqslant M(t)(\|C^{-1}x\| + \|C^{-1}y\|)$ для $|t| < T$ и $x, y \in CD(A)$, где функция $M(t)$ ограничена на любом компактном подынтервале, входящем в $(-T,T)$.

Теорема 2.2.37 (см. [395])**.** *Пусть A — плотно определенный замкнутый линейный оператор в E, удовлетворяющий следующим условиям*:

(i) $Cx \in D(A)$ *и* $ACx = CAx$ *для* $x \in D(A)$,

(ii) *множество* $CD(A)$ *есть сердцевина оператора* A.

Тогда следующие условия эквивалентны:

(I) *оператор A является полным инфинитезимальным генератором локального C-косинус семейства* $\mathfrak{C}(\cdot)$;

(II) *задача Коши* $(ACP; A,T,CD(A))$ *корректна.*

В этом случае $u(t;x,y) = C^{-1}\mathfrak{C}(t)x + C^{-1}\mathfrak{S}(t)y$, $t \in (-T,T)$, *есть единственное решение для любых начальных значений* $x, y \in CD(A)$.

Исследуем далее свойства полного инфинитезимального генератора n раз проинтегрированного локального косинус семейства $U(\cdot)$ и рассмотрим абстрактную задачу Коши $(ACP; A,T,x,y)$.

Определение 2.2.38. Оператор $A = \overline{A_0}$ называется *полным инфинитезимальным генератором локального n раз протнтегрированного косинус семейства* $U(\cdot)$.

Предложение 2.2.39 (см. [395])**.** *Пусть A — полный инфинитезимальный генератор локального n раз проинтегрированного косинус семейства $\{U(t) : |t| < T\}$ в E. Тогда выполнены следующие условия*:

$$U(t)x \in D(A) \quad и \quad U(t)Ax = AU(t)x \quad для \quad |t| < T \quad и \quad x \in D(A); \tag{2.2.28}$$

$$U(t)x = \frac{t^n}{n!}x + \int_0^t (t-s)U(s)Ax\,ds \quad для \quad x \in D(A) \quad и \quad |t| < T; \tag{2.2.29}$$

если $D(A)$ плотно в E, то $\int_0^t (t-s)U(s)x\,ds \in D(A)$ *и*

$$A\int_0^t (t-s)U(s)x\,ds = U(t)x - \frac{t^n}{n!}x \quad для \quad x \in E \quad и \quad |t| < T; \tag{2.2.30}$$

$$\text{если } \overline{D(A)} = E, \text{ то существует вещественное число } \omega \text{ такое, что } (\omega,\infty) \subset \rho(A); \tag{2.2.31}$$

$$D(A) \text{ плотно в } E \text{ тогда и только тогда, когда } C^n(T) \text{ плотно в } E. \tag{2.2.32}$$

Предложение 2.2.40. *Если A — полный инфинитезимальный генератор n раз проинтегрированного косинус семейства $U(\cdot)$ и $[n/2] = m$, то задача $(ACP; A, T, D(A^{m+1}))$ корректна в следующем смысле: для любых $x, y \in D(A^{m+1})$, существует такое единственное решение $u(t; x, y)$ задачи Коши, что*

$$\|u(t; x, y)\| \leqslant M(t)(\|x\|_m + \|y\|_m)$$

для $|t| < T$ и $x, y \in D(A^{m+1})$, где $M(t)$ — ограниченная функция на каждом компактном подынтервале интервала $(-T, T)$ и $\|z\|_m = \sum\limits_{i=1}^{m} \|A^i z\|$ для $z \in D(A^m)$.

Замечание 2.2.41. Если $n = 2m + 1$, $x \in D(A^{m+2})$ и $y \in D(A^{m+1})$, то для задачи $(ACP; A, T, x, y)$ существует единственное решение, построение которого следует из доказательства предложения 2.2.40.

Далее обсудим соотношение между локальными C-косинус семействами и локальными косинус семействами.

Лемма 2.2.42. *Пусть $\mathfrak{C}(\cdot)$ — локальное C-косинус семейство в E и пусть $n \in \mathbb{N}$. Определим*

$$\nabla^n(t)x = \int\limits_0^t \int\limits_0^{t_1} \cdots \int\limits_0^{t_{n-1}} \mathfrak{C}(t_n)x\,dt_n \cdots dt_1$$

для $x \in E$ и $0 \leqslant |t| < T$. Тогда

$$2\nabla^n(t)\nabla^n(s) = \frac{1}{(n-1)!}\left(\int\limits_t^{s+t} (s+t-r)^{n-1}\nabla^n(r)Cx\,dr - \int\limits_0^s (s+t-r)^{n-1}\nabla^n(r)Cx\,dr\right) +$$

$$+\frac{(-1)^n}{(n-1)!}\left[\int\limits_t^{t-s} (t-s-r)^{n-1}\nabla^n(r)Cx\,dr - \int\limits_0^{-s} (t-s-r)^{n-1}\nabla^n(r)Cx\,dr\right] \qquad (2.2.33)$$

для $|t|, |s|, |t-s|, |t+s| < T$.

Теорема 2.2.43 (см. [395]). *Пусть A — плотно определенный замкнутый линейный оператор в E с $\rho(A) \neq \varnothing$ и $n \geqslant 1$. Пусть $c \in \rho(A)$, $T \in (0, \infty]$ и $m = \left[\dfrac{n+1}{2}\right]$. Тогда следующие четыре условия эквивалентны:*

(i) *оператор A является полным инфинитезимальным генератором n раз проинтегрированног локального косинус семейства $U(\cdot)$;*

(ii) *оператор A является полным инфинитезимальным генератором локального C-косинус семейства $\mathfrak{C}(\cdot)$ с $C = R(c; A)^m$;*

(iii) *$\rho(A)$ содержит полуось $\{\lambda \in \mathbb{R} : \lambda > \omega\}$ для некоторого $\omega > 0$, и для любого $\tau \in (0, T)$ существует такая константа $M_\tau > 0$, зависящая от τ, что для $x \in D(A^m)$ справедлива оценка*

$$\left\|\frac{\lambda^k}{(k-1)!}\frac{d^{k-1}}{d\lambda^{k-1}}\Big(\lambda R(\lambda^2; A)x\Big)\right\| \leqslant M_\tau \|x\|_m$$

при $0 \leqslant k/\lambda \leqslant \tau$, $\lambda > \omega$, $k \in \mathbb{N}$;

(iv) *задача $(ACP; A, T, D(A^{m+1}))$ корректна. В этом случае*

$$U(t)x = (cI - A)^m \int\limits_0^t \int\limits_0^{t_1} \cdots \int\limits_0^{t_{n-1}} \mathfrak{C}(t_n)x\,dt_n \cdots dt_1 \qquad (2.2.34)$$

при $x \in E$ и $|t| < T$.

2.2.6. Локальные C-синус функции. Пусть $0 < T < \infty$.

Определение 2.2.44 (см. [372]). Семейство $\{\mathfrak{S}(\cdot) : -T < t < T\}$ в $B(E)$ называется локальной C-синус функцией в E, если оно удовлетворяет условиям

(i) $\mathfrak{S}(t)C = C\mathfrak{S}(t)$ для всех $-T < t < T$;
(ii) функция $\mathfrak{S}(\cdot)x : (-T, T) \to E$ непрерывна при любом $x \in E$;
(iii) $\displaystyle\int_{s-t}^{s+t} \mathfrak{S}(r)Cxdr = 2\mathfrak{S}(t)\mathfrak{S}(s)x$ для любых $x \in E$, $-T < s, t, s+t, s-t < T$ и $\mathfrak{S}(0) = 0$.

Как было замечено в [372], такая C-синус функция не обязательно есть сильный интеграл от некоторой локальной C-косинус функции.

Теорема 2.2.45 (см. [372]). *Сильно непрерывная функция $\{\mathfrak{S}(\cdot) : -T < t < T\}$ является локальной C-синус функцией тогда и только тогда, когда $\mathfrak{S}(\cdot)$ коммутирует с C и удовлетворяет условиям $\mathfrak{S}(0) = 0$ и*

$$(1 * U)(s)\Big(\mathfrak{S}(t) - tC\Big) = \Big(\mathfrak{S}(s) - sC\Big)(1 * U)(t), \quad -T < s, t, s+t, s-t < T,$$

где $U(t) = \displaystyle\int_0^t \mathfrak{S}(s)ds$.

Определение 2.2.46. Семейство $\{\mathfrak{S}(\cdot) : -T < t < T\}$ называют невырожденным, если из равенства $\mathfrak{S}(t)x = 0$ на $(0, s)$ при некотором $s \in (0, T/2]$ следует, что $x = 0$.

Определение 2.2.47. Для невырожденного C-синус семейства $\{\mathfrak{S}(\cdot) : -T < t < T\}$ можно определить генератор A как $Ax = y$ для $x \in D(A)$, где

$$D(A) = \left\{ x \in E : \int_0^t (t-s)\mathfrak{S}(s)y\,ds = \mathfrak{S}(t)x - tCx \text{ для некоторого } y \in E \text{ и всех } t \in [0, T) \right\}.$$

Предложение 2.2.48 (см. [372]). *Пусть $C \in B(E)$ инъективен и $\{\mathfrak{S}(\cdot) : 0 \leqslant t < T\}$ — сильно непрерывная C-синус функция с генератором A.*

Имеют место следующие утверждения:

(a) $\mathfrak{S}(s)\mathfrak{S}(t) = \mathfrak{S}(t)\mathfrak{S}(s)$ *для всех* $t, s \in [0, T)$;
(b) *если* $B \in B(E)$ *коммутирует с* C *и* $\mathfrak{S}(\cdot)$ *на* $[0, T)$, *то* $BD(A) \subset D(A)$ *и* $ABx = BAx$ *при* $x \in D(A)$;
(c) $\displaystyle\int_0^t (t-r)\mathfrak{S}(r)xdr \in D(A)$ *и* $A\int_0^t (t-r)\mathfrak{S}(r)xdr = \mathfrak{S}(t)x - tCx$ *для всех* $x \in E$ *и* $0 \leqslant t < T$;
(d) $\displaystyle\int_0^t (t-r)\mathfrak{S}(r)Axdr = \mathfrak{S}(t)x - tCx$ *для всех* $x \in D(A)$ *и* $0 \leqslant t < T$;
(e) $\mathfrak{S}'(t)x = \displaystyle\int_0^t \mathfrak{S}(s)Axds + Cx$ *и* $\mathfrak{S}''(t)x = \mathfrak{S}(t)Ax$ *при всех* $x \in D(A)$ *и* $0 \leqslant t < T$;
(f) A — *замкнутый линейный оператор в* E *такой, что* $C^{-1}AC = A$;
(g)

$$\mathcal{R}(\mathfrak{S}(t)) \subset \overline{D(A)} \quad \text{для всех} \quad t \in [0, T). \tag{2.2.35}$$

Теорема 2.2.49 (см. [372]). *Пусть $C \in B(E)$ инъективен и $\{\mathfrak{S}(\cdot) : 0 \leqslant t < T\}$ — сильно непрерывное семейство операторов на E.*

(i) *Если $\mathfrak{S}(\cdot)$ — локальная C-синус функция с генератором A, то A замкнут и удовлетворяет соотношениям $C^{-1}AC = A$, $\mathcal{R}\Big(\int\limits_0^t U(s)ds\Big) \subset D(A)$ и*

$$\int\limits_0^t U(s)dsA \subset A\int\limits_0^t U(s)ds = \mathfrak{S}(t) - tC \tag{2.2.36}$$

для всех $t \in [0, T)$.

(ii) *Если A — замкнутый оператор, удовлетворяющий соотношениям $\mathcal{R}\Big(\int\limits_0^t U(s)ds\Big) \subset D(A)$ и (2.2.35) для всех $t \in [0, T)$, то $\mathfrak{S}(\cdot)$ — локальная C-синус функция с генератором $C^{-1}AC$.*

Следовательно, сильно непрерывное семейство $\{\mathfrak{S}(\cdot) : 0 \leqslant t < T\}$ есть локальная C-синус функция с генератором A тогда и только тогда, когда A замкнут и удовлетворяет соотношениям $C^{-1}AC = A$, $\mathcal{R}\Big(\int\limits_0^t U(s)ds\Big) \subset D(A)$ и теорема (2.2.36) выполнена для всех $t \in [0, T)$.

Теорема 2.2.50 (см. [372]). *Пусть $C \in B(E)$ инъективен и A — замкнутый линейный оператор в E. Предположим, что существуют γ-асимптотическая C-резольвента $L_\gamma(\lambda)$ оператора A на $[0, \infty)$ и некоторое такое $M_\gamma > 0$, что*

$$\left\|\frac{\lambda^{k+1}}{n!}\frac{d^k}{d\lambda^k}(\lambda^{-1}L_\gamma(\lambda))\right\| \leqslant M_\gamma \quad \text{для всех} \quad \lambda > 0 \ \text{и}\ k = 0, 1, 2, \ldots .$$

Тогда

(i) *существует такая сильно непрерывная функция $\mathcal{T}(\cdot) : [0, \infty) \to B(E)$, что $\mathcal{T}(0) = 0$, $\|\mathcal{T}(t + h) - \mathcal{T}(t)\| \leqslant Mh$ для всех $t, h \geqslant 0$,*

$$L_\gamma(\lambda)x = \lambda^2 \int\limits_0^\infty e^{-\lambda t}\mathcal{T}(t)x\, dt \quad \text{для всех} \quad x \in E \ \text{и}\ \lambda > 0,$$

и

$$\int\limits_0^t (t-s)\mathcal{T}(s)\, dsE \subset D(A), \qquad \int\limits_0^t (t-s)\mathcal{T}(s)\, dsA \subset A\int\limits_0^t (t-s)\mathcal{T}(s)\, ds = \mathcal{T}(t) - t^2\frac{C}{2}$$

для всех $t \in [0, \gamma)$. Поэтому $\{\mathcal{T}(\cdot) : [0, \gamma]\}$ есть локальная C-синус функция с генератором $C^{-1}AC$.

(ii) *множество $E_1 := \overline{D(A)}$ инвариантно относительно C и оператор $C_1^{-1}A_1C_1$ порождает локальную C_1-синус функцию $\{\mathfrak{S}_1(t) : t \in [0, \gamma]\}$ на E_1, для которой $\mathfrak{S}_1(\cdot) := \mathcal{T}\,'(t)|_{E_1}$, $C_1 := C|_{E_1}$ и A_1 есть часть A в E_1. Если, дополнительно, выполнено равенство $C^{-1}AC = A$, то A_1 есть генератор $\mathfrak{S}_1(\cdot)$.*

2.3. Неоднородные уравнения

Рассмотрим абстрактную задачу Коши $(ACP; A, T, x, f(\cdot))$

$$u'(t) = Au(t) + f(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \quad u(0) = x \in E, \tag{2.3.1}$$

где оператор A порождает локальную невырожденную N раз проинтегрированную C-полугруппу $T(\cdot)$, а функция $f(\cdot) \in C([0, T]; E)$. Пусть функция $v_x(\cdot) : [0, T] \to E$ определена как

$$v_x(t) = T(t)x + \int\limits_0^t T(s)f(t-s)\, ds, \quad 0 \leqslant t \leqslant T.$$

Теорема 2.3.1 (см. [267]). *Для заданного $x \in E$ задача $(ACP; A, T, x, f(\cdot))$ имеет решение тогда и только тогда, когда $v_x^{(N)}([0,T]) \subset \mathcal{R}(C)$ и $C^{-1}v_x^{(N)}(\cdot) \in C^1([0,T]; E)$. В этом случае функция $u_x(\cdot) = C^{-1}v_x^{(N)}(\cdot)$ является единственным решением задачи $(ACP; A, T, x, f(\cdot))$.*

Теорема 2.3.2 (см. [267]). *Пусть $x \in CD(A^{N+1})$. Предположим, что функция $f(\cdot)$ удовлетворяет условиям $f^{(N)}([0,T]) \in \mathcal{R}(C)$, $C^{-1}f^{(N+1)}(\cdot) \in C([0,T]; E)$, $f^{(k)}(0) \in D(A^{N-k})$, и $A^{N-k}f^{(k)}(0) \in \mathcal{R}(C)$ для всех $0 \leqslant k \leqslant N$. Тогда задача $(ACP; A, T, x, f(\cdot))$ имеет единственное решение*

$$u_x(t) = C^{-1}v_x^{(N)}(t) = C^{-1}T(t)A^N x + \sum_{j=0}^{N-1} \frac{t^j A^j x}{j!} + \mathcal{F}_N(t), \quad t \in [0,T],$$

где

$$\mathcal{F}_N(t) = \sum_{j=1}^{N} \frac{t^j}{j!} \sum_{k=0}^{j-1} A^{j-k-1} f^{(k)}(0) + \int_0^t T(s) \sum_{j=1}^{N} C^{-1}A^{N-k} f^{(k)}(0)\, ds + \int_0^t \int_0^{t-s} T(r)C^{-1}f^{(N+1)}(s)\, drds.$$

Замечание 2.3.3. Имеет место некоторый вариант теоремы 2.3.2 из [267] со следующими предположениями относительно функции $f(\cdot)$: $f([0,T]) \in D(A^{N+1})$, $A^{N+1}f([0,T]) \in \mathcal{R}(C)$, $C^{-1}A^{N+1}f(\cdot) \in C([0,T]; E)$ и $A^k f(\cdot) \in C([0,T]; E)$ для $0 \leqslant k \leqslant N$.

2.3.1. Коэрцитивность. Для $f(\cdot) \in L^p_{\mathrm{loc}}([0,T); E)$, $1 \leqslant p < \infty$, функция $u(\cdot)$ называется p-сильным решением задачи $(ACP; A, T, x, f(\cdot))$ на $[0,T)$ если $u(\cdot)$ удовлетворяет $u(0) = x$, $u(t) \in D(A)$, $u'(t) = Au(t) + f(t)$ для почти всех $t \in [0,T)$, и $u'(\cdot) \in L^p_{\mathrm{loc}}([0,T); E)$.

Для функции $\alpha(\cdot) : [0,t] \to B(E)$, $t < T$, мы определяем полувариацию

$$SV(\alpha, t) := \sup \left\{ \left\| \sum_{i=1}^{n} (\alpha(s_i) - \alpha(s_{i-1}))x_i \right\| : x_i \in E, \|x_i\| \leqslant 1, 0 = s_0 < s_1 < \cdots < s_n = t, 1 \leqslant i \leqslant n \right\}$$

и p-полувариацию

$$SV^p(\alpha, t) := \sup \left\{ \left\| \sum_{i=1}^{n} (\alpha(s_i) - \alpha(s_{i-1}))x_i \right\| : x_i \in E, \right.$$
$$\left. \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^p (s_i - s_{i-1}) \leqslant 1, 0 = s_0 < s_1 < \cdots < s_n = t, 1 \leqslant i \leqslant n \right\}.$$

Более полную информацию по определению SV и Var можно найти в [414, 28]. Функция $\alpha(\cdot) : [0,T) \to B(E)$ называется функцией с локально ограниченной полувариацией (соответственно p-полувариацией) на $[0,T)$, если $SV(\alpha, r) < \infty$ (соответственно $SV^p(\alpha, r) < \infty$) для всех $r \in (0,T)$. Мы обозначаем это как $\alpha(\cdot) \in SV([0,r]; E)$ (соответственно $\alpha(\cdot) \in SV^p([0,r]; E)$) для $r < T$.

Для $1 \leqslant p \leqslant q < \infty$ имеем

$$SV^1([0,r]; T) \subset SV^p([0,r]; E) \subset SV^q([0,r]; E) \subset SV([0,r]; E).$$

Определение 2.3.4. Говорят, что локальная C-полугруппа $\{\mathcal{S}(t) : 0 \leqslant t < T\}$ обладает свойством максимальной регулярности, если $(ACP; A, T, 0, Cf)$ имеет единственное решение $v_f(\cdot) := (\mathcal{S} * f)(\cdot)$ для любой $f(\cdot) \in C([0,T); E)$.

Определение 2.3.5. Говорят, что локальная C-полугруппа $\mathcal{S}(\cdot)$ обладает свойством максимальной p-регулярности ($1 \leqslant p < \infty$), если $(\mathcal{S} * f)(\cdot)$ принадлежит $C([0,T); \mathcal{D}(A))$ для любой $f(\cdot) \in L^p_{\mathrm{loc}}([0,T); E)$.

Теорема 2.3.6 (см. [369]). *Пусть A порождает локальную C-полугруппу $\mathcal{S}(\cdot)$ на $[0,r]$ и $1 \leqslant p < \infty$. Тогда следующие утверждения эквивалентны*:

(i) *локальная C-полугруппа $\mathcal{S}(\cdot)$ имеет ограниченную p-полувариацию (соответственно полувариацию) на $[0,r]$;*

(ii) *$v_f(\cdot) \in C([0,r]; \mathcal{D}(A))$ для всех $f(\cdot) \in L^p([0,r]; E)$ (соответственно $C([0,r]; E)$);*

(iii) *$v_f(r) \in D(A)$ для каждой $f(\cdot) \in L^p([0,r]; E)$ (соответственно $f(\cdot) \in C([0,r]; E)$).*

2.3.2. Уравнение второго порядка. Рассмотрим теперь следующую абстрактную задачу Коши $(ACP;\, A, T, x, y, f(\cdot))$:

$$u''(t) = Au(t) + f(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \quad u(0) = x, \quad u'(0) = y, \tag{2.3.2}$$

где оператор A порождает невырожденную N раз проинтегрированную C-косинус оператор-функцию $\mathcal{T}(\cdot)$. Под решением задачи $(ACP; A, T, x, y, f(\cdot))$ мы понимаем функцию $u(\cdot) \in C^2([0,T]; D(A))$, которая удовлетворяет $(ACP; A, T, x, y, f(\cdot))$. Пусть функция $v_{x,y}(\cdot) : [0,T] \to E$ определена как

$$v_{x,y}(t) = \mathcal{T}(t)x + \int_0^t \mathcal{T}(s)y\, ds + \int_0^t \int_0^s \mathcal{T}(r)f(t-s)dr\, ds, \quad 0 \leqslant t \leqslant T.$$

Теорема 2.3.7 (см. [233])**.** *Для заданных $x, y \in E$ задача $(ACP; A, T, x, y, f(\cdot))$ имеет решение тогда и только тогда, когда $v_{x,y}^{(N)}([0,T]) \subset \mathcal{R}(C)$ и $C^{-1}v_{x,y}^{(N)}(\cdot) \in C^2([0,T]; E)$. В этом случае функция $u_{x,y}(\cdot) = C^{-1}v_{x,y}^{(N)}(\cdot)$ является единственным решением задачи $(ACP; A, T, x, y, f(\cdot))$.*

Следствие 2.3.8. *Предположим, что функция*

$$g(t) = \int_0^t \int_0^s \mathcal{T}(r)f(t-s)\, drds, \quad t \in [0,T],$$

удовлетворяет $g^{(N)}([0,T]) \subset \mathcal{R}(C)$ и $C^{-1}g^{(N)}(\cdot) \in C^2([0,T]; E)$. Тогда для любой пары $x, y \in CD(A^{m+1})$, где $m = [(N+1)/2]$, задача $(ACP; A, T, x, y, f(\cdot))$ имеет единственное решение

$$u_{x,y}(\cdot) = \sum_{j=0}^{m-1} \left(\frac{t^{2j}A^j x}{(2j)!} + \frac{t^{2j+1}A^j y}{(2j+1)!} \right) + C^{-1}\Bigg(\frac{1}{(2m-N-1)!} \int_0^t (t-s)^{2m-N-1}\mathcal{T}(s)A^m x\, ds +$$

$$+ \frac{1}{(2m-N)!} \int_0^t (t-s)^{2m-N}\mathcal{T}(s)A^m y ds + g^{(N)}(t) \Bigg).$$

Глава 3

ПРИЛОЖЕНИЯ

Теория проинтегрированных и C-полугрупп имеет обширные приложения к теории дифференциальных уравнений с запаздыванием и нейтральным дифференциальным уравнениям [64, 65, 66, 67, 89, 202], к интегродифференциальным уравнениям [84, 168, 391], к теории управления [179, 220, 221, 222, 258], к теории устойчивости [110, 121, 275, 347, 352, 365, 367, 368], к стохастическим дифференциальным уравнениям [123, 125, 126, 155, 262, 282, 65], к популяционной динамике [302, 304, 423, 429] и т.д. Мы рассмотрим приложения только к некорректным задачам.

3.1. Корректные и некорректные задачи

Рассмотрим в банаховом пространстве E задачу

$$Bx = y, \quad x, y \in E, \tag{3.1.1}$$

где оператор $B \in L(E)$ имеет непустую область определения, x является неизвестным элементом, а y является заданным элементом.

Определение 3.1.1. Задача (3.1.1) называется корректно поставленной (согласно Адамару), если выполняются следующие условия:

(i) Разрешимость. Для любого $y \in E$ найдется элемент $x \in D(B)$ такой, что $Bx = y$.

(ii) Единственность. Для любых $x_1, x_2 \in D(B)$ со свойством $Bx_1 = Bx_2$ следует, что $x_1 = x_2$.
(iii) Устойчивость. Для любых $x, \tilde{x} \in D(B)$, для которых $Bx = y$, $B\tilde{x} = \tilde{y}$, имеет место импликация: сходимость $\tilde{y} \to y$ влечет сходимость $\tilde{x} \to x$.

Типичным примером корректно поставленной задачи для класса эволюционных задач является задача Коши
$$u'(t) = Au(t), \quad u(0) = u^0, \quad t \geqslant 0,$$
где оператор A порождает C_0-полугруппу и где обобщенное решение дается формулой $u(t) = \exp(tA)u^0$. Это означает, что если мы хотим найти значение $u(T)$ в некоторой точке $T > 0$, то $u(T) = \exp(TA)u^0$, где $B^{-1} = \exp(TA)$, и нам нужно аппроксимировать лишь ограниченный линейный оператор $\exp(TA)$. Детали таких рассуждений можно найти вначале § 3.4.

Если хотя бы одно из условий (i)–(iii) не выполняется, то мы будем говорить, что задача (3.1.1) является некорректной. Как правило, ограничиваясь классом эволюционных задач, мы будем предполагать, что оператор B^{-1} не является ограниченным.

В случае некорректных задач, будем также предполагать, что нам доступны лишь зашумленные данные y_δ, т.е. : $\|y_\delta - y\| \leqslant \delta$. Нельзя рассматривать элемент $B^{-1}y_\delta$ в качестве аппроксимации решения задачи (3.1.1), поскольку оператор B^{-1} неограничен. А. Н. Тихонов предложил использовать в качестве решения некорректных задач элементы, которые минимизируют функционал
$$F(x) = \|Bx - y_\delta\|^2 + \alpha\|x\|^2 \to \min \tag{3.1.2}$$
и которые будут давать устойчивую аппроксимацию решения задачи (3.1.1). Здесь $\alpha > 0$ — некий малый параметр, и мы обозначим через $x_{\alpha,\delta}$ единственное решение задачи (3.1.2), устойчиво зависящее от начальных данных y_δ. Решение $x_{\alpha,\delta}$ этой задачи (3.1.2) со специальным выбором параметра $\alpha = \alpha(\delta)$ выбирается как аппроксимация решения $x = B^{-1}y$ задачи (3.1.1). Доказано, [23, 335, 36], что в гильбертовом пространстве при условии на отношение $\delta/\sqrt{\alpha}$ имеет место сходимость $x_{\alpha,\delta} \to x = B^{-1}y$ при $\delta \to 0$. Процедура, построеная таким образом, называется регуляризацией. Дадим некоторые определения.

Определение 3.1.2. Регуляризатором задачи (3.1.1) называется однопараметрическое семейство операторов $R_\delta : E \to E$, $0 < \delta \leqslant \delta_0$, такое, что для любого $y \in \mathcal{R}(B)$ выполняется
$$\sup_{\|y_\delta - y\| \leqslant \delta} \|R_\delta y_\delta - \tilde{x}\| \to 0 \quad \text{при} \quad \delta \to 0,$$
где $\tilde{x} = B^{-1}y$. Если $R_\delta \in B(E)$ для любого $0 < \delta \leqslant \delta_0$, мы говорим, что задача (3.1.1) непрерывно и линейно регуляризуема.

Мы предполагаем, вообще говоря, что обратный оператор B^{-1} существует, но не обязан быть ограниченным. Таким образом, задача (3.1.1) является типичной некорректной задачей [15, 36], поскольку решение задачи (3.1.1) существует лишь для $y \in \mathcal{R}(B)$ и, кроме того, решение $x \in E$ не обязано быть непрерывно зависящим от $y \in E$. Заметим, что в такой общей постановке задача (3.1.1) в банаховом пространстве может быть не регуляризуема [25].

3.2. Аппроксимация корректно поставленных задач

В следующих пунктах 3.2.1 и 3.2.2 мы дадим очень короткий обзор аппроксимации корректно поставленных эволюционных задач. Главными разрешающими семействами, с которыми мы имеем дело в случае корректно поставленных эволюционных задач, являются C_0-полугруппы и C_0-косинус оператор-функции. Таким образом, обобщенные решения даются формулами (11). Легко видеть, что эта ситуация соответствует случаю задачи (3.1.1) с ограниченным линейным оператором B^{-1}.

3.2.1. Общая дискретизационная схема. Общая дискретизационная схема может быть кратко описана следующим образом (см. подробности в [28, 412]). Пусть E_n и E — банаховы пространства и $\{p_n\}$ — последовательность линейных ограниченных операторов $p_n : E \to E_n$, $p_n \in B(E, E_n)$, $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$, со свойством:
$$\|p_n x\|_{E_n} \to \|x\|_E \quad \text{при} \quad n \to \infty \quad \text{для любого} \quad x \in E. \tag{3.2.1}$$

Из (3.2.1) следует, что $\|p_n\| \leqslant Q$, $n \in \mathbb{N}$, при некоторой константе $Q > 0$.

Определение 3.2.1. Последовательность элементов $\{x_n\}$, $x_n \in E_n$, $n \in \mathbb{N}$, называется $\mathcal{P}$-сходящейся (или дискретно сходящейся) к $x \in E$, если $\|x_n - p_n x\|_{E_n} \to 0$ при $n \to \infty$. Мы записываем это как $x_n \xrightarrow{\mathcal{P}} x$.

Определение 3.2.2. Последовательность ограниченных линейных операторов $B_n \in B(E_n)$, $n \in \mathbb{N}$, называется $\mathcal{PP}$-сходящейся (или дискретно сходящейся) к ограниченному линейному оператору $B \in B(E)$, если для любого $x \in E$ и для каждой последовательности $\{x_n\}$, $x_n \in E_n$, $n \in \mathbb{N}$, такой, что $x_n \xrightarrow{\mathcal{P}} x$, следует сходимость $B_n x_n \xrightarrow{\mathcal{P}} Bx$. Мы записываем это как $B_n \xrightarrow{\mathcal{PP}} B$.

Замечание 3.2.3. Если положить $E_n = E$ и $p_n = I$ для всех $n \in \mathbb{N}$, где I — единичный оператор на E, то определение 3.2.1 приводит к традиционной поточечной сходимости ограниченных операторов, которая записывается как $B_n \to B$.

Больше информации об общей дискретизационной схеме можно найти в [173, 28, 412].

3.2.2. Полудискретизация и полная дискретизация C_0-полугрупп. Как основание для более общих аппроксимационных процедур, мы напомним некоторые результаты для случая C_0-полугрупп. Во-первых, мы рассмотрим корректно поставленную задачу Коши в банаховом пространстве E:

$$u'(t) = Au(t), \quad t \in [0, \infty), \quad u(0) = u^0. \tag{3.2.2}$$

Здесь оператор A порождает C_0-полугруппу $t \mapsto \exp(tA)$. Известно, что для $u^0 \in D(A)$ единственное решение $u(\cdot)$ задачи (3.2.2) дается формулой $u(t) = \exp(tA)u^0$ при $t \geqslant 0$. Теория корректно поставленных задач и их численный анализ были интенсивно развиты в работах (см., например, [165, 207, 173, 28, 411]).

Во-вторых, в рамках общей схемы дискретизации рассмотрим полудискретную аппроксимацию задачи (3.2.2) в банаховых пространствах E_n:

$$u_n'(t) = A_n u_n(t), \quad t \in [0, \infty), \quad u_n(0) = u_n^0. \tag{3.2.3}$$

Здесь операторы A_n порождают C_0-полугруппы на E_n, $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$, и согласованы с оператором A и $u_n^0 \xrightarrow{\mathcal{P}} u^0$. Согласованность понимается в смысле сходимости на общей аппроксимационной схеме.

Прежде всего, на общей аппроксимационной схеме имеет место следующая версия теоремы Троттера—Като.

Теорема 3.2.4 (см. [28] (Теорема ABC))**.** *Предположим, что $A \in \mathcal{C}(E)$, $A_n \in \mathcal{C}(E_n)$ и они порождают C_0-полугруппы, где $\mathcal{C}(E)$ обозначает множество всех замкнутых линейных операторов на E. Следующие условия* (A) *и* (B) *эквивалентны условию* (C).

(A) *Согласованность. Существует такое $\lambda \in \rho(A) \cap \rho(A_n)$, что резольвенты сходятся*:

$$(\lambda I_n - A_n)^{-1} \xrightarrow{\mathcal{PP}} (\lambda I - A)^{-1}.$$

(B) *Устойчивость. Существуют константы $M \geqslant 1$ и ω, не зависящие от n и такие, что $\|\exp(tA_n)\| \leqslant M \exp(\omega t)$ при $t \geqslant 0$ и любых $n \in \mathbb{N}$.*

(C) *Сходимость. Для любого конечного $T > 0$ имеем $\max\limits_{t\in[0,T]} \|\exp(tA_n)u_n^0 - p_n \exp(tA)u^0\| \to 0$ при $n \to \infty$, как только $u_n^0 \xrightarrow{\mathcal{P}} u^0$ для любых $u_n^0 \in E_n$, $u^0 \in E$.*

Для аналитических C_0-полугрупп имеет место следующая теорема ABC.

Теорема 3.2.5 (см. [28])**.** *Пусть операторы A и A_n порождают аналитические C_0-полугруппы. Следующие условия* (A) *и* (B$_1$) *эквивалентны условию* (C$_1$).

(A) *Согласованность. Существует такое $\lambda \in \rho(A) \cap \bigcap_n \rho(A_n)$, что резольвенты сходятся*:

$$(\lambda I - A_n)^{-1} \xrightarrow{\mathcal{PP}} (\lambda I - A)^{-1}.$$

(B_1) *Устойчивость. Существуют константы* $M_1 \geqslant 1$ *и* $\omega_1 \in \mathbb{R}$ *такие, что*

$$\|(\lambda I_n - A_n)^{-1}\| \leqslant \frac{M_1}{|\lambda - \omega_1|}, \quad \operatorname{Re}\lambda > \omega_1, \quad n \in \mathbb{N}.$$

(C_1) *Сходимость. Для любого конечного* $\mu > 0$ *и некоторого* $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ *имеем*

$$\max_{\eta \in \Sigma(\theta,\mu)} \|\exp(\eta A_n)u_n^0 - p_n \exp(\eta A)u^0\| \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty, \quad \text{как только} \quad u_n^0 \xrightarrow{\mathcal{P}} u^0.$$

Здесь использован сектор с углом 2θ *и радиусом* μ, *заданный как* $\Sigma(\theta,\mu) = \{z \in \Sigma(\theta) : |z| \leqslant \mu\}$, *и* $\Sigma(\theta) = \{z \in \mathbb{C} : |\arg z| \leqslant \theta\}$.

Обычно предполагается, что условия (A) и (B) выполняются для соответствующих C_0-полугрупп без потери общности при рассмотрении дискретизационных процессов по пространству и времени. Обозначим через $T_n(\cdot)$ семейство дискретных полугрупп, т.е., $T_n(t) = T_n(\tau_n)^{k_n}$, где $k_n = \left[\dfrac{t}{\tau_n}\right]$ при $\tau_n \to 0$, $n \to \infty$. Генератор дискретной полугруппы определяется как $\breve{A}_n = \dfrac{1}{\tau_n}(T_n(\tau_n) - I_n) \in B(E_n)$ и поэтому $T_n(t) = (I_n + \tau_n \breve{A}_n)^{k_n}$, где $t = k_n\tau_n$.

Теорема 3.2.6 (см. [28] Теорема ABC-дискретная)**.** *Следующие условия* (A) *и* (B′) *эквивалентны условию* (C′).

(A) *Согласованность. Существует такое* $\lambda \in \rho(A) \cap \bigcap_n \rho(\breve{A}_n)$, *что резольвенты сходятся*:

$$(\lambda I_n - \breve{A}_n)^{-1} \xrightarrow{\mathcal{PP}} (\lambda I - A)^{-1}.$$

(B′) *Устойчивость. Существуют константы* $M_1 \geqslant 1$ *и* $\omega_1 \in \mathbb{R}$ *такие, что*

$$\|T_n(t)\| \leqslant M_1 \exp(\omega_1 t) \quad \text{для} \quad t \in \overline{\mathbb{R}}_+ = [0,\infty), \quad n \in \mathbb{N}.$$

(C′) *Сходимость. Для любого конечного* $T > 0$ *имеем* $\max\limits_{t \in [0,T]} \|T_n(t)u_n^0 - p_n \exp(tA)u^0\| \to 0$ *при* $n \to \infty$, *как только* $u_n^0 \xrightarrow{\mathcal{P}} u^0$ *для любых* $u^0 \in E$, $u_n^0 \in E_n$

Теорема 3.2.7 (см. [28])**.** *Предположим, что операторы* $A \in \mathcal{C}(E)$, $A_n \in \mathcal{C}(E_n)$ *порождают* C_0*-полугруппы. Предположим также, что выполнены условия* (A) *и* (B) *теоремы* 3.2.4*. Тогда неявная разностная схема*

$$\frac{\overline{U}_n(t+\tau_n) - \overline{U}_n(t)}{\tau_n} = A_n \overline{U}_n(t+\tau), \quad \overline{U}_n(0) = u_n^0, \tag{3.2.4}$$

устойчива, т.е., $\|(I_n - \tau_n A_n)^{-k_n}\| \leqslant M_1 e^{\omega_1 t}$, $t = k_n\tau_n \in \overline{\mathbb{R}}_+$. *Схема* (3.2.4) *дает аппроксимацию решения задачи Коши* (3.2.2), *т.е.,* $\overline{U}_n(t) \equiv (I_n - \tau_n A_n)^{-k_n} u_n^0 \xrightarrow{\mathcal{P}} \exp(tA)u^0$ *равномерно по* $t = k_n\tau_n \in [0,T]$ *при* $u_n^0 \xrightarrow{\mathcal{P}} u^0$, $n \to \infty$, $k_n \to \infty$, $\tau_n \to 0$.

Заметим, что в данном случае $T_n(\tau_n) = (I_n - \tau_n A_n)^{-1}$ и $\breve{A}_n = ((I_n - \tau_n A_n)^{-1} - I_n)/\tau_n = A_n(I_n - \tau_n A_n)^{-1}$.

Теорема 3.2.8 (см. [28])**.** *Предположим, что выполняются условия* (A) *и* (B) *теоремы* 3.2.4 *и условие*

$$\tau_n \|A_n^2\| \leqslant C, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{3.2.5}$$

Тогда разностная схема

$$\frac{U_n(t+\tau_n) - U_n(t)}{\tau_n} = A_n U_n(t), \quad U_n(0) = u_n^0, \tag{3.2.6}$$

устойчива и дает аппроксимацию решения задачи Коши (3.2.2), *т.е.,* $U_n(t) \equiv (I_n + \tau_n A_n)^{k_n} u_n^0 \xrightarrow{\mathcal{P}} u(t)$ *равномерно по* $t = k_n\tau_n \in [0,T]$ *при* $u_n^0 \xrightarrow{\mathcal{P}} u^0$, $n \to \infty$, $k_n \to \infty$, $\tau_n \to 0$.

Теорема 3.2.9 (см. [28]). *Предположим, что выполняются условия* (A) *и* (B_1) *теоремы* 3.2.5 *и условие*

$$\tau_n\|A_n\| \leqslant \frac{1}{M+2}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{3.2.7}$$

Тогда разностная схема (3.2.6) *устойчива и она дает аппроксимацию решения задачи Коши* (3.2.2)*, т.е.,* $U_n(t) \equiv (I_n + \tau_n A_n)^{k_n} u_n^0 \xrightarrow{\mathcal{P}} u(t)$ *равномерно по* $t = k_n\tau_n \in [0,T]$ *при* $u_n^0 \xrightarrow{\mathcal{P}} u^0$*,* $n \to \infty$*,* $k_n \to \infty$*,* $\tau_n \to 0$.

В этом случае $T_n(\tau_n) = I_n + \tau_n A_n$ и $\breve{A}_n = A_n$.

Напомним, что константа M_1 в условии (B_1), которая определяет $\varphi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ как $M_1 \sin\varphi < 1$, такова, что

$$\|(\lambda I_n - A_n)^{-1}\| \leqslant \frac{M_1}{|\lambda - \omega|} \quad \text{для любых} \quad \lambda \in \Sigma(\pi/2 + \varphi). \tag{3.2.8}$$

Напомним, что существует единственная аппроксимация Падэ для e^{-z} степени (p,q), заданная формулой $R_{p,q}(z) = P_{p,q}(z)/Q_{p,q}(z) \in \pi_{p,q}$, где

$$P_{p,q}(z) = \sum_{j=0}^{p} \frac{(p+q-j)!p!(-z)^j}{(p+q)!j!(p-j)!}, \qquad Q_{p,q}(z) = \sum_{j=0}^{q} \frac{(p+q-j)!q!z^j}{(p+q)!j!(q-j)!}.$$

Определение 3.2.10. Рациональная аппроксимация $r_{p,q}(\cdot) \in \pi_{p,q}$ для e^{-z} называется

(a) A-приемлемой, если $|r_{p,q}(z)| < 1$ для $\mathrm{Re}(z) > 0$;
(b) $A(\theta)$-приемлемой, если $|r_{p,q}(z)| < 1$ для $z \in \Sigma(\theta) \setminus \{0\}$.

Поскольку $r(\cdot) \in \pi_{p,q}$ является аппроксимацией e^{-z}, то естественно построить оператор-функцию $r(\tau_n A_n)^k$, которая может рассматриваться как аппроксимация полугруппы $\exp(tA_n)$ при $t = k\tau_n$. Для простоты мы предположим в следующих теоремах этого раздела, что $\|\exp(tA_n)\| \leqslant M$, $t \in \overline{\mathbb{R}}_+$.

Теорема 3.2.11. *Предположим, что выполняется условие* (B)*. Тогда существует константа* C*, зависящая от* $r(\cdot)$ *так, что если* $r(\cdot)$ *является* A*-приемлемой, то*

$$\|r(\tau_n A_n)^k\| \leqslant CM\sqrt{k} \quad \textit{для} \quad \tau_n > 0, \ k \in \mathbb{N}.$$

Замечание 3.2.12. Член $\sqrt{k}$ в теореме 3.2.11 не может быть, вообще говоря, удален в случае C_0-полугрупп. Более того, есть конкретные примеры C_0-полугрупп, показывающие, что выполняется неравенство $\|r(\tau_n A_n)^k\| \geqslant c\sqrt{k}$, $k \in \mathbb{N}$.

Говорят, что $r(\cdot) \in \pi_{p,q}$ имеет точность порядка $1 \leqslant d \leqslant p+q$, если $|e^{-z} - r(z)| = O(|z|^{d+1})$ при $|z| \to 0$.

Теорема 3.2.13 (см. [28]). *Предположим, что выполняется условие* (B_1)*. Тогда существует константа* C*, зависящая от* r *так, что если* r *является* $A(\theta)$*-приемлемой с точностью порядка* d *и* $\theta \in (\pi/2 - \varphi, \pi/2]$ *для* φ *из условия* (3.2.8)*, то*

$$\|r(\tau_n A_n)^k\| \leqslant CM_1 \quad \textit{для} \quad \tau_n > 0, \ k \in \mathbb{N}.$$

Разностная схема (называемая также схемой Кранка—Николсон), которая соответствует рациональной функции $r(\cdot)$, являющейся дробью Падэ $R_{1,1}(z)$, дается формулой

$$\frac{U_n(t+\tau_n) - U_n(t)}{\tau_n} = A_n \frac{U_n(t+\tau) + U_n(t)}{2}, \quad U_n(0) = u_n^0. \tag{3.2.9}$$

Легко видеть, что в этом случае

$$T_n(\tau_n) = \frac{I_n + \frac{\tau_n}{2}A_n}{I_n - \frac{\tau_n}{2}A_n} \quad \text{и} \quad \breve{A}_n = \left(\frac{I_n + \frac{\tau_n}{2}A_n}{I_n - \frac{\tau_n}{2}A_n} - I_n\right)\Big/\tau_n = A_n\left(I_n - \frac{\tau_n}{2}A_n\right)^{-1}.$$

3.2.3. Аппроксимация уравнений второго порядка. Случай уравнений второго порядка сильно отличается от случая уравнения первого порядка. Рассмотрим в банаховом пространстве E задачу Коши

$$u''(t) = Au(t) + f(t), \quad t \in [0,T]; \quad u(0) = u^0, \quad u'(0) = u^1, \tag{3.2.10}$$

где оператор A порождает C_0-косинус оператор-функцию $C(\cdot, A)$. Будем писать $A \in \mathcal{C}(M,\omega)$, если $\|C(t,A)\| \leqslant Me^{\omega|t|}$, $t \in \mathbb{R}$.

Определение 3.2.14. Функция $u(\cdot)$ называется классическим решением задачи (3.2.10), если $u(\cdot)$ является дважды непренывно дифференцируемой, $u(t) \in D(A)$ для всех $t \in [0,T]$ и $u(\cdot)$ удовлетворяет соотношениям (3.2.10).

Полудискретная аппроксимация задачи (3.2.10) — это следующие задачи Коши в банаховых пространствах E_n:

$$u_n''(t) = A_n u_n(t) + f_n(t), \quad t \in [0,T]; \quad u_n(0) = u_n^0, \quad u_n'(0) = u_n^1, \tag{3.2.11}$$

где операторы A_n порождают C_0-косинус оператор-функции, A_n и A согласованы, $u_n^0 \xrightarrow{\mathcal{P}} u^0$, $u_n^1 \xrightarrow{\mathcal{P}} u^1$ и $f_n(\cdot) \xrightarrow{\mathcal{P}} f(\cdot)$ в подходящем смысле.

Для C_0-косинус оператор-функций имеет место следующая теорема ABC.

Теорема 3.2.15 (см. [28])**.** *Пусть операторы A и A_n порождают C_0-косинус оператор-функции. Тогда следующие условия* (A) *и* (B$'$) *эквивалентны условию* (C$'$).

(A) *Согласованность. Существует $\lambda \in \rho(A) \cap \cap_n \rho(A_n)$ такое, что резольвенты сходятся*:

$$(\lambda I_n - A_n)^{-1} \xrightarrow{\mathcal{PP}} (\lambda I - A)^{-1}.$$

(B$'$) *Устойчивость. Существуют константы $M_3 \geqslant 1$ и $\omega_3 \geqslant 0$ такие, что*

$$\|C(t, A_n)\| \leqslant M_3 e^{\omega_3 t}, \quad t \geqslant 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

(C$'$) *Сходимость. Для любого конечного $T > 0$ имеем*

$$\max_{t\in[0,T]} \|C(t,A_n)u_n^0 - p_n C(t,A)u^0\| \to 0$$

при $n \to \infty$ для любого $u^0 \in E$, как только $u_n^0 \xrightarrow{\mathcal{P}} u^0$.

Естественно предполагать далее, что при аппроксимации выполняются условия (A) и (B$'$) из теоремы 3.2.15 для C_0-косинус оператор-функций.

Простейшей разностной схемой при аппроксимации (3.2.11) является схема

$$\frac{U_n^{k+1} - 2U_n^k + U_n^{k-1}}{\tau_n^2} = A_n U_n^k + \varphi_n^k, \quad k \in \left\{1, \ldots, \left[\frac{T}{\tau_n}\right]\right\}, \quad U_n^0 = u_n^0, \quad U_n^1 = u_n(\tau_n), \tag{3.2.12}$$

где, например, в случае $f_n(\cdot) \in C([0,T];E_n)$ можно положить $\varphi_n^k = f_n(k\tau_n)$, $k \in \{1,\ldots,K\}$, $K = \left[\dfrac{T}{\tau_n}\right]$, а в случае $f_n(\cdot) \in L^1([0,T];E_n)$ можно положить

$$\varphi_n^k = \frac{1}{\tau_n} \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} f_n(s)\,ds, \quad t_k = k\tau_n, \quad k \in \{1,\ldots,K\}.$$

Определение 3.2.16 (см. [26])**.** Операторы A_n для C_0-косинус оператор-функций $C(\cdot, A_n)$ удовлетворяют дискретному условию Крейна—Фатторини (коротко условию (F)), если выполняются следующие условия:

(i) существуют операторы $\mathfrak{B}_n \in \mathcal{C}(E_n)$ такие, что $\mathfrak{B}_n^2 = A_n$ и $\mathfrak{B}_n$ коммутируют с любым оператором из $B(E_n)$, коммутирующим с A_n;

(ii) операторы $\mathfrak{B}_n$ порождают C_0-группы такие, что $\|\exp(\pm t\mathfrak{B}_n)\| \leqslant M_0 e^{\omega_0|t|}$, $t \in \mathbb{R}_+$;

(iii) операторы $-A_n$ сильно позитивны, т.е.,

$$\|(\lambda I_n - A_n)^{-1}\| \leqslant \frac{M}{1+|\lambda|}, \quad \operatorname{Re}\lambda \geqslant 0,$$

и $\|\mathfrak{B}_n^{-1}\| \leqslant C$ для $n \in \mathbb{N}$.

Предложение 3.2.17 (см. [152]). *Существуют банахово пространство E и C_0-косинус оператор-функция $C(\cdot, A)$ (даже равномерно ограниченная) такие, что условие* (F) *не выполняется.*

Определение 3.2.18. Функция $\mathcal{K}(m) : \mathbb{Z} \to B(E)$ называется дискретной косинус оператор-функцией, если

$$\mathcal{K}(k+m) + \mathcal{K}(k-m) = 2\mathcal{K}(k)\mathcal{K}(m), \quad k, m \in \mathbb{Z}, \quad \mathcal{K}(0) = I.$$

Оператор A_τ дискретной косинус оператор-функции определяется по формуле $A_\tau = \dfrac{2}{\tau^2}(\mathcal{K}(1)-I)$. Оператор $\mathcal{K}(1)$ называется ведущим оператором дискретной косинус оператор-функции.

Предложение 3.2.19 (см. [350]). *Предположим, что $\mathcal{K}(1) \in B(E)$ является произвольным ограниченным линейным оператором. Тогда оператор-функция, определяемая соотношением*

$$\mathcal{K}(m+1) = 2\mathcal{K}(m)\mathcal{K}(1) - \mathcal{K}(m-1), \quad m \in \mathbb{Z}, \quad \mathcal{K}(0) = I,$$

является дискретной косинус оператор-функцией.

Мы рассматриваем дискретные косинус оператор-функции в пространствах E_n и пишем $\mathcal{C}_n(t, A_{\tau_n,n})$ для дискретных косинус оператор-функции с генераторами $A_{\tau_n,n}$, где $t = k\tau_n$, $k \in \mathbb{Z}$, и шагом дискретизации по времени $\tau_n > 0$. Поэтому дискретная косинус оператор-функция — это функция аргумента $t = k\tau_n$ с ведущим оператором $\mathcal{C}_n(\tau_n, A_{\tau_n,n}) \in B(E_n)$. Выбор ведущего оператора может быть разным в том смысле, что $\mathcal{C}_n(\tau_n, A_{\tau_n,n}) = I_n + \dfrac{\tau_n^2}{2} A_{\tau_n,n}$ с разным выбором оператора $A_{\tau_n,n}$. Можно взять $A_{\tau_n,n} = A_n$, скажем, из (3.2.11). Иногда в литературе используется другой выбор оператора $A_{\tau_n,n}$.

Замечание 3.2.20. Как отмечалось в предложении 3.2.17, C_0-косинус оператор-функция не всегда может быть представлена в виде C_0-полугрупп, порождаемых операторам $\mathfrak{B}$. Тем не менее дискретная косинус оператор-функция всегда может быть представлена в виде степеней ограниченных операторов (см. [130, 131]).

Определение 3.2.21. Функция $\mathcal{S}(k) : \mathbb{Z} \to B(E)$ называется дискретной синус оператор-функцией, ассоциированной с дискретной косинус оператор-функцией $\mathcal{K}(m)$, если

$$\mathcal{S}(k+m) + \mathcal{S}(k-m) = 2\mathcal{S}(k)\mathcal{K}(m), \quad k, m \in \mathbb{Z}, \quad \mathcal{S}(0) = 0. \tag{3.2.13}$$

Оператор $\mathcal{S}(1) \in B(E)$ называется ведущим оператором дискретной синус оператор-функции.

Предложение 3.2.22 (см. [350]). *Предположим, что $\mathcal{S}(1) \in B(E)$ является произволным линейным ограниченным оператором. Тогда дискретная синус оператор-функция, удовлетворяющая соотношению*

$$\mathcal{S}(m+1) = 2\mathcal{S}(m)\mathcal{K}(1) - \mathcal{S}(m-1), \quad m \in \mathbb{Z}, \quad \mathcal{S}(0) = 0, \tag{3.2.14}$$

является дискретной синус оператор-функцией.

Рассмотрим дискретные синус оператор-функции в пространствах E_n и запишем $\mathcal{S}_n(t, A_n)$ для дискретной синус оператор-функции, ассоциированной с $\mathcal{C}_n(t, A_n)$, где $t = k\tau_n$, $k \in \mathbb{Z}$, $\tau_n > 0$, является шагом дискретизации по времени.

Предложение 3.2.23. *Предположим, что*

$$\mathcal{S}_n(t, A_{\tau_n,n}) = \frac{\tau_n}{2} I_n + \tau_n \sum_{j=1}^{t/\tau_n} \mathcal{C}_n(j\tau_n, A_{\tau_n,n}), \quad t = m\tau_n, \quad m \in \mathbb{Z}, \quad \mathcal{S}_n(0, A_{\tau_n,n}) = 0.$$

Тогда $\{\mathcal{S}_n(m\tau_n, A_{\tau_n,n})\}_{m=1}^{\infty}$ являктся дискретной синус оператор-функцией.

Иногда рассматривают скорректированную дискретную синус оператор-функцию

$$\tilde{\mathcal{S}}_n(m\tau_n, A_n) = \mathcal{S}_n(m\tau_n, A_n) - \frac{\tau}{2}\mathcal{C}_n(m\tau_n, A_n), \quad m \in \mathbb{N}. \tag{3.2.15}$$

В этом случае решение задачи (3.2.12) дается формулой

$$U_n(t) = \mathcal{C}_n(t, A_{\tau_n,n})U_n^0 + \tilde{\mathcal{S}}_n(t, A_{\tau_n,n})u_n^{1,\tau_n}, \tag{3.2.16}$$

где u_n^{1,τ_n} удовлетворяет соотношению

$$\Big(I_n + \frac{\tau_n^2}{4}A_n\Big)u_n^{1,\tau_n} = \frac{U_n^1 - U_n^0}{\tau_n} - \frac{\tau_n}{2}A_nU_n^0.$$

Можно рассмотреть следующий выбор дискретной косинус оператор-функции, если ведущий оператор дискретной косинус оператор-функции выбрать в виде $\mathcal{C}_n\Big(\tau_n, A_n\Big(I_n - \frac{\tau_n^2}{2}A_n\Big)^{-1}\Big) = I_n + \frac{\tau_n^2}{2}A_n\Big(I_n - \frac{\tau_n^2}{2}A_n\Big)^{-1}$. В [359] было показано, что схема (3.2.12) устойчива в случае $\mathcal{C}_n\Big(\tau_n, A_n\Big(I_n - \frac{\tau_n^2}{2}A_n\Big)^{-1}\Big)$, т.е., если вместо A_n в (3.2.12) выбрать оператор $A_n\Big(I_n - \frac{\tau_n^2}{2}A_n\Big)^{-1}$. Более того, было показано [359], что для неоднородного уравнения выполняются оценки:

$$\|U_n(k\tau_n)\| \leqslant M\rho(\tau_n)^k\Bigg(\Bigg\|\frac{U_n^0 + U_n^1}{2}\Bigg\|_{D(A_n^\epsilon)} + \Bigg\|\frac{U_n^0 - U_n^1}{\tau_n}\Bigg\|_{D(A_n^\epsilon)} + \tau_n\sum_{j=0}^{k-1}\|\varphi_n(j\tau_n)\|_{D(A_n^\epsilon)}\Bigg), \tag{3.2.17}$$

где $k \in \mathbb{N}$, $\rho(\tau_n) = \Big(1 + \frac{c_0\tau_n}{\sqrt{2}} + \frac{c_0^2\tau_n^2}{4}\Big)^{1/2}$, и при любом малом $\epsilon > 0$.

Теорема 3.2.24 (см. [188])**.** *Пусть операторы A и A_n порождают C_0-косинус оператор-функцию и дискретные оператор-функции соответственно. Следующие условия* (A) *и* (B″) *эквивалентны условию* (C″).

(A) *Согласованность. Существует $\lambda \in \rho(A) \cap \bigcap_n \rho(A_n)$ такое, что резольвенты сходятся*:

$$(\lambda I_n - A_n)^{-1} \to (\lambda I - A)^{-1}.$$

(B″) *Устойчивость. Существуют константы $M_2 \geqslant 1$ и $\omega_1 \geqslant 0$ такие, что*

$$\|\mathcal{C}_n(t, A_n)\| \leqslant M_2e^{\omega_1 t}, \quad t \geqslant 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

(C″) *Сходимость. Для любого конечного $T > 0$ имеем*

$$\max_{t\in[0,T]}\|\mathcal{C}_n(t, A_n)u_n^0 - p_nC(t, A)u^0\| \to 0$$

при $n \to \infty$, как только $u_n^0 \xrightarrow{\mathcal{P}} u^0$.

Теорема 3.2.25 (см. [86])**.** *Предположим, что выполняется условие* (B″)*. Тогда схема*

$$\begin{gathered}\frac{U_n^{k+1} - 2U_n^k + U_n^{k-1}}{\tau_n^2} = A_n\Big(I_n - \frac{\tau_n^2}{2}A_n\Big)^{-1}U_n^k + \varphi_n^k,\\ k \in \Big\{1, \ldots, \Big[\frac{T}{\tau_n}\Big]\Big\}, \quad U_n^0 = u_n^0, \quad U_n^1 = u_n(\tau_n),\end{gathered} \tag{3.2.18}$$

т.е., схема (3.2.12)*, где оператор A_n заменен на $A_n\Big(I_n - \frac{\tau_n^2}{2}A_n\Big)^{-1}$, является почти слабо коэцитивно устойчивой в $C_n([0, T]; E_n^\theta)$ в следующем смысле*:

$$\begin{aligned}\Big\|A_n\Big(I_n - \frac{\tau_n^2}{2}A_n\Big)^{-1}U_n(k\tau_n)\Big\|_{E_n^\theta} \leqslant M\rho(\tau_n)^k\Bigg(\Bigg\|A_n\Big(I_n - \frac{\tau_n^2}{2}A_n\Big)^{-1}\frac{U_n^0 + U_n^1}{2}\Bigg\|_{D(A_n^{\theta+\epsilon})} +\\ + \Bigg\|A_n\Big(I_n - \frac{\tau_n^2}{2}A_n\Big)^{-1}\frac{U_n^0 - U_n^1}{\tau_n}\Bigg\|_{D(A_n^{\theta+\epsilon})} + \tau_n\sum_{j=0}^{k-1}\Big\|\varphi_n'(j\tau_n)\Big\|_{D(A_n^{\theta+\epsilon})}\Bigg),\end{aligned} \tag{3.2.19}$$

где $k \in \mathbb{N}$, $\rho(\tau_n) = \Big(1 + \dfrac{c_0\tau_n}{\sqrt{2}} + \dfrac{c_0^2\tau_n^2}{4}\Big)^{1/2}$, $\epsilon > 0$.

3.3. Аппроксимация некорректных задач

Рассмотрим задачу (3.1.1), где ограниченный линейный оператор $B \in B(E)$ задан на банаховом пространстве E. Элемент y и оператор B заданы, а элемент $x \in E$, решающий задачу (3.1.1), является искомым элементом. Предположим, что обратный оператор B^{-1} существует, но он не обязательно является ограниченным. Таким образом, задача (3.1.1) является типичной некорректной задачей [15, 36], поскольку решение задачи (3.1.1) существует только для элементов $y \in \mathcal{R}(B)$ и, кроме того, решение $x \in E$ не зависит, вообще говоря, непрерывно от $y \in E$. Ясно, что условие (iii) определения 3.1.1 не выполняется. Рассмотрим случаи, когда оператор B связан некоторым образом с эволюционными задачами, т.е., $B = A^{-1}$, где A порождает, например, C_0-полугруппу или проинтегрированную полугруппу и поэтому обладает некоторыми специальными свостваами, которы приводят к существованию регуляризационного алгоритма даже в общем банаховом пространстве E.

3.3.1. Итерационная процедура для некорректных задач. Большинство итерационных методов [93] для решения некорректной задачи (3.1.1) базируется на рассмотрении [91, 382, 3] задачи Коши
$$w'(t) = Bw(t) - y, \quad w(0) = w^0 \in E, \tag{3.3.1}$$
с обобщенным решением
$$w(t) = \exp(tB)w^0 - \int_0^t \exp((t-s)B)ds\, y = \exp(tB)w^0 - \big(\exp(tB) - I\big)B^{-1}y. \tag{3.3.2}$$
Если $\exp(tB) \to 0$ при $t \to \infty$, то $w(t) \to \bar{x}$ при $t \to \infty$, где $\bar{x}$ является решением задачи (3.1.1). Тот факт, что $\exp(tB) \to 0$ при $t \to \infty$, является решающим в данных рассуждениях. Обычно w^0 выбирают близким к $\bar{x}$ или равным 0.

В [244] доказано, что если оператор A порождает аналитическую C_0-полугруппу и оператор A^{-1} существует, то оператор A^{-1} также порождает ограниченную голоморфную C_0-полугруппу.

Лемма 3.3.1 (см. [278])**.** *Пусть оператор A порождает аналитическую ограниченную C_0-полугруппу. Предположим, что оператор $B = A^{-1}$ существует и $\sigma(B) \cap i\mathbb{R} \subseteq \{0\}$. Тогда полугруппа $\exp(\cdot A^{-1}) \equiv \exp(\cdot B)$ устойчива.*

Замечание 3.3.2. Заметим, что лемма 3.3.1 может быть усилена. Более точно, как было показано в [2], C_0-полугруппа $\exp(\cdot B)$ является полугруппой, медленно меняющейся на бесконечности в равномерной операторной топологии.

Из (3.3.2) ясно, что $\|w(t) - B^{-1}y\| \to 0$ при $t \to \infty$ с такой же скоростью, что и $\exp(tB)w^0 \to 0$ и $\exp(tB)B^{-1}y \to 0$.

Лемма 3.3.3. *Пусть оператор A порождает ограниченную аналитическую C_0-полугруппу. Предположим, что оператор $B = A^{-1}$ существует и $\sigma(B) \cap i\mathbb{R} \subseteq \{0\}$. Тогда невязка и поправка имеют один и тот же порядок сходимости к 0 при $t \to \infty$.*

Замечание 3.3.4. Если $\|Bw(t) - y\| \to 0$ при $t \to \infty$ для любых $w^0, y \in E$, то $\|\exp(tB)y\| \to 0$ для тех же t и C_0-полугруппа $\exp(\cdot B)$ должна быть устойчива. Это означает, что устойчивость полугруппы $\exp(\cdot B)$ эквивалентна сходимости невязки к 0 для любых $w^0, y \in E$.

Ситуация в корне меняется, если y определен неточно и C_0-полугруппа $\exp(\cdot A)$ не является аналитичной. Для решения задачи (3.1.1) с y^δ, где $\|y - y^\delta\| \leqslant \delta$, т.е. для решения задачи
$$Bx = y^\delta, \quad x, y^\delta \in E, \tag{3.3.3}$$
следуя рассуждениям в (3.3.1), приходится рассматривать задачу Коши
$$v'(t) = Bv(t) - y^\delta, \quad w(0) = w^0 \in E, \tag{3.3.4}$$

и процесс

$$v(t) = \exp(tB)w^0 - \int\limits_0^t \exp((t-s)B)\,ds\,y^\delta = \tag{3.3.5}$$

$$= \exp(tB)w^0 - \int\limits_0^t \exp((t-s)B)\,ds(y^\delta - y) - \int\limits_0^t \exp((t-s)B)\,ds\,y =$$

$$= \exp(tB)w^0 - \int\limits_0^t \exp((t-s)B)\,ds(y^\delta - y) - (\exp(tB) - I)\,B^{-1}y \tag{3.3.6}$$

при $t \to \infty$ и $\delta \to 0$. Согласно лемме 3.3.1, в случае аналитических C_0-полугрупп этот процесс (3.3.6) в действительности дает решение задачи (3.1.1), если $t\delta \to 0$. Это означает, что для заданного δ необходимо остановить процедуру в некоторой точке t_δ и получить оценку

$$\|v(t_\delta) - B^{-1}y\| \leqslant \|\exp(t_\delta B)w^0\| + ct_\delta\delta + \|\exp(t_\delta B)B^{-1}y\|. \tag{3.3.7}$$

Определение 3.3.5. Говорят, что имеет место правило останова по невязке, если для заданного $\epsilon(\delta) > \delta$ процедура, остановленная в точке t_δ, влечет $\|Bv(t_\delta)-y\| \leqslant \epsilon(\delta)$, но $\|Bv(t)-y\| > \epsilon(\delta)$ при $t < t_\delta$. Говорят, что имеет место правило останова по поправке с фиксированным $\tau > 0$, если процедура останавливается в t_δ с $\left\|\dfrac{v(t_\delta+\tau) - v(t_\delta)}{\tau}\right\| \leqslant \epsilon(\delta)$, но $\left\|\dfrac{v(t+\tau) - v(t)}{\tau}\right\| > \epsilon(\delta)$ для $t < t_\delta$.

Конкретный выбор функции $\epsilon(\delta)$ определим позже.

Поведение невязки и поправки в случае (3.3.3) также отличаются от того, что мы наблюдали в (3.3.1)–(3.3.2). Можно записать

$$Bv(t) - y^\delta = \exp(tB)Bw^0 - \exp(tB)y^\delta = \exp(tB)Bw^0 - \exp(tB)(y^\delta - y) - \exp(tB)y, \tag{3.3.8}$$

$$\frac{v(t+\tau) - v(t)}{\tau} =$$

$$= \frac{\exp(\tau B) - I}{\tau}\exp(tB)w^0 - \frac{1}{\tau}\int\limits_0^\tau \exp(sB)\,ds\,\big(\exp(tB)(y^\delta - y) + \exp(tB)y\big). \tag{3.3.9}$$

В случае экспоненциально убывающей C_0-полугруппы $\exp(\cdot A)$, вообще говоря, C_0-полугруппа $\exp(\cdot B)$ больше не является ограниченной и поэтому нам понадобится дополнительная гладкость элемента $y \in D(A^2)$. Действительно, имеет место следующая лемма.

Лемма 3.3.6 (см. [456])**.** *Пусть A порождает экспоненциально устойчивую C_0-полугруппу. Тогда функция $\eta(t) = \int\limits_0^t \exp(sB)\,z\,ds$ может быть оценена следующим образом:*

$$\|\eta'(t)\| \leqslant Ct^{-1/4}\|Az\| \quad \text{для} \quad z \in D(A), \tag{3.3.10}$$

$$\|\eta'(t)\| \leqslant Ct^{1/4}\|z\|, \quad \|\eta(t)\| \leqslant Ct\|z\| \quad \text{для} \quad z \in E, \quad t \geqslant t_1 > 0.$$

Из (3.3.8) получаем оценку $\|Bv(t) - y^\delta\| \leqslant c\Big(\|\exp(tB)Bw^0\| + t^{1/4}\delta + t^{-1/4}\|Ay\|\Big)$ при $t \to \infty$, $\delta \to 0$. Поэтому ясно, что и невязка, и поправка сходятся к нулю, если $t \to \infty$, $\delta \to 0$, и $t^{1/4}\delta \to 0$.

Согласно принципу невязки [91, 23, 3], можно остановить процедуру (3.3.5) в некоторой точке t_δ, где $\|Bv(t_\delta) - y^\delta\|$ не больше, чем некоторое $\epsilon(\delta) > 0$. Например, если положить $\epsilon(\delta) = c\delta^{1/5}$, то

$$c(t^{-1/4} + t^{1/4}\delta + t^{-1/4}) \leqslant \epsilon(\delta) = c\delta^{1/5}$$

для значений

$$t^{1/4}\delta \leqslant \frac{1}{3}\delta^{1/5}, \quad t^{-1/4} \leqslant \frac{1}{3}\delta^{1/5}.$$

Это означает, что

$$3^4\delta^{-4/5} \leqslant t \leqslant \delta^{-16/5}\left(\frac{1}{3}\right)^4$$

при $\delta \to 0$. Если остановиться в $t_\delta = 81\delta^{-4/5}$, то, в силу (3.3.7), $\|v(t_\delta) - B^{-1}y\| \leqslant C\delta^{1/5} \to 0$ при $\delta \to 0$ и процедура (3.3.5) не является регуляризирующим алгоритмом. Однако, если остановиться в точке $t_\delta = \delta^{-20/5}$, то, имея гладкость, y^δ, $y \in D(A)$, получаем оценку

$$\|v(t_\delta) - B^{-1}y\| \sim \|B^{-1}B\int\limits_0^{t_\delta}\exp((t_\delta - s)B)ds(y^\delta - y)\| \geqslant$$

$$\geqslant \gamma\|(\exp(t_\delta B) - I)(y^\delta - y)\| \geqslant \gamma\Big|\|\exp(tB)(y^\delta - y)\| - \|(y^\delta - y)\|\Big| \sim t_\delta^{1/4}\delta \sim 1,$$

которая не гарантирует сходимость к нулю для y^δ, реализующего норму полугруппы в точке t_δ и при $\delta \to 0$ и $t_\delta = \dfrac{1}{81}\delta^{-20/5}$.

Из леммы 3.3.6 следует, что процедура (3.3.6) для случая экспоненциально убывающей C_0-полугруппы $\exp(\cdot A)$ дает оценку $\|v(t_\delta) - B^{-1}y\| \leqslant c(t_\delta^{-1/4}\|Aw^0\| + t_\delta\delta + t_\delta^{-1/4}\|A^2y\|)$ при $\delta \to 0$. Естественно [449] сделать выбор $t_\delta\delta = t_\delta^{-1/4}$, т.е., $t_\delta = \dfrac{1}{\delta^{4/5}}$. Это приводит к $\|v(t_\delta) - B^{-1}y\| \sim \delta^{1/5}$ при $\delta \to 0$.

Заметим, что лемма 3.3.6 дает очень общие оценки и для каждого конкретного выбора оператора A оценки могут отличаться, и потому можно найти оптимальное соотношение для t, δ и ϵ.

Предположим, что мы выполняем вычисления с погрешностью $\xi(t)$ в каждый момент времени t. Тогда задача Коши (3.3.4) примет вид

$$z'(t) = Bz(t) - y^\delta + \xi(t), \quad z(0) = z^0 \in E, \tag{3.3.11}$$

где $\|\xi(t)\| \leqslant \eta$ и $\eta \leqslant \delta$ для любого t. Решение задачи (3.3.11) дается формулой

$$z(t) = \exp(tB)w^0 - \int\limits_0^t \exp((t-s)B)\,ds\,y^\delta + \int\limits_0^t \exp((t-s)B)\xi(s)\,ds =$$

$$= \exp(tB)w^0 - \int\limits_0^t \exp((t-s)B)\,ds(y^\delta - y) - (\exp(tB) - I)\,B^{-1}y + \int\limits_0^t \exp((t-s)B)\xi(s)\,ds. \tag{3.3.12}$$

Как было показано в [13], даже в гильбертовом пространстве в случае задачи (3.3.11) имеет место интересный факт: остановка процедуры (3.3.12) по невязке не работает, следует использовать правило остановки по поправке.

С другой стороны, поправка

$$\frac{z(t+\tau) - z(t)}{\tau} = \frac{1}{\tau}(\exp(\tau B) - I)\exp(tB)w^0 - \frac{1}{\tau}\int\limits_0^\tau \exp(sB)\,ds\,\exp(tB)y-$$

$$-\frac{1}{\tau}\int\limits_t^{t+\tau}\exp((t+\tau-s)B)\,ds\,(y^\delta - y) - \frac{1}{\tau}\int\limits_0^t \Big(\exp((t+\tau-s)B) - \exp((t-s)B)\Big)\,ds\,(y^\delta - y)+$$

$$+\frac{1}{\tau}\int\limits_t^{t+\tau}\exp((t+\tau-s)B)\xi(s)\,ds + \frac{1}{\tau}\int\limits_0^t \Big(\exp((t+\tau-s)B) - \exp((t-s)B)\Big)\xi(s)\,ds =$$

$$= \frac{1}{\tau}(\exp(\tau B) - I)\exp(tB)w^0 - \frac{1}{\tau}\int\limits_0^\tau \exp(sB)\,ds\,\Big((y^\delta - y) - B\int\limits_0^t \exp((t-s)B)\,ds(y^\delta - y)\Big)+$$

$$+\frac{1}{\tau}\int\limits_0^\tau \exp(sB)\,ds\,\exp(tB)y + \frac{1}{\tau}\int\limits_0^\tau \exp(sB)\xi(t+\tau-s)\,ds+$$

$$+\frac{1}{\tau}\int\limits_0^\tau \exp(sB)\,ds\,B\int\limits_0^t \exp((t-s)B)\xi(s)\,ds \qquad (3.3.13)$$

имеет, по крайней мере, ту же скорость сходимости к нулю для $\delta \to 0$, $t \to \infty$, что и процесс из (3.3.12). Действительно, процесс

$$z(t) - B^{-1}y = \exp(tB)w^0 - \int\limits_0^t \exp((t-s)B)\,ds(y^\delta - y) - \exp(tB)B^{-1}y + \int\limits_0^t \exp((t-s)B)\xi(s)\,ds$$

имеет те же члены, что и в (3.3.13) умноженные на равномерно ограниченный оператор $\dfrac{1}{\tau}(\exp(\tau B) - I)$ для достаточно малого τ. Это означает, что можно остановить процесс по поправке и по лемме 3.3.6 получить следующую скорость сходимости: $\|z(t) - B^{-1}y\| \leqslant c(t^{-1/4}\|Aw^0\| + t\delta + t^{-1/4}\|A^2y\| + t\eta) \to 0$ при $t\delta \to 0$ и $t\eta \to 0$. Поэтому алгоритм (3.3.12) является регуляризующим алгоритмом.

3.3.2. Итерационная аппроксимация значений оператора A. Для аппроксимации задачи (3.1.1) рассмотрим в банаховых пространствах E_n задачи

$$B_n x_n = y_n, \quad x_n, y_n \in E_n, \qquad (3.3.14)$$

где ограниченные линейные операторы $B_n \in B(E_n)$ дискретно аппроксимируют оператор B задачи (3.1.1) и $y_n \xrightarrow{\mathcal{P}} y$. На практике мы имеем только последовательность y_n^δ такую, что $\|y_n^\delta - y_n\| \leqslant \delta$, и поэтому $y_n^\delta \xrightarrow{\mathcal{P}} y$ при $n \to \infty$, $\delta \to 0$.

Рассмотрим итерационный метод, основанный на соотношении

$$x_n^k - \bar{x}_n = r(B_n)^k(x_n^0 - \bar{x}_n), \qquad (3.3.15)$$

со следующей функцией $r(B_n)$:

$$r(B_n) = (I_n - \tau_n B_n)^{-1}, \qquad r(B_n) = \left(I_n + \frac{\tau_n B_n}{2}\right)\left(I_n - \frac{\tau_n B_n}{2}\right)^{-1}.$$

Элементы $\bar{x}_n$ являются точными решениями задачи (3.3.14) и x_n^0 являются начальными значениями процесса. Для простоты предположим, что $\gamma = 0$, и поэтому мы рассмотрим случай $B_n = A_n^{-1}$. Операторы B_n ограничены и $\operatorname{Re}\sigma(B_n) \leqslant 0$.

Процедура (3.3.15) порождает итерационный метод:

$$x_n^k = r(B_n)x_n^{k-1} + (I_n - r(B_n))\bar{x}_n = r(B_n)x_n^{k-1} + q(B_n)y_n, \quad k = 1, 2, 3, \ldots, \qquad (3.3.16)$$

где $I_n - r(B_n) = q(B_n)B_n$. Решение метода (3.3.16) дается по формуле

$$x_n^k = r(B_n)^k x_n^0 + \sum_{j=0}^{k-1} r(B_n)^j q(B_n)y_n. \qquad (3.3.17)$$

Итак, эти разделы посвящены аппроксимации значений неограниченных операторов. Подробности об этой области исследований можно найти в [167, 23, 335].

3.3.3. Случай C_0-полугрупп. Если оператор A порождает экспоненциально устойчивую C_0-полугруппу, то A^{-1} ограничен, и имеет место следующее интегральное представление:

$$\exp(tA^{-1})x = Ix - \sqrt{t}\int_0^\infty \frac{J_1(2\sqrt{ts})}{\sqrt{s}}\exp(sA)x\,ds, \quad t \geqslant 0, \quad x \in E,$$

где $J_1(\cdot)$ — функция Бесселя первого порядка (порядка 1). Для соответствующей функции Бесселя будем использовать обозначение J_0.

Для любого $y^0 \in D(A^2)$ существуют такие $y_n^0 \in D(A_n^2)$, что $y_n^0 \xrightarrow{\mathcal{P}} y^0$, $A_n y_n^0 \xrightarrow{\mathcal{P}} Ay^0$ и $A_n^2 y_n^0 \xrightarrow{\mathcal{P}} A^2 y^0$. Начнем со случая полудискретизации.

Теорема 3.3.7 (см. [278]). *Предположим, что оператор A порождает аналитическую C_0-полугруппу* $\exp(\cdot A)$, $\omega(A) < 0$, *и выполняются условия* (A) *и* (B_1) *теоремы* 3.2.5 *с* $\omega_1 < 0$. *Тогда для любого заданного элемента* $y \in D(A^2)$, $\|y_n^\delta - p_n y\| \leqslant \delta$, *и любой последовательности* $\{y_n\}$, $y_n \in D(A_n^2)$, *такой, что* $y_n \xrightarrow{\mathcal{P}} y$, $A_n y_n \xrightarrow{\mathcal{P}} Ay$, $A_n^2 y_n \xrightarrow{\mathcal{P}} A^2 y$, *имеем*

$$\left\| -\int_0^t \exp(sB_n)\,ds\,y_n^\delta - p_n Ay \right\| \leqslant C\delta^{1/5}(\|A_n^2 y_n\| + 1) + \|A_n y_n - p_n Ay\|, \tag{3.3.18}$$

где $t = \delta^{-4/5}$.

Для случая $r(B_n) = (I_n + \tau_n B_n/2)(I_n - \tau_n B_n/2)^{-1}$, т.е., $q(B_n) = -\tau_n(I_n - \tau_n B_n/2)^{-1}$, имеет место следующая теорема.

Теорема 3.3.8 (см. [278]). *Предположим, что оператор A порождает аналитическую C_0-полугруппу* $\exp(\cdot A)$, $\omega(A) < 0$, *и выполняются условия* (A) *и* (B_1) *теоремы* 3.2.5 *с* $\omega_1 < 0$. *Тогда для любого заданного элемента* $y \in D(A^2)$, $\|y_n^\delta - p_n y\| \leqslant \delta$, *и любой последовательности* $\{y_n\}$, $y_n \in D(A_n^2)$ *такой, что* $y_n \xrightarrow{\mathcal{P}} y$, $A_n y_n \xrightarrow{\mathcal{P}} Ay$, $A_n^2 y_n \xrightarrow{\mathcal{P}} A^2 y$, *имеем*

$$\left\| \sum_{j=0}^{k-1} r(B_n)^j q(B_n) y_n^\delta - p_n Ay \right\| \leqslant C\delta^{1/5}(1 + \|A_n^2 y_n\|) + \|A_n y_n - p_n Ay\|,$$

при $\delta \to 0$, $\tau_n \to 0$, $k, n \to \infty$, *и* $\tau_n = \delta^{1/2}$, $k = [\delta^{-13/10}]$.

3.3.4. Случай один раз проинтегрированных полугрупп. Для простоты предположим, что мы уже сделали выбор ω, и рассмотрим случай, где проинтегрированная полугруппа e_1^{tA} ограничена, $B = A^{-1}$ и

$$e_1^{tA}x = (\exp(tA) - I)A^{-1}x, \quad x \in E, \quad \|\exp(tA)B\| \leqslant Me^{-\nu t} \quad \text{для всех } t \geqslant 0 \text{ и некоторого } \nu > 0. \tag{3.3.19}$$

Это всегда можно сделать.

Без потери общности можно предположить, что операторы A_n из следствия 3.5.2 также удовлетворяют условию равномерной ограниченности семейства $e_1^{tA_n}$ и

$$e_1^{tA_n}x_n = (\exp(tA_n) - I_n)A_n^{-1}x_n, \quad x_n \in E_n, \quad \|\exp(tA_n)B_n\| \leqslant Me^{-\nu t} \tag{3.3.20}$$

для всех $t \geqslant 0$ и некоторого $\nu > 0$.

Теорема 3.3.9 (см. [278]). *Предположим, что оператор A порождает ограниченную один раз проинтегрированную полугруппу e_1^{tA} со свойством* (3.3.19). *Тогда*

$$\exp(tA^{-1})x = x + t^2\int_0^\infty \frac{\sqrt{ts}J_0(2\sqrt{ts}) - J_1(2\sqrt{ts})}{(ts)^{3/2}} e_1^{sA}x\,ds, \quad x \in E, \tag{3.3.21}$$

$$\|\exp(tA^{-1})\| \leqslant 1 + Ct, \quad t \geqslant 0, \tag{3.3.22}$$

$$\|\exp(tA^{-1})x\| \leqslant Ct^{-1/4}\|A^2x\|, \quad x \in D(A^2), \quad t \geqslant t_0 > 0, \tag{3.3.23}$$

и
$$\left\| \int\limits_0^t \exp(\xi A^{-1}) d\xi \right\| \leqslant t + Ct^2, \quad t \geqslant 0. \tag{3.3.24}$$

Теорема 3.3.10 (см. [278]). *Предположим, что операторы A и A_n порождают ограниченные один раз проинтегрированные полугруппы e_1^{tA}, $e_1^{tA_n}$ со свойствами* (3.3.19), (3.3.20) *и выполняется условие* (A) *следствия* 3.5.2. *Тогда для любого $y \in D(A^3)$, $\|y_n^\delta - p_n y\| \leqslant \delta$, и любой последовательности $\{y_n\}$, $y_n \in D(A_n^3)$, такой, что $y_n \xrightarrow{\mathcal{P}} y$, $A_n y_n \xrightarrow{\mathcal{P}} Ay$, $A_n^2 y_n \xrightarrow{\mathcal{P}} A^2 y$, $A_n^3 y_n \xrightarrow{\mathcal{P}} A^3 y$, имеем*
$$\left\| -\int\limits_0^t \exp(sB_n)\, ds\, y_n^\delta - p_n Ay \right\| \leqslant C\delta^{1/9}(\|A_n^3 y_n\| + 1) + \|A_n y_n - p_n Ay\|, \tag{3.3.25}$$
где $t = \delta^{-4/9}$.

Рассмотрим случай ограниченных операторов $B_n = A_n^{-1}$ и $r(B_n) = (I_n - \tau_n B_n)^{-1}$, т.е., имеем $q(B_n) = -\tau_n (I_n - \tau_n B_n)^{-1}$ в (3.3.17).

Теорема 3.3.11 (см. [278]). *Предположим, что операторы A и A_n порождают ограниченные один раз проинтегрированные полугруппы e_1^{tA}, $e_1^{tA_n}$ со свойствами* (3.3.19), (3.3.20) *и выполняется условие* (A) *следствия* 3.5.2. *Тогда для любого элемента $y \in D(A^3)$, $\|y_n^\delta - p_n y\| \leqslant \delta$, и любой последовательности $\{y_n\}$, $y_n \in D(A_n^3)$, такой, что $y_n \xrightarrow{\mathcal{P}} y$, $A_n y_n \xrightarrow{\mathcal{P}} Ay$, $A_n^2 y_n \xrightarrow{\mathcal{P}} A^2 y$, $A_n^3 y_n \xrightarrow{\mathcal{P}} A^3 y$, имеем*
$$\left\| \sum_{j=0}^{k-1} r(B_n)^j q(B_n) y_n^\delta - p_n Ay \right\| \leqslant C\delta^{1/9}(1 + \|A_n^3 y_n\|) + \|A_n y_n - p_n Ay\|,$$
при $\delta \to 0$, $\tau_n \to 0$, $k, n \to \infty$, и $\tau_n = \delta^{13/9}$, $k = [\delta^{-17/9}]$.

Для случая $r(B_n) = (I_n + \tau_n B_n/2)(I_n - \tau_n B_n/2)^{-1}$, т.е., $q(B_n) = -\tau_n (I_n - \tau_n B_n/2)^{-1}$, имеет место следующая теорема.

Теорема 3.3.12 (см. [278]). *Предположим, что операторы A и A_n порождают ограниченные один раз проинтегрированные полугруппы e_1^{tA}, $e_1^{tA_n}$ со свойствами* (3.3.19), (3.3.20) *и выполняется условие* (A) *следствия* 3.5.2. *Тогда для любого элемента $y \in D(A^3)$, $\|y_n^\delta - p_n y\| \leqslant \delta$, и любой последовательности $\{y_n\}$, $y_n \in D(A_n^3)$, такой, что $y_n \xrightarrow{\mathcal{P}} y$, $A_n y_n \xrightarrow{\mathcal{P}} Ay$, $A_n^2 y_n \xrightarrow{\mathcal{P}} A^2 y$, $A_n^3 y_n \xrightarrow{\mathcal{P}} A^3 y$, имеем*
$$\left\| \sum_{j=0}^{k-1} r(B_n)^j q(B_n) y_n^\delta - p_n Ay \right\| \leqslant C\delta^{1/16}(1 + \|A_n^3 y_n\|) + \|A_n y_n - p_n Ay\|, \tag{3.3.26}$$
при $\delta \to 0$, $\tau_n \to 0$, $k, n \to \infty$, и $\tau_n = \delta^{5/8}$, $k = [\delta^{-7/8}]$.

3.4. Сильно некорректные эволюционные уравнения

Рассмотрим обратную задачу Коши в банаховом пространстве E:
$$\begin{aligned} v'(t) &= Av(t), \qquad & t \in [0, T], \\ v(T) &= v^T, \qquad & v^T \in E, \end{aligned} \tag{3.4.1}$$
где оператор A порождает аналитическую C_0-полугруппу. Необходимо найти (вычислить) элемент $v(0) \in E$. По крайней мере, в двух важных случаях задача (3.4.1) не является корректно поставленной. Более точно, если A не ограничен и порождает аналитическую C_0-полугруппу

или если C_0-полугруппа $\exp(\cdot A)$ является компактной, то задача (3.4.1) не является корректно поставленной. Действительно, в этих ситуациях задача

$$\exp(TA)x = v^T, \quad v^T, x \in E,$$

некорректно поставлена [36] в том смысле, что оператор $(\exp(TA))^{-1} = \exp(-TA)$ не является ограниченным на E и, кроме того, в общем, $D(\exp(-TA)) \neq E$. Это означает, что в этих случаях задача Коши (3.4.1) имеет решение только для некоторых (не для всех) начальных данных $v^T \in E$ и что решение $v(0) \in E$, если оно и существует, не зависит непрерывно от начальных данных. Такие задачи возникают в различных областях математической физики и инженерии. Исследования численного анализа в этом направлении сегодня весьма актуальны и интенсивно развиваются [75, 1, 104, 173, 177, 193, 194, 195, 196, 336, 351, 9, 213, 10, 11, 93, 96, 94, 214, 92].

Полагая $v(\eta) = u(T-\eta)$, можно переписать задачу (3.4.1) в виде

$$\begin{cases} u'(t) = -Au(t), \quad t \in [0,T], \\ u(0) = u^0, \end{cases} \tag{3.4.2}$$

где $u^0 = v^T$ задан, а $u(T)$ является искомым элементом. Необходимо подчеркнуть, что здесь оператор A порождает аналитическую C_0-полугруппу и спектр оператора $-A$ расположен на $[0, +\infty)$.

Определение 3.4.1. Зафиксируем $\alpha_0 > 0$. Семейство ограниченных линейных операторов $R_{\alpha,T}$, $\alpha_0 > \alpha > 0$, на пространстве E называется регуляризатором задачи Коши (3.4.2), если для любого $\delta > 0$ и любого $u^0 \in E$, для которых решение задачи (3.4.2) существует, найдется такое $\alpha = \alpha(\delta) > 0$, что $\alpha(\delta) \to 0$ при $\delta \to 0$ и

$$\sup_{\|u^\delta - u^0\| \leqslant \delta} \|R_{\alpha(\delta),T} u^\delta - \exp(-TA)u^0\| \to 0 \quad \text{при} \quad \delta \to 0. \tag{3.4.3}$$

В [21] было доказано, что для существования линейного коммутирующего с $\exp(tA)$, $t \geqslant 0$, регуляризатора задачи (3.4.2), необходимо и достаточно чтобы для каждого $0 < \alpha < \alpha_0$ оператор $-A$ порождал C_α-полугруппу $\mathcal{S}_\alpha(tA)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, такую, что C_α сильно сходится к единичному оператору I при $\alpha \to 0$.

Предположим, что оператор A порождает аналитическую полугруппу и $u(\cdot)$ является решением задачи (2.2.4) с $y \in D(A)$, т.е., $u(t) = \exp(-tA)y$. Тогда C_α-полугруппа $\mathcal{S}_\alpha(tA)$ с генератором $-A$ такая, что $C_\alpha \to I$ при $\alpha \to 0$, является регуляризатором $t \mapsto R_{\alpha,t}$, и выполняется (3.4.3) (см. [21]). Действительно, по теореме 2.2.8, функция $C_\alpha^{-1}\mathcal{S}_\alpha(tA)C_\alpha y$ является решением задачи $(ACP; -A, T, C_\alpha y)$. В то же время $C_\alpha u(\cdot)$ является решением задачи $(ACP; -A, T, C_\alpha y)$. Следовательно,

$$\|\mathcal{S}_\alpha(tA)y - u(t)\| = \|C_\alpha u(t) - u(t)\| \to 0$$

для всех $0 \leqslant t < T$ при $\alpha \to 0$. Таким образом, выбирая y_δ так, что $\|y_\delta - y\| \leqslant \delta$, получаем регуляризацию

$$\|\mathcal{S}_{\alpha(\delta)}(tA)y_\delta - \exp(-tA)y\| \leqslant \|\mathcal{S}_{\alpha(\delta)}(tA)\| \, \|y_\delta - y\| + \|\mathcal{S}_{\alpha(\delta)}(tA)y - u(t)\| \to 0$$

при $\delta \to 0$, $\alpha(\delta) \to 0$, $0 \leqslant t < T$ и при подходящем выборе между δ и $\|\mathcal{S}_{\alpha(\delta)}(tA)\|$.

Для задачи (3.4.2) можно рассмотреть много регуляризаторов. Например, в [27] было показано, что если $-A_n^2$ порождает косинус оператор-функцию и выполняется условие (F) из определения 3.2.16, то метод квазиобращения, который определяется задачами Коши

$$u'_{n,\alpha}(t) = -A_n u_{n,\alpha}(t) - \alpha A_n^2 u_{n,\alpha}(t), \quad u_{n,\alpha}(0) = u_n^0,$$

является регуляризацинным методом (3.4.2) и $\|u_{n,\alpha}(T) - p_n u(T)\| \leqslant C\alpha(\|u_n^0 - p_n u^0\|/\delta + \rho)$, где $\alpha = \alpha(\delta) = 1/\big(\log(1/\delta) - \log\log(1\delta) - o(\log^{-1}(1/\delta))\big)$. В этом случае для получения скорости сходимости рассматривают

$$u'_\alpha(t) = -Au_\alpha(t) - \alpha A^2 u_\alpha(t), \quad u_\alpha(0) = u^0,$$

где $\mathcal{S}_\alpha(t) = \exp(-tA)\exp(-\alpha TA^2)$ является C_α-полугруппой с $C_\alpha = \exp(-\alpha TA^2)$ и $C_\alpha \to I$ при $\alpha \to 0$. Более того, генератор этой C_α-полугруппы есть $-A$.

Таким образом, мы видим, что полудискретная аппроксимация определяется задачами Коши

$$u_{n,\alpha}(t) = A_{n,\alpha}u_{n,\alpha}(t), \quad u_{n,\alpha}(0) = u_n^0, \tag{3.4.4}$$

где $A_{n,\alpha} = -A_n - \alpha A_n^2$. Если в (3.4.4) выбрать $A_{n,\alpha} = -(\exp(\alpha A_n) - \alpha I_n)/\alpha$, то, как было показано в [27], выполняется следующее утверждение. Предположим, что выполняется условие (F) из определения 3.2.16. Если $\alpha = 1/\big(\log(1/\delta) - \log\log(1\delta) - o(\log^{-1}(1/\delta))\big)$, то $\|u_{n,\alpha}(T) - p_n u(T)\| \leqslant C\alpha(\|u_n^0 - p_n u^0\|/\delta + \rho)$.

В [7, 139] было показано, что стохастическое дифференциальное уравнение

$$\begin{cases} du_\alpha(t) = -Au_\alpha(t)dt + \alpha Au_\alpha(t)dw(t), \\ u(0) = u^0, \end{cases} \tag{3.4.5}$$

где оператор A порождает аналитическую C_0-полугруппу и где $w(\cdot)$ является стандартным одномерным винеровским процессом, порождает стохастическую регуляризацию задачи (3.4.2). Точнее, оператор-функция

$$U_\alpha(t)u^0 = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma e^{-t\lambda-\alpha(w(t)-w(0))\lambda-(1/2)\alpha^2\lambda^2|t|}(\lambda I - A)^{-1}u^0 d\lambda, \quad t > 0,$$

представляющая собой решение задачи при $u^0 \in \mathfrak{A}_c(A)$, обладает следующими свойствами:

$$\lim_{\alpha\to 0}\|U_\alpha(T)u^0 - \exp(-TA)u^0\| = 0, \tag{3.4.6}$$

$$\|U_\alpha(t)\| \leqslant \frac{c_1}{\alpha\sqrt{|t|}}\exp\left(c_2\frac{\sqrt{|t|}}{\alpha} + c_3|t|^{-\mu})^2\right) + b(\alpha,|t|) \quad \text{для любого} \quad \alpha > 0. \tag{3.4.7}$$

Здесь функция $b(\alpha,t)$ ограничена по α и t, а $\mathfrak{A}_c(A)$ является множеством целых векторов оператора A. Это означает, что, в силу неравенства

$$\|U_\alpha(T)u^\delta - \exp(-TA)u^0\| \leqslant \|U_\alpha(T)\|\,\|u^\delta - u^0\| + \|U_\alpha(T)u^0 - \exp(-TA)u^0\|, \tag{3.4.8}$$

имеет место такая зависимость $\alpha = \alpha(\delta)$ что $U_\alpha(T)$ становится регуляризатором, дающим решение некорректной задачи (3.4.2). Оператор-функция $t \mapsto \exp\Big((T-t)A\Big)U_\alpha(T)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, является C_α-полугруппой с $C_\alpha = \exp(TA)U_\alpha(T)$. При этом $C_\alpha \to I$ при $\alpha \to 0$, а генератор этой C_α-полугруппы есть $-A$.

Определение 3.4.2. Ограниченный линейный стохастический оператор $R_{\alpha,T}$, определенный на банаховом пространстве E, называется стохастическим регуляризатором задачи Коши (3.4.2), если для любого $\delta > 0$ и любого $u^0 \in E$, для которого существует решение задачи (3.4.2), найдется стохастическая переменная $\alpha = \alpha(\delta) > 0$ такая, что $\alpha(\delta) \to 0$ $\mathbb{P}$-почти наверное при $\delta \to 0$ и

$$\sup_{\|u^\delta-u^0\|\leqslant\delta}\|R_{\alpha(\delta),T}u^\delta - \exp(-TA)u^0\| \to 0 \ \mathbb{P}\text{-почти наверное при } \delta \to 0. \tag{3.4.9}$$

В [105, 351] был рассмотрен регуляризатор в виде $R_{\alpha,t} = \exp\Big(-tA - \alpha\big(w(t) - w(0)\big)A - \dfrac{1}{2}\alpha^2 tA^2\Big)$, где A порождает подходящую аналитическую полугруппу. Вместо $R_{\alpha,t}$ можно написать $\exp(-tA)C_{\alpha,t}$, где $C_{\alpha,t} = \exp\Big(-\alpha\big(w(t)-w(0)\big)A - \dfrac{1}{2}\alpha^2 tA^2\Big)$. Эти операторы могут быть определены в терминах интегралов по контуру. Мы рассмотрим здесь различные разностные схемы из [105, 351] и получим скорость сходимостей.

3.4.1. Аппроксимационная теорема полудискретизации. В этом пункте мы рассмотрим теорию аппроксимации локальных C-полугрупп. Предположим, что выполнены условия (A) и (B_1) теоремы 3.2.24 и рассмотрим на общей дискретизационной схеме полудискретную аппроксимацию задачи (3.4.11) в банаховых пространствах E_n:

$$\begin{cases} u_n'(t) = -A_n u_n(t), \quad t \in [0,T), \\ u_n(0) = u_n^0, \end{cases} \tag{3.4.10}$$

где операторы $-A_n$ порождают локальные C_n-полугруппы $\mathcal{S}(tA_n)$, $n \in \mathbb{N}$, и согласованы с оператором $-A$ и где $y_n^0 \to y^0$. Мы понимаем согласованность в смысле общей аппроксимационной схемы как сильную сходимость $C_n \to C$ и сильную сходимость резольвент $(\tilde\lambda I_n - A_n)^{-1} \to (\tilde\lambda I - A)^{-1}$ для некоторого $\tilde\lambda \in \rho(A) \cap \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \rho(A_n)$. Поскольку выполняются условия (A) и (B_1) теоремы 3.2.24, то такое $\tilde\lambda$ существует. Локальные C_n-полугруппы $\mathcal{S}(tA_n)$ могут рассматриваться как *регуляризаторы* задачи Коши

$$\begin{cases} u'(t) = -Au(t), \quad t \in [0,T), \\ u(0) = u^0. \end{cases} \tag{3.4.11}$$

Общая аппроксимационная схема здесь та же, что и в разделе 3.2.1. Решения задачи (3.4.10) могут рассматриваться как полудискретная аппроксимация задачи (3.4.11). Для этого введем систему линейных операторов $\{p_n'\}$, $p_n' : D(A) \to D(A_n) \subset E_n$, следующим образом: $p_n'x = (\tilde\lambda - A_n)^{-1} p_n (\tilde\lambda - A)x$, $x \in D(A)$. На области определения $D(A)$, системы операторов $\{p_n'\}$ и $\{p_n\}$ эквивалентны в том смысле, что $(p_n' - p_n)x \to 0$ для любого $x \in D(A)$. Действительно, поскольку $(\tilde\lambda - A_n)^{-1} p_n y \to (\tilde\lambda - A)^{-1} y$ для любого $y = (\tilde\lambda - A)x$, выполняется нужное утверждение. Рассмотрим еще одну систему операторов. Последовательность $\{p_n''\}$ определяется по формуле $p_n''x = (\tilde\lambda - A_n)^{-1} C_n p_n (\tilde\lambda - A) C^{-1} x = C_n p_n' C^{-1} x$, $x \in CD(A)$, и она эквивалентна системам $\{p_n\}$ и $\{p_n'\}$ на области определения $D(AC^{-1}) = CD(A)$.

Теорема 3.4.3 (Теорема ABC-C, см. [351])**.** *При выполнении условия* (A) *теоремы* 3.2.24 *и предположения* $\overline{CD(A^2)} = E$ *следующие условия* ($\mathrm{A_c}$) *и* ($\mathrm{B_c}$) *эквивалентны условию* ($\mathrm{C_c}$).

($\mathrm{A_c}$) *Согласованность.* $C_n \to C$ *и операторы* A_n, A *согласованы.*

($\mathrm{B_c}$) *Устойчивость. Для любого* $0 < \tau < T$ *найдется конечная константа* M_τ, *не зависящая* n, *такая, что*

$$\|\mathcal{S}(tA_n)\| \leqslant M_\tau \quad \text{для} \quad 0 \leqslant t \leqslant \tau \quad \text{и} \quad n \in \mathbb{N}.$$

($\mathrm{C_c}$) *Сходимость. Для любого* $0 < \tau < T$ *и* $x^0 \in E$ *имеем*

$$\max_{t\in[0,\tau]} \|\mathcal{S}(tA_n)x_n^0 - p_n \mathcal{S}(tA)x^0\| \to 0$$

при $n \to \infty$, *как только* $x_n^0 \to x^0$.

Замечание 3.4.4. В случае экспоненциально ограниченных C-полугрупп условие (A) можно заменить на условие (A′) $C_n \to C$ и $(\tilde\lambda I_n - A_n)^{-1} C_n \to (\tilde\lambda I - A)^{-1} C$ для некоторого $\tilde\lambda \in \mathbb{C}$ (см. подробности в [449]).

Поскольку конструкция может быть сделана аналогично конструкции с условием (A), то в данном случае нам не нужно предполагать, что $\rho(A) \cap \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \rho(A_n) \neq \varnothing$ и одновременно $(\tilde\lambda I_n - A_n)^{-1} \to (\tilde\lambda I - A)^{-1}$ для некоторого $\tilde\lambda \in \rho(A) \cap \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \rho(A_n)$.

3.4.2. Аппроксимация дискретными C-полугруппами. Следуя разделу 3.2.2, обозначим через $\{T_n(\cdot)\}$ семейство дискретных полугрупп на E_n, т.е., $T_n(t) = T_n^{k_n}$, где $T_n \in B(E_n)$, $n = 1, 2, \ldots$, — заданные операторы и $k_n = [t/\tau_n]$. Генератор семейства $T_n(\cdot)$ определяется по формуле $-A_n = (T_n(\tau_n) - I)/\tau_n$. Мы рассматриваем процесс $\tau_n \to 0$, $k_n \to \infty$, $n \to \infty$. Предположим, что $C_n \in B(E_n)$ являются инъективными операторами, для которых $T_n C_n = C_n T_n$. Дискретная C_n-полугруппа $U_n(\cdot)$ определяется как $U_n(t) = T_n(t) C_n$. В этом разделе мы предположим, что размерность каждого пространства E_n конечна, но $\dim(E_n) \to \infty$ при $n \to \infty$. В следующей теореме мы предположим, что $-A$ порождает локальную полугруппу $\mathcal{S}(\cdot A)$.

Теорема 3.4.5 (Теорема ABC-C-discr, см. [351])**.** *При условии* $R(\lambda; A_n) \to R(\lambda; A)$ *и предположении* $\overline{CD(A^2)} = E$ *следующие условия* ($\mathrm{A_{cd}}$) *и* ($\mathrm{B_{cd}}$) *эквивалентны условию* ($\mathrm{C_{cd}}$).

($\mathrm{A_{cd}}$) *Согласованность.* $C_n \to C$, *операторы* A_n, A *согласованы и* $A_n \in B(E_n)$, $n \in \mathbb{N}$.

($\mathrm{B_{cd}}$) *Устойчивость. Для любого* $0 < \tau < T$ *найдется константа* M_τ, *которая не зависит от* n, *такая, что* $\|U_n(t)\| \leqslant M_\tau$ *для всех* $0 \leqslant t \leqslant \tau < T$ *и* $n \in \mathbb{N}$ *выполняется равномерно для любого выбора* $\{\tau_n\}$ *и* $\{k_n\}$ *как только* $\tau_n \to 0$ *и* $k_n = [t/\tau_n]$.

($\mathrm{C_{cd}}$) *Сходимость. Для любого* $0 < \tau < T$ *имеем* $\max\limits_{t\in[0,\tau]} \|U_n(t)x_n^0 - p_n\mathcal{S}(tA)x^0\| \to 0$ *при* $\tau_n \to 0$, $n \to \infty$, *как только* $x_n^0 \to x^0$.

Теорема 3.4.6 (см. [351]). *Пусть выполняются условия* ($\mathrm{A_{cd}}$) *и* ($\mathrm{B_{cd}}$). *Предположим, что выполняются условия* $\overline{CD(A^2)} = E$ *и*

$$\tau_n\|A_n^2 C_n^{-1}\| \leqslant \frac{q}{M_\tau T} \quad \text{с} \quad q < 1. \tag{3.4.12}$$

Тогда

$$\|U_n(t)\| \leqslant M_\tau(1-q)^{-1} \quad \text{для} \quad 0 \leqslant t \leqslant \tau < T \quad \text{и любых} \quad n \in \mathbb{N}$$

выполняется равномерно по $\{\tau_n\}$ *и* $\{k_n\}$, *где* $\tau_n \to 0$, *как только* $k_n = [t/\tau_n]$. *Более того, для любого* $0 < \tau < T$ *имеем*

$$\max_{t\in[0,\tau]} \|U_n(t)x_n^0 - p_n\mathcal{S}(tA)x^0\| \to 0$$

при $\tau_n \to 0$, $n \to \infty$, *как только* $x_n^0 \to x^0$.

Замечание 3.4.7. На самом деле схема $\bar{U}_n(t) \equiv (I + \tau_n A_n)^{-k_n} C_n$ с $t = k_n\tau_n$ может быть построена даже при условии (3.2.5). Действительно, $\tau_n A_n = \tau_n\lambda A_n(\lambda - A_n)^{-1} - \tau_n A_n^2(\lambda - A_n)^{-1}$, и за счет выбора λ мы можем второй член справа сделать меньше, чем ϵ, и тогда выбирая τ_n подходящим для фиксированного λ, получаем $\|\tau_n A_n\| \leqslant 2\epsilon$. Поэтому схема $\bar{U}_n$ корректно определена.

Замечание 3.4.8. В противоположность корректным задачам, для некорректных задач явная и неявная схемы дискретизации по времени не сильно отличаются в смысле свойства устойчивости (ср. теоремы 3.2.7 и 3.2.8). Более того, при условии (3.2.5) из тождества

$$(I - \tau_n A_n)^{k_n} C_n = (I - \tau_n^2 A_n^2)^{k_n}(I + \tau_n A_n)^{-k_n} C_n$$

и неравенства $\|(I - \tau_n^2 A_n^2)^{\pm k_n}\| \leqslant Ce^{t\tau_n\|A_n^2\|}$, $t = k_n\tau_n$, следует, что условия устойчивости для дискретных полугрупп $(I - \tau_n A_n)^{k_n} C_n$ и $(I + \tau_n A_n)^{-k_n} C_n$ одинаковы.

Замечание 3.4.9. Для простоты предположим, что выполняется условие $\overline{CD(A)} = E$. В общем случае получаем сходимость на множестве $\overline{CD(A)}$. В случае проинтегрированных полугрупп эта ситуация была исследована (см., например, [97, 98, 99]). Действительно, хорошо известно, что для $x \notin D(A)$ «проинтегрированные» аппроксимирующие схемы сходятся. Мы отсылаем читателя к Lizama [294], Busenberg и Wu [106]. Заметим, что Kurtz в [237] был первым, кто обнаружил этот эффект.

3.4.3. Стохастическая полудискретная аппроксимация. Yачнем с общего факта о стохастических регуляризаторах (Cameron—Martin) в виде $C_\alpha(t) = C_\alpha(t,0)$. Здесь $C_\alpha(t,s)$, $t > s$, задается как

$$C_\alpha(t,s)) = \exp\left(-\alpha(w(t) - w(s))A - (t-s)\alpha^2 A^2/2\right),$$

где A порождает аналитическую полугруппу и выполняется свойство $\sigma(A) \subset \mathbb{C}\setminus\Sigma(3\pi/4)$. Семейство $C_\alpha(t,s)$, $t \geqslant s$, не однородно по времени и оператор $C_\alpha(t)$ может быть определен интегрированием по контуру: см. (i) в лемме 3.4.10. Более точно, мы предположим, что $\sigma(A) \subset \mathbb{C}\setminus\Sigma(\vartheta_0)$, где $3\pi/4 < \vartheta_0 < \pi$, и что

$$\|(\lambda - A)^{-1}\| \leqslant M/|\lambda|, \quad \lambda \in \Sigma(\vartheta_0).$$

Здесь $\{(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P}), w(t)\}$ является стандартным одномерным процессом Винера (броуновское движение). Как обычно, символ $\mathbb{E}\,[\cdot]$ обозначает математическое ожидание.

Лемма 3.4.10. *В упомянутых выше условиях на оператор* A *выполняются следующие утверждения*:

(i) *операторы* $C_\alpha(t)$, $\alpha > 0$, $t > 0$, *корректно определены, ограничены и могут быть выражены через интеграл*:

$$C_\alpha(t) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma e^{-\lambda\alpha(w(t)-w(0))-t\lambda^2\alpha^2/2}(\lambda I - A)^{-1}\,d\lambda = \\ = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma e^{-\lambda(w(t)-w(0))-t\lambda^2/2}(\lambda I - \alpha A)^{-1}\,d\lambda, \tag{3.4.13}$$

где $\Gamma = \{re^{\pm i\vartheta} : 1 \leqslant r < \infty\} \cup \{e^{i\phi} : -\vartheta < \phi < \vartheta\}$, $\alpha(s) \equiv \alpha$, $3\pi/4 < \vartheta < \pi$;

(ii) *семейство* $\{C_\alpha(t), \alpha > 0\}$ *является* $\mathbb{P}$*-почти наверное ограниченным и* $\lim\limits_{\alpha\downarrow 0} C_\alpha(t)v = v$ *для всех* $v \in E$;

(iii) $\mathbb{E}\,[C_\alpha(t)v] = v$ *для всех* $v \in E$ *и всех* $t \in [0,T)$.

Рассмотрим полудискретизацию задачи (3.4.5) в банаховых пространствах E_n

$$du_{n,\alpha}(t) = -A_n u_{n,\alpha}(t)\,dt - \alpha A_n u_{n,\alpha}(t)\,dw(t), \quad u_{n,\alpha}(0) = u_n^0, \tag{3.4.14}$$

где $u_n^0 \to u^0$, операторы A_n порождают аналитические полугруппы и $w(\cdot)$ — стандартный винеровский процесс. Мы хотим подчеркнуть, что рассматривается ситуация, когда $\sigma(A_n)$, $\sigma(A) \subset \mathbb{C} \setminus \Sigma(3\pi/4)$.

Теорема 3.4.11 (см. [351])**.** *Пусть выполняются условия* (A) *и* (B$''$) *теоремы* 3.2.24 *и пусть* $\delta_n > 0$ *— последовательность, сходящаяся к нулю* 0 *при* $n \to \infty$. *Тогда существует последовательность* $\alpha_n = \alpha_n(\delta_n)$ *такая, что* $u_{n,\alpha_n}(t) \to u(t)$ *для любого* $t \in [0,T]$ *при* $n \to \infty$. *Здесь* $u_{n,\alpha_n}(\cdot)$ *— решение задачи* (3.4.14) *и* $u(\cdot)$ *— решение задачи* (3.4.2) *с* $u^0 \in \mathfrak{A}_c(A)$. *Сходимость понимается в следующем смысле*:

$$\sup_{\|u_n^0 - p_n u^0\| \leqslant \delta_n} \|u_{n,\alpha_n}(t) - p_n u(t)\| \to 0 \quad \mathbb{P}\text{-}\textit{почти наверное при} \quad \delta_n \to 0.$$

Заметим, что доказательство сходимости следует из рассмотрения неравенства

$$\|u_{n,\alpha}(t) - p_n u(t)\| \leqslant \|u_{n,\alpha}(t) - p_n u_\alpha(t)\| + \|p_n\|\|u_\alpha(t) - u(t)\|,$$

где достаточно показать сходимость к нулю обоих членов справа.

Замечание 3.4.12. Выбор функции $\alpha(\cdot)$ интересен, если мы хотим получить наилучшую скорость сходимости. Можно положить $\alpha(s) = \sqrt{s}$ или $\alpha(s) = 1/\sqrt{s}$. В этом обзоре мы рассмотрим выбор $\alpha(s) \equiv \alpha$.

3.4.4. Стохастическая аппроксимация по времени. Для аппроксимации задачи (3.4.14) можно рассмотреть несколько разностных схем. Наиболее простые схемы:

$$U_{n,\alpha}(t+\tau_n) - U_{n,\alpha}(t) = -\tau_n A_n U_{n,\alpha}(t) - \alpha\,\Delta w(t) A_n U_{n,\alpha}(t), \tag{3.4.15}$$

$$\bar U_{n,\alpha}(t+\tau_n) - \bar U_{n,\alpha}(t) = -\tau_n A_n \bar U_{n,\alpha}(t+\tau_n) - \alpha\,\Delta w(t) A_n \bar U_{n,\alpha}(t), \tag{3.4.16}$$

$$\check U_{n,\alpha}(t+\tau_n) - \check U_{n,\alpha}(t) = -\tau_n A_n \frac{\check U_{n,\alpha}(t) + \check U_{n,\alpha}(t+\tau_n)}{2} - \alpha\,\Delta w(t) A_n \check U_{n,\alpha}(t), \tag{3.4.17}$$

где $\Delta w(t) = (w(t) - w(t-\tau_n))$, $t = k_n\tau_n$, и $U_{n,\alpha}(0) = \bar U_{n,\alpha}(0) = \check U_{n,\alpha}(0) = I_n$. Для $c > 0$ и $0 < \alpha < \pi$ обозначим

$$M(\alpha) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \sup\bigl\{|\lambda|^2\|(\lambda^2 - A_n^2)^{-1}\| : |\lambda| \geqslant R_n,\ |\arg\lambda| \leqslant \alpha\bigr\}; \tag{3.4.18}$$

$$M(c,\alpha) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \sup\bigl\{|\lambda|^2\|(\lambda^2 - A_n^2)^{-1}\| : |\lambda| \geqslant c,\ |\arg\lambda| = \alpha\bigr\}; \tag{3.4.19}$$

$$M_1(c,\alpha) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \sup\bigl\{|\lambda|\|(\lambda - A_n)^{-1}\| : |\lambda| = c,\ |\arg\lambda| \leqslant \alpha\bigr\}. \tag{3.4.20}$$

Здесь $(R_n, n \in \mathbb{N})$ — подходящая последовательность положительных чисел, сходящаяся к ∞. В леммах 3.4.14 и 3.4.15 далее мы формулируем технические неравенства, которые потребуются для доказательства следующей теоремы.

Теорема 3.4.13 (см. [351]). *Пусть выполняются условия* (A) *и* (B$''$) *теоремы* 3.2.24. *Зафиксируем* $3/4 < \vartheta < \pi$ *и предположим, что величины*

$$M(\pi - \vartheta), \quad M(c, \pi - \vartheta) \quad \text{и} \quad M_1(c, \vartheta) \tag{3.4.21}$$

конечны. Тогда схемы (3.4.15) *и* (3.4.16) *устойчивы и* $U_{n,\alpha_n}(t)u_n^0 \to u(t)$ *при* $n \to \infty$, *т.е.,*

$$\lim_{n\to\infty} U_{n,\alpha_n}(t)u_n^0 = u(t),$$

где $u(\cdot)$ *— решение задачи* (3.4.2) *с* $u^0 \in \mathfrak{A}_c(A)$ *и* (3.4.15) *–– аппроксимация задачи* (3.4.14). *Для схемы* $U_{n,\alpha_n}(t)$ *устойчивость понимается в следующем смысле. Существует константа* $C_0 = C_0(c, \vartheta)$, *которая не зависит от* n, a, *и* β, *где* a *и* β *достаточно велики так, что для всех* $n \in \mathbb{N}$ *и всех больших* a *и всех достаточно больших* β

$$\mathbb{E}[\|U_{n,\alpha_n}(t)u_n^0 - \exp(-tA_n - \alpha_n(w(t) - w(0))A_n - (t/2)\alpha_n^2 A_n^2)u_n^0\|], \tag{3.4.22}$$

$$C_0\sqrt{\tau_n t}(1/\sqrt{a\tau_n c^2\cos(2\vartheta)} + e^{3a\tau_n c^2/2})\|\exp(-tA_n + a\tau_n A_n^2)u_n^0\|.$$

Сходимость понимается в следующем смысле:

$$\mathbb{E}\,[\|U_{n,\alpha_n}(t)u_n^0 - p_n u(t)\|] \leqslant C_0\sqrt{\tau_n t}\,\log(1/(\tau_n t))\|A\exp(-tA + \beta tA^2)u^0\| + \tag{3.4.23}$$

$$+C_0\sqrt{\tau_n t}(1/\sqrt{a\tau_n c^2\cos(2\vartheta)} + e^{3a\tau_n c^2/2})\|\exp(-tA_n + a\tau_n A_n^2)u_n^0\| + \tag{3.4.24}$$

$$+\mathbb{E}\|u_{n,\alpha_n}(t) - p_n u_{\alpha_n}(t)\| \tag{3.4.25}$$

для $0 < t < T$, *где* $\beta\cos(2\vartheta) > C_1\tau_n > \alpha_n^2$, *и* a *и* n *достаточно велики. Если, например,* $a = \varepsilon k_n$, $\tau_n k_n = t$, *то*

$$1/\sqrt{a\tau_n c^2\cos(2\vartheta)} + e^{3a\tau_n c^2/2} = 1/\sqrt{\varepsilon t c^2\cos(2\vartheta)} + e^{3\varepsilon t c^2/2}.$$

Здесь

$$u_{n,\alpha} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_n} e^{-t\lambda - \alpha(w(t)-w(0))\lambda - \alpha^2\lambda^2|t|/2}(\lambda I_n - A_n)^{-1}u_n^0\,d\lambda, \quad t > 0;$$

$$u_\alpha = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} e^{-t\lambda - \alpha(w(t)-w(0))\lambda - \alpha^2\lambda^2|t|}(\lambda I - A)^{-1}u^0\,d\lambda, \quad t > 0.$$

Кроме того, предположим, что константа C_1 *удовлетворяет* $k_n\alpha_n^2 < C_1 t$ *или, эквивалентно,* $\alpha_n^2 < C_1\tau_n$, *что* $B := \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n^2 R_n < \infty$, *и что* $0 < b := \inf\limits_{n\in\mathbb{N}} \tau_n R_n$. *Более того, константа* a, *которая может зависеть от* n, *должна удовлетворять требованию*

$$a\tau_n\cos(2\vartheta) \geqslant t\tau_n + t\alpha_n^2, \qquad 2a\tau_n\cos(2\vartheta) \geqslant t\tau_n(1 + \alpha_n^2 R_n)^2 + 2t\alpha_n^2, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Если в неравенстве (3.4.22) *левая часть заменена на* $\mathbb{E}\,[\|U_{n,\alpha_n}(t)u_n^0\|]$, *то*

$$\mathbb{E}\,[\|U_{n,\alpha_n}(t)u_n^0\|] \leqslant C_1(c, \vartheta)(1/\sqrt{a\tau_n c^2\cos(2\vartheta)} + e^{3a\tau_n c^2/2}) \times \|e^{-tA_n + a\tau_n A_n^2}u_n^0\|, \tag{3.4.26}$$

где $C_1(c, \vartheta) = \max(2M(\pi - \vartheta) + M_1(c, \vartheta), (2\sqrt{2}/\pi)M(c, \pi - \vartheta))$. *Если в неравенстве* (3.4.22) *левая часть заменена на*

$$\mathbb{E}\,[\|\exp(-tA_n - \alpha_n(w(t) - w(0))A_n - (t/2)\alpha_n^2 A_n^2)u_n^0\|],$$

то

$$\mathbb{E}\,[\|\exp(-tA_n - \alpha_n(w(t) - w(0))A_n - (t/2)\alpha_n^2 A_n^2)u_n^0\|] \leqslant$$

$$\leqslant C_2(c, \vartheta)(1/\sqrt{a\tau_n c^2\cos(2\vartheta)} + e^{a\tau_n c^2})\|e^{-tA_n + a\tau_n A_n^2}u_n^0\|, \tag{3.4.27}$$

где $C_2(c, \vartheta) = \max(M_1(c, \vartheta), (2/\pi)M(c, \pi - \vartheta)) \leqslant C_1(c, \vartheta)$.

Для схемы $\bar{U}_{n,\alpha_n}(\cdot)$ применимы подобные рассуждения.

При доказательстве теоремы 3.4.13 использованы следующие тождества.

Лемма 3.4.14 (см. [351]). *Предположим, что* $t = k_n\tau_n$, $\tau_n \to 0$ *при* $n \to \infty$, $\alpha > 0$, *и* $\lambda \in \mathbb{C}$. *Справедливы следующие тождества*:

$$\mathbb{E}\left[\left|\prod_{j=1}^{k_n}\bigl(1+\tau_n\lambda+\alpha\lambda(w(j\tau_n)-w((j-1)\tau_n))\bigr)-e^{\lambda t+\alpha\lambda(w(t)-w(0))-\alpha^2\lambda^2 t/2}\right|^2\right]=$$

$$=\bigl(|1+\tau_n\lambda|^2+\alpha^2|\lambda|^2\tau_n\bigr)^{k_n}+e^{2t\Re\lambda+\alpha^2|\lambda|^2 t}-2\Re\bigl\{\bigl(1+\tau_n(\lambda+\alpha^2|\lambda|^2)\bigr)^{k_n}e^{t\bar\lambda}\bigr\}.$$

Как следствие

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}\left[\left|\prod_{j=1}^{k_n}\bigl(1+\tau_n\lambda+\alpha\lambda(w(j\tau_n)-w((j-1)\tau_n))\bigr)-e^{\lambda t+\alpha\lambda(w(t)-w(0))-\alpha^2\lambda^2 t/2}\right|^2\right]=0.$$

Лемма 3.4.15 (см. [351]). *Пусть* $\alpha > 0$ *и* $\tau > 0$ *— вещественные числа. Для любого комплексного числа* λ *и всех* $k \in \mathbb{N}$ *выполняется неравенство*:

$$\begin{aligned}(|1-\tau\lambda|^2+\alpha^2|\lambda|^2\tau)^k+e^{-2t\Re\lambda+\alpha^2|\lambda|^2 t}-2\Re\bigl((1+\tau(-\lambda+\alpha^2|\lambda|^2))^k e^{-t\bar\lambda}\bigr)\leqslant\\ \leqslant \tau t|\lambda|^2 e^{-2t\Re\lambda+\alpha^2|\lambda|^2 t}\bigl\{e^{\tau t|\lambda|^2}+e^{1/2}|1-\alpha^2\bar\lambda|^2 e^{\tau|\lambda|^2 t|1-\alpha^2\bar\lambda|^2/2}\bigr\}.\end{aligned}\tag{3.4.28}$$

3.4.5. Стохастическая схема Бакушинского. Здесь мы собираемся использовать начальные данные для некорректных задач, которые являются истокообразными элементами. Такой подход позволяет получить даже оценки скорости сходимости для регуляризационного метода. Детерминированный случай рассмотрен в [1, 9, 94]. Заметим лишь, что авторы в [92] рассматривали для аппроксимации задачи (3.4.11) схему

$$\sum_{\nu=0}^{k}\alpha_\nu u^{m+\nu}=\tau\sum_{\nu=0}^{k}\beta_\nu A u^{m+\nu},\quad 0\leqslant m\leqslant N-k,\quad \tau=T/N,\tag{3.4.29}$$

и получили оценку

$$\|u(m\tau)-u^m\|\leqslant Ch(\tau),\quad 0\leqslant m\leqslant N,\quad \lim_{\tau\to0}h(\tau)=0.$$

Для задачи

$$u''(t)=-Au(t),\quad u(0)=u^0,\quad u'(0)=0,$$

где оператор A порождает аналитическую полугруппу, авторы в [9] рассмотрели схему

$$\begin{gathered}u^{k+2}-2u^{k+1}+u^k=\tau^2(\beta_2 Au^{k+2}+\beta_1 Au^{k+1}+\beta_0 Au^k),\\ u^0=u^1=u(0),\quad \tau=T/N,\quad k=\overline{0,N-2},\end{gathered}$$

и доказали оценки

$$\|u(k\tau)-u^k\|\leqslant C\tau^q,\quad 0\leqslant k\leqslant N,\quad q\in(0,1-T/T_1).\tag{3.4.30}$$

Сходимости таких классов схем и их порядок сходимости были рассмотрены в [92, 1, 94, 214, 9].

Рассмотрим разностную схему типа Бакушинского

$$U_{n,\alpha}(t+\tau_n)-U_{n,\alpha}(t)=\tau_n\bigl(A_nU_{n,\alpha}(t+\tau_n)-2A_nU_{n,\alpha}(t)\bigr)+\alpha\,\Delta w(t)A_nU_{n,\alpha}(t),\tag{3.4.31}$$

где $\Delta w(t)=\bigl(w(t)-w(t-\tau_n)\bigr)$, $t=k_n\tau_n$, и $U_{n,\alpha}(0)=u_n^0$. Решение задачи (3.4.31) может быть записано в виде

$$U_{n,\alpha}((k+1)\tau_n)=\frac{I_n-2\tau_nA_n}{I_n-\tau_nA_n}U_{n,\alpha}(k\tau_n)+\alpha\,\Delta w(t)A_n(I_n-\tau_nA_n)^{-1}U_{n,\alpha}(t),$$

который соответствует аппроксимации неограниченной оператор-функции $\exp(-\tau_nA_n)$ как

$$\frac{I_n-2\tau_nA_n}{I_n-\tau_nA_n}=I_n-\frac{\tau_nA_n}{I_n-\tau_nA_n}=I_n-\tau_nA_n(I_n-\tau_nA_n)^{-1}.\tag{3.4.32}$$

Таким образом, мы собираемся показать, что при некоторых ограничениях на τ_n, A_n и α решения задач (3.4.31) сходятся к точному решению задачи (3.4.11) на гладком элементе u^0.

Лемма 3.4.16. *Для любого $\lambda \in \Gamma$ выполняется следующее тождество*:

$$\mathbb{E}\left(\left|\prod_{j=1}^{k_n}\left(\frac{1-2\tau_n\lambda}{1-\tau_n\lambda}+\frac{\alpha\lambda\Delta w(t_j)}{1-\tau_n\lambda}\right)-e^{-\lambda t+\alpha\lambda(w(t)-w(0))-(1/2)\alpha^2\lambda^2 t}\right|^2\right)=$$

$$=\left(\left|\frac{1-2\tau_n\lambda}{1-\tau_n\lambda}\right|^2+\frac{\tau_n\alpha^2|\lambda|^2}{|1-\tau_n\lambda|^2}\right)^{k_n}+e^{-2t\operatorname{Re}\lambda+\alpha^2|\lambda|^2 t}-$$

$$-\left(\frac{1-2\tau_n\lambda}{1-\tau_n\lambda}+\frac{\tau_n\alpha^2|\lambda|^2}{1-\tau_n\lambda}\right)^{k_n}e^{-t\bar\lambda}-\left(\frac{1-2\tau_n\bar\lambda}{1-\tau_n\bar\lambda}+\frac{\tau_n\alpha^2|\bar\lambda|^2}{1-\tau_n\bar\lambda}\right)^{k_n}e^{-t\lambda} \qquad (3.4.33)$$

и, более того,

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}\left(\left|\prod_{j=1}^{k_n}\left(\frac{1-2\tau_n\lambda+\alpha\lambda(w(j\tau_n)-w((j-1)\tau_n))}{1-\tau_n\lambda}\right)-e^{-\lambda t+\alpha\lambda\left(w(t)-w(0)\right)-(1/2)\alpha^2\lambda^2 t}\right|^2\right)=0,$$

где $t=k_n\tau_n$, $\tau_n\to 0$, $k_n\to\infty$, $0\leqslant t\leqslant T$.

Лемма 3.4.16 порождает следующий результат.

Теорема 3.4.17 (см. [105]). *Пусть выполняется условие* (B$''$) *теоремы* 3.2.24. *Предположим, что $3\pi/4<\vartheta_0<\pi$, $u_{n,\alpha_n}(0)=(-A_n)^{-p}\exp(TA_n)\tilde u_n$, $\|\tilde u_n\|\leqslant\tilde C$, и $\alpha_n^2\leqslant C_3\tau_n$, $n\in\mathbb{N}$. Тогда имеет место следующая оценка*:

$$\mathbb{E}(\|U_{n,\alpha_n}(t)u_{n,\alpha_n}(0)-u_{n,\alpha_n}(t)\|)\leqslant C\sqrt{\tau_n}\|A_n^p\exp(-T(2+C_1)A_n)\tilde u_n\|$$

равномерно по $t\in[0,T]$.

3.5. Аппроксимация слабо некорректных задач

Рассмотрим в банаховом пространстве E задачу Коши

$$\begin{aligned} &u'(t)=Au(t)+f(t), \quad t\in[0,T],\\ &u(0)=u^0\in E, \end{aligned} \qquad (3.5.1)$$

где оператор A порождает k раз проинтегрированную полугруппу и $f(\cdot)\in L^1([0,T];E)$. Функция $u(\cdot)$ называется классическим решением задачи (3.5.1), если она принадлежит множеству $C^1([0,T];E)\cap C([0,T];D(A))$ и удовлетворяет обоим уравнениям в (3.5.1).

K раз проинтегрированной полугруппой является семейство ограниченных линеных операторов $e_k^{tA}\in B(E)$, $t\in\overline{\mathbb{R}}_+$, такое, что оно сильно непрерывно в $t\in[0,\infty)$ и удовлетворяет уравнению

$$e_k^{tA}=A\int_0^t e_k^{sA}ds+\frac{t^k}{k!}, \quad t\geqslant 0. \qquad (3.5.2)$$

Определим функцию

$$v(t)=e_k^{tA}u^0+\int_0^t e_k^{(t-s)A}f(s)\,ds, \quad t\in[0,T].$$

Если существует классическое решение задачи (3.5.1), то $v(\cdot)\in C^{k+1}([0,T];E)$ и для производной порядка k имеем $v^{(k)}(\cdot)=u(\cdot)$ (см. предложение 1.27).

Если k раз проинтегрированная полугруппа экспоненциально ограниченна т.е., $\|e_k^{tA}\|\leqslant Me^{\omega t}$, $t\in\overline{\mathbb{R}}_+$, то резольвента удовлетворяет

$$(\lambda I-A)^{-1}=\lambda^k\int_0^\infty e^{-\lambda t}e_k^{tA}\,dt \quad \text{для} \quad \lambda>\omega. \qquad (3.5.3)$$

Здесь мы рассмотрим задачу (3.5.1), где $k = 1$ и проинтегрированная полугруппа является экспоненциально ограниченной. Если имеется один раз проинтегрированная полугруппа и $f(\cdot) \equiv 0$, $u^0 \in D(A)$, то решение задачи (3.5.1) дается функцией $u(t) = (e_1^{tA} u^0)'_t$.

3.5.1. Дискретизация проинтегрированных полугрупп. Решение первоначальной задачи Коши

$$\begin{aligned} u'(t) &= Au(t), \quad t \in [0, \infty), \\ u(0) &= u^0 \in E, \end{aligned} \tag{3.5.4}$$

где оператор A порождает проинтегрированную полугруппу e_1^{tA}, $t \in \overline{\mathbb{R}}_+$, может быть получено взятием производной от 1 раз проинтегрированной полугруппы на элементе u^0. Существование гладкой производной решения может быть гарантировано на гладких начальных данных, скажем, на $u^0 \in D(A)$. Поэтому основное утверждение о сходимости разностных схем может рассматриваться только на гладких элементах.

Будем аппроксимировать оператор A последовательностью ограниченных операторов $\breve{A}_n \in B(E_n)$ и затем аппроксимировать e_1^{tA} дискретными один раз проинтегрированными полугруппами, порождаемыми операторами $\breve{A}_n$.

Рассмотрим теперь общую дискретную версию теоремы Троттера—Като для проинтегрированных полугрупп.

Теорема 3.5.1 (Теорема ABC-int, см. [261]). *Предположим, что замкнутые операторы A и A_n на E и E_n соответственно порождают экспоненциально ограниченные k раз проинтегрированные полугруппы. Следующие условия* (A) *и* ($\mathrm{B_{int}}$) *эквивалентны условию* ($\mathrm{C_{int}}$).

(A) *Согласованность. Существует такое $\lambda \in \rho(A) \cap \bigcap_n \rho(A_n)$, что резольвенты сходятся:*

$$(\lambda I_n - A_n)^{-1} \xrightarrow{\mathcal{PP}} (\lambda I - A)^{-1}.$$

($\mathrm{B_{int}}$) *Устойчивость. Существуют константы $M \geqslant 1$ и ω_1, которые не зависят от n и такие, что $\|e_k^{tA_n}\|_{B(E_n)} \leqslant M \exp(\omega_1 t)$ для $t \geqslant 0$ и любых $n \in \mathbb{N}$, и последовательность $\{e_k^{tA_n} p_n u\}$, $n \in \mathbb{N}$, эквинепрерывна на компактных подмножествах $\mathbb{R}_+$ для любого $u \in E$.*

($\mathrm{C_{int}}$) *Сходимость. Для некоторого конечного $\omega > 0$, имеет место сходимость $\max\limits_{t \in [0,\infty)} e^{-\omega t} \|e_k^{tA_n} u_n^0 - p_n e_k^{tA} u^0\|_{E_n} \to 0$ при $n \to \infty$, как только $u_n^0 \xrightarrow{\mathcal{P}} u^0$ для любых $u_n^0 \in E_n$, $u^0 \in E$.*

Следствие 3.5.2. *Предположим, что замкнутые операторы A и A_n на E и E_n соответственно порождают экспоненциально ограниченные k раз проинтегрированные полугруппы. Предположим, что выполняются следующие условия.*

(A) *Согласованность. Существует такое $\lambda \in \rho(A) \cap \bigcap_n \rho(A_n)$, что резольвенты сходятся:*

$$(\lambda I_n - A_n)^{-1} \xrightarrow{\mathcal{PP}} (\lambda I - A)^{-1}.$$

($\mathrm{B'_{int}}$) *Устойчивость. Существуют константы $M \geqslant 1$ и ω_1, которые не зависят от n и такие, что $\|e_k^{tA_n}\|_{B(E_n)} \leqslant M \exp(\omega_1 t)$ для $t \geqslant 0$ для всех $n \in \mathbb{N}$.*

Тогда для некоторого конечного $\omega > 0$ имеем $\max\limits_{t \in [0,\infty)} e^{-\omega t} \|e_k^{tA_n} u_n^0 - p_n e_k^{tA} u^0\|_{E_n} \to 0$ при $n \to \infty$, как только $u_n^0 \xrightarrow{\mathcal{P}} u^0$, $A_n u_n^0 \xrightarrow{\mathcal{P}} Au^0$ для любых $u_n^0 \in D(A_n)$, $u^0 \in D(A)$.

Теорема 3.5.3 (см. [261]). *Предположим, что замкнутые операторы A и A_n на E и E_n соответственно порождают экспоненциально ограниченные аналитические k раз проинтегрированные полугруппы. Предположим, что выполняются следующие условия.*

(A) *Согласованность. Существует такое $\lambda \in \rho(A) \cap \bigcap_n \rho(A_n)$, что резольвенты сходятся:*

$$(\lambda I_n - A_n)^{-1} \xrightarrow{\mathcal{PP}} (\lambda I - A)^{-1}.$$

($\mathrm{B}'''_{\mathrm{int}}$) *Устойчивость. Существуют константы* $M \geqslant 1$, $0 < \theta \leqslant \pi/2$, *и* ω_1, *которые не зависят от* n, *и сектор* $\omega_1 + \Sigma(\theta + \pi/2)$ *лежит в* $\rho(A_n)$ *и*

$$\sup_{\lambda\in\omega_1+\Sigma(\beta+\pi/2)} \left\| \frac{(\lambda-\omega_1)R(\lambda;A_n)}{\lambda^k} \right\|_{B(E_n)} \leqslant M$$

для всех $n \in \mathbb{N}$ *и* $0 < \beta < \theta$.

Тогда для любого $0 < \beta < \theta$ *и компактного подмножества* K *множества* $\Sigma(\beta)$, *не содержащего* 0, *имеем* $\max_{z\in K} \|e_k^{zA_n}u_n^0 - p_n e_k^{zA}u^0\|_{E_n} \to 0$ *при* $n \to \infty$, *как только* $u_n^0 \xrightarrow{\mathcal{P}} u^0$ *для любых* $u_n^0 \in E_n$, $u^0 \in E$.

Пусть $T_n \in B(E_n)$, $\{\tau_n\}$ и $\tau_n > 0$, является последовательностью, сходящейся к нулю 0 при $n \to \infty$ и $\breve{A}_n = (T_n - I_n)/\tau_n \in B(E_n)$. Дискретная один раз проинтегрированная полугруппа может быть определена как $\int\limits_0^t T_n^{[s/\tau_n]}ds$, где $[s/\tau_n]$ — целая часть числа s/τ_n, т.е., $\int\limits_0^t T_n^{[s/\tau_n]}ds = \tau_n \sum\limits_{j=0}^{[t/\tau_n]-1} (I_n + \tau_n\breve{A}_n)^j$. По определению, мы предполагаем, что $\tau_n \sum\limits_{j=0}^{[t/\tau_n]-1} (I_n + \tau_n\breve{A}_n)^j = 0$ для $0 \leqslant t < \tau_n$.

Теорема 3.5.4 (Теорема ABC-discr-int, см. [261])**.** *Предположим, что* A *порождает экспоненциально ограниченную полугруппу и* $\breve{A}_n \in B(E_n)$. *Следующие условия* (A) *и* ($\tilde{\mathrm{B}}_{\mathrm{int}}$) *эквивалентны условию* ($\tilde{\mathrm{C}}_{\mathrm{int}}$).

(A) *Согласованность. Существует такое* $\lambda \in \rho(A) \cap \bigcap_n \rho(\breve{A}_n)$, *что резольвенты сходятся*:

$$(\lambda I_n - \breve{A}_n)^{-1} \xrightarrow{\mathcal{PP}} (\lambda I - A)^{-1}.$$

($\tilde{\mathrm{B}}_{\mathrm{int}}$) *Устойчивость. Существуют константы* $M_1 \geqslant 1$ *и* $\omega_1 \in \mathbb{R}$ *такие, что дискпетные раз проинтегрированные полугруппы* $\int\limits_0^t T_n^{[s/\tau_n]}ds$ *устойчивы, т.е.,*

$$\left\| \int\limits_0^t T_n^{[s/\tau_n]}\, ds \right\| \leqslant M_1 \exp(\omega_1 t) \quad \text{для} \quad t \in \overline{\mathbb{R}}_+ = [0,\infty), \quad n \in \mathbb{N},$$

и $\left\{ \int\limits_0^t T_n^{[s/\tau_n]}p_n x\, ds \right\}$ *является эквинепрерывным на ограниченных интервалах* $\mathbb{R}^+$ *для любого* $x \in E$.

($\tilde{\mathrm{C}}_{\mathrm{int}}$) *Сходимость. Для некоторого конечного* $\omega > 0$ *имеем* $\max\limits_{t\in[0,\infty)} e^{-\omega t}\left\| \int\limits_0^t T_n^{[s/\tau_n]}u_n^0 ds - p_n e_1^{tA}u^0 \right\| \to 0$ *при* $n \to \infty$, *как только* $u_n^0 \xrightarrow{\mathcal{P}} u^0$ *для любых* $u^0 \in E$, $u_n^0 \in E_n$.

Сейчас положим $T_n(\tau_n) = (I_n - \tau_n A_n)^{-1}$. В этом пункте дискретная 1 раз проинтегрированная полугруппа определяется как $\int\limits_0^t T_n^{[s/\tau_n]}\, ds = \tau_n \sum\limits_{j=1}^{[t/\tau_n]} (I_n - \tau_n A_n)^{-j}$ и мы полагаем по определению $\tau_n \sum\limits_{j=1}^{[t/\tau_n]} (I_n - \tau_n A_n)^{-j} = 0$ для $0 \leqslant t < \tau_n$. Поэтому в этом пункте мы рассматриваем специальный выбор $\breve{A}_n = A_n(I_n - \tau_n A_n)^{-1}$, где оператор A_n взят из теоремы 3.5.1.

Определение 3.5.5. Дискретное семейство операторов $\{W_n^i(k\tau_n)\}$, $k = 0,1,2,\dots$, называется неявной дискретной 1 раз проинтегрированной полугруппой, если $W_n^i(0) = 0$, $W_n^i(\tau_n) = \tau_n(I_n - \tau_n A_n)^{-1}$ и

$$W_n^i(k\tau_n)W_n^i(\tau_n) = \tau_n W_n^i((k+1)\tau_n) - \tau_n W_n^i(\tau_n).$$

Предложение 3.5.6 (см. [261]). *Если существует оператор A_n^{-1}, то дискретная неявная 1 раз проинтегрированная полугруппа дается формулой*

$$W_n^i(0) = 0,$$
$$W_n^i((k+1)\tau_n) = W_n^i(k\tau_n)(I_n - \tau_n A_n)^{-1} + W_n^i(\tau_n), \quad k = 1,2,\dots,$$
$$W_n^i(k\tau_n) = \sum_{j=1}^{k} \tau_n(I_n - \tau_n A_n)^{-j} = ((I_n - \tau_n A_n)^{-k} - I_n)A_n^{-1}, \quad k = 1,2,\dots.$$

Теорема 3.5.7 (см. [261]). *Предположим, что выполняются условия* (A) *и* ($\mathrm{B}'_{\mathrm{int}}$) *следствия* 3.5.2. *Тогда дискретная* 1 *раз проинтегрированная полугруппа экспоненциально устойчива, т.е.,* $\Big\| \sum_{j=0}^{k} \tau_n(I_n - \tau_n A_n)^{-j} \Big\| \leqslant M_1 e^{\omega_1 \tau_n k}$, *и дает аппроксимацию* 1 *раз проинтегрированной полугруппы, т.е.* $\sum_{j=0}^{k_n} \tau_n(I_n - \tau_n A_n)^{-j} u_n^0 \xrightarrow{\mathcal{P}} e_1^{tA} u^0$ *равномерно по* $t = k_n\tau_n \in [0,T]$ *при* $u_n^0 \xrightarrow{\mathcal{P}} u^0$, $A_n u_n^0 \xrightarrow{\mathcal{P}} A u^0$, $n \to \infty$, *для любого* $u^0 \in D(A)$.

Положим $T_n(\tau_n) = I_n + \tau_n A_n$, тогда $A_n = \breve{A}_n \in B(E_n)$. Рассматривая явную разностную схему, получаем следующее определение.

Определение 3.5.8. Дискретное семейство операторов $\{W_n^e(k\tau_n)\}$, $k = 0,1,2,\dots$, называется дискретной явной 1 раз проинтегрированной полугруппой, если $W_n^e(0) = 0$, $W_n^e(\tau_n) = \tau_n I_n$, $W_n^e(2\tau_n) = A_n W_n^e(\tau_n)\tau_n + 2\tau_n I_n$, и

$$W_n^e(k\tau_n)W_n^e(2\tau_n) = (W_n^e((k+1)\tau_n) + W_n^e(k\tau_n))\tau_n - \tau_n^2 I_n.$$

Предложение 3.5.9. *Если операторы A_n^{-1} существуют, то дискретная явная* 1 *раз проинтегрированная полугруппа дается формулами*

$$W_n^e(0) = 0,$$
$$W_n^e((k+1)\tau_n) = W_n^e(k\tau_n)(I_n + \tau_n A_n) + \tau_n I_n, \quad k = 1,2,\dots, \tag{3.5.5}$$
$$W_n^e(k\tau_n) = \tau_n \sum_{j=0}^{k-1} (I_n + \tau_n A_n)^j = ((I_n + \tau_n A_n)^k - I_n)A_n^{-1}, \quad k = 1,2,\dots.$$

Теорема 3.5.10 (см. [261]). *Предположим, что выполняются условия* (A) *и* ($\mathrm{B}'_{\mathrm{int}}$) *следствия* 3.5.2 *и*

$$\tau_n\|A_n^2\|, \|A_n^{-1}\| \leqslant C, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Тогда дискретная явная 1 *раз проинтегрированная полугруппа* $\int_0^t (I_n + \tau_n A_n)^{[s/\tau_n]} ds$ *экспоненциально устойчива, т.е.*

$$\Big\| \sum_{j=0}^{k_n} \tau_n(I_n + \tau_n A_n)^j \Big\| \leqslant M_1\, e^{\omega_2 \tau_n k_n}$$

для некоторого $\omega_2 > 0$, *и доставляет аппроксимацию* 1 *раз проинтегрированной полугруппы, т.е.*

$$\tau_n \sum_{j=0}^{k_n - 1} (I_n + \tau_n A_n)^j u_n^0 \xrightarrow{\mathcal{P}} e_1^{tA} u^0$$

равномерно по $t = k_n\tau_n \in [0,T]$ *при* $u_n^0 \xrightarrow{\mathcal{P}} u^0$, $A_n u_n^0 \xrightarrow{\mathcal{P}} A u^0$, $n \to \infty$, *для всех* $u^0 \in D(A)$.

Теорема 3.5.11 (см. [261]). *Предположим, что выполняются условия* (A) *и* ($\mathrm{B}'''_{\mathrm{int}}$) *теоремы* 3.5.3 *с* $\omega_1 = 0$ *и*

$$\sup_n \tau_n \|A_n\| < \mu < 2\sin\theta, \quad 0 \in \rho(A_n), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Тогда дискретная явная 1 *раз проинтегрированная полугруппа* $\int\limits_0^t (I_n + \tau_n A_n)^{[s/\tau_n]}\, ds$ *экспоненциально устойчива, т.е.*

$$\Big\| \sum_{j=0}^{k_n} \tau_n (I_n + \tau_n A_n)^j \Big\| \leqslant M_1\, e^{\omega_3 \tau_n k_n}$$

для некоторого $\omega_3 > 0$, *и дает аппроксимацию* 1 *раз проинтегрированной полугруппы, т.е.*

$$\tau_n \sum_{j=0}^{k_n - 1} (I_n + \tau_n A_n)^j u_n^0 \xrightarrow{\mathcal{P}} e_1^{tA} u^0$$

равномерно по $t = k_n \tau_n \in [0, T]$ *при* $u_n^0 \xrightarrow{\mathcal{P}} u^0$, $A_n u_n^0 \xrightarrow{\mathcal{P}} A u^0$, $n \to \infty$, *для любого* $u^0 \in D(A)$.

Наконец, положим $T_n(\tau_n) = \Big(I_n + \dfrac{\tau_n}{2} A_n\Big)\Big(I_n - \dfrac{\tau_n}{2} A_n\Big)^{-1}$. Тогда $\breve{A}_n = A_n \Big(I_n - \dfrac{\tau_n}{2} A_n\Big)^{-1}$. Следующее определение связано со схемой центральной разности.

Определение 3.5.12. Дискретное семейство операторов $\{W_n^{cd}(k\tau_n)\}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, называется дискретной 1 раз проинтегрированной полугруппой центральной разности, если $W_n^{cd}(0) = 0$, $W_n^{cd}(\tau_n) = \tau_n \Big(I_n - \dfrac{\tau_n}{2} A_n\Big)^{-1}$, и

$$W_n^{cd}(k\tau_n) W_n^{cd}(\tau_n) = \tau_n \frac{W_n^{cd}((k+1)\tau_n) + W_n^{cd}(k\tau_n)}{2} - \frac{\tau_n}{2} W_n^{cd}(\tau_n).$$

Предложение 3.5.13. *Если операторы* A_n^{-1} *существуют, то дискретная* 1 *раз проинтегрированная полугруппа центральной разности дается по формулам*

$$W_n^{cd}(0) = 0,$$

$$W_n^{cd}((k+1)\tau_n) = W_n^{cd}(k\tau_n) \frac{I_n + \frac{\tau_n}{2} A_n}{I_n - \frac{\tau_n}{2} A_n} + W_n^{cd}(\tau_n), \quad k = 1, 2, \ldots,$$

$$W_n^{cd}(k\tau_n) = \left(\left(\frac{I_n + \frac{\tau_n}{2} A_n}{I_n - \frac{\tau_n}{2} A_n} \right)^k - I_n \right) A_n^{-1}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots.$$

Теорема 3.5.14 (см. [261]). *Предположим, что выполнены условия* (A) *и* ($\mathrm{B}'_{\mathrm{int}}$) *следствия* 3.5.2 *с* $\omega = 0$ *и*

$$\tau_n \|A_n^2\|, \|A_n^{-1}\| \leqslant C, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Тогда дискретная 1 *раз проинтегрированная полугруппа центральной разности*

$$\int\limits_0^t \Big(\frac{I_n + \tau_n A_n/2}{I_n - \tau_n A_n/2} \Big)^{[s/\tau_n]} ds$$

экспоненциально устойчива, т.е.

$$\left\| \tau_n \sum_{j=1}^{k_n} \left(\frac{I_n + \frac{\tau_n}{2} A_n}{I_n - \frac{\tau_n}{2} A_n} \right)^j \right\| \leqslant M_1\, e^{\omega_2 \tau_n k_n}, \quad 0 \leqslant \tau_n k_n \leqslant T, \tag{3.5.6}$$

и дает аппроксимацию 1 *раз проинтегрированной полугруппы, т.е.*

$$\tau_n \sum_{j=0}^{k_n} \left(\frac{I_n + \dfrac{\tau_n}{2} A_n}{I_n - \dfrac{\tau_n}{2} A_n} \right)^j u_n^0 \xrightarrow{\mathcal{P}} e_1^{tA} u^0$$

равномерно по $t = k_n \tau_n \in [0, T]$ *при* $u_n^0 \xrightarrow{\mathcal{P}} u^0$, $A_n u_n^0 \xrightarrow{\mathcal{P}} A u^0$, $n \to \infty$, *для любого* $u^0 \in D(A)$.

Теорема 3.5.15 (см. [261]). *Предположим, что выполнены условия* (A) *и* ($\mathrm{B}_{\mathrm{int}}'''$) *теоремы* 3.5.3 *с* $\omega_1 = 0$ *и*

$$\sup_n \tau_n \|A_n\| < \mu < 2 \sin \theta, \quad 0 \in \rho(A_n), \quad n \in \mathbb{N}. \tag{3.5.7}$$

Тогда дискретная 1 *раз проинтегрированная полугруппа центральной разности* $\int\limits_0^t T_n(\tau_n)^{[s/\tau_n]} \, ds$ *экспоненциально устойчива, т.е. выполняется* (3.5.6), *и дает аппроксимацию* 1 *раз проинтегрированной полугруппы в следующем смысле*

$$\tau_n \sum_{k=0}^{k_n} \left(\frac{I_n + \dfrac{\tau_n}{2} A_n}{I_n - \dfrac{\tau_n}{2} A_n} \right)^j u_n^0 \xrightarrow{\mathcal{P}} e_1^{tA} u^0 \quad \textit{при} \quad n \to \infty$$

равномерно по $t = k_n \tau_n \in [0, T]$ *при* $u_n^0 \xrightarrow{\mathcal{P}} u^0$, $A_n u_n^0 \xrightarrow{\mathcal{P}} A u^0$, $n \to \infty$, *для любого* $u^0 \in D(A)$.

3.5.2. Непосредственная аппроксимация производной. Как было отмечено в (3.5.2), для 1 раз проинтегрированной полугруппы e_1^{tA}, $t \in \overline{\mathbb{R}}_+$, и $x \in D(A)$, имеем

$$e_1^{tA} x = \int\limits_0^t e_1^{sA} \, Ax \, ds + tx, \quad t \geqslant 0.$$

Поэтому для тех же x производная равняется

$$(e_1^{tA} x)' = e_1^{tA} A x + x, \quad t \geqslant 0. \tag{3.5.8}$$

Теперь, если для $u^0 \in D(A)$ из задачи (3.5.4), сделать выбор $u_n^0 \in D(A_n)$ так, что $u_n^0 \xrightarrow{\mathcal{P}} u^0$, $A_n u_n^0 \xrightarrow{\mathcal{P}} A u^0$, то сходимость

$$u_n(t) = (e_1^{tA_n} u_n^0)' \xrightarrow{\mathcal{P}} (e_1^{tA} u^0)' = u(t) \quad \text{равномерно по} \quad t \in [0, T] \tag{3.5.9}$$

обеспечивается условием ($\mathrm{C}_{\mathrm{int}}$) теоремы 3.5.1 или следствием 3.5.2. Имеется простое соотношение

$$e_1^{tA} x = (e^{tA} - I) A^{-1} x,$$

где e^{tA}, $t \in \overline{\mathbb{R}}_+$, вообще говоря, не является C_0-полугруппой и, возможно, операторы e^{tA}, $t \in \overline{\mathbb{R}}_+$, не являются ограниченными операторами на E.

Обозначим $\mathcal{V}_n^{\tau_n}(k_n) = W_n^e(k_n \tau_n)$ и $\overline{\mathcal{V}}_n^{\tau_n}(k_n) = W_n^i(k_n \tau_n)$.

Теорема 3.5.16. *Предположим, что выполнено условие* ($\mathrm{B}_{\mathrm{int}}$) *теоремы* 3.5.1. *Тогда для* $\overline{V}_n(t) = 2\overline{\mathcal{V}}_n^{\tau_n/2}(2k_n) - \overline{\mathcal{V}}_n^{\tau_n}(k_n)$ *имеем*

$$\|\overline{V}_n(t) u_n^0 - e_1^{tA_n} u_n^0\| \leqslant \tau_n^2 M e^{\omega t} t \big(t \, \|A_n^6 u_n^0\| + \|A_n^4 u_n^0\| \big), \quad t = k_n \tau_n. \tag{3.5.10}$$

Если схема (3.5.5) *устойчива, то для* $V_n(t) = 2\mathcal{V}_n^{\tau_n/2}(2k_n) - \mathcal{V}_n^{\tau_n}(k_n)$, $t = k_n \tau_n$, *имеем*

$$\|V_n(t) u_n^0 - e_1^{tA_n} u_n^0\| \leqslant \tau_n^2 M e^{\omega t} t \big(t \, \|A_n^6 u_n^0\| + \|A_n^4 u_n^0\| \big), \quad t = k_n \tau_n. \tag{3.5.11}$$

Теорема 3.5.17 (см. [277]). *Предположим, что операторы A и A_n порождают 1 раз проинтегрированные экспоненциально ограниченные полугруппы соответсвенно и выполнены условия* (A) *и* (B_{int}) *теоремы* 3.5.1. *Предположим, что схема* (3.5.5) *устойчива. Тогда для любого $u^0 \in D(A^6)$ найдутся такие $u_n^0 \in D(A_n^6)$, что*

$$u_n^0 \xrightarrow{\mathcal{P}} u^0,\ A_n u_n^0 \xrightarrow{\mathcal{P}} Au^0,\ A_n^2 u_n^0 \xrightarrow{\mathcal{P}} A^2 u^0,\ A_n^4 u_n^0 \xrightarrow{\mathcal{P}} A^4 u^0,\ A_n^6 u_n^0 \xrightarrow{\mathcal{P}} A^6 u^0,$$

и решение $u(\cdot)$ задачи (3.5.4) *аппроксимируеся дискретной производной $\dfrac{V_n(t+\tau_n)-V_n(t)}{\tau_n} u_n^{\delta_n}$ при $\|u_n^{\delta_n} - u_n^0\| \leqslant \tau_n^2$, $\tau_n \to 0$. Более того, выполняются следующие оценки*:

$$\left\| \frac{V_n(t+\tau_n)u_n^{\delta_n} - V_n(t)u_n^{\delta_n}}{\tau_n} - p_n u(t) \right\| \leqslant$$
$$\leqslant \max_{0\leqslant t\leqslant T} \|e_1^{tA_n} A_n u_n^0 - p_n e_1^{tA} Au^0\| + \|u_n^0 - p_n u^0\| +$$
$$+\tau_n M e^{\omega t}\big(t^2\,\|A_n^6 u_n^0\| + t\,\|A_n^4 u_n^0\| + \|A_n^2 u_n^0\| + \|A_n u_n^0\| + 1\big). \tag{3.5.12}$$

Теорема 3.5.18 (см. [277]). *Предположим, что операторы A и A_n порождают 1 раз проинтегрированные экспоненциально ограниченные полугруппы соответсвенно и выполнены условия* (A) *и* (B_{int}) *теоремы* 3.5.1. *Тогда для любого элемента $u^0 \in D(A^6)$ найдутся такие элементы $u_n^0 \in D(A_n^6)$, что*

$$u_n^0 \xrightarrow{\mathcal{P}} u^0,\ A_n u_n^0 \xrightarrow{\mathcal{P}} Au^0,\ A_n^2 u_n^0 \xrightarrow{\mathcal{P}} A^2 u^0,\ A_n^4 u_n^0 \xrightarrow{\mathcal{P}} A^4 u^0,\ A_n^6 u_n^0 \xrightarrow{\mathcal{P}} A^6 u^0,$$

и решение $u(\cdot)$ задачи (3.5.4) *аппроксимируется дискретной производной $\dfrac{\overline{V}_n(t+\tau_n)-\overline{V}_n(t)}{\tau_n} u_n^{\delta_n}$ при $\|u_n^{\delta_n} - u_n^0\| \leqslant \tau_n^2$, $\tau_n \to 0$. Более того, выполняются следующие оценки* ($t = k\tau_n$):

$$\left\| \frac{\overline{V}_n(t+\tau_n)u_n^{\delta_n} - \overline{V}_n(t)u_n^{\delta_n}}{\tau_n} - p_n u(t) \right\| \leqslant$$
$$\leqslant \max_{0\leqslant s\leqslant T} \|e_1^{sA_n} A_n u_n^0 - p_n e_1^{sA} Au^0\| + \|u_n^0 - p_n u^0\| +$$
$$+\tau_n M e^{\omega t}\big(t^2\|A_n^6 u_n^0\| + t\|A_n^4 u_n^0\| + \|A_n^2 u_n^0\| + \|A_n u_n^0\| + 1\big).$$

Теорема 3.5.19 (см. [277]). *Предположим, что операторы A и A_n порождают 1 раз проинтегрированные экспоненциально ограниченные полугруппы соответсвенно и выполнены условия* (A) *и* (B'''_{int}) *теоремы* 3.5.3 *и условие* (3.5.7). *Тогда для любого элемента $u^0 \in D(A^4)$ найдутся такие элементы $u_n^0 \in D(A_n^4)$, что*

$$u_n^0 \xrightarrow{\mathcal{P}} u^0,\ A_n u_n^0 \xrightarrow{\mathcal{P}} Au^0,\ A_n^2 u_n^0 \xrightarrow{\mathcal{P}} A^2 u^0,\ A_n^4 u_n^0 \xrightarrow{\mathcal{P}} A^4 u^0,$$

и решение $u(\cdot)$ задачи (3.5.4) *аппроксимируется дискретной производной*

$$\frac{W_n^{cd}((k+1)\tau_n) - W_n^{cd}(k\tau_n)}{\tau_n} u_n^{\delta_n}$$

при $\|u_n^{\delta_n} - u_n^0\| \leqslant \tau_n^2, \tau_n \to 0$. Более того, выполняются следующие оценки ($t = k_n\tau_n$):

$$\left\| \frac{W_n^{cd}((k_n+1)\tau_n) - W_n^{cd}(k_n\tau_n)}{\tau_n} u_n^{\delta_n} - p_n u(t) \right\| \leqslant$$
$$\leqslant \max_{0\leqslant s\leqslant T} \|e_1^{sA_n} A_n u_n^0 - p_n e_1^{sA} Au^0\| + \|u_n^0 - p_n u^0\| + \tau_n M e^{\omega t}\big(t\,\|A_n^4 u_n^0\| + \|A_n^2 u_n^0\| + \|A_n u_n^0\| + 1\big).$$

3.5.3. Полудискретная регуляризация. Предположим, что начальные данные заданы с точностью $\|u^0 - u^\delta\| \leqslant \delta/3$ и $\|u_n^\delta - p_n u^\delta\| \leqslant \dfrac{\delta}{3Q}$. В то же время существует последовательность $u_n^0 \in D(A_n)$ со свойством $u_n^0 \xrightarrow{\mathcal{P}} u^0$ и $A_n u_n^0 \xrightarrow{\mathcal{P}} Au^0$. Пусть $n_\delta \in \mathbb{N}$ — такое число, что $\|u_n^0 - p_n u^0\| \leqslant \delta/3$ для $n \geqslant n_\delta$. Тогда

$$\|u_n^\delta - u_n^0\| \leqslant \|u_n^\delta - p_n u^\delta\| + \|u_n^0 - p_n u^0\| + \|p_n(u^0 - u^\delta)\| \leqslant \delta \quad \text{для} \quad n \geqslant n_\delta.$$

Это означает, что для любого элемента u^δ со свойством $\|u^0 - u^\delta\| \leqslant \delta/3$ найдется такой элемент u_n^δ (например, $u_n^\delta = p_n u^\delta$), что $\|u_n^\delta - u_n^0\| \leqslant \delta$ для $n \geqslant n_{\delta,u^0}$, где $u_n^0 \xrightarrow{\mathcal{P}} u^0$, $A_n u_n^0 \xrightarrow{\mathcal{P}} Au^0$, $n \in \mathbb{N}$. Естественной аппроксимируемой функцией, которая может быть рассмотрена для начальных данных u_n^δ, является функция $v_n^\delta(t) = e_1^{tA_n} u_n^\delta$. Для аппроксимации задачи (3.5.4) нужно взять производную от $e_1^{tA_n} u_n^\delta$ по t. Приизводная на элементе u_n^δ, возможно, не существует. Поэтому, следуя общей теории аппроксимации неограниченных операторов, мы рассмотрим функционал

$$\Phi_\alpha(\eta_n(\cdot)) = \|\eta_n(\cdot) - e_1^{\cdot A_n} u_n^\delta\|^2_{L^2([0,T];H_n)} + \alpha \left\| \frac{d}{dt}\eta_n(\cdot) \right\|^2_{L^2([0,T];H_n)},$$

где $0 < \alpha \to 0$ и $D\Big(\dfrac{d}{dt}\Big) = \{\eta(\cdot) \in L^2([0,T];H_n) : \eta_n'(0) = \eta_n'(T) = 0\}$. Элемент $v_{n,\alpha}(\cdot)$, который решает задачу

$$\inf_{\eta_n(\cdot)\in D(d/dt)} \Phi_\alpha(\eta_n(\cdot)) = \Phi_\alpha(v_{n,\alpha}(\cdot)),$$

может быть получен из задачи с естественными условиями

$$-\alpha \frac{d^2}{dt^2} v_{n,\alpha}(t) + v_{n,\alpha}(t) = e_1^{tA_n} u_n^\delta, \quad t \in [0,T], \quad v_{n,\alpha}'(0) = v_{n,\alpha}'(T) = 0. \tag{3.5.13}$$

Общее решение уравнения (3.5.13) дается формулой

$$v_{n,\alpha}(t) = \xi_1 e^{t/\sqrt{\alpha}} + \xi_2 e^{-t/\sqrt{\alpha}} + \frac{1}{2\sqrt{\alpha}} \int_0^t (e^{(t-s)/\sqrt{\alpha}} - e^{(t-s)/\sqrt{\alpha}}) e_1^{sA_n} u_n^\delta \, ds.$$

Таким образом, решение задачи (3.5.13) дается формулой

$$v_{n,\alpha}(t) = \frac{1}{2\sqrt{\alpha}} \int_0^t (e^{-(t-s)/\sqrt{\alpha}} - e^{(t-s)/\sqrt{\alpha}}) e_1^{sA_n} u_n^\delta \, ds +$$

$$+ \frac{e^{-T/\sqrt{\alpha}}(e^{t/\sqrt{\alpha}} + e^{-t/\sqrt{\alpha}})}{2\sqrt{\alpha}(1 - e^{-2T/\sqrt{\alpha}})} \int_0^T (e^{-(T-s)/\sqrt{\alpha}} + e^{(T-s)/\sqrt{\alpha}}) e_1^{sA_n} u_n^\delta \, ds. \tag{3.5.14}$$

Решение задачи (3.5.13), точнее, функция $v_{n,\alpha}'(\cdot)$, полученная из (3.5.14), может рассматриваться как регуляризированное решение задачи (3.5.4), где следует рассмотреть поведение $v_{n,\alpha}'(t)$ при $\alpha \to 0$ для $t \in [\epsilon, T-\epsilon]$ для некоторого $\epsilon > 0$. Более точно, можно показать, что регуляризующий алгоритм

$$v_{n,\alpha}'(t) = -\frac{1}{2\alpha} \int_0^t (e^{-(t-s)/\sqrt{\alpha}} + e^{(t-s)/\sqrt{\alpha}}) e_1^{sA_n} u_n^\delta \, ds +$$

$$+ \frac{e^{-T/\sqrt{\alpha}}(e^{t/\sqrt{\alpha}} - e^{-t/\sqrt{\alpha}})}{2\alpha(1 - e^{-2T/\sqrt{\alpha}})} \int_0^T (e^{-(T-s)/\sqrt{\alpha}} + e^{(T-s)/\sqrt{\alpha}}) e_1^{sA_n} u_n^\delta \, ds \tag{3.5.15}$$

сходится к $u_n(t) = (e_1^{tA_n} u_n^0)'$ для $t \in [\epsilon, T-\epsilon]$ при $\alpha \to 0$, $\delta \to 0$, $\epsilon > 0$. Немного более естественными граничными условиями для данного случая являются условия $v_{n,\alpha}'(0) = u_n^\delta$, $v_{n,\alpha}'(T) = 0$, которые соответсвуют основному соотношению $(e_1^{tA} u_n^0)'|_{t=0} = u_n^0$. Решение и производная решения задачи

$$-\alpha \frac{d^2}{dt^2} v_{n,\alpha}(t) + v_{n,\alpha}(t) = e_1^{tA_n} u_n^\delta, \quad t \in [0,T], \quad v_{n,\alpha}'(0) = u_n^\delta, \quad v_{n,\alpha}'(T) = 0, \tag{3.5.16}$$

даются выражениями

$$v_{n,\alpha}(t) = \frac{1}{2\sqrt{\alpha}} \int_0^t (e^{(t-s)/\sqrt{\alpha}} - e^{(t-s)\sqrt{\alpha}}) e_1^{sA_n} u_n^\delta \, ds +$$

$$+\frac{e^{-T/\sqrt{\alpha}}(e^{t/\sqrt{\alpha}}+e^{-t/\sqrt{\alpha}})}{2\sqrt{\alpha}(1-e^{-2T/\sqrt{\alpha}})}\int\limits_0^T(e^{-(T-s)/\sqrt{\alpha}}+e^{(T-s)/\sqrt{\alpha}})e_1^{sA_n}u_n^\delta\,ds-\frac{\sqrt{\alpha}(e^{-2T/\sqrt{\alpha}}\cdot e^{t/\sqrt{\alpha}}+e^{-t/\sqrt{\alpha}})}{1-e^{-2T/\sqrt{\alpha}}}u_n^\delta, \tag{3.5.17}$$

$$v'_{n,\alpha}(t)=-\frac{1}{2\alpha}\int\limits_0^t(e^{-(t-s)/\sqrt{\alpha}}+e^{(t-s)/\sqrt{\alpha}})e_1^{sA_n}u_n^\delta\,ds+$$

$$+\frac{e^{-T/\sqrt{\alpha}}(e^{t/\sqrt{\alpha}}-e^{-t/\sqrt{\alpha}})}{2\alpha(1-e^{-2T/\sqrt{\alpha}})}\int\limits_0^T(e^{-(T-s)/\sqrt{\alpha}}+e^{(T-s)\sqrt{\alpha}})e_1^{sA_n}u_n^\delta\,ds-\frac{e^{-2T/\sqrt{\alpha}}\cdot e^{t/\sqrt{\alpha}}-e^{-t/\sqrt{\alpha}}}{1-e^{-2T/\sqrt{\alpha}}}u_n^\delta. \tag{3.5.18}$$

Теорема 3.5.20 (см. [277]). *Предположим, что операторы A и A_n порождают экспоненциально ограниченные* 1 *раз проинтегрированные полугруппы и выполнены условия* (A) *и* ($\mathrm{B_{int}}$) *теоремы* 3.5.1. *Рассмотрим задачи* (3.5.16) *и пусть $\|u_n^\delta-u_n^0\|\leqslant\delta$. Если регуляризирующий параметр $\alpha=\alpha(\delta)$ выбран так, что $\delta=\sqrt{\alpha}\to 0$ и $u_n^0\xrightarrow{\mathcal{P}}u^0$, $A_nu_n^0\xrightarrow{\mathcal{P}}Au^0$, то $\|v_{n,\alpha}(t)-e_1^{tA_n}u_n^0\|\leqslant C\sqrt{\alpha}$ равномерно по $t\in[0,T-\epsilon]$ для $\epsilon>0$. Более того, если $A_nu_n^0\xrightarrow{\mathcal{P}}Au^0$, $A_n^2u_n^0\xrightarrow{\mathcal{P}}A^2u^0$, то $\|v'_{n,\alpha}(t)-(e_1^{tA_n}u_n^0)'\|\leqslant C\sqrt{\alpha}$ при $\delta=\alpha\to 0$ равномерно по $t\in[0,T-\epsilon]$ для $\epsilon>0$.*

Теорема 3.5.21 (см. [277]). *Предположим, что операторы A и A_n порождают экспоненциально ограниченные* 1 *раз проинтегрированные полугруппы и выполнены условия* (A) *и* ($\mathrm{B_{int}}$) *теоремы* 3.5.1. *Рассмотрим задачу* (3.5.13) *и пусть $\|u_n^\delta-u_n^0\|\leqslant\delta$. Если регуляризирующий параметр $\alpha=\alpha(\delta)$ выбран так, что $\delta=\sqrt{\alpha}\to 0$ и $u_n^0\xrightarrow{\mathcal{P}}u^0$, $A_nu_n^0\xrightarrow{\mathcal{P}}Au^0$, то $\|v_{n,\alpha}(t)-e_1^{tA_n}u_n^0\|\leqslant C\sqrt{\alpha}$ равномерно по $t\in[\epsilon,T-\epsilon]$ для $\epsilon>0$. Более того, если дополнительно $A_n^2u_n^0\xrightarrow{\mathcal{P}}A^2u^0$, то $\|v'_{n,\alpha}(t)-(e_1^{tA_n}u_n^0)'\|\leqslant C\sqrt{\alpha}$ при $\delta=\alpha\to 0$ равномерно по $t\in[\epsilon,T-\epsilon]$ для $\epsilon>0$.*

Теорема 3.5.22 (см. [277]). *Предположим, что операторы A и A_n порождают экспоненциально ограниченные* 1 *раз проинтегрированные полугруппы и выполнены условия* (A) *и* ($\mathrm{B_{int}}$) *теоремы* 3.5.1. *Рассмотрим регуляризацию задачи* (3.5.4) *задачами* (3.5.16). *Тогда для $\|u^\delta-u^0\|\leqslant\delta/3$, $u_n^\delta=p_nu^\delta$, и $u_n^0\xrightarrow{\mathcal{P}}u^0$, $A_nu_n^0\xrightarrow{\mathcal{P}}Au^0$, $A_n^2u_n^0\xrightarrow{\mathcal{P}}A^2u^0$ имеем*

$$\|v'_{n,\alpha}(t)-p_nu(t)\|\leqslant\max_{s\in[0,T]}\|e_1^{sA_n}A_nu_n^0-p_ne_1^{sA}Au^0\|+\|u_n^0-p_nu^0\|+C\sqrt{\alpha},\quad t\in[0,T-\epsilon],$$

где $\delta=\alpha$.

3.5.4. Конечно-разностная аппроксимация по времени. Практическая реализация регуляризирующих методов (3.5.13), (3.5.16) приводит к разностным схемам. Как и в п. 3.5.3, предположим, что мы в ситуации гильбертова пространства и аппроксимация проинтегрированного решения вычисляется по некоторой устойчивой схеме, скажем, как вектор $\{W_n^e(k\tau_n)u_n^\delta\}_{k=0}^K$, $K\tau_n=T$. В пространстве векторов $\bigl(\xi_n(0),\xi_n(1),\cdots,\xi_n(K)\bigr)$, $\xi_n(j)\in H_n$, $j\in\overline{\{0,\dots,K\}}$, обозначенном как

$$L^2_{\tau_n}([0,T];H_n)=\left\{\{\xi_n(j)\}_{j=0}^K:\|\xi_n(\cdot)\|^2_{L^2_{\tau_n}([0,T];H_n)}=\sum_{j=0}^K\|\xi_n(j)\|^2_{H_n}\tau_n\right\},$$

рассмотрим параметрический функционал

$$\Psi_\alpha(\xi_n(\cdot))=\|\xi_n(\cdot)-W_n^e(\cdot)u_n^\delta\|^2_{L^2_{\tau_n}([0,T];H_n)}+\alpha\,\|(\partial_{\tau_n}\xi_n)(\cdot)\|^2_{L^2_{\tau_n}([0,T];H_n)},$$

где $\alpha>0$ — регуляризирующий параметр. Оператор $\partial_{\tau_n}:L^2_{\tau_n}([0,T];H_n)\to L^2_{\tau_n}([0,T];H_n)$ определен в пространстве $L^2_{\tau_n}([0,T];H_n)$ соотношением $(\partial_{\tau_n}\{\xi_n(\cdot)\})(m)=\dfrac{\xi_n(m+1)-\xi_n(m)}{\tau_n}$, где

$$D(\partial_{\tau_n})=\bigl\{\{\xi_n(\cdot)\}:(\partial_{\tau_n}\xi_n)(0)=0,(\partial_{\tau_n}\xi_n)(K-1)=0\bigr\}.$$

Рассмотрим теперь вспомогательную задачу: найти такой элемент $V_{n,\alpha}(\cdot) \in D(\partial_{\tau_n})$, что

$$\inf_{\xi_n(\cdot)\in D(\partial_{\tau_n})} \Psi_\alpha(\xi_n(\cdot)) = \Psi_\alpha(V_{n,\alpha}(\cdot)). \tag{3.5.19}$$

Согласно общей теории, решение задачи (3.5.19) существует и дается уравнением Эйлера

$$-\alpha\,(\bar\partial_{\tau_n}\partial_{\tau_n}V_{n,\alpha})(k) + V_{n,\alpha}(k) = W_n^e(k\tau_n)u_n^\delta, \quad k\in\{1,2,\dots,K-1\}, \tag{3.5.20}$$

с граничными условиями $(\partial_{\tau_n}V_{n,\alpha})(0) = 0$, $(\partial_{\tau_n}V_{n,\alpha})(K-1) = 0$, где $(\bar\partial_{\tau_n}\{V_{n,\alpha}(\cdot)\})(m) = \dfrac{V_{n,\alpha}(m)-V_{n,\alpha}(m-1)}{\tau_n}$.

Уравнение (3.5.20) можно решить численно, скажем, методом прогонки. Согласно структуре оператора $-\alpha\bar\partial_{\tau_n}\partial_{\tau_n} + I_n$, решение уравнения (3.5.20) может быть получено устойчивой процедурой. Подобно случаю полудискретной регуляризации можно рассмотреть несколько задач с уравнением (3.5.20), ставя разные граничные условия. А именно, можно задать, например, следующие граничные условия, соответствующие задаче (3.5.4):

$$V_{n,\alpha}(0) = 0, \quad V_{n,\alpha}(K) = 0, \tag{3.5.21}$$

$$V_{n,\alpha}(0) = 0, \quad (\partial_{\tau_n}V_{n,\alpha})(K-1) = 0, \tag{3.5.22}$$

$$(\partial_{\tau_n}V_{n,\alpha})(0) = u_n^\delta, \quad V_{n,\alpha}(K) = 0, \tag{3.5.23}$$

$$(\partial_{\tau_n}V_{n,\alpha})(0) = u_n^\delta, \quad (\partial_{\tau_n}V_{n,\alpha})(K-1) = 0, \tag{3.5.24}$$

где $\|u_n^\delta - u_n^0\| \leqslant \delta$ и $u_n^0 \xrightarrow{\mathcal{P}} u^0$.

Одним из простейших регуляризационных методов является

$$(\bar\partial_{\tau_n}\partial_{\tau_n}V_{n,\alpha})(k) = \frac{1}{\alpha}V_{n,\alpha}(k) - \frac{1}{\alpha}W_n^e(k\tau_n)u_n^\delta, \quad k\in\{1,\dots,K-1\}, \quad V_{n,\alpha}(0) = V_{n,\alpha}(K) = 0, \tag{3.5.25}$$

где решение $V_{n,\alpha}(\cdot)$ задачи (3.5.25) или (3.5.20), (3.5.21) может быть представлено как

$$V_{n,\alpha}(k) = -(I_n - R_n^{2K})^{-1}(R_n^{K-k} - R_n^{K+k})\frac{\tau_n(1+\tau_nB_n)B_n^{-1}}{\alpha(2I_n+\tau_nB_n)}\sum_{j=1}^{K-1}(R_n^{K-j} - R_n^{K+j})W_n^e(j\tau_n)u_n^\delta +$$

$$+\frac{\tau_n(1+\tau_nB_n)B_n^{-1}}{\alpha(2I_n+\tau_nB_n)}\sum_{j=1}^{K-1}(R_n^{|k-j|} - R_n^{k+j})W_n^e(j\tau_n)u_n^\delta, \tag{3.5.26}$$

где

$$R_n = (I_n+\tau_nB_n)^{-1}, \qquad B_n = \frac{\dfrac{\tau_n}{\alpha} + \dfrac{1}{\sqrt{\alpha}}\sqrt{\dfrac{\tau_n^2}{\alpha+4}}}{2}.$$

Предположим, что $\dfrac{\tau_n}{\alpha} \to 0$ при $\alpha\to 0$, т.е., например, положим $\tau_n = \alpha^{1+1/2}$. Тогда

$$B_n = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} + O(\sqrt{\alpha}), \qquad B_n^{-1} = \sqrt{\alpha} + O(\alpha^{1+1/2})$$

и

$$R_n \approx e^{-\tau_n/\sqrt{\alpha}} \to 1, \qquad R_n^{k_n} \approx e^{-t/\sqrt{\alpha}} \to 0$$

для любого фиксированного $t = k_n\tau_n \in (0,T]$ при $\alpha\to 0$.

Теорема 3.5.23 (см. [277]). *Предположим, что операторы A и A_n порождают экспоненциально ограниченные* 1 *раз проинтегрированные полугруппы и выполнены условия* (A) *and* ($\mathrm{B_{int}}$) *теоремы* 3.5.1. *Пусть $\|u_n^\delta - u_n^0\| \leqslant \delta$, $u^0\in D(A^4)$, $u_n^0 \xrightarrow{\mathcal{P}} u^0$, $A_n^4u_n^0 \xrightarrow{\mathcal{P}} A^4u^0$. Если параметры α, δ, и τ_n выбраны так, что $\delta=\alpha$, $\tau_n = \alpha^{3/2}$ при $\alpha\to 0$, то решение $V_{n,\alpha}(\cdot)$ задачи* (3.5.25), *построенное по устойчивой схеме $W_n^e(\cdot)u_n^\delta$, обеспечивает регуляризирующее решение задачи* (3.5.4) *и выполняются следующие оценки* ($t = k_n\tau_n \in [0, T-\epsilon]$):

$$\left\|\frac{V_{n,\alpha}(k_n+1) - V_{n,\alpha}(k_n)}{\tau_n} - p_nu(t)\right\| \leqslant$$

$$\leqslant \max_{s\in[0,T]} \|e_1^{sA_n}A_n u_n^0 - p_n e_1^{sA} A u^0\| + \|u_n^0 - p_n u^0\| + O(\sqrt{\alpha}) + \tau_n C \|A_n^4 u_n^0\|. \tag{3.5.27}$$

Замечание 3.5.24. Согласно (3.5.20), практическая реализация теоремы 3.5.23 вытекает из соотношения

$$\frac{V_{n,\alpha}(k_n+1) - V_{n,\alpha}(k_n)}{\tau_n} = \frac{V_{n,\alpha}(k_n) - V_{n,\alpha}(k_n-1)}{\tau_n} - \frac{\tau_n}{\alpha} W_n^e(k_n\tau_n)u_n^\delta + \frac{\tau_n}{\alpha} V_{n,\alpha}(k_n) =$$

$$= (\partial_{\tau_n} V_{n,\alpha})(0) + \frac{\tau_n}{\alpha}\sum_{l=1}^{k_n}\big(V_{n,\alpha}(l) - W_n^e(l\tau_n)u_n^\delta\big).$$

Весьма важно, что значения функции $V_{n,\alpha}(\cdot)$ в 0 были выбраны как $V_{n,\alpha}(0)=0$. В случае условий (3.5.23) точность в точке $t=0$, которая определена условием $(\partial_{\tau_n} V_{n,\alpha})(0) = u_n^\delta$, равняется $\sqrt{\alpha}$ для $\delta = \alpha$.

Замечание 3.5.25. Ясно, что такой же результат, как и в теореме 3.5.23, имеет место в случае неявного метода и устойчивой схемы Кранка—Николсон. А именно, в условиях теоремы 3.5.23, пусть $\|u_n^\delta - u_n^0\| \leqslant \delta$, $u^0 \in D(A^4)$, $u_n^0 \xrightarrow{\mathcal{P}} u^0$, $A_n^4 u_n^0 \xrightarrow{\mathcal{P}} A^4 u^0$. Если параметры α, δ и τ_n выбраны так, что $\delta = \alpha$, $\tau_n = \alpha^{3/2}$ при $\alpha \to 0$, то решение $V_{n,\alpha}(\cdot)$ задачи (3.5.25), построенное по схеме $W_n^i(\cdot)u_n^\delta$ или по устойчивой схеме $W_n^{cd}(\cdot)u_n^\delta$, доставляет регуляризованное решение задачи (3.5.4) и для $t = k_n\tau_n \in [0, T-\epsilon]$ выполняется оценка (3.5.27) с соответствующими изменениями порядка сходимости для $W_n^{cd}(\cdot)u_n^\delta$.

Теорема 3.5.26 (см. [277]). *Предположим, что операторы A и A_n порождают экспоненциально ограниченные* 1 *раз проинтегрированные полугруппы и выполнены условия* (A) *и* ($\mathrm{B_{int}}$) *теоремы* 3.5.1. *Пусть $\|u_n^\delta - u_n^0\| \leqslant \delta$, $u^0 \in D(A^4)$, $u_n^0 \xrightarrow{\mathcal{P}} u^0$, $A_n^4 u_n^0 \xrightarrow{\mathcal{P}} A^4 u^0$. Если параметры α, δ, и τ_n выбраны так, что $\delta = \alpha$, $\tau_n = \alpha^{3/2}$ при $\alpha \to 0$, то решение $V_{n,\alpha}(\cdot)$ задач* (3.5.20), (3.5.22), *построенное по устойчивой схеме $W_n^e(\cdot)u_n^\delta$, дает регуляризованное решение задачи* (3.5.4) *и для $t = k_n\tau_n \in [0, T-\epsilon]$ выполняется оценка* (3.5.27).

Замечание 3.5.27. Такой же результат, как и в теореме 3.5.26, имеет место в случае неявного метода и устойчивой схемы Кранка—Николсон. А именно, в условиях теоремы 3.5.26, пусть $\|u_n^\delta - u_n^0\| \leqslant \delta$, $u^0 \in D(A^4)$, $u_n^0 \xrightarrow{\mathcal{P}} u^0$, $A_n^4 u_n^0 \xrightarrow{\mathcal{P}} A^4 u^0$. Если параметры α, δ, и τ_n выбраны так, что $\delta = \alpha$, $\tau_n = \alpha^{3/2}$ при $\alpha \to 0$, то решение $V_{n,\alpha}(\cdot)$ задачи (3.5.20), (3.5.22), построенное по схеме $W_n^i(\cdot)u_n^\delta$ или по устойчивой схеме $W_n^{cd}(\cdot)u_n^\delta$, обеспечивает регуляризованное решение задачи (3.5.4) и для $t = k_n\tau_n \in [0, T-\epsilon]$ выполняется оценка (3.5.27) с соответсвующими изменениями в скорости сходимости для $W_n^{cd}(\cdot)u_n^\delta$.

Теорема 3.5.28 (см. [277]). *Предположим, что операторы A и A_n порождают экспоненциально ограниченные* 1 *раз проинтегрированные полугруппы и выполнены условия* (A) *и* ($\mathrm{B_{int}}$) *теоремы* 3.5.1. *Пусть $\|u_n^\delta - u_n^0\| \leqslant \delta$, $u^0 \in D(A^4)$, $u_n^0 \xrightarrow{\mathcal{P}} u^0$, $A_n^4 u_n^0 \xrightarrow{\mathcal{P}} A^4 u^0$. Если параметры α, δ, и τ_n выбраны так, что $\delta = \alpha$, $\tau_n = \alpha^{3/2}$ при $\alpha \to 0$, то решение $V_{n,\alpha}(\cdot)$ задачи* (3.5.20), (3.5.23)*, построенное по устойчивой схеме $W_n^e(\cdot)u_n^\delta$, обеспечивает регуляризованное решение задачи* (3.5.4) *и для $t = k_n\tau_n \in [0, T-\epsilon]$ выполняется оценка* (3.5.27).

Замечание 3.5.29. Предположим, что операторы A и A_n порождают экспоненциально ограниченные 1 раз проинтегрированные полугруппы и выполнены условия (A) и (B_{int}) теоремы 3.5.1. Пусть $\|u_n^\delta - u_n^0\| \leqslant \delta$, $u^0 \in D(A^4)$, $u_n^0 \xrightarrow{\mathcal{P}} u^0$, $A_n^4 u_n^0 \xrightarrow{\mathcal{P}} A^4 u^0$. Если параметры α, δ, и τ_n выбраны так, что $\delta = \alpha$, $\tau_n = \alpha^{3/2}$ при $\alpha \to 0$, то решение $V_{n,\alpha}(\cdot)$ задачи (3.5.20), (3.5.23), построенное по схеме $W_n^i(\cdot)u_n^\delta$ или по устойчивой схеме $W_n^{cd}(\cdot)u_n^\delta$, обеспечивает регуляризованное решение задачи (3.5.4) и для $t = k_n\tau_n \in [0, T-\epsilon]$ выполняется оценка (3.5.27) с соответсвующими изменениями в скорости сходимости для схемы $W_n^{cd}(\cdot)u_n^\delta$.

Теорема 3.5.30 (см. [277]). *Предположим, что операторы A и A_n порождают экспоненциально ограниченные* 1 *раз проинтегрированные полугруппы и выполнены условия* (A) *и* ($\mathrm{B_{int}}$)

теоремы 3.5.1. *Пусть* $\|u_n^\delta - u_n^0\| \leqslant \delta$, $u^0 \in D(A^4)$, $u_n^0 \xrightarrow{\mathcal{P}} u^0$, $A_n^4 u_n^0 \xrightarrow{\mathcal{P}} A^4 u^0$. *Если параметры* α, δ, *и* τ_n *выбраны так, что* $\delta = \alpha$, $\tau_n = \alpha^{3/2}$ *при* $\alpha \to 0$, *то решение* $V_{n,\alpha}(\cdot)$ *задачи* (3.5.20), (3.5.24), *построенное по устойчивой схеме* $W_n^e(\cdot)u_n^\delta$, *обеспечивает регуляризованное решение задачи* (3.5.4) *и для* $t = k_n\tau_n \in [0, T - \epsilon]$ *выполняется оценка* (3.5.27).

Замечание 3.5.31. Предположим, что операторы A и A_n порождают экспоненциально ограниченные 1 раз проинтегрированные полугруппы и выполнены условия (A) и (B_{int}) теоремы 3.5.1. Пусть $\|u_n^\delta - u_n^0\| \leqslant \delta$, $u^0 \in D(A^4)$, $u_n^0 \xrightarrow{\mathcal{P}} u^0$, $A_n^4 u_n^0 \xrightarrow{\mathcal{P}} A^4 u^0$. Если параметры α, δ, и τ_n выбраны так, что $\delta = \alpha$, $\tau_n = \alpha^{3/2}$ при $\alpha \to 0$, то решение $V_{n,\alpha}(\cdot)$ задачи (3.5.20), (3.5.24), построенное по схеме $W_n^i(\cdot)u_n^\delta$ или по устойчивой схеме $W_n^{cd}(\cdot)u_n^\delta$, обеспечивает регуляризованное решение задачи (3.5.4) и для $t = k_n\tau_n \in [0, T - \epsilon]$ выполняется оценка (3.5.27) с соответсвующими изменениями в скорости сходимости для схемы $W_n^{cd}(\cdot)u_n^\delta$.

Замечание 3.5.32. Член $\tau_n C\|A_n^4 u_n^0\| \approx \alpha^{3/2}$ на самом деле показывает, что для сходимости не нужна гладкость $u_n^0 \in D(A_n^4)$. Действительно, поскольку часть оператора A порождает C_0-полугруппу на $\overline{D(A)}$, то можно ожидать сходимость, скажем, на $D(A^2)$, но с другой скоростью сходимости. На самом деле нам нужна только скорость сходимости порядка $O(\sqrt{\alpha})$.

3.5.5. Метод Лаврентьева для C_0-полугрупп. Рассмотрим в банаховом пространстве E корректно поставленную задачу Коши (1) с замкнутым оператором $A \in \mathcal{C}(E)$. Если оператор A порождает C_0-полугруппу $\exp(\cdot A)$, то хорошо известно, что обобщенное решение задачи (1) дается в виде $u(t) = \exp(tA)u^0$ для $t \geqslant 0$. Если $u^0 \in D(A)$, то производная решения дается в виде $u'(t) = \exp(tA)Au^0$, $t \geqslant 0$. Аппроксимация задачи (1) в некотором банаховом пространстве E_n дается задачами

$$\begin{aligned} u_n'(t) &= A_n u_n(t), \quad t \in [0,\infty), \\ u_n(0) &= u_n^0 \in E_n. \end{aligned} \tag{3.5.28}$$

Здесь мы предполагаем, что $u_n^0 \xrightarrow{\mathcal{P}} u^0$ и операторы $A_n \in \mathcal{C}(E_n)$, порождающие C_0-полугруппы, согласованы с оператором $A \in \mathcal{C}(E)$ и $u_n^0 \xrightarrow{\mathcal{P}} u^0$. Сходимость решений $u_n(t) \xrightarrow{\mathcal{P}} u(t)$ равномерно по $t \in [0, T]$ описывается теоремой 3.2.4. Сходимость производных

$$u_n'(t) = \exp(tA_n)A_n u_n^0 \xrightarrow{\mathcal{P}} u'(t) = \exp(tA)Au^0$$

вызывает, вообще говоря, сходимость $A_n u_n^0 \xrightarrow{\mathcal{P}} Au^0$.

Теорема 3.5.33 (см. [277]). *Пусть оператор A порождает C_0-полугруппу. Предположим, что выполнены условия* (A) *и* (B) *теоремы* ABC. *Тогда*

$$\exp(tA_n)w_n^{\alpha,\delta} \xrightarrow{\mathcal{P}} \exp(tA)Au^0 \quad \text{для любого} \quad u^0 \in D(A) \quad \text{при} \quad n \to \infty \quad \text{и} \quad \alpha, \delta \to 0, \tag{3.5.29}$$

где $w_n^{\alpha,\delta} = -(\alpha I_n + B_n)^{-1}u_n^\delta$, $\delta/\alpha \to 0$ *и* $\|u_n^\delta - p_n u^0\| \leqslant \delta$. *Выполняются следующие оценки*:

$$\|\exp(tA_n)w_n^{\alpha,\delta} - p_n \exp(tA)Au^0\| \leqslant C\sqrt{\delta} + \|\exp(tA_n)A_n u_n^0 - p_n \exp(tA)Au^0\| \tag{3.5.30}$$

для $\alpha = \sqrt{\delta}$, $u_n^0 \xrightarrow{\mathcal{P}} u^0$, $A_n u_n^0 \xrightarrow{\mathcal{P}} Au^0$, $A_n^2 u_n^0 \xrightarrow{\mathcal{P}} A^2 u^0$, *и* $t \in [0, T]$.

Теорема 3.5.34 (see [277]). *Пусть оператор A порождает C_0-полугруппу. Предположим, что выполнены условия* (A) *и* (B) *теоремы* ABC. *Тогда*

$$(I_n - \tau_n A_n)^{-k_n} w_n^{\alpha,\delta} \xrightarrow{\mathcal{P}} \exp(tA)Au^0 \quad \text{для любого} \quad u^0 \in D(A) \quad \text{равномерно по} \quad t = k_n\tau_n \in [0, T] \tag{3.5.31}$$

при $n \to \infty$ *и* $\alpha, \delta \to 0$, *где* $w_n^{\alpha,\delta} = -(\alpha I_n + B_n)^{-1}u_n^\delta$, $\delta/\alpha \to 0$ *и* $\|u_n^\delta - p_n u^0\| \leqslant \delta$. *Выполняются следующие оценки*:

$$\begin{aligned} &\|(I_n - \tau_n A_n)^{-k_n} w_n^{\alpha,\delta} - p_n \exp(tA)Au^0\| \leqslant \\ &\leqslant C\sqrt{\delta}(1 + \|A_n^2 u_n^0\| + \|A_n^3 u_n^0\|) + \|\exp(tA_n)A_n u_n^0 - p_n \exp(tA)Au^0\| \end{aligned} \tag{3.5.32}$$

для $\alpha = \tau_n = \sqrt{\delta}$, $u_n^0 \xrightarrow{\mathcal{P}} u^0$, $A_n u_n^0 \xrightarrow{\mathcal{P}} Au^0$, $A_n^2 u_n^0 \xrightarrow{\mathcal{P}} A^2 u^0$, $A_n^3 u_n^0 \xrightarrow{\mathcal{P}} A^3 u^0$, *и* $t \in [0,T]$.

Если явная схема или схема Кранка—Николсон устойчивы, то

$$(I_n + \tau_n A_n)^{k_n} w_n^{\alpha,\delta} \xrightarrow{\mathcal{P}} \exp(tA)Au^0 \quad \textit{для любого} \quad u^0 \in D(A) \quad \textit{равномерно по} \quad t = k_n\tau_n \in [0,T] \tag{3.5.33}$$

или

$$\left(\frac{I_n + \dfrac{\tau_n}{2}A_n}{I_n - \dfrac{\tau_n}{2}A_n}\right)^{k_n} w_n^{\alpha,\delta} \xrightarrow{\mathcal{P}} \exp(tA)Au^0 \quad \textit{для любого} \quad u^0 \in D(A) \quad \textit{равномерно по} \quad t = k_n\tau_n \in [0,T] \tag{3.5.34}$$

для $\alpha \to 0$, $\delta/\alpha \to 0$.

В случае устойчивости явной схемы или схемы Кранка—Николсон имеют место следующие оценки:

$$\begin{gathered}\|(I_n + \tau_n A_n)^{k_n} w_n^{\alpha,\delta} - p_n \exp(tA)Au^0\| \leqslant \\ \leqslant C\sqrt{\delta}(1 + \|A_n^2 u_n^0\| + \|A_n^3 u_n^0\|) + \|\exp(tA_n)A_n u_n^0 - p_n \exp(tA)Au^0\|\end{gathered} \tag{3.5.35}$$

для $\alpha = \tau_n = \sqrt{\delta}$, $u_n^0 \xrightarrow{\mathcal{P}} u^0$, $A_n u_n^0 \xrightarrow{\mathcal{P}} Au^0$, $A_n^2 u_n^0 \xrightarrow{\mathcal{P}} A^2 u^0$, $A_n^3 u_n^0 \xrightarrow{\mathcal{P}} A^3 u^0$, *и* $t \in [0,T]$;

$$\begin{gathered}\left\|\left(\frac{I_n + \dfrac{\tau_n}{2}A_n}{I_n - \dfrac{\tau_n}{2}A_n}\right)^{k_n} w_n^{\alpha,\delta} - p_n \exp(tA)Au^0\right\| \leqslant \\ \leqslant C\sqrt{\delta}(1 + \|A_n^2 u_n^0\| + \|A_n^4 u_n^0\|) + \|\exp(tA_n)A_n u_n^0 - p_n \exp(tA)Au^0\|\end{gathered} \tag{3.5.36}$$

для $\alpha = \sqrt{\delta}$, $\tau_n = \delta^{1/4}$, $u_n^0 \xrightarrow{\mathcal{P}} u^0$, $A_n u_n^0 \xrightarrow{\mathcal{P}} Au^0$, $A_n^2 u_n^0 \xrightarrow{\mathcal{P}} A^2 u^0$, $A_n^3 u_n^0 \xrightarrow{\mathcal{P}} A^3 u^0$, $A_n^4 u_n^0 \xrightarrow{\mathcal{P}} A^4 u^0$, *и* $t \in [0,T]$.

3.5.6. Метод Лаврентьева для проинтегрированных полугрупп. Решение $u(\cdot)$ задачи (3.5.4) может быть представлено формулой $u(\cdot) = v'(\cdot) = (e_1^{tA}u^0)'_t$, и поэтому имеется, по крайней мере, два различных пути получения аппроксимации решения $u(\cdot)$: как-то проаппроксимировать производную $v'(\cdot)$ как неограниченный оператор или использовать формулу (3.5.2) на элементе $x \in D(A)$ и потом построить аппроксимацию неограниченного оператора A в выражении

$$(e_1^{tA}x)'_t = e_1^{tA}Ax + x, \tag{3.5.37}$$

поскольку аппроксимация проинтегрированной полугруппы e_1^{tA} уже построена. Таким образом, в последнем случае имеем (3.1.1) с $B = A^{-1}$. В этом примере начальные данные определены как $\|y^\delta - y\| \leqslant \delta$ и поэтому нам надо построить аппроксимацию выражения $B^{-1}y^\delta$, которое в некотором понимании не имеет смысла. Итак, последняя часть обзора посвящена аппроксимации значений неограниченных операторов, когда они порождают проинтегрированные полугруппы.

Как было отмечено в (3.5.2), для 1 раз проинтегрированной полугруппы e_1^{tA}, $t \in \overline{\mathbb{R}}_+$, и $x \in D(A)$ имеем $e_1^{tA}x = \int\limits_0^t e_1^{sA}Ax\,ds + tx$, $t \geqslant 0$. Поэтому для тех же x производная по t дается по формуле

$$(e_1^{tA}x)'_t = e_1^{tA}Ax + x, \quad t \geqslant 0. \tag{3.5.38}$$

Предположим, что для $u^0 \in D(A^2)$ из задачи (3.5.4) можно выбрать такие $u_n^0 \in D(A_n^2)$, что $u_n^0 \xrightarrow{\mathcal{P}} u^0$, $A_n u_n^0 \xrightarrow{\mathcal{P}} Au^0$, и $A_n^2 u_n^0 \xrightarrow{\mathcal{P}} A^2 u^0$. Тогда сходимость

$$u_n(t) = (e_1^{tA_n}u_n^0)'_t \xrightarrow{\mathcal{P}} (e_1^{tA}u^0)'_t = u(t) \quad \text{равномерно по} \quad t \in [0,T] \tag{3.5.39}$$

обеспечивается условием ($\mathrm{C_{int}}$) теоремы 3.5.1 или условиями (A) и ($\mathrm{B'_{int}}$) из следствия 3.5.2.

Теорема 3.5.35 (см. [277]). *Пусть оператор A порождает экспоненциально ограниченную 1 раз проинтегрированную полугруппу. Предположим, что выполнены условия* (A) *и* ($\mathrm{B}'_{\mathrm{int}}$) *следствия* 3.5.2. *Тогда*

$$e_1^{tA_n}\zeta_n^{\alpha,\delta}+u_n^\delta\xrightarrow{\mathcal{P}}e_1^{tA}Au^0+u^0 \quad \text{для любого} \quad u^0\in D(A^3) \quad \text{при} \quad n\to\infty \quad \text{и} \quad \alpha,\delta\to 0, \tag{3.5.40}$$

где $\zeta_n^{\alpha,\delta}=-(\alpha I_n+B_n)^{-1}u_n^\delta$, $\delta/\alpha^2\to 0$, $\|u_n^\delta-p_nu^0\|\leqslant\delta$. *Имеют место следующие оценки*:

$$\|e_1^{tA_n}\zeta_n^{\alpha,\delta}+u_n^\delta-p_n\Big(e_1^{tA}Au^0+u^0\Big)\|\leqslant C\delta^{1/3} \tag{3.5.41}$$

для $\alpha=\delta^{1/3}$, $u_n^0\xrightarrow{\mathcal{P}}u^0$, $A_nu_n^0\xrightarrow{\mathcal{P}}Au^0$, $A_n^2u_n^0\xrightarrow{\mathcal{P}}A^2u^0$, $A_n^3u_n^0\xrightarrow{\mathcal{P}}A^3u^0$, *и* $t\in[0,T]$.

Теорема 3.5.36 (см. [277]). *Пусть оператор A порождает экспоненциально ограниченную 1 раз проинтегрированную полугруппу. Предположим, что выполнены условия* (A) *и* ($\mathrm{B}'_{\mathrm{int}}$) *следствия* 3.5.2. *Тогда*

$$W_n^i(k\tau_n)\zeta_n^{\alpha,\delta}+u_n^\delta\xrightarrow{\mathcal{P}}e_1^{tA}Au^0+u^0 \quad \text{для любого} \quad u^0\in D(A^3) \quad \text{при} \quad n\to\infty \quad \text{и} \quad \alpha,\delta\to 0, \tag{3.5.42}$$

где $t=k\tau_n$, $\zeta_n^{\alpha,\delta}=-(\alpha I_n+B_n)^{-1}u_n^\delta$, $\delta/\alpha^2\to 0$, $\|u_n^\delta-p_nu^0\|\leqslant\delta$. *Имеют место следующие оценки*:

$$\|W_n^i(k\tau_n)\zeta_n^{\alpha,\delta}+u_n^\delta-p_n\Big(e_1^{tA}Au^0+u^0\Big)\|\leqslant C\delta^{1/3}+ \tag{3.5.43}$$

для $\alpha=\tau_n=\delta^{1/3}$, $u_n^0\xrightarrow{\mathcal{P}}u^0$, $A_nu_n^0\xrightarrow{\mathcal{P}}Au^0$, $A_n^2u_n^0\xrightarrow{\mathcal{P}}A^2u^0$, $A_n^3u_n^0\xrightarrow{\mathcal{P}}A^3u^0$, $A_n^4u_n^0\xrightarrow{\mathcal{P}}A^4u^0$, *и* $t\in[0,T]$.

Теорема 3.5.37 (см. [277]). *Пусть оператор A порождает экспоненциально ограниченную 1 раз проинтегрированную полугруппу. Предположим, что выполнены условия* (A) *и* ($\mathrm{B}'_{\mathrm{int}}$) *следствия* 3.5.2, *а также условие устойчивости. Тогда*

$$W_n^e(k\tau_n)\zeta_n^{\alpha,\delta}+u_n^\delta\xrightarrow{\mathcal{P}}e_1^{tA}Au^0+u^0 \quad \text{для любого} \quad u^0\in D(A^3) \quad \text{при} \quad n\to\infty \quad \text{и} \quad \alpha,\delta\to 0, \tag{3.5.44}$$

где $t=k\tau_n$, $\zeta_n^{\alpha,\delta}=-(\alpha I_n+B_n)^{-1}u_n^\delta$, $\delta/\alpha^2\to 0$, $\|u_n^\delta-p_nu^0\|\leqslant\delta$. *Имеют место следующие оценки*:

$$\|W_n^e(k\tau_n)\zeta_n^{\alpha,\delta}+u_n^\delta-p_n\Big(e_1^{tA}Au^0+u^0\Big)\|\leqslant C\delta^{1/3}+$$

для $\alpha=\delta^{1/3}$, $\tau_n=\min\Big\{\delta^{1/3},\dfrac{C}{\|A_n^2\|}\Big\}$, $u_n^0\xrightarrow{\mathcal{P}}u^0$, $A_nu_n^0\xrightarrow{\mathcal{P}}Au^0$, $A_n^2u_n^0\xrightarrow{\mathcal{P}}A^2u^0$, $A_n^3u_n^0\xrightarrow{\mathcal{P}}A^3u^0$, $A_n^4u_n^0\xrightarrow{\mathcal{P}}A^4u^0$, *и* $t\in[0,T]$.

Теорема 3.5.38 (см. [277]). *Пусть оператор A порождает экспоненциально ограниченную 1 раз проинтегрированную полугруппу. Предположим, что выполнены условия* (A) *и* ($\mathrm{B}'_{\mathrm{int}}$) *следствия* 3.5.2, *а также условие устойчивости. Тогда*

$$W_n^{cd}(k\tau_n)\zeta_n^{\alpha,\delta}+u_n^\delta\xrightarrow{\mathcal{P}}e_1^{tA}Au^0+u^0 \quad \text{для любого} \quad u^0\in D(A^3) \quad \text{при} \quad n\to\infty \quad \text{и} \quad \alpha,\delta\to 0, \tag{3.5.45}$$

где $t=k\tau_n$, $\zeta_n^{\alpha,\delta}=-(\alpha I_n+B_n)^{-1}u_n^\delta$, $\delta/\alpha^2\to 0$, $\tau_n\to 0$, $\|u_n^\delta-p_nu^0\|\leqslant\delta$. *Имеют место следующие оценки*:

$$\|W_n^{cd}(k\tau_n)\zeta_n^{\alpha,\delta}+u_n^\delta-p_n\Big(e_1^{tA}Au^0+u^0\Big)\|\leqslant C\delta^{1/3}+$$

для $\alpha=\delta^{1/3}$, $\tau_n=\min\{\delta^{1/3},C/\|A_n^2\|\}$, $u_n^0\xrightarrow{\mathcal{P}}u^0$, $A_nu_n^0\xrightarrow{\mathcal{P}}Au^0$, $A_n^2u_n^0\xrightarrow{\mathcal{P}}A^2u^0$, $A_n^3u_n^0\xrightarrow{\mathcal{P}}A^3u^0$, *и* $t\in[0,T]$.

Теорема 3.5.39 (см. [277]). *Пусть оператор A порождает экспоненциально ограниченную 1 раз проинтегрированную полугруппу. Предположим, что выполнены условия* (A) *и* ($\mathrm{B}''_{\mathrm{int}}$) *теоремы* 3.5.3, *а также условие устойчивости. Тогда*

$$W_n^{cd}(k\tau_n)\zeta_n^{\alpha,\delta}+u_n^\delta\xrightarrow{\mathcal{P}}e_1^{tA}Au^0+u^0 \quad \text{для любого} \quad u^0\in D(A^3) \quad \text{при} \quad n\to\infty \quad \text{и} \quad \alpha,\delta\to 0, \tag{3.5.46}$$

где $t=k\tau_n$, $\zeta_n^{\alpha,\delta}=-(\alpha I_n+B_n)^{-1}u_n^\delta$, $\delta/\alpha^2\to 0$, $\|u_n^\delta-p_nu^0\|\leqslant\delta$. *Имеют место следующие оценки*:

$$\|W_n^{cd}(k\tau_n)\zeta_n^{\alpha,\delta}+u_n^\delta-p_n\Big(e_1^{tA}Au^0+u^0\Big)\|\leqslant C\delta^{1/3}+$$

для $\alpha = \delta^{1/3}$, $\tau_n = \min\left\{\delta^{1/6}, \dfrac{2\sin\theta}{\|A_n\|}\right\}$, $u_n^0 \xrightarrow{\mathcal{P}} u^0$, $A_n u_n^0 \xrightarrow{\mathcal{P}} Au^0$, $A_n^2 u_n^0 \xrightarrow{\mathcal{P}} A^2 u^0$, $A_n^3 u_n^0 \xrightarrow{\mathcal{P}} A^3 u^0$, $A_n^4 u_n^0 \xrightarrow{\mathcal{P}} A^4 u^0$, $A_n^5 u_n^0 \xrightarrow{\mathcal{P}} A^5 u^0$, *и* $t \in [0, T]$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бакушинский А. Б., Кокурин М. Ю., Ключев В. В.* Об оценке скорости сходимости и погрешности разностных методов аппроксимации решения некорректной задачи Коши в банаховом пространстве// Выч. методы программ. — 2006. — *7*, № 2 (2006) — С. 163–171.
2. *Баскаков А. Г., Калужина Н. С., Поляков Д. М.* Медленно меняющиеся на бесконечности полугруппы операторов" Изв. вузов. Мат. — 2014. — № 7. — С. 3–14.
3. *Вайникко Г. М., Веретенников А. Ю.* Итерационные процедуры в некорректных задачах. — М.: Наука, 1986.
4. *Васильев В. В.* Теория полугрупп и косинус оператор-функции. — Воронеж: Воронеж. гос. ун-т, 2005.
5. *Васильев В. В., Пискарев С. И.* Дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. Теория полугрупп операторов. — М.: Изд-во МГУ, 1996.
6. *Васильев В. В., Хливненко Л. В.* Интегрированные полугруппы. — Воронеж: Воронеж. гос. ун-т, 2009.
7. *Далецкий Ю. Л., Гончарук Н. Ю.* Случайные оператор-функции, определяемые стохастическими дифференциальными уравнениями// в кн.: Меры и дифференциальные уравнения в бесконечномерных пространствах/ Тр. V Вильнюс. конф. по теории вероятн. и мат. стат. — 1990. — *1*. — С. 433–445.
8. *Иванова Н. Д., Федоров В. Е., Комарова К. М.* Нелинейная обратная задача для системы Осколкова, линеаризованной в окрестности стационарного решения// Вестн. Челяб. ун-та. Мат., мех., информ. Вып. 15. — 2012. — № 26 (280). — С. 49-70.
9. *Кокурин М. М.* Разностные схемы решения задачи Коши для линейного дифференциально-операторного уравнения второго порядка// Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 2014. — *54*, № 4. — С. 569–584.
10. *Кокурин М. Ю.* О корреляционном методе исследования случайных волновых полей// Сиб. ж. индустр. мат. — 2011. — *14*, № 4. — С. 24–31.
11. *Кокурин М. Ю.* Метод точного штрафа для монотонных вариационных неравенств и оптимальные по порядку алгоритмы поиска седловых точек// Изв. вузов. Мат. — 2011. — № 8. — С. 23–33.
12. *Костин В. А.* Задача Коши для абстрактного дифференциального уравнения с дробными производными// Докл. РАН. — 1992. — *326*, № 4. — С. 597–600.
13. *Красносельский М. А., Емелин И. В., Козякин В. С.* Об итеративных процедурах в линейных задачах/ Препринт. — М.: Ин-т управления, 1979.
14. *Крейн С. Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. — М.: Наука, 1967.
15. *Лаврентьев М. М.* О некоторых некорректных задачах математической физики. — Новосибирск : СО АН СССР, 1962.
16. *Макаров А. С.* О некоторых классах обобщенных и g-интегрированных полугрупп// Вестн. Челяб. ун-та. Сер. 3. Мат., мех., информ. — 1999. — № 2 (5). — С. 48–55.
17. *Мельникова И. В.* Абстрактная задача Коши. Полугрупповые методы, методы абстрактных распределений и методы регуляризации// Итоги науки и техн. Соврем. мат. и ее прилож. Тематич. обзоры. — 1999. — *66*. — С. 16–113.
18. *Мельникова И. В.* Метод интегрированных полугрупп для задач Коши в банаховых пространствах// Сиб. мат. ж. — 1999. — *40*, № 1. — С. 119–129.
19. *Мельникова И. В.* Полугрупповая регуляризация дифференциальных задач// Докл. РАН. — 2003. — *393*, № 6. — С. 744–748.
20. *Мельникова И. В., Альшанский М. А.* Обобщенная корректность задачи Коши и интегрированные полугруппы// Докл. РАН. — 1995. — *343*, № 4. — С. 448–451.
21. *Мельникова И. В., Бочкарева С. В.* C-Полугруппы и регуляризацтя некорректных задач Коши// Докл. РАН. — 1993. — *329*, № 3. — С. 270–273.
22. *Мельникова И. В., Филинков А. И.* Интегрированные полугруппы и C-полугруппы. Корректность и регуляризация дифференциально-операторных задач// Усп. мат. наук. — 1994. — *49*, № 6 (300). — С. 111–150.
23. *Морозов В. А.* Обобщенная «истокообразность» и скорость сходимости регуляризованных решений// Фундам. прикл. мат. — 1997. — *3*, № 1. — С. 171–177.

24. *Парфененкова В. С.* Классификация полугрупп операторов решения задачи Коши// Изв. Иркутск. ун-та. Сер. мат. — 2014. — *9*. — С. 103–117.
25. *Петунин Ю. И., Пличко А. Н.* Теория характеристик подпространств и ее приложения. — Киев: Вища школа, 1980.
26. *Пискарев С. И.* Решение эволюционных уравнений второго порядка в условиях Крейна—Фатторини// Диффер. уравн. — 1985. — *21*, № 9. — С. 1604–1612.
27. *Пискарев С. И.* Оценки скорости сходимости при решении некорректных задач для эволюционных уравнений// Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1987. — Vol. 51, № 3. — С. 676–687.
28. *Пискарев С. И.* Дифференциальные уравнения в банаховых пространствах и их приложения. — М.: Изд-во МГУ, 2005.
29. *Плеханова М. В., Федоров В. Е.* Задача оптимального управления для одного класса вырожденных уравнений// Изв. РАН. Теор. сист. управл. — 2004. — № 5. — С. 40–44.
30. *Плеханова М. В., Федоров В. Е.* Критерий оптимальности в задаче управления для линейного уравнения соболевского типа// Изв. РАН. Теор. сист. управл. — 2007. — № 2. — С. 37–44.
31. *Плеханова М. В., Федоров В. Е.* О существовании и единственности решений задач оптимального управления линейными распределенными системами, не разрешенными относительно производной по времени// Изв. РАН. Сер. мат. — 2011. — *75*, № 2. — С. 177–194.
32. *Свиридюк Г. А., Замышляева А. А.* Фазовые пространства одного класса линейных уравнений соболевского типа высокого порядка// Диффер. уравн. — 2006. — *42*, № 2. — С. 252–260.
33. *Свиридюк Г. А., Манакова Н. А.* Регулярные возмущения одного класса линейных уравнений соболевского типа// Диффер. уравн. — 2002. — *38*, № 3. — С. 423–425.
34. *Свиридюк Г. А., Федоров В. Е.* Полугруппы операторов с ядрами// Вестн. Челяб. ун-та. Сер. 3. Мат., мех., информ. — 2002. — № 1 (6). — С. 42–70.
35. *Свиридюк Г. А., Федоров В. Е.* Линейные уравнения соболевского типа. — Челябинск: Челяб. гос. ун-т, 2003.
36. *Тихонов А. Н., Арсенин В. Я.* Методы решения некорректных задач. — М.: Наука, 1979.
37. *Торопова С. П.* Связь полугрупп с особенностью и интегрированных полугрупп// Изв. вузов. Мат. — 2003. — № 3. — С. 69–77.
38. *Уразаева А. В., Федоров В. Е.* Задачи прогноз-управления для некоторых систем уравнений гидродинамики// Диффер. уравн. — 2008. — *44*, № 8. — С. 1111–1119.
39. *Уразаева А. В., Федоров В. Е.* О корректности задачи прогноз-управления для некоторых систем уравнений// Мат. заметки. — 2009. — *85*, № 3. — С. 440–450.
40. *Федоров В. Е.* Вырожденные сильно непрерывные группы операторов// Изв. вузов. Мат. — 2000. — № 3 (454). — С. 54–65.
41. *Федоров В. Е.* Вырожденные сильно непрерывные полугруппы операторов// Алгебра и анализ. — 2000. — *12*, № 3. — С. 173–200.
42. *Федоров В. Е.* О гладкости решений линейных уравнений соболевского типа// Диффер. уравн. — 2001. — *37*, № 12. — С. 1646–1649.
43. *Федоров В. Е.* Единицы вырожденных аналитических полугрупп операторов и относительная p-секториальность// Уравнения соболевского типа/ Сб. науч. работ. — Челябинск: Челяб. гос. ун-т, 2002. — С. 138–155.
44. *Федоров В. Е.* Ослабленные решения линейного уравнения соболевского типа и полугруппы операторов// Изв. РАН. Сер. мат. — 2003. — *67*, № 4. — С. 171–188.
45. *Федоров В. Е.* Теорема Иосиды и разрешающие группы уравнений соболевского типа в локально выпуклых пространствах// Вестн. Челяб. ун-та. Сер. 3. Мат., мех., информ. — 2003. — № 3 (9). — С. 197–214.
46. *Федоров В. Е.* Голоморфные разрешающие полугруппы уравнений соболевского типа в локально выпуклых пространствах// Мат. сб. — 2004. — *195*, № 8. — С. 131–160.
47. *Федоров В. Е.* Сильно голоморфные группы линейных уравнений соболевского типа в локально выпуклых пространствах// Диффер. уравн. — 2004. — *40*, № 5. — С. 702–712.
48. *Федоров В. Е.* Обобщение теоремы Хилле—Иосиды на случай вырожденных полугрупп в локально выпуклых пространствах// Сиб. мат. ж. — 2005. — *46*, № 2. — С.426–448.
49. *Федоров В. Е.* Об одном обобщении формулы Филлипса// Мат. Мех. Информ./ Мат. Всеросс. науч. конф. — Челябинск: Челяб. гос. ун-т, 2007. — С. 211–219.
50. *Федоров В. Е.* Голоморфные полугруппы операторов с сильным вырождением// Вестн. Челяб. ун-та. Сер. мат., мех., информ. Вып. 10. — 2008. — № 6 (107). — С. 68–74.

51. *Федоров В. Е.* Свойства псевдорезольвент и условия существования вырожденных полугрупп операторов// Вестн. Челяб. ун-та. Сер. мат., мех., информ. Вып. 11. — 2009. — № 20 (158). — С. 12–19.
52. *Федоров В. Е.* Один класс уравнений соболевского типа второго порядка и вырожденные группы операторов// Вестн. Челяб. ун-та. Сер. мат., мех., информ. Вып. 13. — 2011. — № 26 (241). — С. 59–75.
53. *Федоров В. Е., Давыдов П. Н.* Глобальная разрешимость некоторых полулинейных уравнений соболевского типа// Вестн. Челяб. ун-та. Мат., мех., информ. Вып. 12. — 2010. — № 23 (204). — С. 80–87.
54. *Федоров В. Е., Давыдов П. Н.* О нелокальных решениях полулинейных уравнений соболевского типа// Диффер. уравн. — 2013. — *49*, № 3. — С. 326–335.
55. *Федоров В. Е., Омельченко Е. А.* Неоднородные линейные уравнения соболевского типа с запаздыванием// Сиб. мат. ж. — 2012. — *53*, № 2. — С. 418–429.
56. *Федоров В. Е., Панов А. В., Карабаева А. С.* Симметрии одного класса квазилинейных уравнений псевдопараболического типа. Инвариантные решения// Вестн. Челяб. ун-та. Мат., мех., информ. Вып. 15. — 2012. — № 26 (280). — С. 90–111.
57. *Федоров В. Е., Плеханова М. В.* Оптимальное управление линейными уравнениями соболевского типа// Диффер. уравн. — 2004. — *40*, № 11. — С. 1548–1556.
58. *Федоров В. Е., Рузакова О. А.* Одномерная управляемость в гильбертовых пространствах линейных уравнений соболевского типа// Диффер. уравн. — 2002. — *38*, № 8. — С. 1137–1139.
59. *Федоров В. Е., Рузакова О. А.* Управляемость линейных уравнений соболевского типа с относительно p-радиальными операторами// Изв. вузов. Мат. — 2002. — № 7. — С. 54–57.
60. *Федоров В. Е., Рузакова О. А.* Одномерная и двумерная управляемость уравнений соболевского типа в банаховых пространствах// Мат. заметки. — 2003. — *74*, № 4. — С. 618–628.
61. *Федоров В. Е., Рузакова О. А.* О разрешимости возмущенных уравнений соболевского типа// Алгебра и анализ. — 2008. — *20*, № 4. — С. 189–217.
62. *Федоров В. Е., Сагадеева М. А.* Об ограниченных на прямой решениях линейных уравнений соболевского типа с относительно секториальными операторами// Изв. вузов. Мат. — 2005. — № 4. — С. 81–84.
63. *Федоров В. Е., Шкляр Б.* Полная нуль-управляемость вырожденных эволюционных уравнений скалярным управлением// Мат. сб. — 2012. — *203*, № 12. — С. 137–156.
64. *Adimy M.* Bifurcation de Hopf locale par semi-groupes intégrés// C. R. Acad. Sci. Paris. Sér. I Math. — 1990. — *311*, № 7. — С. 423–428.
65. *Adimy M.* Integrated semigroups and delay differential equations// J. Math. Anal. Appl. — 1993. — *177*, № 1. — С. 125–134.
66. *Adimy M., Ezzinbi Kh.* Équations de type neutre et semi-groupes intégrés// C. R. Acad. Sci. Paris. Sér. I Math. — 1994. — *318*, № 6. — С. 529–534.
67. *Adimy M., Ezzinbi Kh.* Semigroupes intégrés et équations différentielles á retard en dimension infinite// C. R. Acad. Sci. Paris. Sér. I Math. — 1996. — *323*, № 5. — С. 481–486.
68. *Ahmed N. U.* Optimal control for linear systems described by m times integrated semigroups// Publ. Math. Debrecen. — 1997. — *50*, № 3–4. — С. 273–285.
69. *Akkar M., Ameziane H. R., Blali A.* C-semigroupes α-intégrés affiliés á des algébres d'opérateurs// In: Operator Theory and Banach Algebras (Rabat, 1999). — Bucharest: Theta, 2003. — С. 11–21.
70. *Al-Sharif Sh.* C-semigroups and (P, Q)-summing operators// Sci. Math. Jap. — 2003. — *57*, № 2. — С. 389–396.
71. *Al-Sharif Sh.* C-semigroups and integral operators// Sci. Math. Jap. — 2005. — *62*, № 2. — С. 265–271.
72. *Al-Sharif Sh.* The Hille–Yosida inequality for C-semigroups and ideal norms// Nonlinear Funct. Anal. Appl. — 2007. — *12*, № 2. — С. 273–284.
73. *Al-Sharif Sh., Khalil R.* On generators of positive C-semigroups and a note on compact C-semigroups// Mat. Stud. — 2007. — *27*, № 2. — С. 189–195.
74. *Alsulami S. M. A.* C-admissibility and analytic C-semigroups// Nonlinear Anal. — 2011. — *74*, № 16. — С. 5754–5758.
75. *Ames Karen A., Hughes Rhonda J.* Structural stability for ill-posed problems in Banach space// Semigroup Forum. — 2011. — *70*, № 1. — С. 127–145.
76. *Arendt W.* Approximation of degenerate semigroups// Taiwanese J. Math. — 2001. — *5*, № 2. — С. 279–295.
77. *Arendt W.* Resolvent positive operators// Proc. London Math. Soc. (3). — 1987. — *54*, № 2. — С. 321–349.
78. *Arendt W.* Semigroups and evolution equations: functional calculus, regularity and kernel estimates. Evolutionary equations// Handb. Differ. Equ. — Vol. I. — North-Holland, Amsterdam, 2004.— С. 1–85.

79. *Arendt W.* Sobolev imbeddings and integrated semigroups// In: Semigroup Theory and Evolution Equations (Delft, 1989), C. 29–40/ Lecture Notes in Pure and Appl. Math. — 1991. — *135*, Dekker, New York.
80. *Arendt W.* Vector-valued Laplace transforms and Cauchy problems// Israel J. Math. — 1987. — *59*, № 3. — C. 327–352.
81. *Arendt W., Batty Ch. J. K., Hieber M., Neubrander F.* Vector-valued Laplace transforms and Cauchy problems// Monogr. Math. — *96.* — Birkhäuser, Verlag, Basel, 2001.
82. *Arendt W., El-Mennaoui O., Keyantuo V.* Local integrated semigroups: Evolution with jumps of regularity// J. Math. Anal. Appl. — 1994. — *186*, № 2. — C. 572–595.
83. *Arendt W. and A. Favini* Integrated solutions to implicit differential equations// Rend. Sem. Mat. Univ. Politec. Torino. — 1993. — *51*, № 4. — C. 315–329.
84. *Arendt W. and Kellermann H.* Integrated solutions of Volterra integrodifferential equations and applications. Volterra integrodifferential equations in Banach spaces and applications. — (Trento, 1987), C. 21–51// Pitman Res. Notes Math. Ser. — *190*, Longman Sci. Tech., Harlow, 1989.
85. *Arendt W., Neubrander F., Schlotterbeck U.* Interpolation of semigroups and integrated semigroups// Semigroup Forum. — 1992. — *45*, № 1. — C. 26–37.
86. *Ashyralyev A., Pastor J., Piskarev S. I., Yurtsever H. A.* Second-order equations in functional spaces: qualitative and discrete well-posedness// Abstr. Appl. Anal., Art. ID 948321, 2015.
87. *Bachar M., Arino O.* Integrated semigroup and linear ordinary differential equation with impulses. Dynamical systems and their applications in biology// Fields Inst. Commun. — 2003. — *36.* — C. 17–31.
88. *Bachar M., Arino O.* Integrated semigroup associated to a linear delay differential equation with impulses// Differ. Integr. Eqs. — 2004. — *17*, № 3–4. — C. 407–442.
89. *Bachar M., Desch W., Mardiyana.* A class of semigroups regularized in space and time// J. Math. Anal. Appl. — 2006. — *314.* — C. 558–578.
90. *Bajlekova E. G.* Fractional evolution equations in Banach spaces/ Ph.D. Thesis. — Eindhoven University of Technology, 2001.
91. *Bakushinskii A. B., Goncharskii A.* Ill-Posed Problems: Theory and Applications/ Math. Appl. — *301.* — Dordrecht: Kluwer Academic Publ., 1994.
92. *Bakushinsky A. B., Kokurin M. Yu., Kokurin M. M.* On a class of finite difference methods for ill-posed Cauchy problems with noisy data// J. Inverse Ill-Posed Probl. — 2010. — *18*, № 9. — C. 959–977.
93. *Bakushinsky A. B., Kokurin M. Yu., Smirnova A.* Iterative Methods for Ill-Posed Problems. An Introduction/ Inverse and Ill-Posed Problems Series. — *54.* — Berlin: Walter de Gruyter, 2011.
94. *Bakushinsky A. B., Kokurin M. Yu., Paymerov S. K.* On error estimates of difference solution methods for ill-posed Cauchy problems in a Hilbert space// J. Inverse Ill-Posed Probl. — 2008. — *16*, № 6. — C. 553–565.
95. *Baumer B., Neubrander F.* Existence and uniqueness of solutions of ordinary linear differential equations in Banach spaces/ Preprint. — Louisiana State University, 1995.
96. *Beilina L., Klibanov M. V., Kokurin M. Yu.* Adaptivity with relaxation for ill-posed problems and global convergence for a coefficient inverse problem// J. Math. Sci. (N.Y.). — 2010. — *167*, № 3. — C. 279–325.
97. *Bobrowski A.* Integrated semigroups and Trotter–Kato theorem// Bull. Pol. Acad. Sci. — 1994. — *41*, № 4. — C. 297–304.
98. *Bobrowski A.* On approximation of (1.A) semigroups by discrete semigroups/ Preprint. — Technical University of Lublin, 1997.
99. *Bobrowski A.* The Widder–Arendt theorem on inverting of the Laplace transform, and its relationship with the theory of semigroups of operators/ Preprint. — Rice University, Houston Texas, 1997.
100. *Bobrowski A.* The Widder–Arendt theorem theorem on inverting of the Laplace transform, and its relationship with the theory of semigroups of operators// Met. Funct. Anal. Topol. — 1997. — *3*, № 4. — C. 1–34.
101. *Bobrowski A.* Integrated semigroups and the Trotter–Kato theorem// Bull. Pol. Acad. Sci. Math. — 1994. — *42.* — C. 297–304.
102. *Bobrowski A.* Generalized telegraph equation and the Sova–Kurtz version of the Trotter–Kato theorem// Ann. Polon. Math. — 1996. — *64.* — C. 37–45.
103. *Bobrowski A.* On the Yosida approximation and the Widder–Arendt representation theorem// Stud. Math. — 1997. — *124.* — C. 281–290.
104. *Boussetila N., Rebbani F.* Optimal regularization method for ill-posed Cauchy problems// Electron. J. Differ. Equ. Conf. — 2006. — № 147.
105. *Burrage K., Piskarev S.* Stochastic methods for ill-posed problems// BIT Numer. Math. — 2000. — Vol. 40, № 2. — C. 226–240.

106. *Busenberg S., Wu B.* Convergence theorems for integrated semigroups// Differ. Integr. Eqs. — 1992. — textsl5, № 3. — С. 509–520.
107. *Cachia V.* Convergence at the origin of integrated semigroups// Stud. Math. — 2008. — *187*, № 3. — С. 199–218.
108. *Cachia V.* Convergence at the origin of integrated semigroups/ `arXiv 0404414`. — 2004.
109. *Cachia V.* Euler's exponential formula for semigroups// Semigroup Forum. — 2004. — *68*, № 1. — С. 1–24.
110. *Cao D., Song X., Rong R., Zhu H.* The asymptotic behavior and strong or weak stability for C-semigroup// Nanjing Daxue Xuebao Shuxue Bannian Kan. — 2005. — *22*, № 1. — С. 107–114.
111. *Cao D. X, Song X. Q, Rong R.* Laplace inverse transformation for n-time integrated C-semigroups// J. Xuzhou Norm. Univ. Nat. Sci. Ed. — 2004. — *22*, № 1. — С. 7–9.
112. *Cao D. X, Song X. Q, Wang C. X.* The perturbation theory for n times integrated C-semigroups// Math. Practice Theory. — 2006. — *36*, № 1. — С. 220–223.
113. *Cataná V.* The second order abstract Cauchy problem and integrated semigroups generated by matrix pseudo-differential operators// Ann. Univ. Craiova Ser. Mat. Inform. — 2003. — *30*, № 1. — С. 78–87.
114. *Chalishajar D. N.* Controllability of singular system using α times integrated semigroups// Bull. Calcutta Math. Soc. — 2003. — *95*, № 2. — С. 95–100.
115. *Chang J.-Ch., Shaw S.-Y.* Powers of generators and Taylor expansions of integrated semigroups of operators// Taiwanese J. Math. — 2006. — *10*, № 1. — С. 101–115.
116. *Chang J.-Ch., Shaw S.-Y.* Optimal and non-optimal rates of approximation for integrated semigroups and cosine functions// J. Approx. Theory. — 1997. — *90*, № 2. — С. 200–223.
117. *Chang Y.-H., Hong Ch.-H.* Relative bounded perturbation of abstract Cauchy problem// Far East J. Math. Sci. — 2008. — *29*, № 3. — С. 555–575.
118. *Chen J.-Ch., Minh N. V., Shaw S.-Y.* C-semigroups and almost periodic solutions of evolution equations// J. Math. Anal. Appl. — 2004. — *298*, № 2. — С. 432–445.
119. *Chen Ch., Song X. Q.* Asymptotic almost periodic motions of C-semigroups// Acta Anal. Funct. Appl. — 2009. — *11*, № 3. — С. 240–245.
120. *Chen Ch., Song X. Q.* Weakly asymptotically almost periodic motions of C-semigroups// J. Syst. Sci. Math. Sci. — 2009. — *29*, № 5. — С. 657–662.
121. *Chen Ch., Song X. Q., Li M.* The self-adjoint solution of Lyapunov's equation of C-semigroups and its stability// Nanjing Daxue Xuebao Shuxue Bannian Kan. — 2008. — *25*, № 1. — С. 86–93.
122. *Chen J.-Ch., Minh N. V., Shaw S.-Y.* C-semigroups and almost periodic solutions of evolution equations// J. Math. Anal. Appl. — 2004. — *298*, № 2. — С. 432–445.
123. *Chen W. Zh.* A Freud type estimate for probabilistic representation formulas for C-semigroups// Xiamen Daxue Xuebao Ziran Kexue Ban. — 1994. — *33*, № 3. — С. 279–285.
124. *Chen W. Zh.* A representation formula for C-infinitesimal generators// Xiamen Daxue Xuebao Ziran Kexue Ban. — 1993. — *32*, № 2. — С. 135–140.
125. *Chen W. Zh.* A saturation theorem for probabilistic representations of C-semigroups// Xiamen Daxue Xuebao Ziran Kexue Ban. — 1995. — *34*, № 1. — С. 1–6.
126. *Chen W. Zh.* Shisha–Mond-type estimates for probabilistic representations of C-semigroups// Xiamen Daxue Xuebao Ziran Kexue Ban. — 1993. — *32*, № 4. — С. 391–396.
127. *Chen W. Zh.* The exponential-type representation formulas for C-semigroups// Approx. Theory Appl. (N.S.). — 1995. — *11*, № 1. — С. 43–53.
128. *Chen C., Li M.* On fractional resolvent operator functions// Semigroup Forum. — 2010. — *80*. — С. 121–142.
129. *Chen Z. Q., Liu H. M.* Vector-valued Laplace transforms and right continuous integral semigroups// Acta Math. Sci. — 1996. — *16*, № 1. — С. 15–22.
130. *Chojnacki W.* Group representations of bounded cosine functions// J. Reine Angew. Math. — 1996. — *478*. — С. 61–84.
131. *Chojnacki W.* On group decompositions of bounded cosine sequences// Stud. Math. — 2007. — *181*, № 1. — С. 61–85.
132. *Cioranescu I.* A generation result for C-regularized semigroups// Semigroups of linear and nonlinear operations and applications/ Curaçao, 1992. — Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1993. — С. 121–128,
133. *Cioranescu I.* On a class of C-regularized semigroups. Evolution equations, control theory, and biomathematics// Lect. Notes Pure Appl. Math. — New York: Dekker, 1994. — *155*. — С. 45–50.
134. *Cioranescu I., Keyantuo V.* C-semigroups: Generation and analyticity. Generalized functions linear and nonlinear problems// Integral Transform. Spec. Funct. — 1998. — *6*, №№ 1-4. — С. 15–25.

135. *Claeyssen J. C. R., Schuchman V.* Evolution equations of higher order in Banach spaces// Appl. Anal. — 1999. — *72*, №№ 3–4. — С. 459–468.
136. *Claeyssen J. C. R., Schuchman V.* On the minimal extension of C_0-semigroups for second-order damped equations// J. Math. Anal. Appl. — 1997. — *211*, № 1. — С. 213–222.
137. *Claeyssen J. C. R., Schuchman V.* Smooth dynamical solution for the damped second-order equation// Comput. Appl. Math. — 1998. — *17*, № 2. — С. 121–134.
138. *Conradie W. L., Sauer N.* Empathy, C-semigroups, and integrated semigroups. Evolution equations// Lect. Notes Pure Appl. Math. — New York: Dekker, 1995. — *168*. — С. 123–132..
139. *Dalecky Yu. L., Goncharuk N. Yu.* Supplement to Chapter VII: Stochastic regularization of the ill-posed abstract parabolic problem// In: *Dalecky Yu. L., Fomin S. V.* Measures and Differential Equations in Infinite-Dimensional Spaces. — Dordrecht: Kluwer Academic Publ., 1991. — С. 323–333.
140. *Da Prato G.* R-semigruppi analitici ed equazioni di evoluzione in L_p// Ricerche Mat. — 1967. — *16*. — С. 233–249.
141. *Da Prato G.* Regolarizzazione di alcuni semigruppi distribuzioni// In: Atti del Convegno su le Equazioni alle Derivate Parziali. — Rome: Edizioni Cremonese, С. 52–54.
142. *Da Prato G.* Semigruppi regolarizzabili// Ricerche Mat. — 1966. — *15*. — С. 223–248.
143. *Da Prato G.* Semigruppi di crescenza n// Ann. Scu. Norm. Super. Pisa Sci. Fis. Mat. — 1966. — *20*, № 4. — С. 753–782.
144. *Da Prato G., Mosco U.* Regolarizzazione dei semigruppi distribuzioni analitici// Ann. Scu. Norm. Sup. Pisa (3). — 1965. — *19*. — С. 563–576.
145. *Davies E. B., Pang M. M. H.* The Cauchy problem and a generalization of the Hille–Yosida theorem// Proc. London Math. Soc. (3). — 1987. — *55*, № 1. — С. 181–208.
146. *Day C. R.* Spectral mapping theorems for fractionally integrated semigroups/ Ph.D. Thesis. — University of South Carolina, 1992.
147. *Day C. R.* Spectral mapping theorem for integrated semigroups// Semigroup Forum. — 1993. — *47*, № 3. — С. 359–372.
148. *Du S. Q., Liu Q. R.* The relations between the spectra of C-semigroups and the spectra of their generators// Pure Appl. Math. (Xi'an). — 1995. — *11*, № 1. — С. 56–60.
149. *Ducrot A., Magal P., Prevost K.* Integrated semigroups and parabolic equations, Part I: Linear perturbation of almost sectorial operators// J. Evol. Equ. — 2010. — *10*, № 2. — С. 263–291.
150. *El-Mennaoui O.* Asymptotic behaviour of integrated semigroups// J. Comput. Appl. Math. — 1994. — *54*, № 3. — С. 351–369.
151. *Huang F., Huang T.* Local C-cosine family theory and application// Chin. Ann. Math., Ser. B. — 1995. — *16*, № 2. — С. 213–232.
152. *Fattorini H. O.* Second-order linear diferential equations in Banach spaces// Notas de Mat. — *108*. — North-Holland, Amsterdam, 1985.
153. *Fedorov V. E.* Application of the theory of degenerate semigroups of operators to the study of initial-boundary-value problems// J. Math. Sci. (N.Y.). — 2005. — *126*, № 6. — С. 1658–1663.
154. *Fedorov V. E., Urazaeva A. V.* An inverse problem for linear Sobolev-type equations// J. Inverse Ill-Posed Probl. — 2004. — *12*, № 4. — С. 387–395.
155. *Filinkov A., Maizurna I.* Integrated solutions of stochastic evolution equations with additive noise// Bull. Austr. Math. Soc. — 2001. — *64*, № 2. — С. 281–290.
156. *Fountain J., Gould V.* Idempotent bounded C-semigroups// Monatsh. Math. — 1994. — *117*, №№ 3-4. — С. 237–254.
157. *Galé J. E., Martinez M. M., Miana P. J.* Katznelson–Tzafriri type theorem for integrated semigroups// J. Operator Theory. — 2013. — *69*, № 1. — С. 59–85.
158. *Gao D.-Zh.* The Lumer–Phillips theorems for integrated semigroups// Acta Anal. Funct. Appl. — 2001. — *3*, № 4. — С. 294–299.
159. *Gao D.-Zh.* On representation of integrated semigroups and application to abstract integrodifferential equation// Acta Anal. Funct. Appl. — 2002. — *4*, № 4. — С. 333–342.
160. *Gao M.* C-Well-posedness of the complete second-order abstract Cauchy problem and applications// Acta Math. Sci. (Engl. Ed.). — 1999. — *15*, № 4. — С. 535–548.
161. *Gao M.* Local C-semigroups and local C-cosine functions// Acta Math. Sci. (Engl. Ed.). — 1999. — *19*, № 2. — С. 201–213.
162. *Gao M.* Holomorphic integrated mild C-existence families// Acta Math. Sci. (Engl. Ed.). — 1998. — *18*, № 1. — С. 63–73.

163. *Gao M.* Mild integrated C-existence families and abstract Cauchy problems// Northeast Math. J. — 1998. — *14*, № 1. — С. 95–104.
164. *Genqi X., Dexing F.* Some properties of integrated semigroups// Acta Math. Sci. Ser. B (Engl. Ed.) — 2001. — *21B*(1). — С. 50–60.
165. *Goldstein J.* Semigroups of Linear Operators and Applications. — Oxford: Oxford University Press, 1985.
166. *Gong F. Z., Liu Q. R.* C-semigroups and C_0-semigroups// Pure Appl. Math. (Xi'an). — 1996. — *12*, № 1. — С. 78–80.
167. *Groetsch C. W.* Stable approximate evaluation of unbounded operators/ Lect. Notes Math. — Berlin: Springer-Verlag, 2007. — *1894*.
168. *Grimmer R., Liu J. H.* Integrated semigroups and integrodifferential equations// Semigroup Forum. — 1994. — *48*, № 1. — С. 79–95.
169. *Greiner G., Müller M.* The spectral mapping theorem for integrated semigroups// Semigroup Forum. — 1993. — *47*, № 1. — С. 115–122.
170. *Gu X. H., Huang F.* Characterization of almost automorphic C-semigroups and S_p-almost periodic C-semigroups// Sichuan Daxue Xuebao. — 2001. — *38*, № 2. — С. 137–140.
171. *Gu X., Li M., Huang F.* Almost periodicity of C-semigroups, integrated semigroups, and C-cosine functions// Stud. Math. — 2002. — *150*, № 2. — С. 189–200.
172. *Gui X. J., Liu Q. R.* The relation between C-semigroups and C_0-semigroups// Pure Appl. Math. (Xi'an). — 1993. — *9*, № 1. — С. 47–50.
173. *Guidetti D., Karasozen B., Piskarev S.* Approximation of abstract differential equations// J. Math. Sci. — 2004. — *122*, № 2. — С. 3013–3054.
174. *Guozheng S.* α Times integrated semigroups and abstract Cauchy problem// Acta Math. Sinica. — 1999. — *42*, № 4. — С. 757–762.
175. *Ha K. S.* Spectral mapping theorems for exponentially bounded C-semigroups in Banach spaces. Semigroups and differential operators// Semigroup Forum. — 1989. — *38*, № 2. — С. 215–221.
176. *Ha K. S., Kim J. H., Kim J. K.* Linear abstract Cauchy problem associated with an exponentially bounded C-semigroup in a Banach space// Bull. Korean Math. Soc. — 1990. — *27*, № 2. — С. 157–164.
177. *Han Z. B., Huang Y. Z., Jian M.* Inverse problems for equations of parabolic type. Perspectives in mathematical sciences// Interdiscip. Math. Sci. — 2010. — *9*. — С. 1–21.
178. *He M.* Differentiability with respect to parameters of integrated semigroups. Direct and inverse problems of mathematical physics// Int. Soc. Anal. Appl. Comput. — 2000. — *5*. — С. 125–135.
179. *He M.* Integrated semigroups and vibrating string problem// Appl. Anal. — 1998. — *68*, №№ 1-2. — С. 109–120.
180. *He M.* On continuity in parameter of integrated semigroups// Dynamical systems and differential equations/ Wilmington, NC, 2002/ Discrete Contin. Dyn. Syst., suppl. — 2003. — С. 403–412.
181. *Helil M., Rixit M.* Integrated semigroups and well-posedness of several queueing models// J. Xinjiang Univ. Natur. Sci. — 2002. — *19*, № 4. — С. 394–400.
182. *Hieber M.* L_p spectra of pseudodifferential operators generating integrated semigroups// Trans. Am. Math. Soc. — 1995. — *347*, № 10. — С. 4023–4035.
183. *Hieber M.* Integrated semigroups and differential operators on L_p spaces// Math. Ann. — 1991. — *291*, № 1. — С. 1–16.
184. *Hieber M.* Integrated semigroups and the Cauchy problem for systems in L^p spaces// J. Math. Anal. Appl. — 1991. — *162*, № 1. — С. 300–308.
185. *Hieber M.* Laplace transforms and α times integrated semigroups// Forum Math. — 1991. — *3*, № 6. — С. 595–612.
186. *Hieber M., Holderrieth A., Neubrander F.* Regularized semigroups and systems of linear partial differential equations// Ann. Scu. Norm. Super. Pisa. — 1992. — *19*, № 3. — С. 363–379.
187. *Hille E., Phillips R. S.* Functional Analysis and Semigroups. — Providence, Rhode Island: Am. Math. Soc., 1957.
188. *Hoppe R. H. W.* Discrete approximations of cosine operator functions, I// SIAM J. Numer. Anal. — 1982. — *19*. — С. 1110–1128.
189. *Hu Zh., Jin Zh.* Hille–Yosida-type theorems for $O(\omega(t))$ n times integrated semigroups// Nonlinear Anal. — 2009. — *71*, № 1-2. — С. 521–530.
190. *Hu M., Song X. Q., Wei W., Zhang X. Z.* Representation theorem of n times integrated C-semigroups// J. Shandong Univ. Sci. Technol. Nat. Sci. — 2004. — *23*, № 4. — С. 89–91.
191. *Huang T.* Local integrated cosine family// J. Sichuan Univ., Nat. Sci. Ed. — 1994. — *31*, № 4. — С. 442–451.

192. *Huang T., Huang F.* Holomorphic C-semigroups and their perturbations// J. Sichuan Univ., Nat. Sci. Ed. — 1994. — *31*, № 3. — C. 289–291.
193. *Huang Y. Z.* Modified quasi-reversibility method for final-value problems in Banach spaces// J. Math. Anal. Appl. — 2008. — *340*. — C. 757–769.
194. *Huang Y. Z., Quan Z.* Regularization for ill-posed Cauchy problems associated with generators of analytic semigroups// J. Differ. Eqs. — 2004. — *203*. — C. 38–54.
195. *Huang Y. Z., Quan Z.* Regularization for a class of ill-posed Cauchy problems// Proc. Am. Math. Soc. — 2006. — *133*, № 10. — C. 3005–3012.
196. *Huang Y. Z., Quan Z.* Weak regularization for a class of ill-posed Cauchy problems// Acta Math. Sci. — 2006. — *26B*, № 3. — C. 483–490.
197. *Huang Z., Wang H.* The integrated C-semigroup and its spectral mapping theorem// Nanjing Daxue Xuebao Ziran Kexue Ban. — 1996. — *32*, № 3. — C. 369–377.
198. *Hughes R. J.* Semigroups of unbounded linear operators in Banach space// Trans. Am. Math. Soc. — 1977. — *230*. — C. 113–145.
199. *Jackson M., Stokes T.* An invitation to C-semigroups// Semigroup Forum. — 2001. — *62*, № 2. — C. 279–310.
200. *Jeong D. H., Park J. Y., Yu J.-W.* Exponentially equicontinuous C-semigroups in locally convex space// J. Korean Math. Soc. — 1989. — *26*, № 1. — C. 1–15.
201. *Jia Y. F., Cao H. X.* Characterization of exponentially bounded C-semigroups by infinitesimal generators// J. Gansu Univ. Technol. — 2003. — *29*, № 2. — C. 121–123.
202. *Kaiser C.* Integrated semigroups and linear partial differential equations with delay// J. Math. Anal. Appl. — 2004. — *292*, № 2. — C. 328–339.
203. *Kaiser C., Weis L.* Perturbation theorems for α times integrated semigroups// Arch. Math. — 2003. — *81*, № 2. — C. 215–228.
204. *Kalabušić S., Vajzović F.* Exponential formula for one-time integrated semigroups// Novi Sad J. Math. — 2003. — *33*, № 2. — C. 77–88.
205. *Kantorovitz S.* Semigroups of operators and spectral theory/ Pitman Res. Notes Math. Ser. — 1995. — *330*.
206. *Kantorovitz S.* The Hille–Yosida space of an arbitrary operator// J. Math. Anal. Appl. — 1988. — *136*, № 1. — C. 107–111.
207. *Kato T.* Perturbation theory for linear operators/ Classics Math. — Berlin: Springer-Verlag, 1995.
208. *Kellerman H.* Integrated semigroups/ Dissertatiòn. — Universität Tübingen, 1986.
209. *Kellerman H., Hieber M.* Integrated semigroups// J. Funct. Anal. — 1989. — *84*, № 1. — C. 160–180.
210. *Keyantuo V.* Integrated semigroups and related partial differential equations// J. Math. Anal. Appl. — 1997. — *212*, № 1. — C. 135–153.
211. *Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J.* Theory and Applications of Fractional Differential Equations. — Amsterdam: Elsevier, 2006.
212. *Kochubei A. N.* A Cauchy problem for evolution equations of fractional order// Differ. Eqs. — 1989. — *25*. — C. 967–974.
213. *Kokurin A. N.* On a multidimensional integral equation with data supported by low-dimensional analytic manifolds// J. Inverse Ill-Posed Probl. — 2013. — *21*, № 1. — C. 125–140.
214. *Kokurin A. N., Kljuchev V.* Necessary and sufficient conditions for logarithmic convergence of regularization methods for solving inverse Cauchy problem in Banach space// J. Inverse Ill-Posed Probl. — 2006. — *14*, № 5. — C. 481–504.
215. *Kostić M.* Differential and analytical properties of semigroups of operators// Integr. Equ. Operator Th. — 2010. — *67*, № 4. — C. 499–557.
216. *Kostić M.* Generalized semigroups and cosine functions/ Posebna Izdan. — 2011. — *23*.
217. *Kostić M.* On analytic integrated semigroups// Novi Sad J. Math. — 2005. — *35*, № 1. — C. 127–135.
218. *Kostić M.* Abstract Volterra Integro-Differential Equations. — Boca Raton, FL: CRC Press, 2015.
219. *Kowalski T., Sadkowski W.* Applications of C-groups to existence of solutions of some mixed problems// Demonstr. Math. — 1998. — *31*, № 2. — C. 477–484.
220. *Kowalski T., Sadkowski W.* Applications of integrated semigroups for control theory// Int. J. Differ. Equ. Appl. — 2003. — *7*, № 2. — C. 123–139.
221. *Kowalski T., Sadkowski W.* Application of once integrated semigroups for the abstract boundary control// Int. J. Pure Appl. Math. — 2007. — *36*, № 1. — C. 13–26.
222. *Kowalski T., Sadkowski W.* The null-exact controllability of the generalized wave problem governed by once integrated semigroups// Demonstr. Math. — 2004. — *37*, № 3. — C. 745–760.

223. *Kravarušić R., Mijatović M.* Integrated C-semigroups of unbounded linear operators in Banach spaces// Novi Sad J. Math. — 2005. — *35*, № 2. — С. 1–17.
224. *Kravarušić R., Mijatović M., Pilipović S.* Integrated semigroups of unbounded linear operators and C_0-semigroups on subspaces// Mat. Vesnik. — 2002. — *54.* — С. 117–124.
225. *Kravarušić R., Mijatović M., Pilipović S.* Integrated semigroups of unbounded linear operators// Filomat. — 2001. — № 15. — С. 197–210.
226. *Kravarušić R., Mijatović M., Pilipović S.* Integrated semigroups of unbounded linear operators in Banach spaces, I// Bull. Cl. Sci. Math. Nat. Sci. Math. — 1998. — *23*, С. 45–62.
227. *Kravarušić R., Mijatović M., Pilipović S.* Integrated semigroup of unbounded linear operators. Cauchy problem, II// Novi Sad J. Math. — 1998. — *28*, № 1. — С. 107–122.
228. *Kravarušić R., Mijatović M., Pilipović S.* Integrated semigroups of unbounded linear operators and C_0-semigroups on subspaces// Proc. 5th Int. Symp. Mathematical Analysis and its Applications, Nauka Banja, 2002/ Mat. Vesnik. — 2002. — *54*, № 3–4. — С. 117–124.
229. *Kuo C.-C.* On existence and approximation of solutions of abstract Cauchy problem// Taiwanese J. Math. — 2009. — *13*, № 1. — С. 137–155.
230. *Kuo C.-C.* On exponentially bounded α times integrated C-cosine functions// Yokohama Math. J. — 2005. — *52*, № 1. — С. 59–72.
231. *Kuo C.-C.* On perturbation of α times integrated C-semigroups// Taiwanese J. Math. — 2010. — *14*, № 5. — С. 1979–1992.
232. *Kuo C.-C.* Perturbation theorems for local integrated semigroups// Stud. Math. — 2010. — *197*, № 1. — С. 13–26.
233. *Kuo C.-C., Shaw S.-Y.* C-cosine functions and the abstract Cauchy problem I, II// J. Math. Anal. Appl. — 1997. — *210*, № 2. — С. 632–666.
234. *Kuo C.-C., Shaw S.-Y.* Abstract Cauchy problems associated with local C-semigroups// In: Semigroups of Operators. Theory and Applications (Rio de Janeiro, 2001). — New York: Optimization Software, 2002. — С. 158–168.
235. *Kuo C.-C., Shaw S.-Y.* On α times integrated C-semigroups and the abstract Cauchy problem// Stud. Math. — 2000. — *142*, № 3. — С. 201–217.
236. *Kuo C.-C., Shaw S.-Y.* Strong and weak solutions of abstract Cauchy problems// J. Concr. Appl. Math. — 2004. — *2*, № 3. — С. 191–212.
237. *Kurtz T. G.* Extensions of Trotter's operator semigroup approximation theorems// J. Funct. Anal. — 1969. — *3*. — С. 354–375.
238. *Lang K. L., Yang G. J.* Local C-semigroups and abstract Cauchy problems// Math. Appl. (Wuhan). — 1998. — *11*, № 4. — С. 33–37.
239. *Lang K. L., Yang G.* Trotter–Kato theorems for an α times integrated semigroups// Chinese Quart. J. Math. — 1999. — *14*, № 3. — С. 11–16.
240. *de Laubenfels R.* Existence families, functional calculi, and evolution equations// Lect. Notes Math. — 1994. — *1570*.
241. *de Laubenfels R.* C-semigroups and strongly continuous semigroups// Isr. J. Math. — 1993. — *81*, №№ 1-2. — С. 227–255.
242. *de Laubenfels R.* C-semigroups and the Cauchy problem// J. Funct. Anal. — 1993. — *111*, № 1. — С. 44–61.
243. *de Laubenfels R.* Existence and uniquness families for the abstract Cauchy problem// J. London Math. Soc. — 1991. — *44*(2). — С. 310–338.
244. *de Laubenfels R.* Inverses of generators// Proc. Am. Math. Soc. — 1988. — *104*, № 2. — С. 443–448.
245. *de Laubenfels R.* Holomorphic C-existence families// Tokyo J. Math. — 1992. — *15*, № 1. — С. 17–38.
246. *de Laubenfels R.* Integrated semigroups and integrodifferential equations// Math. Z. — 1990. — *204*, № 4. — С. 501–514.
247. *de Laubenfels R.* Inverses of generators of integrated or regularized semigroups// Semigroup Forum. — 2007. — *75*, № 2. — С. 457–463.
248. *de Laubenfels R.* Integrated semigroups, C-semigroups, and the abstract Cauchy problems// Semigroups Forum. — 1990. — *41*, № 1. — С. 83–95.
249. *de Laubenfels R.* Polynomials of generators of integrated semigroups// Proc. Am. Math. Soc. — 1989. — *107*, № 1. — С. 197–204.
250. *de Laubenfels R., Jazar M.* Functional calculi, regularized semigroups, and integrated semigroups// Stud. Math. — 1999. — *132*, № 2. — С. 151–172.
251. *Lee Y. S.* Exponential formula for exponentially bounded C-semigroups// Bull. Korean Math. Soc. — 1998. — *35*, № 1. — С. 45–52.

252. *Lei Y. S., Zheng Q.* Adjoint semigroups of exponentially bounded C-semigroups// Math. Appl. (Wuhan). — 1993. — *6*, suppl., C. 154–159.
253. *Lei Y. S., Zheng Q.* Exponentially bounded C-semigroups and integrated semigroups with non-densely defined generators, II. Perturbations// Acta Math. Sci. — 1993. — *13*, № 4. — C. 428–434.
254. *Lei Y. S., Zheng Q.* The application of C-semigroups to differential operators in $L_p(\mathbb{R}^n)$// J. Math. Anal. Appl. — 1994. — *188*, № 3. — C. 809–818.
255. *Lemle L. D.* Une formule exponentielle pour les semigroupes intégrés// Proc. Xth Symp. *Mathematics and Its Applications*. Rom. Acad., Timişoara, 2003. — C. 102–109.
256. *Li X. L.* Right local left C-semigroup// J. Lanzhou Univ. Nat. Sci. — 2008. — *44*, № 5. — C. 94–98.
257. *Li Y.* Differentiable, entire vectors and abstract Cauchy problems// Nanjing Daxue Xuebao Ziran Kexue Ban. — 1997. — *33*, № 2. — C. 161–168.
258. *Li Y. R.* Contraction integrated semigroups and their application to continuous-time Markov chains// In: Int. Workshop on Operator Algebra and Operator Theory (Linfen, 2001)/ Acta Math. Sin. (Engl. Ser.). — 2003. — *19*, № 3. — C. 605–618.
259. *Li M., Huang F.* Characterizations of contraction C-semigroups// Proc. Amer. Math. Soc. — 1998. — *126*, № 4. — C. 1063–1069.
260. *Li M., Huang F.* Singular regularized semigroups and integrated semigroups// Sichuan Daxue Xuebao. — 2001. — *38*, № 6. — C. 781–787.
261. *Li M., Piskarev S.* On approximation of integrated semigroups// Taiwanese J. Math. — 2010. — *14*, № 6. — C. 2137–2161.
262. *Li Y., Li J.* Markov integrated semigroups and their applications to continuous-time Markov chains// Integr. Eqs. Operator Theory. — 2008. — *60*, № 2. — C. 247–269.
263. *Li Y.-C., Shaw S.-Y.* Infinite differentiability of Hermitian and positive C-semigroups and C-cosine functions// Publ. Res. Inst. Math. Sci. — 1998. — *34*, № 6. — C. 579–590.
264. *Li Y.-C., Shaw S.-Y.* Hermitian and positive C-semigroups on Banach spaces// Publ. Res. Inst. Math. Sci. — 1995. — *31*, № 4. — C. 625–644.
265. *Li Y.-C., Shaw S.-Y.* Hermitian and positive integrated C-cosine functions on Banach spaces// Positivity. — 1998. — *2*, № 3. — C. 281–299.
266. *Li Y.-C., Shaw S.-Y.* Integrated C-semigroups and C-cosine functions of Hermitian and positive operators// In: Semigroups of Operators: Theory and Applications (Newport Beach, CA, 1998)/ Progr. Nonlin. Differ. Eqs. Appl. — Basel: Birkhäuser, 2000. — *42*. — C. 174–183.
267. *Li Y.-C., Shaw S.-Y.* N Times integrated C-semigroups and the abstract Cauchy problem// Taiwanese J. Math. — 1997. — *1*, № 1. — C. 75–102.
268. *Li Y.-C., Shaw S.-Y.* On characterization and perturbation of local C-semigroups// Proc. Am. Math. Soc. — 2007. — *135*, № 4. — C. 1097–1106 (electronic).
269. *Li Y.-C., Shaw S.-Y.* On generators of integrated C-semigroups and C-cosine functions// Semigroup Forum. — 1993. — *47*, № 1. — C. 29–35.
270. *Li Y.-C., Shaw S.-Y.* On local α times integrated C-semigroups// Abstr. Appl. Anal. — 2007. — Art. ID 34890.
271. *Li Y.-C., Shaw S.-Y.* Perturbation of non-exponentially bounded α times integrated C-semigroups// J. Math. Soc. Jpn. — 2003. — *55*, № 4. — C. 1115–1136.
272. *Li M., Zheng Q.* α times integrated semigroups: local and global// Stud. Math. — 2003. — *154*, № 3. — C. 243–252.
273. *Li M., Zheng Q.* Extrapolation spaces for C-semigroups// Proc. Am. Math. Soc. — 2009. — *137*, № 2. — C. 663–668.
274. *Li M., Zheng Q.* On the product formulas for C-semigroups// Semigroup Forum. — 2009. — *78*, № 3. — C. 536–546.
275. *Li M., Huang F.-L., Chu X.-L.* Ergodic theory for C-semigroups// Sichuan Daxue Xuebao. — 1999. — *36*, № 4. — C. 645–651.
276. *Li M., Huang F.-L., Zheng Q.* Local integrated C-semigroups// Stud. Math. — 2001. — *145*, № 3. — C. 265–280.
277. *Li M., Morozov V., Piskarev S.* On the approximations of derivatives of integrated semigroups// J. Inverse Ill-Posed Probl. — 2010. — *18*, № 5. — C. 515–550.
278. *Li M., Morozov V., Piskarev S.* On the approximations of derivatives of integrated semigroups, II// J. Inverse Ill-posed Probl. — 2011. — Vol. 19, Issue 3–4, C. 643–688.
279. *Li F., Wang H., Qu Z.* Some results on n times integrated C-regularized semigroups// Adv. Differ. Eqs. — 2011. — Art. ID 394584.

280. *Liang J., Xiao T.* Integrated semigroups and higher order abstract equations// J. Math. Anal. Appl. — 1998. — *222*, № 1. — C. 110–125.
281. *Liang J., Xiao T.* Well-posedness results for certain classes of higher order abstract Cauchy problems connected with integrated semigroups// Semigroup Forum. — 1998. — *56*, № 1. — C. 84–103.
282. *Lin L., Zeng X.* Locally saturation theorem for probabilistic representation formulas of C-semigroups// J. Math. Stud. — 1995. — *28*, № 3. — C. 93–98.
283. *Lin Q.* Probabilistic approximation for C-semigroups// Math. Pract. Theory. — 2008. — *38*, № 3. — C. 123–129.
284. *Lions J. L.* Semi-groupes distributions// Portug. Math. — 1960. — *19*, C. 141–164.
285. *Liu H., Shaw S.-Y.* Rates of local ergodic limits of n times integrated solution families// In: Semigroups of Operators: Theory and Applications (Newport Beach, CA, 1998)/ Progr. Nonlin. Differ. Eqs. Appl. — Basel: Birkhäuser, 2000. — *42*. — C. 192–202.
286. *Liu J. H., Song X. Q., Zhou W.* Local C-semigroups and weak solutions of an abstract Cauchy problem// Math. Pract. Theory. — 2009. — *39*, № 17. — C. 123–127.
287. *Liu M., Liao D.-Q., Zhu Q.-Q., Wang F.-H.* α times integrated C-semigroups// Adv. Pure Math. — 2012. — *2*. — C. 211–215.
288. *Liu M., Song X. Q., Rong R.* Perturbation of n times integrated C-semigroups// J. Xuzhou Norm. Univ. Nat. Sci. Ed. — 2005. — *23*, № 3. — C. 10–14.
289. *Liu Q. R., Gui X. F.* Some properties of integrated C-semigroups and their application to abstract Cauchy problems// J. Northwest Univ. — 1994. — *24*, № 1. — C. 1–5.
290. *Liu Q. R., Zhao H. X.* Local integrated C-semigroups and the abstract Cauchy problems, I// J. Northwest Univ. — 1994. — *24*, № 5. — C. 381–386.
291. *Liu Y., Qiang J.-R., Li M.* Perturbations of α times integrated semigroups// Sichuan Daxue Xuebao. — 2010. — *47*, № 5. — C. 973–976.
292. *Liu Zh., Magal P., Ruan Sh.* Projectors on the generalized eigenspaces for functional differential equations using integrated semigroups// J. Differ. Eqs. — 2008. — *244*, № 7. — C. 1784–1809.
293. *Liu M., Wang Sh., Yu Q., Wang Zh.* α Times integrated C-semigroups and strong solution of abstract Cauchy problem// Int. J. Modern Nonlin. Theory Appl. — 2013. — *2*. — C. 164–166.
294. *Lizama C.* On the convergence and approximation of integrated semigroups// J. Math. Anal. Appl. — 1994. — *181*, № 1. — C. 89–103.
295. *Long F., Xiang X. L.* Stability of m times integrated semigroups and the mild solution of abstract Cauchy problems// Acta Anal. Funct. Appl. — 2001. — *3*, № 4. — C. 358–365.
296. *Lu F. L., Song X. Q., Wang F. H.* Perturbation of α times integrated semigroups// Acta Anal. Funct. Appl. — 2010. — *12*, № 3. — C. 254–258.
297. *Lumer G.* Applications des solutions généralisées et semi-groupes intégrés à des problémes d'évolution// C. R. Acad. Sci. Paris. Sér. I Math. — 1990. — *311*, № 13. — C. 873–878.
298. *Lumer G.* Examples and results concerning the behavior of generalized solutions, integrated semigroups, and dissipative evolution problems// In: Semigroup Theory and Evolution Equations (Delft, 1989)/ Lect. Notes Pure Appl. Math.— 1991. — *135*. — C. 347–356.
299. *Lumer G.* Generalized evolution operators and (generalized) C-semigroups// In: Semigroup Theory and Evolution Equations (Delft, 1989)/ Lect. Notes Pure Appl. Math.— 1991. — *135*. — C. 337–345.
300. *Lumer G.* Problémes dissipatifs et 'analytiques' mal posés: solutions et théorie asymptotique// C. R. Acad. Sci. Paris. Sér. I Math. — 1991. — *312*, № 11. — C. 831–836.
301. *Lumer G.* Semi-groupes irréguliers et semi-groupes intégrés: application à l'identification de semi-groupes iréguliers analytiques et résultats de génération// C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. — 1992. — *314*, № 13. — C. 1033–1038.
302. *Lumer G.* Singular evolution problems, regularization, and applications to phisics, engineering and biology// Linear Operators/ Banach Center Publications. — Warszawa: Inst. Math. Pol. Acad. Sci., 1997. — *38*. — C. 205–216.
303. *Lumer G.* Solutions généralisées et semi-groupes intégrés// C. R. Acad. Sci. Paris. Sér. I Math. — 1990. — *310*, № 7. — C. 577–582.
304. *Magal P., Ruan S.* On integrated semigroups and age structured models in L_p spaces// Differ. Integr. Eqs. — 2007. — *20*, № 2. — C. 197–239.
305. *Mardiyana, Bachar M., Desch W.* A Trotter–Kato theorem for α times integrated C-regularized semigroups// Funct. Differ. Equ. — 2004. — *11*, № 1-2. — C. 103–110.
306. *Matsumoto T.* Time-dependent nonlinear perturbations of integrated semigroups// Nihonkai Math. J. — 1996. — *7*, № 1. — C. 1–28.

307. *Matsumoto T., Oharu S., Tanaka N.* Time-dependent nonlinear perturbations of analytic and integrated semigroups// In: Nonlinear Partial Differential Equations and Their Applications/ GAKUTO Int. Ser. Math. Sci. Appl. — Tokyo: Gakkotosho, 2004. — *20.* — C. 430–449.
308. *Matsumoto T., Oharu S., Thieme H. R.* Nonlinear perturbations of a class ofintegrated semigroups// Hiroshima Math. J. — 1996. — *26*, № 3. — C. 433–473.
309. *Mei Z.-D., Peng J.-G., Gao J.-H.* Convoluted fractional C-semigroups and fractional abstract Cauchy problems// Abstr. Appl. Anal. — 2014. — Article ID 357821.
310. *Melnikova I. V.* Abstract well-posed and ill-posed Cauchy problems for inclusions// In: Semigroups of Operators: Theory and Applications (Newport Beach, CA, 1998)/ Progr. Nonlin. Differ. Equ. Appl. — Basel: Birkhäuser, 2000. — *42.* — C. 203–212.
311. *Melnikova I. V.* General theory of the ill-posed Cauchy problem// J. Inverse Ill-Posed Probl. — 1995. — *3*, № 2. — C. 149–171.
312. *Melnikova I. V.* Semigroup regularization for ill-posed Cauchy problems// In: Semigroups of Operators: Theory and Applications (Rio de Janeiro, 2001). — New York: Optimization Software, 2002. — C. 189–199.
313. *Melnikova I. V., Alshansky M. A.* Well-posedness of the Cauchy problem in a Banach space: regular and degenerate cases// J. Math. Sci. — 1997. — *87*, № 4. — C. 3732–3780.
314. *Melnikova I. V., Filinkov A. I.* Abstract Cauchy Problems: Three Approaches/ Chapman & Hall/CRC Monogr. Surv. Pure Appl. Math. — Boca Raton, FL: Chapman & Hall/CRC, 2001.
315. *Melnikova I. V., Filinkov A. I.* Abstract stochastic problems with generators of regularized semigroups// Commun. Appl. Anal. — 2009. — *13*, № 2. — C. 195–212.
316. *Miana P. J.* α Times integrated semigroups and fractional derivation// Forum Math. — 2002. — *14*, № 1. — C. 23–46.
317. *Miana P. J.* Local and global solutions of well-posed integrated Cauchy problems// Stud. Math. — 2008. — *187*, № 3. — C. 219–232.
318. *Miana P. J.* Subordinated holomorphic semigroups to integrated semigroups and groups// In: Iteration Theory (ECIT'06)/ Grazer Math. Ber. — Graz: Inst. Mathematik, Karl-Franzens-Universität Graz, 2007. — *351.* — C. 114–128.
319. *Mijatović M., Pilipović S.* α Times integrated semigroups ($\alpha \in \mathbb{R}^-$)// In: Proc. 4th Symp. Math. Anal. Its Appl. (Arandelovac, 1997)/ Mat. Vesnik. — 1997. — *49*, №№ 3-4. — C. 153–162.
320. *Mijatović M., Pilipović S.* Integrated semigroups and distribution semigroups. Cauchy problem// Math. Montisnigri. — 1999. — *11.* — C. 43–65.
321. *Mijatović M., Pilipović S.* Integrated semigroups, relations with generators// Novi Sad J. Math. — 1997. — *27*, № 2. — C. 65–75.
322. *Mijatović M., Pilipović S., Vajzović F.* α Times integrated semigroups ($\alpha \in \mathbb{R}^+$)// J. Math. Anal. Appl. — 1997. — *210*, № 2. — C. 790–803.
323. *Minh N. V.* Almost periodic solutions of C-well-posed evolution equations// Math. J. Okayama Univ. — 2006. — *48.* — C. 145–157.
324. *Minh M. N.* Almost periodic solutions of evolution equations associated with C-semigroups: An approach via implicit difference equations// Vietnam J. Math. — 2005. — *33*, № 1. — C. 63–72.
325. *Mishra I.* C-semigroups and almost periodic solution of non-autonomous evolution equation// Int. J. Evol. Equ. — 2013. — *6*, № 3. — C. 265–278.
326. *Miyadera I.* A generalization of the Hille–Yosida theorem// Proc. Jpn. Acad. Ser. A Math. Sci. — 1988. — *64*, № 7. — C. 223–226.
327. *Miyadera I.* C-semigroups, semigroups and n times integrated semigroups// In: Differ. Eqs. Control Theory (Iaşi, 1990)/ Pitman Res. Notes Math. Ser. — Harlow: Longman Sci. Tech., 1991. — *250.* — C. 193–207.
328. *Miyadera I.* C-semigroups and semigroups of linear operators// In: Proc. Int. Conf. Differ. Eqs. (Plovdiv, 1991)/ River Edge, NJ: World Scientific, 1992. — C. 133–143.
329. *Miyadera I.* On the generators of exponentially bounded C-semigroups// Proc. Jpn. Acad. Ser. A Math. Sci. — 1986. — *62*, № 7. — C. 239–242.
330. *Miyadera I., Okubo M., Tanaka N.* α Times integrated semigroups and abstract Cauchy problem// Mem. School Sci. Engrg. Waseda Univ. — 1994. — № 57. — C. 267–289.
331. *Miyadera I., Okubo M., Tanaka N.* On integrated semigroups which are not exponentially bounded// Proc. Jpn. Acad. Ser. A Math. Sci. — 1993. — *69*, № 6. — C. 199–204.
332. *Miyadera I., Tanaka N.* A remark on exponentially bounded C-semigroups// Proc. Jpn. Acad. Ser. A Math. Sci. — 1990. — *66*, № 2. — C. 31–34.

333. *Miyadera I., Tanaka N.* Exponentially bounded C-semigroups and generation of semigroups// J. Math. Anal. Appl. — 1989. — *143*, № 2. — C. 358–378.
334. *Miyadera I., Tanaka N.* Generalization of the Hille–Yosida theorem// In: Semigroup Theory and Evolution Equations (Delft, 1989)/ Lect. Notes Pure Appl. Math. — New York: Dekker, 1991. — *135.* — C. 371–381.
335. *Morozov V. A.* Regularization Methods for Ill-posed Problems. — Boca Raton, FL: CRC Press, 1993.
336. *Muller C., Schock E.* Ill-posed problems, C_0-semigroups and the Showalter regularization// J. Math. Anal. Appl. — 2004. — *299*, № 1. — C. 205–220.
337. *Nagaoka K.* Generation of the integrated semigroups by superelliptic differential operators// J. Math. Anal. Appl. — 2008. — *341*, № 2. — C. 1143–1154.
338. *Neubrander F.* Integrated semigroups and their application to complete second order Cauchy problems// In: Semigroups and differential operators (Oberwolfach, 1988)/ Semigroup Forum. — 1989. — *38*, № 2. — C. 233–251.
339. *Neubrander F.* Integrated semigroups and their applications to the abstract Cauchy problem// Pac. J. Math. — 1988. — *135*, № 1. — C. 111–155.
340. *Nicaise S.* The Hille–Yosida and Trotter–Kato theorems for integrated semigroups// J. Math. Anal. Appl. — 1993. — *180*, № 2. — C. 303–316.
341. *Okazawa N.* A generation theorem for semigroups of growth order α// Tohoku Math. J. — 1974. — *26*, № 1. — C. 39–51.
342. *Okazawa N.* A remark on infinitesimal generators of C-semigroups// SUT J. Math. — 1989. — *25*, № 2. — C. 123–127.
343. *Ouchi S.* Semigroups of operators in locally convex spaces// J. Math. Soc. Jpn. — 1973. — *25.* — C. 265–276.
344. *Pang M. M. H.* Resolvent estimates for Schrödinger operators in $L_p(\mathbb{R}^N)$ and the theory of exponentially bounded C-semigroups// Semigroup Forum. — 1990. — *41*, № 1. — C. 97–114.
345. *Park J. Y.* Exponentially bounded C-semigroup in Frechet space// Kobe J. Math. — 1990. — *7*, № 2. — C. 109–123.
346. *Park J. Y., Jeong D. H., Yu J.-W.* Convergence and general representation of the exponentially bounded C-semigroups in Banach space// Bull. Korean Math. Soc. — 1989. — *26*, № 1. — C. 53–67.
347. *Peng A. M., Song X. Q., Zhang X. Z.* Stability of C-semigroups in Hilbert spaces// J. Xuzhou Norm. Univ. Nat. Sci. Ed. — 2004. — *22*, № 2. — C. 5–8.
348. *Peng J., Li K.* A novel characteristic of solution operator for the fractional abstract Cauchy problem// J. Math. Anal. Appl. — 2012. — *385.* — C. 786–796.
349. *Peng J. G., Wang M. S.* The (n, k)-well-posedness of abstract Cauchy problems// Gongcheng Shuxue Xuebao. — 1994. — *11*, № 2. — C. 123–126.
350. *Piskarev S. I.* Discretization of abstract hyperbolic equation// Tartu Riikl. Ul. Toimetised. — 1979. — *500.* — C. 3–23.
351. *Piskarev S., Shaw S.-Y., van Casteren J. A.* Approximation of ill-posed evolution problems and discretization of C-semigroups// J. Inverse Ill-Posed Probl. — 2002. — *10*, № 5. — C. 513–546.
352. *Preda P., Pogan A., Preda C.* The Perron problem for C-semigroups// Math. J. Okayama Univ. — 2004. — *46.* — C. 141–151.
353. *Prüss J.* Evolutionary Integral Equation and Applications. — Basel: Birkhäuser, 1993.
354. *Qian M.* Extension of an elliptic differential operator and C-semigroups// Acta Math. Sinica. — 1979. — *22*, № 4. — C. 471–486.
355. *Qiang J., Li M., Zheng Q.* The applications of C-semigroups to the Dirac equation// Appl. Math. Lett. — 2009. — *22*, № 3. — C. 422–427.
356. *Qiao H. L., Zhao H. X.* Individual weak stability of C-semigroups// Pure Appl. Math. (Xi'an). — 2007. — *23*, № 1. — C. 83–86.
357. *Rastović D.* A note on stability properties of integrated semigroups// Acta Math. Inform. Univ. Ostraviensis. — 1995. — *3*, № 1. — C. 61–65.
358. *Rong R., Song X. Q., Cao D. X., Guo L. L.* Laplace inverse transformation and asymptotic expansion for n times integrated C-semigroups// J. Shandong Univ. Sci. Tech. Nat. Sci. — 2006. — *25*, № 2. — C. 109–111.
359. *Samarskii A. A., Gavrilyuk I. P., Makarov V. L.* Stability and regularization of three-level difference schemes with unbounded operator coefficients in Banach spaces// SIAM J. Numer. Anal. — 2001. — *39*, № 2. — C. 708–723.
360. *Sanekata N.* Some remarks on the abstract Cauchy problem// Publ. RIMS, Kyoto Univ. — 1975. — *11.* — C. 51–65.

361. *Schuchman V.* Complete second order differential equations in Banach spaces// In: Semigroups of Operators: Theory and Applications (Rio de Janeiro, 2001)/ New York: Optimization Software, 2002. — C. 238–255.
362. *Schuchman V., Claeyssen J. C. R.* Evolution equations of higher order in Banach spaces// Appl. Anal. — 1999. — *72*, № 3-4. — C. 459–468.
363. *Schwarz S.* The ideal structure of C-semigroups// Czechoslovak Math. J. — 1977. — *27 (102)*, № 2. — C. 313–337.
364. *Serizawa H.* Representation formulas for integrated semigroups and sine families// Aequat. Math. — 1992. — *44*, №№ 2-3. — C. 278–291.
365. *Shaw S.-Y.* Ergodic properties of integrated semigroups and resolvent families// In: Int. Math. Conf. (Kaohsiung, 1994)/ River Edge, NJ: World Scientific, 1996. — C. 171–178.
366. *Shaw S.-Y.* Ergodic theorems with rates for r times integrated solution families// Operator Theory and Related Topics, Vol. II (Odessa, 1997)/ Oper. Theory Adv. Appl. — Basel: Birkhäuser, 2000. — *118*, C. 359–371.
367. *Shaw S.-Y.* On Cesaro and Abel limits of C-semigroups// Soochow J. Math. — 1994. — *20*, № 4. — C. 547–553.
368. *Shaw S.-Y.* Uniform ergodic theorems for locally integrable semigroups and pseudoresolvents// Proc. Am. Math. Soc. — 1986. — *98*, № 1. — C. 61–67.
369. *Shaw S.-Y., Chyan D.-K.* Maximal regularity and bounded semivariation of local C-semigroups/ Preprint, 1997.
370. *Shaw S.-Y., Kuo Ch.-Ch.* Generation of local C-semigroups and solvability of the abstract Cauchy problems// Taiwanese J. Math. — 2005. — *9*, № 2. — C. 291–311.
371. *Shaw S.-Y., Kuo Ch.-Ch.* Local C-semigroups and the abstract Cauchy problems/ Preprint, 1996.
372. *Shaw S.-Y., Li Y.-Ch.* Characterization and generation of local C-cosine and C-sine functions// Int. J. Evol. Equ. — 2005. — *1*, № 4. — C. 373–401.
373. *Shaw S.-Y., Li Y.-Ch.* On n times integrated C-cosine functions// Evolution equations (Baton Rouge, LA, 1992)/ Lect. Notes Pure Appl. Math. — New York: Dekker, 1995. — *168*. — C. 393–406.
374. *Shaw S.-Y., Li Y.-C.* Representation formulas for C-semigroups// Semigroup Forum. — 1993. — *46*, № 1. — C. 123–125.
375. *Shen J.-H., Song G.-Z.* A generalization of C-semigroup// Northeast. Math. J. — 2000. — *16*, № 4. — C. 417–427.
376. *Shen J. H., Song G. Zh.* General integrated semigroups// Acta Math. Sci. Ser. A Chin. Ed. — 2000. — *20*, № 4. — C. 480–486.
377. *Shen J., Song G.* The Laplace transform and integrated semigroups// Nanjing Daxue Xuebao Shuxue Bannian Kan. — 1997. — *14*, № 1. — C. 15–22.
378. *Sheng Wang Wang, Ming Chu Gao* Automatic extensions of local regularized semigroups and local regularized cosine functions// Proc. Am. Math. Soc. — 1999. — *127*, C. 1651–1663.
379. *Shi D. M., Yang L. Sh.* Locally equicontinuous C-semigroups// J. Syst. Sci. Math. Sci. — 1994. — *14*, № 2. — C. 121–129.
380. *Shi J., Cai S.* Subgenerators of C-semigroups on l_2// Anal. Theory Appl. — 2009. — *25*, № 3. — C. 297–300.
381. *Shinohara Y.* Characterizations of C-semigroups// Math. J. Okayama Univ. — 2001. — *43*. — C. 137–142.
382. *Showalter D. W., Ben-Israel A.* Representation and computation of the generalized inverse of a bounded linear operator between Hilbert spaces// Atti Accad. Naz. Lincei, VIII. Ser., Rend., Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. — 1970. — *48*. — C. 184–194.
383. *Skula L.* On C-semigroups// Acta Arith. — 1976. — *31*, № 3. — C. 247–257.
384. *Song Sh.* C-semigroups on Banach spaces and functional inequalities// Semin. Probab. XXIX/ Lect. Notes Math. — Berlin: Springer-Verlag, 1995. — *1613*. — C. 297–326.
385. *Song X.* Spectral mapping theorems for C-semigroups// J. Math. Res. Exposition. — 1996. — *16*, № 4. — C. 526–530.
386. *Song X. Q., Peng A. M., Wang C. X.* Probabilistic approximations for C-semigroups and integrated semigroups// Nanjing Daxue Xuebao Shuxue Bannian Kan. — 2003. — *20*, № 2. — C. 216–225.
387. *Sova M.* Problémes de Cauchy paraboliques abstraits de classes superieures et les semi-groupes distributions// Ricerche Mat. — 1969. — *18*. — C. 215–238.
388. *Straub B.* Fractional powers of operators with polynomially bounded resolvent and the semigroups generated by them// Hiroshima Math. J. — 1994. — *24*, № 3. — C. 529–548.
389. *Sun G. Z.* α Times integrated C-semigroups and abstract Cauchy problems// Acta Math. Sinica (Chin. Ser.). — 1999. — *42*, № 4. — C. 757–762.

390. *Sun G. Zh.* Local C-semigroups and their applications to inhomogeneous (ACP) on a finite interval// Nanjing Daxue Xuebao Shuxue Bannian Kan. — 1995. — *12*, № 1. — C. 21–27.
391. *Sun R. K., Liu Q. R.* Integrated semigroup methods for solving a class of abstract integro-differential equations// Pure Appl. Math. (Xi'an). — 1993. — *9*, № 1. — C. 95–99.
392. *Sun S. G., Qi M., Kong L.* Analytic families of integrated semigroups// J. Shandong Univ. Sci. Tech. Nat. Sci. — 2004. — *23*, № 4. — C. 94–96.
393. *Sviridyuk G. A., Fedorov V. E.* Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators// Inverse Ill-posed Probl. Ser. — Utrecht: VSP, 2003.
394. *Takenaka T., Okazawa N.* Well-posedness of abstract Cauchy problems for second order differential equations// Isr. J. Math. — 1990. — *69*, № 3. — C. 257–288.
395. *Takenaka T., Piskarev S.* Local C-cosine families and n times integrated local cosine families// Taiwanese J. Math. — 2004. — *8*, № 3. — C. 515–545.
396. *Tanaka N.* Approximation of integrated semigroups by "integrated" discrete parameter semigroups// Semigroup Forum. — 1997. — *55*, № 1. — C. 57–67.
397. *Tanaka N.* On perturbation theory for exponentially bounded C-semigroups// Semigroup Forum. — 1990. — *41*, № 2. — C. 215–236.
398. *Tanaka N.* Holomorphic C-semigroups and holomorphic semigroups// In: Semigroups and Differential Operators (Oberwolfach, 1988)/ Semigroup Forum. — 1989. — *38*, № 2. — C. 253–261.
399. *Tanaka N.* Locally Lipschitz continuous integrated semigroups// Stud. Math. — 2005. — *167*, № 1. — C. 1–16.
400. *Tanaka N.* On the exponentially bounded C-semigroups// Tokyo J. Math. — 1987. — *10*, № 1. — C. 107–117.
401. *Tanaka N.* Perturbation theorems of Miyadera type for locally Lipschitz continuous integrated semigroups// Stud. Math. — 2003. — *156*, № 2. — C. 177–187.
402. *Tanaka N., Miyadera I.* C-Semigroups and the abstract Cauchy problem// J. Math. Anal. Appl. — 1992. — *170*, № 1. — C. 196–206.
403. *Tanaka N., Miyadera I.* Exponentially bounded C-semigroups and integrated semigroups// Tokyo J. Math. — 1989. — *12*, № 1. — C. 99–115.
404. *Tanaka N., Miyadera I.* Some remarks on C-semigroups and integrated semigroups// Proc. Jpn. Acad. Ser. A Math. Sci. — 1987. — *63*, № 5. — C. 139–142.
405. *Tanaka N., Okazawa N.* Local C-semigroups and local integrated semigroups// Proc. London Math. Soc. (3). — 1990. — *61*, № 1. — C. 63–90.
406. *Thieme H. R.* Differentiability of convolutions, integrated semigroups of bounded semi-variation, and the inhomogeneous Cauchy problem// J. Evol. Equ. — 2008. — *8*, № 2. — C. 283–305.
407. *Thieme H. R.* Integrated semigroups and integrated solutions to abstract Cauchy problems// J. Math. Anal. Appl. — 1990. — *152*, № 2. — C. 416–447.
408. *Thieme H. R.* Positive perturbations of dual and integrated semigroups// Adv. Math. Sci. Appl. — 1996. — *6*, № 2. — C. 445–507.
409. *Thieme H. R., Vosseler H.* A Stieltjes type convolution for integrated semigroups of bounded strong variation and L_p-solutions to the abstract Cauchy problem// Differ. Integr. Equ. — 2002. — *15*, № 10. — C. 1171–1218.
410. *Travis C. C., Webb G. F.* Compactness, regularity, and uniform continuity properties of strongly continuous cosine families// Houston J. Math. — 1977. — *3*. — C. 555–567.
411. *Ushijima T.* Approximation theory for semigroups of linear operators and its application to approximation of wave equations// Jpn. J. Math. — 1975/76. — *1*. — C. 185–224.
412. *Vainikko G.* Approximative methods for nonlinear equations (two approaches to the convergence problem)// Nonlin. Anal. — 1978. — *2*. — C. 647–687.
413. *Vajzović F., Vugdalić R.* Two exponential formulas for α times integrated semigroups ($\alpha \in \mathbb{R}^+$)// Sarajevo J. Math. — 2005. — *1*(13), № 1. — C. 93–116.
414. *Vasiliev V. V., Piskarev S. I.* Differential equations in Banach spaces, II. Cosine-operator functions// J. Math. Sci. — 2004. — Vol. 122, № 2. — C. 3055–3174.
415. *Voicu M.* Integrated semigroups and Cauchy problems on locally convex spaces// Rev. Roumaine Math. Pures Appl. — 1994. — *39*, № 1. — C. 63–78.
416. *Vugdalić R.* A formula for n times integrated semigroups ($n \in \mathbb{N}$)// Sarajevo J. Math. — 2008. — *4*(16), № 1. — C. 125–132.
417. *Vugdalić R.* Representation theorems for integrated semigroups// Sarajevo J. Math. — 2005. — *1*(14), № 2. — C. 243–250.

418. *Wan J. P.* Product perturbations of C-semigroups and integral semigroups// J. Huazhong Univ. Sci. Tech. — 1997. — *25*, suppl. I. — C. 102–105.
419. *Wang C., Song X.* Integrated C-semigroups and abstract integro-differential equations// Nanjing Daxue Xuebao Shuxue Bannian Kan. — 2006. — *23*, № 2. — C. 217–224.
420. *Wang C. X., Song X. Q.* n times integrated C-semigroups and strong solutions to non-homogeneous abstract Cauchy problems// Acta Anal. Funct. Appl. — 2006. — *8*, № 3. — C. 247–251.
421. *Wang C. X., Song X. Q., Cao D. X.* n times integrated C-semigroups and the abstract Cauchy problem// Pure Appl. Math. (Xi'an). — 2006. — *22*, № 3. — C. 365–371.
422. *Wang C. X., Song X. Q., Zhang X. Z.* A representation of integrated C-semigroups// J. Xuzhou Norm. Univ. Nat. Sci. Ed. — 2005. — *23*, № 1. — C. 24–26.
423. *Wang J. J., Li Y. R.* Perturbations and approximations of Markov integrated semigroups// Acta Anal. Funct. Appl. — 2011. — *13*, № 2. — C. 121–123.
424. *Wang S. W.* Mild integrated C-existence families// Stud. Math. — 1995. — *112*, № 3. — C. 251–266.
425. *Wang S. W.* Quasi-distribution semigroups and integrated semigroups// J. Funct. Anal. — 1997. — *146*, № 2. — C. 352–381.
426. *Wang S. W.* Hille–Yosida type theorems for local regularized semigroups and local integrated semigroups// Stud. Math. — 2002. — *152*, № 1. — C. 45–67.
427. *Wang S. W., Gao M. C.* Automatic extensions of local regularized semigroups and local regularized cosine functions// Proc. Am. Math. Soc. — 1999. — *127*, № 6. — C. 1651–1663.
428. *Wang S. W., Wang M. Y., Shen Y.* Perturbation theorems for local integrated semigroups and their applications// Stud. Math. — 2005. — *170*, № 2. — C. 121–146.
429. *Wen X.-Y., Li Y.-R.* Stochastic monotone Markov integrated semigroups// Math. Appl. (Wuhan). — 2009. — *22*, № 4. — C. 690–696.
430. *Widder D. V.* The Laplace transform/ Princeton Math. Ser. — Princeton: Princeton Univ. Press, 1941. — *6*.
431. *Wu B.* Integrated semigroups of bounded linear operators and their applications to inverse problems/ Ph.D. Thesis. — Claremont Grad. Univ., 1992.
432. *Xiao T.-J., Liang J.* Approximations of Laplace transforms and integrated semigroups// J. Funct. Anal. — 2000. — *172*, № 1. — C. 202–220.
433. *Xiao T., Liang J.* Integrated semigroups, cosine families and higher order abstract Cauchy problems// In: Functional Analysis in China/ Math. Appl. — Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1996. — *356*. — C. 351–365.
434. *Xiao T., Liang J.* Laplace transforms and integrated, regularized semigroups in locally convex spaces// J. Funct. Anal. — 1997. — *148*, № 2. — C. 448–479.
435. *Xiao T., Liang J.* Widder–Arendt theorem and integrated semigroups in locally convex space// Sci. China Ser. A. — 1996. — *39*, № 11. — C. 1121–1130.
436. *Xie L. H., Li M. Q.* Weak almost periodicity of C-semigroups// Dianzi Keji Daxue Xuebao. — 2004. — *33*, № 2. — C. 218–220.
437. *Xie L., Li M., Huang F.* Asymptotic almost periodicity of C-semigroups// Int. J. Math. Math. Sci. — 2003. — № 2. — C. 65–73.
438. *Yang G.-J.* α Times integrated semigroups and singular equations// Southeast Asian Bull. Math. — 1999. — *23*, № 2. — C. 309–315.
439. *Yang Y. T., Zhao H. X.* Kato perturbations of generators of analytic C-semigroups// J. Zhengzhou Univ. Nat. Sci. Ed. — 2013. — *45*, № 1. — C. 15–18.
440. *Yao J. Q.* The adjoint semigroups of exponentially bounded C-semigroups// J. Syst. Sci. Math. Sci. — 1999. — *19*, № 3. — C. 319–322.
441. *Yu W. S., Xu A. S.* C-semigroups and the solutions of abstract functional-differential equations with infinite delay// Sichuan Daxue Xuebao. — 1995. — *32*, № 2. — C. 101–108.
442. *Zhao R. X.* Smooth distribution semigroups and integrated semigroups: The degenerate case// Chinese Ann. Math. Ser. A. — 2000. — *21*, № 2. — C. 175–188.
443. *Zhao H. X., Liu Q. R.* Local integrated C-semigroups and the abstract Cauchy problems, III// Pure Appl. Math. (Xi'an). — 1996. — *12*, № 1. — C. 53–58.
444. *Zhao W.-Q., Li Y.-R.* Restriction of Markov integrated semigroups and generation of increasing integrated semigroups// Acta Anal. Funct. Appl. — 2005. — *7*, № 2. — C. 137–145.
445. *Zheng Q.* Applications of integrated semigroups to higher order abstract Cauchy problems// J. Syst. Sci. Math. Sci. — 1992. — *5*, № 4. — C. 316–327.
446. *Zheng Q.* Integrated semigroups and abstract Cauchy problems// Adv. Math. — 1992. — *21*, № 3. — C. 257–273.

447. *Zheng Q.* Perturbations and approximations of integrated semigroups// Acta Math. Sinica (N.S.). — 1993. — *9*, № 3. — C. 252–260.
448. *Zheng Q.* Some classes of operator matrices that generate integrated semigroups// Acta Math. Sinica. — 1993. — *36*, № 4. — C. 456–467.
449. *Zheng Q., Lei Y.* Exponentially bounded C-semigroup and integrated semigroup with nondensely defined generators, I: Approximation// Acta Math. Sci. — 1993. — *13*, № 3. — C. 251–260.
450. *Zheng Q., Lei Y.* Exponentially bounded C-semigroup and integrated semigroup with nondensely defined generators, II: Perturbation// Acta Math. Sci. — 1993. — *13*. — C. 428–434.
451. *Zheng Q., Lei Y. S.* Exponentially bounded C-semigroups and integrated semigroups with nondensely defined generators, III: Analyticity// Acta Math. Sci. — 1994. — *14*, № 1. — C. 107–119.
452. *Zheng Q., Lei Y. S.* Integrated C-semigroups// J. Huazhong Univ. Sci. Tech. — 1992. — *20*, № 5. — C. 181–187.
453. *Zheng Q., Li M.* Regularized semigroups and nonelliptic differential operators. — Beijing: Science Press, 2014.
454. *Zheng Q., Liu L.* Almost periodic regularized groups, semigroups, and cosine functions// J. Math. Anal. Appl. — 1996. — *197*, № 1. — C. 90–112.
455. *Zou X.* A generation theorem for local C-semigroups// Nanjing Daxue Xuebao Ziran Kexue Ban. — 1998. — *34*, № 4. — C. 406–411.
456. *Zwart H.* Is A^{-1} an infinitesimal generator? Perspectives in operator theory// In: Papers of the Workshop on Operator Theory, Warsaw, Poland, April 19–May 3, 2004/ Banach Center Publ. — Warsaw: Inst. Math. Polish Acad. Sci., 2007. — *75*. — C. 303–313.

В. В. Васильев
Воронежский государственный университет
E-mail: `vvv-252v@yandex.ru`

С. И. Пискарев
Научно-исследовательский вычислительный центр МГУ им. М. В. Ломоносова
E-mail: `piskarev@gmail.com`

Н. Ю. Селиванова
Всероссийский институт научной и технической информации РАН