ISSN 0233-6723

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ

СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Тематические обзоры

Том 130

Москва 2017

ISSN 0233–6723

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

ВСЕРОССИЙСКИЙ ИНСТИТУТ
НАУЧНОЙ И ТЕХНИЧЕСКОЙ ИНФОРМАЦИИ
(ВИНИТИ РАН)

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ

СЕРИЯ
СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

ТЕМАТИЧЕСКИЕ ОБЗОРЫ

Том 130

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

Москва 2017

СОДЕРЖАНИЕ

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 130 (2017). С. 3–112

УДК 512.58; 515.1; 514.7

НЕПРЕРЫВНЫЕ И ГЛАДКИЕ ОБОЛОЧКИ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ АЛГЕБР ЧАСТЬ 2

© 2017 г. **С. С. АКБАРОВ**

Аннотация. Со времени изобретения первых оптических приборов в физике утвердилась идея, что видимый образ изучаемого объекта зависит от инструментов наблюдения. Одним из способов формализовать это в математике является конструкция, которая каждому объекту A данной категории K ставит в соответствие его оболочку $\operatorname{Env}^{\Omega}_{\Phi} A$ в данном классе морфизмов (представлений) Ω относительно данного класса морфизмов (инструментов наблюдения) Φ. Оказывается, что если в качестве K выбирается достаточно широкая категория топологических алгебр, то каждый выбор классов Ω и Φ определяет «проекцию функционального анализа в геометрию», и стандартные «геометрические дисциплины», такие как комплексная геометрия, дифференциальная геометрия и топология, являются частными случаями этой конструкции. Это приводит к формальной схеме «категорного построения геометрий» с многочисленными приложениями, в частности, «геометрическими обобщениями понтрягинской двойственности» (на классы некоммутативных групп). В настоящей работе описывается действие этой схемы в топологии и в дифференциальной геометрии.

Ключевые слова: стереотипное пространство, стереотипная алгебра, оболочка, двойственность Понтрягина.

AMS Subject Classification: 46Hxx, 54-xx, 53-xx

СОДЕРЖАНИЕ ЧАСТИ 1
(см. том 129)

ISSN 0233–6723

СОДЕРЖАНИЕ

Глава 5

НЕПРЕРЫВНЫЕ ОБОЛОЧКИ И НЕПРЕРЫВНАЯ ДВОЙСТВЕННОСТЬ[1]

5.1. Определение и функториальные свойства непрерывной оболочки

Как было указано в гл. 0, материал этого раздела существенно пересекается со статьей Ю. Н. Кузнецовой [51].

5.1.1. C^*-полунормы. Пусть A — инволютивная стереотипная алгебра. Полунорма $p : A \to \mathbb{R}_+$ называется *C^*-полунормой*, если она удовлетворяет тождеству

$$p(a^\bullet \cdot a) = p(a)^2, \qquad a \in A. \tag{5.1.1}$$

Согласно знаменитой теореме Себестьена [61], всякая такая полунорма субмультипликативна:

$$p(a \cdot b) \leqslant p(a) \cdot p(b), \qquad a, b \in A.$$

Множество всех непрерывных C^*-полунорм на A мы обозначаем $\mathcal{P}(A)$.

Теорема 5.1. *Всякая непрерывная C^*-полунорма p на A представима в виде нормы некоторого унитарного (непрерывного по норме[2]) представления $\pi : A \to \mathcal{B}(X)$:*

$$p(a) = \|\pi(a)\|, \qquad a \in A. \tag{5.1.2}$$

Доказательство. Пространство $\mathsf{Ker}\, p = \{x \in A : \ p(x) = 0\}$ является замкнутым идеалом в A. Полунорма p пропускается через некоторую C^*-норму p' на фактор-алгебре $A/\mathsf{Ker}\, p$. Пусть B — пополнение $A/\mathsf{Ker}\, p$ относительно p'. Понятно, что B является C^*-алгеброй, поэтому ее можно изометрически вложить в некоторую алгебру вида $\mathcal{B}(X)$, где X — гильбертово пространство [15, теорема 3.4.1]. Композиция отображений $A \to A/\mathsf{Ker}\, p \to B \to \mathcal{B}(X)$ будет искомым представлением π алгебры A. □

5.1.2. Определение непрерывной оболочки и функториальность. Условимся символом C^* обозначать класс C^*-алгебр.

- *Непрерывной оболочкой* $\mathsf{env}_{\mathcal{C}}\, A : A \to \mathsf{Env}_{\mathcal{C}}\, A$ инволютивной стереотипной алгебры A называется ее оболочка в классе DEpi плотных эпиморфизмов категории $\mathtt{InvSteAlg}$ инволютивных стереотипеных алгебр относительно класса $\mathsf{Mor}(\mathtt{InvSteAlg}, \mathsf{C}^*)$ морфизмов в C^*-алгебры:

$$\mathsf{Env}_{\mathcal{C}}\, A = \mathsf{Env}^{\mathsf{DEpi}}_{\mathsf{C}^*}\, A$$

Более подробно, под *непрерывным расширением* инволютивной стереотипной алгебры A мы понимаем плотный эпиморфизм $\sigma : A \to A'$ инволютивных стереотипных алгебр такой, что для любой C^*-алгебры B и инволютивного гомоморфизма $\varphi : A \to B$ найдется (необходимо, единственный) гомоморфизм инволютивных стереотипных алгебр $\varphi' : A' \to B$, замыкающий диаграмму

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\sigma"] \arrow[dr, "\varphi"'] & A' \arrow[d, dashed, "\varphi'"] \\ & B \end{tikzcd} \tag{5.1.3}$$

А *непрерывная оболочка* инволютивной стереотипной алгебры A определяется как непрерывное расширение $\rho : A \to \mathsf{Env}_{\mathcal{C}}\, A$ такое, что для любого непрерывного расширения $\sigma : A \to A'$ найдется

[1] См. Errata на с. 109

[2] См. определение в части 1 на с. 91.

(необходимо, единственный) гомоморфизм инволютивных стереотипных алгебр $\upsilon : A' \to \mathsf{Env}_{\mathcal{C}} A$, замыкающий диаграмму

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dl, "\sigma"'] \arrow[dr, "\rho"] & \\ A' \arrow[rr, dashed, "\upsilon"'] & & \mathsf{Env}_{\mathcal{C}} A \end{tikzcd}$$

Теорема 5.2. *Непрерывная оболочка* $\mathsf{Env}_{\mathcal{C}}$ *регулярна и согласована с проективным тензорным произведением*[1] $\circledast$ *в* $\mathtt{InvSteAlg}$.

Доказательство. 1. Сначала докажем регулярность, то есть выполнение условий R.1 - R.5 теоремы 1.19 (см. часть 1, с. 31). Пусть $\varPhi = \mathsf{Mor}(\mathtt{InvSteAlg}, \mathtt{C}^*)$ — класс гомоморфизмов в C^*-алгебры.

- R.1: Категория $\mathtt{InvSteAlg}$ инволютивных стереотипных алгебр полна, в частности, проективно полна (любой функтор из малой категории в $\mathtt{InvSteAlg}$ имеет проективный предел).
- R.2: По теореме 3.7 (см. часть 1, с. 68), класс DEpi всех плотных эпиморфизмов, в которых ищется оболочка, мономорфно дополняем в категории $\mathtt{InvSteAlg}$.
- R.3: Категория $\mathtt{InvSteAlg}$ также локально мала в фактор-объектах класса DEpi (потому что $\mathtt{Ste}$ локально мала в фактор-объектах класса Epi).
- R.4: Какой бы ни была инволютивная стереотипная алгебра A, всегда найдется выходящий из нее морфизм $\varphi : A \to B$ в некоторую C^*-алгебру B (например, в качестве B можно взять нулевую алгебру $B = 0$ и положить $\varphi = 0$). По определению (см. часть 1, с. 14) это означает, что класс $\varPhi$ морфизмов в C^*-алгебры выходит из категории $\mathtt{InvSteAlg}$. Кроме того, этот класс является правым идеалом в $\mathtt{InvSteAlg}$ (композиция $\varphi\circ\psi$ любого морфизма $\varphi : A \to B$ в C^*-алгебру B с любым другим морфизмом $\psi : A' \to A$ — снова морфизм со значениями в C^*-алгебре).
- R.5: Если $\psi \circ \sigma \in \varPhi$ и $\sigma \in \mathsf{DEpi}$, то у композиции $\psi \circ \sigma : A \to C$ область значений C есть C^*-алгебра, и поэтому у множителя ψ область значений та же же самая, и значит $\psi \in \varPhi$. Это значит, что класс DEpi подталкивает класс $\varPhi$.

2. Теперь проверим согласованность с тензорным произведением $\circledast$, то есть условия T.1 и T.2 на с. 32 части 1.

- T.1: Пусть $\rho : A \to A'$ и $\sigma : B \to B'$ — непрерывные расширения и пусть $\varphi : A \circledast B \to C$ — гомоморфизм в C^*-алгебру C. По лемме 3.3 (см. часть 1, с. 64) он представим в виде

$$\varphi(a \circledast b) = \alpha(a) \cdot \beta(b), \qquad a \in A,\ b \in B,$$

где $\alpha : A \to C$ и $\beta : B \to C$ — некоторые морфизмы стереотипных алгебр с коммутирующими образами:

$$\alpha(a) \cdot \beta(b) = \beta(b) \cdot \alpha(a), \qquad a \in A,\ b \in B.$$

Продолжим α и β до морфизмов α' и β' так, чтобы замыкались диаграммы

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "\rho"] \arrow[dr, "\alpha"'] & & A' \arrow[dl, dashed, "\alpha'"] \\ & C & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} B \arrow[rr, "\sigma"] \arrow[dr, "\beta"'] & & B' \arrow[dl, dashed, "\beta'"] \\ & C & \end{tikzcd}$$

Поскольку ρ и σ — плотные эпиморфизмы, образы α' и β' также должны коммутировать:

$$\alpha'(a) \cdot \beta'(b) = \beta'(b) \cdot \alpha'(a), \qquad a \in A',\ b \in B'.$$

Поэтому мы можем снова воспользоваться леммой 3.3 (см. часть 1) и определить морфизм

$$\varphi'(a \circledast b) = \alpha'(a) \cdot \beta'(b), \qquad a \in A',\ b \in B'.$$

[1]В смысле определений на сс. 32 и 32 части 1.

Очевидно, он будет продолжением φ (единственно возможным, потому что ρ и σ — плотные эпиморфизмы).

T.2: Тождественное отображение $1_{\mathbb{C}} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ является непрерывным расширением (например, просто потому что это изоморфизм алгебр). С другой стороны, если $\rho : \mathbb{C} \to A'$ — какое-то другое непрерывное расширение, то, поскольку оно должно быть плотно, оно будет сюръективно. При этом, A' не может быть нулем, потому что иначе достраивалась бы диаграмма

$$\begin{tikzcd} \mathbb{C} \arrow[rr, "\rho"] \arrow[dr, "1_{\mathbb{C}}"'] & & 0 \arrow[dl, dashed] \\ & \mathbb{C} & \end{tikzcd},$$

что невозможно. Мы получаем, что $\rho : \mathbb{C} \to A'$ должен быть изоморфизмом алгебр, и поэтому имеет смысл диаграмма

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{C} \arrow[dl, "\rho"'] \arrow[dr, "1_{\mathbb{C}}"] & \\ A' \arrow[rr, "\rho^{-1}"] & & \mathbb{C} \end{tikzcd},$$

означающая, что расширение ρ вкладывается в расширение $1_{\mathbb{C}}$.

□

Следствие 5.3. *Непрерывную оболочку можно определить как идемпотентный ковариантный функтор из* `InvSteAlg` *в* `InvSteAlg`*: существуют*

1) *отображение $A \mapsto (\mathsf{Env}_{\mathcal{C}} A, \mathsf{env}_{\mathcal{C}} A)$, сопоставляющее каждой инволютивной стереотипной алгебре A инволютивную стереотипную алгебру $\mathsf{Env}_{\mathcal{C}} A$ и морфизм стереотипных алгебр $\mathsf{env}_{\mathcal{C}} A : A \to \mathsf{Env}_{\mathcal{C}} A$, являющийся непрерывной оболочкой алгебры A, и*
2) *отображение $\varphi \mapsto \mathsf{Env}_{\mathcal{C}}(\varphi)$, сопоставляющее каждому морфизму инволютивных стереотипных алгебр $\varphi : A \to B$ морфизм инволютивных стереотипных алгебр $\mathsf{Env}_{\mathcal{C}}(\varphi) : \mathsf{Env}_{\mathcal{C}} A \to \mathsf{Env}_{\mathcal{C}} B$, замыкающий диаграмму*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\mathsf{env}_{\mathcal{C}} A"] \arrow[d, "\varphi"] & \mathsf{Env}_{\mathcal{C}} A \arrow[d, dashed, "\mathsf{Env}_{\mathcal{C}}(\varphi)"] \\ B \arrow[r, "\mathsf{env}_{\mathcal{C}} B"] & \mathsf{Env}_{\mathcal{C}} B \end{tikzcd} \qquad (5.1.4)$$

причем выполняются тождества

$$\mathsf{Env}_{\mathcal{C}}(1_A) = 1_{\mathsf{Env}_{\mathcal{C}} A}, \quad \mathsf{Env}_{\mathcal{C}}(\beta \circ \alpha) = \mathsf{Env}_{\mathcal{C}}(\beta) \circ \mathsf{Env}_{\mathcal{C}}(\alpha), \qquad (5.1.5)$$

$$\mathsf{Env}_{\mathcal{C}}(\mathsf{Env}_{\mathcal{C}} A) = \mathsf{Env}_{\mathcal{C}} A, \quad \mathsf{env}_{\mathcal{C}} \mathsf{Env}_{\mathcal{C}} A = 1_{\mathsf{Env}_{\mathcal{C}} A}, \qquad (5.1.6)$$

$$\mathsf{Env}_{\mathcal{C}} \mathbb{C} = \mathbb{C} \qquad (5.1.7)$$

5.1.3. Сеть C^*-фактор-отображений. Конструкцию непрерывной оболочки можно описать несколько более наглядно следующим образом. Условимся окрестность нуля U в инволютивной стереотипной алгебре A называть *C^*-окрестностью нуля*, если она является прообразом единичного шара при некотором (непрерывном) гомоморфизме $D : A \to B$ в какую-нибудь C^* алгебру B:

$$U = \{x \in A : \ \|D(x)\| \leqslant 1\}$$

Это эквивалентно тому, что U является единичным шаром некоторой (непрерывной) C^*-полунормы p на A:

$$U = \{x \in A : \ p(x) \leqslant 1\}. \qquad (5.1.8)$$

У каждой C^*-окрестности нуля U в A ядро

$$\mathsf{Ker}\, U = \bigcap_{\lambda>0} \lambda \cdot U$$

совпадает с ядром гомоморфизма D и поэтому является замкнутым идеалом в A. Рассмотрим фактор-алгебру $A/\mathsf{Ker}\, U$ и наделим ее нормой, в которой класс $U + \mathsf{Ker}\, U$ является единичным шаром. Эту алгебру $A/\mathsf{Ker}\, U$ можно считать подалгеброй в B с индуцированной из этого пространства нормой, или, что то же самое, с нормой, порожденной полунормой p из (5.1.8). Ее пополнение мы будем обозначать A/U или A/p

$$A/U = A/p = (A/\mathsf{Ker}\, U)^{\blacktriangledown} \tag{5.1.9}$$

и называть *фактор-алгеброй алгебры A по C^*-окрестности нуля U* или *по C^*-полунорме p*. Понятно, что $A/U = A/p$ является C^*-алгеброй (и ее можно считать замкнутой подалгеброй в B). Соответствующее отображение

$$\pi_U = \pi_p : A \to A/U = A/p \tag{5.1.10}$$

мы будем называть *фактор-отображением* алгебры A по C^*-окрестности нуля U, или по C^*-полунорме p, или *C^*-фактор-отображением* алгебры A.

Лемма 5.4. *Для всякого гомоморфизма $\varphi : A \to B$ в C^*-алгебру B найдется C^*-окрестность нуля $U \subseteq A$ и гомоморфизм $\varphi_U : A/U \to B$, замыкающий диаграмму*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "\pi_U"'] & & B \\ & A/U \arrow[ur, dashed, "\varphi_U"'] & \end{tikzcd} \tag{5.1.11}$$

Лемма 5.5. *Если U и U' — две C^*-окрестности нуля в A, причем $U \supseteq U'$, то найдется единственный морфизм $\varkappa_U^{U'} : A/U \leftarrow A/U'$, замыкающий диаграмму*

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dl, "\pi_U"'] \arrow[dr, "\pi_{U'}"] & \\ A/U & & A/U' \arrow[ll, dashed, "\varkappa_U^{U'}"] \end{tikzcd} \tag{5.1.12}$$

Лемма 5.6. *Пересечение $U \cap U'$ любых двух C^*-окрестностей нуля U и U' в A является C^*-окрестностью нуля.*

Доказательство. Действительно, пусть $D : A \to B$ и $D' : A \to B'$ — гомоморфизмы, порождающие U и U'.

$$U = \{x \in A : \ \|D(x)\| \leqslant 1\}, \qquad U' = \{x \in A : \ \|D'(x)\| \leqslant 1\}.$$

Рассмотрим C^*-алгебру $B \oplus B'$ с нормой

$$\|b \oplus b'\| = \max\{\|b\|, \|b'\|\}, \qquad b \in B, \quad b' \in B'.$$

Отображение

$$D'' : A \to B \oplus B' \quad \Big| \quad D''(x) = D(x) \oplus D'(x), \quad x \in A,$$

будет гомоморфизмом, и для всякого $x \in A$ мы получим

$$x \in U \cap U' \iff \|D(x)\| \leqslant 1 \ \& \ \|D''(x)\| \leqslant 1 \iff \|D''(x)\| = \max\{\|D(x)\|, \|D''(x)\|\} \leqslant 1.$$

$\square$

Теорема 5.7. *Система $\pi_U : A \to A/U$ C^*-фактор-отображений образует сеть эпиморфизмов*[1] *в категории* `InvSteAlg` *инволютивных стереотипных алгебр, то есть обладает следующими свойствами:*

(a) *у всякой алгебры A есть хотя бы одна C^*-окрестность нуля U, и множество всех C^*-окрестностей нуля в A направлено относительно предпорядка*

$$U \leqslant U' \iff U \supseteq U',$$

(b) *для всякой алгебры A система морфизмов $\varkappa_U^{U'}$ из (5.1.12) ковариантна, то есть для любых трех окрестностей нуля $U \supseteq U' \supseteq U''$ коммутативна диаграмма*

$$\begin{tikzcd}
A/U & & A/U'' \arrow[ll, "\varkappa_U^{U''}"'] \arrow[dl, "\varkappa_{U'}^{U''}"] \\
& A/U \arrow[ul, "\varkappa_U^{U'}"] &
\end{tikzcd}$$

и эта система $\varkappa_U^{U'}$ обладает проективным пределом в `InvSteAlg`*;*

(c) *для всякого гомоморфизма $\alpha : A \leftarrow A'$ в* `InvSteAlg` *и любой C^*-окрестности нуля U в A найдется C^*-окрестность нуля U' в A' и гомоморфизм $\alpha_U^{U'} : A/U \leftarrow A'/U'$ такие, что коммутативна диаграмма*

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[d, "\pi_U"'] & A' \arrow[l, "\alpha"'] \arrow[d, dashed, "\pi_{U'}"] \\
A/U & A'/U' \arrow[l, dashed, "\alpha_U^{U'}"]
\end{tikzcd} \tag{5.1.13}$$

В соответствии с пунктом (b) этой теоремы, существует проективный предел $\varprojlim_{0 \leftarrow U'} A/U'$ системы $\varkappa_U^{U'}$. Как следствие, существует единственная стрелка $\pi : A \to \varprojlim_{0 \leftarrow U'} A/U'$ в `InvSteAlg`, замыкающая все диаграммы

$$\begin{tikzcd}
& A \arrow[dl, "\pi_U"'] \arrow[dr, dashed, "\pi_{U'}"] & \\
A/U & & \varprojlim\limits_{0 \leftarrow U'} A/U' \arrow[ll, "\varkappa_U"]
\end{tikzcd} \tag{5.1.14}$$

Образ $\pi(A)$ отображения π является (инволютивной подалгеброй и) подпространством в стереотипном пространстве $\varprojlim_{0 \leftarrow U'} A/U'$. Поэтому оно порождает некое непосредственное подпространство в $\varprojlim_{0 \leftarrow U'} A/U'$, или оболочку $\mathsf{Env}\,\pi(A)$ (см. [29]), то есть наибольшее стереотипное пространство содержащееся в $\varprojlim_{0 \leftarrow U'} A/U'$ и имеющее $\pi(A)$ плотным подпространством. Обозначим через $\rho : A \to \mathsf{Env}\,\pi(A)$ поднятие морфизма π в $\mathsf{Env}\,\pi(A)$.

Теорема 5.8. *Морфизм $\rho : A \to \mathsf{Env}\,\pi(A)$ является непрерывной оболочкой алгебры A:*

$$\mathsf{Env}\,\pi(A) = \mathsf{Env}_{\mathcal{E}}\,A.$$

Доказательство. Система C^*-фактор-отображений $\pi_U : A \to A/U$ порождает класс $\varPhi$ морфизмов в C^*-алгебры изнутри в силу леммы 5.4:

$$\mathcal{N} \subseteq \varPhi \subseteq \mathsf{Mor}(\mathtt{InvSteAlg}) \circ \mathcal{N}.$$

[1] См. определение на с. 30 части 1.

С другой стороны, по теореме 3.7 (см. часть 1), класс DEpi всех плотных эпиморфизмов, в которых ищется оболочка, мономорфно дополняем в категории `InvSteAlg`. Отсюда по теореме 1.18 (см. часть 1), оболочки алгебры A относительно классов $\varPhi$ и $\mathcal{N}$ совпадают между собой и представляют собой морфизм ρ. □

Замечание 5.1. Непрерывную оболочку $\rho : A \to \mathsf{Env}_{\mathcal{E}} A$ можно представляеть себе композицию элементов red_∞ и coim_∞ узлового разложения морфизма $\pi : A \to \varprojlim_{0 \leftarrow U'} A/U'$ в категории `Ste` стереотипных пространств (не алгебр!):

$$\mathsf{env}_{\mathcal{C}} A = \mathsf{red}_\infty \pi \circ \mathsf{coim}_\infty \pi. \tag{5.1.15}$$

Наглядно это изображается диаграммой

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\pi = \varprojlim_{0\leftarrow U'} \pi_{U'}"] \arrow[d, "\mathsf{coim}_\infty \pi"'] & \varprojlim_{0\leftarrow U'} A/U' & \\
\mathsf{Coim}_\infty \pi \arrow[r, "\mathsf{red}_\infty \pi"'] & \mathsf{Im}_\infty \pi \arrow[u, "\mathsf{im}_\infty \pi"'] \arrow[r, equal] & \mathsf{Env}_{\mathcal{C}} A
\end{tikzcd} \tag{5.1.16}$$

А алгебру $\mathsf{Env}_{\mathcal{C}} A$ можно представлять как оболочку (в смысле (2.3.2), см. часть 1) множества значений морфизма π в стереотипном пространстве $\lim_{0\leftarrow U'} A/U'$:

$$\mathsf{Env}_{\mathcal{C}} A = \mathsf{Env}\, \pi(A). \tag{5.1.17}$$

5.2. Непрерывные алгебры

Инволютивную стереотипную алгебру A мы называем *непрерывной алгеброй*, если она совпадает со своей непрерывной оболочкой, точнее, если ее непрерывная оболочка $\mathsf{env}_{\mathcal{C}} A : A \to \mathsf{Env}_{\mathcal{C}} A$ является изоморфизмом в категории `InvSteAlg` инволютивных стереотипных алгебр. Класс всех непрерывных алгебр мы обозначаем $\mathcal{C}$-`Alg`. Он образует полную подкатегорию в категории `InvSteAlg`.

5.2.1. Непрерывное тензорное произведение инволютивных стереотипных алгебр.

Пусть $\mathsf{Env}_{\mathcal{C}}$ — функтор непрерывной оболочки, определенный в следствии 5.3. Для любых двух инволютивных стереотипных алгебр A и B определим их *непрерывное тензорное произведение* равенством

$$A \overset{\mathcal{C}}{\circledast} B = \mathsf{Env}_{\mathcal{C}}(A \circledast B) \tag{5.2.1}$$

Каждой паре $\alpha : A \to A'$ и $\beta : B \to B'$ морфизмов алгебр можно поставить в соответствие морфизм

$$\alpha \overset{\mathcal{C}}{\circledast} \beta = \mathsf{Env}_{\mathcal{C}}(\alpha \circledast \beta) : A \overset{\mathcal{C}}{\circledast} B \to A' \overset{\mathcal{C}}{\circledast} B'. \tag{5.2.2}$$

Наконец, каждой паре элементов $a \in A$, $b \in B$ можно поставить в соответствие элементарный тензор

$$a \overset{\mathcal{C}}{\circledast} b = \mathsf{env}_{\mathcal{C}}(a \circledast b) \tag{5.2.3}$$

Лемма 5.9. *Элементарные тензоры $a \overset{\mathcal{C}}{\circledast} b$, $a \in A$, $b \in B$, полны в $A \overset{\mathcal{C}}{\circledast} B$.*

Доказательство. Тензоры $a \circledast b$ полны в $A \circledast B$, а образ $\mathsf{env}_{\mathcal{C}}$ плотен в $A \overset{\mathcal{C}}{\circledast} B$. □

Ниже нам понадобится следующая конструкция. Для любых двух полунорм $q \in \mathcal{P}(A)$ и $r \in \mathcal{P}(B)$ рассмотрим полунорму $q \otimes_{\max} r$ на $A \circledast B$, определенную как композиция отображений

$$\begin{tikzcd} A \circledast B \arrow[r, "\pi_q \circledast \pi_r"] \arrow[rrr, dashed, bend right, "q \otimes_{\max} r"'] & A_q \circledast B_r = A_q \widehat{\otimes} B_r \arrow[r, "\tau"] & A_q \underset{\max}{\otimes} B_r \arrow[r, "\|\cdot\|_{\max}"] & \mathbb{R}_+ \end{tikzcd} \qquad (5.2.4)$$

где $\pi_q : A \to A_q$ и $\pi_r : B \to B_r$ — C^*-фактор-отображения, определенные в (5.1.10), $\pi_q \circledast \pi_r$ — их проективное стереотипное тензорное произведение, τ — естественное отображение тензорных произведений, и $\|\cdot\|_{\max}$ — норма максимального тензорного произведения C^*-алгебр.

Лемма 5.10. *Всякая C^*-полунорма p на $A \circledast B$ подчинена некоторой C^*-полунорме $q \otimes_{\max} r$ на $A \circledast B$:*

$$p(x) \leqslant (q \otimes_{\max} r)(x), \qquad x \in A \circledast B \qquad (5.2.5)$$

Доказательство. Обозначим $C = (A \circledast B)/p$. Тогда p представляет собой композицию отображений

$$\begin{tikzcd} A \circledast B \arrow[r, "\pi_p"] \arrow[rr, dashed, bend right, "p"'] & (A \circledast B)/p = C \arrow[r, "\|\cdot\|_C"] & \mathbb{R}_+ \end{tikzcd}$$

где π_p — проекция из (5.1.10), а $\|\cdot\|_C$ — норма на C. Рассмотрим полунормы

$$q(a) = p(a \circledast 1_B), \qquad r(b) = p(1_A \circledast b), \qquad a \in A, \ b \in B.$$

Покажем, что гомоморфизм $\pi_p : A \circledast B \to C$ продолжается до некоторого гомоморфизма $\pi_{q,r} : A_q \otimes_{\max} B_r \to C$:

$$\begin{tikzcd} A \circledast B \arrow[r, "\pi_q \circledast \pi_r"] \arrow[dr, "\pi_p"'] & A_q \circledast B_r \arrow[r, "\tau"] \arrow[d, dashed, "\rho"] & A_q \otimes_{\max} B_r \arrow[dl, dashed, "\sigma"] \\ & C & \end{tikzcd} \qquad (5.2.6)$$

Для этого рассмотрим гомоморфизмы

$$\begin{array}{c|l} \alpha : A \to C & \alpha(a) = \pi_p(a \circledast 1_B), \qquad a \in A, \\ \beta : B \to C & \beta(b) = \pi_p(1_A \circledast b), \qquad b \in B. \end{array}$$

Из того, что полунормы q и r являются ограничениями полунормы p при отображениях $a \mapsto a \circledast 1_B$ и $b \mapsto 1_A \circledast b$, следует, что α и β продолжаются до гомоморфизмов $A_q \to C$ и $B_r \to C$:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "\pi_q"] \arrow[dr, "\alpha"'] & & A_q \arrow[dl, dashed, "\alpha_q"] \\ & C & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} B \arrow[rr, "\pi_r"] \arrow[dr, "\beta"'] & & B_r \arrow[dl, dashed, "\beta_r"] \\ & C & \end{tikzcd}$$

С другой стороны, по лемме 3.3 (см. часть 1), образы отображений α и β коммутируют,

$$\alpha(a) \cdot \beta(b) = \beta(b) \cdot \alpha(a), \qquad a \in A, \ b \in B,$$

а π_q и π_r — плотные эпимофризмы. Отсюда следует, что образы отображений α_q и β_r также коммутируют:

$$\alpha_q(a') \cdot \beta_r(b') = \beta_r(b') \cdot \alpha_q(a'), \qquad a' \in A_q, \ b' \in B_r.$$

Как следствие, опять по лемме 3.3 (см. часть 1), найдется гомоморфизм ρ, замыкающий левый внутренний треугольник в (5.2.6). Затем, поскольку A_q и B_r — C^*-алгебры, гомоморфизм ρ продолжается до гомоморфизма σ на $A_q \otimes_{\max} B_r$.

Наконец, после того, как построено отображение σ в (5.2.6), мы получаем, что полунорма $z \mapsto \|\sigma(z)\|_C$ должна быть подчинена полунорме $z \mapsto \|z\|_{\max}$ (потому что гомоморфизм C^*-алгебр не увеличивает норму, [15, теорема 2.1.7]):

$$\|\sigma(z)\|_C \leqslant \|z\|_{\max}, \qquad z \in A_q \otimes_{\max} B_r.$$

Отсюда уже следует (5.2.5):

$$p(x) = \|\pi_p(x)\|_C = \|\sigma(\tau((\pi_q \circledast \pi_r)(x)))\|_C \leqslant \|\tau((\pi_q \circledast \pi_r)(x))\|_{\max} = (q \otimes_{\max} r)(x), \qquad z \in A \circledast B.$$

$\square$

Теорема 5.11. *Для любых двух инволютивных стереотипных алгебр A и B существует единственное линейное непрерывное отображение $\eta_{A,B} : A \overset{\mathcal{C}}{\circledast} B \to A \odot B$, замыкающее диаграмму*

$$\begin{tikzcd} A \circledast B \arrow[rr, "@_{A,B}"] \arrow[dr, "\mathsf{env}_{\mathcal{C}}\, A\circledast B"'] & & A \odot B \\ & A \overset{\mathcal{C}}{\circledast} B \arrow[ur, "\eta_{A,B}"'] & \end{tikzcd} \tag{5.2.7}$$

а система отображений $\eta_{A,B} : A \overset{\mathcal{C}}{\circledast} B \to A \odot B$ является естественным преобразованием функтора $(A, B) \in \mathtt{InvAlg}^2 \mapsto A \overset{\mathcal{C}}{\circledast} B \in \mathcal{C}\text{-}\mathtt{Alg}$ в функтор $(A, B) \in \mathtt{InvAlg}^2 \mapsto A \odot B \in \mathtt{Ste}$.

Доказательство. 1. Сначала построим систему отображений $\eta_{A,B}$. Напомним [41, Corollary 31.15], что для C^*-алгебр A и B имеется естественная цепочка морфизмов

$$A \otimes_\pi B \longrightarrow A \underset{\max}{\otimes} B \longrightarrow A \underset{\min}{\otimes} B \longrightarrow A \otimes_\varepsilon B.$$

в которой $\underset{\max}{\otimes}$ и $\underset{\min}{\otimes}$ – максимальное и минимальное тензорное произведение C^*-алгебр, а $\otimes_\pi$ и $\otimes_\varepsilon$ — их проективное и инъективное произведения как банаховых пространств (первые три стрелки — непрерывные гомоморфизмы алгебр, а последняя непрерывное линейное отображение банаховых пространств). Добавляя стереотипные проективное и инъективное тензорные произведения, мы получим цепочку

$$A \circledast B = A \otimes_\pi B \longrightarrow A \underset{\max}{\otimes} B \longrightarrow A \underset{\min}{\otimes} B \longrightarrow A \otimes_\varepsilon B \longrightarrow A \odot B.$$

Обозначим символом $\theta_{A,B}$ композицию морфизмов в этой цепочке, связывающую $A \underset{\max}{\otimes} B$ и $A \odot B$:

$$\begin{tikzcd} A \circledast B = A \otimes_\pi B \arrow[r] & A \underset{\max}{\otimes} B \arrow[r] \arrow[rrr, dashed, bend right, "\theta_{A,B}"'] & A \underset{\min}{\otimes} B \arrow[r] & A \otimes_\varepsilon B \arrow[r] & A \odot B. \end{tikzcd}$$

Переходя к проективному пределу и применяя лемму 5.10, мы получаем равенство

$$\underset{p\in\mathcal{P}(A\circledast B)}{\varprojlim} (A \circledast B)/p = (\text{лемма } 5.10) = \underset{q\in\mathcal{P}(A),\ r\in\mathcal{P}(B)}{\varprojlim} A/q \underset{\max}{\otimes} B/r,$$

а из него — цепочку морфизмов

$$\begin{tikzcd} \underset{p\in\mathcal{P}(A\circledast B)}{\varprojlim} (A \circledast B)/p = \underset{\substack{q\in\mathcal{P}(A),\\ r\in\mathcal{P}(B)}}{\varprojlim} A/q \underset{\max}{\otimes} B/r \arrow[r, bend left, "\varprojlim \theta_{A/q,B/r}"] & \underset{\substack{q\in\mathcal{P}(A),\\ r\in\mathcal{P}(B)}}{\varprojlim} A/q \odot B/r = \end{tikzcd}$$

$$= \underset{q\in\mathcal{P}(A)}{\varprojlim} A/q \odot \underset{r\in\mathcal{P}(B)}{\varprojlim} B/r = A \odot B$$

Это в свою очередь дает последовательность морфизмов

$$\begin{tikzcd}
A \overset{\mathcal{C}}{\circledast} B = \mathsf{Env}_{\mathcal{C}}(A \circledast B) \arrow[r, bend left, "\underset{p\in\mathcal{P}(A\circledast B)}{\varprojlim}\ \rho_p"] & \underset{p\in\mathcal{P}(A\circledast B)}{\varprojlim} (A \circledast B)/p = \underset{q\in\mathcal{P}(A),\ r\in\mathcal{P}(B)}{\varprojlim} A/q \underset{\max}{\otimes} B/r \arrow[r, "\varprojlim \theta_{A/q,B/r}"] & A \odot B
\end{tikzcd}$$

которые в композиции как раз представляют собой $\eta_{A,B}$.

2. Теперь покажем, что отображения $\eta_{A,B}$ представляют собой морфизм функторов. Пусть $\alpha : A \to A'$ и $\beta : B \to B'$ — морфизмы алгебр. Рассмотрим диаграмму

$$\begin{tikzcd}
A \circledast B \arrow[rr, "@_{A,B}"] \arrow[dr, "\mathsf{env}_{\mathcal{C}}\, A\circledast B"'] \arrow[dd, "\alpha\circledast\beta"'] & & A \odot B \arrow[dd, "\alpha\odot\beta"] \\
& A \overset{\mathcal{C}}{\circledast} B \arrow[ur, "\eta_{A,B}"'] \arrow[dd, "\alpha \overset{\mathcal{C}}{\circledast} \beta"' near start] & \\
A' \circledast B' \arrow[rr, crossing over, "@_{A',B'}" near end] \arrow[dr, "\mathsf{env}_{\mathcal{C}}\, A'\circledast B'"'] & & A' \odot B' \\
& A' \overset{\mathcal{C}}{\circledast} B' \arrow[ur, "\eta_{A',B'}"'] &
\end{tikzcd} \tag{5.2.8}$$

В ней верхнее и нижнее основания коммутативны, потому что это диаграммы (5.2.7), дальняя боковая грань коммутативна, потому что это диаграмма (2.4.28) (см. часть 1, с. 51), выражающая естественность преобразования Гротендика @, а левая ближняя боковая грань коммутативна, потому что это диаграмма функториальности оболочки (1.3.15) (см. часть 1). С другой стороны, из леммы 5.9 следует, что отображение $\mathsf{env}_{\mathcal{C}}\, A \circledast B$ является эпиморфизмом стереотипных пространств. Вместе все это означает, что оставшаяся правая боковая грань в диаграмме (5.2.8) также коммутативна, что и нужно было доказать. $\square$

Замечание 5.2. Из диаграммы (5.2.7) следует, что при отображении $\eta_{A,B}$ элементарные тензоры $a \overset{\mathcal{C}}{\circledast} b$ переходят в элементарные тензоры $a \odot b$:

$$\eta_{A,B}(a \overset{\mathcal{C}}{\circledast} b) = a \odot b. \tag{5.2.9}$$

Из теорем 5.2 и 1.20 (см. часть 1) следует

Теорема 5.12. *Формула* (5.2.1) *определяет в* $\mathcal{C}$-`Alg` *тензорное произведение, превращающее* $\mathcal{C}$-`Alg` *в моноидальную категорию, а функтор непрерывной оболочки* $\mathsf{Env}_{\mathcal{C}}$ *является моноидальным функтором из моноидальной категории* (`InvSteAlg`, $\circledast$) *инволютивных стереотипных алгебр в моноидальную категорию* ($\mathcal{C}$-`Alg`, $\overset{\mathcal{C}}{\circledast}$) *непрерывных алгебр. Соответствующий морфизм бифункторов*

$$\Big((A,B) \mapsto \mathsf{Env}_{\mathcal{C}}(A) \overset{\mathcal{C}}{\circledast} \mathsf{Env}_{\mathcal{C}}(B)\Big) \overset{E^{\circledast}}{\rightarrowtail} \Big((A,B) \mapsto \mathsf{Env}_{\mathcal{C}}(A \circledast B)\Big)$$

определяется формулой

$$E^{\circledast}_{A,B} = \mathsf{Env}_{\mathcal{C}}(\mathsf{env}_{\mathcal{C}}\, A \circledast \mathsf{env}_{\mathcal{C}}\, B)^{-1} : \mathsf{Env}_{\mathcal{C}}(A) \overset{\mathcal{C}}{\circledast} \mathsf{Env}_{\mathcal{C}}(B) = \mathsf{Env}_{\mathcal{C}}(\mathsf{Env}_{\mathcal{C}}(A) \circledast \mathsf{Env}_{\mathcal{C}}(B)) \to \mathsf{Env}_{\mathcal{C}}(A \circledast B),$$

а морфизмом $E^{\mathbb{C}}$ *в* $\mathcal{C}$-`Alg`, *переводящий единичный объект* $\mathbb{C}$ *категории* $\mathcal{C}$-`Alg` *в образ* $\mathsf{Env}_{\mathcal{C}}(\mathbb{C})$ *единичного объекта* $\mathbb{C}$ *категории* `InvSteAlg`, *будет локальная единица:*

$$E^{\mathbb{C}} = 1_{\mathbb{C}} : \mathbb{C} \to \mathbb{C} = \mathsf{Env}_{\mathcal{C}}(\mathbb{C}).$$

5.2.2. Действие непрерывной оболочки на биалгебры.

Теорема 5.13. *Если A — коалгебра в моноидальной категории $(\mathcal{C}\text{-}\mathtt{Alg}, \overset{\mathcal{C}}{\circledast})$ непрерывных алгебр со структурными морфизмами*

$$\varkappa : A \to A \overset{\mathcal{C}}{\circledast} A, \qquad \varepsilon : A \to \mathbb{C},$$

то A является коалгеброй в моноидальной категории $(\mathtt{Ste}, \odot)$ стереотипных пространств со структурными морфизмами

$$\lambda = \eta_{A,A} \circ \varkappa : A \to A \odot A, \qquad \varepsilon : A \to \mathbb{C}.$$

При этом всякий морфизм $\varphi : A \to B$ коалгебр в моноидальной категории $(\mathcal{C}\text{-}\mathtt{Alg}, \overset{\mathcal{C}}{\circledast})$, будет морфизмом A в B как коалгебр в моноидальной категории $(\mathtt{Ste}, \odot)$.

Доказательство. 1. Рассмотрим диаграмму ассоциативности для $\varkappa$

$$\begin{tikzcd}
 & & A \arrow[dll, "\varkappa"'] \arrow[drr, "\varkappa"] & & \\
A \overset{\mathcal{C}}{\circledast} A \arrow[dr, "\varkappa \overset{\mathcal{C}}{\circledast} 1_A"'] & & & & A \overset{\mathcal{C}}{\circledast} A \arrow[dl, "1_A \overset{\mathcal{C}}{\circledast} \varkappa"] \\
 & (A \overset{\mathcal{C}}{\circledast} A) \overset{\mathcal{C}}{\circledast} A \arrow[rr, "\alpha_{A,A,A}"'] & & A \overset{\mathcal{C}}{\circledast} (A \overset{\mathcal{C}}{\circledast} A) &
\end{tikzcd}$$

и дополним ее до диаграммы

$$\begin{tikzcd}
 & & & A \arrow[dlll, "\varkappa"'] \arrow[drrr, "\varkappa"] \arrow[dddd, "1_A"'] & & & \\
A \overset{\mathcal{C}}{\circledast} A \arrow[dr, "\varkappa \overset{\mathcal{C}}{\circledast} 1_A"'] \arrow[dddd, "\eta_{A,A}"'] & & & & & & A \overset{\mathcal{C}}{\circledast} A \arrow[dl, "1_A \overset{\mathcal{C}}{\circledast} \varkappa"] \arrow[dddd, "\eta_{A,A}"] \\
 & & (A \overset{\mathcal{C}}{\circledast} A) \overset{\mathcal{C}}{\circledast} A \arrow[rr, "\alpha^{\mathcal{C}}_{A,A,A}"'] \arrow[d, "\eta_{A \overset{\mathcal{C}}{\circledast} A, A}"] & & A \overset{\mathcal{C}}{\circledast} (A \overset{\mathcal{C}}{\circledast} A) \arrow[d, "\eta_{A, A \overset{\mathcal{C}}{\circledast} A}"'] & & \\
 & & (A \overset{\mathcal{C}}{\circledast} A) \odot A \arrow[ddd, "\eta_{A,A} \odot 1_A"] & & A \odot (A \overset{\mathcal{C}}{\circledast} A) \arrow[ddd, "1_A \odot \eta_{A,A}"'] & & \\
 & & & A \arrow[dlll, "\lambda"'] \arrow[drrr, "\lambda"] & & & \\
A \odot A \arrow[dr, "\lambda \odot 1_A"'] & & & & & & A \odot A \arrow[dl, "1_A \odot \lambda"] \\
 & & (A \odot A) \odot A \arrow[rr, "\alpha^{\odot}_{A,A,A}"'] & & A \odot (A \odot A) & &
\end{tikzcd}$$

В ней верхнее основание коммутативно, и нужно доказать коммутативность нижнего. Для этого нужно просто проверить коммутативность боковых граней. Две дальние боковые грани коммутативны просто потому что представляют собой определение морфизма λ. Коммутативность левой ближней боковой грани

$$\begin{tikzcd}
A \overset{\mathcal{C}}{\circledast} A \arrow[r, "\varkappa \overset{\mathcal{C}}{\circledast} 1_A"] \arrow[dd, "\eta_{A,A}"'] & (A \overset{\mathcal{C}}{\circledast} A) \overset{\mathcal{C}}{\circledast} A \arrow[d, "\eta_{A \overset{\mathcal{C}}{\circledast} A, A}"] \\
& (A \overset{\mathcal{C}}{\circledast} A) \odot A \arrow[d, "\eta_{A,A} \odot 1_A"] \\
A \odot A \arrow[r, "\lambda \odot 1_A"'] & (A \odot A) \odot A
\end{tikzcd} \tag{5.2.10}$$

достаточно проверить на элементарных тензорах. Зафиксируем $a, b \in A$, и представим $\varkappa(a)$ как предел направленности сумм элементарных тензоров (здесь в первый раз используется лемма 5.9):

$$\sum_{i \in I_s} x_i^s \overset{\mathcal{C}}{\circledast} y_i^s \underset{s \to \infty}{\longrightarrow} \varkappa(a)$$

Тогда двигаясь по диаграмме (5.2.10) элементарный тензор $a \overset{\mathcal{C}}{\circledast} b$ даст следующие элементы:

$$\begin{tikzcd}
a \overset{\mathcal{C}}{\circledast} b \arrow[rrr, mapsto, "\varkappa \overset{\mathcal{C}}{\circledast} 1_A"] \arrow[dd, mapsto, "\eta_{A,A}"'] & & & \varkappa(a) \overset{\mathcal{C}}{\circledast} b \arrow[r, equal] & \lim\limits_{s \to \infty} \Big(\sum\limits_{i \in I_s} x_i^s \overset{\mathcal{C}}{\circledast} y_i^s \Big) \overset{\mathcal{C}}{\circledast} b \arrow[d, mapsto, "\eta_{A \overset{\mathcal{C}}{\circledast} A, A}"] \\
& & & & \lim\limits_{s \to \infty} \Big(\sum\limits_{i \in I_s} x_i^s \overset{\mathcal{C}}{\circledast} y_i^s \Big) \odot b \arrow[d, mapsto, "\eta_{A,A} \odot 1_A"] \\
a \odot b \arrow[r, mapsto, "\lambda \odot 1_A"] & \eta_{A,A}(\varkappa(a)) \odot b \arrow[r, equal] & \eta_{A,A} \left(\lim\limits_{s \to \infty} \Big(\sum\limits_{i \in I_s} x_i^s \overset{\mathcal{C}}{\circledast} y_i^s \Big) \right) \odot b \arrow[rr, equal] & & \lim\limits_{s \to \infty} \Big(\sum\limits_{i \in I_s} x_i^s \odot y_i^s \Big) \odot b
\end{tikzcd}$$

Поскольку тензоры $a \overset{\mathcal{C}}{\circledast} b$ полны в $A \overset{\mathcal{C}}{\circledast} A$ (здесь второй раз используется лемма 5.9), это доказывает коммутативность (5.2.10).

Тем же приемом доказывается коммутативность правой ближней боковой грани

$$\begin{tikzcd}
A \overset{\mathcal{C}}{\circledast} (A \overset{\mathcal{C}}{\circledast} A) \arrow[d, "\eta_{A, A \overset{\mathcal{C}}{\circledast} A}"'] & A \overset{\mathcal{C}}{\circledast} A \arrow[l, "\varkappa \overset{\mathcal{C}}{\circledast} 1_A"'] \arrow[dd, "\eta_{A,A}"] \\
A \odot (A \overset{\mathcal{C}}{\circledast} A) \arrow[d, "1_A \odot \eta_{A,A}"'] & \\
A \odot (A \odot A) & A \odot A \arrow[l, "\lambda \odot 1_A"']
\end{tikzcd}$$

Для центральной ближней боковой грани

$$\begin{tikzcd}
(A \overset{\mathcal{C}}{\circledast} A) \overset{\mathcal{C}}{\circledast} A \arrow[r, "\alpha^{\mathcal{C}}_{A,A,A}"] \arrow[d, "\eta_{A \overset{\mathcal{C}}{\circledast} A, A}"'] & A \overset{\mathcal{C}}{\circledast} (A \overset{\mathcal{C}}{\circledast} A) \arrow[d, "\eta_{A, A \overset{\mathcal{C}}{\circledast} A}"'] \\
(A \overset{\mathcal{C}}{\circledast} A) \odot A \arrow[d, "\eta_{A,A} \odot 1_A"'] & A \odot (A \overset{\mathcal{C}}{\circledast} A) \arrow[d, "1_A \odot \eta_{A,A}"'] \\
(A \odot A) \odot A \arrow[r, "\alpha^{\odot}_{A,A,A}"] & A \odot (A \odot A)
\end{tikzcd}$$

нужно рассмотреть тройку элементов $a, b, c \in A$. Двигаясь по ней они дадут очевидную картину:

$$\begin{tikzcd}
(a \overset{\mathcal{C}}{\circledast} b) \overset{\mathcal{C}}{\circledast} c \arrow[r, mapsto, "\alpha^{\mathcal{C}}_{A,A,A}"] \arrow[d, mapsto, "\eta_{A \overset{\mathcal{C}}{\circledast} A, A}"'] & a \overset{\mathcal{C}}{\circledast} (b \overset{\mathcal{C}}{\circledast} c) \arrow[d, mapsto, "\eta_{A, A \overset{\mathcal{C}}{\circledast} A}"'] \\
(a \overset{\mathcal{C}}{\circledast} b) \odot c \arrow[d, mapsto, "\eta_{A,A} \odot 1_A"'] & a \odot (b \overset{\mathcal{C}}{\circledast} c) \arrow[d, mapsto, "1_A \odot \eta_{A,A}"'] \\
(a \odot b) \odot c \arrow[r, mapsto, "\alpha^{\odot}_{A,A,A}"] & a \odot (b \odot c)
\end{tikzcd}$$

Точно так же проверяются диаграммы для коединицы.

2. Пусть $\varphi : A \to B$ — морфизм коалгебр в моноидальной категории $(\mathcal{C}\text{-}\mathtt{Alg}, \overset{\mathcal{C}}{\circledast})$, то есть морфизм A в B как стереотипных пространств, замыкающий диаграммы

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\varkappa_A"'] & B \arrow[d, "\varkappa_B"] \\
A \overset{\mathcal{C}}{\circledast} A \arrow[r, "\varphi \overset{\mathcal{C}}{\circledast} \varphi"] & B \overset{\mathcal{C}}{\circledast} B
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "\varepsilon_A"'] & & B \arrow[dl, "\varepsilon_B"] \\
& \mathbb{C} &
\end{tikzcd}
\tag{5.2.11}$$

где $\varkappa_A$, $\varkappa_B$, ε_A, ε_B – структурные морфизмы. Тогда левую из этих диаграмм можно будет дополнить до диаграммы

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\varkappa_A"'] & B \arrow[d, "\varkappa_B"] \\
A \overset{\mathcal{C}}{\circledast} A \arrow[r, "\varphi \overset{\mathcal{C}}{\circledast} \varphi"] \arrow[d, "\eta_{A,A}"'] & B \overset{\mathcal{C}}{\circledast} B \arrow[d, "\eta_{B,B}"'] \\
A \odot A \arrow[r, "\varphi \odot \varphi"'] & B \odot B,
\end{tikzcd}$$

которая будет коммутативна, потому что по теореме 5.11 морфизмы η представляют собой естественное преобразование функторов. Вместе с правой диаграммой в (5.2.11) это будет означать, что $\varphi : A \to B$ — морфизм коалгебр в $(\mathtt{Ste}, \odot)$. $\square$

Теорема 5.14. *Пусть H — биалгебра в категории $(\mathtt{Ste}, \circledast)$ стереотипных пространств, или, что эквивалентно, коалгебра в категории $\mathtt{Ste}^{\circledast}$ стереотипных алгебр с коумножением $\varkappa$ и коединицей ε. Тогда*

(i) *непрерывная оболочка $\mathsf{Env}_{\mathcal{C}} H$ является коалгеброй в моноидальной категории $(\mathcal{C}\text{-}\mathtt{Alg}, \overset{\mathcal{C}}{\circledast})$ непрерывных алгебр с коумножением и коединицей*

$$\varkappa_E = \mathsf{Env}_{\mathcal{C}}(\mathsf{env}_{\mathcal{C}} H \circledast \mathsf{env}_{\mathcal{C}} H) \circ \mathsf{Env}_{\mathcal{C}}(\varkappa), \qquad \varepsilon_E = \mathsf{Env}_{\mathcal{C}}(\varepsilon), \tag{5.2.12}$$

(ii) *непрерывная оболочка* $\mathsf{Env}_{\mathcal{C}} H$ *является коалгеброй в моноидальной категории* $(\mathtt{Ste}, \odot)$ *стереотипных пространств с коумножением и коединицей*

$$\varkappa_\odot = \eta_{\mathsf{Env}_{\mathcal{C}} H, \mathsf{Env}_{\mathcal{C}} H} \circ \mathsf{Env}_{\mathcal{C}}(\mathsf{env}_{\mathcal{C}} H \circledast \mathsf{env}_{\mathcal{C}} H) \circ \mathsf{Env}_{\mathcal{C}}(\varkappa) = \eta_{\mathsf{Env}_{\mathcal{C}} H, \mathsf{Env}_{\mathcal{C}} H} \circ \varkappa_E, \qquad \varepsilon_\odot = \mathsf{Env}_{\mathcal{C}}(\varepsilon), \tag{5.2.13}$$

(iii) *морфизм* $\mathsf{env}_{\mathcal{C}} H^\star : H^\star \leftarrow (\mathsf{Env}_{\mathcal{C}} H)^\star$, *сопряженный к морфизму оболочки* $\mathsf{env}_{\mathcal{C}} H : H \to \mathsf{Env}_{\mathcal{C}} H$, *является морфизмом стереотипных алгебр, если* $(\mathsf{Env}_{\mathcal{C}} H)^\star$ *рассматривается как алгебра с умножением и единицей, сопряженными к* (5.2.13), *а* $H^\star$ *— как алгебра с умножением и единицей*

$$\varkappa^\star \circ @_{H^\star, H^\star}, \qquad \varepsilon^\star.$$

Доказательство. Инволютивная биалгебра в категории $(\mathtt{Ste}, \circledast)$ — то же самое, что коалгебра в категории $(\mathtt{InvSteAlg}, \circledast)$ инволютивных стереотипных алгебр. Поэтому по теореме 5.12 $\mathsf{Env}_{\mathcal{C}} H$ — коалгебра в категории $(\mathcal{C}\text{-}\mathtt{Alg}, \overset{\mathcal{C}}{\circledast})$ с коумножением и коединицей (5.2.12). После этого применяется теорема 5.13, и мы получаем, что H — коалгебра в категории $(\mathtt{Ste}, \odot)$ с коумножением и коединицей (5.2.13). Остается проверить (iii). Для этого нужно заметить, что коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{Env}_{\mathcal{C}} H \arrow[dr, "\mathsf{Env}_{\mathcal{C}}(\varkappa)"] \arrow[ddrr, bend left, "\varkappa_E"] \arrow[dddddr, bend right, "\varkappa_\odot"'] & & \\
H \arrow[u, "\mathsf{env}_{\mathcal{C}} H"] \arrow[d, "\varkappa"] & \mathsf{Env}_{\mathcal{C}}(H \circledast H) \arrow[dr, "\mathsf{Env}_{\mathcal{C}}(\mathsf{env}_{\mathcal{C}} H \circledast \mathsf{env}_{\mathcal{C}} H)"] & \\
H \circledast H \arrow[ur, "\mathsf{env}_{\mathcal{C}} H \circledast H"] \arrow[dr, "\mathsf{env}_{\mathcal{C}} H \circledast \mathsf{env}_{\mathcal{C}} H"] \arrow[dd, "@_{H,H}"'] & & \mathsf{Env}_{\mathcal{C}}(\mathsf{Env}_{\mathcal{C}} H \circledast \mathsf{Env}_{\mathcal{C}} H) \arrow[dd, equal] \\
& \mathsf{Env}_{\mathcal{C}} H \circledast \mathsf{Env}_{\mathcal{C}} H \arrow[ur, "\mathsf{env}_{\mathcal{C}} \mathsf{Env}_{\mathcal{C}} H \circledast \mathsf{Env}_{\mathcal{C}} H"'] \arrow[dd, "@_{\mathsf{Env}_{\mathcal{C}} H, \mathsf{Env}_{\mathcal{C}} H}"] & \\
H \odot H \arrow[dr, "\mathsf{env}_{\mathcal{C}} H \odot \mathsf{env}_{\mathcal{C}} H"] & & \mathsf{Env}_{\mathcal{C}} H \overset{\mathcal{C}}{\circledast} \mathsf{Env}_{\mathcal{C}} H \arrow[dl, "\eta_{\mathsf{Env}_{\mathcal{C}} H, \mathsf{Env}_{\mathcal{C}} H}"] \\
& \mathsf{Env}_{\mathcal{C}} H \odot \mathsf{Env}_{\mathcal{C}} H &
\end{tikzcd}$$

Переходя к сопряженным пространствам, мы получим диаграмму

$$\begin{tikzcd}
(\mathsf{Env}_{\mathcal{C}} H)^\star \arrow[d, "\mathsf{env}_{\mathcal{C}} H^\star"] & & \\
H^\star & \mathsf{Env}_{\mathcal{C}}(H \circledast H)^\star \arrow[ul, "\mathsf{Env}_{\mathcal{C}}(\varkappa)^\star"'] \arrow[dl, "\mathsf{env}_{\mathcal{C}} H \circledast H^\star"] & \\
H^\star \odot H^\star \arrow[u, "\varkappa^\star"] & & \mathsf{Env}_{\mathcal{C}}(\mathsf{Env}_{\mathcal{C}} H \circledast \mathsf{Env}_{\mathcal{C}} H)^\star \arrow[ul, "\mathsf{Env}_{\mathcal{C}}(\mathsf{env}_{\mathcal{C}} H \circledast \mathsf{env}_{\mathcal{C}} H)^\star"] \arrow[dl, "\mathsf{env}_{\mathcal{C}} \mathsf{Env}_{\mathcal{C}} H \circledast \mathsf{Env}_{\mathcal{C}} H^\star"] \arrow[dd, equal] \arrow[uull, bend right, "\varkappa_E^\star"'] \\
& (\mathsf{Env}_{\mathcal{C}} H)^\star \odot (\mathsf{Env}_{\mathcal{C}} H)^\star \arrow[ul, "\mathsf{env}_{\mathcal{C}} H^\star \odot \mathsf{env}_{\mathcal{C}} H^\star"] & \\
H^\star \circledast H^\star \arrow[uu, "@_{H^\star, H^\star}"] & & (\mathsf{Env}_{\mathcal{C}} H \overset{\mathcal{C}}{\circledast} \mathsf{Env}_{\mathcal{C}} H)^\star \\
& (\mathsf{Env}_{\mathcal{C}} H)^\star \circledast (\mathsf{Env}_{\mathcal{C}} H)^\star \arrow[ul, "\mathsf{env}_{\mathcal{C}} H^\star \circledast \mathsf{env}_{\mathcal{C}} H^\star"] \arrow[ur, "\eta^\star_{\mathsf{Env}_{\mathcal{C}} H, \mathsf{Env}_{\mathcal{C}} H}"'] \arrow[uu, "@_{(\mathsf{Env}_{\mathcal{C}} H)^\star, (\mathsf{Env}_{\mathcal{C}} H)^\star}"'] \arrow[uuuuul, bend left, "\varkappa_\odot^\star"] &
\end{tikzcd}$$

От нее нужно оставить левый нижний фрагмент, который и представляет собой диаграмму согласованности операций умножения:

$$\begin{tikzcd}
H^\star & & (\mathsf{Env}_{\mathcal{C}}\, H)^\star \arrow[ll, "\mathsf{env}_{\mathcal{C}}\, H^\star"'] \\
H^\star \odot H^\star \arrow[u, "\varkappa^\star"] & & \\
H^\star \circledast H^\star \arrow[u, "@_{H^\star, H^\star}"] & & (\mathsf{Env}_{\mathcal{C}}\, H)^\star \circledast (\mathsf{Env}_{\mathcal{C}}\, H)^\star \arrow[ll, "\mathsf{env}_{\mathcal{C}}\, H^\star \circledast \mathsf{env}_{\mathcal{C}}\, H^\star"'] \arrow[uu, "\varkappa^\star_\odot"']
\end{tikzcd}$$

□

Теорема 5.15. *Пусть H — инволютивная алгебра Хопфа в категории $(\mathtt{Ste}, \circledast)$ стереотипных пространств. Тогда*

(i) *непрерывная оболочка $\mathsf{Env}_{\mathcal{C}}\, H$, как коалгебра в моноидальных категориях $(\mathcal{C}\text{-}\mathtt{Alg}, \overset{\mathcal{C}}{\circledast})$ и $(\mathtt{Ste}, \odot)$, обладает согласованными между собой антиподом $\mathsf{Env}_{\mathcal{C}}(\sigma)$ и инволюцией $\mathsf{Env}_{\mathcal{C}}(\bullet)$, однозначно определяемыми диаграммами в категории* $\mathtt{Ste}$

$$\begin{tikzcd}
H \arrow[r, "\mathsf{env}_{\mathcal{C}}\, H"] \arrow[d, "\sigma"'] & \mathsf{Env}_{\mathcal{C}}\, H \arrow[d, dashed, "\mathsf{Env}_{\mathcal{C}}(\sigma)"] \\
H \arrow[r, "\mathsf{env}_{\mathcal{C}}\, H"] & \mathsf{Env}_{\mathcal{C}}\, H
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
H \arrow[r, "\mathsf{env}_{\mathcal{C}}\, H"] \arrow[d, "\bullet"'] & \mathsf{Env}_{\mathcal{C}}\, H \arrow[d, dashed, "\mathsf{Env}_{\mathcal{C}}(\bullet)"] \\
H \arrow[r, "\mathsf{env}_{\mathcal{C}}\, H"] & \mathsf{Env}_{\mathcal{C}}\, H
\end{tikzcd}
\tag{5.2.14}$$

(ii) *морфизм $\mathsf{env}_{\mathcal{C}}\, H^\star : H^\star \leftarrow (\mathsf{Env}_{\mathcal{C}}\, H)^\star$, сопряженный к морфизму оболочки $\mathsf{env}_{\mathcal{C}}\, H : H \to \mathsf{Env}_{\mathcal{C}}\, H$, является инволютивным гомоморфизмом стереотипных алгебр над $\circledast$, если $H^\star$ и $(\mathsf{Env}_{\mathcal{C}}\, H)^\star$ наделяются структурой сопряженных инволютивных алгебр к инволютивным коалгебрам с антиподом H и $\mathsf{Env}_{\mathcal{C}}\, H$ по свойству 4° на с. 67 (см. часть 1).*

Доказательство. 1. Обозначим через H^{op} алгебру H с противоположным умножением:

$$\mu^{\mathsf{op}} = \mu \circ \mathsf{br}\,.$$

Пусть $\mathsf{op}_H : H \to H^{\mathsf{op}}$ обозначает тождественное отображение H на себя (но так, чтобы область значений считалась алгеброй с противоположным умножением). Это будет антигомоморфизм алгебр. Непрерывные оболочки алгебр H и H^{op} также связаны естественным антигомоморфизмом, который мы условимся обозначать $\mathsf{Env}_{\mathcal{C}}(\mathsf{op})$:

$$\begin{tikzcd}
H \arrow[r, "\mathsf{env}_{\mathcal{C}}\, H"] \arrow[d, "\mathsf{op}_H"'] & \mathsf{Env}_{\mathcal{C}}\, H \arrow[d, dashed, "\mathsf{Env}_{\mathcal{C}}(\mathsf{op}_H)"] \\
H^{\mathsf{op}} \arrow[r, "\mathsf{env}_{\mathcal{C}}\, H"] & \mathsf{Env}_{\mathcal{C}}(H^{\mathsf{op}})
\end{tikzcd}
\tag{5.2.15}$$

Это можно доказать, заметив, что при факторизации по любой C^*-полунорме p коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd}
H \arrow[r, "\pi_p"] \arrow[d, "\mathsf{op}_H"'] & H/p \arrow[d, dashed, "\mathsf{op}_{H/p}"] \\
H^{\mathsf{op}} \arrow[r, "\pi_p"] & (H/p)^{\mathsf{op}}
\end{tikzcd}$$

Отсюда следует, что существует естественный антигомоморфизм между проективными пределами:

$$\begin{tikzcd}
H \arrow[r, "\varprojlim_p \pi_p"] \arrow[d, "\mathsf{op}_H"'] & \varprojlim_p H/p \arrow[d, dashed] \\
H^{\mathsf{op}} \arrow[r, "\varprojlim_p \pi_p"] & \varprojlim_p (H/p)^{\mathsf{op}}
\end{tikzcd}$$

А затем переходя к непосредственным подпространствам, порожденным образами H и H^{op}, мы получаем искомую пунктирную стрелку в (5.2.15).

После того, как $\mathsf{Env}_{\mathcal{C}}(\mathsf{op}_H)$ определено для любой стереотипной алгебры H, отображение $\mathsf{Env}_{\mathcal{C}}(\sigma)$ можно задать формулой

$$\mathsf{Env}_{\mathcal{C}}(\sigma) = \mathsf{Env}_{\mathcal{C}}(\mathsf{op}_{H^{\mathsf{op}}}) \circ \mathsf{Env}_{\mathcal{C}}(\mathsf{op}_H \circ \sigma)$$

или, нагляднее, диаграммой

$$\begin{tikzcd}
H \arrow[rr, "\mathsf{env}_{\mathcal{C}} H"] \arrow[d, "\sigma"] \arrow[ddd, bend right=60, "\sigma"'] & & \mathsf{Env}_{\mathcal{C}} H \arrow[dd, "\mathsf{Env}_{\mathcal{C}}(\mathsf{op}_H \circ\sigma)"'] \arrow[ddd, dashed, bend left=60, "\mathsf{Env}_{\mathcal{C}}(\sigma)"] \\
H \arrow[d, "\mathsf{op}_H"] & & \\
H^{\mathsf{op}} \arrow[rr, "\mathsf{env}_{\mathcal{C}} H^{\mathsf{op}}"] \arrow[d, "\mathsf{op}_{H^{\mathsf{op}}}"] & & \mathsf{Env}_{\mathcal{C}}(H^{\mathsf{op}}) \arrow[d, "\mathsf{Env}_{\mathcal{C}}(\mathsf{op}_{H^{\mathsf{op}}})"'] \\
H \arrow[rr, "\mathsf{env}_{\mathcal{C}} H"] & & \mathsf{Env}_{\mathcal{C}} H
\end{tikzcd}$$

2. Существование $\mathsf{Env}_{\mathcal{C}}(\bullet)$ доказывается тем же приемом, что и существование $\mathsf{Env}_{\mathcal{C}}(\mathsf{op}_H)$. Сначала для произвольной C^*-полунормы p отмечается диаграмма

$$\begin{tikzcd}
H \arrow[r, "\pi_p"] \arrow[d, "\bullet"'] & H/p \arrow[d, dashed, "\bullet"] \\
H \arrow[r, "\pi_p"] & H/p
\end{tikzcd}$$

А затем переходом к проективному пределу и непосредственному подпространству, порожденному образом H, получаем правую диаграмму в (5.2.14).

3. В свойстве (ii) нужно только проверить, что $\mathsf{env}_{\mathcal{C}} H^\star$ сохраняет инволюцию. Для $a \in H$ и $f \in (\mathsf{Env}_{\mathcal{C}} H)^\star$ мы получаем:

$$\begin{aligned}
\mathsf{env}_{\mathcal{C}} H^\star(f^\bullet)(a) &= f^\bullet(\mathsf{env}_{\mathcal{C}} H(a)) = \overline{f(\mathsf{Env}_{\mathcal{C}}(\sigma)(\mathsf{env}_{\mathcal{C}} H(a))^\bullet)} = \\
&= \overline{f((\bullet \circ \mathsf{Env}_{\mathcal{C}}(\sigma) \circ \mathsf{env}_{\mathcal{C}} H)(a))} = \overline{f((\bullet \circ \mathsf{env}_{\mathcal{C}} H \circ \sigma)(a))} = \overline{f((\mathsf{env}_{\mathcal{C}} H \circ \bullet \circ \sigma)(a))} = \\
&= \overline{f(\mathsf{env}_{\mathcal{C}} H(\sigma(a)^\bullet))} = \overline{\mathsf{env}_{\mathcal{C}} H^\star(f)(\sigma(a)^\bullet)} = \mathsf{env}_{\mathcal{C}} H^\star(f)^\bullet(a).
\end{aligned}$$

□

5.2.3. Непрерывное тензорное произведение с $\mathcal{C}(M)$. Пусть X — стереотипное пространство, и M — паракомпактное локально компактное топологическое пространство. Рассмотрим алгебру $\mathcal{C}(M)$ непрерывных функций на M и пространство $\mathcal{C}(M, X)$ непрерывных функций на M со значениями в X. Мы наделяем $\mathcal{C}(M)$ и $\mathcal{C}(M,X)$ стандартной топологией равномерной сходимости на компактах в M

$$u_i \overset{\mathcal{C}(M,X)}{\longrightarrow} 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \forall\text{компакта } K\subseteq M \quad u_i\big|_K \overset{\mathcal{C}(K,X)}{\longrightarrow} 0, \qquad u\in\mathcal{C}(M,X), \quad t\in M.$$

и поточечными алгебраическими операциями:

$$(\lambda\cdot u)(t)=\lambda\cdot u(t) \qquad (u+v)(t)=u(t)+v(t), \qquad u,v\in\mathcal{C}(M,X), \quad \lambda\in\mathbb{C}, \quad t\in M.$$

Из [28, Theorem 8.1] следует

Предложение 5.16. *Пространство $\mathcal{C}(M,X)$ является стереотипным модулем над $\mathcal{C}(M)$, и*

$$\mathcal{C}(M,X)\cong\mathcal{C}(M)\odot X \tag{5.2.16}$$

В дальнейшем нас будет интересовать случай, когда $X=A$ — непрерывная (и поэтому стереотипная) алгебра. Пространство $\mathcal{C}(M,A)$ при этом мы также наделяем структурой стереотипной алгебры с поточечным умножением

$$(u\cdot v)(t)=u(t)\cdot v(t), \qquad u,v\in\mathcal{C}(M,A), \quad t\in M.$$

Из (5.2.16) следует, что $\mathcal{C}(M,A)$ является стереотипным A-модулем.

Теорема 5.17. *Для всякой непрерывной алгебры A и любого паракомпактного локально компактного пространства M естественное отображение*

$$\iota:\mathcal{C}(M)\circledast A\to\mathcal{C}(M,A) \quad \Big| \quad \iota(u\circledast a)(t)=u(t)\cdot a, \quad u\in\mathcal{C}(M),\ a\in A,\ t\in M, \tag{5.2.17}$$

является непрерывной оболочкой:

$$\mathcal{C}(M)\overset{\mathcal{C}}{\circledast} A\cong\mathcal{C}(M,A). \tag{5.2.18}$$

Лемма 5.18. *Отображение $\iota:\mathcal{C}(M)\circledast A\to\mathcal{C}(M,A)$ имеет образ, плотный в $\mathcal{C}(M,A)$.*

Доказательство. Пусть $f\in\mathcal{C}(M,A)$. Зафиксируем компакт $K\subseteq M$ и выпуклую окрестность нуля $U\subseteq A$. Поскольку f равномерно непрерывно на K, найдется окружение диагонали V в K такое, что

$$|s-t|<V \quad\Longrightarrow\quad f(s)-f(t)\in U.$$

Выберем конечный набор точек $t_1,...,t_n\in K$ такой что окрестности t_k+V образуют покрытие K. Подберем для них разбиение единицы на компакте K, то есть функции $\eta_1,...,\eta_n\in\mathcal{C}(M)$ такие, что

$$\eta_k\big|_{K\setminus(t_k+V)}=0, \qquad 0\leqslant\eta_k\leqslant 1, \qquad \sum_{k=1}^n\eta_k\big|_K=1.$$

Положим

$$x=\sum_{k=1}^n\eta_k\circledast f(t_k)\in\mathcal{C}(M)\circledast A.$$

Тогда для $s\in K$ мы получим

$$f(s)-\iota(x)(s)=\sum_{k=1}^n\eta_k(s)\cdot f(s)-\sum_{k=1}^n\eta_k(s)\cdot f(t_k)=\sum_{k=1}^n\eta_k(s)\cdot\big(f(s)-f(t_k)\big)\in U.$$

□

Лемма 5.19. *Модули $\mathcal{C}(M)\circledast A$ и $\mathcal{C}(M,A)$ над алгеброй $\mathcal{C}(M)$ имеют изоморфные расслоения значений:*

$$\mathsf{Jet}^0_{\mathcal{C}(M)}\,\mathcal{C}(M)\circledast A\cong\mathsf{Jet}^0_{\mathcal{C}(M)}\,\mathcal{C}(M,A), \qquad n\in\mathbb{N} \tag{5.2.19}$$

Доказательство. Для каждой точки $t \in M$ идеал I_t имеет коразмерность 1 в $\mathcal{C}(M)$, поэтому можно воспользоваться леммой 2.52 (см. часть 1):

$$\begin{aligned}\mathsf{Jet}^0_{\mathcal{C}(M)} \mathcal{C}(M) \circledast A = [(\mathcal{C}(M) \circledast A)/(I_t \circledast A)]^\vartriangle = (2.4.44) = \\ = [(\mathcal{C}(M) \odot A)/(I_t \odot A)]^\vartriangle = \mathsf{Jet}^0_{\mathcal{C}(M)} \mathcal{C}(M) \odot A = (5.2.16) = \mathsf{Jet}^0_{\mathcal{C}(M)} \mathcal{C}(M, A)\end{aligned}$$

□

Лемма 5.20. *Пусть M — паракомпактное локально компактное пространство, F — C^*-алгебра и $\varphi : \mathcal{C}(M) \to F$ — гомоморфизм инволютивных стереотипных алгебр, причем $\varphi(\mathcal{C}(M))$ лежит в центре F:*

$$\varphi(\mathcal{C}(M)) \subseteq Z(F).$$

Тогда для любого стереотипного пространства X всякий морфизм расслоений значений

$$\mu : \mathsf{Jet}^0_{\mathcal{C}(M)}(\mathcal{C}(M, X)) \to \mathsf{Jet}^0_{\mathcal{C}(M)}(F)$$

определяет единственный морфизм стереотипных $\mathcal{C}(M)$-модулей $D : \mathcal{C}(M, X) \to F$, удовлетворяющий тождеству

$$\mathsf{jet}^0(\varphi(x)) = \mu \circ \mathsf{jet}^0(x), \qquad x \in \mathcal{C}(M, X). \tag{5.2.20}$$

Доказательство. По теореме 4.9 (см. часть 1), отображение $v : F \to \mathsf{Sec}(\pi^0_{\mathcal{C}(M),F})$, переводящее F в алгебру непрерывных сечений расслоения значений $\pi^0_{\mathcal{C}(M),F} : \mathsf{Jet}^0_{\mathcal{C}(M)} F \to \mathsf{Spec}(\mathcal{C}(M))$ над алгеброй $\mathcal{C}(M)$, является изоморфизмом C^*-алгебр:

$$F \cong \mathsf{Sec}(\pi^0_{\mathcal{C}(M),F}).$$

Рассмотрим обратный изоморфизм $v^{-1} : \mathsf{Sec}(\pi^0_{\mathcal{C}(M),F}) \to F$:

$$v^{-1}(\mathsf{jet}^0(b)) = b, \qquad b \in F. \tag{5.2.21}$$

Тогда всякому морфизму расслоений значений $\mu : \mathsf{Jet}^0_{\mathcal{C}(M)}(\mathcal{C}(M, X)) \to \mathsf{Jet}^0_{\mathcal{C}(M)}(F)$ можно поставить в соответствие оператор $\varphi : \mathcal{C}(M, X) \to F$ по формуле

$$\varphi(x) = v^{-1}\Big(\mu \circ \mathsf{jet}^0(x)\Big), \qquad x \in \mathcal{C}(M, X). \tag{5.2.22}$$

Он, очевидно, будет удовлетворять тождеству (5.2.20). □

Лемма 5.21. *Отображение $\iota : \mathcal{C}(M) \circledast A \to \mathcal{C}(M, A)$ является непрерывным расширением.*

Доказательство. Пусть $\varphi : \mathcal{C}(M) \circledast A \to B$ — морфизм в какую-нибудь C^*-алгебру B. По лемме 3.3 (см. часть 1), он представим в виде

$$\varphi(u \circledast a) = \eta(u) \cdot \alpha(a) = \alpha(a) \cdot \eta(u), \qquad u \in \mathcal{C}(M),\ a \in A, \tag{5.2.23}$$

где $\eta : \mathcal{C}(M) \to B$, $\alpha : A \to B$ — некоторые морфизмы инволютивных стереотипных алгебр. Рассмотрим оператор η и обозначим буквой C его образ в B:

$$C = \overline{\eta(\mathcal{C}(M))}.$$

Пусть F — коммутант алгебры C в B:

$$F = C^! = \{x \in B : \quad \forall c \in C \quad x \cdot c = c \cdot x\}.$$

Поскольку алгебра C коммутативна, она тоже лежит в F, и более того, в центре F:

$$C \subseteq Z(F).$$

Заметим, что образ оператора φ лежит в F:

$$\varphi(\mathcal{C}(M) \circledast A) \subseteq F,$$

потому что

$$\varphi(v \circledast a)\cdot\eta(u) = \varphi(v \circledast a)\cdot\varphi(u \circledast 1) = \varphi\big((v \circledast a)\cdot(u \circledast 1)\big) = \varphi\big((v\cdot u)\circledast 1\big) = \varphi\big((u\cdot v)\circledast 1\big) = \\ = \varphi\big((u \circledast 1)\cdot(v \circledast a)\big) = \varphi(u \circledast 1)\cdot\varphi(v \circledast a) = \eta(u)\cdot\varphi(v \circledast a)$$

Чтобы убедиться, что ι — непрерывное расширение, нам надо показать, что существует (единственный) гомоморфизм $\varphi' : \mathcal{C}(M,A) \to F$, продолжающий φ:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C}(M)\circledast A \arrow[rr, "\iota"] \arrow[dr, "\varphi"'] & & \mathcal{C}(M,A) \arrow[dl, dashed, "\varphi'"] \\ & F & \end{tikzcd} \qquad (5.2.24)$$

Гомоморфизм $\varphi : \mathcal{C}(M)\circledast A \to F$ является $\mathcal{C}(M)$-морфизмом, и значит, по теореме 4.7 ему соответствует некий морфизм расслоений значений $\mathsf{jet}_0[\varphi] : \mathsf{Jet}^0_{\mathcal{C}(M)}[\mathcal{C}(M)\circledast A] \to \mathsf{Jet}^0_{\mathcal{C}(M)}(F) = \pi^0_A F$, удовлетворяющий тождеству

$$\mathsf{jet}^0(\varphi(x)) = \mathsf{jet}_n[\varphi]\circ\mathsf{jet}^n(x), \qquad x \in \mathcal{C}(M)\circledast A.$$

По лемме 5.19, расслоения значений алгебр $\mathcal{C}(M)\circledast A$ и $\mathcal{C}(M,A)$ изоморфны. Обозначим этот изоморфизм $\mu : \mathsf{Jet}^0_{\mathcal{C}(M)}[\mathcal{C}(M)\circledast A] \leftarrow \mathsf{Jet}^0_{\mathcal{C}(M)}[\mathcal{C}(M,A)]$. Рассмотрим композицию $\nu = \mathsf{jet}_0[\varphi]\circ\mu : \mathsf{Jet}_{\mathcal{C}(M)}[\mathcal{C}(M,A)] \to \mathsf{Jet}^0_{\mathcal{C}(M)}(F) = \pi^0_A F$:

$$\begin{tikzcd} \mathsf{Jet}^0_{\mathcal{C}(M)}[\mathcal{C}(M)\circledast A] \arrow[dr, "\mathsf{jet}_0[\varphi]"'] & & \mathsf{Jet}^0_{\mathcal{C}(M)}[\mathcal{C}(M,A)] \arrow[ll, "\mu"'] \arrow[dl, dashed, "\nu=\mathsf{jet}_0[\varphi]\circ\mu"] \\ & \mathsf{Jet}^0_{\mathcal{C}(M)}[F] & \end{tikzcd}$$

По лемме 5.20 этой пунктирной стрелке ν соответствует морфизм $\varphi' : \mathcal{C}(M,A) \to F$ (над алгеброй $\mathcal{C}(M)$), удовлетворяющий тождеству

$$\mathsf{jet}^0(\varphi' f) = \mathsf{jet}_0[\varphi]\circ\mathsf{jet}^0(f), \qquad f \in \mathcal{C}(M,A).$$

Для всякого $x \in \mathcal{C}(M)\circledast A$ мы получим

$$\mathsf{jet}^0\left(\varphi'(\iota(x))\right) = \mathsf{jet}_0[\varphi]\circ\mathsf{jet}^0(\iota(x)) = \mathsf{jet}_0[\varphi]\circ\mathsf{jet}^0(x) = \mathsf{jet}^0(\varphi(x)). \qquad (5.2.25)$$

Заметим далее, что по теореме 4.9, отображение $\mathsf{jet}^0 = v : F \to \mathsf{Sec}(\pi^0_{\mathcal{E}(M)}F) = \mathsf{Sec}(\mathsf{Jet}^0_{\mathcal{E}(M)}F)$, переводящее F в алгебру непрерывных сечений расслоения значений $\pi^0_{\mathcal{E}(M)}F : \mathsf{Jet}^0_{\mathcal{E}(M)}F \to \mathsf{Spec}(\mathcal{E}(M))$ над алгеброй $\mathcal{E}(M)$, является изоморфизмом C^*-алгебр:

$$F \cong \mathsf{Sec}(\pi^0_{\mathcal{E}(M)}F).$$

Поэтому к (5.2.25) можно применить оператор, обратный jet^0, и мы получим равенство

$$\varphi'(\iota(x)) = \varphi(x).$$

То есть φ' продолжает φ в диаграмме (5.2.24). По лемме 5.18 элементы вида $\iota(u\circledast a)$ полны в $\mathcal{C}(M,A)$, по этой причине такое продолжение φ' будет единственно.

По построению, оператор φ' будет морфизмом относительно алгебры $\mathcal{C}(M)$, однако нам этого недостаточно: нужно чтобы φ' был гомоморфизмом алгебр. Чтобы это проверить, выберем $u,v \in \mathcal{C}(M)$ и $a,b \in A$. Тогда

$$\varphi'(\iota(u\circledast a)\cdot\iota(v\circledast b)) = \varphi'(\iota(u\circledast a\cdot v\circledast b)) = \varphi(u\circledast a\cdot v\circledast b) = \varphi(u\circledast a)\cdot\varphi(v\circledast b) = \varphi'(\iota(u\circledast a))\cdot\varphi'(\iota(v\circledast b))$$

При этом по лемме 5.18 элементы вида $\iota(u\circledast a)$ полны в $\mathcal{C}(M,A)$. Отсюда следует, что их можно заменить произвольными векторами из $\mathcal{C}(M,A)$, и значит φ' должен быть гомоморфизмом. $\square$

Лемма 5.22. *Отображение $\iota : \mathcal{C}(M)\circledast A \to \mathcal{C}(M,A)$ является непрерывной оболочкой.*

Доказательство. Пусть $\sigma : \mathcal{C}(M) \circledast A \to C$ — какое-то другое непрерывное расширение. Нам нужно убедиться, что существует морфизм υ, замыкающий диаграмму

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C}(M) \circledast A \arrow[rr, "\sigma"] \arrow[dr, "\iota"'] & & C \arrow[dl, dashed, "\upsilon"] \\ & \mathcal{C}(M, A) & \end{tikzcd}$$

Зафиксируем компакт $K \subseteq M$ и гомоморфизм $\eta : A \to B$ в какую-нибудь C^*-алгебру, и положим

$$D(u \circledast a)(t) = u(t) \circledast \eta(a), \qquad u \in \mathcal{C}(M), \quad a \in A, \quad t \in K.$$

Отображение D будет гомоморфизмом из $\mathcal{C}(M) \circledast A$ в алгебру $\mathcal{C}(K) \circledast B$. Та, в свою очередь естественно отображается в максимальное тензорное произведение C^*-алгебр $\mathcal{C}(K) \underset{\max}{\otimes} B$, а оно изоморфно $\mathcal{C}(K) \odot B$ и $\mathcal{C}(K, B)$:

$$\mathcal{C}(K) \circledast B \to \mathcal{C}(K) \underset{\max}{\otimes} B \cong (3.2.15) \cong \mathcal{C}(K) \odot B \cong (5.2.16) \cong \mathcal{C}(K, B).$$

Поэтому мы можем считать D морфизмом в C^*-алгебру $\mathcal{C}(K, B)$:

$$D : \mathcal{C}(M) \circledast A \to \mathcal{C}(K) \circledast B \to \mathcal{C}(K) \underset{\max}{\otimes} B \cong (3.2.15) \cong \mathcal{C}(K) \odot B \cong (5.2.16) \cong \mathcal{C}(K, B)$$

Поскольку $\sigma : \mathcal{C}(M) \circledast A \to C$ есть непрерывное расширение, гомоморфизм $D : \mathcal{C}(M) \circledast A \to \mathcal{C}(K, B)$ должен однозначно продолжаться до некоторого гомоморфизма $D' : C \to \mathcal{C}(K, B)$:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C}(M) \circledast A \arrow[rr, "\sigma"] \arrow[dr, "D"'] & & C \arrow[dl, dashed, "D'"] \\ & \mathcal{C}(K, B) & \end{tikzcd} \tag{5.2.26}$$

Если теперь зафиксировать $c \in C$ и менять компакт $K \subset M$, то возникающие при этом непрерывные функции $D'(c)$ на K будут согласованы между собой тем, что на пересечении своих областей определения они совпадают. Поэтому определена некая общая непрерывная функция $\iota'_B(c) : M \to B$, обладающая тем свойством, что ее ограничение на каждый компакт K будет совпадать с соответствующей функцией $D'(c)$:

$$\iota'(c)\big|_K = D'(c), \qquad K \subset M.$$

Иными словами, определено некое отображение $\iota'_B : C \to \mathcal{C}(M, B)$ (по построению это будет гомоморфизм алгебр), для которого будет коммутативна следующая диаграмма, уточняющая (5.2.26):

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C}(M) \circledast A \arrow[rr, "\sigma"] \arrow[dr, "\iota_B"'] \arrow[ddr, bend right, "D"'] & & C \arrow[dl, dashed, "\iota'_B"] \arrow[ddl, bend left, "D'"] \\ & \mathcal{C}(M, B) \arrow[d, "\rho_K"] & \\ & \mathcal{C}(K, B) & \end{tikzcd} \tag{5.2.27}$$

(здесь ρ_K — отображение ограничения на компакт K).

Пусть теперь U — C^*-окрестность нуля[1] в A, соответствующая гомоморфизму $\eta : A \to B$. Из того, что σ — плотный эпиморфизм, следует, что верхний внутренний треугольник в (5.2.27)

---

[1] C^*-окрестности нуля были определены на с.9.

можно достроить до диаграммы

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{C}(M)\circledast A \arrow[rr, "\sigma"] \arrow[dr, "\vartheta_U"'] \arrow[ddr, bend right, "\iota_B"'] & & C \arrow[dl, dashed, "\vartheta'_U"] \arrow[ddl, bend left, "\iota'_B"] \\
& \mathcal{C}(M,A/U) \arrow[d, "\eta_U\oslash 1_M"'] & \\
& \mathcal{C}(M,B) &
\end{tikzcd}
\tag{5.2.28}
$$

где $\eta_U : A/U \to B$ — морфизм из (5.1.11), и

$$\vartheta_U(u\circledast a)(t) = u(t)\cdot\pi_U(a), \qquad u\in\mathcal{E}(M), \quad a\in A, \quad t\in M,$$

$$(\eta_U\oslash 1_M)(h)(t) = \eta_U(h(t)), \qquad h\in\mathcal{E}(M,A/U), \quad t\in M.$$

Из определения ϑ_U сразу следует, что если $U'\subseteq U$ — какая-то другая C^*-окрестность нуля, то

$$\vartheta_U = (\varkappa_U^{U'}\oslash 1_M)\cdot\vartheta_{U'}, \qquad U\supseteq U', \tag{5.2.29}$$

где $\varkappa_U^{U'}$ — морфизм из (5.1.12), и

$$(\varkappa_U^{U'}\oslash 1_M)(h)(t) = \varkappa_U^{U'}(h(t)), \qquad h\in\mathcal{E}(M,A/U'), \quad t\in M.$$

Равенство (5.2.29) будет левым нижним внутренним треугольником в диаграмме

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{C}(M)\circledast A \arrow[rr, "\sigma"] \arrow[dr, "\vartheta_{U'}"'] \arrow[ddr, bend right, "\vartheta_U"'] & & C \arrow[dl, "\vartheta'_{U'}"] \arrow[ddl, bend left, "\vartheta'_U"] \\
& \mathcal{C}(M,A/U') \arrow[d, dashed, "\varkappa_U^{U'}\oslash 1_M"] & \\
& \mathcal{C}(M,A/U) &
\end{tikzcd}
$$

При этом периметр и верхний внутренний треугольник здесь будут вариантами верхнего внутреннего треугольника в (5.2.27), и вдобавок σ — эпиморфизм. Как следствие, оставшийся правый нижний внутренний треугольник тоже должен быть коммутативен.

Это означает, что морфизмы $\vartheta'_U : C \to \mathcal{C}(M,A/U)$ образуют проективный конус системы $\varkappa_U^{U'}\oslash 1_M$, и поэтому существует морфизм ϑ' в проективный предел:

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{C}(M)\circledast A \arrow[rr, "\sigma"] \arrow[dr, "\vartheta"'] \arrow[ddr, bend right, "\vartheta_U"'] & & C \arrow[dl, dashed, "\vartheta'"] \arrow[ddl, bend left, "\vartheta'_U"] \\
& \varprojlim_{0\leftarrow U'} \mathcal{C}(M,A/U') \arrow[d, "\varkappa_U\oslash 1_M"] & \\
& \mathcal{C}(M,A/U) &
\end{tikzcd}
$$

Теперь заметим цепочку

$$\varprojlim_{0\leftarrow U'} \mathcal{C}(M,A/U') = \varprojlim_{0\leftarrow U'} (\mathcal{C}(M)\odot A/U') = (2.4.39) = \mathcal{C}(M)\odot \varprojlim_{0\leftarrow U'} A/U' = \mathcal{C}(M, \varprojlim_{0\leftarrow U'} A/U')$$

и подставим последнее пространство в нашу диаграмму:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}(M)\circledast A \arrow[rr, "\sigma"] \arrow[dr, "\vartheta"] \arrow[ddr, bend right, "\vartheta_U"'] & & C \arrow[dl, dashed, "\vartheta'"'] \arrow[ddl, bend left, "\vartheta'_U"] \\
& \mathcal{C}(M, \varprojlim_{0\leftarrow U'} A/U') \arrow[d, "\varkappa_U \oslash 1_M"] & \\
& \mathcal{C}(M, A/U) &
\end{tikzcd}$$

Еще раз вспомним, что σ — плотный эпиморфизм. Из этого следует, что стрелка ϑ' поднимается до некоторой стрелки υ со значениями в пространстве $\mathcal{C}(M, \mathsf{Im}\,\pi)$ функций, принимающих значения в образе отображения $\pi : A \to \varprojlim_{0\leftarrow U'} A/U'$, или, что то же самое, в непосредственном подпространстве, порожденном множеством значений отображения π, а это пространство как раз совпадает с A, поскольку A — непрерывная алгебра:

$$\mathsf{Im}\,\pi \cong \mathsf{Env}_{\mathcal{C}} A \cong A$$

Мы получаем диаграмму

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}(M)\circledast A \arrow[rr, "\sigma"] \arrow[dr, "\iota"] \arrow[ddr, bend right, "\vartheta"'] & & C \arrow[dl, dashed, "\upsilon"'] \arrow[ddl, bend left, "\vartheta'"] \\
& \mathcal{C}(M, A) \arrow[d, "\mathsf{im}\,\pi \oslash 1_M"] & \\
& \mathcal{C}(M, \varprojlim_{0\leftarrow U'} A/U') &
\end{tikzcd}$$

где π — морфизм из (5.1.14). $\square$

5.3. $\mathcal{C}(M)$, как непрерывная оболочка своих подалгебр

Условимся непрерывное отображение топологических пространств $\varepsilon : X \to Y$ называть *наложением*, если всякий компакт $T \subseteq Y$ содержится в образе некоторого компакта $S \subseteq X$. Если пространство Y хаусдорфово, то это автоматически означает, что ε должно быть сюръективно. Если вдобавок отображение ε инъективно, то мы называем его *точным наложением.* В точном наложении $\varepsilon : X \to Y$ пространство Y можно представлять себе как новую, более слабую топологизацию пространства X, которая не меняет систему компактов и топологию на каждом компакте.

Теорема 5.23. *Пусть A — инволютивная стереотипная подалгебра в алгебре $\mathcal{C}(M)$ непрерывных функций на паракомпактном локально компактном пространстве M, то есть задан (непрерывный и сохраняющий единицу) мономорфизм инволютивных стереотипных алгебр*

$$\iota : A \to \mathcal{C}(M).$$

Для того, чтобы непрерывная оболочка алгебры A совпадала с алгеброй $\mathcal{C}(M)$

$$\mathsf{Env}_{\mathcal{C}} A = \mathcal{C}(M) \tag{5.3.1}$$

(то есть, чтобы ι был непрерывной оболочкой A), необходимо и достаточно, чтобы сопряженное отображение спектров $\iota^{\mathsf{Spec}} : \mathsf{Spec}(A) \leftarrow M$ было точным наложением.

Доказательство. 1. Докажем сначала необходимость. Пусть выполняется (5.3.1). Зафиксируем компакт $T \subseteq \mathsf{Spec}(A)$ и рассмотрим отображение

$$\varphi_T : A \to \mathcal{C}(T) \quad \Big| \quad \varphi_T(a)(t) = t(a), \qquad t \in T,\ a \in A.$$

Это будет инволютивный гомоморфизм в C^*-алгебру, поэтому он продолжается на оболочку $\mathsf{Env}_{\mathcal{C}} A = \mathcal{C}(M)$:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "\iota"] \arrow[dr, "\varphi_T"'] & & \mathcal{C}(M) \arrow[dl, dashed, "\pi"] \\ & \mathcal{C}(T) & \end{tikzcd}$$

где π — некий инволютивный гомоморфизм. Сопряженное отображение спектров $\pi^{\mathsf{Spec}} : \mathsf{Spec}(\mathcal{C}(T)) \to \mathsf{Spec}(\mathcal{C}(M))$ переводит $T = \mathsf{Spec}(\mathcal{C}(T))$ в некий компакт $S \subseteq \mathsf{Spec}(\mathcal{C}(M))$. При отображении спектров $\iota^{\mathsf{Spec}} : \mathsf{Spec}(A) \leftarrow \mathsf{Spec}(\mathcal{C}(M))$ компакт S в точности превратится в компакт T. Это доказывает, что $\iota^{\mathsf{Spec}} : \mathsf{Spec}(A) \leftarrow \mathsf{Spec}(\mathcal{C}(M))$ является наложением. Покажем далее, что оно инъективно. Если бы это было не так, мы получили бы, что какие-то две точки $s \neq s' \in M$ при отображении ι^{Spec} слипаются:

$$s \circ \sigma = s' \circ \sigma = t \in \mathsf{Spec}(A)$$

Это можно понимать так, что характер $t : A \to \mathbb{C}$ имеет два разных продолжения на $\mathcal{C}(M)$:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "\iota"] \arrow[dr, "t"'] & & \mathcal{C}(M) \arrow[dl, bend right, "s"'] \arrow[dl, bend left, "s'"] \\ & \mathbb{C} & \end{tikzcd}$$

Но ι — непрерывная оболочка, и поэтому характер $t : A \to \mathbb{C}$, будучи инволютивным гомоморфизмом в C^*-алгебру $\mathbb{C}$, должен продолжаться единственным образом.

2. Теперь докажем достаточность. Пусть ι^{Spec} — точное наложение. Заметим сразу, что тогда алгебра A разделяет точки M, и, поскольку она вдобавок содержит единицу, а значит и все константы, по теореме Стоуна-Вейерштрасса A должна быть плотна в $\mathcal{C}(M)$.

Покажем, что инъекция $\iota : A \to \mathcal{C}(M)$ является непрерывным расширением. Пусть $\varphi : A \to B$ — морфизм A в какую-нибудь C^*-алгебру B. Чтобы построить пунктирную стрелку φ', замыкающую диаграмму (5.1.3),

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "\iota"] \arrow[dr, "\varphi"'] & & \mathcal{C}(M) \arrow[dl, dashed, "\varphi'"] \\ & B & \end{tikzcd}$$

достаточно считать, что B коммутативна и что $\varphi(A)$ плотно в B (потому что иначе можно будет заменить B на замыкание $\overline{\varphi(A)}$ в B, которое будет коммутативной подалгеброй в B). Тогда из коммутативности B будет следовать, что B имеет вид $\mathcal{C}(T)$, а из плотности $\varphi(A)$ в B — что компакт T инъективно вкладывается в $\mathsf{Spec}(A)$. Поскольку по условию теоремы, $\iota^{\mathsf{Spec}} : \mathsf{Spec}(A) \leftarrow M$ является наложением, $T \subseteq \mathsf{Spec}(A)$ является образом некоторого компакта $K \subseteq M$, $K \cong T$. Тогда отображение φ представляется как композиция инъекции $\iota : A \to \mathcal{C}(M)$ с отображением $\pi_T : \mathcal{C}(M) \to \mathcal{C}(T)$ ограничения на компакт T:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "\iota"] \arrow[dr, "\varphi"'] & & \mathcal{C}(M) \arrow[dl, dashed, "\pi_T"] \\ & \mathcal{C}(T) & \end{tikzcd}$$

Мы получаем, что $\varphi' = \pi_T$. При этом пунктирная стрелка будет единственной из-за того, что A плотно в $\mathcal{C}(M)$.

Проверим после этого, что $\iota : A \to \mathcal{C}(M)$ является максимальным расширением, то есть если взять какое-то другое расширение $\sigma : A \to C$, то найдется единственный морфизм $\upsilon : C \to \mathcal{C}(M)$, замыкающий диаграмму

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dl, "\sigma"'] \arrow[dr, "\iota"] & \\ C \arrow[rr, dashed, "\upsilon"'] & & \mathcal{C}(M) \end{tikzcd} \tag{5.3.2}$$

Для всякого компакта $T \subseteq M$ гомоморфизм

$$\iota_T : A \to \mathcal{C}(T) \quad \Big| \quad \iota_T(a)(t) = t(a), \qquad t \in T \subseteq \mathsf{Spec}(A)$$

однозначно продолжается до некоторого гомоморфизма $\iota'_T : A' \to \mathcal{C}(T)$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "\sigma"] \arrow[dr, "\iota_T"'] & & A' \arrow[dl, dashed, "\iota'_T"] \\ & \mathcal{C}(T) & \end{tikzcd}$$

Если $T \subseteq S$ — два компакта в M, то эта диаграмма дополняется до диаграммы

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "\sigma"] \arrow[dr, "\iota_S"] \arrow[ddr, bend right, "\iota_T"'] & & A' \arrow[dl, dashed, "\iota'_S"'] \arrow[ddl, dashed, bend left, "\iota'_T"] \\ & \mathcal{C}(S) \arrow[d, "\pi^S_T"] & \\ & \mathcal{C}(T) & \end{tikzcd}$$

где π^S_T — отображение ограничения на компакт T. Правый нижний треугольник в этой диаграмме означает, что морфизмы $\iota'_T : A' \to \mathcal{C}(T)$ образуют проективный конус в контравариантной системе π^S_T. Поэтому существует стрелка ι', замыкающая правый нижний треугольник во всех диаграммах

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "\sigma"] \arrow[dr, "\iota"] \arrow[ddr, bend right, "\iota_T"'] & & A' \arrow[dl, dashed, "\iota'"'] \arrow[ddl, bend left, "\iota'_T"] \\ & \mathcal{C}(M) \arrow[d, "\pi_T"] & \\ & \mathcal{C}(T) & \end{tikzcd}$$

Поскольку периметр и левый нижний треугольник в каждой такой диаграмме также коммутативны, мы получаем

$$\pi_T \circ \iota' \circ \sigma = \iota'_T \circ \sigma = \iota_T = \pi_T \circ \iota.$$

Поскольку это верно для всех T, мы получаем, равенство

$$\iota' \circ \sigma = \iota.$$

□

5.3.1. Контрпример.

Пример 5.3. *Существует плотная инволютивная стереотипная подалгебра A в $\mathcal{C}(\mathbb{R})$, у которой сопряженное отображение спектров $\iota^{\mathsf{Spec}} : \mathsf{Spec}(A) \leftarrow M$ является биекцией, но не наложением, и, как следствие, непрерывная оболочка A не совпадает с $\mathcal{C}(\mathbb{R})$:*

$$\mathsf{Spec}(A) = M, \qquad \mathsf{Env}_{\mathcal{C}} A \neq \mathcal{C}(\mathbb{R})$$

Доказательство. Такой алгеброй будет алгебра A непрерывных функций на $\mathbb{R}$, у которых предел на бесконечности равен значению в какой-нибудь фиксированной точке, например, в нуле:

$$u \in A \quad \Longleftrightarrow \quad u \in \mathcal{C}(\mathbb{R}) \quad \& \quad \lim_{t\to\infty} u(t) = u(0).$$

Алгебра A инволютивна, содержит константы и разделяет точки $\mathbb{R}$, поэтому она плотна в $\mathcal{C}(\mathbb{R})$. Мы наделяем A топологией равномерной сходимости на всей прямой $\mathbb{R}$. Спектр A, как легко понять, представляет собой прямую $\mathbb{R}$, только с новой топологией, в которой базисными окрестностями точки 0 становятся множества вида

$$(-\infty, A) \cup (a, b) \cup (B, +\infty)$$

где $A < a < 0 < b < B$ — числа на $\mathbb{R}$ (а базисные окрестности остальных точек не меняются). Эту топологию удобно представлять как индуцированную на $\mathbb{R}$ при вложении $\mathbb{R}$ в фигуру, внешне похожую на число 8, и которую поэтому удобно обозначать символом 8 (при этом вложении концы прямой $\mathbb{R}$ загибаются и подходят к точке $0 \in \mathbb{R}$). Спектр A, понятное дело, будет гомеоморфен этой восьмерке 8,

$$\mathsf{Spec}\, A \cong 8,$$

а сама алгебра A изоморфна (как стереотипная алгебра) алгебре $\mathcal{C}(8)$ (алгебре непрерывных функций на компакте 8). Поэтому непрерывная оболочка A совпадает с A, и не изоморфна $\mathcal{C}(\mathbb{R})$:

$$\mathsf{Env}_{\mathcal{C}} A \cong A \cong \mathcal{C}(8) \ncong \mathcal{C}(\mathbb{R}).$$

$\square$

5.3.2. Непрерывная оболочка алгебры $\mathsf{Trig}(G) = k(G)$ на компактной группе G. Согласно [22, (30.30)], $\mathsf{Spec}(\mathsf{Trig}(G)) = G$. Вместе с теоремой 5.23 это дает следующий результат:

Теорема 5.24. *Непрерывная оболочка алгебры $\mathsf{Trig}(G) = k(G)$ на компактной группе G совпадает с алгеброй $\mathcal{C}(G)$ непрерывных функций на G:*

$$\mathsf{Env}_{\mathcal{C}} \mathsf{Trig}(G) = \mathcal{C}(G). \tag{5.3.3}$$

5.4. Непрерывные оболочки групповых алгебр

5.4.1. Преобразование Фурье на коммутативной локально компактной группе. Пусть C — коммутативная локально компактная группа. Вспомним алгебру $\mathcal{C}(C)$ непрерывных функций и алгебру $\mathcal{C}^\star(C)$ мер с компактным носителем на C, о которых мы говорили в 82. Формула

$$\overbrace{\mathcal{F}_C(\alpha)(\chi)}^{\substack{\text{значение функции } \mathcal{F}_C(\alpha)\in\mathcal{C}(\widehat{C})\\ \text{в точке } \chi\in\widehat{C}\\ \downarrow}} = \underbrace{\alpha(\chi)}_{\substack{\uparrow\\ \text{действие функционала } \alpha\in\mathcal{C}^\star(C)\\ \text{на функцию } \chi\in\widehat{C}\subseteq\mathcal{C}(C)}} \qquad (\chi\in\widehat{C}, \quad \alpha\in\mathcal{C}^\star(C)) \tag{5.4.1}$$

определяет отображение

$$\mathcal{F}_C : \mathcal{C}^\star(C) \to \mathcal{C}(\widehat{C})$$

являющееся гомоморфизмом инволютивных стереотипных алгебр, и называемое *преобразованием Фурье* на группе C.

Следующий факт был доказан в [29, Theorem 5.53] (для оболочек Кузнецовой в [51, Theorem 2.11]).

Предложение 5.25. *Преобразование Фурье на коммутативной локально компактной группе C является непрерывной оболочкой групповой алгебры $\mathcal{C}^\star(C)$. Как следствие,*

$$\mathsf{Env}_{\mathcal{C}}\, \mathcal{C}^\star(C) = \mathcal{C}(\widehat{C}). \tag{5.4.2}$$

5.4.2. Непрерывная оболочка групповой алгебры компактной группы.

Предложение 5.26. *Для компактной группы K непрерывной оболочкой ее групповой алгебры $\mathcal{C}^\star(K)$ является декартово произведение алгебр $\mathcal{B}(X_\pi)$, где π пробегает двойственный объект $\widehat{K}$, а X_π представляет собой пространство представления π:*

$$\mathsf{Env}_{\mathcal{C}}\, \mathcal{C}^\star(K) = \prod_{\pi\in\widehat{K}} \mathcal{B}(X_\pi). \tag{5.4.3}$$

Доказательство. 1. Сначала покажем, что отображение $P = \prod_{\pi\in\widehat{K}} \pi : \mathcal{C}^\star(K) \to \prod_{\pi\in\widehat{K}} \mathcal{B}(X_\pi)$ является непрерывным расширением. Заметим сразу, что P — плотный эпиморфизм (это следует из определения прямого произведения). Далее, пусть $\psi : \mathcal{C}^\star(K) \to B$ — инволютивный гомоморфизм в какую-то C^*-алгебру B. Рассмотрим какое-нибудь вложение C^*-алгебр $\eta : B \to \mathcal{B}(X)$. Композиция $\psi = \eta\circ\varphi$ порождает непрерывное по норме представление $\rho = \psi\circ\delta : K \to \mathcal{B}(X)$, которое по теореме 3.36 раскладывается в прямую сумму унитарных неприводимых представлений, среди которых только конечное число не эквивалентно друг другу. Это означает, в частности, что существует конечное множество $M \subseteq \widehat{K}$ такое, что ψ представимо в виде композиции $\psi'\circ P_M$, где P_M — естественная проекция $\mathcal{C}^\star(K)$ в прямое произведение $\prod_{\pi\in M} \mathcal{B}(X_\pi)$. Отсюда в свою очередь следует, что гомоморфизм φ обнуляется на ядре P_M: $\mathsf{Ker}\, P_M \subseteq \mathsf{Ker}\,\varphi$. Вдобавок, алгебра $\prod_{\pi\in M} \mathcal{B}(X_\pi)$ конечномерна и изоморфна фактор-алгебре $\mathcal{C}^\star(K)/\,\mathsf{Ker}\, P_M$. Поэтому φ представимо в виде компрозиции $\varphi'\circ P_M$, и мы получаем диаграмму

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}^\star(K) \arrow[rr, "P_M"] \arrow[dr, "\varphi"'] \arrow[ddr, bend right, "\psi"'] & & \prod\limits_{\pi\in M} \mathcal{B}(X_\pi) \arrow[dl, dashed, "\varphi'"] \arrow[ddl, dashed, bend left, "\psi'"] \\
& B \arrow[d, "\eta"] & \\
& \mathcal{B}(X) &
\end{tikzcd}$$

Из нее в свою очередь строится диаграмма

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}^\star(K) \arrow[rr, "P"] \arrow[dr, "P_M"'] \arrow[ddr, bend right, "\varphi"'] & & \prod\limits_{\pi\in\widehat{K}} \mathcal{B}(X_\pi) \arrow[dl, dashed, "Q_M"] \arrow[ddl, dashed, bend left, "\varphi''"] \\
& \prod\limits_{\pi\in M} \mathcal{B}(X_\pi) \arrow[d, "\varphi'"] & \\
& B &
\end{tikzcd}$$

в которой Q_M — естественная проекция прямого произведения в свое подпроизведение.

2. Докажем далее, что $P : \mathcal{C}^\star(K) \to \prod_{\pi\in\widehat{K}} \mathcal{B}(X_\pi)$ — непрерывная оболочка. Пусть $Q : \mathcal{C}^\star(K) \to A$ — какое-то другое непрерывное расширение. Тогда для всякого представления $\sigma \in \widehat{K}$ найдется (единственный) морфизм $\alpha_\sigma : A \to \mathcal{B}(X_\sigma)$, такой что $\varphi_\sigma = \alpha_\sigma \circ Q$. Семейству морфизмов $\{\alpha_\sigma :$

$A \to \mathcal{B}(X_\sigma)$; $\sigma \in \widetilde{K}\}$ соответствует морфизм $\upsilon : A \to \prod_{\pi\in\widehat{K}} \mathcal{B}(X_\pi)$ такой что $\alpha_\sigma = \iota_\sigma \circ \upsilon$ для всякого $\sigma \in \widehat{K}$. Мы получаем диаграмму

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{C}^\star(K) \arrow[d, "\varphi_\sigma"] \arrow[ddl, bend right, "Q"'] \arrow[ddr, bend left, "P"] & \\
 & \mathcal{B}(X_\sigma) & \\
A \arrow[ur, "\alpha_\sigma"] \arrow[rr, "\upsilon"'] & & \prod\limits_{\pi\in\widehat{K}} \mathcal{B}(X_\pi) \arrow[ul, "\iota_\sigma"']
\end{tikzcd}$$

в которой внутренние маленькие треугольники коммутативны в силу свойств отображений P, Q, υ. Как следствие,

$$\iota_\sigma \circ \upsilon \circ Q = \alpha_\sigma \circ Q = \varphi_\sigma = \iota_\sigma \circ P,$$

и поскольку это верно для любого σ, получаем

$$\upsilon \circ Q = P,$$

то есть в этой диаграмме коммутативен также и периметр. Единственность морфизма υ следует из единственности морфизмов α_σ. $\square$

5.4.3. Непрерывная оболочка групповой алгебры группы $C \times K$. Пусть C — абелева локально компактная группа, а K — компактная группа (необязательно, абелева).

Предложение 5.27. *Непрерывной оболочкой групповой алгебры $\mathcal{C}^\star(C \times K)$ является алгебра $\mathcal{C}(\widehat{C}, \prod_{\sigma\in\widehat{K}} \mathcal{B}(X_\sigma))$ непрерывных отображений из двойственной по Понтрягину группы $\widehat{C}$ в декартово произведение алгебр $\mathcal{B}(X_\sigma)$, где σ пробегает двойственный объект $\widehat{K}$, а X_σ представляет собой пространство представления σ:*

$$\begin{aligned}\mathsf{Env}_{\mathcal{C}}\, \mathcal{C}^\star(C \times K) = \mathcal{C}\Big(\widehat{C}, \prod_{\sigma\in\widehat{K}} \mathcal{B}(X_\sigma)\Big) = \prod_{\sigma\in\widehat{K}} \mathcal{C}\big(\widehat{C}, \mathcal{B}(X_\sigma)\big) = \\ = \mathcal{C}(\widehat{C}) \odot \prod_{\sigma\in\widehat{K}} \mathcal{B}(X_\sigma) = \mathsf{Env}_{\mathcal{C}}\, \mathcal{C}^\star(C) \odot \mathsf{Env}_{\mathcal{C}}\, \mathcal{C}^\star(K).\end{aligned} \tag{5.4.4}$$

Доказательство. Первое равенство доказывается цепочкой

$$\begin{aligned}\mathsf{Env}_{\mathcal{C}}\, \mathcal{C}^\star(C \times K) = \mathsf{Env}_{\mathcal{C}}\, \Big(\mathcal{C}^\star(C) \circledast \mathcal{C}^\star(K)\Big) = [29,\ (1.129)] = \\ = \mathsf{Env}_{\mathcal{C}}\, \Big(\mathsf{Env}_{\mathcal{C}}\, \mathcal{C}^\star(C) \circledast \mathsf{Env}_{\mathcal{C}}\, \mathcal{C}^\star(K)\Big) = (5.4.2) = \mathsf{Env}_{\mathcal{C}}\, \Big(\mathcal{C}(\widehat{C}) \circledast \prod_{\sigma\in\widehat{K}} \mathcal{B}(X_\sigma)\Big) = \\ = (5.2.1) = \mathcal{C}(\widehat{C}) \overset{\mathcal{C}}{\circledast} \prod_{\sigma\in\widehat{K}} \mathcal{B}(X_\sigma) = (5.2.18) = \mathcal{C}\Big(\widehat{C}, \prod_{\sigma\in\widehat{K}} \mathcal{B}(X_\sigma)\Big)\end{aligned}$$

Второе равенство в (5.4.4) очевидно, третье является следствием [28, Theorem 8.1], а последнее — следствием (5.4.2) и (5.4.3). $\square$

5.4.4. Непрерывная оболочка групповой алгебры дискретной группы. Для дискретной группы D ее групповая алгебра представляет собой алгебру функций на D с конечным носителем:

$$\mathcal{C}^\star(D) = \mathbb{C}_D = \{\alpha = \{\alpha_x, x \in D\} : \quad \mathsf{card}\{x \in D : \alpha_x \neq 0\} < \infty\}.$$

Свертка в $\mathbb{C}_D$ определяется своим действием на дельта-функционалах (3.4.15).

Заметим, что всякая C^*-полунорма p на $\mathbb{C}_D$ переводит единицу либо в нуль, либо в единицу:

$$p(\delta^e) = p(\delta^e * \delta^e) = p(\delta^e * (\delta^e)^\bullet) = p(\delta^e)^2 \quad \Longrightarrow \quad p(\delta^e) = 0 \quad \vee \quad p(\delta^e) = 1.$$

В первом случае p будет вообще любой элемент переводить в нуль (потому что p всегда субмультипликативна). Поэтому если $p \neq 0$, то $p(\delta^e) = 1$. Более того, в этом случае вообще любой дельта-функционал переводится в единицу:

$$1 = p(\delta^e) = p(\delta^a * \delta^{a^{-1}}) = p(\delta^a * (\delta^a)^\bullet) = p(\delta^a)^2 \quad \Longrightarrow \quad p(\delta^a) = 1.$$

Из этого, в свою очередь следует, что всякая C^*-полунорма p на $\mathbb{C}_D$ подчинена ℓ_1-норме:

$$p(\alpha) \leqslant \|\alpha\|_1, \qquad \alpha \in \mathbb{C}_D, \tag{5.4.5}$$

потому что

$$p(\alpha) = p\Big(\sum_{x\in D} \alpha_x \cdot \delta^x\Big) \leqslant \sum_{x\in D} |\alpha_x| \cdot p(\delta^x) \leqslant \sum_{x\in D} |\alpha_x| \cdot 1 = \|\alpha\|_1.$$

Из (5.4.5) следует, что для всякого $\alpha \in \mathbb{C}_D$ существует точная грань по всем C^*-полунормам

$$\|\alpha\|_\bullet = \sup_{p\in\mathcal{P}(\mathbb{C}_D)} p(\alpha) \leqslant \|\alpha\|_1. \tag{5.4.6}$$

Это будет C^*-полунорма на $\mathbb{C}_D$, потому что

$$\|\alpha * \alpha^\bullet\|_\bullet = \sup_{\pi\in\widehat{G}} \|\pi(\alpha * \alpha^\bullet)\| = \sup_{\pi\in\widehat{G}} \|\pi(\alpha) * \pi(\alpha)^\bullet\| = \sup_{\pi\in\widehat{G}} \|\pi(\alpha)\|^2 = \big(\sup_{\pi\in\widehat{G}} \|\pi(\alpha)\|\big)^2 = \|\alpha\|_\bullet^2.$$

Более того, это будет норма на $\mathbb{C}_D$, потому что если $\alpha \neq 0$, то при левом регулярном представлении $\pi : D \to \mathcal{L}(L_2(D))$ оно переходит в ненулевой элемент, который отделяется от нуля нормой в $\mathcal{L}(L_2(D))$, а она определяет C^*-полунорму на $\mathbb{C}_D$. Пополнение алгебры $\mathbb{C}_D$ относительно этой нормы совпадает с пополнением $\ell_1(D)$ относительно нее, называется *групповой C^*-алгеброй* группы G и обозначается $C^*(D)$ (см. [11]).

Предложение 5.28. *Для дискретной группы D непрерывной оболочкой ее групповой алгебры $\mathcal{C}^\star(D) = \mathbb{C}_D$ является групповая C^*-алгебра $C^*(D)$:*

$$\mathsf{Env}_{\mathcal{C}}\, \mathbb{C}_D = C^*(D).$$

Доказательство. Пусть $\rho : \mathbb{C}_D \to C^*(D)$ — отображение пополнения относительно нормы $\|\cdot\|_\bullet$. Покажем, что оно является непрерывным расширением. Пусть $\varphi : \mathbb{C}_D \to B$ — инволютивный гомоморфизм в какую-то C^*-алгебру B. Чтобы достроить диаграмму

$$\begin{tikzcd} \mathbb{C}_D \arrow[rr, "\rho"] \arrow[dr, "\varphi"'] & & C^*(D) \arrow[dl, dashed, "\varphi'"] \\ & B & \end{tikzcd} \tag{5.4.7}$$

достаточно считать, что φ имеет плотный образ в B. Тогда B можно считать пополнением алгебры $\mathbb{C}_D$ относительно какой-то C^*-полунормы p (с факторизацией по ядру этой нормы). Но p, будучи C^*-полунормой, должна быть подчинена норме $\|\cdot\|_\bullet$. Поэтому $\mathsf{Ker}\,\|\cdot\|_\bullet \subseteq \mathsf{Ker}\, p$. Отсюда следует, что φ можно представить как композицию $\mathbb{C}_D \to \mathbb{C}_D/\,\mathsf{Ker}\,\|\cdot\|_\bullet \to B$. А потом такое представление достраивается до (5.4.7).

Теперь покажем, что $\rho : \mathbb{C}_D \to C^*(D)$ — непрерывная оболочка. Пусть $\sigma : \mathbb{C}_D \to A$ — какое-то другое непрерывное расширение. Тогда, поскольку $\rho : \mathbb{C}_D \to C^*(D)$ — гомоморфизм в C^*-алгебру, он должен пропускаться через σ:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{C}_D \arrow[rr, "\sigma"] \arrow[dr, "\rho"'] & & A \arrow[dl, dashed, "\upsilon"] \\ & C^*(D) & \end{tikzcd}$$

□

5.4.5. Непрерывная оболочка групповой алгебры SIN-группы. Напомним, что SIN-группы были определены выше на с.90. По теореме 3.28, всякая SIN-группа G является дискретным расширением некоторой группы $\mathbb{R}^n \times K$, где $n \in \mathbb{Z}_+$, а K — компактная группа:

$$1 \to \mathbb{R}^n \times K = N \to G \to D \to 1$$

(D — дискретная группа).

Множество всех непрерывных C^*-полунорм на групповой алгебре $\mathcal{C}^\star(G)$ группы G мы обозначаем $\mathcal{P}(G)$. Понятно, что групповая алгебра $\mathcal{C}^\star(N)$ непрерывно вкладывается в групповую алгебру $\mathcal{C}^\star(G)$. Обозначим это вложение $\theta : \mathcal{C}^\star(N) \to \mathcal{C}^\star(G)$.

Свойства продолжений полунорм:

1°. *Всякая полунорма $p \in \mathcal{P}(N)$ продолжается до некоторой полунормы $q \in \mathcal{P}(G)$.*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C}^\star(N) \arrow[rr, "\theta"] \arrow[dr, "p"'] & & \mathcal{C}^\star(G) \arrow[dl, dashed, "q"] \\ & \mathbb{R}_+ & \end{tikzcd}$$

2°. *Для всякой полунормы $p \in \mathcal{P}(N)$ точная верхняя грань всех таких продолжений*

$$p^{\max}(\alpha) = \sup_{q\in\mathcal{P}(G):\ q|_{\mathcal{C}^\star(N)}=p} q(\alpha)$$

(конечна и) является непрерывной C^*-полунормой на $\mathcal{C}^\star(G)$;

3°. *Если $p \in \mathcal{P}(N)$ и $q \in \mathcal{P}(G)$, причем $q\Big|_{\mathcal{C}^\star(N)} \leqslant p$, то $q \leqslant p^{\max}$.*

4°. *Для любых $p_1, ..., p_n \in \mathcal{P}(N)$*

$$\max\{p_1^{\max}, ..., p_n^{\max}\} \leqslant \Big(\max\{p_1, ..., p_n\}\Big)^{\max}. \tag{5.4.8}$$

Доказательство. Эти утверждения принадлежат Ю. Н. Кузнецовой, и мы приводим доказательства из [51].

1. Пусть $p : \mathcal{C}^\star(N) \to \mathbb{R}_+$ — непрерывная C^*-полунорма. Она является нормой некоторого непрерывного по норме представления $\pi : \mathcal{C}^\star(N) \to \mathcal{L}(X)$,

$$p(\alpha) = \|\dot{\pi}(\alpha)\|.$$

По теореме 3.38, индуцированное представление $\dot{T} : \mathcal{C}^\star(G) \to \mathcal{L}(L_2(N, X))$ также непрерывно по норме. Значит, норма

$$q(\beta) = \left\|\dot{T}(\beta)\right\|, \qquad \beta \in \mathcal{C}^\star(G),$$

непрерывна на $\mathcal{C}^\star(G)$. При этом, она продолжает p.

2. Пусть $D = G/N$. Для всякого класса смежности $R \in D = G/N$ обозначим через η_R его характеристическую функцию на G

$$\eta_R(s) = \begin{cases} 1, & s \in R \\ 0, & s \notin R \end{cases},$$

Поскольку N открыто в G, $\eta_R \in \mathcal{C}(G)$. Кроме того, в обозначениях (3.4.2) справедливо тождество:

$$\eta_{tN} = \eta_N \cdot t^{-1} = t^{-1} \cdot \eta_N, \qquad t \in G.$$

Для любой меры $\alpha \in \mathcal{C}^\star(G)$ обозначим далее символом α_R ее «ограничение» на R:

$$\alpha_R(u) = \alpha(\eta_R \cdot u), \qquad u \in \mathcal{C}(G).$$

Из цепочки

$$(\delta^{t^{-1}} * \alpha_{tN})(u) = (t^{-1} \cdot \alpha_{tN})(u) = (t^{-1} \cdot \alpha_{tN})(u) = \alpha_{tN}(u \cdot t^{-1}) = \alpha(\eta_{tN} \cdot (u \cdot t^{-1})) =$$

$$= \alpha((\eta_N \cdot t^{-1}) \cdot (u \cdot t^{-1})) = \alpha((\eta_N \cdot u) \cdot t^{-1}) = (t^{-1} \cdot \alpha)(\eta_N \cdot u) = (t^{-1} \cdot \alpha)_N(u)$$

мы получаем $\delta^{t^{-1}} * \alpha_{tN} = (t^{-1} \cdot \alpha)_N$, и отсюда

$$\mathsf{supp}(\delta^{t^{-1}} * \alpha_{tN}) \subseteq N$$

Каждому классу $R \in G/N$ поставим в соответствие представитель $t_R \in R$. Тогда $t_R N = R$.

Теперь для фиксированной полунормы $p \in \mathcal{P}(N)$ рассмотрим число

$$Q(\alpha) = \sum_{R \in G/N} p\Big(\delta^{t_R^{-1}} \cdot \alpha_R\Big) = \sum_{R \in G/N} p\Big((t_R^{-1} \cdot \alpha)_N\Big).$$

Сумма в правой части будет конечна, потому что из того, что $\alpha \in \mathcal{C}^\star(G)$ имеет компактный носитель, следует, что среди сдвигов $t_R^{-1} \cdot \alpha$ на элементы смежных классов $t_R \in R \in G/N$ по открытой погруппе N только конечное число может иметь носитель, пересекающийся с N, поэтому

$$\mathsf{card}\{R \in G/N : \ (t_R^{-1} \cdot \alpha)_N \neq 0\} < \infty$$

Таким образом, $Q(\alpha) \in \mathbb{C}$ для всякого $\alpha \in \mathcal{C}^\star(G)$, и мы получаем, что Q — полунорма на $\mathcal{C}^\star(G)$. С другой стороны, для всякой меры $\alpha \in \mathcal{C}^\star(G)$ с носителем в каком-нибудь классе смежности,

$$\mathsf{supp}\,\alpha \subseteq S \in G/N,$$

мы получим

$$Q(\alpha) = \sum_{R \in G/N} p\Big((t_R^{-1} \cdot \alpha)_N\Big) = p\Big((t_S^{-1} \cdot \alpha)_N\Big) = p\Big(t_S^{-1} \cdot \alpha\Big).$$

Отсюда следует, что отображение Q непрерывно на каждом классе смежности $\mathcal{C}^\star(S)$, потому что представляет собой композицию сдвига $\alpha \mapsto t_S^{-1} \cdot \alpha$ и непрерывного отображения p. С другой стороны, $\mathcal{C}^\star(G)$, как локально выпуклое пространство, представляет собой прямую сумму пространств $\mathcal{C}^\star(S)$, $S \in G/N$, поэтому $Q : \mathcal{C}^\star(G) \to \mathbb{R}_+$ — непрерывная полунорма (она не обязана быть C^*-полунормой).

Заметим, что для всякой полунормы $q \in \mathcal{P}(G)$ и любого унитарного элемента $\upsilon \in \mathcal{C}^\star(G)$ выполняется тождество $q(\upsilon * \alpha) = q(\alpha)$. В частности, $q((\delta^{t^{-1}} * \alpha_R)) = q(\alpha_R)$. Поэтому если вдобавок $q|_{\mathcal{C}^\star(N)} = p$, то

$$q(\alpha) = q\left(\sum_{R \in G/N} \alpha_R\right) \leqslant \sum_{R \in G/N} q(\alpha_R) = \sum_{R \in G/N} q\Big(\delta^{t^{-1}} * \alpha_R\Big) = \sum_{R \in G/N} p\Big(\delta^{t^{-1}} * \alpha_R\Big) = Q(\alpha)$$

Мы получаем, что всякое непрерывное C^*-продолжение q полунормы p с $\mathcal{C}^\star(N)$ на $\mathcal{C}^\star(G)$ подчинено непрерывной полунорме Q. Отсюда следует, что точная верхняя грань таких продолжений

$$p^{\max}(\alpha) = \sup_{q \in \mathcal{P}(G):\ q|_{\mathcal{C}^\star(N)} = p} q(\alpha) \leqslant Q(\alpha)$$

является непрерывной полунормой на $\mathcal{C}^\star(G)$. Очевидно, она будет C^*-полунормой.

3. Положим $r = \max\{q, p^{\max}\}$. Понятно, что $r \in \mathcal{P}(G)$, и

$$r = \max\{q, p^{\max}\} \geqslant p^{\max}.$$

С другой стороны, $r|_{\mathcal{C}^\star(N)} = p$, и, в силу уже доказанного свойства (ii),

$$r \leqslant p^{\max}.$$

Мы получаем, что $r = \max\{q, p^{\max}\} = p^{\max}$, и поэтому $q \leqslant p^{\max}$.

4. Зафиксируем $p_1, ..., p_n \in \mathcal{P}(N)$, и положим

$$p = \max\{p_1, ..., p_n\}, \qquad q = \max\{p_1^{\max}, ..., p_n^{\max}\}.$$

Тогда

$$q|_{\mathcal{C}^\star(N)} = \max\{p_1^{\max}, ..., p_n^{\max}\}|_{\mathcal{C}^\star(N)} = \max\{p_1, ..., p_n\} = p,$$

и, в силу уже доказанного 3°, $q \leqslant p^{\max}$. $\square$

Рассмотрим естественный изоморфизм алгебр [28, Theorem 8.4]

$$\mathcal{C}^\star(\mathbb{R}^n) \circledast \mathcal{C}^\star(K) \cong \mathcal{C}^\star(\mathbb{R}^n \times K).$$

Для всякого характера $\chi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}^\times$ и любого представления $\sigma \in \widehat{K}$ формула

$$p_{\chi,\sigma}(\alpha \circledast \beta) = |\alpha(\chi)| \cdot \|\dot{\sigma}(\beta)\|, \qquad \alpha \in \mathcal{C}^\star(\mathbb{R}^n), \quad \beta \in \mathcal{C}^\star(K)$$

однозначно определяет C^*-полунорму $p_{\chi,\sigma} : \mathcal{C}^\star(\mathbb{R}^n \times K) \to \mathbb{R}_+$.

Если теперь T — компактное множество характеров на $\mathbb{R}^n$ (то есть компактное множество в двойственной по Понтрягину группе $\widehat{\mathbb{R}^n} \cong \mathbb{R}^n$), то определена C^*-полунорма

$$p_{T,\sigma}(\eta) = \sup_{\chi \in T} p_{\chi,\sigma}(\eta), \qquad \eta \in \mathcal{C}^\star(\mathbb{R}^n \times K).$$

По свойству 2° на с.34, каждой такой полунорме соответствует полунорма

$$p^{\max}_{T,\sigma} : \mathcal{C}^\star(G) \to \mathbb{R}_+.$$

Лемма 5.29. *Для всякой SIN-группы G полунормы вида*

$$p_{T,S} = \max_{\sigma \in S} p^{\max}_{T,\sigma}, \tag{5.4.9}$$

где S пробегает систему конечных подмножеств в $\widehat{K}$, а T — систему компактов в $\widehat{\mathbb{R}^n} \cong \mathbb{R}^n$, образуют конфинальную систему среди всех C^*-полунорм на $\mathcal{C}^\star(G)$, а фактор-алгебры по этим полунормам имеют вид

$$\mathcal{C}^\star(G)/\max_{\sigma \in S} p^{\max}_{T,\sigma} = \prod_{\sigma \in \widehat{K}} \mathcal{C}^\star(G)/p^{\max}_{T,\sigma}. \tag{5.4.10}$$

Предложение 5.30. *Для любого представления* (3.5.2) *SIN-группы G в виде дискретного расширения группы $\mathbb{R}^n \times K$ непрерывная оболочка групповой алгебры $\mathcal{C}^\star(G)$ как стереотипная алгебра представляет собой прямое произведение*

$$\mathsf{Env}_{\mathcal{C}}\, \mathcal{C}^\star(G) = \prod_{\sigma \in \widehat{K}} \mathcal{C}^\star_\sigma(G), \tag{5.4.11}$$

в котором множители

$$\mathcal{C}^\star_\sigma(G) = \varprojlim_{T \subseteq \widehat{\mathbb{R}^n}} \mathcal{C}^\star(G)/p^{\max}_{T,\sigma}$$

являются алгебрами Фреше.

Доказательство. Сначала заметим, что произведение справа в (5.4.11) совпадает с оболочкой Кузнецовой (см. [29]), то есть проективным пределом системы C^*-фактор-отображений:

$$\begin{aligned}\varprojlim_{p \in \mathcal{P}(G)} \mathcal{C}^\star(G)/p = (\text{лемма } 5.29) = \varprojlim_{T \subseteq \widehat{\mathbb{R}^n}} \varprojlim_{S \subseteq \widehat{K}} \mathcal{C}^\star(G)/p_{T,S} = (5.4.9) = \\ = \varprojlim_{T \subseteq \widehat{\mathbb{R}^n}} \varprojlim_{S \subseteq \widehat{K}} \mathcal{C}^\star(G)/\max_{\sigma \in S} p^{\max}_{T,\sigma} = (5.4.10) = \varprojlim_{T \subseteq \widehat{\mathbb{R}^n}} \varprojlim_{S \subseteq \widehat{K}} \prod_{\sigma \in S} \mathcal{C}^\star(G)/p^{\max}_{T,\sigma} = \\ = \varprojlim_{T \subseteq \widehat{\mathbb{R}^n}} \prod_{\sigma \in \widehat{K}} \mathcal{C}^\star(G)/p^{\max}_{T,\sigma} = \prod_{\sigma \in \widehat{K}} \varprojlim_{T \subseteq \widehat{\mathbb{R}^n}} \mathcal{C}^\star(G)/p^{\max}_{T,\sigma} = \prod_{\sigma \in \widehat{K}} \mathcal{C}^\star_\sigma(G).\end{aligned} \tag{5.4.12}$$

Вдобавок система компактов $T \subseteq \widehat{\mathbb{R}^n}$ содержит счетную конфинальную подсистему T_k, поэтому каждый множитель

$$\mathcal{C}^\star_\sigma(G) = \varprojlim_{T \subseteq \widehat{\mathbb{R}^n}} \mathcal{C}^\star(G)/p^{\max}_{T,\sigma} = \varprojlim_{\infty \leftarrow k} \mathcal{C}^\star(G)/p^{\max}_{T_k,\sigma}$$

в действительности является счетным проективным пределом банаховых алгебр, и значит, алгеброй Фреше.

Заметим, наконец, что при каждой проекции $\mathcal{C}^\star(G) \to \mathcal{C}^\star_\sigma(G)$ теоретико-множественный образ пространства $\mathcal{C}^\star(G)$ плотен в $\mathcal{C}^\star_\sigma(G)$. Отсюда следует, что образ $\mathcal{C}^\star(G)$ плотен и в произведении

$\prod_{\sigma\in\widehat{K}}\mathcal{C}^\star_\sigma(G)$. Это в свою очередь означает, что непрерывная оболочка алгебры $\mathcal{C}^\star(G)$ совпадает с $\prod_{\sigma\in\widehat{K}}\mathcal{C}^\star_\sigma(G)$ (см. [29, (3.62)]). □

Предложение 5.31. *Для SIN-групп G непрерывная оболочка групповой алгебры $\mathcal{C}^\star(G)$ совпадает с локально выпуклой оболочкой Кузнецовой, то есть с проективным пределом ее C^*-фактор-алгебр в категории локально выпуклых пространств (и в категории топологических алгебр):*

$$\mathsf{Env}_{\mathcal{C}}\,\mathcal{C}^\star(G)=\mathtt{LCS}\text{-}\varprojlim_{p\in\mathcal{P}(\mathcal{C}^\star(G))}\mathcal{C}^\star(G)/p \tag{5.4.13}$$

Доказательство. Цепочка (5.4.12) справедлива также в категории локально выпуклых пространств, а множитель в конце ее $\mathcal{C}^\star_\sigma(G)=\varprojlim_{T\subseteq\widehat{\mathbb{R}^n}}\mathcal{C}^\star(G)/p^{\max}_{T,\sigma}$, будучи проективным пределом последовательности банаховых пространств, является пространством Фреше, и поэтому стереотипным пространством. Поэтому при переходе от категории $\mathtt{LCS}$ к категории $\mathtt{Ste}$ ничего не меняется. □

Предложение 5.32. *Непрерывная оболочка $\mathsf{Env}_{\mathcal{C}}(\theta):\mathsf{Env}_{\mathcal{C}}(\mathcal{C}^\star_\sigma(N))\to\mathsf{Env}_{\mathcal{C}}(\mathcal{C}^\star_\sigma(G))$ морфизма $\theta:\mathcal{C}^\star_\sigma(N)\to\mathcal{C}^\star_\sigma(G)$ является открытым и замкнутым отображением стереотипных пространств (в смысле* [29]*).*

Доказательство. Открытость этого отображения следует сразу из свойства 1° на с.34. После этого нужно заметить, что это отображение переводит каждую компоненту $\mathcal{C}^\star_\sigma(N)$ в компоненту $\mathcal{C}^\star_\sigma(G)$, причем такое отображение будет открытым отображением пространств Фреше. Отсюда следует его замкнутость, и из этого замкнутость всего $\mathsf{Env}_{\mathcal{C}}(\theta)$. □

5.4.6. Непрерывные оболочки групповой алгебры распределений $\mathcal{E}^\star(G)$. Если G — вещественная группа Ли, то помимо групповой алгебры $\mathcal{C}^\star(G)$ мер с компактным носителем на G можно рассмотреть групповую алгебру $\mathcal{E}^\star(G)$ распределений с компактным носителем на G (см. [28]). Если обозначить естественное включение $\mathcal{E}(G)\subseteq\mathcal{C}(G)$ каким-нибудь символом, например, λ, то мы получим диаграмму

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}^\star(G) \arrow[r, "\lambda^\star"] \arrow[d, "\mathsf{env}_{\mathcal{C}}\,\mathcal{C}^\star(G)"'] & \mathcal{E}^\star(G) \arrow[d, "\mathsf{env}_{\mathcal{C}}\,\mathcal{E}^\star(G)"] \\
\mathsf{Env}_{\mathcal{C}}\,\mathcal{C}^\star(G) \arrow[r, "\mathsf{Env}_{\mathcal{C}}(\lambda^\star)"] & \mathsf{Env}_{\mathcal{C}}\,\mathcal{E}^\star(G)
\end{tikzcd} \tag{5.4.14}$$

Теорема 5.33. *Для всякой вещественной группы Ли G непрерывные оболочки групповых алгебр $\mathcal{C}^\star(G)$ и $\mathcal{E}^\star(G)$ совпадают:*

$$\mathsf{Env}_{\mathcal{C}}\,\mathcal{C}^\star(G)=\mathsf{Env}_{\mathcal{C}}\,\mathcal{E}^\star(G). \tag{5.4.15}$$

Доказательство. Рассмотрим композицию

$$\mathcal{C}^\star(G)\xrightarrow{\ \lambda^\star\ }\mathcal{E}^\star(G)\xrightarrow{\mathsf{env}_{\mathcal{C}}\,\mathcal{E}^\star(G)}\mathsf{Env}_{\mathcal{C}}\,\mathcal{E}^\star(G)$$

и убедимся, что она является непрерывным расширением алгебры $\mathcal{C}^\star(G)$. Действительно, если $\varphi:\mathcal{C}^\star(G)\to B$ — морфизм в какую-нибудь C^*-алгебру B, то ему соответствует непрерывное (по норме) представление $\pi=\varphi\circ\delta:G\to B$, которое, в силу примера 3.17, будет гладким, и значит, будет продолжаться до некоторого гомоморфизма $\varphi'=\ddot{\pi}:\mathcal{E}^\star(G)\to B$. Этот гомоморфизм $\ddot{\pi}$ будет продолжать φ, потому что они совпадают на элементах вида δ^x, $x\in G$, которые полны в $\mathcal{C}^\star(G)$ и $\mathcal{E}^\star(G)$. После того, как построен гомоморфизм φ', он однозначно продолжается до некоторого гомоморфизма φ'' на алгебру $\mathsf{Env}_{\mathcal{C}}\,\mathcal{E}^\star(G)$, как на непрерывное расширение алгебры

$\mathcal{E}^\star(G)$:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}^\star(G) \arrow[r, "\lambda^\star"] \arrow[dr, bend right, "\varphi"'] & \mathcal{E}^\star(G) \arrow[r, "\mathsf{env}_{\mathcal{C}}\,\mathcal{E}^\star(G)"] \arrow[d, dashed, "\varphi'=\ddot{\pi}"] & \mathsf{Env}_{\mathcal{C}}\,\mathcal{E}^\star(G) \arrow[dl, dashed, bend left, "\varphi''"] \\
& B &
\end{tikzcd}$$

Это доказывает, что $\mathsf{Env}_{\mathcal{C}}\,\mathcal{E}^\star(G)$ — непрерывное расширение алгебры $\mathcal{C}^\star(G)$. Значит, существует единственный морфизм υ из $\mathsf{Env}_{\mathcal{C}}\,\mathcal{E}^\star(G)$ в непрерывную обоолочку $\mathcal{C}^\star(G)$, замыкающий диаграмму

$$\begin{tikzcd}
& \mathcal{C}^\star(G) \arrow[dl, bend right, "\lambda^\star"'] \arrow[dr, bend left, "\mathsf{env}_{\mathcal{C}}\,\mathcal{C}^\star(G)\circ\lambda^\star"] & \\
\mathsf{Env}_{\mathcal{C}}\,\mathcal{C}^\star(G) & & \mathsf{Env}_{\mathcal{C}}\,\mathcal{E}^\star(G) \arrow[ll, dashed, "\upsilon"']
\end{tikzcd}$$

Из того, что $\mathcal{C}^\star(G)$ плотно в $\mathsf{Env}_{\mathcal{C}}\,\mathcal{C}^\star(G)$ и $\mathsf{Env}_{\mathcal{C}}\,\mathcal{E}^\star(G)$, следует, что υ — обратный морфизм к $\mathsf{Env}_{\mathcal{C}}(\lambda^\star)$ из (5.4.14). $\square$

5.5. Алгебра $\mathcal{K}(G)$

Для всякой локально компактной группы G ее групповая алгебра мер $\mathcal{C}^\star(G)$ является инволютивной алгеброй Хопфа относительно проективного стереотипного тензорного произведения $\circledast$. Поэтому, по теоремам 5.14 и 5.15, ее непрерывная оболочка $\mathsf{Env}_{\mathcal{C}}\,\mathcal{C}^\star(G)$ должна быть коалгеброй с согласованными антиподом и инволюцией в категориях $\mathcal{C}$-`Alg` непрерывных алгебр и $(\mathtt{Ste}, \odot)$ стереотипных пространств. Обозначим символом $\mathcal{K}(G)$ пространство, стереотипно сопряженное к $\mathsf{Env}_{\mathcal{C}}\,\mathcal{C}^\star(G)$:

$$\mathcal{K}(G) := \Big(\mathsf{Env}_{\mathcal{C}}\,\mathcal{C}^\star(G)\Big)^\star. \tag{5.5.1}$$

Это сопряженное пространство к коалгебре в $(\mathtt{Ste}, \odot)$ с согласованными антиподом и инволюцией, поэтому по свойству 4° на с.67, справедлива

Теорема 5.34. *Для всякой локально компактной группы G пространство $\mathcal{K}(G)$ является алгеброй в категории $(\mathtt{Ste}, \circledast)$ (то есть стереотипной алгеброй) с согласованными антиподом и инволюцией.*

По теореме 5.15(ii) морфизм

$$\mathsf{env}_{\mathcal{C}}^\star = \big(\mathsf{env}_{\mathcal{C}}\,\mathcal{C}^\star(G)\big)^\star : \mathcal{K}(G) = \Big(\mathsf{Env}_{\mathcal{C}}\,\mathcal{C}^\star(G)\Big)^\star \to \mathcal{C}^\star(G)^\star = \mathcal{C}(G), \tag{5.5.2}$$

сопряженный к морфизму оболочки, является инволютивным гомоморфизмом алгебр:

$$\mathsf{env}_{\mathcal{C}}^\star 1 = 1, \qquad \mathsf{env}_{\mathcal{C}}^\star(u \cdot v) = \mathsf{env}_{\mathcal{C}}^\star(u) \cdot \mathsf{env}_{\mathcal{C}}^\star(v), \qquad \mathsf{env}_{\mathcal{C}}^\star\,\overline{u} = \overline{\mathsf{env}_{\mathcal{C}}^\star\,u}, \qquad u, v \in \mathcal{K}(G) \tag{5.5.3}$$

Покажем, что у него нулевое ядро. Действительно, группа G вкладывается в алгебру $\mathsf{Env}_{\mathcal{C}}\,\mathcal{C}^\star(G)$ как композиция дельта-отображения и оболочки

$$G \xrightarrow{\delta} \mathcal{C}^\star(G) \xrightarrow{\mathsf{env}_{\mathcal{C}}\,\mathcal{C}^\star(G)} \mathsf{Env}_{\mathcal{C}}\,\mathcal{C}^\star(G).$$

При этом образ G полон (то есть линейные комбинации его элементов плотны) в $\mathcal{C}^\star(G)$ (в силу [28, Lemma 8.2]), а образ $\mathcal{C}^\star(G)$ плотен в $\mathsf{Env}_{\mathcal{C}}\,\mathcal{C}^\star(G)$. Поэтому образ G полон в $\mathsf{Env}_{\mathcal{C}}\,\mathcal{C}^\star(G)$. Отсюда следует, что всякий элемент $u \in \mathcal{K}(G) := \Big(\mathsf{Env}_{\mathcal{C}}\,\mathcal{C}^\star(G)\Big)^\star$ однозначно определяется композицией

$$u \circ \mathsf{env}_{\mathcal{C}}\,\mathcal{C}^\star(G) \circ \delta : G \to \mathbb{C},$$

которую можно понимать как ограничение u на группу G. В частности, если эта композиция равна нулю в $\mathcal{C}(G)$, то $u = 0$ в $\mathcal{K}(G)$.

Важный для нас вывод состоит в том, что $\mathcal{K}(G)$ можно понимать как некую инволютивную подалгебру в $\mathcal{C}(G)$:

Теорема 5.35. *Отображение $u \mapsto u \circ \mathsf{env}_{\mathcal{C}}\, \mathcal{C}^\star(G) \circ \delta$ совпадает с отображением $\mathsf{env}_{\mathcal{C}}\, \mathcal{C}^\star(G)^\star$, сопряженным к $\mathsf{env}_{\mathcal{C}}\, \mathcal{C}^\star(G)$:*

$$\mathsf{env}_{\mathcal{C}}\, \mathcal{C}^\star(G)^\star(u) = u \circ \mathsf{env}_{\mathcal{C}}\, \mathcal{C}^\star(G) \circ \delta \tag{5.5.4}$$

и инъективно и гомоморфно вкладывает $\mathcal{K}(G)$ в $\mathcal{C}(G)$ в качестве инволютивной подалгебры (и поэтому операции сложения, умножения и инволюции в $\mathcal{K}(G)$ являются поточечными).

Теорема 5.36. *Алгебра $\mathcal{K}(G)$ как стереотипное пространство представима в виде узлового кообраза (в категории стереотипных пространств)*

$$\mathcal{K}(G) = \mathsf{Coim}_\infty\, \varphi^\star \tag{5.5.5}$$

отображения $\varphi^\star$, сопряженного к естественному морфизму стереотипных пространств

$$\varphi : \mathcal{C}^\star(G) \to \varprojlim_{p \in \mathcal{P}(\mathcal{C}^\star(G))} \mathcal{C}^\star(G)/p.$$

Доказательство. Рассмотрим диаграмму (5.1.16) для $A = \mathcal{C}^\star(G)$

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}^\star(G) \arrow[r, "\varphi = \varprojlim_{p \in \mathcal{P}(\mathcal{C}^\star(G))} \rho_p"] \arrow[d, "\mathsf{coim}_\infty\, \varphi"'] & \varprojlim_{p \in \mathcal{P}(\mathcal{C}^\star(G))} \mathcal{C}^\star(G)/p & \\
\mathsf{Coim}_\infty\, \varphi \arrow[r, "\mathsf{red}_\infty\, \varphi"'] & \mathsf{Im}_\infty\, \varphi \arrow[u, "\mathsf{im}_\infty\, \varphi"'] \arrow[r, equal] & \mathsf{Env}_{\mathcal{C}}\, \mathcal{C}^\star(G)
\end{tikzcd}$$

Сопряженная диаграмма имеет вид

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}(G) & \Big(\varprojlim_{p \in \mathcal{P}(\mathcal{C}^\star(G))} \mathcal{C}^\star(G)/p\Big)^\star \arrow[l, "\varphi^\star"'] \arrow[r, equal] \arrow[d, "\mathsf{coim}_\infty\, \varphi^\star"] & \varinjlim_{p \in \mathcal{P}(\mathcal{C}^\star(G))} \Big(\mathcal{C}^\star(G)/p\Big)^\star \\
\mathsf{Im}_\infty\, \varphi^\star \arrow[u, "\mathsf{im}_\infty\, \varphi^\star"] & \mathsf{Coim}_\infty\, \varphi^\star \arrow[l, "\mathsf{red}_\infty\, \varphi^\star"] \arrow[r, equal] & \mathcal{K}(G)
\end{tikzcd} \tag{5.5.6}$$

□

Вспомним о пространствах функций $\mathsf{Trig}(G)$ и $k(G)$, определенных на с. 93 и 93.

Теорема 5.37. *Справедлива цепочка теоретико-множественных включений,*

$$\mathsf{Trig}(G) \subseteq k(G) \subseteq \mathcal{K}(G) \subseteq \mathcal{C}(G), \tag{5.5.7}$$

причем

(i) *всегда*

$$\overline{\mathsf{Trig}(G)} = \mathcal{K}(G), \tag{5.5.8}$$

(ii) *если G — SIN-группа, то*

$$k(G) = \mathcal{K}(G) \tag{5.5.9}$$

и

$$\overline{\mathsf{Trig}(G)} = \overline{k(G)} = \overline{\mathcal{K}(G)} = \mathcal{C}(G). \tag{5.5.10}$$

(iii) *если G — компактная группа, то*

$$\mathsf{Trig}(G) = k(G) = \mathcal{K}(G) \tag{5.5.11}$$

Доказательство. 1. В цепочке (5.5.7) первое включение очевидно, а третье уже отмечалось в теореме 5.35. Докажем второе: $k(G) \subseteq \mathcal{K}(G)$. Пусть $u \in k(G)$, то есть выполняется (3.5.9), где $\pi : G \to \mathcal{B}(X)$ — непрерывное по норме унитарное представление. По теореме 3.35 π порождает некий (непрерывный) гомоморфизм инволютивных алгебр $\psi : \mathcal{C}^\star(G) \to \mathcal{B}(X)$. Поскольку здесь $\mathcal{B}(X)$ — C^*-алгебра, он должен продолжаться до (непрерывного) гомоморфизма инволютивных алгебр $\psi' : \mathsf{Env}_{\mathcal{C}}\, \mathcal{C}^\star(G) \to \mathcal{B}(X)$. Рассмотрим функционал

$$f(\beta) = \langle \psi'(\beta)x, y\rangle, \qquad \beta \in \mathsf{Env}_{\mathcal{C}}\, \mathcal{C}^\star(G)$$

на $\mathcal{K}^\star(G)$. Он будет порождать функцию на G, совпадающую с u:

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[r, "\delta"] \arrow[dr, "\pi"'] \arrow[ddr, bend right, "u"'] & \mathcal{C}^\star(G) \arrow[r, "\mathsf{env}_{\mathcal{C}}\, \mathcal{C}^\star(G)"] \arrow[d, dashed, "\psi"'] & \mathsf{Env}_{\mathcal{C}}\, \mathcal{C}^\star(G) \arrow[dl, dashed, "\psi'"] \arrow[ddl, dashed, bend left, "f"] \\
& \mathcal{B}(X) \arrow[d] & \\
& \mathbb{C} &
\end{tikzcd}$$

Это как раз и означает, что $u \in \mathcal{K}(G)$.

2. Покажем, что $\mathsf{Trig}(G)$ плотно в $\mathcal{K}(G)$. Каждую алгебру $\mathcal{C}^\star(G)/p$ можно изометрически вложить в алгебру вида $\mathcal{B}(X)$:

$$\mathcal{C}^\star(G)/p \to \mathcal{B}(X).$$

При этом, во-первых, по теореме Хана-Банаха всякий функционал $f \in (\mathcal{C}^\star(G)/p)^\star$ продолжается до некоторого функционала $g \in \mathcal{B}(X)^\star$, а, во-вторых, всякий функционал $g \in \mathcal{B}(X)^\star$ приближается в $\mathcal{B}(X)^\star$ линейными комбинациями чистых состояний, то есть (пример 3.18) функционалами, порождающими функции из $\mathsf{Trig}(G)$. Это значит, что при сопряженном отображении

$$(\mathcal{C}^\star(G)/p)^\star \leftarrow \mathcal{B}(X)^\star$$

функционалы, порождающие функции из $\mathsf{Trig}(G)$, переходят в плотное подмножество в $(\mathcal{C}^\star(G)/p)^\star$. Поскольку это верно для каждой полунормы $p \in \mathcal{P}(\mathcal{C}^\star(G))$, мы получаем, что функционалы из

$$\Big(\varprojlim_{p\in\mathcal{P}(\mathcal{C}^\star(G))} \mathcal{C}^\star(G)/p \Big)^\star = \varinjlim_{p\in\mathcal{P}(\mathcal{C}^\star(G))} \Big(\mathcal{C}^\star(G)/p\Big)^\star,$$

порождающие функции из $\mathsf{Trig}(G)$, плотны в

$$\Big(\varprojlim_{p\in\mathcal{P}(\mathcal{C}^\star(G))} \mathcal{C}^\star(G)/p \Big)^\star = \varinjlim_{p\in\mathcal{P}(\mathcal{C}^\star(G))} \Big(\mathcal{C}^\star(G)/p\Big)^\star.$$

С другой стороны, в диаграмме (5.5.6) видно, что

$$\Big(\varprojlim_{p\in\mathcal{P}(\mathcal{C}^\star(G))} \mathcal{C}^\star(G)/p \Big)^\star = \varinjlim_{p\in\mathcal{P}(\mathcal{C}^\star(G))} \Big(\mathcal{C}^\star(G)/p\Big)^\star$$

плотно отображается в $\mathcal{K}(G)$. Вместе это значит, что $\mathsf{Trig}(G)$ плотно в $\mathcal{K}(G)$.

3. Пусть далее G — SIN-группа. По предложению 5.31, оболочка $\mathsf{Env}_{\mathcal{C}}\, \mathcal{C}^\star(G)$ совпадает с локально выпуклым проективным пределом фактор-алгебр $\mathcal{C}^\star(G)/p$:

$$\mathsf{Env}_{\mathcal{C}}\, \mathcal{C}^\star(G) = \mathsf{LCS}\text{-}\varprojlim_{p\in\mathcal{P}(\mathcal{C}^\star(G))} \mathcal{C}^\star(G)/p.$$

Отсюда следует, что сопряженное пространство должно быть локально выпуклым инъективным пределом пространств $(\mathcal{C}^\star(G)/p)^\star$

$$\mathcal{K}(G) = \mathsf{Env}_{\mathcal{C}}\, \mathcal{C}^\star(G)^\star = \texttt{LCS-}\varinjlim_{p\in\mathcal{P}(\mathcal{C}^\star(G))} (\mathcal{C}^\star(G)/p)^\star.$$

Мы получаем, что всякая функция $u \in \mathcal{K}(G)$ порождается некоторым функционалом $f \in (\mathcal{C}^\star(G)/p)^\star$. Но с другой стороны, всякий такой функционал является линейной комбинацей конечного набора состояний на C^*-алгебре (см. [47, 4.3.7]), и поэтому u есть сумма положительно определенных функций. Но по теореме 3.40 всякая положительно определенная и подчиненная C^*-полунорме функция лежит в $k(G)$. Это доказывает (5.5.9). Далее, если G — SIN-группа, то алгебра $k(G)$ разделяет точки G. Вдобавок она содержит единицу, а значит, и все константы. Поэтому по теореме Стоуна-Вейерштрасса, ограничение $k(G)$ на произвольный компакт $K \subseteq G$ плотно в $\mathcal{C}(K)$, и значит, $k(G) = \mathcal{K}(G)$ плотно в $\mathcal{C}(G)$.

4. Утверждение (iii) следует из (ii) и теоремы 3.41. $\square$

5.5.1. Отображение $\mathcal{K}(G) \circledast \mathcal{K}(H) \to \mathcal{K}(G \times H)$. Пусть G и H — две локально компактные группы. Каждой паре функций $u \in \mathcal{C}(G)$ и $v \in \mathcal{C}(H)$ поставим в соответствие функцию на декартовом произведении $G \times H$:

$$(u \boxdot v)(s,t) = u(s)\cdot v(t), \qquad s \in G,\ t \in H. \tag{5.5.12}$$

Как известно [29, Theorem 8.4], существует единственное линейное непрерывное отображение

$$\iota : \mathcal{C}(G) \odot \mathcal{C}(H) \to \mathcal{C}(G \times H)$$

удовлетворяющее тождеству

$$\iota(u \odot v) = u \boxdot v, \qquad u \in \mathcal{C}(G), \quad v \in \mathcal{C}(H).$$

(ι является изоморфизмом стереотипных алгебр). Обозначим

$$\omega_{G,H} = \eta_{\mathcal{K}^\star(G),\mathcal{K}^\star(H)} \circ \mathsf{Env}_{\mathcal{C}}(\mathsf{env}_{\mathcal{C}}\, \mathcal{C}^\star(G) \circledast \mathsf{env}_{\mathcal{C}}\, \mathcal{C}^\star(H)) \circ \mathsf{Env}_{\mathcal{C}}(\iota^\star). \tag{5.5.13}$$

Действие этого отображения иллюстрируется следующей диаграммой:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}^\star(G\times H) \arrow[r, "\mathsf{env}_{\mathcal{C}}\,\mathcal{C}^\star(G\times H)"] \arrow[d, "\iota^\star"'] & \mathsf{Env}_{\mathcal{C}}\,\mathcal{C}^\star(G\times H) \arrow[r, equal] \arrow[d, "\mathsf{Env}_{\mathcal{C}}(\iota^\star)"] & \mathcal{K}^\star(G\times H) \arrow[dd, dashed, "\omega_{G,H}"] \\
\mathcal{C}^\star(G)\circledast\mathcal{C}^\star(H) \arrow[r, "\mathsf{env}_{\mathcal{C}}\left(\mathcal{C}^\star(G)\circledast\mathcal{C}^\star(H)\right)"] \arrow[d, "\mathsf{env}_{\mathcal{C}}\,\mathcal{C}^\star(G)\circledast\mathsf{env}_{\mathcal{C}}\,\mathcal{C}^\star(H)"'] & \mathsf{Env}_{\mathcal{C}}\left(\mathcal{C}^\star(G)\circledast\mathcal{C}^\star(H)\right) \arrow[d, "\mathsf{Env}_{\mathcal{C}}\left(\mathsf{env}_{\mathcal{C}}\,\mathcal{C}^\star(G)\circledast\mathsf{env}_{\mathcal{C}}\,\mathcal{C}^\star(H)\right)"'] & \\
\mathsf{Env}_{\mathcal{C}}\,\mathcal{C}^\star(G)\circledast\mathsf{Env}_{\mathcal{C}}\,\mathcal{C}^\star(H) \arrow[r, "\mathsf{env}_{\mathcal{C}}\left(\mathsf{Env}_{\mathcal{C}}\,\mathcal{C}^\star(G)\circledast\mathsf{Env}_{\mathcal{C}}\,\mathcal{C}^\star(H)\right)"] \arrow[dd, equal] & \mathsf{Env}_{\mathcal{C}}(\mathsf{Env}_{\mathcal{C}}\,\mathcal{C}^\star(G)\circledast\mathsf{Env}_{\mathcal{C}}\,\mathcal{C}^\star(H)) \arrow[r, "\eta_{\mathcal{K}^\star(G),\mathcal{K}^\star(H)}"] \arrow[d, equal] & \mathcal{K}^\star(G)\odot\mathcal{K}^\star(H) \\
 & \mathcal{K}^\star(G)\overset{\mathcal{C}}{\circledast}\mathcal{K}^\star(H) & \\
\mathcal{K}^\star(G)\circledast\mathcal{K}^\star(H) \arrow[rruu, bend right, "@_{\mathcal{K}^\star(G),\mathcal{K}^\star(H)}"'] & &
\end{tikzcd}$$

Рассмотрим сопряженное отображение:

$$\mathcal{K}(G\times H) \xleftarrow{\ \omega^\star_{G,H}\ } \mathcal{K}(G)\circledast\mathcal{K}(H)$$

Теорема 5.38. *Для любых двух локально компактных групп G и H справедливо тождество*

$$\omega^\star_{G,H}(u\circledast v)=u\boxdot v,\qquad u\in\mathcal{K}(G),\quad v\in\mathcal{K}(H). \tag{5.5.14}$$

Доказательство. Рассмотрим сопряженную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}(G\times H) & & \big(\operatorname{Env}_{\mathcal{C}}\mathcal{C}^\star(G\times H)\big)^\star \arrow[ll, "\big(\operatorname{env}_{\mathcal{C}}\mathcal{C}^\star(G\times H)\big)^\star"'] \arrow[r, equal] & \mathcal{K}(G\times H) \\
\mathcal{C}(G)\odot\mathcal{C}(H) \arrow[u, "\iota"] & & \operatorname{Env}_{\mathcal{C}}\big(\mathcal{C}^\star(G)\circledast\mathcal{C}^\star(H)\big)^\star \arrow[ll, "\Big(\operatorname{env}_{\mathcal{C}}\big(\mathcal{C}^\star(G)\circledast\mathcal{C}^\star(G)\big)\Big)^\star"'] \arrow[u, "\operatorname{Env}_{\mathcal{C}}(\iota^\star)^\star"'] & \\
(\operatorname{Env}_{\mathcal{C}}\mathcal{C}^\star(G))^\star\odot(\operatorname{Env}_{\mathcal{C}}\mathcal{C}^\star(H))^\star \arrow[u, "\big(\operatorname{env}_{\mathcal{C}}\mathcal{C}^\star(G)\circledast\operatorname{env}_{\mathcal{C}}\mathcal{C}^\star(H)\big)^\star"] \arrow[d, equal] & & \operatorname{Env}_{\mathcal{C}}(\operatorname{Env}_{\mathcal{C}}\mathcal{C}^\star(G)\circledast\operatorname{Env}_{\mathcal{C}}\mathcal{C}^\star(H))^\star \arrow[ll, "\operatorname{env}_{\mathcal{C}}\big(\operatorname{Env}_{\mathcal{C}}\mathcal{C}^\star(G)\circledast\operatorname{Env}_{\mathcal{C}}\mathcal{C}^\star(H)\big)^\star"'] \arrow[u, "\operatorname{Env}_{\mathcal{C}}\big(\operatorname{env}_{\mathcal{C}}\mathcal{C}^\star(G)\circledast\operatorname{env}_{\mathcal{C}}\mathcal{C}^\star(H)\big)^\star"] & \mathcal{K}(G)\circledast\mathcal{K}(H) \arrow[l, "\eta^\star_{\mathcal{K}^\star(G),\mathcal{K}^\star(H)}"'] \arrow[uu, dashed, "\omega^\star_{G,H}"'] \arrow[dlll, bend left, "@_{\mathcal{K}(G),\mathcal{K}(H)}"] \\
\mathcal{K}(G)\odot\mathcal{K}(H) & & &
\end{tikzcd}$$

Двигаясь из правого нижнего угла в левый верхний элементарный тензор $u\circledast v$, с одной стороны, проделает путь

$$u\circledast v \xrightarrow{\quad @\quad} u\odot v \xrightarrow{(\operatorname{env}_{\mathcal{C}}\mathcal{C}^\star(G)\circledast\operatorname{env}_{\mathcal{C}}\mathcal{C}^\star(H))^\star} u\odot v \xrightarrow{\quad\iota\quad} u\boxdot v$$

а с другой - путь

$$u\circledast v \xrightarrow{\quad\omega^\star_{G,H}\quad} \omega^\star_{G,H}(u\odot v) \xrightarrow{\big(\operatorname{env}_{\mathcal{C}}\mathcal{C}^\star(G\times H)\big)^\star} \big(\operatorname{env}_{\mathcal{C}}\mathcal{C}^\star(G\times H)\big)^\star(\omega^\star_{G,H}(u\odot v))$$

Отсюда

$$\big(\operatorname{env}_{\mathcal{C}}\mathcal{C}^\star(G\times H)\big)^\star(\omega^\star_{G,H}(u\odot v))=u\boxdot v,$$

и поскольку по теореме 5.35, $\big(\operatorname{env}_{\mathcal{C}}\mathcal{C}^\star(G\times H)\big)^\star$ можно считать теоретико-множественным вложением,

$$\omega^\star_{G,H}(u\odot v)=u\boxdot v.$$

$\square$

Теорема 5.39. *Если C — абелева локально компактная группа, а K — компактная группа, то отображение $\omega_{C,K}:\mathcal{K}(C)\circledast\mathcal{K}(K)\to\mathcal{K}(C\times K)$ является изоморфизмом:*

$$\mathcal{K}(C\times K)\cong\mathcal{K}(C)\circledast\mathcal{K}(K) \tag{5.5.15}$$

Доказательство. Это следует из (5.4.4):

$$\mathcal{K}(C\times K)=\Big(\mathsf{Env}_{\mathcal{C}}\,\mathcal{C}^\star(C\times K)\Big)^\star\cong(5.4.4)\cong\Big(\mathsf{Env}_{\mathcal{C}}\,\mathcal{C}^\star(C)\odot\mathsf{Env}_{\mathcal{C}}\,\mathcal{C}^\star(K)\Big)^\star\cong$$
$$\cong\Big(\mathsf{Env}_{\mathcal{C}}\,\mathcal{C}^\star(C)\Big)^\star\circledast\Big(\mathsf{Env}_{\mathcal{C}}\,\mathcal{C}^\star(K)\Big)^\star\cong\mathcal{K}(C)\circledast\mathcal{K}(K)$$

□

5.5.2. Сдвиг в $\mathcal{K}(G)$.

Теорема 5.40. *Сдвиг (правый и левый) на произвольный элемент $a\in G$ является изоморфизмом стереотипной алгебры $\mathcal{K}(G)$.*

Доказательство. Докажем это для оператора левого сдвига: пусть

$$M_a:\mathcal{C}^\star(G)\to\mathcal{C}^\star(G)\quad\Big|\quad M_a(\alpha)=\delta^a*\alpha,\qquad\alpha\in\mathcal{C}^\star(G).$$

Обозначим $\eta_a=\mathsf{env}_{\mathcal{C}}(\delta^a)$ и положим

$$N_a:\mathsf{Env}_{\mathcal{C}}\,\mathcal{C}^\star(G)\to\mathsf{Env}_{\mathcal{C}}\,\mathcal{C}^\star(G)\quad\Big|\quad N_a(\omega)=\eta_a*\omega,\qquad\omega\in\mathsf{Env}_{\mathcal{C}}\,\mathcal{C}^\star(G)$$

(здесь $*$ — умножение в алгебре $\mathsf{Env}_{\mathcal{C}}\,\mathcal{C}^\star(G)$). Тогда

$$\mathsf{env}_{\mathcal{C}}(M_a(\alpha))=\mathsf{env}_{\mathcal{C}}(\delta^a*\alpha)=\mathsf{env}_{\mathcal{C}}(\delta^a)*\mathsf{env}_{\mathcal{C}}(\alpha)=N_a(\mathsf{env}_{\mathcal{C}}(\alpha)),$$

то есть коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}^\star(G) \arrow[r, "\mathsf{env}_{\mathcal{C}}"] \arrow[d, "M_a"'] & \mathsf{Env}_{\mathcal{C}}\,\mathcal{C}^\star(G) \arrow[d, "N_a"] \\
\mathcal{C}^\star(G) \arrow[r, "\mathsf{env}_{\mathcal{C}}"] & \mathsf{Env}_{\mathcal{C}}\,\mathcal{C}^\star(G)
\end{tikzcd} \qquad (5.5.16)$$

Как следствие, коммутативна двойственная диаграмма

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}(G) & \mathcal{K}(G) \arrow[l, "\mathsf{env}_{\mathcal{C}}^\star"'] \\
\mathcal{C}(G) \arrow[u, "M_a^\star"] & \mathcal{K}(G) \arrow[l, "\mathsf{env}_{\mathcal{C}}^\star"'] \arrow[u, "N_a^\star"']
\end{tikzcd}$$

Из нее следует, что, во-первых, $N_a^\star$ — оператор левого сдвига на элемент a в функциональной алгебре $\mathcal{K}(G)$, потому что при гомоморфной инъекции $\mathsf{env}_{\mathcal{C}}^\star$ (описанной в теореме 5.35) он превращается в оператор $M_a^\star$ сдвига на элемент a на алгебре $\mathcal{C}(G)$. И, во-вторых, что $N_a^\star$ — гомоморфизм алгебр, потому что

$$\mathsf{env}_{\mathcal{C}}^\star\,N_a^\star(u\cdot v)=M_a^\star\Big(\mathsf{env}_{\mathcal{C}}^\star(u\cdot v)\Big)=(5.5.3)=M_a^\star\Big(\mathsf{env}_{\mathcal{C}}^\star(u)\cdot\mathsf{env}_{\mathcal{C}}^\star(v)\Big)=$$
$$=M_a^\star\,\mathsf{env}_{\mathcal{C}}^\star(u)\cdot M_a^\star\,\mathsf{env}_{\mathcal{C}}^\star(v)=\mathsf{env}_{\mathcal{C}}^\star(N_a^\star u)\cdot\mathsf{env}_{\mathcal{C}}^\star(N_a^\star v)=(5.5.3)=\mathsf{env}_{\mathcal{C}}^\star(N_a^\star u\cdot N_a^\star v)$$

и, поскольку, по теореме 5.35, $\mathsf{env}_{\mathcal{C}}^\star$ — инъективное отображение,

$$N_a^\star(u\cdot v)=N_a^\star u\cdot N_a^\star v.$$

□

5.6. Непрерывная двойственность для групп Мура

Вспомним, что мы определили группы Мура на с.90, как те, у которых все унитарные неприводимые представления $\pi : G \to \mathcal{L}(X)$ конечномерны. По теореме 3.29, всякая такая группа является SIN-группой, поэтому для нее справедливо представление (3.5.2),

$$1 \to \mathbb{R}^n \times K = N \to G \to D \to 1$$

в котором K — компактная группа, а D — дискретная. По следствию 3.32 D здесь тоже является группой Мура.

5.6.1. Плотность отображения $\omega^\star_{G.H} : \mathcal{K}(G) \circledast \mathcal{K}(H) \to \mathcal{K}(G \times H)$.

Теорема 5.41. *Для любых двух групп Мура G и H функции вида $u \boxdot v$ (определенные в (5.5.12)), где $u \in \mathcal{K}(G)$ и $v \in \mathcal{K}(H)$, полны в $\mathcal{K}(G \times H)$.*

Доказательство. Рассмотрим функцию w вида (3.5.9) на группе $G \times H$. Поскольку $G \times H$ — тоже группа Мура, неприводимое представление $\pi : G \times H \to \mathcal{B}(X)$ должно быть конечномерным. Пусть $e_1, ..., e_n$ — ортонормированный базис в X, и пусть $\rho : G \to \mathcal{B}(X)$ и $\sigma : H \to \mathcal{B}(X)$ — представления, действующие по формулам

$$\rho(s) = \pi(s, 1_H), \qquad \sigma(t) = \pi(1_G, t), \qquad s \in G, \quad t \in H.$$

Тогда

$$w(s,t) = \Big\langle \pi(s,t)x, y \Big\rangle = \Big\langle \pi\Big((s, 1_H) \cdot (1_G, t)\Big)x, y \Big\rangle = \Big\langle \Big(\pi(s, 1_H) \cdot \pi(1_G, t)\Big)x, y \Big\rangle =$$
$$= \Big\langle \Big(\rho(s) \cdot \sigma(t)\Big)x, y \Big\rangle = \langle \sigma(t)x, \rho(s)^\bullet y \rangle = \sum_{i=1}^n \langle \sigma(t)x, e_i \rangle \cdot \langle e_i, \rho(s)^\bullet y \rangle =$$
$$= \sum_{i=1}^n \langle \sigma(t)x, e_i \rangle \cdot \langle \rho(s)e_i, y \rangle = \sum_{i=1}^n (u_i \boxdot v_i)(s,t),$$

где

$$u_i(s) = \langle \rho(s)e_i, y \rangle, \qquad v_i(t) = \langle \sigma(t)x, e_i \rangle.$$

Из этого следует, что пространство $\mathsf{Trig}(G \times H)$ непрерывных по норме тригонометрических многочленов на G содержится в линейной оболочке множества функций $u \boxdot v$, где $u \in \mathcal{K}(G)$ и $v \in \mathcal{K}(H)$. Значит,

$$\overline{\mathsf{span}\{u \boxdot v;\ u \in \mathcal{K}(G),\ v \in \mathcal{K}(H)\}} \supseteq \overline{\mathsf{Trig}(G \times H)} = (5.5.8) = \mathcal{K}(G \times H).$$

$\square$

5.6.2. Спектр и непрерывная оболочка алгебры $\mathcal{K}(G)$ для групп Мура.

Последнее вложение в (5.5.7)

$$\mathcal{K}(G) \subseteq \mathcal{C}(G)$$

означает, между прочим, что спектры этих алгебр связаны естественным непрерывным отображением

$$\mathsf{Spec}\,\mathcal{K}(G) \leftarrow \mathsf{Spec}\,\mathcal{C}(G) = G.$$

В случае, если G — группа Мура, это отображение является гомеоморфизмом:

Теорема 5.42. *Если G — группа Мура, то инволютивный спектр алгебры $\mathcal{K}(G)$ топологически изоморфен G:*

$$\mathsf{Spec}\,\mathcal{K}(G) = G \tag{5.6.1}$$

Доказательству мы предпошлем 8 лемм.

Лемма 5.43. *Если G — аменабельная дискретная группа, то отображение спектров $G \to \mathsf{Spec}\,\mathcal{K}(G)$ является биекцией.*

Доказательство. Здесь используются идеи [51, Theorem 6.3]. По предложению 5.28, непрерывной оболочкой групповой алгебры для G в данном случае будет C^*-алгебра этой группы:

$$\mathsf{Env}_{\mathcal{C}}\,\mathcal{C}^\star(G) = C^*(G)$$

Ее сопряженное пространство (в банаховом смысле) представляет собой классическую алгебру Фурье-Стилтьеса $B(G)$, поэтому алгебра $\mathcal{K}(G)$ совпадает как множество с $B(G)$ (см. [40, 59]):

$$\mathcal{K}(G) = \mathsf{Env}_{\mathcal{C}}\,\mathcal{C}^\star(G)^\star = C^*(G)^\star = B(G).$$

(это равенство векторных пространств, но топология на $B(G)$ сильнее топологии на $\mathcal{K}(G)$). Алгебра $B(G)$ содержит идеал $A(G)$, называемый алгеброй Фурье (см. [40, 59]):

$$\mathcal{K}(G) = B(G) \supseteq A(G).$$

Из аменабельности группы G следует, что аннулятор алгебры $A(G)$ в пространстве $C^*(G)$ нулевой (см. [45], [58, Theorem 4.21]):

$$A(G)^\perp = 0$$

Как следствие $A(G)$ плотно в $\mathcal{K}(G)$:

$$\overline{A(G)} = \mathcal{K}(G).$$

Если $\chi : \mathcal{K}(G) \to \mathbb{C}$ — инволютивный характер на $\mathcal{K}(G)$, то он будет инволютивным характером и на $A(G)$, и по теореме Эймара [40], на функциях $u \in A(G)$ он представляет собой дельта-функцию в некоторой точке $a \in G$:

$$\chi(u) = u(a), \qquad A(G).$$

Поскольку $A(G)$ плотно в $\mathcal{K}(G)$, это верно и для функций $u \in \mathcal{K}(G)$. □

Лемма 5.44. *Если G — компактная группа, то отображение спектров $G \to \mathsf{Spec}\,\mathcal{K}(G)$ является гомеомеорфизмом.*

Доказательство. Всякий инволютивный характер $\chi : \mathcal{K}(G) \to \mathbb{C}$ является инволютивным характером на алгебре $\mathsf{Trig}(G)$ тригонометрических многочленов на G, поэтому [22, 30.5] существует точка $a \in G$ такая, что

$$\chi(u) = u(a), \qquad u \in \mathsf{Trig}(G).$$

При этом в силу (5.5.8) алгебра $\mathsf{Trig}(G)$ плотна в алгебре $\mathcal{K}(G)$. Значит,

$$\chi(u) = u(a), \qquad u \in \mathcal{K}(G).$$

Мы получаем, что отображение $G \to \mathsf{Spec}\,\mathcal{K}(G)$ сюръективно. С другой стороны, любые две точки $s \neq t$ на компактной группе G разделяются тригонометрическим многочленом $u \in \mathsf{Trig}(G)$, и это означает, что отображение $G \to \mathsf{Spec}\,\mathcal{K}(G)$ инъективно. Таким образом, оно биективно и непрерывно. При этом G — компакт. Значит, оно — гомеоморфизм. □

Лемма 5.45. *Если G — абелева локально компактная группа, то отображение спектров $G \to \mathsf{Spec}\,\mathcal{K}(G)$ является гомеомеорфизмом.*

Доказательство. По предложению 5.25, $\mathsf{Env}_{\mathcal{C}}\,\mathcal{C}^\star(G) = \mathcal{C}(\widehat{G})$. Поэтому

$$\mathcal{K}(G) = \mathcal{C}^\star(\widehat{G}).$$

Всякий характер $f : \mathcal{C}^\star(\widehat{G}) \to \mathbb{C}$ в композиции с отображением $\delta : \widehat{G} \to \mathcal{C}^\star(\widehat{G})$ дает комплексный характер $f \circ \delta : \widehat{G} \to \mathbb{C}^\times$, а если f — инволютивный характер, то $f \circ \delta$ действует в окружность $\mathbb{T}$. То есть $f \circ \delta$ — характер на группе $\widehat{G}$, и поэтому

$$(f \circ \delta)(\chi) = f(\delta^\chi) = \chi(a), \qquad \chi \in \widehat{G}$$

для некоторой точки $a \in G$. Поскольку линейные комбинации дельта-функций δ^χ полны в $\mathcal{C}^\star(\widehat{G})$, это равенство продолжается на все элементы $\mathcal{C}^\star(\widehat{G})$:

$$f(u) = u(a), \qquad u \in \mathcal{K}(G) = \mathcal{C}^\star(\widehat{G})$$

Мы получаем, что отображение $G \to \mathsf{Spec}\,\mathcal{K}(G) = \mathsf{Spec}\,\mathcal{C}^\star(\widehat{G})$ является сюръекцией. С другой стороны, любые две точки $s \neq t$ на G, то есть два характера на $\widehat{G}$ различаются каким-то дельта-функционалом $\delta_\chi \in \mathcal{C}^\star(\widehat{G})$, $\chi \in \widehat{G}$,

$$\delta^\chi(s) = \chi(s) \neq \chi(t) = \delta^\chi(t)$$

и это означает, что отображение спектров $G \to \mathsf{Spec}\,\mathcal{K}(G) = \mathsf{Spec}\,\mathcal{C}^\star(\widehat{G})$ является инъекцией. Итак, оно биективно и непрерывно. Нам остается убедиться, что оно открыто (непрерывно в обратную сторону). Пусть $f_i \to f$ в $\mathsf{Spec}\,\mathcal{C}^\star(\widehat{G})$, и a_i, a — соответствующие точки в G. Если K — компакт в $\widehat{G}$, то множество $\{\delta^\chi;\ \chi \in K\}$ будет компактом в $\mathcal{C}^\star(\widehat{G})$, поэтому $f_i(\delta^\chi)$ будет стремиться к $f(\delta^\chi)$ равномерно по $\chi \in K$:

$$\chi(a_i) = f_i(\delta^\chi) \underset{\substack{\chi\in K\\ i\to\infty}}{\rightrightarrows} f(\delta^\chi) = \chi(a).$$

Это верно для всякого компакта $K \subseteq \widehat{G}$, поэтому $a_i \to a$ в G. $\square$

Лемма 5.46. *Для всякой компактной группы K и любого $n \in \mathbb{N}$ отображение спектров $\mathbb{R}^n \times K \to \mathsf{Spec}\,\mathcal{K}(\mathbb{R}^n \times K)$ является гомеомеорфизмом.*

Доказательство. Пусть $\chi : \mathcal{K}(\mathbb{R}^n \times K) \to \mathbb{C}$ — инволютивный характер. Рассмотрим вложения

$$\rho : \mathcal{K}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{K}(\mathbb{R}^n \times K), \qquad \rho(u) = u \boxdot 1_K$$

и

$$\sigma : \mathcal{K}(K) \to \mathcal{K}(\mathbb{R}^n \times K), \qquad \rho(v) = 1_{\mathbb{R}^n} \boxdot v.$$

Композиция $\chi\circ\rho$ является инволютивным характером на алгебре $\mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$, спектр которой по лемме 5.45 совпадает с $\mathbb{R}^n$. Поэтому существует точка $a \in \mathbb{R}^n$ такая, что

$$\chi(u \boxdot 1_K) = (\chi \circ \rho)(u) = u(a), \qquad u \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$$

С другой стороны, композиция $\chi \circ \sigma$ является инволютивным характером на алгебре $\mathcal{K}(K)$, содержащей алгебру $\mathsf{Trig}(G)$, поэтому по лемме 5.44 существует точка $b \in K$ такая, что

$$\chi(1_{\mathbb{R}^n} \boxdot v) = (\chi \circ \sigma)(v) = v(b), \qquad v \in \mathcal{K}(K).$$

Теперь для функций вида $u \boxdot v$ мы получим

$$\chi(u \boxdot v) = \chi(u \boxdot 1_K \cdot 1_{\mathbb{R}^n} \boxdot v) = \chi(u \boxdot 1_K) \cdot \chi(1_{\mathbb{R}^n} \boxdot v) = u(a) \cdot v(b) = (u \boxdot v)(a, b).$$

Это тождество продолжается на линейные комбинации функций вида $u \boxdot v$, а затем по теореме 5.41, на все пространство $\mathcal{K}(\mathbb{R}^n \times K)$. Это доказывает сюръективность отображения $\mathbb{R}^n \times K \to \mathsf{Spec}\,\mathcal{K}(\mathbb{R}^n \times K)$.

Докажем инъективность: пусть $(s, a) \neq (t, b)$ в $\mathbb{R}^n \times K$. Тогда либо $s \neq t$, либо $a \neq b$. В первом случае можно подобрать функцию $u \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ так, чтобы $u(s) \neq u(t)$ (в этот момент мы используем лемму 5.45), и тогда мы получим, что функция $u\boxdot 1$ (лежащая в $\mathcal{K}(\mathbb{R}^n \times K)$ по теореме 5.38) разделяет точки (s, a) и (t, b):

$$(u \boxdot 1)(s, a) = u(s) \cdot 1 = u(s) \neq u(t) = u(t) \cdot 1 = (u \boxdot 1)(t, b).$$

А во втором случае, когда $a \neq b$, то же самое можно сделать, подобрав (с помощью леммы 5.44) функцию из $\mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$, разделяющую эти точки.

Мы получаем, что отображение спектров $\mathbb{R}^n \times K \to \mathsf{Spec}\,\mathcal{K}(\mathbb{R}^n \times K)$ биективно (и непрерывно).

Докажем его открытость (непрерывность в обратную сторону). Пусть $(s_i, a_i) \to (s, a)$ в $\mathsf{Spec}\,\mathcal{K}(\mathbb{R}^n \times K)$. Тогда выбрав компакт $T \subseteq \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ мы можем рассмотреть множество $\rho(T) \subseteq \mathcal{K}(\mathbb{R}^n \times K)$, также являющееся компактом, и для него мы получим равномерную сходимость по $u \in T$:

$$u(s_i) = u(s_i) \cdot 1 = (u \boxdot 1)(s_i, a_i) = \rho(u)(s_i, a_i) \underset{\substack{u\in T\\ i\to\infty}}{\rightrightarrows} \rho(u)(s, a) = (u \boxdot 1)(s, a) = u(s) \cdot 1 = u(s).$$

Поскольку это верно для всякого компакта $T \subseteq \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$, мы получаем, что $s_i \to s$ в $\mathsf{Spec}\,\mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$, а по лемме 5.45 это означает, что $s_i \to s$ в $\mathbb{R}^n$.

И точно так же (с помощью леммы 5.44) доказывается, что $a_i \to a$ в K. $\square$

Лемма 5.47. *Пусть G — SIN-группа. Тогда для всякого класса смежности $L \in G/N$ его характеристическая функция 1_L является элементом пространства $\mathcal{K}(G)$:*

$$1_L \in \mathcal{K}(G) \tag{5.6.2}$$

Доказательство. Рассмотрим тривиальное представление $\pi : N \to \mathbb{C}$, $\pi(t) = 1$. Его индуцированное представление $\pi' : G \to \mathcal{L}(L_2(D))$ определяется формулой (3.5.7), которая в данном случае принимает вид

$$\pi'(g)(\xi)(t) = \xi\big(\varphi(\sigma(t)\cdot g)\big) = \xi\big(t\cdot\varphi(g)\big), \qquad \xi \in L_2(D), \quad t \in D, \quad g \in G.$$

Рассмотрим в качестве ξ характеристическую функцию единицы 1_D группы D:

$$\xi(t) = \begin{cases} 1, & t = 1_D \\ 0, & t \neq 1_D \end{cases}$$

Тогда

$$f(g) = \langle \pi'(g)(\xi), \xi\rangle = \sum_{t\in D} \pi'(g)(\xi)(t)\cdot\overline{\xi(t)} = \sum_{t\in D} \xi\big(t\cdot\varphi(g)\big)\cdot\xi(t) = \begin{Bmatrix} 1, & \varphi(g) = 1 \\ 0, & \varphi(g) \neq 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1, & g \in N \\ 0, & g \notin N \end{Bmatrix}.$$

То есть характеристическая функция 1_N лежит в $\mathcal{K}(G)$. Из теоремы 5.40 следует, что все ее сдвиги тоже лежат в $\mathcal{K}(G)$. $\square$

Для всякого $L \in G/N$ обозначим

$$\mathcal{K}_L(G) = 1_L\cdot\mathcal{K}(G), \qquad \mathcal{K}_{G\setminus L}(G) = (1 - 1_L)\cdot\mathcal{K}(G) \tag{5.6.3}$$

(здесь 1 — единица алгебры $\mathcal{K}(G)$). Из (5.6.2) следует

Лемма 5.48. *Пусть G — SIN-группа. Тогда пространства $\mathcal{K}_L(G)$ и $\mathcal{K}_{G\setminus L}(G)$ дополняют друг друга в $\mathcal{K}(G)$:*

$$\mathcal{K}_L(G) \oplus \mathcal{K}_{G\setminus L}(G) = \mathcal{K}(G) \tag{5.6.4}$$

(то есть $\mathcal{K}(G)$ есть прямая сумма в категории стереотипных пространств).

Рассмотрим вложение групповых алгебр $\theta : \mathcal{C}^\star(N) \to \mathcal{C}^\star(G)$, его оболочку $\mathsf{Env}_{\mathcal{C}}(\theta) : \mathsf{Env}_{\mathcal{C}}(\mathcal{C}^\star(N)) \to \mathsf{Env}_{\mathcal{C}}\,\mathcal{C}^\star(G)$ и ее сопряженное отображение $\varphi = \mathsf{Env}_{\mathcal{C}}(\theta)^\star : \mathcal{K}(N) \leftarrow \mathcal{K}(G)$.

Лемма 5.49. *Пусть G — SIN-группа. Тогда морфизм стереотипных пространств $\varphi = \mathsf{Env}_{\mathcal{C}}(\theta)^\star : \mathcal{K}(N) \leftarrow \mathcal{K}(G)$ обладает следующими свойствами:*

(i) *его ядром является вторая компонента в разложении* (5.6.4) *(с $L = N$):*

$$\mathsf{Ker}\,\varphi = \mathcal{K}_{G\setminus N}(G). \tag{5.6.5}$$

(ii) *ограничение $\varphi|_{\mathcal{K}_N(G)} : \mathcal{K}_N(G) \to \mathcal{K}(N)$ является изоморфизмом стереотипных алгебр.*

Доказательство. 1. Для доказательства (i) рассмотрим диаграмму

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C}^\star(N) \arrow[r, "\mathsf{env}_{\mathcal{C}}\,\mathcal{C}^\star(N)"] \arrow[d, "\theta"'] & \mathsf{Env}_{\mathcal{C}}(\mathcal{C}^\star(N)) \arrow[d, "\mathsf{Env}_{\mathcal{C}}(\theta)"] \\ \mathcal{C}^\star(G) \arrow[r, "\mathsf{env}_{\mathcal{C}}\,\mathcal{C}^\star(G)"] & \mathsf{Env}_{\mathcal{C}}\,\mathcal{C}^\star(G) \end{tikzcd}$$

Если $u \in \mathsf{Ker}\,\varphi$, то мы получаем цепочку

$$0 = \varphi(u) = u\circ\mathsf{Env}_{\mathcal{C}}(\theta) \quad\Longrightarrow\quad 0 = u\circ\mathsf{Env}_{\mathcal{C}}(\theta)\circ\mathsf{env}_{\mathcal{C}}\,\mathcal{C}^\star(N) = u\circ\mathsf{env}_{\mathcal{C}}\,\mathcal{C}^\star(G)\circ\theta \quad\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad 0 = u \circ \mathsf{env}_{\mathcal{C}}\, \mathcal{C}^\star(G) \circ \theta \circ \delta^N \quad \Longrightarrow \quad 0 = u\Big|_N \quad \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \quad 0 = u \cdot 1_N \quad \Longrightarrow \quad u = u \cdot (1 - 1_N) \quad \Longrightarrow \quad u \in \mathcal{K}_{G\setminus N}(G).$$

Наоборот, если $u \in \mathcal{K}_{G\setminus N}(G)$, то возникает обратная цепочка

$$0 = \varphi(u) = u \circ \mathsf{Env}_{\mathcal{C}}(\theta) \overset{\mathsf{env}_{\mathcal{C}}\, \mathcal{C}^\star(N) \in \mathsf{Epi}}{\Longleftarrow} 0 = u \circ \mathsf{Env}_{\mathcal{C}}(\theta) \circ \mathsf{env}_{\mathcal{C}}\, \mathcal{C}^\star(N) = u \circ \mathsf{env}_{\mathcal{C}}\, \mathcal{C}^\star(G) \circ \theta \quad \Longleftarrow$$
$$\overset{\overline{\mathsf{span}\, \delta^N} = \mathcal{C}^\star(N)}{\Longleftarrow} \quad 0 = u \circ \mathsf{env}_{\mathcal{C}}\, \mathcal{C}^\star(G) \circ \theta \circ \delta^N \quad \Longleftarrow \quad 0 = u\Big|_N \quad \Longleftarrow$$
$$\Longleftarrow \quad 0 = u \cdot 1_N \quad \Longleftarrow \quad \exists v \in \mathcal{K}(G) \quad u = v \cdot (1 - 1_N) \quad \Longleftarrow \quad u \in \mathcal{K}_{G\setminus N}(G).$$

2. Докажем (ii). Покажем сначала, что ограничение $\varphi|_{\mathcal{K}_N(G)} : \mathcal{K}_N(G) \to \mathcal{K}(N)$ является биекцией. Его инъективность очевидна, докажем сюръективность. Пусть $u \in \mathcal{K}(N)$, тогда в силу (5.5.9)

$$u(t) = \langle \pi(t)x, y \rangle$$

для некоторого непрерывного по норме унитарного представления $\pi : N \to \mathcal{B}(X)$ и $x, y \in X$. Рассмотрим индуцированное представление $\pi' : N \to \mathcal{B}(L_2(D, X))$ (3.5.7) и положим

$$\xi(t) = \begin{cases} x, & t = 1_D \\ 0, & t \neq 1_D \end{cases}, \qquad \upsilon(t) = \begin{cases} y, & t = 1_D \\ 0, & t \neq 1_D \end{cases}.$$

Тогда функция

$$v(g) = \langle \pi'(g)\xi, \upsilon \rangle$$

совпадает с u на N и обнуляется на $G \setminus N$. Действительно, при $g \in N$ мы получим

$$v(g) = \langle \pi'(g)(\xi), \upsilon \rangle = \sum_{t \in D} \langle \pi'(g)(\xi)(t), \upsilon(t) \rangle = \langle \pi'(g)(\xi)(1_D), \upsilon(1_D) \rangle =$$
$$= \langle \pi(\sigma(1_D) \cdot g \cdot \sigma(\varphi(\sigma(1_D) \cdot g))^{-1})(\xi(\varphi(\sigma(1_D) \cdot g))), y \rangle = (3.5.5) = \langle \pi(g \cdot \sigma(\varphi(g))^{-1})(\xi(\varphi(g))), y \rangle =$$
$$= \langle \pi(g \cdot \sigma(1_D)^{-1})(\xi(1_D)), y \rangle = \langle \pi(g)(x), y \rangle = u(g).$$

А если $g \notin N$, то

$$v(g) = \langle \pi'(g)(\xi), \upsilon \rangle = \sum_{t \in D} \langle \pi'(g)(\xi)(t), \upsilon(t) \rangle = \langle \pi'(g)(\xi)(1_D), \upsilon(1_D) \rangle =$$
$$= \langle \pi(\sigma(1_D) \cdot g \cdot \sigma(\varphi(\sigma(1_D) \cdot g))^{-1})(\xi(\varphi(\sigma(1_D) \cdot g))), y \rangle = (3.5.5) = \langle \pi(g \cdot \sigma(\varphi(g))^{-1})(\xi(\varphi(g))), y \rangle =$$
$$= \langle \pi(g \cdot \sigma(1_D)^{-1})(\xi(1_D)), y \rangle = \langle \pi(g)(0), y \rangle = 0.$$

Итак, мы поняли, что ограничение $\varphi|_{\mathcal{K}_N(G)} : \mathcal{K}_N(G) \to \mathcal{K}(G)$ — непрерывное и биективное отображение, и нам остается проверить, что оно открыто. Для этого сначала нужно заметить, что отображение $\varphi = \mathsf{Env}_{\mathcal{C}}(\theta)^\star : \mathcal{K}(N) \leftarrow \mathcal{K}(G)$ открыто — это следует из того, что его предуальное отображение $\mathsf{Env}_{\mathcal{C}}(\theta) : \mathsf{Env}_{\mathcal{C}}(\mathcal{C}^\star(N)) \to \mathsf{Env}_{\mathcal{C}}\, \mathcal{C}^\star(G)$ замкнуто по предложению 5.32.

Пусть теперь U — выпуклая уравновешенная окрестность нуля в $\mathcal{K}_N(G)$. Используя (5.6.4) можно подобрать окрестность нуля V в $\mathcal{K}(G)$ со свойствами:

$$V \cap \mathcal{K}_N(G) = U, \qquad V + \mathcal{K}_{G\setminus N}(G) = V. \tag{5.6.6}$$

При отображении φ (которое открыто, как мы уже отмечали) окрестность нуля V перейдет в некоторую окрестность нуля $W = \varphi(V)$ в $\mathcal{K}(N)$. Покажем, что $W = \varphi(U)$. Поскольку $V \supseteq U$, очевидно, что $W = \varphi(V) \supseteq \varphi(U)$. Докажем обратное включение. Пусть $w \in W = \varphi(V)$, то есть $w = \varphi(v)$ для некоторого $v \in V$. Поскольку, как мы уже поняли в пункте 4, ограничение $\varphi|_{\mathcal{K}_N(G)}$ биективно, найдется элемент $u \in \mathcal{K}_N(G)$ такой, что $w = \varphi(u)$. Для него мы получим $\varphi(u - v) = \varphi(u) - \varphi(v) = w - w = 0$, то есть

$$u - v \in \ker \varphi = (5.6.5) = \mathcal{K}_{G\setminus N}(G)$$

поэтому $u\in v+\mathcal{K}_{G\setminus N}(G)\subseteq V+\mathcal{K}_{G\setminus N}(G)=(5.6.6)=V$ и значит, $u\in V\cap\mathcal{K}_N(G)=(5.6.6)=U$. $\square$

Итак, отображение $\varphi|_{\mathcal{K}_N(G)}:\mathcal{K}_N(G)\to\mathcal{K}(N)$ (непрерывно,) биективно и открыто. Значит, оно является изоморфизмом. Поэтому определено обратное отображение $\psi:\mathcal{K}(N)\to\mathcal{K}_N(G)$, являющееся морфизмом стереотипных пространств, и более того, стереотипных алгебр.

Из теоремы 5.40 следует, что сдвиги определяют морфизмы стереотипных алгебр

$$\psi_L:\mathcal{K}(N)\to\mathcal{K}_L(G)=1_L\cdot\mathcal{K}(G)$$

Доказательство теоремы 5.42. Пусть G — группа Мура.

1. Сначала покажем, что отображение спектров $G\to\mathsf{Spec}\,\mathcal{K}(G)$ является сюръекцией. Пусть $\chi:\mathcal{K}(G)\to\mathbb{C}$ — инволютивный характер. Гомоморфизм $G\to D$ из (3.5.2) порождает гомоморфизм $\mathcal{C}^\star(G)\to\mathcal{C}^\star(D)$, который затем порождает гомоморфизм $\mathsf{Env}_{\mathcal{C}}\,\mathcal{C}^\star(G)\to\mathsf{Env}_{\mathcal{C}}(\mathcal{C}^\star(D))$, а тот, в свою очередь, гомоморфизм $\mathcal{K}(G)\leftarrow\mathcal{K}(D)$. Обозначим его $\varphi:\mathcal{K}(D)\to\mathcal{K}(G)$. Композиция $\chi\circ\varphi:\mathcal{K}(D)\to\mathbb{C}$ есть инволютивный непрерывный характер на $\mathcal{K}(D)$, причем D здесь является группой Мура (в силу следствия 3.32), и значит, аменабельной группой (по теореме 3.30). Поэтому по лемме 5.43 χ является дельта-функцией:

$$(\chi\circ\varphi)(u)=u(L),\qquad u\in\mathcal{K}(D),$$

для некоторого $L\in G/N$. Рассмотрим пространство $\mathcal{K}_L(G)$ из (5.6.3) и обозначим ρ_L его вложение в $\mathcal{K}(G)$. С другой стороны, обозначим символом σ вложение $\mathcal{K}(N)\to\mathcal{K}_N(G)$, то есть изоморфизм, определяемый леммой 5.49. Пусть далее $b\in L$, то есть $L=N\cdot b$, и $\tau_b:\mathcal{K}(G)\to\mathcal{K}(G)$ — оператор сдвига на элемент b^{-1} (действующий на $\mathcal{K}(G)$ по теореме 5.40):

$$\tau_b u=b^{-1}\cdot u,\qquad \mathcal{K}(G).$$

Он переводит пространство $\mathcal{K}(N)$ в пространство $\mathcal{K}_L(G)$, поэтому определено отображение $\sigma_L=\tau_b\circ\sigma:\mathcal{K}(N)\to\mathcal{K}_L(G)$. Положив теперь

$$\chi_L=\chi\circ\rho_L,\qquad \chi_N=\chi_L\circ\sigma_L$$

мы получим коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} \mathcal{K}(N) \arrow[r, "\sigma_L"] \arrow[dr, "\chi_N"'] & \mathcal{K}_L(G) \arrow[r, "\rho_L"] \arrow[d, "\chi_L"] & \mathcal{K}(G) \arrow[dl, "\chi"] \\ & \mathbb{C} & \end{tikzcd}$$

Поскольку χ_N — характер на $\mathcal{K}(N)$ по лемме 5.46 он должен быть дельта-функцией:

$$\chi_N(u)=u(a),\qquad u\in\mathcal{K}(N) \tag{5.6.7}$$

для некоторого $a\in N$. Тогда

$$\begin{aligned}\chi(u)&=\chi(1_L)\cdot\chi(u)=\chi(1_L\cdot u)=\chi_L(1_L\cdot u)=\chi_N(\sigma_L^{-1}(1_L\cdot u))=(5.6.7)=\\ &=\sigma_L^{-1}(1_L\cdot u)(a)=\sigma(\sigma_L^{-1}(1_L\cdot u))(a)=(\sigma\circ\sigma_L^{-1})(1_L\cdot u))(a)=(\sigma\circ(\tau_b\circ\sigma)^{-1})(1_L\cdot u))(a)=\\ &=(\sigma\circ\sigma^{-1}\circ\tau_b^{-1})(1_L\cdot u))(a)=(\sigma\circ\sigma^{-1}\circ\tau_b^{-1})(1_L\cdot u))(a)=\\ &=\tau_{b^{-1}}(1_L\cdot u))(a)=(b\cdot(1_L\cdot u))(a)=(1_L\cdot u)(\underbrace{a\cdot b}_{\substack{\Cap\\ L}})=u(a\cdot b)=\delta^{a\cdot b}(u).\end{aligned}$$

2. Теперь убедимся, что отображение спектров $G\to\mathsf{Spec}\,\mathcal{K}(G)$ является инъекцией. Пусть $a\neq b\in G$. Если $a\cdot b^{-1}\notin N$, то есть $a\notin b\cdot N$, то характеристическая функция $1_L\in\mathcal{K}(G)$ класса $L=b\cdot N$ из леммы 5.47 будет различать a и b:

$$1_L(a)=0\neq 1=1_L(b).$$

Пусть $a \in b \cdot N$, то есть $a \cdot b^{-1} \in N$. Тогда по лемме 5.46 мы можем подобрать функцию $u \in \mathcal{K}(N)$ так, чтобы

$$u(a \cdot b^{-1}) \neq u(1)$$

Затем по лемме 5.49, найдется функция $v \in \mathcal{K}_N(G)$ такая, что $u\big|_N = v\big|_N$, и поэтому

$$v(a \cdot b^{-1}) \neq v(1)$$

Далее по теореме 5.40 сдвиг $b^{-1} \cdot v$ будет снова лежать в $\mathcal{K}(G)$, и для этой функции мы получим

$$(b^{-1} \cdot v)(a) = v(a \cdot b^{-1}) \neq v(1) = v(b \cdot b^{-1}) = (b^{-1} \cdot v)(b).$$

3. Остается проверить открытость отображения $G \to \mathsf{Spec}\,\mathcal{K}(G)$. Пусть $a_i \to a$ в $\mathsf{Spec}\,\mathcal{K}(G)$. Из теоремы 5.40 сразу следует, что $a_i \cdot a^{-1} \to 1$ в $\mathsf{Spec}\,\mathcal{K}(G)$. Для характеристической функции $1_N \in \mathcal{K}(G)$ подгруппы N мы получаем $1_N(a_i \cdot a^{-1}) \to 1_N(1) = 1$, поэтому начиная с некоторого индекса все $a_i \cdot a^{-1}$ должны лежать в N. Возьмем компакт $S \subseteq \mathcal{K}(N)$. По лемме 5.49 для него можно подобрать компакт $T \subseteq \mathcal{K}(G)$, состоящий из функций, у которых ограничения на N лежат в K, и при этом получится биекция между T и S. Поскольку $a_i \cdot a^{-1} \to 1$ в $\mathsf{Spec}\,\mathcal{K}(G)$, мы получаем

$$v(a_i \cdot a^{-1}) \underset{\substack{v \in T \\ i \to \infty}}{\rightrightarrows} v(1)$$

и это эквивалентно

$$u(a_i \cdot a^{-1}) \underset{\substack{u \in S \\ i \to \infty}}{\rightrightarrows} u(1).$$

Это верно для всякого компакта $S \subseteq \mathcal{K}(N)$, значит $a_i \cdot a^{-1} \to 1$ в $\mathsf{Spec}\,\mathcal{K}(N)$. Но в лемме 5.46 мы уже доказали, что $\mathsf{Spec}\,\mathcal{K}(N) = N$, поэтому мы получаем, что $a_i \cdot a^{-1} \to 1$ в N, и значит, в G. $\square$

Из теорем 5.42 и 5.23 сразу следует

Теорема 5.50. *Если G — группа Мура, то непрерывной оболочкой алгебры $\mathcal{K}(G)$ является алгебра $\mathcal{C}(G)$:*

$$\mathsf{Env}_{\mathcal{C}}\,\mathcal{K}(G) = \mathcal{C}(G) \tag{5.6.8}$$

5.6.3. Структура алгебр Хопфа на $\mathsf{Env}_{\mathcal{C}}\,\mathcal{C}^\star(G)$ и $\mathcal{K}(G)$ в случае групп Мура. Для групп Мура удается доказать, что алгебры $\mathsf{Env}_{\mathcal{C}}\,\mathcal{C}^\star(G)$ и $\mathcal{K}(G)$ являются инволютивными алгебрами Хопфа.

Теорема 5.51. *Если G — группа Мура, то*

(i) *непрерывная оболочка $\mathsf{Env}_{\mathcal{C}}\,\mathcal{C}^\star(G)$ ее групповой алгебры $\mathcal{C}^\star(G)$ является инволютивной алгеброй Хопфа в категории стереотипных пространств $(\mathtt{Ste}, \odot)$,*

(ii) *двойственная ей алгебра $\mathcal{K}(G)$ является инволютивной алгеброй Хопфа в категории стереотипных пространств $(\mathtt{Ste}, \circledast)$.*

Для доказательства нам понадобятся две леммы.

Лемма 5.52. *Пусть G — группа Мура. Тогда для всякой полунормы $p \in \mathcal{P}(\mathcal{C}^\star(G))$ фактор-алгебра $\mathcal{C}^\star(G)/p$ является строгой C^*-алгеброй.*

Доказательство. Если $\tau : \mathcal{C}^\star(G)/p \to \mathcal{B}(X)$ — какое-нибудь унитарное неприводимое представление, то его композиция с фактор-отображением $\pi_p : \mathcal{C}^\star(G) \to \mathcal{C}^\star(G)/p$ будет унитарным неприводимым представлением инволютивной алгебры $\mathcal{C}^\star(G)$. При этом группа G, вкладываясь в $\mathcal{C}^\star(G)$ дельта-функционалами, полна в $\mathcal{C}^\star(G)$. Отсюда следует, что композиция

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\delta"] \arrow[rrr, bend right, "\pi"'] & \mathcal{C}^\star(G) \arrow[r, "\pi_p"] & \mathcal{C}^\star(G)/p \arrow[r, "\tau"] & \mathcal{B}(X) \end{tikzcd}$$

является унитарным неприводимым представлением группы Мура G, и поэтому оно должно быть конечномерно: $\dim X < \infty$. Ограниченность этих чисел (при фиксированном p и меняющихся τ) доказывается в несколько этапов (мы используем идеи [51, Lemma 5.8]).

1. Сначала рассмотрим случай, когда G — компактная группа. Тогда в силу предложения 5.26 непрерывная оболочка алгебры мер $\mathcal{C}^\star(G)$ представляет собой алгебру $\prod_{\sigma\in\widehat{G}} \mathcal{B}(X_\sigma)$. Поскольку фактор-алгебра $\mathcal{C}^\star(G)/p$ представляет собой C^*-алгебру, фактор-отображение π_p можно продолжить на непрерывную оболочку $\prod_{\sigma\in\widehat{G}} \mathcal{B}(X_\sigma)$:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}^\star(G) \arrow[rr, "\mathsf{env}_{\mathcal{C}}\, \mathcal{C}^\star(G)"] \arrow[dr, bend right, "\pi_p"'] & & \prod_{\sigma\in\widehat{G}} \mathcal{B}(X_\sigma) \arrow[dl, dashed, "\widetilde{\pi_p}"] \\
& \mathcal{C}^\star(G)/p &
\end{tikzcd}$$

Заметим, что $\widetilde{\pi_p}$ — эпиморфизм локально выпуклых пространств (поскольку композиция $\widetilde{\pi_p} \circ \mathsf{env}_{\mathcal{C}}\, \mathcal{C}^\star(G) = \pi_p$ является эпиморфизмом локально выпуклых пространств). С другой стороны, поскольку все алгебры $\mathcal{B}(X_\sigma)$ конечномерны, алгебра $\prod_{\sigma\in\widehat{G}} \mathcal{B}(X_\sigma)$, как локально выпуклое пространство, представляет собой декартову степень $\mathbb{C}^{\mathfrak{m}}$ поля $\mathbb{C}$ (где $\mathfrak{m}$ — некоторое кардинальное число).

Отсюда следует, что линейное непрерывное отображение $\widetilde{\pi_p}$ должно иметь ядро конечной коразмерности (потому что оно действует в банахово пространство $\mathcal{C}^\star(G)/p$). Это в свою очередь означает, что в семействе $\{\mathcal{B}(X_\sigma);\ \sigma \in \widehat{G}\}$ имеется конечный набор алгебр $\mathcal{B}(X_1), ..., \mathcal{B}(X_n)$ такой, что $\widetilde{\pi_p}$ представляет собой проекцию на их произведение:

$$\widetilde{\pi_p} : \prod_{\sigma\in\widehat{G}} \mathcal{B}(X_\sigma) \to \prod_{i=1}^{n} \mathcal{B}(X_i) \cong \mathcal{C}^\star(G)/p \tag{5.6.9}$$

Понятно, что $\mathcal{C}^\star(G)/p$ в таком случае является строгой C^*-алгеброй.

2. Пусть далее G — компактная надстройка абелевой группы, то есть $G = Z \cdot K$, где Z — абелева, K — компактная, и они коммутируют (см. определение на с.90). Рассмотрим ограничения $\rho = \pi\big|_K$ и $\sigma = \pi\big|_Z$ и обозначим символами C_π, C_ρ и C_σ соответственно C^*-подалгебры в $\mathcal{B}(X)$, порожденные образами π, ρ и σ. Поскольку C_ρ и C_σ коммутируют, C_π является непрерывным образом максимального тензорного произведения $C_\rho \underset{\max}{\otimes} C_\sigma$. Заметим далее, что из теорем 3.25 и 3.35 следует, что C_ρ и C_σ являются C^*-фактор-алгебрами алгебр $\mathcal{C}^\star(K)$ и $\mathcal{C}^\star(Z)$. При этом из (5.6.9) следует, что $C_\rho = \prod_{i=1}^n \mathcal{B}(X_{\pi_i})$, где $\pi_i \in \widehat{K}$ – конечный набор унитарных неприводимых представлений K, а из предложения 5.25 — что $C_\sigma = \mathcal{C}(T)$ для некоторого компакта $T \subseteq \widehat{Z}$. Отсюда

$$\begin{aligned}
C_\rho \underset{\max}{\otimes} C_\sigma = \left(\prod_{i=1}^{n} \mathcal{B}(X_{\pi_i}) \right) \underset{\max}{\otimes} \mathcal{C}(T) = \\
= \prod_{i=1}^{n} \left(\mathcal{B}(X_{\pi_i}) \underset{\max}{\otimes} \mathcal{C}(T) \right) = \prod_{i=1}^{n} \mathcal{C}\left(T, \mathcal{B}(X_{\pi_i})\right) = \mathcal{C}\left(\bigsqcup_{i=1}^{n} T_i, \mathcal{B}(X_{\pi_i}) \right),
\end{aligned}$$

где T_i — копии компакта T. Теперь из [11, 10.4.4] следует, что всякое унитарное неприводимое представление последней алгебры изоморфно какому-нибудь X_{π_i}, и поэтому имеет размерность, не превосходящую $\max_{i=1,...,n} X_{\pi_i}$. То же самое верно и для унитарных неприводимых представлений алгебры C_π, потому что они будучи перенесены на $C_\rho \underset{\max}{\otimes} C_\sigma$ тоже становятся унитарными и неприводимыми представлениями.

3. Пусть далее G — группа Ли-Мура. По теореме 3.34 G является конечным расширением некоторой компактной надстройки $H = Z \cdot K$ некоторой абелевой группы Z. Пусть $m = \mathsf{card}\, G/H$ — индекс H в G, и пусть $p \in \mathcal{P}(\mathcal{C}^\star(G))$ и τ — унитарное неприводимое представление алгебры $\mathcal{C}^\star(G)/p$.

В силу [34, Theorem 1], ограничение τ на H раскладывается в сумму не более чем m унитарных неприводимых представлений группы H, и значит, алгебры $\mathcal{C}^\star(H)/p$. Но в предыдущем пункте мы уже доказали, что размерность унитарных неприводимых представлений алгебры $\mathcal{C}^\star(H)/p$ ограничена некоторым числом. Если его обозначить n ($n \in \mathbb{N}$), то мы получим, что размерность представления τ не превосходит $m \cdot n$.

4. Пусть, наконец, G — произвольная группа Мура и $p \in \mathcal{P}(\mathcal{C}^\star(G))$. Гомоморфизм $G \to \mathcal{C}^\star(G)/p$ непрерывен по норме, поэтому в силу [64, Theorem 1], он пропускается через некоторое фактор-отображение $G \to G/H$, в котором G/H — группа Ли. По теореме 3.31 G/H будет группой Мура. В результате все сводится к случаю 3. $\square$

Лемма 5.53. *Пусть G — группа Мура. Тогда диагональ β диаграммы*

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}^\star(G) \circledast \mathcal{C}^\star(G) \arrow[r, "\mathsf{env}_{\mathcal{C}} \mathcal{C}^\star(G)\circledast \mathsf{env}_{\mathcal{C}} \mathcal{C}^\star(G)"] \arrow[d, "@"'] \arrow[dr, dashed, "\beta"] & \mathsf{Env}_{\mathcal{C}} \mathcal{C}^\star(G) \circledast \mathsf{Env}_{\mathcal{C}} \mathcal{C}^\star(G) \arrow[d, "@"'] \\
\mathcal{C}^\star(G) \odot \mathcal{C}^\star(G) \arrow[r, "\mathsf{env}_{\mathcal{C}} \mathcal{C}^\star(G)\odot \mathsf{env}_{\mathcal{C}} \mathcal{C}^\star(G)"] & \mathsf{Env}_{\mathcal{C}} \mathcal{C}^\star(G) \odot \mathsf{Env}_{\mathcal{C}} \mathcal{C}^\star(G)
\end{tikzcd}$$

является плотным эпиморфизмом[1].

Доказательство. Зафиксируем представление (3.5.2) SIN-группы G в виде дискретного расширения группы $\mathbb{R}^n \times K$ и рассмотрим цепочку морфизмов

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}^\star(G) \circledast \mathcal{C}^\star(G) \arrow[d, equal] & \\
\prod\limits_{\sigma\in\widehat{K}} \mathcal{C}^\star_\sigma(G) \circledast \prod\limits_{\tau\in\widehat{K}} \mathcal{C}^\star_\tau(G) \arrow[d, "\pi_\sigma\circledast\pi_\tau"'] & \\
\mathcal{C}^\star_\sigma(G) \circledast \mathcal{C}^\star_\tau(G) \arrow[r, equal] & \varprojlim\limits_{\infty\leftarrow k} \mathcal{C}^\star(G)/p^{\max}_{T_k,\sigma} \circledast \varprojlim\limits_{\infty\leftarrow l} \mathcal{C}^\star(G)/p^{\max}_{T_l,\tau} \arrow[d, "\pi_{T_k,\sigma}\circledast\pi_{T_l,\tau}"'] \\
& \mathcal{C}^\star(G)/p^{\max}_{T_k,\sigma} \circledast \mathcal{C}^\star(G)/p^{\max}_{T_l,\tau} \arrow[d] \\
& \mathcal{C}^\star(G)/p^{\max}_{T_k,\sigma} \check{\otimes} \mathcal{C}^\star(G)/p^{\max}_{T_l,\tau} \arrow[d, equal] \\
& \mathcal{C}^\star(G)/p^{\max}_{T_k,\sigma} \odot \mathcal{C}^\star(G)/p^{\max}_{T_l,\tau}
\end{tikzcd}$$

(мы используем обозначения из предложения 5.30, при этом морфизмы вида π_σ и $\pi_{T_k,\sigma}$ — естественные проекции, последняя стрелка — естественный морфизм тензорных произведений, а последнее равенство — следствие леммы 5.52 и равенств (3.2.15)). Здесь каждая стрелка является плотным эпиморфизмом, поэтому вся композиция

$$\mathcal{C}^\star(G) \circledast \mathcal{C}^\star(G) \longrightarrow \mathcal{C}^\star(G)/p^{\max}_{T_k,\sigma} \odot \mathcal{C}^\star(G)/p^{\max}_{T_l,\tau}$$

[1]См. определение плотного морфизма на с.68.

– тоже плотный эпиморфизм. Устремляя индексы k и l к бесконечности, мы получим, что естественный морфизм

$$\mathcal{C}^\star(G)\circledast\mathcal{C}^\star(G)\longrightarrow \varprojlim_{\infty\leftarrow k,l}\mathcal{C}^\star(G)/p^{\max}_{T_k,\sigma}\odot\mathcal{C}^\star(G)/p^{\max}_{T_l,\tau}$$

– тоже является плотным (здесь используется тот факт, что локально выпуклый проективный предел счетной системы банаховых пространств является пространством Фреше, и поэтому совпадает со стереотипным проективным пределом этой системы).

После этого мы снова применяем перестановочность проективного предела с инъективным тензорным произведением (2.4.39), и получаем, что плотным должен быть морфизм

$$\mathcal{C}^\star(G)\circledast\mathcal{C}^\star(G)\longrightarrow \varprojlim_{\infty\leftarrow k,l}\mathcal{C}^\star(G)/p^{\max}_{T_k,\sigma}\odot\mathcal{C}^\star(G)/p^{\max}_{T_l,\tau}=$$

$$=\varprojlim_{\infty\leftarrow k}\mathcal{C}^\star(G)/p^{\max}_{T_k,\sigma}\odot\varprojlim_{\infty\leftarrow l}\mathcal{C}^\star(G)/p^{\max}_{T_l,\tau}=\mathcal{C}^\star_\sigma(G)\odot\mathcal{C}^\star_\tau(G)$$

Это верно для любых $\sigma,\tau\in\widehat{K}$, поэтому морфизм в прямое произведение

$$\mathcal{C}^\star(G)\circledast\mathcal{C}^\star(G)\longrightarrow\prod_{\sigma,\tau\in\widehat{K}}\mathcal{C}^\star_\sigma(G)\odot\mathcal{C}^\star_\tau(G)=\prod_{\sigma\in\widehat{K}}\mathcal{C}^\star_\sigma(G)\odot\prod_{\tau\in\widehat{K}}\mathcal{C}^\star_\tau(G)=\mathsf{Env}_{\mathcal{C}}\,\mathcal{C}^\star(G)\odot\mathsf{Env}_{\mathcal{C}}\,\mathcal{C}^\star(G)$$

– тоже плотен (здесь используется тот факт, что локально выпуклое прямое произведение стереотипных пространств совпадает с их стереотипным прямым произведением). Это как раз и есть нужный нам морфизм. $\square$

Доказательство теоремы 5.51. Понятно, что утверждения (i) и (ii) эквивалентны, поэтому достаточно доказать (i).

1. Прежде всего, $\mathcal{C}^\star(G)$ является стереотипной алгеброй (то есть алгеброй в категории $(\mathtt{Ste},\circledast)$), и ее оболочка $\mathsf{Env}_{\mathcal{C}}\,\mathcal{C}^\star(G)$ также является стереотипной алгеброй (то есть алгеброй в категории $(\mathtt{Ste},\circledast)$). Покажем, что умножение в $\mathsf{Env}_{\mathcal{C}}\,\mathcal{C}^\star(G)$ продолжается до оператора на $\mathsf{Env}_{\mathcal{C}}\,\mathcal{C}^\star(G)\odot\mathsf{Env}_{\mathcal{C}}\,\mathcal{C}^\star(G)$.

По лемме 5.52, $\mathcal{C}^\star(G)/p$ — строгая C^*-алгебра. Поэтому умножение μ_p в ней продолжается до оператора $\mu'_p:\mathcal{C}^\star(G)/p\odot\mathcal{C}^\star(G)/p\to\mathcal{C}^\star(G)/p$. Рассмотрим диаграмму

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}^\star(G)\circledast\mathcal{C}^\star(G) \arrow[r, "\pi_p\circledast\pi_p"] \arrow[d, "\mu"] & \mathcal{C}^\star(G)/p\circledast\mathcal{C}^\star(G)/p \arrow[r, "@"] \arrow[d, "\mu_p"] & \mathcal{C}^\star(G)/p\odot\mathcal{C}^\star(G)/p \arrow[d, "\mu'_p"] \\
\mathcal{C}^\star(G) \arrow[r, "\pi_p"] & \mathcal{C}^\star(G)/p \arrow[r, "\mathsf{id}"] & \mathcal{C}^\star(G)/p
\end{tikzcd}$$

Выбросив средний столбец и перейдя к проективному пределу в $\mathtt{Ste}$, получим:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}^\star(G)\circledast\mathcal{C}^\star(G) \arrow[r, dashed] \arrow[dd, "\mu"] & \varprojlim_{p\in\mathcal{P}(\mathcal{C}^\star(G))}\Big(\mathcal{C}^\star(G)/p\odot\mathcal{C}^\star(G)/p\Big) \arrow[r, equal] \arrow[dd, dashed] & \varprojlim_{p\in\mathcal{P}(\mathcal{C}^\star(G))}\mathcal{C}^\star(G)/p\odot\varprojlim_{p\in\mathcal{P}(\mathcal{C}^\star(G))}\mathcal{C}^\star(G)/p \arrow[d, equal, "(5.4.13)"] \\
 & & \mathsf{Env}_{\mathcal{C}}\,\mathcal{C}^\star(G)\odot\mathsf{Env}_{\mathcal{C}}\,\mathcal{C}^\star(G) \arrow[d, dashed, "\mu'"] \\
\mathcal{C}^\star(G) \arrow[r, dashed] & \varprojlim_{p\in\mathcal{P}(\mathcal{C}^\star(G))}\mathcal{C}^\star(G)/p \arrow[r, equal] & \mathsf{Env}_{\mathcal{C}}\,\mathcal{C}^\star(G)
\end{tikzcd}$$

Оператор μ' и будет искомым продолжением умножения на инъективный тензорный квадрат.

2. Далее, $\mathcal{C}^\star(G)$ является биалгеброй в категории $(\mathtt{Ste}, \circledast)$, поэтому по теореме 5.14 $\mathsf{Env}_{\mathcal{C}}\,\mathcal{C}^\star(G)$ является коалгеброй в категории $(\mathtt{Ste}, \odot)$. Таким образом, $\mathsf{Env}_{\mathcal{C}}\,\mathcal{C}^\star(G)$ – и алгебра, и коалгебра в $(\mathtt{Ste}, \odot)$. Рассмотрим диаграмму

$$
\begin{tikzcd}
 & & & H \arrow[drrr, "\varkappa"] \arrow[ddddd, "\mathsf{env}_{\mathcal{C}}\,H"] & & & \\
H \circledast H \arrow[urrr, "\mu"] \arrow[dr, "\varkappa\circledast\varkappa"] \arrow[dd, "@"'] & & & & & & H \circledast H \arrow[dd, "@"] \\
 & (H \circledast H) \circledast (H \circledast H) \arrow[rrrr, "\theta"] \arrow[dd, "@"] & & & & (H \circledast H) \circledast (H \circledast H) \arrow[ur, "\mu\circledast\mu"] \arrow[dd, "@"] & \\
H \odot H \arrow[ddd, "\mathsf{env}_{\mathcal{C}}\,H \odot \mathsf{env}_{\mathcal{C}}\,H"] & & & & & & H \odot H \arrow[ddd, "\mathsf{env}_{\mathcal{C}}\,H \odot \mathsf{env}_{\mathcal{C}}\,H"'] \\
 & (H \odot H) \odot (H \odot H) \arrow[ddd, "(\mathsf{env}_{\mathcal{C}}\,H \odot \mathsf{env}_{\mathcal{C}}\,H) \odot (\mathsf{env}_{\mathcal{C}}\,H \odot \mathsf{env}_{\mathcal{C}}\,H)"] & & & & (H \odot H) \odot (H \odot H) \arrow[ddd, "(\mathsf{env}_{\mathcal{C}}\,H \odot \mathsf{env}_{\mathcal{C}}\,H) \odot (\mathsf{env}_{\mathcal{C}}\,H \odot \mathsf{env}_{\mathcal{C}}\,H)"'] & \\
 & & & \mathsf{Env}_{\mathcal{C}}\,H \arrow[drrr, "\varkappa'"] & & & \\
\mathsf{Env}_{\mathcal{C}}\,H \odot \mathsf{Env}_{\mathcal{C}}\,H \arrow[urrr, "\mu'"] \arrow[dr, "\varkappa'\odot\varkappa'"] & & & & & & \mathsf{Env}_{\mathcal{C}}\,H \odot \mathsf{Env}_{\mathcal{C}}\,H \\
 & \big(\mathsf{Env}_{\mathcal{C}}\,H \odot \mathsf{Env}_{\mathcal{C}}\,H\big) \odot \big(\mathsf{Env}_{\mathcal{C}}\,H \odot \mathsf{Env}_{\mathcal{C}}\,H\big) \arrow[rrrr, "\theta'"] & & & & \big(\mathsf{Env}_{\mathcal{C}}\,H \odot \mathsf{Env}_{\mathcal{C}}\,H\big) \odot \big(\mathsf{Env}_{\mathcal{C}}\,H \odot \mathsf{Env}_{\mathcal{C}}\,H\big) \arrow[ur, "\mu'\odot\mu'"] &
\end{tikzcd}
$$

в которой $H = \mathcal{C}^\star(G)$, а смысл остальных обозначений очевиден. Здесь верхняя грань коммутативна, потому что H — алгебра Хопфа в $(\mathtt{Ste}, \circledast)$, а коммутативность боковых граней проверяется прямым вычислением. Вдобавок, по лемме 5.53, самый левый морфизм $\mathsf{env}_{\mathcal{C}}\,H \odot \mathsf{env}_{\mathcal{C}}\,H \circ @$ является эпиморфизмом в $\mathtt{Ste}$. Отсюда следует, что нижняя грань призмы также коммутативна.

Тем же манером доказывается коммутативность остальных диаграмм в определении алгебры Хопфа. Например, диаграмма, связывающая коумножение с единицей, проверяется достраиванием до следующей призмы:

$$
\begin{tikzcd}
 & & \mathbb{C} \circledast \mathbb{C} \arrow[dr, "\iota\circledast\iota"] \arrow[dddd, "@"'] & \\
 & & & H \circledast H \arrow[dd, "@"'] \\
\mathbb{C} \arrow[uurr, "l_{\mathbb{C}}^{-1}"] \arrow[dr, "\iota"] \arrow[dddd, "1_{\mathbb{C}}"'] & & & \\
 & H \arrow[uurr, "\varkappa"'] \arrow[dddd, "\mathsf{env}_{\mathcal{C}}\,H"] & & H \odot H \arrow[dd, "\mathsf{env}_{\mathcal{C}}\,H \odot \mathsf{env}_{\mathcal{C}}\,H"] \\
 & & \mathbb{C} \odot \mathbb{C} \arrow[dr, "\iota\circledast\iota"] & \\
 & & & \mathsf{Env}_{\mathcal{C}}\,H \odot \mathsf{Env}_{\mathcal{C}}\,H \\
\mathbb{C} \arrow[uurr, "l_{\mathbb{C}}^{-1}"] \arrow[dr, "\iota"'] & & & \\
 & \mathsf{Env}_{\mathcal{C}}\,H \arrow[uurr, "\varkappa"'] & &
\end{tikzcd}
$$

В ней верхнее основание коммутативно, потому что H — алгебра Хопфа в $(\mathtt{Ste}, \circledast)$, а коммутативность боковых граней следует из свойств функтора $\mathsf{Env}_{\mathcal{C}}$. Поэтому нижнее основание также должно быть коммутативно.

3. Теперь покажем, что инволюция $\bullet$ в алгебре Хопфа $\mathcal{C}^\star(G)$ порождает инволюцию $\bullet'$ в алгебре Хопфа $\mathsf{Env}_{\mathcal{C}}\,\mathcal{C}^\star(G)$. Для всякой полунормы $p \in \mathcal{P}(\mathcal{C}^\star(G))$ рассмотрим естественную проекцию $\pi_p : \mathsf{Env}_{\mathcal{C}}\,\mathcal{C}^\star(G) \to \mathcal{C}^\star(G)/p$. Пусть $\bullet/p$ — инволюция на $\mathcal{C}^\star(G)/p$, порожденная инволюцией $\bullet$ на $\mathcal{C}^\star(G)$. Обозначим $\bullet_p = \bullet/p\ \circ \pi_p$:

$$\begin{tikzcd} \mathsf{Env}_{\mathcal{C}}\,\mathcal{C}^\star(G) \arrow[r, "\pi_p"] \arrow[dr, bend right, "\bullet_p"'] & \mathcal{C}^\star(G)/p \arrow[d, "\bullet/p"] \\ & \mathcal{C}^\star(G)/p \end{tikzcd}$$

Для любых полунорм $p, q \in \mathcal{P}(\mathcal{C}^\star(G))$, $p \leqslant q$, в категории стереотипных пространств над вещественным полем $\mathbb{R}$ будет коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd} & \mathsf{Env}_{\mathcal{C}}\,\mathcal{C}^\star(G) \arrow[dl, bend right, "\bullet_q"'] \arrow[dr, bend left, "\bullet_p"] & \\ \mathcal{C}^\star(G)/q \arrow[rr, "\pi_p^q"'] & & \mathcal{C}^\star(G)/p \end{tikzcd}$$

в которой π_p^q — естественная проекция. Это означает, что семейство морфизмов $\bullet_p$ является проективным конусом для системы π_p^q, и значит существует единственный морфизм $\bullet'$, замыкающий все диаграммы

$$\begin{tikzcd} & & \mathsf{Env}_{\mathcal{C}}\,\mathcal{C}^\star(G) \arrow[dl, bend right, "\bullet'"'] \arrow[dr, bend left, "\bullet_p"] & \\ \mathsf{Env}_{\mathcal{C}}\,\mathcal{C}^\star(G) \arrow[r, equal] & \varprojlim_q \mathcal{C}^\star(G)/q \arrow[rr, "\pi_p"'] & & \mathcal{C}^\star(G)/p \end{tikzcd}$$

Покажем, что морфизм $\bullet'$ и будет нужной инволюцией в $\mathsf{Env}_{\mathcal{C}}\,\mathcal{C}^\star(G)$. Прежде всего, он связан с исходной инволюцией $\bullet$ коммутативной диаграммой:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C}^\star(G) \arrow[r, "\mathsf{env}_{\mathcal{C}}\,\mathcal{C}^\star(G)"] \arrow[d, "\bullet"'] & \mathsf{Env}_{\mathcal{C}}\,\mathcal{C}^\star(G) \arrow[d, "\bullet'"] \\ \mathcal{C}^\star(G) \arrow[r, "\mathsf{env}_{\mathcal{C}}\,\mathcal{C}^\star(G)"] & \mathsf{Env}_{\mathcal{C}}\,\mathcal{C}^\star(G) \end{tikzcd}$$

Из нее следует равенство

$$\bullet' \circ \bullet' \circ \mathsf{env}_{\mathcal{C}}\,\mathcal{C}^\star(G) = \mathsf{env}_{\mathcal{C}}\,\mathcal{C}^\star(G) \circ \bullet \circ \bullet = \mathsf{env}_{\mathcal{C}}\,\mathcal{C}^\star(G) = \mathsf{id}_{\mathsf{Env}_{\mathcal{C}}\,\mathcal{C}^\star(G)} \circ \mathsf{env}_{\mathcal{C}}\,\mathcal{C}^\star(G)$$

которое, в силу эпиморфности $\mathsf{env}_{\mathcal{C}}\,\mathcal{C}^\star(G)$, дает

$$\bullet' \circ \bullet' = \mathsf{id}_{\mathsf{Env}_{\mathcal{C}}\,\mathcal{C}^\star(G)}\,.$$

Чтобы доказать (3.2.4), рассмотрим диаграмму (в категории стереотипных пространств над $\mathbb{R}$), похожую на ту, что была выше в пункте 2 (здесь $H = \mathcal{C}^\star(G)$, а $\mathsf{br} : x \otimes y \mapsto y \otimes x$ — морфизм заузливания в моноидальной категории):

$$\begin{tikzcd}
 & & H \arrow[drr, "\bullet"] \arrow[ddddd, "\mathsf{env}_{\mathcal{C}} H"] & & \\
H \circledast H \arrow[urr, "\mu"] \arrow[dr, "\mathsf{br}"] \arrow[dd, "@"'] & & & & H \arrow[ddddd, "\mathsf{env}_{\mathcal{C}} H"] \\
 & H \circledast H \arrow[rr, "\bullet \circledast \bullet"] \arrow[dd, "@"'] & & H \circledast H \arrow[ur, "\mu"] \arrow[dd, "@"] & \\
H \odot H \arrow[ddd, "\mathsf{env}_{\mathcal{C}} H \odot \mathsf{env}_{\mathcal{C}} H"'] & & & & \\
 & H \odot H \arrow[ddd, "\mathsf{env}_{\mathcal{C}} H \odot \mathsf{env}_{\mathcal{C}} H"] & & H \odot H \arrow[ddd, "\mathsf{env}_{\mathcal{C}} H \odot \mathsf{env}_{\mathcal{C}} H"'] & \\
 & & \mathsf{Env}_{\mathcal{C}} H \arrow[drr, "\bullet'"] & & \\
\mathsf{Env}_{\mathcal{C}} H \odot \mathsf{Env}_{\mathcal{C}} H \arrow[urr, "\mu'"'] \arrow[dr, "\mathsf{br}"'] & & & & \mathsf{Env}_{\mathcal{C}} H \\
 & \mathsf{Env}_{\mathcal{C}} H \odot \mathsf{Env}_{\mathcal{C}} H \arrow[rr, "\bullet' \odot \bullet'"] & & \mathsf{Env}_{\mathcal{C}} H \odot \mathsf{Env}_{\mathcal{C}} H \arrow[ur, "\mu'"'] &
\end{tikzcd}$$

В этой призме коммутативны верхнее основание (как (3.2.4) для H), и кроме того, в ней коммутативны боковые грани, а по лемме 5.53 левое ребро $\mathsf{env}_{\mathcal{C}} H \odot \mathsf{env}_{\mathcal{C}} H \circ @$ является эпиморфизмом. Отсюда следует, что нижнее основание тоже коммутативно:

$$\bullet' \circ \mu = \mu \circ \bullet' \odot \bullet' \circ \mathsf{br}\,.$$

Для доказательства (3.2.9), рассмотрим диаграмму (в категории стереотипных пространств над $\mathbb{R}$):

$$\begin{tikzcd}
 & & H \arrow[dr, "\varkappa"] \arrow[dddd, "\mathsf{env}_{\mathcal{C}} H"'] & \\
 & & & H \circledast H \arrow[d, "@"] \\
H \arrow[uurr, "\bullet"] \arrow[dr, "\varkappa"] \arrow[dddd, "\mathsf{env}_{\mathcal{C}} H"'] & & & H \odot H \arrow[ddd, "\mathsf{env}_{\mathcal{C}} H \odot \mathsf{env}_{\mathcal{C}} H"] \\
 & H \circledast H \arrow[uurr, "\bullet \circledast \bullet"] \arrow[d, "@"] & & \\
 & H \odot H \arrow[ddd, "\mathsf{env}_{\mathcal{C}} H \odot \mathsf{env}_{\mathcal{C}} H"] & \mathsf{Env}_{\mathcal{C}} H \arrow[dr, "\varkappa'"] & \\
 & & & \mathsf{Env}_{\mathcal{C}} H \odot \mathsf{Env}_{\mathcal{C}} H \\
\mathsf{Env}_{\mathcal{C}} H \arrow[uurr, "\bullet'"'] \arrow[dr, "\varkappa'"] & & & \\
 & \mathsf{Env}_{\mathcal{C}} H \odot \mathsf{Env}_{\mathcal{C}} H \arrow[uurr, "\bullet' \odot \bullet'"'] & &
\end{tikzcd}$$

Здесь верхнее основание коммутативно (как (3.2.9) для H), и кроме того, коммутативны боковые грани, а самый левый морфизм $\mathsf{env}_{\mathcal{C}} H$ является эпиморфизмом. Отсюда следует, что справедливо аналогичное равенство в $\mathsf{Env}_{\mathcal{C}} H$:

$$\varkappa' \circ \bullet' = \bullet' \odot \bullet' \circ \varkappa'.$$

□

5.6.4. Рефлексивность относительно оболочки. Пусть $(\mathsf{env}, \mathsf{Env})$ — какая-нибудь оболочка в категории $\mathtt{InvSteAlg}$ инволютивных стереотипных алгебр (в смысле общего определения [29]).

Условимся говорить, что инволютивная стереотипная алгебра Хопфа H относительно тензорного произведения $\circledast$ *рефлексивна относительно оболочки* Env, если на ее оболочке $\mathsf{Env}\, H$ определена структура инволютивной алгебры Хопфа в категории $(\mathtt{Ste}, \odot)$ так, что выполняются следующие два условия:

(i) морфизм оболочки $\mathsf{env}\, H : H \to \mathsf{Env}\, H$ является гомоморфизмом алгебр Хопфа в том смысле, что коммутативны следующие диаграммы:

$$\begin{tikzcd}
 & & H \odot H \arrow[drr, "\mathsf{env}\, H \odot \mathsf{env}\, H"] & & \\
H \circledast H \arrow[urr, "@"] \arrow[drr, "\mathsf{env}\, H \circledast \mathsf{env}\, H"] \arrow[dd, "\mu"'] & & & & \mathsf{Env}\, H \odot \mathsf{Env}\, H \arrow[dd, "\mu_E"] \\
 & & \mathsf{Env}\, H \circledast \mathsf{Env}\, H \arrow[urr, "@"] & & \\
H \arrow[rrrr, "\mathsf{env}\, H"] & & & & \mathsf{Env}\, H
\end{tikzcd} \tag{5.6.10}$$

$$\begin{tikzcd}
 & & H \odot H \arrow[drr, "\mathsf{env}\, H \odot \mathsf{env}\, H"] & & \\
H \circledast H \arrow[urr, "@"] \arrow[drr, "\mathsf{env}\, H \circledast \mathsf{env}\, H"] & & & & \mathsf{Env}\, H \odot \mathsf{Env}\, H \\
 & & \mathsf{Env}\, H \circledast \mathsf{Env}\, H \arrow[urr, "@"] & & \\
H \arrow[uu, "\varkappa"] \arrow[rrrr, "\mathsf{env}\, H"] & & & & \mathsf{Env}\, H \arrow[uu, "\varkappa_E"']
\end{tikzcd} \tag{5.6.11}$$

$$\begin{tikzcd}
H \arrow[rr, "\mathsf{env}\, H"] & & \mathsf{Env}\, H \\
 & \mathbb{C} \arrow[ul, "\iota"] \arrow[ur, "\iota_E"'] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
H \arrow[rr, "\mathsf{env}\, H"] \arrow[dr, "\varepsilon"'] & & \mathsf{Env}\, H \arrow[dl, "\varepsilon_E"] \\
 & \mathbb{C} &
\end{tikzcd} \tag{5.6.12}$$

$$\begin{tikzcd}
H \arrow[r, "\mathsf{env}\, H"] \arrow[d, "\sigma"'] & \mathsf{Env}\, H \arrow[d, "\sigma_E"] \\
H \arrow[r, "\mathsf{env}\, H"] & \mathsf{Env}\, H
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
H \arrow[r, "\mathsf{env}\, H"] \arrow[d, "\bullet"'] & \mathsf{Env}\, H \arrow[d, "\bullet_E"] \\
H \arrow[r, "\mathsf{env}\, H"] & \mathsf{Env}\, H
\end{tikzcd} \tag{5.6.13}$$

– здесь @ — преобразование Гротендика, определенное на с.51, μ, ι, $\varkappa$, ε, σ, $\bullet$ — структурные морфизмы (умножение, единица, коумножение, коединица, антипод, инволюция) в H, а μ_E, ι_E, $\varkappa_E$, ε_E, σ_E, $\bullet_E$ — структурные морфизмы в $\mathsf{Env}\, H$.

(ii) отображение $(\mathsf{env}\, H)^\star : H^\star \leftarrow (\mathsf{Env}\, H)^\star$, сопряженное к морфизму оболочки $\mathsf{env}\, H : H \to \mathsf{Env}\, H$, является оболочкой в том же смысле:

$$(\mathsf{env}\, H)^\star = \mathsf{env}(\mathsf{Env}\, H)^\star$$

Замечание 5.4. Пусть оболочка $\mathsf{env} : H \to \mathsf{Env}\, H$ и морфизм $\mathsf{env}\, H \odot \mathsf{env}\, H \circ @ : H \circledast H \to \mathsf{Env}\, H \odot \mathsf{Env}\, H$ являются эпиморфизмами стереотипных пространств (то есть образ отображения плотен в области значений). Тогда на оболочке $\mathsf{Env}\, H$ существует не более одной структуры инволютивной алгебры Хопфа в $(\mathtt{Ste}, \odot)$, для которой выполняются условия (i) и (ii).

Доказательство. Морфизм ι_E должен быть композицией ι и $\mathsf{env}\, H$, поэтому его единственность видна сразу. Из эпиморфности $\mathsf{env}\, H$ следует единственность $\varkappa_E$, ε_E, σ_E, $\bullet_E$. А из эпиморфности $\mathsf{env}\, H \odot \mathsf{env}\, H \circ @$ — единственность μ_E. $\square$

Условия (i) и (ii) удобно изображать в виде диаграммы

$$\begin{array}{ccc} H & \overset{\mathsf{env}}{\longmapsto} & \mathsf{Env}\, H \\ {\scriptstyle\star}\updownarrow & & \updownarrow{\scriptstyle\star} \\ H^\star & \overset{\mathsf{env}}{\longleftarrow\!\shortmid} & (\mathsf{Env}\, H)^\star \end{array} \tag{5.6.14}$$

которую мы называем *диаграммой рефлексивности*, и в которую вкладываем следующий смысл:

1) в углах квадрата стоят инволютивные алгебры Хопфа, причем H — алгебра Хопфа в $(\mathtt{Ste}, \circledast)$, затем следует алгебра Хопфа $\mathsf{Env}\, H$ в $(\mathtt{Ste}, \odot)$, и далее категории $(\mathtt{Ste}, \circledast)$ и $(\mathtt{Ste}, \odot)$ чередуются,
2) чередование операций env и $\star$ (с какого места ни начинай) на четвертом шаге возвращает к исходной алгебре Хопфа (конечно, с точностью до изоморфизма функторов).

Смысл термина «рефлексивность» здесь состоит в следующем. Обозначим однократное последовательное применение операций env и $\star$ каким-нибудь символом, например $\widehat{\ }$,

$$\widehat{H} := (\mathsf{Env}\, H)^\star$$

Поскольку на $\mathsf{Env}\, H$ определена структура инволютивной алгебры Хопфа относительно $\odot$, на сопряженном пространстве $\widehat{H} = (\mathsf{Env}\, H)^\star$ определена структура инволютивной алгебры Хопфа относительно $\circledast$. Более того, $\widehat{H} = (\mathsf{Env}\, H)^\star$ будет алгеброй Хопфа, рефлексивной относительно Env, потому что применение опрерации $\star$ к диаграммам (5.6.10)-(5.6.13) дает те же самые диаграммы, только с заменой H на $\widehat{H} = (\mathsf{Env}\, H)^\star$ (здесь нужно воспользоваться условием (ii) на с.57).

Условимся называть $\widehat{H} = (\mathsf{Env}\, H)^\star$ *алгеброй Хопфа, двойственной к H относительно оболочки* Env. Диаграмма (5.6.14) означает, что H будет естественно изоморфна своей второй двойственной в этом смысле алгебре Хопфа:

$$H \cong \widehat{\widehat{H}} \tag{5.6.15}$$

5.6.5. Непрерывная рефлексивность. В частном случае, когда в определении на с.57 под Env понимается непрерывная оболочка $\mathsf{Env}_{\mathcal{C}}$, мы будем называть H *непрерывно рефлексивной алгеброй Хопфа*, а алгебру $\widehat{H} = (\mathsf{Env}_{\mathcal{C}}\, H)^\star$ *непрерывно двойственной алгеброй Хопфа* к H.

Из теорем 5.50 и 5.51 следует главный результата работы [51]:

Теорема 5.54. *Если G — группа Мура, то алгебры $\mathcal{C}^\star(G)$ и $\mathcal{K}(G)$ непрерывно рефлексивны, а диаграмма рефлексивности для них принимает вид:*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}^\star(G) & \overset{\mathsf{Env}_{\mathcal{C}}}{\longmapsto} & \mathsf{Env}_{\mathcal{C}}\, \mathcal{C}^\star(G) \\ {\scriptstyle\star}\updownarrow & & \updownarrow{\scriptstyle\star} \\ \mathcal{C}(G) & \overset{\mathsf{Env}_{\mathcal{C}}}{\longleftarrow\!\shortmid} & \mathcal{K}(G) \end{array} \tag{5.6.16}$$

Пример 5.5. Из предложения 5.25 следует, что для абелевых локально компактных групп C диаграмма рефлексивности имеет вид

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}^\star(C) \arrow[r, mapsto, "\mathcal{F}_C"] & \mathcal{C}(\widehat{C}) \arrow[d, mapsto, "\star"] \\
\mathcal{C}(C) \arrow[u, mapsto, "\star"] & \mathcal{C}^\star(\widehat{C}) \arrow[l, mapsto, "\mathcal{F}_{\widehat{C}}"']
\end{tikzcd} \tag{5.6.17}$$

(здесь $\widehat{C}$ — двойственная по Понтрягину группа к C, а $\mathcal{F}$ — преобразование Фурье, определенное выше формулой (5.4.1)).

Пример 5.6. Из предложения 5.28 мы получаем, что для дискретных групп Мура D диаграмма рефлексивности выглядит так:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{C}_D \arrow[r, mapsto, "\mathsf{Env}_{\mathcal{C}}"] & C^*(D) \arrow[d, mapsto, "\star"] \\
\mathbb{C}^D \arrow[u, mapsto, "\star"] & \mathcal{K}(D) \arrow[l, mapsto, "\mathsf{Env}_{\mathcal{C}}"']
\end{tikzcd}$$

Здесь $C^*(G)$ — обычная C^*-алгебра группы G (см. [11]), а алгебра $\mathcal{K}(D)$ по множеству элементов (и алгебраическим операциям) совпадает с алгеброй Фурье—Стилтьеса $B(G)$ группы G (см. [40]), отличаясь только более слабой топологией (мы это уже отмечали в доказательстве леммы 5.43).

Пример 5.7. Из предложения 5.26 следует, что для компактных групп K диаграмма рефлексивности становится такой:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}^\star(K) \arrow[r, mapsto, "\mathsf{Env}_{\mathcal{C}}"] & \prod_{\pi\in\widehat{K}} \mathcal{B}(X_\pi) \arrow[d, mapsto, "\star"] \\
\mathcal{C}(K) \arrow[u, mapsto, "\star"] & \mathsf{Trig}(K) \arrow[l, mapsto, "\mathsf{Env}_{\mathcal{C}}"']
\end{tikzcd}$$

5.6.6. Группы, различаемые C^*-алгебрами. Условимся говорить, что локально компактная группа G *различается C^*-алгебрами*, если (непрерывные инволютивные) гомоморфизмы ее алгебры мер $\mathcal{C}^\star(G) \to B$ во всевозможные C^*-алгебры B различают элементы G (при вложении G в $\mathcal{C}^\star(G)$ дельта-функциями). Понятно, что если групповая алгебра мер $\mathcal{C}^\star(G)$ непрерывно рефлексивна, то группа G различается C^*-алгебрами, поэтому этот класс групп представляет интерес для оценки того, насколько широко обобщается теорема 5.54. Из самой теоремы 5.54 следует, что все группы Мура различаются C^*-алгебрами. В работе Ю. Н. Кузнецовой [51] показано, что все SIN-группы различаются C^*-алгебрами. С другой стороны, согласно результатам И. М. Зингера [62, Corollary 5] в классе связных групп Ли только группы вида $\mathbb{R}^n \times K$, где $n \in \mathbb{N}$, K — компактная группа Ли, различаются C^*-алгебрами.

Теорема 5.55 (Д. Люмине, А. Валетт [53]). *Если группа Ли G различается C^*-алгебрами, то G — линейная группа (то есть она вкладывается как замкнутая подгруппа в некоторую полную линейную группу $GL_n(\mathbb{C})$).*

Глава 6

ГЛАДКИЕ ОБОЛОЧКИ И ГЛАДКАЯ ДВОЙСТВЕННОСТЬ

6.1. Присоединенные самосопряженные нильпотенты и системы частных производных

6.1.1. Мультииндексы. Пусть $d \in \mathbb{N}$ — натуральное число[1]. Условимся *мультииндексом* длины d называть произвольную конечную последовательность длины d натуральных чисел

$$k = (k_1, ..., k_d), \qquad k_i \in \mathbb{N}.$$

Для двух мультииндексов $k, l \in \mathbb{N}^d$ неравенство $l \leqslant k$ определяется покоординатно:

$$l \leqslant k \qquad \iff \qquad \forall i = 1, ..., d \quad l_i \leqslant k_i.$$

Суммой двух мультииндексов $k, l \in \mathbb{N}^d$ мы будем называть мультииндекс

$$k + l = (k_1 + l_1, ..., k_d + l_d).$$

Если же $l \leqslant k$, то их *разность* определяется равенством

$$k - l = (k_1 - l_1, ..., k_d - l_d).$$

Кроме того, *порядок* и *факториал* мультииндекса $k \in \mathbb{N}^d$ определяются равенствами

$$|k| = k_1 + ... + k_d, \qquad k! = k_1! \cdot ... \cdot k_d!.$$

В соответствии с последней формулой, биномиальный коэффициент представляет собой число

$$\binom{k}{l} = \frac{k!}{l! \cdot (k-l)!}$$

6.1.2. Алгебры степенных рядов с коэффициентами в заданной алгебре. Пусть A — произвольная инволютивная стереотипная алгебра. Рассмотрим алгебру

$$A[[d]] = A^{\mathbb{N}^d},$$

состоящую из всевозможных отображений $x : \mathbb{N}^d \to A$, или, что то же самое, семейств $x = \{x_k;\ k \in \mathbb{N}^d\}$ элементов из A, индексированных мультииндексами длины d. На $A[[d]]$ задается топология покоординатной сходимости

$$x^i \underset{i\to\infty}{\overset{A[[d]]}{\longrightarrow}} x \qquad \iff \qquad \forall k \in \mathbb{N}^d \quad x^i_k \underset{i\to\infty}{\overset{A}{\longrightarrow}} x_k,$$

а алгебраические операции в $A[[d]]$ — инволюция, сумма, умножение на скаляр и произведение — определяются формулами

$$(x^\bullet)_k = (x_k)^\bullet, \qquad x \in A[[d]],\ k \in \mathbb{N}^d \tag{6.1.1}$$

$$(x + y)_k = x_k + y_k, \qquad x, y \in A[[d]],\ k \in \mathbb{N}^d \tag{6.1.2}$$

$$(\lambda \cdot x)_k = \lambda \cdot x_k, \qquad \lambda \in \mathbb{C},\ x \in A[[d]],\ k \in \mathbb{N}^d \tag{6.1.3}$$

$$(x \cdot y)_k = \sum_{0 \leqslant l \leqslant k} x_{k-l} \cdot y_l, \qquad x, y \in A[[d]],\ k \in \mathbb{N}^d \tag{6.1.4}$$

Единицей в $A[[d]]$ будет, как легко понять, семейство

$$\underset{A[[d]]}{\underset{\Cap}{1}}{}_k = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ 0, & k \neq 0 \end{cases} \tag{6.1.5}$$

[1] Всюду под натуральными числами $\mathbb{N}$ мы понимаем целые неотрицательные числа: $\mathbb{N} = \{d \in \mathbb{Z} :\ d \geqslant 0\}$.

Элементы $A[[d]]$ удобно представлять себе как степенные ряды от d переменных $\tau_1, ..., \tau_d$:

$$x = \sum_{k \in \mathbb{N}^d} x_k \cdot \tau^k,$$

где под τ^k понимается формальное произведение

$$\tau^k = \tau^{k_1} \cdot ... \cdot \tau^{k_d},$$

и предполагается выполнение тождеств

$$(\tau^k)^\bullet = \tau^k, \qquad a \cdot \tau^k = \tau^k \cdot a, \qquad \tau^k \cdot \tau^l = \tau^{k+l}, \qquad a \in A, \quad \tau \in \mathbb{N}^d.$$

Тогда сумма, умножение на скаляр и произведение в $A[[d]]$ описываются формулами для степенных рядов:

$$x + y = \sum_{k \in \mathbb{N}^d} (x_k + y_k) \cdot \tau^k, \quad \lambda \cdot x = \sum_{k \in \mathbb{N}^d} (\lambda \cdot x_k) \cdot \tau^k, \quad x \cdot y = \sum_{k \in \mathbb{N}^d} \left(\sum_{0 \leqslant l \leqslant k} x_{k-l} \cdot y_l \right) \cdot \tau^k. \qquad (6.1.6)$$

Другой способ — представлять элементы $A[[d]]$ как ряды Тейлора от переменных $\tau_1, ..., \tau_d$:

$$x = \sum_{k \in \mathbb{N}^d} \frac{x^{(k)}}{k!} \cdot \tau^k, \qquad (6.1.7)$$

При таком представлении коэффициенты $x^{(k)}$ ряда связаны с обычными коэффициентами x_k формулами

$$x^{(k)} = k! \cdot x_k,$$

а формулы для алгебраических операций (6.1.1)-(6.1.4) принимают вид

$$(x^\bullet)^{(k)} = (x^{(k)})^\bullet \quad (\lambda \cdot x)^{(k)} = \lambda \cdot x^{(k)} \quad (x + y)^{(k)} = x^{(k)} + y^{(k)} \quad (x \cdot y)^{(k)} = \sum_{0 \leqslant l \leqslant k} \binom{k}{l} \cdot x^{(k-l)} \cdot y^{(l)} \qquad (6.1.8)$$

6.1.3. Алгебры с присоединенными самосопряженными нильпотентами.

- Пусть по-прежнему A — инволютивная стереотипная алгебра, $d \in \mathbb{N}$ и $m \in \mathbb{N}^d$. Обозначим через I_m замкнутый идеал в алгебре $A[[d]]$ степенных рядов с коэффициентами в A, состоящий из рядов, у которых коэффициенты с индексами $k \leqslant m$ обнуляются:

  $$I_m = \{x \in A[[d]] : \ \forall k \in \mathbb{N}^d \quad k \leqslant m \quad \Longrightarrow \quad x_k = 0\}.$$

  Фактор-алгебра

  $$A[m] := A[[d]]/I_m$$

  называется *алгеброй A с присоединенными самосопряженными нильпотентами (порядка m)*.

Обозначим символом $\mathbb{N}[m]$ множество мультииндексов, не превосходящих мультииндекса m

$$\mathbb{N}[m] = \{k \in \mathbb{N}^d : \ k \leqslant m\}.$$

Тогда алгебру $A[m]$ можно представлять себе как пространство всевозможных семейств $x = \{x_k;\ k \in \mathbb{N}[m]\}$ элементов из A, индексированных мультииндексами $k \in \mathbb{N}[m]$. Инволюция, сумма, умножение на скаляр и произведение в $A[m]$ определяются формулами

$$(x^\bullet)_k = (x_k)^\bullet, \qquad x \in A[m],\ k \in \mathbb{N}[m] \qquad (6.1.9)$$

$$(x + y)_k = x_k + y_k, \qquad x, y \in A[m],\ k \in \mathbb{N}[m] \qquad (6.1.10)$$

$$(\lambda \cdot x)_k = \lambda \cdot x_k, \qquad \lambda \in \mathbb{C},\ x \in A[m],\ k \in \mathbb{N}[m] \qquad (6.1.11)$$

$$(x \cdot y)_k = \sum_{0 \leqslant l \leqslant k} x_{k-l} \cdot y_l, \qquad x, y \in A[m],\ k \in \mathbb{N}[m] \qquad (6.1.12)$$

Единицей в $A[m]$ будет, понятное дело, семейство

$$\underset{A[m]}{\underset{\Cap}{1_k}} = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ 0, & k \neq 0 \end{cases} \tag{6.1.13}$$

Элементы $A[m]$ удобно представлять себе как многочлены степени n от d переменных $\tau_1, ..., \tau_d$:

$$x = \sum_{k \in \mathbb{N}[m]} x_k \cdot \tau^k = \sum_{k \in \mathbb{N}[m]} \frac{x^{(k)}}{k!} \cdot \tau^k, \tag{6.1.14}$$

где под τ^k понимается формальное произведение

$$\tau^k = \tau^{k_1} \cdot ... \cdot \tau^{k_d},$$

причем считается, что

$$(\tau_i)^\bullet = \tau_i, \qquad a \cdot \tau_i = \tau_i \cdot a, \qquad \tau_i \cdot \tau_j = \tau_j \cdot \tau_i, \qquad \tau_i^{m_i+1} = 0, \qquad a \in A, \quad i = 1, ..., d. \tag{6.1.15}$$

– при таком представлении переменные $\tau_1, ..., \tau_d$ как раз можно понимать, как присоединенные к алгебре A элементы, подчиненные условиям (6.1.15) (и это оправдывает данное выше название алгебры $A[m]$). Тогда сумма, умножение на скаляр и произведение в $A[m]$ описываются теми же формулами (6.1.6) что и для $A[[d]]$. В частности, при представлении многочлена рядом Тейлора (второе равенство в (6.1.14)) сохраняются формулы для алгебраических операций (6.1.8).

Теорема 6.1. *Пусть B — инволютивная банахова алгебра с инволютивной субмультипликативной нормой $\|\cdot\|_B$. Тогда для любого мультииндекса $n \in \mathbb{N}^d$ алгебра $B[n]$ является инволютивной банаховой с инволютивной субмультипликативной нормой*

$$\|x\| = \sum_{k \leqslant n} \|x_k\|_B\,, \qquad x \in B[n]. \tag{6.1.16}$$

Доказательство. Обозначим $M = \{(k,l) \subseteq \mathbb{N}[n]^2;\ l \leqslant k\}$ и заметим, что отображение $(k,l) \in M \mapsto (k-l, l) \in \mathbb{N}[n]^2$ инъективно:

$$(k,l), (k',l') \in M \quad \& \quad (k-l,l) = (k'-l',l') \quad \Longrightarrow \quad l = l' \quad \& \quad k = k'.$$

Отсюда следует третий знак неравенства в цепочке

$$\|x \cdot y\| = \sum_{k \leqslant n} \|(x \cdot y)_k\|_B = \sum_{k \leqslant n} \left\| \sum_{l \leqslant k} x_{k-l} \cdot y_l \right\|_B \leqslant \sum_{k \leqslant n} \sum_{l \leqslant k} \|x_{k-l} \cdot y_l\|_B \leqslant \sum_{k \leqslant n} \sum_{l \leqslant k} \|x_{k-l}\|_B \cdot \|y_l\|_B =$$
$$= \sum_{(k,l) \in M} \|x_{k-l}\|_B \cdot \|y_l\|_B \leqslant \sum_{(m,l) \in \mathbb{N}[n]^2} \|x_m\|_B \cdot \|y_l\|_B = \sum_{m \in \mathbb{N}[n]} \|x_m\|_B \cdot \sum_{l \in \mathbb{N}[n]} \|y_l\|_B = \|x\| \cdot \|y\|\,.$$

□

В дальнейшем нас будет интересовать исключительно случай, когда алгебра A, содержащая коэффициенты многочленов, является C^*-алгеброй. Следующий пример показывает, что свойство быть C^*-алгеброй не наследуется при переходе от A к $A[m]$.

Пример 6.1. При ненулевых m и d алгебра $A[m]$ не может быть C^*-алгеброй.

Доказательство. Предположим, что топология $A[m]$ порождена какой-то C^*-нормой. Рассмотрим какой-нибудь присоединенный элемент τ_i, $i \in \{1, ..., n\}$. Пусть B — замкнутая (содержащая единицу) подалгебра в $A[m]$, порожденная элементом τ_i. Тогда B — коммутативная C^*-алгебра, и поэтому она изоморфна некоторой алгебре $\mathcal{C}(K)$ функций на компакте. С другой стороны, последнее условие в (6.1.15) означает, что τ_i должен быть нильпотентным элементом:

$$\tau_i^{m_i+1} = 0.$$

Но такого не может быть, потому что в алгебрах вида $B = \mathcal{C}(K)$ не бывает ненулевых нильпотентных элементов. □

Для любых двух мультииндексов $m \in \mathbb{N}^d$ и $n \in \mathbb{N}^{d'}$ (необязательно, чтобы длина d мультииндекса m совпадала с длиной d' мультииндекса n) определим их *прямую сумму* $m \oplus n$ как мультииндекс длины $d + d'$, то есть элемент пространства $\mathbb{N}^{d+d'}$, формулой

$$(m \oplus n)_i = \begin{cases} m_i, & 1 \leqslant i \leqslant d \\ n_{i-d}, & d < i \leqslant d' \end{cases}. \tag{6.1.17}$$

Тогда автоматически будет справедлива формула

$$\mathbb{N}[m] \times \mathbb{N}[n] = \mathbb{N}[m \oplus n] \tag{6.1.18}$$

Предложение 6.2. *Для любых двух инволютивных стереотипных алгебр A и B и любых мультииндексов $m \in \mathbb{N}^d$ и $n \in \mathbb{N}^{d'}$ справедливы следующие естественные изоморфизмы инволютивных стереотипных алгебр:*

$$\big(A[m]\big)[n] \cong A[m \oplus n] \cong A[n \oplus m] \cong \big(A[n]\big)[m] \tag{6.1.19}$$

$$A[m] \circledast B \cong (A \circledast B)[m] \cong A \circledast \big(B[m]\big) \tag{6.1.20}$$

Если M — паракомпактное локально компактное пространство, то

$$\mathcal{C}(M, B)[n] \cong \mathcal{C}(M, B[n]). \tag{6.1.21}$$

Существует также естественный гомоморфизм стереотипных инволютивных алгебр

$$\varphi : A[m] \oplus B[n] \to (A \oplus B)[m \oplus n] \tag{6.1.22}$$

причем если A и B — банаховы алгебры, то норма φ оценивается снизу единицей, а сверху двойкой:

$$1 \leqslant \|\varphi\| \leqslant 2, \tag{6.1.23}$$

если считать, что A и B наделены субмультипликативными нормами, и всякий раз при переходе к прямой сумме норма определяется как максимум норм слагаемых,

$$\|x \oplus y\| = \max\{\|x\|, \|y\|\}$$

а при переходе к алгебре с присоединенными самосопряженными нильпотентами — как сумма норм компонент (по формуле (6.1.16)).

Доказательство. 1. Формула (6.1.19) доказывается цепочкой

$$\big(A[m]\big)[n] = \big(A^{\mathbb{N}[m]}\big)^{\mathbb{N}[n]} = A^{\mathbb{N}[m]\times\mathbb{N}[n]} = (6.1.18) = A^{\mathbb{N}[m\oplus n]} = A[m \oplus n]$$

2. Для доказательства (6.1.20) определим отображение

$$\gamma : A[m] \circledast B \to (A \circledast B)[m]$$

формулой

$$\gamma(x \circledast b)_k = x_k \circledast b, \qquad x \in A[m], \quad b \in B. \tag{6.1.24}$$

(каждому семейству $x = \{x_k : k \in \mathbb{N}[m]\}$ элементов из A и любому элементу $b \in B$ отображение γ ставит в соответствие семейство $\gamma(x \circledast b) = \{\gamma(x \circledast b)_k;\ k \in \mathbb{N}[m]\}$ элементов из $A \circledast B$, определенное равенством (6.1.24)). Это отображение будет изоморфизмом стереотипных пространств, потому что тензорное произведение $\circledast$ дистрибутивно с операцией взятия прямой суммы [29, (2.52)]. Проверим, что оно сохраняет умножение: для любых семейств $x = \{x_k : k \in \mathbb{N}[m]\}$ и $x' = \{x'_k : k \in \mathbb{N}[m]\}$ из A и любых элементов $b, b' \in B$ мы получаем:

$$\gamma\Big((x \circledast b) \cdot (x' \circledast b')\Big)_k = \gamma\big((x \cdot x') \circledast (b \cdot b')\big)_k = (6.1.24) = (x \cdot x')_k \circledast (b \cdot b') = (6.1.12) =$$

$$= \Big(\sum_{0 \leqslant l \leqslant k} x_{k-l} \cdot x'_l\Big) \circledast (b \cdot b') = \sum_{0 \leqslant l \leqslant k} (x_{k-l} \cdot x'_l) \circledast (b \cdot b') = \sum_{0 \leqslant l \leqslant k} (x_{k-l} \circledast b) \cdot (x'_l \circledast b') = \sum_{0 \leqslant l \leqslant k} (x_{k-l} \circledast b) \cdot (x'_l \circledast b') =$$

$$= (6.1.24) = \sum_{0\leqslant l\leqslant k} \gamma(x\circledast b)_{k-l}\cdot\gamma(x'\circledast b')_l = (6.1.12) = \Big(\gamma(x\circledast b)\cdot\gamma(x'\circledast b')\Big)_k$$

Это доказывает первое равенство в (6.1.20). Точно так же доказывается второе.

3. Тождество (6.1.21) очевидно.

4. Пусть $\sigma_1,...,\sigma_d$ — последовательность присоединенных нильпотентов к алгебре A в $A[m]$, а $\tau_1,...,\tau_{d'}$ — последовательность присоединенных нильпотентов к алгебре B в $B[n]$. Рассмотрим последовательность присоединенных нильпотентов к алгебре $A\oplus B$ в $(A\oplus B)[m\oplus n]$, и присвоим ее элементам обозначения $\overline{\sigma_i}$ и $\overline{\tau_j}$, расположив их так, чтобы сначала в порядке возрастания индексов шли $\overline{\sigma_i}$, а после них $\overline{\tau_j}$:

$$\overline{\sigma_1},...,\overline{\sigma_d},\overline{\tau_1},...,\overline{\tau_{d'}}.$$

Пусть

$$\overline{\sigma}^k=\overline{\sigma_1}^{k_1}\cdot...\cdot\overline{\sigma_d}^{k_d},\qquad \overline{\tau}^l=\overline{\tau_1}^{l_1}\cdot...\cdot\overline{\tau_{d'}}^{l_{d'}},\qquad k\in\mathbb{N}[m],\quad l\in\mathbb{N}[n].$$

Тогда гомоморфизм φ в формуле (6.1.22) можно определить правилом

$$\varphi(1_{A[m]}\oplus 1_{B[n]})=1_{(A\oplus B)[m\oplus n]},\quad \varphi(\sigma_i\oplus 0_{B[n]})=(1_A\oplus 0_B)\cdot\overline{\sigma_i},\quad \varphi(0_{A[m]}\oplus\tau_j)=(0_A\oplus 1_B)\cdot\overline{\tau_j}.$$

или, что эквивалентно, правилом

$$\varphi\Big(\underbrace{\sum_{0\leqslant k\leqslant m} x_k\cdot\sigma^k}_{\substack{\Cap\\ A[m]}}\oplus\underbrace{\sum_{0\leqslant l\leqslant n} y_l\cdot\tau^l}_{\substack{\Cap\\ B[n]}}\Big)=\sum_{0\leqslant k\leqslant m}(\underset{\substack{\Cap\\ A}}{x_k}\oplus\underset{\substack{\Cap\\ B}}{0})\cdot\overline{\sigma}^k+\sum_{0\leqslant l\leqslant n}(\underset{\substack{\Cap\\ A}}{0}\oplus\underset{\substack{\Cap\\ B}}{y_l})\cdot\overline{\tau}^l$$

Это отображение сохраняет единицу и мультипликативно:

$$\varphi\Big((x\oplus y)\cdot(x'\oplus y')\Big)=\varphi\left(\Big(\sum_{0\leqslant k\leqslant m}x_k\cdot\sigma^k\oplus\sum_{0\leqslant l\leqslant n}y_l\cdot\tau^l\Big)\cdot\Big(\sum_{0\leqslant k'\leqslant m}x'_{k'}\cdot\sigma^{k'}\oplus\sum_{0\leqslant l'\leqslant n}y'_{l'}\cdot\tau^{l'}\Big)\right)=$$

$$=\varphi\left(\Big(\sum_{0\leqslant k\leqslant m}x_k\cdot\sigma^k\cdot\sum_{0\leqslant k'\leqslant m}x'_{k'}\cdot\sigma^{k'}\Big)\oplus\Big(\sum_{0\leqslant l\leqslant n}y_l\cdot\tau^l\cdot\sum_{0\leqslant l'\leqslant n}y'_{l'}\cdot\tau^{l'}\Big)\right)=$$

$$=\varphi\left(\sum_{0\leqslant k\leqslant m}\Big(\sum_{0\leqslant p\leqslant k}x_{k-p}\cdot x'_p\Big)\cdot\sigma^k\oplus\sum_{0\leqslant l\leqslant n}\Big(\sum_{0\leqslant q\leqslant l}y_{l-q}\cdot y'_q\Big)\cdot\tau^l\right)=$$

$$=\sum_{0\leqslant k\leqslant m}\Big(\sum_{0\leqslant p\leqslant k}x_{k-p}\cdot x'_p\oplus 0\Big)\cdot\overline{\sigma}^k+\sum_{0\leqslant l\leqslant n}\Big(0\oplus\sum_{0\leqslant q\leqslant l}y_{l-q}\cdot y'_q\Big)\cdot\overline{\tau}^l=$$

$$=\sum_{0\leqslant k\leqslant m}(x_k\oplus 0)\cdot\overline{\sigma}^k\cdot\sum_{0\leqslant k'\leqslant m}(x'_{k'}\oplus 0)\cdot\overline{\sigma}^{k'}+\sum_{0\leqslant l\leqslant n}(0\oplus y_l)\cdot\overline{\tau}^l\cdot\sum_{0\leqslant l'\leqslant n}(0\oplus y'_{l'})\cdot\overline{\tau}^{l'}=$$

$$=\sum_{0\leqslant k\leqslant m}(x_k\oplus 0)\cdot\overline{\sigma}^k\cdot\sum_{0\leqslant k'\leqslant m}(x'_{k'}\oplus 0)\cdot\overline{\sigma}^{k'}+\sum_{0\leqslant l\leqslant n}(0\oplus y_l)\cdot\overline{\tau}^l\cdot\sum_{0\leqslant l'\leqslant n}(0\oplus y'_{l'})\cdot\overline{\tau}^{l'}+$$

$$+\underbrace{\sum_{0\leqslant k\leqslant m}(x_k\oplus 0)\cdot\overline{\sigma}^k\cdot\sum_{0\leqslant l'\leqslant n}(0\oplus y'_{l'})\cdot\overline{\tau}^{l'}}_{\substack{\|\\ 0}}+\underbrace{\sum_{0\leqslant l\leqslant n}(0\oplus y_l)\cdot\overline{\tau}^l\cdot\sum_{0\leqslant k'\leqslant m}(x'_{k'}\oplus 0)\cdot\overline{\sigma}^{k'}}_{\substack{\|\\ 0}}=$$

$$=\left(\sum_{0\leqslant k\leqslant m}(x_k\oplus 0)\cdot\overline{\sigma}^k\oplus\sum_{0\leqslant l\leqslant n}(0\oplus y_l)\cdot\overline{\tau}^l\right)\cdot\left(\sum_{0\leqslant k'\leqslant m}(x'_{k'}\oplus 0)\cdot\overline{\sigma}^{k'}\oplus\sum_{0\leqslant l'\leqslant n}(0\oplus y'_{l'})\cdot\overline{\tau}^{l'}\right)=$$

$$=\varphi\Big(\sum_{0\leqslant k\leqslant m}x_k\cdot\sigma^k\oplus\sum_{0\leqslant l\leqslant n}y_l\cdot\tau^l\Big)\cdot\varphi\Big(\sum_{0\leqslant k'\leqslant m}x'_{k'}\cdot\sigma^{k'}\oplus\sum_{0\leqslant l'\leqslant n}y'_{l'}\cdot\tau^{l'}\Big)=\varphi(x\oplus y)\cdot\varphi(x'\oplus y').$$

В оценке (6.1.23) первое неравенство доказывается цепочкой

$$\begin{aligned}
&\left\|\varphi\Big(\sum_{0\leqslant k\leqslant m} x_k\cdot\sigma^k\oplus\sum_{0\leqslant l\leqslant n} y_l\cdot\tau^l\Big)\right\|_{(A\oplus B)[m\oplus n]}=\\
&\qquad=\left\|\sum_{0\leqslant k\leqslant m}(x_k\oplus 0)\cdot\overline{\sigma}^k\oplus\sum_{0\leqslant l\leqslant n}(0\oplus y_l)\cdot\overline{\tau}^l\right\|_{(A\oplus B)[m\oplus n]}=\\
&\qquad=\sum_{0\leqslant k\leqslant m}\|x_k\oplus 0\|_{A\oplus B}+\sum_{0\leqslant l\leqslant n}\|0\oplus y_l\|_{A\oplus B}=\sum_{0\leqslant k\leqslant m}\|x_k\|_A+\sum_{0\leqslant l\leqslant n}\|y_l\|_B=\\
&=\left\|\sum_{0\leqslant k\leqslant m}x_k\cdot\sigma^k\right\|_{A[m]}+\left\|\sum_{0\leqslant l\leqslant n}y_l\cdot\tau^l\right\|_{B[n]}\geqslant\max\left\{\left\|\sum_{0\leqslant k\leqslant m}x_k\cdot\sigma^k\right\|_{A[m]},\left\|\sum_{0\leqslant l\leqslant n}y_l\cdot\tau^l\right\|_{B[n]}\right\}=\\
&\qquad=\left\|\sum_{0\leqslant k\leqslant m}x_k\cdot\sigma^k\oplus\sum_{0\leqslant l\leqslant n}y_l\cdot\tau^l\right\|_{A[m]\oplus B[n]},
\end{aligned}$$

а второе — цепочкой

$$\begin{aligned}
&\left\|\varphi\Big(\sum_{0\leqslant k\leqslant m} x_k\cdot\sigma^k\oplus\sum_{0\leqslant l\leqslant n} y_l\cdot\tau^l\Big)\right\|_{(A\oplus B)[m\oplus n]}=\\
&\qquad=\left\|\sum_{0\leqslant k\leqslant m}(x_k\oplus 0)\cdot\overline{\sigma}^k\oplus\sum_{0\leqslant l\leqslant n}(0\oplus y_l)\cdot\overline{\tau}^l\right\|_{(A\oplus B)[m\oplus n]}=\\
&\qquad=\sum_{0\leqslant k\leqslant m}\|x_k\oplus 0\|_{A\oplus B}+\sum_{0\leqslant l\leqslant n}\|0\oplus y_l\|_{A\oplus B}=\sum_{0\leqslant k\leqslant m}\|x_k\|_A+\sum_{0\leqslant l\leqslant n}\|y_l\|_B=\\
&=\left\|\sum_{0\leqslant k\leqslant m}x_k\cdot\sigma^k\right\|_{A[m]}+\left\|\sum_{0\leqslant l\leqslant n}y_l\cdot\tau^l\right\|_{B[n]}\leqslant 2\max\left\{\left\|\sum_{0\leqslant k\leqslant m}x_k\cdot\sigma^k\right\|_{A[m]},\left\|\sum_{0\leqslant l\leqslant n}y_l\cdot\tau^l\right\|_{B[n]}\right\}=\\
&\qquad=2\left\|\sum_{0\leqslant k\leqslant m}x_k\cdot\sigma^k\oplus\sum_{0\leqslant l\leqslant n}y_l\cdot\tau^l\right\|_{A[m]\oplus B[n]}
\end{aligned}$$

□

Системы частных производных и морфизмы со значениями в алгебрах степенных рядов. Пусть A — инволютивная стереотипная алгебра, а B — C^*-алгебра. Система операторов $D_k : A \to B$, $k\in\mathbb{N}[m]$, называется *системой частных производных* на алгебре A с коэффициентами в алгебре B, если она удовлетворяет условиям:

$$D_k(a^\bullet)=D_k(a)^\bullet,\qquad k\in\mathbb{N}[m], \tag{6.1.25}$$

$$D_k(1)=\begin{cases}1, & k=0\\ 0, & k\neq 0\end{cases},\qquad k\in\mathbb{N}[m],\ 1\in A, \tag{6.1.26}$$

$$D_k(a\cdot b)=\sum_{0\leqslant l\leqslant k}\binom{k}{l}\cdot D_{k-l}(a)\cdot D_l(b),\qquad k\in\mathbb{N}[m],\ a,b\in A. \tag{6.1.27}$$

В частности, это означает, что оператор $D_0 : A \to B$ должен быть инволютивным гомоморфизмом алгебр,

$$D_0(a^\bullet) = D_0(a)^\bullet, \qquad D_0(1) = 1, \qquad D_0(a \cdot b) = D_0(a) \cdot D_0(b), \qquad a, b \in A.$$

А в случае $|k| = 1$ операторы $D_k : A \to B$ должны быть дифференцированиями относительно гомоморфизма D_0:

$$D_k(a \cdot b) = D_k(a) \cdot D_0(b) + D_0(a) \cdot D_k(b), \qquad a, b \in A.$$

Теорема 6.3. *Для любой инволютивной стереотипной алгебры A и любой C^*-алгебры B формула*

$$D_k(a) = D(a)^{(k)}, \qquad k \in \mathbb{N}[m], \quad a \in A, \tag{6.1.28}$$

или, что эквивалентно, формула

$$D(a) = \sum_{k \in \mathbb{N}[m]} \frac{D_k(a)}{k!} \cdot \tau^k, \qquad a \in A, \tag{6.1.29}$$

устанавливают взаимно однозначное соответствие между гомоморфизмами инволютивных стереотипных алгебр $D : A \to B[m]$ и системами частных производных $\{D_k;\ k \in \mathbb{N}[m]\}$ на A с коэффициентами в B.

Доказательство. 1. Если $D : A \to B[m]$ — гомоморфизм инволютивных стереотипных алгебр, то определив отображения $\{D_k;\ k \in \mathbb{N}[m]\} : A \to B$ по формуле (6.1.28), мы получим, во-первых, для любого $a \in A$

$$D_k(a^\bullet) = D(a^\bullet)^{(k)} = \big(D(a)^\bullet\big)^{(k)} = (6.1.8) = \big(D(a)^{(k)}\big)^\bullet = \big(D_k(a)\big)^\bullet,$$

во-вторых,

$$D_k(1) = D(1)^{(k)} = 1^{(k)} = 1_k = (6.1.13) = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ 0, & k \neq 0 \end{cases},$$

и, в-третьих, для любых $a, b \in A$

$$D_k(a \cdot b) = (6.1.28) = D(a \cdot b)^{(k)} = \big(D(a) \cdot D(b)\big)^{(k)} = (6.1.8) =$$
$$= \sum_{0 \leqslant l \leqslant k} \binom{k}{l} \cdot D(a)^{(k-l)} \cdot D(b)^{(l)} = (6.1.28) = \sum_{0 \leqslant l \leqslant k} \binom{k}{l} \cdot D_{k-l}(a) \cdot D_l(b).$$

То есть выполняются тождества (6.1.25), (6.1.26) и (6.1.27), и это значит, что семейство $\{D_k;\ k \in \mathbb{N}[m]\}$ есть система частных производных на A с коэффициентами в B.

2. Наоборот, если $\{D_k;\ k \in \mathbb{N}[m]\}$ — система частных производных на A с коэффициентами в B, то, определив отображение $D : A \to B[m]$ формулой (6.1.29), мы получим, во-первых, для любого $a \in A$

$$D(a^\bullet)^{(k)} = D_k(a^\bullet) = (6.1.25) = D_k(a)^\bullet = \big(D(a)^{(k)}\big)^\bullet,$$

во-вторых,

$$D(1)^{(k)} = D_k(1) = (6.1.26) = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ 0, & k \neq 0 \end{cases} = (6.1.13) = 1_k \qquad \Longrightarrow \qquad D(1) = 1,$$

и, в-третьих, для любых $a, b \in A$

$$D(a \cdot b)^{(k)} = (6.1.28) = D_k(a \cdot b) = (6.1.27) = \sum_{0 \leqslant l \leqslant k} \binom{k}{l} \cdot D_{k-l}(a) \cdot D_l(b) = (6.1.28) =$$
$$= \sum_{0 \leqslant l \leqslant k} \binom{k}{l} \cdot D(a)^{(k-l)} \cdot D(b)^{(l)} = (6.1.8) = \big(D(a) \cdot D(b)\big)^{(k)} \qquad \Longrightarrow \qquad D(a \cdot b) = D(a) \cdot D(b).$$

То есть $D : A \to B[m]$ является инволютивным гомоморфизмом. □

Пример 6.2. Пусть M — гладкое многообразие размерности $d \in \mathbb{N}$, $\varphi : U \to V$ — локальная карта, где $U \subseteq M$, $V \subseteq \mathbb{R}^d$ и $K \subseteq U$ — компакт. Тогда система операторов

$$D_k : \mathcal{E}(M) \to \mathcal{C}(K) \quad \Big| \quad D_k(a) = \frac{\partial^{|k|}(a \circ \varphi^{-1})}{\partial t_1^{k_1} ... \partial t_d^{k_d}} \circ \varphi \tag{6.1.30}$$

является системой частных производных на $\mathcal{E}(M)$. Соответствующий ей гомоморфизм алгебр $D : \mathcal{E}(M) \to \mathcal{C}(K)[m]$ представляет собой систему ограничений на компакт K частных производных данной функции:

$$(D(a))_k = D_k(a)\Big|_K$$

6.1.4. Частные производные как дифференциальные операторы. Пусть, по-прежнему, A — стереотипная алгебра с инволюцией, а B — C^*-алгебра, и $\{D_k;\ k \in \mathbb{N}[m]\}$ — система частных производных на A с коэффициентами в B. Тогда гомоморфизм $\varphi = D_0 : A \to B$ превращает B в модуль над A, и поэтому для всякого оператора $P : A \to B$ и любого элемента $a \in A$ определен коммутатор $[P, a] : A \to B$.

Предложение 6.4. *Для всякой системы частных производных $\{D_k;\ k \in \mathbb{N}[m]\}$ на A с коэффициентами в B коммутатор операторов D_k с произвольным элементом $a \in A$ относительно гомоморфизма $D_0 : A \to B$ действует по формуле*

$$[D_k, a] = \sum_{0 \leqslant l < k} \binom{k}{l} \cdot D_{k-l}(a) \cdot D_l \tag{6.1.31}$$

причем, при $k = 0$ эта формула приобретает вид

$$[D_0, a] = 0. \tag{6.1.32}$$

Доказательство. Тождество (6.1.32) выполняется тривиально, поскольку D_0 — гомоморфизм. А (6.1.31) доказывается цепочкой

$$[D_k, a](x) = D_k(a \cdot x) - \varphi(a) \cdot D_k(x) = \sum_{0 \leqslant l \leqslant k} \binom{k}{l} \cdot D_{k-l}(a) \cdot D_l(x) - D_0(a) \cdot D_k(x) =$$

$$= \sum_{0 \leqslant l < k} \binom{k}{l} \cdot D_{k-l}(a) \cdot D_l(x).$$

□

Теорема 6.5. *Для любой системы частных производных $\{D_k;\ k \in \mathbb{N}[m]\}$ из инволютивной стереотипной алгебры A в C^*-алгебру B следующие условия эквивалентны:*

(i) *операторы $\{D_k;\ k \in \mathbb{N}[m]\}$ являются дифференциальными операторами из A в B относительно гомоморфизма $D_0 : A \to B$ с порядками, не превосходящими модулей своих индексов:*

$$D_k \in \mathsf{Diff}^{|k|}(D_0), \tag{6.1.33}$$

(ii) *для любого мультииндекса $k > 0$ значения оператора D_k лежат в пространстве $Z^{|k|}(D_0)$:*

$$D_k(A) \subseteq Z^{|k|}(D_0), \qquad k > 0. \tag{6.1.34}$$

(iii) *для любого мультииндекса $k > 0$ значения оператора D_k лежат в пространстве $Z^1(D_0) = D_0(A)^!$ (коммутанте образа оператора D_0):*

$$D_k(A) \subseteq Z^1(D_0) = D_0(A)^!, \qquad k > 0. \tag{6.1.35}$$

- Систему частных производных $\{D_k;\ k \in \mathbb{N}[m]\}$ на A с коэффициентами в B мы будем называть *дифференциальной*, если она удовлетворяет эквивалентным условиям (i)-(iii) теоремы 6.5.

- Гомоморфизм инволютивных стереотипных алгебр $D : A \to B[m]$ называется *дифференциальным*, если определяемая им по формуле (6.1.28) система частных производных $\{D_k;\ k \in \mathbb{N}[m]\}$ является дифференциальной. Класс всех дифференциальных гомоморфизмов мы обозначаем $\mathsf{DiffMor}$.

Доказательство. Заметим сразу, что равносильность (ii) и (iii) есть следствие формулы (4.3.36). Поэтому нужно проверить равносильность (i) и (ii).

1. (i)$\Longrightarrow$(ii). Пусть выполнено (i). Мы докажем (ii) по индукции.

1) Пусть $|k| = 1$. Тогда для любых $a, a_1 \in A$ мы получим:

$$[D_k, a] = (6.1.31) = \sum_{0 \leqslant l < k} \binom{k}{l} \cdot D_{k-l}(a) \cdot D_l = D_k(a) \cdot D_0$$

$$\Downarrow$$

$$0 = [[D_k, a], a_1] = (4.3.16) = D_k(a) \cdot \underbrace{[D_0, a_1]}_{\substack{\parallel\ (6.1.32) \\ 0}} + [D_k(a), D_0(a_1)] \cdot D_0$$

$$\Downarrow$$

$$[D_k(a), D_0(a_1)] = 0$$

Последнее верно для любого a_1, поэтому $D_k(a) \in Z^1(D_0)$. Это в свою очередь верно для любого $a \in A$, поэтому $D_k(A) \in Z^1(D_0)$.

2) Предположим, что мы уже доказали (6.1.34) для всех k таких, что $|k| \leqslant n$:

$$D_k(A) \subseteq Z^{|k|}(D_0), \qquad 0 < |k| \leqslant n. \tag{6.1.36}$$

Тогда для $|k| = n + 1$ мы получим: при любом $a \in A$

$$\underbrace{[D_k, a]}_{\substack{\Cap\ (4.3.8) \\ \mathsf{Diff}^{|k|-1} \\ \parallel \\ \mathsf{Diff}^n}} = (6.1.31) = \sum_{0 \leqslant l < k} \binom{k}{l} \cdot D_{k-l}(a) \cdot D_l = D_k(a) \cdot D_0 + \sum_{0 < l < k} \binom{k}{l} \cdot \underbrace{\overbrace{D_{k-l}(a)}^{\substack{Z^{|k-l|} \\ (6.1.36)\ \Cup}} \cdot \overbrace{D_l}^{\substack{\mathsf{Diff}^{|l|} \\ \Cup\ (6.1.33)}}}_{\substack{\Cap\ (4.3.26) \\ \mathsf{Diff}^{|k-l|+|l|-1} \\ \parallel \\ \mathsf{Diff}^n}}$$

$$\Downarrow$$

$$D_k(a) \cdot D_0 \in \mathsf{Diff}^n$$

$$\Downarrow \ {\scriptstyle (4.3.29)}$$

$$D_k(a) \in Z^{n+1} = Z^{|k|}$$

2. (i)$\Longleftarrow$(ii). Пусть наоборот, выполнено (ii), тогда (i) доказывается также по индукции.

0) Для $k = 0$ утверждение (6.1.33) выполняется вообще всегда, потому что гомоморфизм $\varphi = D_0$ является дифференциальным оператором нулевого порядка в силу формулы (4.3.15).

1) Предположим, что мы доказали (6.1.33) для всех k таких, что $|k| \leqslant n$:

$$D_k \in \mathsf{Diff}^{|k|}(D_0), \qquad |k| \leqslant n. \tag{6.1.37}$$

Тогда для $|k| = n + 1$ мы получим:

$$\forall a \in A \qquad [D_k, a] = (6.1.31) = \sum_{0 \leqslant l < k} \binom{k}{l} \cdot \underbrace{\overbrace{D_{k-l}(a)}^{\substack{Z^{|k-l|} \\ (6.1.34)\ \Cup}} \cdot \overbrace{D_l}^{\substack{\mathsf{Diff}^{|l|} \\ \Cup\ (6.1.37)}}}_{\substack{\Cap\ (4.3.26) \\ \mathsf{Diff}^{|k-l|+|l|-1} \\ \parallel \\ \mathsf{Diff}^n}},$$

$$\Downarrow$$

$$\forall a \in A \qquad [D_k, a] \in \mathsf{Diff}^n,$$

$$\Downarrow$$

$$D_k \in \mathsf{Diff}^{n+1}.$$

□

6.2. Гладкие оболочки

6.2.1. Определение гладкой оболочки и функториальность.

- *Гладкой оболочкой* $\mathsf{env}_{\mathcal{E}}\, A : A \to \mathsf{Env}_{\mathcal{E}}\, A$ инволютивной стереотипной алгебры A называется ее оболочка в классе DEpi плотных эпиморфизмов категории $\mathtt{InvSteAlg}$ инволютивных стереотипных алгебр относительно класса $\mathsf{DiffMor}$ дифференциальных гомоморфизмов во всевозможные C^*-алгебры $B[m]$ с присоединенными самосопряженными нильпотентными элементами:
$$\mathsf{Env}_{\mathcal{E}}\, A = \mathsf{Env}^{\mathsf{DEpi}}_{\mathsf{DiffMor}}\, A$$

Более подробно, под *гладким расширением* инволютивной стереотипной алгебры A понимается плотный эпиморфизм $\sigma : A \to A'$ инволютивных стереотипных алгебр такой, что для любой C^*-алгебры B, любого мультииндекса $m \in \mathbb{N}^d$ и любого дифференциального инволютивного гомоморфизма $\varphi : A \to B[m]$ найдется единственный гомоморфизм инволютивных стереотипных алгебр $\varphi' : A' \to B[m]$, замыкающий диаграмму

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "\sigma"] \arrow[dr, "\varphi"'] & & A' \arrow[dl, dashed, "\varphi'"] \\ & B[m] & \end{tikzcd}$$

А под *гладкой оболочкой* алгебры A понимается такое гладкое расширение $\rho : A \to \mathsf{Env}_{\mathcal{E}}\, A$, что для любого гладкого расширения $\sigma : A \to A'$ найдется единственный гомоморфизм инволютивных стереотипных алгебр $\upsilon : A' \to \mathsf{Env}_{\mathcal{E}}\, A$, замыкающий диаграмму

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dl, "\sigma"'] \arrow[dr, "\rho"] & \\ A' \arrow[rr, dashed, "\upsilon"'] & & \mathsf{Env}_{\mathcal{E}}\, A \end{tikzcd}$$

Теорема 6.6. *Гладкая оболочка* $\mathsf{Env}_{\mathcal{E}}$ *регулярна и согласована с проективным тензорным произведением*[1] $\circledast$ *в* $\mathtt{InvSteAlg}$.

Доказательство. Здесь используются те же приемы, что и в теореме 5.2, причем для второй части утверждения – согласованности с тензорным произведением — доказательство в точности повторяется, а для первой части отличия появляются только в последних двух пунктах.

R.4: Какой бы ни была стереотипная алгебра A, всегда найдется выходящий из нее дифференциальный морфизм $\varphi : A \to B[m]$ (например, в качестве B можно взять нулевую алгебру $B = 0$ и положить $m = 0$ и $\varphi = 0$). Это значит (см. определение на с.14), что класс $\mathsf{DiffMor}$ выходит из категории $\mathtt{InvSteAlg}$. Покажем, что $\mathsf{DiffMor}$ является правым идеалом в $\mathtt{InvSteAlg}$. Пусть $D \in \mathsf{DiffMor}$, $D : B \to C[m]$, и $\sigma \in \mathsf{Mor}$, $\sigma : A \to B$. Тогда $D \circ \sigma : A \to C[m]$. Для всякого $k > 0$ мы получаем цепочку:

$$\begin{array}{c} B \supseteq \sigma(A) \\ \Downarrow \\ D_0(B) \supseteq D_0(\sigma(A)) \\ \Downarrow \end{array}$$

$$(D \circ \sigma)_k(A) = D(\sigma(A))^{(k)} \subseteq D(B)^{(k)} = D_k(B) \overset{(6.1.35)}{\subseteq} D_0(B)^! \subseteq D_0(\sigma(A))^! =$$
$$= \Big(D(\sigma(A))^{(0)}\Big)^! = \Big((D \circ \sigma)(A)^{(0)}\Big)^! = (D \circ \sigma)_0(A)^!$$

Таким образом, морфизм $D \circ \sigma : A \to C[m]$ удовлетворяет условию (iii) теоремы 6.5, то есть $D \circ \sigma$ — дифференциальный морфизм.

[1] В смысле определений на страницах 32 и 32.

R.5: Остается проверить, что класс DEpi подталкивает класс $\mathsf{DiffMor}$. Пусть морфизмы $D : B \to C[m]$, и $\sigma : A \to B$ такие, что $\sigma \in \mathsf{DEpi}$ и $D \circ \sigma \in \mathsf{DiffMor}$. Тогда для всякого $k > 0$ мы получим:

$$\begin{array}{ccc} & & \overline{\sigma(A)} = B \\ & & \Downarrow \\ & & D_0(\sigma(A))^! = D_0\Big(\overline{\sigma(A)}\Big)^! = D_0(B)^! \\ & & \Downarrow \\ D_k(\sigma(A)) = (D \circ \sigma)_k(A) \subseteq (D \circ \sigma)_0(A)^! = \Big((D \circ \sigma)(A)^{(0)}\Big)^! = \Big(D(\sigma(A))^{(0)}\Big)^! & \subseteq & D_0(B)^! \end{array}$$

$$\Downarrow$$

$$D_k(B) = D_k\Big(\overline{\sigma(A)}\Big) \subseteq \overline{D_k(\sigma(A))} \subseteq D_0(B)^!.$$

Таким образом, морфизм $D : B \to C[m]$ удовлетворяет условию (iii) теоремы 6.5, то есть D — дифференциальный морфизм.

$\square$

Следствие 6.7. *Гладкую оболочку можно определить как идемпотентный ковариантный функтор из* `InvSteAlg` *в* `InvSteAlg`*: существуют*

1) *отображение* $A \mapsto (\mathsf{Env}_{\mathcal{E}} A, \mathsf{env}_{\mathcal{E}} A)$*, сопоставляющее каждой инволютивной стереотипной алгебре* A *инволютивную стереотипную алгебру* $\mathsf{Env}_{\mathcal{E}} A$ *и морфизм инволютивных стереотипных алгебр* $\mathsf{env}_{\mathcal{E}} A : A \to \mathsf{Env}_{\mathcal{E}} A$*, являющийся гладкой оболочкой алгебры* A*, и*
2) *отображение* $\varphi \mapsto \mathsf{Env}_{\mathcal{E}}(\varphi)$*, сопоставляющее каждому морфизму инволютивных стереотипных алгебр* $\varphi : A \to B$ *морфизм инволютивных стереотипных алгебр* $\mathsf{Env}_{\mathcal{E}}(\varphi) : \mathsf{Env}_{\mathcal{E}} A \to \mathsf{Env}_{\mathcal{E}} B$*, замыкающий диаграмму*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\mathsf{env}_{\mathcal{E}} A"] \arrow[d, "\varphi"] & \mathsf{Env}_{\mathcal{E}} A \arrow[d, dashed, "\mathsf{Env}_{\mathcal{E}}(\varphi)"] \\ B \arrow[r, "\mathsf{env}_{\mathcal{E}} B"] & \mathsf{Env}_{\mathcal{E}} B \end{tikzcd} \qquad (6.2.1)$$

причем выполняются тождества

$$\mathsf{Env}_{\mathcal{E}}(1_A) = 1_{\mathsf{Env}_{\mathcal{E}} A}, \quad \mathsf{Env}_{\mathcal{E}}(\beta \circ \alpha) = \mathsf{Env}_{\mathcal{E}}(\beta) \circ \mathsf{Env}_{\mathcal{E}}(\alpha), \qquad (6.2.2)$$

$$\mathsf{Env}_{\mathcal{E}}(\mathsf{Env}_{\mathcal{E}} A) = \mathsf{Env}_{\mathcal{E}} A, \quad \mathsf{env}_{\mathcal{E}} \mathsf{Env}_{\mathcal{E}} A = 1_{\mathsf{Env}_{\mathcal{E}} A}, \qquad (6.2.3)$$

$$\mathsf{Env}_{\mathcal{E}} \mathbb{C} = \mathbb{C} \qquad (6.2.4)$$

Теорема 6.8 (связь с непрерывной оболочкой)**.** *Гладкая оболочка вкладывается в непрерывную оболочку: для всякой инволютивной стереотипной алгебры* A *существует единственный морфизм инволютивных стереотипных алгебр* $\zeta_A : \mathsf{Env}_{\mathcal{E}} A \to \mathsf{Env}_{\mathcal{C}} A$*, замыкающий диаграмму*

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dl, "\mathsf{env}_{\mathcal{E}} A"'] \arrow[dr, "\mathsf{env}_{\mathcal{C}} A"] & \\ \mathsf{Env}_{\mathcal{E}} A \arrow[rr, dashed, "\zeta_A"'] & & \mathsf{Env}_{\mathcal{C}} A \end{tikzcd} \qquad (6.2.5)$$

Этот морфизм ζ_A *всегда является плотным эпиморфизмом.*

Доказательство. Это следует из [29, (3.10)]. $\square$

6.2.2. Сеть дифференциальных фактор-отображений. Конструкцию гладкой оболочки можно описать несколько более наглядно следующим образом. Условимся окрестность нуля U в алгебре A называть *дифференциальной*, если она является прообразом единичного шара при некотором дифференциальном гомоморфизме $D : A \to B[m]$ в C^*-алгебру B с присоединенными нильпотентными элементами:

$$U = \{x \in A : \ \|D(x)\| \leqslant 1\}$$

(норма $\|\cdot\|$ определена формулой (6.1.16)). У каждой дифференциальной окрестности нуля U в A ядро

$$\mathsf{Ker}\, U = \bigcap_{\lambda>0} \lambda \cdot U$$

совпадает с ядром гомоморфизма D и поэтому является замкнутым идеалом в A. Рассмотрим фактор-алгебру $A/\,\mathsf{Ker}\, U$ и наделим ее нормой, в которой класс $U + \mathsf{Ker}\, U$ является единичным шаром. Эту алгебру $A/\,\mathsf{Ker}\, U$ можно считать подалгеброй в $B[m]$ с индуцированной из этого пространства нормой. Ее пополнение

$$A/U = (A/\,\mathsf{Ker}\, U)^{\blacktriangledown} \tag{6.2.6}$$

является банаховой алгеброй (и ее можно считать замкнутой подалгеброй в $B[m]$). Условимся называть A/U *фактор-алгеброй алгебры A по дифференциальной окрестности нуля* U, а соответствующее отображение

$$\pi_U : A \to A/U$$

– *фактор-отображением* алгебры A по дифференциальной окрестности нуля U, или *дифференциальным фактор-отображением* алгебры A.

Лемма 6.9. *Для всякого дифференциального гомоморфизма $\varphi : A \to B[n]$ найдется единственный гомоморфизм $\varphi_U : A/U \to B[n]$, замыкающий диаграмму*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "\pi_U"'] & & B[n] \\ & A/U \arrow[ur, dashed, "\varphi_U"'] & \end{tikzcd} \tag{6.2.7}$$

Лемма 6.10. *Если U и U' — две дифференциальные окрестности нуля в A, причем $U \supseteq U'$, то найдется единственный гомоморфизм $\varkappa_U^{U'} : A/U \leftarrow A/U'$, замыкающий диаграмму*

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dl, "\pi_U"'] \arrow[dr, "\pi_{U'}"] & \\ A/U & & A/U' \arrow[ll, dashed, "\varkappa_U^{U'}"] \end{tikzcd} \tag{6.2.8}$$

Лемма 6.11. *Любые две дифференциальные окрестности нуля U и U' в A содержат некую третью дифференциальную окрестность нуля U'':*

$$U \cap U' \supseteq U''.$$

Доказательство. Действительно, пусть $D : A \to B[m]$ и $D' : A \to B'[m']$ — дифференциальные гомоморфизмы, порождающие U и U'.

$$U = \{x \in A : \ \|D(x)\| \leqslant 1\}, \qquad U' = \{x \in A : \ \|D'(x)\| \leqslant 1\}.$$

Рассмотрим гомоморфизм

$$\varphi : B[m] \oplus B'[m'] \to (B \oplus B')[m \oplus m'],$$

описываемый в (6.1.22). Отображение

$$D'' : A \to (B \oplus B')[m \oplus m'] \quad \Big| \quad D''(x) = \varphi(D(x) \oplus D'(x)), \quad x \in A,$$

будет гомоморфизмом, и если положить

$$U'' = \{x \in A : \ \big\|D''(x)\big\| \leqslant 1\},$$

то для всякого $x \in U''$ мы получим

$$1 \geqslant \big\|D''(x)\big\| = \big\|\varphi(D(x) \oplus D'(x))\big\| \geqslant (6.1.23) \geqslant \big\|D(x) \oplus D'(x)\big\| = \max\{\|D(x)\|, \big\|D'(x)\big\|\}$$

то есть $x \in U$ и $x \in U'$. $\square$

Из лемм 6.9, 6.10 и 6.11 следует

Теорема 6.12. *Система $\pi_U : A \to A/U$ дифференциальных фактор-отображений образует сеть эпиморфизмов в категории* `InvSteAlg` *инволютивных стереотипных алгебр (в смысле* [29]*), то есть обладает следующими свойствами:*

(a) *у всякой алгебры A есть хотя бы одна дифференциальная окрестность нуля U, и множество всех дифференциальных окрестностей нуля в A направлено относительно предпорядка*

$$U \leqslant U' \quad \Longleftrightarrow \quad U \supseteq U',$$

(b) *для всякой алгебры A система морфизмов $\varkappa_U^{U'}$ из (6.2.8) ковариантна, то есть для любых трех окрестностей нуля $U \supseteq U' \supseteq U''$ коммутативна диаграмма*

$$\begin{tikzcd} A/U & & A/U'' \arrow[ll, "\varkappa_U^{U''}"'] \arrow[dl, "\varkappa_{U'}^{U''}"] \\ & A/U \arrow[ul, "\varkappa_U^{U'}"] & \end{tikzcd}$$

и эта система $\varkappa_U^{U'}$ обладает проективным пределом в `InvSteAlg`*;*

(c) *для всякого морфизма $\alpha : A \leftarrow A'$ в* `InvSteAlg` *и любой дифференциальной окрестности нуля U в A найдется дифференциальная окрестность нуля U' в A' и морфизм $\alpha_U^{U'} : A/U \leftarrow A'/U'$ такие, что коммутативна диаграмма*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d, "\pi_U"'] & A' \arrow[l, "\alpha"'] \arrow[d, dashed, "\pi_{U'}"] \\ A/U & A'/U' \arrow[l, dashed, "\alpha_U^{U'}"] \end{tikzcd} \tag{6.2.9}$$

В соответствии с пунктом (b) этой теоремы, существует проективный предел $\varprojlim_{0\leftarrow U'} A/U'$ системы $\varkappa_U^{U'}$. Как следствие, существует единственная стрелка $\pi : A \to \varprojlim_{0\leftarrow U'} A/U'$ в `InvSteAlg`, замыкающая все диаграммы

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dl, "\pi_U"'] \arrow[dr, dashed, "\pi_{U'}"] & \\ A/U & & \varprojlim_{0\leftarrow U'} A/U' \arrow[ll, "\varkappa_U"] \end{tikzcd} \tag{6.2.10}$$

Образ $\pi(A)$ отображения π является (инволютивной подалгеброй и) подпространством в стереотипном пространстве $\varprojlim_{0\leftarrow U'} A/U'$. Поэтому оно порождает некое непосредственное подпространство в $\varprojlim_{0\leftarrow U'} A/U'$, или оболочку $\mathsf{Env}\,\pi(A)$ (см. [29]), то есть наибольшее стереотипное пространство содержащееся в $\varprojlim_{0\leftarrow U'} A/U'$ и имеющее $\pi(A)$ плотным подпространством. Обозначим через $\rho : A \to \mathsf{Env}\,\pi(A)$ поднятие морфизма π в $\mathsf{Env}\,\pi(A)$.

Теорема 6.13. *Морфизм $\rho : A \to \mathsf{Env}\,\pi(A)$ является гладкой оболочкой алгебры A:*

$$\mathsf{Env}\,\pi(A) = \mathsf{Env}_{\mathcal{E}}\,A.$$

Доказательство. Здесь нужно проследить за доказательством теоремы 3.42 в работе [29]: сеть эпиморфизмов $\mathcal{N}$, построенная там, отличается от построенной нами системы $\pi_U : A \to A/U$ дифференциальных фактор-отображений только тем, что в ней элементами являются конечные множества отображений $\pi_U : A \to A/U$ (в теореме 3.42 из [29] это нужно, чтобы $\mathcal{N}^X$ было направлено влево относительно предпорядка в классе эпиморфизмов, но в нашем случае сеть фактор-отображений $\pi_U : A \to A/U$ и так направлена влево в силу леммы 6.11). Понятно, что локальные пределы этих сетей (то есть проективные пределы при фиксированном X) будут совпадать. Как следствие, все выводы для сети $\mathcal{N}$ применимы и для сети $\pi_U : A \to A/U$, в частности, вывод о совпадении оболочек относительно этих сетей с оболочкой относительно исходного класса морфизмов $\varPhi = \mathsf{DiffMor}$. $\square$

Замечание 6.3. Как и в случае с непрерывной оболочкой, гладкая оболочка $\rho : A \to \mathsf{Env}_{\mathcal{E}}\,A$ представляет собой композицию элементов red_∞ и coim_∞ узлового разложения морфизма $\pi : A \to \varprojlim_{0 \leftarrow U'} A/U'$ в категории `Ste` стереотипных пространств (не алгебр!):

$$\mathsf{env}_{\mathcal{E}}\,A = \mathsf{red}_\infty\,\pi \circ \mathsf{coim}_\infty\,\pi. \tag{6.2.11}$$

Наглядно это изображается диаграммой

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\pi = \varprojlim_{0 \leftarrow U'} \pi_{U'}"] \arrow[d, "\mathsf{coim}_\infty\,\pi"'] & \varprojlim_{0 \leftarrow U'} A/U' & \\
\mathsf{Coim}_\infty\,\pi \arrow[r, "\mathsf{red}_\infty\,\pi"'] & \mathsf{Im}_\infty\,\pi \arrow[u, "\mathsf{im}_\infty\,\pi"'] \arrow[r, equal] & \mathsf{Env}_{\mathcal{C}}\,A
\end{tikzcd} \tag{6.2.12}$$

Алгебру $\mathsf{Env}_{\mathcal{E}}\,A$ при этом можно понимать как оболочку (в смысле (2.3.2)) множества значений морфизма π в стереотипном пространстве $\lim_{0 \leftarrow U'} A/U'$:

$$\mathsf{Env}_{\mathcal{E}}\,A = \mathsf{Env}\,\pi(A). \tag{6.2.13}$$

6.3. Гладкие алгебры

Инволютивную стереотипную алгебру A мы называем *гладкой алгеброй*, если она совпадает со своей гладкой оболочкой, точнее, если ее гладкая оболочка $\mathsf{env}_{\mathcal{E}}\,A : A \to \mathsf{Env}_{\mathcal{E}}\,A$ является изоморфизмом в категории `InvSteAlg` инволютивных стереотипных алгебр. Класс всех гладких алгебр мы обозначаем $\mathcal{E}$-`Alg`. Он образует полную подкатегорию в категории `InvSteAlg`.

6.3.1. Гладкое тензорное произведение инволютивных стереотипных алгебр. Пусть $\mathsf{Env}_{\mathcal{E}}$ — функтор гладкой оболочки, определенный в следствии 6.7. Для любых двух инволютивных стереотипных алгебр A и B их *гладким тензорным произведением* условимся называть алгебру

$$A \overset{\mathcal{E}}{\circledast} B = \mathsf{Env}_{\mathcal{E}}(A \circledast B) \tag{6.3.1}$$

Теорема 6.14. *Для любых двух инволютивных стереотипных алгебр A и B существует единственное линейное непрерывное отображение $\eta^\infty_{A,B} : A \overset{\mathcal{E}}{\circledast} B \to A \odot B$, замыкающее диаграмму*

$$\begin{tikzcd}
A \circledast B \arrow[rr, "@_{A,B}"] \arrow[dr, "\mathsf{env}_{\mathcal{E}}\,A \circledast B"'] & & A \odot B \\
& A \overset{\mathcal{E}}{\circledast} B \arrow[ur, "\eta^\infty_{A,B}"'] &
\end{tikzcd} \tag{6.3.2}$$

а система отображений $\eta^\infty_{A,B} : A \overset{\mathcal{E}}{\circledast} B \to A \odot B$ *является естественным преобразованием функтора* $(A,B) \in \mathcal{E}\text{-}\mathtt{Alg}^2 \mapsto A \overset{\mathcal{E}}{\circledast} B \in \mathcal{E}\text{-}\mathtt{Alg}$ *в функтор* $(A,B) \in \mathcal{E}\text{-}\mathtt{Alg}^2 \mapsto A \odot B \in \mathtt{Ste}$.

Доказательство. Рассмотрим диаграмму

$$\begin{tikzcd}
A \circledast B \arrow[rr, "@_{A,B}"] \arrow[d, "\mathsf{env}_{\mathcal{E}}\, A\circledast B"'] \arrow[drr, "\mathsf{env}_{\mathcal{C}}\, A\circledast B"'] & & A \odot B \\
A \overset{\mathcal{E}}{\circledast} B \arrow[rr, "\zeta_{A\circledast B}"'] & & A \overset{\mathcal{C}}{\circledast} B \arrow[u, "\eta_{A,B}"']
\end{tikzcd}$$

В ней левый нижний треугольник — диаграмма (6.2.5) для алгебры $A \circledast B$, а правый верхний треугольник — диаграмма (5.2.7). Положив

$$\eta^\infty_{A,B} = \eta_{A,B} \circ \alpha_{A,B}$$

мы получим нужный морфизм. $\square$

6.3.2. Гладкое тензорное произведение гладких алгебр. Из теорем 6.6 и 1.20 следует

Теорема 6.15. *Формула* (5.2.1) *определяет в* $\mathcal{E}\text{-}\mathtt{Alg}$ *тензорное произведение, превращающее* $\mathcal{E}\text{-}\mathtt{Alg}$ *в моноидальную категорию, а функтор гладкой оболочки* $\mathsf{Env}_{\mathcal{E}}$ *является моноидальным функтором из моноидальной категории* $(\mathtt{InvSteAlg}, \circledast)$ *инволютивных стереотипных алгебр в моноидальную категорию* $(\mathcal{E}\text{-}\mathtt{Alg}, \overset{\mathcal{E}}{\circledast})$ *гладких алгебр. Соответствующий морфизм бифункторов*

$$\Big((A,B) \mapsto \mathsf{Env}_{\mathcal{E}}(A) \overset{\mathcal{E}}{\circledast} \mathsf{Env}_{\mathcal{E}}(B)\Big) \overset{E^{\circledast}}{\rightarrowtail} \Big((A,B) \mapsto \mathsf{Env}_{\mathcal{E}}(A \circledast B)\Big)$$

определяется формулой

$$E^{\circledast}_{A,B} = \mathsf{Env}_{\mathcal{E}}(\mathsf{env}_{\mathcal{E}}\, A \circledast \mathsf{env}_{\mathcal{E}}\, B)^{-1} : \mathsf{Env}_{\mathcal{E}}(A) \overset{\mathcal{E}}{\circledast} \mathsf{Env}_{\mathcal{E}}(B) = \mathsf{Env}_{\mathcal{E}}(\mathsf{Env}_{\mathcal{E}}(A) \circledast \mathsf{Env}_{\mathcal{E}}(B)) \to \mathsf{Env}_{\mathcal{E}}(A \circledast B),$$

а морфизмом $E^{\mathbb{C}}$ *в* $\mathcal{C}\text{-}\mathtt{Alg}$*, переводящий единичный объект* $\mathbb{C}$ *категории* $\mathcal{C}\text{-}\mathtt{Alg}$ *в образ* $\mathsf{Env}_{\mathcal{E}}(\mathbb{C})$ *единичного объекта* $\mathbb{C}$ *категории* $\mathtt{InvSteAlg}$*, будет локальная единица:*

$$E^{\mathbb{C}} = 1_{\mathbb{C}} : \mathbb{C} \to \mathbb{C} = \mathsf{Env}_{\mathcal{E}}(\mathbb{C}).$$

Каждой паре элементов $a \in A$, $b \in B$ можно поставить в соответствие элементарный тензор

$$a \overset{\mathcal{E}}{\circledast} b = \mathsf{env}_{\mathcal{E}}(a \circledast b) \qquad (6.3.3)$$

Лемма 6.16. *Элементарные тензоры* $a \overset{\mathcal{E}}{\circledast} b$*,* $a \in A$*,* $b \in B$*, полны в* $A \overset{\mathcal{E}}{\circledast} B$ *и при отображении* $\eta_{A,B}$ *переходят в элементарные тензоры* $a \odot b$*:*

$$\eta_{A,B}(a \overset{\mathcal{E}}{\circledast} b) = a \odot b. \qquad (6.3.4)$$

Доказательство. Тензоры $a \circledast b$ полны в $A \circledast B$, а образ $\mathsf{env}_{\mathcal{E}}$ плотен в $A \overset{\mathcal{E}}{\circledast} B$. Тождество (6.3.4) следует из диаграммы (6.3.2). $\square$

6.3.3. Действие гладкой оболочки на биалгебры. Следующие три утверждения аналогичны теоремам 5.13, 5.14 и 5.15, и доказываются так же.

Лемма 6.17. *Если* A *— коалгебра в моноидальной категории* $(\mathcal{E}\text{-}\mathtt{Alg}, \overset{\mathcal{E}}{\circledast})$ *гладких алгебр со структурными морфизмами*

$$\varkappa : A \to A \overset{\mathcal{E}}{\circledast} A, \qquad \varepsilon : A \to \mathbb{C},$$

то A является коалгеброй в моноидальной категории $(\mathtt{Ste}, \odot)$ стереотипных пространств со структурными морфизмами

$$\lambda = \eta_{A,A} \circ \varkappa : A \to A \odot A, \qquad \varepsilon : A \to \mathbb{C}.$$

Теорема 6.18. *Пусть H — биалгебра в категории $(\mathtt{Ste}, \circledast)$ стереотипных пространств, или, что эквивалентно, коалгебра в категории $\mathtt{Ste}^{\circledast}$ стереотипных алгебр с коумножением $\varkappa$ и коединицей ε. Тогда*

(i) *гладкая оболочка $\mathsf{Env}_{\mathcal{E}} H$ является коалгеброй в моноидальной категории $(\mathcal{C}\text{-}\mathtt{Alg}, \overset{\mathcal{E}}{\circledast})$ гладких алгебр с коумножением и коединицей*

$$\varkappa_{\mathsf{Env}_{\mathcal{E}}} = \mathsf{Env}_{\mathcal{E}}(\mathsf{env}_{\mathcal{E}} H \circledast \mathsf{env}_{\mathcal{E}} H) \circ \mathsf{Env}_{\mathcal{E}}(\varkappa), \qquad \varepsilon_{\mathsf{Env}_{\mathcal{E}}} = \mathsf{Env}_{\mathcal{E}}(\varepsilon), \tag{6.3.5}$$

(ii) *гладкая оболочка $\mathsf{Env}_{\mathcal{E}} H$ является коалгеброй в моноидальной категории $(\mathtt{Ste}, \odot)$ стереотипных пространств с коумножением и коединицей*

$$\varkappa_{\odot} = \eta_{\mathsf{Env}_{\mathcal{E}} H, \mathsf{Env}_{\mathcal{E}} H} \circ \mathsf{Env}_{\mathcal{E}}(\mathsf{env}_{\mathcal{E}} H \circledast \mathsf{env}_{\mathcal{E}} H) \circ \mathsf{Env}_{\mathcal{E}}(\varkappa) = \eta_{\mathsf{Env}_{\mathcal{E}} H, \mathsf{Env}_{\mathcal{E}} H} \circ \varkappa_{\mathsf{Env}_{\mathcal{E}}}, \qquad \varepsilon_{\odot} = \mathsf{Env}_{\mathcal{E}}(\varepsilon), \tag{6.3.6}$$

(iii) *морфизм $(\mathsf{env}_{\mathcal{E}} H)^\star : H^\star \leftarrow \mathsf{Env}_{\mathcal{E}} H^\star$, сопряженный к морфизму оболочки $\mathsf{env}_{\mathcal{E}} H : H \to \mathsf{Env}_{\mathcal{E}} H$, является морфизмом стереотипных алгебр, если $\mathsf{Env}_{\mathcal{E}} H^\star$ рассматривается как алгебра с умножением и единицей, сопряженными к (6.3.6), а $H^\star$ — как алгебра с умножением и единицей*

$$\varkappa^\star \circ @_{H^\star, H^\star}, \qquad \varepsilon^\star.$$

Теорема 6.19. *Пусть H — инволютивная алгебра Хопфа в категории $(\mathtt{Ste}, \circledast)$ стереотипных пространств. Тогда*

(i) *гладкая оболочка $\mathsf{Env}_{\mathcal{E}} H$, как коалгебра в моноидальных категориях $(\mathcal{E}\text{-}\mathtt{Alg}, \overset{\mathcal{E}}{\circledast})$ и $(\mathtt{Ste}, \odot)$, обладает согласованными между собой антиподом $\mathsf{Env}_{\mathcal{E}}(\sigma)$ и инволюцией $\mathsf{Env}_{\mathcal{E}}(\bullet)$, однозначно определяемыми диаграммами в категории $\mathtt{Ste}$*

$$\begin{tikzcd} H \arrow[r, "\mathsf{env}_{\mathcal{E}} H"] \arrow[d, "\sigma"'] & \mathsf{Env}_{\mathcal{E}} H \arrow[d, dashed, "\mathsf{Env}_{\mathcal{E}}(\sigma)"] \\ H \arrow[r, "\mathsf{env}_{\mathcal{E}} H"] & \mathsf{Env}_{\mathcal{E}} H \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} H \arrow[r, "\mathsf{env}_{\mathcal{E}} H"] \arrow[d, "\bullet"'] & \mathsf{Env}_{\mathcal{E}} H \arrow[d, dashed, "\mathsf{Env}_{\mathcal{E}}(\bullet)"] \\ H \arrow[r, "\mathsf{env}_{\mathcal{E}} H"] & \mathsf{Env}_{\mathcal{E}} H \end{tikzcd} \tag{6.3.7}$$

(ii) *морфизм $(\mathsf{env}_{\mathcal{E}} H)^\star : H^\star \leftarrow \mathsf{Env}_{\mathcal{E}} H^\star$, сопряженный к морфизму оболочки $\mathsf{env}_{\mathcal{E}} H : H \to \mathsf{Env}_{\mathcal{E}} H$, является инволютивным гомоморфизмом стереотипных алгебр над $\circledast$, если $H^\star$ и $\mathsf{Env}_{\mathcal{E}} H^\star$ наделяются структурой сопряженных инволютивных алгебр к инволютивным коалгебрам с антиподом H и $\mathsf{Env}_{\mathcal{E}} H$ по свойству 4° на с.67.*

6.3.4. Гладкое тензорное произведение с $\mathcal{E}(M)$. Пусть X — стереотипное пространство, и M — гладкое (локально евклидово) многообразие. Рассмотрим алгебру $\mathcal{E}(M)$ гладких функций на M и пространство $\mathcal{E}(M, X)$ гладких отображений на M со значениями в X. Мы наделяем $\mathcal{E}(M)$ и $\mathcal{E}(M, X)$ стандартной топологией равномерной сходимости на компактах по каждой частной производной

$$u_i \overset{\mathcal{E}(M,X)}{\longrightarrow} 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \forall U \subseteq M \quad \forall k \in \mathbb{N}^d \qquad u_i^{(k)}\big|_U \overset{\mathcal{C}(U,X)}{\longrightarrow} 0, \qquad u \in \mathcal{E}(M, X), \quad t \in M.$$

(где $u^{(k)}$ — частная производная вдоль локальной карты на открытом множестве $U \subseteq M$) и поточечными алгебраическими операциями:

$$(\lambda \cdot u)(t) = \lambda \cdot u(t) \qquad (u + v)(t) = u(t) + v(t), \qquad u, v \in \mathcal{C}(M, X), \quad \lambda \in \mathbb{C}, \quad t \in M.$$

Из [28, Theorem 8.9] следует

Предложение 6.20. *Справедливо тождество*

$$\mathcal{E}(M, X) \cong \mathcal{E}(M) \odot X \tag{6.3.8}$$

В дальнейшем нас будет интересовать случай, когда A — гладкая (и поэтому стереотипная) алгебра. Пространство $\mathcal{E}(M,A)$ при этом мы также наделяем структурой стереотипной алгебры с поточечными операциями

$$(u\cdot v)(t)=u(t)\cdot v(t),\qquad u,v\in\mathcal{C}(M,A),\quad t\in M.$$

Из (6.3.8) следует, что $\mathcal{E}(M,A)$ является стереотипным A-модулем.

Теорема 6.21. *Для всякой гладкой алгебры A и любого гладкого многообразия M естественное отображение*

$$\iota:\mathcal{E}(M)\circledast A\to\mathcal{E}(M,A)\quad\Big|\quad \iota(u\circledast a)(t)=u(t)\cdot a,\quad u\in\mathcal{E}(M),\ a\in A,\ t\in M, \tag{6.3.9}$$

является гладкой оболочкой и порождает изоморфизм стереотипных алгебр:

$$\mathcal{E}(M)\overset{\mathcal{E}}{\circledast}A\cong\mathcal{E}(M,A). \tag{6.3.10}$$

Мы разобьем доказательство на 5 лемм.

Лемма 6.22. *Отображение $\iota:\mathcal{E}(M)\circledast A\to\mathcal{E}(M,A)$ является плотным эпиморфизмом.*

Доказательство. Это доказывается аналогично лемме 5.18. □

Лемма 6.23. *Модули $\mathcal{E}(M)\circledast A$ и $\mathcal{E}(M,A)$ над алгеброй $\mathcal{E}(M)$ имеют изоморфные расслоения струй:*

$$\mathsf{Jet}^n_{\mathcal{E}(M)}\mathcal{E}(M)\circledast A\cong\mathsf{Jet}^n_{\mathcal{E}(M)}\mathcal{E}(M,A),\qquad n\in\mathbb{N} \tag{6.3.11}$$

Доказательство. Для каждой точки $t\in M$ идеал I_t^{n+1} имеет конечную коразмерность в $\mathcal{E}(M)$, поэтому можно воспользоваться леммой 2.52 (см. часть 1):

$$\begin{aligned}\mathsf{Jet}^n_{\mathcal{E}(M)}\mathcal{E}(M)\circledast A&=[(\mathcal{E}(M)\circledast A)/(I_t^{n+1}\circledast A)]^{\vartriangle}=(2.4.44)=\\&=[(\mathcal{E}(M)\odot A)/(I_t^{n+1}\odot A)]^{\vartriangle}=\mathsf{Jet}^n_{\mathcal{E}(M)}\mathcal{E}(M)\odot A=(6.3.8)=\mathsf{Jet}^n_{\mathcal{E}(M)}\mathcal{E}(M,A)\end{aligned}$$

□

Лемма 6.24. *Пусть M — гладкое многообразие и $\varphi:\mathcal{E}(M)\to F$ — гомоморфизм инволютивных стереотипных алгебр, причем F — C^*-алгебра, и $\varphi(\mathcal{E}(M))$ лежит в центре F:*

$$\varphi(\mathcal{E}(M))\subseteq Z(F).$$

Тогда для любого стереотипного пространства X всякий морфизм расслоений струй ν : $\mathsf{Jet}^n_{\mathcal{E}(M)}(\mathcal{E}(M,X))\to\mathsf{Jet}^0_{\mathcal{E}(M)}(F)$ определяет единственный дифференциальный оператор порядка n между стереотипными $\mathcal{E}(M)$-модулями $D:\mathcal{E}(M)\to F$, удовлетворяющий тождеству

$$\mathsf{jet}^0(Du)=\nu\circ\mathsf{jet}^n(u),\qquad u\in\mathcal{E}(M,X). \tag{6.3.12}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{Jet}^0_{\mathcal{E}(M)}[\mathcal{E}(M,X)] \arrow[dd, "\nu"'] & \\
& M \arrow[ul, "\mathsf{jet}^n(u)"'] \arrow[dl, "\mathsf{jet}^n(Du)"] \\
\mathsf{Jet}^0_{\mathcal{E}(M)}[F] &
\end{tikzcd}$$

то есть такой, что ν является морфизмом раслоений струй, определяемым дифференциальным оператором D по теореме 4.13 (см. часть 1):

$$\nu=\mathsf{jet}_n[D].$$

Доказательство. По теореме 4.9, отображение $v : F \to \mathsf{Sec}(\pi^0_{\mathcal{E}(M),F})$, переводящее F в алгебру непрерывных сечений расслоения значений $\pi^0_{\mathcal{E}(M),F} : \mathsf{Jet}^0_{\mathcal{E}(M)} F \to \mathsf{Spec}(\mathcal{E}(M))$ над алгеброй $\mathcal{E}(M)$, является изоморфизмом C^*-алгебр:

$$F \cong \mathsf{Sec}(\pi^0_{\mathcal{E}(M),F}).$$

Рассмотрим обратный изоморфизм $v^{-1} : \mathsf{Sec}(\pi^0_{\mathcal{E}(M),F}) \to F$:

$$v^{-1}(\mathsf{jet}^0(b)) = b, \qquad b \in F. \tag{6.3.13}$$

Тогда всякому морфизму расслоений струй $\nu : \mathsf{Jet}^n_{\mathcal{E}(M)}(\mathcal{E}(M,X)) \to \mathsf{Jet}^0_{\mathcal{E}(M)}(F)$ можно поставить в соответствие оператор $D : \mathcal{E}(M,X) \to F$ по формуле

$$Du = v^{-1}\Big(\nu \circ \mathsf{jet}^n(u)\Big), \qquad u \in \mathcal{E}(M,X). \tag{6.3.14}$$

Он, очевидно, будет удовлетворять тождеству (6.3.12). С другой стороны, в пространстве гладких функций на M со значениями в произвольном стереотипном пространстве X, как и в обычном пространстве функций со значениями в $\mathbb{C}$, справедлива формула Ньютона-Лейбница, и поэтому, при заданной локальной карте, справедливы лемма Адамара [16] и разложение Тейлора с остаточным членом в модуле $\overline{I_t^{n+1} \cdot X}$ с подходящим значением $n \in \mathbb{N}$. Поэтому, поскольку действие D на элемент x пропускается через струю $\mathsf{jet}^n(x)$, оно линейно выражается через коэффициенты Тейлора разложения элемента x в окрестности данной точки $t \in M$ (при выборе локальной карты). Эти коэффициенты Тейлора являются дифференциальными операторами над $\mathcal{E}(M)$, и, как следствие, D тоже должен быть дифференциальным оператором над $\mathcal{E}(M)$. $\square$

Лемма 6.25. *Отображение $\iota : \mathcal{E}(M) \circledast A \to \mathcal{E}(M,A)$ является гладким расширением.*

Доказательство. Пусть $D : \mathcal{E}(M) \circledast A \to B[m]$ — морфизм в C^*-алгебру B с присоединенными самосопряженными нильпотентами. Представим D как семейство частных производных $D_k : \mathcal{E}(M) \circledast A \to B$, и положим

$$\eta_k(u) = D_k(u \circledast 1), \qquad \alpha_k(a) = D_k(1 \circledast a), \qquad u \in \mathcal{E}(M),\ a \in A.$$

Тогда $\eta : \mathcal{E}(M) \to B[m]$, $\alpha : A \to B[m]$ будут морфизмами инволютивных стереотипных алгебр, и по лемме 3.3 (см. часть 1),

$$D(u \circledast a) = \eta(u) \cdot \alpha(a) = \alpha(a) \cdot \eta(u), \qquad u \in \mathcal{E}(M),\ a \in A, \tag{6.3.15}$$

В частности,

$$D_0(u \circledast a) = \eta_0(u) \cdot \alpha_0(a) = \alpha_0(a) \cdot \eta_0(u), \qquad u \in \mathcal{E}(M),\ a \in A. \tag{6.3.16}$$

Рассмотрим оператор η_0 и обозначим буквой C его образ в B:

$$C = \overline{\eta_0(\mathcal{E}(M))}.$$

Пусть F — коммутант алгебры C в B:

$$F = C^! = \{x \in B : \quad \forall c \in C \quad x \cdot c = c \cdot x\}.$$

Поскольку алгебра C коммутативна, она также лежит в F, и более того, в центре F:

$$C \subseteq Z(F).$$

Заметим еще, что образы всех операторов D_k лежат в F:

$$D_k(\mathcal{E}(M) \circledast A) \subseteq F. \tag{6.3.17}$$

Для $k = 0$ это можно доказать напрямую:

$$D_0(v \circledast a) \cdot \eta_0(u) = D_0(v \circledast a) \cdot D_0(u \circledast 1) = D_0\big((v \circledast a) \cdot (u \circledast 1)\big) = D_0\big((v \cdot u) \circledast 1\big) = D_0\big((u \cdot v) \circledast 1\big) =$$
$$= D_0\big((u \circledast 1) \cdot (v \circledast a)\big) = D_0(u \circledast 1) \cdot D_0(v \circledast a) = \eta_0(u) \cdot D_0(v \circledast a)$$

А для $k > 0$ нужно применить соотношение (6.1.35): поскольку при $k > 0$ значения операторов D_k и D_0 коммутируют, мы получаем

$$D_k(v \circledast a) \cdot \eta_0(u) = D_k(v \circledast a) \cdot D_0(u \circledast 1) = D_0(u \circledast 1) \cdot D_k(v \circledast a) = \eta_0(u) \cdot D_k(v \circledast a).$$

Чтобы убедиться, что ι — гладкое расширение, нам надо показать, что существует система дифференциальных частных производных $\{D'_k;\ k \in \mathbb{N}^d\}$ (над $\mathcal{E}(M, A)$!), продолжающих операторы D_k с $\mathcal{E}(M) \circledast A$ на $\mathcal{E}(M, A)$ и принимающих значения в F:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{E}(M) \circledast A \arrow[rr, "\iota"] \arrow[dr, "D_k"'] & & \mathcal{E}(M, A) \arrow[dl, dashed, "D'_k"] \\ & F & \end{tikzcd} \tag{6.3.18}$$

Всякому дифференциальному оператору $D_k : \mathcal{E}(M) \circledast A \to F$ по теореме 4.13 соответствует некий морфизм расслоений струй $\mathsf{jet}_n[D_k] : \mathsf{Jet}^n_{\mathcal{E}(M)}[\mathcal{E}(M) \circledast A] \to \mathsf{Jet}^0_{\mathcal{E}(M)}(F) = \pi^0_A F$, где $n = |k|$, удовлетворяющий тождеству

$$\mathsf{jet}^0(D_k x) = \mathsf{jet}_n[D_k] \circ \mathsf{jet}^n(x), \qquad x \in \mathcal{E}(M) \circledast A.$$

По лемме 6.23, расслоения струй алгебр $\mathcal{E}(M) \circledast A$ и $\mathcal{E}(M, A)$ изоморфны. Обозначим этот изоморфизм $\mu : \mathsf{Jet}^n_{\mathcal{E}(M)}[\mathcal{E}(M) \circledast A] \leftarrow \mathsf{Jet}^n_{\mathcal{E}(M)}[\mathcal{E}(M, A)]$. Рассмотрим композицию $\nu = \mathsf{jet}_n[D_k] \circ \mu : \mathsf{Jet}_{\mathcal{E}(M)}[\mathcal{E}(M, A)] \to \mathsf{Jet}^0_{\mathcal{E}(M)}(F) = \pi^0_A F$:

$$\begin{tikzcd} \mathsf{Jet}^n_{\mathcal{E}(M)}[\mathcal{E}(M) \circledast A] \arrow[dr, "\mathsf{jet}_n[D_k]"'] & & \mathsf{Jet}^n_{\mathcal{E}(M)}[\mathcal{E}(M, A)] \arrow[ll, "\mu"'] \arrow[dl, dashed, "\nu = \mathsf{jet}_n[D_k] \circ \mu"] \\ & \mathsf{Jet}^0_{\mathcal{E}(M)}[F] & \end{tikzcd}$$

По лемме 6.24 этой пунктирной стрелке ν соответствует дифференциальный оператор $D'_k : \mathcal{E}(M, A) \to F$ (над алгеброй $\mathcal{E}(M)$), удовлетворяющий тождеству

$$\mathsf{jet}^0(D'_k f) = \mathsf{jet}_n[D_k] \circ \mathsf{jet}^n(f), \qquad f \in \mathcal{E}(M, A).$$

Для всякого $x \in \mathcal{E}(M) \circledast A$ мы получим

$$\mathsf{jet}^0\left(D'_k \iota(x)\right) = \mathsf{jet}_n[D_k] \circ \mathsf{jet}^n(\iota(x)) = \mathsf{jet}_n[D_k] \circ \mathsf{jet}^n(x) = \mathsf{jet}^0(D_k x). \tag{6.3.19}$$

Заметим далее, что по теореме 4.9, отображение $\mathsf{jet}^0 = v : F \to \mathsf{Sec}(\pi^0_{\mathcal{E}(M)} F) = \mathsf{Sec}(\mathsf{Jet}^0_{\mathcal{E}(M)} F)$, переводящее F в алгебру непрерывных сечений расслоения значений $\pi^0_{\mathcal{E}(M)} F : \mathsf{Jet}^0_{\mathcal{E}(M)} F \to \mathsf{Spec}(\mathcal{E}(M))$ над алгеброй $\mathcal{E}(M)$, является изоморфизмом C^*-алгебр:

$$F \cong \mathsf{Sec}(\pi^0_{\mathcal{E}(M)} F).$$

Поэтому к (6.3.19) можно применить оператор, обратный jet^0, и мы получим равенство

$$D'_k \iota(x) = D_k x.$$

То есть D'_k продолжает D_k в диаграмме (6.3.18). Кроме того, из того, что ι отображает $\mathcal{E}(M) \circledast A$ плотно в $\mathcal{E}(M, A)$ следует, что условия (6.1.25)-(6.1.27) переносятся с оператора D_k на оператор D'_k.

По построению, операторы D'_k будут дифференциальными относительно алгебры $\mathcal{E}(M)$, однако нам этого недостаточно: нужно чтобы каждый D'_k был дифференциальным оператором порядка $|k|$ относительно алгебры $\mathcal{E}(M, A)$, и чтобы операторы D'_k образовывали систему частных производных на $\mathcal{E}(M, A)$.

И то и другое следует из того, что операторы D_k образуют дифференциальную систему частных производных на $\mathcal{E}(M) \circledast A$. Во-первых, каждый D_k является дифференциальным оператором порядка $|k|$ относительно $\mathcal{E}(M)\circledast A$, поэтому для любых $u_0,u_1,...,u_{|k|}\in\mathcal{E}(M)$ выполняется равенство

$$[...[[D_k,u_0\circledast a_0],u_1\circledast a_1],...u_{|k|}\circledast a_{|k|}]=0.$$

Из него следует

$$[...[[D'_k,\iota(u_0\circledast a_0)],\iota(u_1\circledast a_1)],...\iota(u_{|k|}\circledast a_{|k|})]=0,$$

и, поскольку элементы вида $\iota(u\circledast a)$ полны в $\mathcal{E}(M,A)$, отсюда следует, что их можно заменить произвольными векторами из $\mathcal{E}(M,A)$, и мы получаем, что D'_k — дифференциальный оператор порядка $|k|$ над $\mathcal{E}(M,A)$. Во-вторых, формулы (6.1.25)-(6.1.27) точно так же переносятся с D_k на D'_k. Например, из (6.1.27) для операторов D_k,

$$D_k(x\cdot y)=\sum_{0\leqslant l\leqslant k}\binom{k}{l}\cdot D_{k-l}(x)\cdot D_l(y),\qquad x,y\in\mathcal{E}(M)\circledast A,$$

следует

$$D'_k(\iota(x)\cdot\iota(y))=D'_k(\iota(x\cdot y))=D_k(x\cdot y)=\sum_{0\leqslant l\leqslant k}\binom{k}{l}\cdot D_{k-l}(x)\cdot D_l(y)=\sum_{0\leqslant l\leqslant k}\binom{k}{l}\cdot D_{k-l}(\iota(x))\cdot D_l(\iota(y)),$$

Это верно для любых $x,y\in\mathcal{E}(M)\circledast A$. Поскольку образ ι плотен в $\mathcal{E}(M,A)$ (лемма 6.22), мы получаем, что $\iota(x)$ и $\iota(y)$ можно заменить на произвольные векторы из $\mathcal{E}(M,A)$, то есть (6.1.27) справедливо и для операторов D'_k. □

Лемма 6.26. *Отображение $\iota:\mathcal{E}(M)\circledast A\to\mathcal{E}(M,A)$ является гладкой оболочкой.*

Доказательство. Пусть $\sigma:\mathcal{E}(M)\circledast A\to C$ — какое-то другое гладкое расширение. Нам нужно убедиться, что существует морфизм υ, замыкающий диаграмму

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{E}(M)\circledast A \arrow[rr, "\sigma"] \arrow[dr, "\iota"'] & & C \arrow[dl, dashed, "\upsilon"] \\
& \mathcal{E}(M,A) &
\end{tikzcd}$$

Зафиксируем локальную карту $\varphi:U\to V$, где $U\subseteq M$, $V\subseteq\mathbb{R}^d$, и пусть и $K\subseteq U$ — компакт, совпадающий с замыканием своей внутренности: $\overline{\mathsf{Int}(K)}=K$. Операторы из примера 6.2

$$\varPhi_k(u)=\frac{\partial^{|k|}(u\circ\varphi^{-1})}{\partial t_1^{k_1}...\partial t_d^{k_d}}\circ\varphi,\qquad u\in\mathcal{E}(M),\quad k\in\mathbb{N}^d,$$

образуют систему частных производных из $\mathcal{E}(M)$ со значениями в $\mathcal{C}(K)$. Пусть $\varPhi:\mathcal{E}(M)\to\mathcal{C}(K)[m]$ — дифференциальный гомоморфизм, соответствующий этой системе $\{\varPhi_k\}$.

Зафиксируем далее произвольный гомоморфизм $\eta:A\to B[n]$ в какую-нибудь C^*-алгебру с присоединенными нильпотентными элементами $B[n]$ и положим

$$D(u\circledast a)=\varPhi(u)\circledast\eta(a),\qquad u\in\mathcal{E}(M),\quad a\in A.$$

Отображение D будет гомоморфизмом из $\mathcal{E}(M)\circledast A$ в алгебру $\mathcal{C}(K)[m]\circledast B[n]$, которая в силу (6.1.20), изоморфна $(\mathcal{C}(K)\circledast B)[m\oplus n]$. Стереотипное тензорное произведение $\mathcal{C}(K)\circledast B$ естественно отображается в максимальное тензорное произведение C^*-алгебр $\mathcal{C}(K)\underset{\max}{\otimes}B$, которое в свою очередь, изоморфно $\mathcal{C}(K)\odot B$ и $\mathcal{C}(K,B)$:

$$\mathcal{C}(K)\circledast B\to\mathcal{C}(K)\underset{\max}{\otimes}B\cong(3.2.15)\cong\mathcal{C}(K)\odot B\cong(5.2.16)\cong\mathcal{C}(K,B).$$

Поэтому мы можем считать D морфизмом в C^*-алгебру с присоединенными нильпотентными элементами $\mathcal{C}(K,B)[m\oplus n]$, которая, в свою очередь, изоморфна $\mathcal{C}\big(K,B[n]\big)[m]$:

$$D:\mathcal{E}(M)\circledast A\to\mathcal{C}(K)[m]\circledast B[n]\cong(6.1.20),(6.1.19)\cong(\mathcal{C}(K)\circledast B)[m\oplus n]\to(\mathcal{C}(K)\underset{\max}{\otimes}B)[m\oplus n]\cong$$
$$\cong(3.2.15)\cong(\mathcal{C}(K)\odot B)[m\oplus n]\cong(5.2.16)\cong\mathcal{C}(K,B)[m\oplus n]$$

Поскольку $\sigma : \mathcal{E}(M) \circledast A \to C$ есть гладкое расширение, гомоморфизм $D : \mathcal{E}(M) \circledast A \to \mathcal{C}(K,B)[m \oplus n]$ должен однозначно продолжаться до некоторого гомоморфизма $D' : C \to \mathcal{C}(K,B)[m \oplus n]$:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{E}(M) \circledast A \arrow[rr, "\sigma"] \arrow[dr, "D"'] & & C \arrow[dl, dashed, "D'"] \\ & \mathcal{C}(K,B)[m \oplus n] & \end{tikzcd} \tag{6.3.20}$$

Заметим, что $\mathcal{C}(K,B)[m \oplus n]$ изоморфно $\mathcal{C}\big(K, B[n]\big)[m]$,

$$\mathcal{C}(K,B)[m \oplus n] \cong (6.1.19) \cong \mathcal{C}(K,B)[n][m] \cong (6.1.21) \cong \mathcal{C}\big(K, B[n]\big)[m],$$

поэтому диаграмму (6.3.20) можно поправить так:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{E}(M) \circledast A \arrow[rr, "\sigma"] \arrow[dr, "D"'] & & C \arrow[dl, dashed, "D'"] \\ & \mathcal{C}\big(K, B[n]\big)[m] & \end{tikzcd} \tag{6.3.21}$$

Теперь мы можем вернуться к системе частных производных D_k, и для всякого индекса $k \in \mathbb{N}[m]$ мы получим диаграмму

$$\begin{tikzcd} \mathcal{E}(M) \circledast A \arrow[rr, "\sigma"] \arrow[dr, "D_k"'] & & C \arrow[dl, dashed, "D'_k"] \\ & \mathcal{C}\big(K, B[n]\big) & \end{tikzcd}$$

Зафиксируем какой-нибудь элемент $c \in C$. Поскольку $\sigma : \mathcal{E}(M) \circledast A \to C$ — плотный эпиморфизм, найдется направленность элементов $x_i \in \mathcal{E}(M) \circledast A$ такая, что

$$\sigma(x_i) \xrightarrow[i\to\infty]{C} c.$$

Для всякого индекса $k \in \mathbb{N}[m]$ мы получим

$$D_k(x_i) = D'_k(\sigma(x_i)) \xrightarrow[i\to\infty]{\mathcal{C}(K)} D'_k(c). \tag{6.3.22}$$

Теперь рассмотрим какую-нибудь гладкую кривую в K, точнее, гладкое отображение $\gamma : [0,1] \to K$. Пусть для всякого индекса $k \in \mathbb{N}[m]$ порядка $|k| = 1$ и любой точки $t \in [0,1]$ символ $\gamma^k(t)$ обозначает k-ю компоненту производной $\gamma'(t)$ в разложении по локальным координатам на U. Для всякой функции $u \in \mathcal{E}(M)$ мы по теореме Ньютона-Лейбница получим

$$\varPhi_0(u)(\gamma(1)) - \varPhi_0(u)(\gamma(0)) = \sum_{|k|=1} \int_0^1 \gamma^k(t) \cdot \varPhi_k(u)(\gamma(t)) \,\mathsf{d}\, t.$$

Помножив u на произвольный элемент $a \in A$, мы получим

$$D_0(u \circledast a)(\gamma(1)) - D_0(u \circledast a)(\gamma(0)) = \varPhi_0(u)(\gamma(1)) \circledast \eta(a) - \varPhi_0(u)(\gamma(0)) \circledast \eta(a) =$$
$$= \sum_{|k|=1} \int_0^1 \gamma^k(t) \cdot \varPhi_k(u)(\gamma(t)) \circledast \eta(a) \,\mathsf{d}\, t = \sum_{|k|=1} \int_0^1 \gamma^k(t) \cdot D_k(u \circledast a)(\gamma(t)) \,\mathsf{d}\, t.$$

Поскольку элементы вида $u \circledast a$ полны в $\mathcal{E}(M) \circledast A$, мы можем заменить их в этом равенстве на произвольный элемент $x \in \mathcal{E}(M) \circledast A$.

Вместе с (6.3.22) это дает

$$D'_0(c)(\gamma(1)) - D'_0(c)(\gamma(0)) \underset{\infty\leftarrow i}{\longleftarrow} D_0(x_i)(\gamma(1)) - D_0(x_i)(\gamma(0)) =$$

$$= \sum_{|k|=1} \int_0^1 \gamma^k(t) \cdot D_k(x_i)(\gamma(t))\,\mathsf{d}\,t \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} \sum_{|k|=1} \int_0^1 \gamma^k(t) \cdot D'_k(c)(\gamma(t))\,\mathsf{d}\,t$$

и значит

$$D'_0(c)(\gamma(1)) - D'_0(c)(\gamma(0)) = \sum_{|k|=1} \int_0^1 \gamma^k(t) \cdot D'_k(c)(\gamma(t))\,\mathsf{d}\,t$$

Эта связь между функцией $D'_0(c) \in \mathcal{C}(K,B)$ и функциями $D'_k(c) \in \mathcal{C}(K,B)$, $|k| = 1$, означает, что $D'_0(c)$ непрерывно дифференцируема на K, причем ее частными производными в выбранных нами локальных координатах будут функции $D'_k(c)$, $|k| = 1$.

Выбрав после этого какую-нибудь из производных $D'_k(c)$, $|k| = 1$, и рассмотрев индексы порядка 2, мы точно тем же приемом получим, что $D'_k(c)$ также непрерывно дифференцируема. И вообще, организовав индукцию по индексам, мы сможем показать, что все функции $D'_k(c)$ бесконечно дифференцируемы, и связаны между собой как частные производные функции $D'_0(c)$ (относительно выбранных нами локальных координат). Это означает, что должна быть коммутативна диаграмма (6.3.21):

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{E}(M) \circledast A \arrow[rr, "\sigma"] \arrow[dr, "\iota_{K,B}"'] \arrow[ddr, bend right, "D"'] & & C \arrow[dl, dashed, "\iota'_{K,B}"] \arrow[ddl, bend left, "D'"] \\
& \mathcal{E}(K, B[n]) \arrow[d, "\Phi_B"'] & \\
& \mathcal{C}(K, B[n])[m] &
\end{tikzcd} \tag{6.3.23}$$

в которой

$$\iota_{K,B}(u \circledast a) = u(t) \cdot \eta(a), \qquad u \in \mathcal{E}(M), \quad a \in A,$$

$$(\varPhi_B)_k(f) = \frac{\partial^{|k|}(f \circ \varphi^{-1})}{\partial t_1^{k_1} ... \partial t_d^{k_d}} \circ \varphi, \qquad f \in \mathcal{E}(M, B[n]), \quad k \in \mathbb{N}^d,$$

Из этой диаграммы следует, что $\iota'_{K,B}$ должно быть непрерывно, потому что если $c_i \to c$, то это условие сохраняется под действием каждого оператора D'_k, то есть $D'_k(c_i) \to D'_k(c)$, а это как раз и есть сходимость в пространстве $\mathcal{E}(K, B[n])$.

Если теперь менять компакт $K \subset U$ и открытое множество $U \subseteq M$, то возникающие при этом гладкие функции $D'_0(c)$ на K будут согласованы между собой тем, что на пересечении своих областей определения они совпадают. Поэтому определена некая общая гладкая функция $\iota'_B(c) : M \to B[n]$, обладающая тем свойством, что ее ограничение на каждый компакт K будет совпадать с соответствующей функцией $D'_0(c)$:

$$\iota'(c)\big|_K = D'_0(c), \qquad K \subset U \subseteq M.$$

а частные производные при выбранной системе локальных координат совпадают с действием операторов D'_k на c. Иными словами, определено некое отображение $\iota'_B : C \to \mathcal{E}(M, B[n])$ (по построению это будет гомоморфизм алгебр), для которого будет коммутативна следующая диаграмма, уточняющая (6.3.23):

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{E}(M)\circledast A \arrow[rr, "\sigma"] \arrow[dr, "\iota_B"] \arrow[ddr, bend right, "\iota_{K,B}"'] & & C \arrow[dl, dashed, "\iota'_B"'] \arrow[ddl, bend left, "\iota'_{K,B}"] \\
& \mathcal{E}(M,B[n]) \arrow[d, "\rho_K"'] & \\
& \mathcal{E}(K,B[n]) &
\end{tikzcd}
\tag{6.3.24}
$$

(здесь ρ_K — отображение ограничения на компакт K).

Пусть теперь U — дифференциальная окрестность нуля в A, соответствующая гомоморфизму $\eta : A \to B[n]$. Из того, что σ — плотный эпиморфизм, следует, что верхний внутренний треугольник в (6.3.24) можно достроить до диаграммы

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{E}(M)\circledast A \arrow[rr, "\sigma"] \arrow[dr, "\vartheta_U"] \arrow[ddr, bend right, "\iota_B"'] & & C \arrow[dl, dashed, "\vartheta'_U"'] \arrow[ddl, bend left, "\iota'_B"] \\
& \mathcal{E}(M,A/U) \arrow[d, "\eta_U\oslash 1_M"'] & \\
& \mathcal{E}(M,B[n]) &
\end{tikzcd}
\tag{6.3.25}
$$

где $\eta_U : A/U \to B[n]$ — морфизм из (6.2.7), и

$$\vartheta_U(u\circledast a)(t) = u(t)\cdot \pi_U(a), \qquad u\in\mathcal{E}(M),\quad a\in A,\quad t\in M,$$

$$(\eta_U\oslash 1_M)(h)(t) = \eta_U(h(t)), \qquad h\in\mathcal{E}(M,A/U),\quad t\in M.$$

Из определения ϑ_U сразу следует, что если $U'\subseteq U$ — какая-то другая дифференциальная окрестность нуля, то

$$\vartheta_U = (\varkappa_U^{U'}\oslash 1_M)\cdot\vartheta_{U'}, \qquad U\supseteq U', \tag{6.3.26}$$

где $\varkappa_U^{U'}$ — морфизм из (6.2.8), и

$$(\varkappa_U^{U'}\oslash 1_M)(h)(t) = \varkappa_U^{U'}(h(t)), \qquad h\in\mathcal{E}(M,A/U'),\quad t\in M.$$

Равенство (6.3.26) будет левым нижним внутренним треугольником в диаграмме

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{E}(M)\circledast A \arrow[rr, "\sigma"] \arrow[dr, "\vartheta_{U'}"] \arrow[ddr, bend right, "\vartheta_U"'] & & C \arrow[dl, "\vartheta'_{U'}"'] \arrow[ddl, bend left, "\vartheta'_U"] \\
& \mathcal{E}(M,A/U') \arrow[d, dashed, "\varkappa_U^{U'}\oslash 1_M"] & \\
& \mathcal{E}(M,A/U) &
\end{tikzcd}
$$

При этом периметр и верхний внутренний треугольник здесь будут вариантами верхнего внутреннего треугольника в (6.3.25), и вдобавок σ — эпиморфизм. Как следствие, оставшийся правый нижний внутренний треугольник тоже должен быть коммутативен.

Это означает, что морфизмы $\vartheta'_U : C \to \mathcal{E}(M, A/U)$ образуют проективный конус системы $\varkappa_U^{U'} \oslash 1_M$, и поэтому существует морфизм ϑ' в проективный предел:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{E}(M) \circledast A \arrow[rr, "\sigma"] \arrow[dr, "\vartheta"'] \arrow[ddr, bend right, "\vartheta_U"'] & & C \arrow[dl, dashed, "\vartheta'"] \arrow[ddl, bend left, "\vartheta'_U"] \\
& \varprojlim\limits_{0 \leftarrow U'} \mathcal{E}(M, A/U') \arrow[d, "\varkappa_U \oslash 1_M"] & \\
& \mathcal{E}(M, A/U) &
\end{tikzcd}$$

Теперь заметим цепочку

$$\varprojlim_{0 \leftarrow U'} \mathcal{E}(M, A/U') = \varprojlim_{0 \leftarrow U'} (\mathcal{E}(M) \odot A/U') = (2.4.39) = \mathcal{E}(M) \odot \varprojlim_{0 \leftarrow U'} A/U' = \mathcal{E}(M, \varprojlim_{0 \leftarrow U'} A/U')$$

и подставим последнее пространство в нашу диаграмму:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{E}(M) \circledast A \arrow[rr, "\sigma"] \arrow[dr, "\vartheta"'] \arrow[ddr, bend right, "\vartheta_U"'] & & C \arrow[dl, dashed, "\vartheta'"] \arrow[ddl, bend left, "\vartheta'_U"] \\
& \mathcal{E}(M, \varprojlim\limits_{0 \leftarrow U'} A/U') \arrow[d, "\varkappa_U \oslash 1_M"] & \\
& \mathcal{E}(M, A/U) &
\end{tikzcd}$$

Еще раз вспомним, что σ — плотный эпиморфизм. Из этого следует, что стрелка ϑ' поднимается до некоторой стрелки υ со значениями в пространстве $\mathcal{E}(M, \mathsf{Im}\,\pi)$ функций, принимающих значения в образе отображения $\pi : A \to \varprojlim\limits_{0 \leftarrow U'} A/U'$, или, что то же самое, в непосредственном подпространстве, порожденном множеством значений отображения π, а это пространство как раз совпадает с A, поскольку A — гладкая алгебра:

$$\mathsf{Im}\,\pi \cong \mathsf{Env}_{\mathcal{E}}\, A \cong A$$

Мы получаем диаграмму

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{E}(M) \circledast A \arrow[rr, "\sigma"] \arrow[dr, "\iota"'] \arrow[ddr, bend right, "\vartheta"'] & & C \arrow[dl, dashed, "\upsilon"] \arrow[ddl, bend left, "\vartheta'"] \\
& \mathcal{E}(M, A) \arrow[d, "\mathsf{im}\,\pi \oslash 1_M"] & \\
& \mathcal{E}(M, \varprojlim\limits_{0 \leftarrow U'} A/U') &
\end{tikzcd}$$

где π — морфизм из (6.2.10). $\square$

6.4. $\mathcal{E}(M)$ как гладкая оболочка своих подалгебр

Пусть M — гладкое многообразие и пусть, как и раньше $\mathcal{E}(M)$ – алгебра гладких функций на M. Пусть кроме того, $T_s(M)$, $T_s^\star(M)$ и $\mathsf{Jet}_s^n(M)$ обозначают обычные касательное пространство, кокасательное пространство и алгебру струй в точке $s \in M$. С введенными нами на страницах 73, 74 и 118 объектами эти пространства связаны равенствами

$$T_s(M) = T_s[\mathcal{E}(M)], \quad T_s^\star(M) = T_s^\star[\mathcal{E}(M)], \quad \mathsf{Jet}_s^n(M) = \mathsf{Jet}_s^n[\mathcal{E}(M)].$$

Теорема 6.27. *Пусть A — инволютивная стереотипная подалгебра в алгебре $\mathcal{E}(M)$ гладких функций на гладком (локально веклидовом) многообразии M, то есть задан (непрерывный и сохраняющий единицу) мономорфизм инволютивных стереотипных алгебр*

$$\iota : A \to \mathcal{E}(M).$$

Для того, чтобы гладкая оболочка алгебры A совпадала с алгеброй $\mathcal{E}(M)$

$$\mathsf{Env}_{\mathcal{E}} A = \mathcal{E}(M) \tag{6.4.1}$$

(то есть чтобы ι был гладкой оболочкой A), необходимо и достаточно выполнение следующих двух условий:

(i) *сопряженное отображение спектров*

$$\mathsf{Spec}(A) \leftarrow M$$

является точным наложением (в смысле определения на с.27);

(ii) *для всякой точки $s \in M$ естественное отображение касательных пространств*

$$T_s[A] \leftarrow T_s(M)$$

является изоморфизмом (конечномерных векторных пространств).

Доказательство мы разобьем на несколько лемм.

Лемма 6.28. *Условия (i) и (ii) необходимы для того, чтобы вложение $A \subseteq \mathcal{E}(M)$ было гладким расширением алгебры A.*

Доказательство. Обозначим через $\iota : A \to \mathcal{E}(M)$ естественное вложение A в $\mathcal{E}(M)$. Предположим, что ι является гладким расширением, то есть расширением в классе DEpi инволютивных плотных эпиморфизмов относительно класса дифференциальных инволютивных гомоморфизмов в C^*-алгебры с присоединенными самосопряженными нильпотентами. Тогда ι является и расширением в DEpi и относительно класса гомоморфизмов в C^*-алгебры, поскольку C^*-алгебра B может считаться C^*-алгеброй с присоединенным пустым множеством нильпотентов: $B = B[0]$. То есть ι является непрерывным расширением. Тем же приемом, что и в теореме (5.23) доказывается, что отображение спектров $\iota^{\mathsf{Spec}} : \mathsf{Spec}(A) \leftarrow M$ является точным наложением.

Поэтому неочевидным здесь будет только выполнение условия (ii). Рассмотрим алгебру $\mathbb{C}_1[[1]]$ многочленов степени 1 от одной переменной. Как векторное пространство она изоморфна прямой сумме $\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$, а морфизмы $A \to \mathbb{C}_1[[1]]$ представляют собой пары (s, σ), где $s \in \mathsf{Spec}(A)$ — точка спектра, а $\sigma \in T_s[A]$ — касательный вектор в этой точке. Для точки $t \in M$, о которой речь идет в формулировке, мы получаем коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "\iota"] \arrow[dr, "(t\circ\iota,\tau\circ\iota)"'] & & \mathcal{E}(M) \arrow[dl, "(t,\tau)"] \\
& \mathbb{C}_1[[1]] &
\end{tikzcd}$$

Поскольку $\iota : A \to \mathcal{E}(M)$ есть гладкое расширение, всякой стрелке $A \to \mathbb{C}_1[[1]]$ соответствует единственная стрелка $\mathcal{E}(M) \to \mathbb{C}_1[[1]]$, и это означает, что отображение касательных пространств $\tau \mapsto \iota^\star(\tau) = \tau \circ \iota$ является биекцией и изоморфизмом векторных пространств. $\square$

Лемма 6.29. *Пусть $\iota : A \to B$ — гомоморфизм инволютивных стереотипных алгебр, и для точки $t \in \mathsf{Spec}(B)$ соответствующий морфизм кокасательных пространств $\iota_t^{\mathbb{C}T^\star} : \mathbb{C}T^\star_{t\circ\iota}[A] \to \mathbb{C}T^\star_t[B]$ инъективен:*

$$\mathsf{Ker}\,\iota_t^{T^\star} = 0 \tag{6.4.2}$$

Тогда

$$\overline{I^2_{t\circ\iota}}[A] = \iota^{-1}\Big(\overline{I^2_t}[B]\Big). \tag{6.4.3}$$

Доказательство. Здесь прямое вложение следует сразу из гомоморфности (и непрерывности) ι (мы пользуемся обозначениями на с.65):

$$\iota\Big(I_{t\circ\iota}[A]\Big) \subseteq I_t[B] \quad \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \quad \iota\Big(I^2_{t\circ\iota}[A]\Big) = \iota\Big(I_{t\circ\iota}[A]\cdot I_{t\circ\iota}[A]\Big) = \iota\Big(I_{t\circ\iota}[A]\Big)\cdot\iota\Big(I_{t\circ\iota}[A]\Big) \subseteq I_s[B]\cdot I_s[B] = I^2_s[B] \subseteq \overline{I^2_t}[B] \quad \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \quad I^2_{t\circ\iota}[A] \subseteq \iota^{-1}\Big(\overline{I^2_t}[B]\Big) \quad \Longrightarrow \quad \overline{I^2_{t\circ\iota}}[A] \subseteq \iota^{-1}\Big(\overline{I^2_t}[B]\Big).$$

Полученное вложение можно переписать в виде

$$\iota\Big(\overline{I^2_{t\circ\iota}}[A]\Big) \subseteq \overline{I^2_t}[B],$$

и мы можем сделать вывод, что справедлива диаграмма

$$\begin{tikzcd}
& \overline{I^2_{t\circ\iota}}[A] \arrow[rr, "\iota"] \arrow[d, "\sigma_A"'] & & \overline{I^2_t}[B] \arrow[d, "\sigma_B"] & \\
& I_{t\circ\iota}[A] \arrow[rr, "\iota"] \arrow[d, "\pi_A"'] & & I_t[B] \arrow[d, "\pi_B"] & \\
\mathbb{C}T_{t\circ\iota}[A] \arrow[r, equal] & \Big(I_{t\circ\iota}[A]\Big/\overline{I^2_{t\circ\iota}}[A]\Big)^\triangledown \arrow[rr, "\iota_t^{T^\star}"] & & \Big(I_t[B]\Big/\overline{I^2_t}[B]\Big)^\triangledown \arrow[r, equal] & \mathbb{C}T_t[B]
\end{tikzcd}$$

Из нее следует обратная цепочка, необходимая для доказательства (6.4.3):

$$a \in \iota^{-1}\Big(\overline{I^2_t}[B]\Big) \quad \Longrightarrow \quad \iota(a) \in \overline{I^2_t}[B] \quad \Longrightarrow \quad \iota_t^{T^\star}(\pi_A(a)) = \pi_B(\iota(a)) = 0 \quad \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \quad \pi_A(a) \in \mathsf{Ker}\,\iota_t^{T^\star} = (6.4.2) = 0 \quad \Longrightarrow \quad a \in \mathsf{Ker}(\pi_A) = I_{t\circ\iota}[A].$$

□

Лемма 6.30. *При выполнении условий (i) и (ii) теоремы 6.27 естественный морфизм расслоений*

$$\mathsf{Jet}^n_A[\mathcal{E}(M)] \longleftarrow \mathsf{Jet}^n_{\mathcal{E}(M)}[\mathcal{E}(M)]$$

является послойным изоморфизмом.

Доказательство. По теореме Нахбина 4.26 алгебра A плотна в алгебре $\mathcal{E}(M)$. Поэтому по лемме 3.23, идеал $I_t(A) = \{a \in A : a(t) = 0\}$ плотен в идеале $I_t(\mathcal{E}(M)) = \{u \in \mathcal{E}(M) : u(t) = 0\}$. Отсюда

$$\overline{I^n_t(A)} = \overline{I^n_t(\mathcal{E}(M))} = I^n_t(\mathcal{E}(M))$$

и поэтому

$$\mathcal{E}(M)/\overline{I^n_t(A)} = \mathcal{E}(M))/\overline{I^n_t(\mathcal{E}(M))} = \mathcal{E}(M)/I^n_t(\mathcal{E}(M)).$$

□

Лемма 6.31. *Если M — гладкое многообразие и $\iota : A \to \mathcal{E}(M)$ — мономорфизм инволютивных стереотипных алгебр, то (независимо от выполнения (i)) условие (ii) теоремы 6.27 эквивалентно условиям*

(iii) *для всякой точки $s \in M$ естественное отображение кокасательных пространств*

$$T_s^\star[A] \to T_s^\star(M)$$

является изоморфизмом (конечномерных векторных пространств),

(iv) *для всякой точки $s \in M$ и любого числа $n \in \mathbb{N}$ естественное отображение пространств струй*

$$\mathsf{Jet}_s^n[A] \to \mathsf{Jet}_s^n(M)$$

является изоморфизмом (конечномерных векторных пространств).

и влечет за собой условие

(v) *для всякого $n \in \mathbb{N}$ существует непрерывное отображение $\mu : \mathsf{Jet}_A^n[A] \leftarrow \mathsf{Jet}^n_{\mathcal{E}(M)}[\mathcal{E}(M)]$, которое в паре с отображением спектров $\iota^{\mathsf{Spec}} : \mathsf{Spec}(A) \leftarrow M$ образует морфизм расслоений,*

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{Jet}_A^n[A] \arrow[d, "\pi^n_{A,A}"] & \mathsf{Jet}^n_{\mathcal{E}(M)}[\mathcal{E}(M)] \arrow[l, "\mu"'] \arrow[d, "\pi^n_{\mathcal{E}(M),\mathcal{E}(M)}"] \\
\mathsf{Spec}(A) & M \arrow[l, "\iota^{\mathsf{Spec}}"']
\end{tikzcd}$$

удовлетворяющий тождеству

$$\mu(\mathsf{jet}^n(a \circ \iota^{\mathsf{Spec}})(t)) = \mathsf{jet}^n(a)(\iota^{\mathsf{Spec}}(t)), \qquad a \in A, \quad t \in M. \tag{6.4.4}$$

Если вдобавок выполнено условие (i) теоремы 6.27, то морфизм расслоений μ является биекцией.

Доказательство. 1. Покажем сначала, что условия (ii)-(iv) эквивалентны. Эквивалентность (ii) и (iii) следует сразу из теоремы 3.19: если $T_s[A]$ и $T_s(M)$ изоморфны как векторные пространства, то из-за конечномерности $T_s(M)$ они изоморфны и как стереотипные пространства, значит их сопряженные пространства $T_s^\star[A]$ и $T_s^\star(M)$ также изоморфны (как стереотипные пространства и как векторные пространства). И наоборот.

С другой стороны, из условия (iv) следует условие (iii), потому что при изоморфизме

$$\mathsf{Jet}_s^1[A] \cong \mathsf{Jet}_s^1(M)$$

идеал $I_s[A] \cap \mathsf{Jet}_s^1[A]$ переходит в идеал $I_s(M) \cap \mathsf{Jet}_s^1(M)$, а это как раз означает изоморфизм

$$T_s^\star[A] = \Big(I_s[A]\Big/\overline{I_s^2}[A]\Big)^\triangledown = I_s[A]\Big/\overline{I_s^2}[A] = I_s[A] \cap \mathsf{Jet}_s^1[A] \cong I_s(M) \cap \mathsf{Jet}_s^1(M) =$$
$$= I_s(M)\Big/\overline{I_s^2}(M) = \Big(I_s(M)\Big/\overline{I_s^2}(M)\Big)^\triangledown = T_s^\star(M)$$

Таким образом в эквивалентностях $(ii) \Longleftrightarrow (iii) \Longleftrightarrow (iv)$ неочевидным звеном остается только импликация $(iii) \Longrightarrow (iv)$. Докажем ее. Пусть выполняется (iii). Тогда, прежде всего, выполняется равенство (6.4.2), которое применительно к данному случаю можно записать так:

$$\overline{I_s^2}[A] = A \cap I_s^2(M) \tag{6.4.5}$$

Далее, поскольку пространство $T_s^\star[A] = \Big(I_s[A]\Big/\overline{I_s^2}[A]\Big)^\triangledown$ конечномерно, оно совпадает с пространством $I_s[A]\Big/\overline{I_s^2}[A]$, которое также конечномерно, и поэтому у него можно выбрать конечный базис. То есть должна существовать конечная последовательность векторов $e^1, ..., e^d \in I_s[A]$, для которых классы эквивалентности $e^1 + \overline{I_s^2}[A], ..., e^d + \overline{I_s^2}[A]$ образуют базис в $I_s[A]\Big/\overline{I_s^2}[A]$. Выберем окрестность U точки s, в которой функции $e^1, ..., e^d$ образуют локальную карту многообразия M. После этого для любой точки $t \in U$ и любого мультииндекса $k \in \mathbb{N}^d$ обозначим

$$e_t^k = (e^1 - e^1(t))^{k_1} \cdot ... \cdot (e^d - e^d(t))^{k_d}. \tag{6.4.6}$$

Пусть для любой функции $f\in\mathcal{E}(M)$ и любого номера $n\in\mathbb{N}$ символ $E^n_s[f]$ обозначает линейную комбинацию функций e^k, $|k|\leqslant n$,

$$E^n_s[f]=\sum_{|k|\leqslant n}\lambda_k\cdot e^k_s.$$

имеющую в точке s ту же струю порядка n, что и функция f:

$$f\overset{I^{n+1}_s(M)}{\equiv}E^n_s[f]\tag{6.4.7}$$

(такая функция существует и единственна, потому что функции $e^1_s,...,e^d_s$ образуют локальную карту в некоторой окрестности V_s точки s, которая диффеоморфно отображает V_s на некоторую окрестность нуля в $\mathbb{R}^d$, и при этом диффеоморфизме функции $E^n_s[f]$ превращаются в точности в многочлены Тейлора функции f в точке 0).

2. Заметим, что операция $f\mapsto E^n_s[f]$ мультипликативна

$$E^n_s[f\cdot g]=E^n_s[f]\cdot E^n_s[g],\qquad f,g\in\mathcal{E}(M)\tag{6.4.8}$$

обладает вариантом свойства идемпотентности

$$E^q_s\big[E^p_s[f]\big]=E^p_s[f]=E^p_s\big[E^q_s[f]\big],\qquad p\leqslant q\in\mathbb{N},\quad f\in\mathcal{E}(M),\tag{6.4.9}$$

и непрерывна в A:

$$a_i\xrightarrow[i\to\infty]{A}a\quad\Longrightarrow\quad E^n_s[a_i]\xrightarrow[i\to\infty]{A}E^n_s[a].\tag{6.4.10}$$

Первые два свойства следуют из представления $E^n_s[f]$ в виде многочленов Тейлора при диффеоморфизме, образованном локальной картой $e_1,...,e_d$, а третье — из конечномерности алгебры многочленов с фиксированной степенью: если $a_i\xrightarrow[i\to\infty]{A}a$, то $a_i\xrightarrow[i\to\infty]{\mathcal{E}(M)}a$, поэтому $E^n_s[a_i]\xrightarrow[i\to\infty]{\mathcal{E}(M)}E^n_s[a]$, и поскольку левая и правая часть принадлежит конечномерному пространству $P=\mathsf{span}\{e^k;\ |k|\leqslant n\}$, сходимость в $\mathcal{E}(M)$ здесь можно заменить сходимостью в P, а затем и сходимостью в A.

3. Докажем теперь формулу

$$a\overset{\overline{I^{n+1}_s}[A]}{\equiv}E^n_s[a],\qquad a\in\overline{I^n_s}[A].\tag{6.4.11}$$

Это делается по индукции. Прежде всего, эта формула верна для $n=0$,

$$a\overset{I_s[A]}{\equiv}E^0_s[a],\qquad a\in A,\tag{6.4.12}$$

потому что

$$a-E^0_s[a]=a-a(s)\cdot 1\in I_s[A].$$

И при $n=1$,

$$a\overset{\overline{I^2_s}[A]}{\equiv}E^1_s[a],\qquad a\in\overline{I_s}[A],\tag{6.4.13}$$

потому что из (6.4.7) мы получаем $a-E^1_s[a]\in I^2_s(M)$, а с другой стороны, $a-E^1_s[a]\in A$, и вместе это означает, что $a-E^1_s[a]\in A\cap I^2_s(M)=(6.4.5)=\overline{I^2_s}[A]$.

Предположим далее, что формула (6.4.11) верна для какого-то числа $n-1$:

$$a\overset{\overline{I^n_s}[A]}{\equiv}E^{n-1}_s[a],\qquad a\in\overline{I^{n-1}_s}[A].\tag{6.4.14}$$

Пусть $a\in\overline{I^n_s}[A]$. Это означает, что найдется некая направленность $a_i\in I^n_s[A]$, стремящаяся к a в A:

$$a_i\xrightarrow[i\to\infty]{A}a.$$

Каждый элемент a_i лежит в $I^n_s[A]$, поэтому представим в виде

$$a_i=\sum_{j=1}^p b^j_i\cdot c^j_i,\qquad b^j_i\in I^{n-1}_s[A],\quad c^j_i\in I_s[A].$$

Из (6.4.14) и (6.4.13) мы получаем цепочку:

$$b_i^j \overset{\overline{I_s^n}[A]}{\equiv} E_s^{n-1}[b_i^j], \quad c_i^j \overset{\overline{I_s^2}[A]}{\equiv} E_s^1[c_i^j],$$

$$\Downarrow$$

$$b_i^j \cdot c_i^j \overset{\overline{I_s^{n+1}}[A]}{\equiv} E_s^{n-1}[b_i^j] \cdot E_s^1[c_i^j] = E_s^n[b_i^j \cdot c_i^j],$$

$$\Downarrow$$

$$a \underset{\infty \leftarrow i}{\overset{A}{\longleftarrow}} a_i = \sum_{j=1}^p b_i^j \cdot c_i^j \overset{\overline{I_s^{n+1}}[A]}{\equiv} \sum_{j=1}^p E_s^n[b_i^j \cdot c_i^j] = E_s^n[a_i] \overset{(6.4.10)}{\underset{i\to\infty}{\overset{A}{\longrightarrow}}} E_s^n[a],$$

$$\Downarrow$$

$$a \overset{\overline{I_s^{n+1}}[A]}{\equiv} E_s^n[a].$$

После того, как формула (6.4.11) доказана, в ней можно заменить $a \in \overline{I_s^{n-1}}[A]$ на $a \in A$:

$$a \overset{\overline{I_s^{n+1}}[A]}{\equiv} E_s^n[a], \qquad a \in A. \tag{6.4.15}$$

Действительно, при $n = 0$ это превращается в уже отмечавшуюся формулу (6.4.12). Далее, если (6.4.15) доказана для какого-то $n - 1$,

$$a \overset{\overline{I_s^n}[A]}{\equiv} E_s^{n-1}[a], \qquad a \in A,$$

то, записав это в виде

$$a - E_s^{n-1}[a] \in \overline{I_s^n}[A],$$

мы в силу (6.4.11) получим:

$$a - E_s^{n-1}[a] \overset{\overline{I_s^{n+1}}[A]}{\equiv} E_s^n\big[a - E_s^{n-1}[a]\big] = (6.4.9) = E_s^n[a] - E_s^{n-1}[a],$$

откуда

$$a \overset{\overline{I_s^{n+1}}[A]}{\equiv} E_s^n[a].$$

4. Наконец, из формулы (6.4.15) следует, что фактор-отображение $a \mapsto a + \overline{I_s^{n+1}}[A]$ пропускается через отображение $a \mapsto E_s^n[a]$, и поэтому фактор-алгебра $\mathsf{Jet}_s^n[A]$ изоморфна образу $E_s^n[A]$ отображения $a \mapsto E_s^n[a]$:

$$\mathsf{Jet}_s^n[A] \cong E_s^n[A].$$

С другой стороны, алгебра струй $\mathsf{Jet}_s^n(M)$ на многообразии M также изоморфна $E_s^n[A]$:

$$\mathsf{Jet}_s^n(M) \cong E_s^n[A].$$

Вместе то и другое означает выполнение условия (iv).

5. Докажем теперь, что условия (ii), (iii), (iv) влекут (v). Мы поняли выше, что в окрестности U точки $t \in M$ расслоения $\mathsf{Jet}_A^n[A]$ и $\mathsf{Jet}_{C^\infty(M)}^n[C^\infty(M)]$ совпадают как множества. Пусть теперь

$$\xi_i \underset{i\to\infty}{\overset{\mathsf{Jet}_{C^\infty(M)}^n[C^\infty(M)]}{\longrightarrow}} \xi,$$

Обознчим $s_i = \pi(\xi_i)$, $s = \pi(\xi)$ и для всякого i рассмотрим линейные комбинации

$$h_i = \sum_{|k|\leqslant n} \lambda_k \cdot e_{s_i}^k : \qquad h_i = E_{s_i}[h_i],$$

и

$$h = \sum_{|k|\leqslant n} \lambda_k \cdot e_s^k : \qquad h_i = E_s[h].$$

Отображение спектров $\mathsf{Spec}(A) \leftarrow \mathsf{Spec}(C^\infty(M)) = M$ непрерывно, поэтому мы получаем цепочку:

$$s_i = \pi(\xi_i) \underset{i\to\infty}{\overset{M}{\longrightarrow}} \pi(\xi) = s \in U$$

$$\Downarrow$$

$$s_i = \pi(\xi_i) \underset{i\to\infty}{\overset{\mathsf{Spec}(A)}{\longrightarrow}} \pi(\xi) = s$$

$$\Downarrow$$

$$e^k_{s_i} = (e^1 - e^1(s_i))^{k_1} \cdot \ldots \cdot (e^d - e^d(s_i))^{k_d} \underset{i\to\infty}{\overset{A}{\longrightarrow}} (e^1 - e^1(s))^{k_1} \cdot \ldots \cdot (e^d - e^d(s))^{k_d} = e^k_s$$

$$\Downarrow$$

$$h_i = \sum_{|k|\leqslant n} \lambda_k \cdot e^k_{s_i} \underset{i\to\infty}{\overset{A}{\longrightarrow}} h = \sum_{|k|\leqslant n} \lambda_k \cdot e^k_s$$

$$\Downarrow$$

$$\xi_i = \mathsf{jet}^n(h_i) \underset{i\to\infty}{\overset{\mathsf{Jet}^n_A[A]}{\longrightarrow}} \mathsf{jet}^n(h) = \xi.$$

6. Если выполнено условие (i) теоремы 6.27, то есть отображение спектров $\iota^{\mathsf{Spec}} : M \to \mathsf{Spec}(A)$ является биекцией, то морфизм расслоений μ является биекцией, потому что оно будет биекцией между слоями и биекцией на каждом слое. $\square$

Лемма 6.32. *Условия (i) и (ii) достаточны для того, чтобы морфизм $\iota : A \to \mathcal{E}(M)$ был гладкой оболочкой алгебры A.*

Доказательство. 1. Сначала проверим, что при выполнении (i) и (ii) морфизм $\iota : A \to \mathcal{E}(M)$ является гладким расширением. Из теоремы Нахбина 4.26 следует, что при выполнении (i) и (ii) естественное вложение $\iota : A \to \mathcal{E}(M)$ становится плотным эпиморфизмом. Пусть далее B — C^*-алгебра и $\varphi : A \to B[m]$ — дифференциальный гомоморфизм, то есть такой, для которого соответствующая система частных производных $\{D_k;\ k \in \mathbb{N}[m]\}$ состоит из дифференциальных операторов $D_k : A \to B$ с порядками $\mathsf{ord}\, D_k \leqslant |k|$. Существование дифференциального гомоморфизма φ', замыкающего диаграмму

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "\iota"] \arrow[dr, "\varphi"'] & & \mathcal{E}(M) \arrow[dl, dashed, "\varphi'"] \\
& B[m] &
\end{tikzcd}$$

эквивалентно существованию системы дифференциальных частных производных $\{D'_k;\ k \in \mathbb{N}[m]\}$, продолжающих операторы D_k с A на $\mathcal{E}(M)$ и принимающих значения в B:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "\iota"] \arrow[dr, "D_k"'] & & \mathcal{E}(M) \arrow[dl, dashed, "D'_k"] \\
& B &
\end{tikzcd}$$

Обозначим

$$C = \overline{D_0(A)}, \qquad F = Z^1(D_0) = \{b \in B :\ \forall a \in A \quad [b, D_0(a)] = 0\} = C^!.$$

Поскольку алгебра A коммутативна, C тоже коммутативна, отсюда следует, что

$$C \subseteq C^! = F.$$

Это значит, что D_0 принимает значение в F. С другой стороны, по теореме 6.5, все операторы $\{D_k;\ k \in \mathbb{N}[m],\ k > 0\}$ также принимают значения в алгебре F. Поэтому нам достаточно доказать существование системы дифференциальных частных производных $\{D'_k;\ k \in \mathbb{N}[m]\}$, продолжающих операторы D_k с A на $\mathcal{E}(M)$ и принимающих значения в F:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\iota"] \arrow[dr, "D_k"'] & \mathcal{E}(M) \arrow[d, dashed, "D'_k"] \\ & F \end{tikzcd} \tag{6.4.16}$$

2. Это нужно сначала доказать для индекса $k = 0$:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\iota"] \arrow[dr, "D_0"'] & \mathcal{E}(M) \arrow[d, dashed, "D'_0"] \\ & F \end{tikzcd} \tag{6.4.17}$$

Алгебру $\mathcal{E}(M)$ можно вложить в алгебру $\mathcal{C}(M)$, тогда ι можно будет считать гомоморфизмом из A в $\mathcal{C}(M)$, и условие (i) будет означать, что ι удовлетворяет условию теоремы 5.23. Поэтому D_0 непрерывно продолжается сначала на $\mathcal{C}(M)$, а потом его можно ограничить на $\mathcal{E}(M)$, и мы получим D'_0.

3. После того, как построен гомоморфизм $D'_0 : \mathcal{E}(M) \to F$, алгебра F становится модулем над $\mathcal{E}(M)$. Если обозначить через I_t^A и $I_t^{\mathcal{E}}$ идеалы в A и $\mathcal{E}(M)$, состоящие из функций, равных нулю в точке $t \in M$, то они связаны вложением

$$I_t^A \subseteq I_t^{\mathcal{E}}$$

причем по лемме 3.23 I_t^A будет плотно в $I_t^{\mathcal{E}}$. Поэтому

$$\overline{I_t^A \cdot F} = \overline{I_t^{\mathcal{E}} \cdot F}.$$

Обозначим $T = \mathsf{Spec}(C)$, тогда можно считать, что $C = \mathcal{C}(T)$. Рассмотрим два случая.

— Пусть $t \notin T$. Тогда функции из $I_t^{\mathcal{E}}$ аппроксимируют характеристическую функцию χ_T множества T, и поэтому то же справедливо для функций из I_t^A:

$$\chi_T \in \overline{I_t^A} = \overline{I_t^{\mathcal{E}}} \subseteq \mathcal{E}(M).$$

Отсюда следует, что

$$\overline{I_t^A \cdot F} = \overline{I_t^{\mathcal{E}} \cdot F} = \chi_T \cdot F = 1 \cdot F = F, \qquad t \notin T.$$

Это означает, что расслоения значений модуля F над алгебрами A и $\mathcal{E}(M)$ в точках вне компакта T вырождены:

$$F/\overline{I_t^A \cdot F} = F/\overline{I_t^{\mathcal{E}} \cdot F} = 0, \qquad t \notin T = \mathsf{Spec}(C). \tag{6.4.18}$$

— Пусть $t \in T$. Тогда, поскольку $\mathcal{E}(M)$ (будучи ограничено на T) плотно в $C = \mathcal{C}(T)$, опять по лемме 3.23 мы получаем, что идеал $I_t^{\mathcal{E}}$ плотен в идеале I_t^C функций из $C = \mathcal{C}(T)$, равных нулю в точке t:

$$\overline{I_t^{\mathcal{E}}} = I_t^C.$$

Поэтому

$$\overline{I_t^A \cdot F} = \overline{I_t^{\mathcal{E}} \cdot F} = \overline{I_t^C \cdot F}, \qquad t \in T,$$

и это означает, что над каждой точкой $t \in T = \mathsf{Spec}(C)$ слои значений модуля F над алгебрами A, $\mathcal{E}(M)$ и C одинаковы:

$$F/\overline{I_t^A \cdot F} = F/\overline{I_t^{\mathcal{E}} \cdot F} = F/\overline{I_t^C \cdot F}, \qquad t \in T = \mathsf{Spec}(C). \tag{6.4.19}$$

Помимо этого, по условию (i) компакт T непрерывно (инъективно и с сохранением топологии) вкладывается в $\mathsf{Spec}(A)$ и в M. Вместе все это дает описание расслоений значений $\mathsf{Jet}^0_A[F]$ и $\mathsf{Jet}^0_{\mathcal{E}(M)}[F]$: они тривиальны вне компакта T, а на нем совпадают с расслоением значений $\mathsf{Jet}^0_C[F]$. Мы можем сделать вывод, что естественное отображение расслоений значений

$$\mathsf{Jet}^0_A[F] = \bigsqcup_{t\in M} (F/\overline{I^A_t \cdot F})^{\vartriangle} \xleftarrow{\lambda} \bigsqcup_{t\in M} (F/\overline{I^{\mathcal{E}}_t \cdot F})^{\vartriangle} = \mathsf{Jet}^0_{\mathcal{E}(M)}[F]$$

является изоморфизмом.

4. Чтобы построить D'_k для $k>0$, вспомним, что всякому дифференциальному оператору D_k по теореме 4.13 соответствует некий морфизм расслоений струй $\mathsf{jet}_n[D_k] : \mathsf{Jet}^n_A[A] \to \mathsf{Jet}^0_A(F) = \pi^0_A F$, где $n=|k|$, удовлетворяющий тождеству

$$\mathsf{jet}^0(D_k a) = \mathsf{jet}_n[D_k] \circ \mathsf{jet}^n(a), \qquad a\in A.$$

По условию (v) леммы 6.31, расслоения струй алгебр A и $\mathcal{E}(M)$ связаны между собой естественным морфизмом $\mu : \mathsf{Jet}^n_A[A] \leftarrow \mathsf{Jet}^n_{\mathcal{E}(M)}[\mathcal{E}(M)]$, который вдобавок является биекцией. Мы получаем диаграмму

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{Jet}^n_A[A] \arrow[d, "\mathsf{jet}_n[D_k]"'] \arrow[dr, "\pi^n_{A,A}"] & & & \mathsf{Jet}^n_{\mathcal{E}(M)}[\mathcal{E}(M)] \arrow[lll, "\mu"'] \arrow[dl, "\pi^n_{\mathcal{E}(M),\mathcal{E}(M)}"'] \arrow[d, dashed, "\nu=\mathsf{jet}_n[D'_k]"] \\
 & \mathsf{Spec}(A) & M \arrow[l, "\iota^{\mathsf{Spec}}"'] & \\
\mathsf{Jet}^0_A[F] \arrow[ur, "\pi^0_{A,F}"] \arrow[rrr, "\lambda^{-1}"] & & & \mathsf{Jet}^0_{\mathcal{E}(M)}[F] \arrow[ul, "\pi^0_{\mathcal{E}(M),F}"]
\end{tikzcd}$$

Рассмотрим композицию (пунктирную стрелку)

$$\nu = \lambda^{-1} \circ \mathsf{jet}_n[D_k] \circ \mu$$

Она является морфизмом расслоений, поэтому по лемме 6.24 ей соответствует дифференциальный оператор $D'_k : \mathcal{E}(M) \to F$ (над алгеброй $\mathcal{E}(M)$), удовлетворяющий тождеству

$$\mathsf{jet}^0(D'_k u) = \mathsf{jet}_n[D_k] \circ \mathsf{jet}^n(u), \qquad u \in \mathcal{E}(M).$$

Для всякого $a\in A$ мы получим

$$\mathsf{jet}^0\left(D'_k \iota(a)\right) = \mathsf{jet}_n[D_k] \circ \mathsf{jet}^n(\iota(a)) = \mathsf{jet}_n[D_k] \circ \mathsf{jet}^n(a) = \mathsf{jet}^0(D_k a). \tag{6.4.20}$$

Заметим далее, что по теореме 4.9, отображение $\mathsf{jet}^0 = v : F \to \mathsf{Sec}(\pi^0_A F) = \mathsf{Sec}(\mathsf{Jet}^0_A F)$, переводящее F в алгебру непрерывных сечений расслоения значений $\pi^0_A F : \mathsf{Jet}^0_A F \to \mathsf{Spec}(A)$ над алгеброй A, является изоморфизмом C^*-алгебр:

$$F \cong \mathsf{Sec}(\pi^0_A F).$$

Поэтому к (6.4.20) можно применить оператор, обратный jet^0, и мы получим равенство

$$D'_k \iota(a) = D_k a.$$

То есть D'_k продолжает D_k в диаграмме (6.4.16). Кроме того, из того, что ι отображает A плотно в $\mathcal{E}(M)$ следует, что условия (6.1.25)-(6.1.27) переносятся с операторов D_k на операторы D'_k. Поэтому семейство $\{D'_k,\ k\in\mathbb{N}[m]\}$ представляет собой систему частных производных на $\mathcal{E}(M)$.

5. Теперь убедимся, что при выполнении (i) и (ii) расширение $\iota : A \to \mathcal{E}(M)$ является гладкой оболочкой. Пусть $\sigma : A \to C$ — какое-то другое гладкое расширение. Зафиксируем локальную карту $\varphi : U \to V$, где $U \subseteq M$, $V \subseteq \mathbb{R}^d$, и пусть и $K \subseteq U$ — компакт, совпадающий с замыканием своей внутренности: $\overline{\mathsf{Int}(K)} = K$. Тогда операторы из примера 6.2

$$D_k : \mathcal{E}(M) \to \mathcal{C}(K) \quad \Big| \quad D_k(a) = \frac{\partial^{|k|}(a\circ\varphi^{-1})}{\partial t_1^{k_1} \dots \partial t_d^{k_d}} \circ \varphi, \qquad a\in A, \quad k\in\mathbb{N}[m],$$

образуют систему частных производных из A в $\mathcal{C}(K)$. Пусть $D : A \to \mathcal{C}(K)[m]$ — дифференциальный гомоморфизм, соответствующий этой системе $\{D_k\}$. Поскольку $\sigma : A \to C$ есть гладкое расширение, гомоморфизм $D : A \to C(K)[[d]]$ должен однозначно продолжаться до некоторого гомоморфизма $D' : C \to C(K)[[d]]$:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "\sigma"] \arrow[dr, "D"'] & & C \arrow[dl, dashed, "D'"] \\ & \mathcal{C}(K)[m] & \end{tikzcd} \tag{6.4.21}$$

Вернувшись назад к системе частных производных D_k, мы получим для всякого индекса $k \in \mathbb{N}[m]$ диаграмму

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "\sigma"] \arrow[dr, "D_k"'] & & C \arrow[dl, dashed, "D'_k"] \\ & \mathcal{C}(K) & \end{tikzcd}$$

Зафиксируем какой-нибудь элемент $c \in C$. Поскольку $\sigma : A \to C$ — плотный эпиморфизм, найдется направленность элементов $a_i \in A$ такая, что

$$\sigma(a_i) \xrightarrow[i\to\infty]{C} c.$$

Для всякого индекса $k \in \mathbb{N}[m]$ мы получим

$$D_k(a_i) = D'_k(\sigma(a_i)) \xrightarrow[i\to\infty]{\mathcal{C}(K)} D'_k(c). \tag{6.4.22}$$

Теперь рассмотрим какую-нибудь гладкую кривую в K, точнее, гладкое отображение $\gamma : [0,1] \to K$. Пусть для всякого индекса $k \in \mathbb{N}[m]$ порядка $|k| = 1$ и любой точки $t \in [0,1]$ символ $\gamma^k(t)$ обозначает k-ю компоненту производной $\gamma'(t)$ в разложении по локальным координатам на U. Для всякой функции $a \in A$ мы по теореме Ньютона-Лейбница получим

$$D_0(a)(\gamma(1)) - D_0(a)(\gamma(0)) = \sum_{|k|=1} \int_0^1 \gamma^k(t) \cdot D_k(a)(\gamma(t))\, \mathsf{d}\, t.$$

Вместе с (6.4.22) это дает

$$D'_0(c)(\gamma(1)) - D'_0(c)(\gamma(0)) \underset{\infty\leftarrow i}{\longleftarrow} D_0(a_i)(\gamma(1)) - D_0(a_i)(\gamma(0)) =$$

$$= \sum_{|k|=1} \int_0^1 \gamma^k(t) \cdot D_k(a_i)(\gamma(t))\, \mathsf{d}\, t \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} \sum_{|k|=1} \int_0^1 \gamma^k(t) \cdot D'_k(c)(\gamma(t))\, \mathsf{d}\, t$$

и значит

$$D'_0(c)(\gamma(1)) - D'_0(c)(\gamma(0)) = \sum_{|k|=1} \int_0^1 \gamma^k(t) \cdot D'_k(c)(\gamma(t))\, \mathsf{d}\, t$$

Эта связь между функцией $D'_0(c) \in \mathcal{C}(K)$ и функциями $D'_k(c) \in \mathcal{C}(K)$, $|k| = 1$, означает, что $D'_0(c)$ непрерывно дифференцируема на K, причем ее частными производными в выбранных нами локальных координатах будут функции $D'_k(c)$, $|k| = 1$.

Выбрав после этого какую-нибудь из производных $D'_k(c)$, $|k| = 1$, и рассмотрев индексы порядка 2, мы точно тем же приемом получим, что $D'_k(c)$ также непрерывно дифференцируема. И вообще, организовав индукцию по индексам, мы сможем показать, что все функции $D'_k(c)$ бесконечно дифференцируемы, и связаны между собой как частные производные функции $D'_0(c)$ (относительно выбранных нами локальных координат).

Если теперь менять компакт $K \subset U$ и открытое множество $U \subseteq M$, то возникающие при этом гладкие функции $D'_0(c)$ на K будут согласованы между собой тем, что на пересечении своих областей определения они совпадают. Поэтому определена некая общая гладкая функция

$\iota'(c) : M \to \mathbb{C}$, обладающая тем свойством, что ее ограничение на каждый компакт K будет совпадать с соответствующей функцией $D'_0(c)$:

$$\iota'(c)\big|_K = D'_0(c), \qquad K \subset U \subseteq M.$$

а частные производные при выбранной системе локальных координат совпадают с действием операторов D'_k на c. Иными словами, определено некое отображение $\iota' : C \to \mathcal{E}(M)$ (по построению это будет гомоморфизм алгебр), для которого будет коммутативна следующая диаграмма, уточняющая (6.4.21):

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "\sigma"] \arrow[dr, "\iota"'] \arrow[ddr, bend right, "D"'] & & C \arrow[dl, dashed, "\iota'"] \arrow[ddl, bend left, "D'"] \\
& \mathcal{E}(M) \arrow[d, "\lambda"] & \\
& \mathcal{C}(K)[m] &
\end{tikzcd} \tag{6.4.23}$$

(здесь отображение λ есть разложение гладкой функции в многочлен Тейлора на компакте $K \subset U \subseteq M$ при выбранных локальных координатах на U). Из этой диаграммы следует, что ι' должно быть непрерывно, потому что если $c_i \to c$, то это условие сохраняется под действием каждого оператора D'_k, то есть $D'_k(c_i) \to D'_k(c)$, а это как раз и есть сходимость в пространстве $\mathcal{E}(M)$.

Верхний внутренний треугольник в (6.4.23) будет как раз той диаграммой, которая нам нужна для того, чтобы убедиться, что расширение ι является оболочкой. $\square$

6.4.1. Контрпримеры. Следующий пример показывает, что ослабление условия (i) в теореме 6.27 делает это утверждение неверным.

Пример 6.4. *Существует плотная инволютивная подалгебра A в $\mathcal{E}(\mathbb{R})$, у которой*

(i) *сопряженное отображение спектров $\iota^{\mathsf{Spec}} : \mathsf{Spec}(A) \leftarrow M$ является биекцией (но не наложением),*

(ii) *для всякой точки $s \in \mathbb{R}$ естественное отображение касательных пространств $T_s[A] \leftarrow T_s(\mathbb{R})$ является изоморфизмом (векторных пространств),*

(iii) *гладкая оболочка A не изоморфна $\mathcal{E}(\mathbb{R})$:*

$$\mathsf{Env}_{\mathcal{E}} A \ncong \mathcal{E}(\mathbb{R})$$

Доказательство. Это модификация примера 5.3. Рассмотрим окружность $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ и на ней алгебру $\mathcal{E}(\mathbb{T})$ гладких функций. В декартовом квадрате $\mathcal{E}(\mathbb{T})^2$ рассмотрим подалгебру $\mathcal{E}(8)$, состоящую из пар функций $(u, v) \in \mathcal{E}(\mathbb{T})^2$, у которых все производные в точке 0 совпадают:

$$(u, v) \in \mathcal{E}(8) \quad \Longleftrightarrow \quad u, v \in \mathcal{E}(\mathbb{T}) \quad \& \quad \forall k \geqslant 0 \quad u^{(k)}(0) = v^{(k)}(0).$$

Это будет замкнутая подалгебра в $\mathcal{E}(\mathbb{T})^2$, и ее спектром будет пространство, которое в примере 5.3 мы обозначили символом 8, и которое можно понимать как результат склеивания двух копий окружности $\mathbb{T}$ в точке 0:

$$\mathsf{Spec}\, \mathcal{E}(8) = 8. \tag{6.4.24}$$

Всякая точка $s \in 8$ должна лежать либо в первой копии окружности $\mathbb{T}$, которую мы будем обозначать $\mathbb{T}_1$, либо во второй ее копии, $\mathbb{T}_2$ (либо, если $s = 0$, то мы считаем, что s принадлежит обеим окружностям $\mathbb{T}_1$ и $\mathbb{T}_2$). Покажем, что для всякой точки $s \in 8$ касательное пространство к $\mathcal{E}(8)$ изоморфно касательному пространству к $\mathcal{E}(\mathbb{T})$ в этой точке:

$$T_s(\mathcal{E}(8)) \cong \begin{cases} T_s(\mathcal{E}(\mathbb{T}_1)), & s \in \mathbb{T}_1 \\ T_s(\mathcal{E}(\mathbb{T}_2)), & s \in \mathbb{T}_2 \end{cases}, \qquad s \in 8. \tag{6.4.25}$$

Зафиксируем для этого какую-нибудь функцию $\varphi \in \mathcal{E}(\mathbb{T})$, которая в некоторой окрестности U точки 0 в $\mathbb{R}$ является обратным отображением для проекции $\pi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z} = \mathbb{T}$:

$$\varphi(\pi(t)) = t, \qquad t \in U.$$

Пусть $I_s(\mathbb{T})$ идеал в $\mathcal{E}(\mathbb{T})$, состоящий из функций, равных нулю в точке s. Тогда по лемме Адамара [16] всякая функция $u \in \mathcal{E}(\mathbb{T})$ будет отличаться от функции $u(s) + u'(s)\varphi$ на функцию из $I_s^2(\mathbb{T})$:

$$u \overset{I_0^2(\mathbb{T})}{\equiv} u(0) + u'(0)\varphi. \tag{6.4.26}$$

Рассмотрим два случая.

1) Зафиксируем точку $s \in 8 \setminus \{0\}$. Как элемент пространства 8, s должна лежать либо в $\mathbb{T}_1$, либо в $\mathbb{T}_2$. Пусть φ_s обозначает сдвиг функции φ на элемент s в $\mathbb{T}$:

$$\varphi_s(t) = \varphi(t - s), \quad t \in \mathbb{T},$$

и пусть ψ_s — какая-нибудь функция с нулевым ростком в точке 0, и одинаковым с φ_s ростком в точке s:

$$\psi_s(t) \equiv \begin{cases} 0, & \mod 0 \\ \varphi_s, & \mod s \end{cases}.$$

Из (6.4.26) следует

$$(u, v) \overset{I_s^2(\mathbb{T})}{\equiv} \begin{cases} u(s) + u'(s) \cdot (\psi_s, 0), & s \in \mathbb{T}_1 \\ v(s) + v'(s) \cdot (0, \psi_s), & s \in \mathbb{T}_2 \end{cases},$$

Как следствие, действие касательного вектора $\tau \in T_s(\mathcal{E}(8))$ на элемент (u, v) описывается формулой

$$\tau(u, v) = \begin{cases} u(s) + u'(s) \cdot \tau(\psi_s, 0), & s \in \mathbb{T}_1 \\ v(s) + v'(s) \cdot \tau(0, \psi_s), & s \in \mathbb{T}_2 \end{cases}$$

Отсюда следует, что (при $s \neq 0$) касательное пространство $T_s(\mathcal{E}(8))$ изоморфно $\mathbb{R}$ и $T_s(\mathbb{T})$.

$$T_s(\mathcal{E}(8)) \cong \mathbb{R} \cong T_s(\mathcal{E}(\mathbb{T})).$$

2) Рассмотрим точку $s = 0$. Тогда из (6.4.26) мы получаем

$$(u, v) \overset{I_0^2(\mathbb{T})}{\equiv} u(s) \cdot (1, 1) + u'(s) \cdot (\varphi, \varphi) = v(s) \cdot (1, 1) + v'(s) \cdot (\varphi, \varphi),$$

поэтому действие касательного вектора $\tau \in T_0(\mathcal{E}(8))$ на этот элемент описывается формулой

$$\tau(u, v) = u'(s) \cdot \tau(\varphi, \varphi) = v'(s) \cdot \tau(\varphi, \varphi).$$

Отсюда следует, что (в точке $s = 0$) касательное пространство $T_0(\mathcal{E}(8))$ изоморфно $\mathbb{R}$ и $T_0(\mathbb{T})$.

$$T_0(\mathcal{E}(8)) \cong \mathbb{R} \cong T_0(\mathcal{E}(\mathbb{T})).$$

После того, как доказаны (6.4.24) и (6.4.25) зафиксируем какое-нибудь гладкое биективное отображение $\omega : \mathbb{R} \to 8$ (такое отображение всегда есть, и оно не единственно). Оно порождает гомоморфизм алгебр $\mathcal{E}(\mathbb{R}) \leftarrow \mathcal{E}(8)$. Если через A обозначить образ этого гомоморфизма (с индуцированными из $\mathcal{E}(8)$ алгебраическими операциями и топологией), то мы получим как раз алгебру с аннонсированными выше свойствами (i) и (ii), и значит, также и свойством (iii). $\square$

Следующие два примера показывают независимость друг от друга условий (i) и (ii) в теореме 6.27.

Пример 6.5. Существует замкнутая подалгебра A в алгебре $\mathcal{E}(\mathbb{R})$ со следующими свойствами:

(i) спектр A не совпадает с $\mathbb{R}$ как множество,

$$\mathsf{Spec}(A) \neq \mathbb{R},$$

(ii) для всякой точки $s \in \mathbb{R}$ естественное отображение касательных пространств

$$T_s[A] \leftarrow T_s(\mathbb{R})$$

является изоморфизмом (векторных пространств),

Доказательство. Такими свойствами обладает алгебра периодических гладких функций на $\mathbb{R}$ с каким-нибудь фиксированным периодом, например, 1. ☐

Пример 6.6. Существует замкнутая подалгебра A в алгебре $\mathcal{E}(\mathbb{R})$ со следующими свойствами:

(i) спектр A совпадает с $\mathbb{R}$,

$$\mathsf{Spec}(A) = \mathbb{R},$$

(ii) в точке $s = 0$ касательное пространство к A вырождено:

$$T_0[A] = 0$$

Для доказательства нам понадобится

Лемма 6.33. *Пусть x — функция из $\mathcal{E}(\mathbb{R})$, у которой все производные (включая саму функцию x как свою производную нулевого порядка) равны нулю в точке 0,*

$$\forall n \geqslant 0 \qquad x^n(0) = 0.$$

Тогда ее можно приблизить в $\mathcal{E}(\mathbb{R})$ функциями с нулевым ростком в точке 0.

Доказательство. Зафиксируем $n \in \mathbb{N}$, $T > 1$, $\varepsilon > 0$ и подберем $\delta > 0$ так, чтобы

$$\forall k \in \{0, ..., n\} \qquad \sup_{|t| \leqslant \delta} \left| x^{(k)}(t) \right| \leqslant \varepsilon.$$

Выберем функцию $\eta \in \mathcal{E}(\mathbb{R})$ со свойствами:

$$0 \leqslant \eta(s) \leqslant 1, \qquad \eta(s) = \begin{cases} 0, & |s| \leqslant \frac{\delta}{2} \\ 1, & |s| \geqslant \delta \end{cases}$$

и положим

$$y_n(t) = \int_0^t \eta(s) \cdot x^{(n+1)}(s) \,\mathsf{d}\, s, \quad y_{n-1}(t) = \int_0^t y_n(s) \,\mathsf{d}\, s, \quad ..., \quad y_0(t) = \int_0^t y_1(s) \,\mathsf{d}\, s.$$

Тогда

$$\sup_{|t| \leqslant T} |x^n(t) - y_n(t)| = \sup_{|t| \leqslant T} \left| \int_0^t x^{(n+1)}(s) \,\mathsf{d}\, s - \int_0^t \eta(s) \cdot x^{(n+1)}(s) \,\mathsf{d}\, s \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{|t| \leqslant T} \int_0^t (1 - \eta(s)) \cdot |x^n(s)| \,\mathsf{d}\, s \leqslant \sup_{|s| \leqslant T} |x^n(s)| \cdot \int_0^t (1 - \eta(s)) \,\mathsf{d}\, s \leqslant \sup_{|s| \leqslant T} \left| x^{(n+1)}(s) \right| \cdot \delta.$$

$$\Downarrow$$

$$\sup_{|t| \leqslant T} \left| x^{(n-1)}(t) - y_{n-1}(t) \right| = \sup_{|t| \leqslant T} \left| \int_0^t x^n(s) \,\mathsf{d}\, s - \int_0^t y_n(s) \,\mathsf{d}\, s \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{|t| \leqslant T} \int_0^t |x^n(s) - y_n(s)| \,\mathsf{d}\, s \leqslant \sup_{|s| \leqslant T} \left| x^{(n+1)}(s) \right| \cdot \delta \cdot T.$$

$$\Downarrow$$

$$...$$

$$\Downarrow$$

$$\sup_{|t|\leqslant T}\left|x^{(0)}(t)-y_0(t)\right| = \sup_{|t|\leqslant T}\left|\int_0^t x^1(s)\,\mathsf{d}\,s-\int_0^t y_1(s)\,\mathsf{d}\,s\right| \leqslant$$
$$\leqslant \sup_{|t|\leqslant T}\int_0^t \left|x^1(s)-y_1(s)\right|\mathsf{d}\,s \leqslant \sup_{|s|\leqslant T}\left|x^{(n+1)}(s)\right|\cdot\delta\cdot T^n.$$

Теперь видно, что при фиксированных $n\in\mathbb{N}$, $T>1$, $\varepsilon>0$ число $\delta>0$ можно подобрать так, чтобы

$$\delta < \frac{\varepsilon}{T^n\cdot\sup_{|s|\leqslant T}\left|x^{(n+1)}(s)\right|},$$

и тогда построенная функция y_0 будет отличаться от x меньше, чем на ε равномерно по производным порядка не больше n на отрезке $[-T,T]$:

$$\max_{0\leqslant k\leqslant n}\sup_{|t|\leqslant T}\left|x^{(k)}(t)-y^{(k)}(t)\right| = \max_{0\leqslant k\leqslant n}\sup_{|t|\leqslant T}\left|x^{(k)}(t)-y_k(t)\right| \leqslant T^n\cdot\sup_{|s|\leqslant T}\left|x^{(n+1)}(s)\right| < \varepsilon.$$

□

Доказательство примера 6.6. Такими свойствами обладает алгебра гладких функций, имеющих в точке $s=0$ нулевые производные любого положительного порядка:

$$A=\{x\in\mathcal{E}(M):\quad \forall n\geqslant 1\quad x^n(0)=0\}.$$

1. Покажем сначала, что $\mathsf{Spec}(A)=\mathbb{R}$. Пусть $s\in\mathsf{Spec}(A)$, то есть s — инволютивный, непрерывный, линейный, мультипликативный и сохраняющий единицу функционал на A:

$$s(x^\bullet)=\overline{s(x)},\quad s(\lambda\cdot x+y)=\lambda\cdot s(x)+s(y),\quad s(x\cdot y)=s(x)\cdot s(y),\quad s(1)=1.$$

Рассмотрим его ядро $\mathsf{Ker}\,s=\{x\in A:\ s(x)=0\}$ и покажем, что найдется точка $t\in\mathbb{R}$ такая, что если ее рассматривать, как функционал на A, то его ядро содержит $\mathsf{Ker}(s)$:

$$\mathsf{Ker}\,s\subseteq\mathsf{Ker}\,t=\{x\in A:\ x(t)=0\}. \tag{6.4.27}$$

Предположим, что это не так, то есть

$$\forall t\in\mathbb{R}\quad \exists x_t\in\mathsf{Ker}\,s\quad x_t(t)\neq 0. \tag{6.4.28}$$

Рассмотрим семейство множеств

$$U_t=\{r\in\mathbb{R}:\ x_t(r)\neq 0\}.$$

Они открыты в $\mathbb{R}$, а условие (6.4.28) означает, что они образуют покрытие прямой $\mathbb{R}$. Поэтому в это семейство можно вписать гладкое локально конечное разбиение единицы:

$$\eta_t\in\mathcal{E}(M),\quad \mathsf{supp}\,\eta_t\subseteq U_t,\quad \eta_t\geqslant 0,\quad \sum_{t\in\mathbb{R}}\eta_t=1.$$

Это разбиение можно выбрать так, чтобы оно удовлетворяло следующим дополнительным условиям:

$$\forall n\geqslant 1\quad \eta_0^n(0)=0\quad \&\quad \forall t\neq 0\quad 0\notin\mathsf{supp}\,\eta_t.$$

Из них автоматически будет следовать, что все функции η_t лежат в A, а ряд $\sum_{t\in\mathbb{R}}\eta_t\cdot x_t\cdot x_t^\bullet$ сходится в A (относительно топологии, индуцированной из $\mathcal{E}(\mathbb{R})$). Обозначим его сумму буквой y,

$$y=\sum_{t\in\mathbb{R}}\eta_t\cdot x_t\cdot x_t^\bullet,$$

и заметим, что, поскольку все x_t лежат в замкнутом идеале $\mathsf{Ker}\,s$, элемент y тоже должен лежать в нем:

$$y\in\mathsf{Ker}\,s.$$

С другой стороны, функция y нигде не обращается в нуль. Действительно, для всякой точки $r \in \mathbb{R}$ найдется какая-то функция η_{t_r}, не равная нулю в этой точке, и поэтому $\eta_{t_r}(r) > 0$. При этом, из условия $\operatorname{supp} \eta_{t_r} \subseteq U_{t_r} = \{q \in \mathbb{R} : \ x_{t_r}(q) \neq 0\}$ следует, что $|x_{t_r}(r)| > 0$, и мы получаем

$$y(r) = \sum_{t \in \mathbb{R}} \eta_t(r) \cdot |x_t(r)|^2 \geqslant \underbrace{\eta_{t_r}(r)}_{\substack{\vee \\ 0}} \cdot \underbrace{|x_{t_r}(r)|^2}_{\substack{\vee \\ 0}} > 0.$$

То есть y обратима, как элемент алгебры $\mathcal{E}(\mathbb{R})$. Вдобавок, по построению, все производные функции y в точке 0 равны нулю, поэтому у ее обратной функции $\frac{1}{y}$ все производные в точке 0 тоже равны нулю. Значит,

$$\frac{1}{y} \in A.$$

То есть функция y обратима, как элемент алгебры A.

Итак, функция y с одной стороны лежит в идеале $\operatorname{Ker} s$ алгебры A, а с другой — обратима в A. Значит, $\operatorname{Ker} s = A$, а это противоречит условию $s(1) = 1$. То есть наше предположение (6.4.28) оказалось неверно. Таким образом, для некоторого $t \in \mathbb{R}$ должно выполняться (6.4.27). Мы получаем, что на A заданы два ненулевых линейных функционала, s и t, причем, во-первых, ядро s содержится в ядре t, и, во-вторых, на элементе $1 \in A$ их значения совпадают: $s(1) = t(1) = 1$. Такое возможно только если они совпадают всюду на A: $s = t$.

2. Теперь докажем условие (ii). Для этого покажем, что у характера $x \mapsto x(0)$ ядро $I_0[A] = \{x \in A : \ x(0) = 0\}$ обладает следующим свойством:

$$\overline{I_0^2}[A] = I_0[A]. \tag{6.4.29}$$

— тогда из формулы (3.3.18) будет следовать

$$T_0[A] = \operatorname{Re}\left(I_0[A] / \overline{I_0^2}[A]\right)^{\triangledown} = 0.$$

Действительно, пусть $x \in I_0[A]$, то есть x — функция из $\mathcal{E}(\mathbb{R})$, у которой не только производные, но и значение в точке 0 равно нулю,

$$\forall n \geqslant 0 \qquad x^n(0) = 0.$$

По лемме 6.33 ее можно приблизить в $\mathcal{E}(\mathbb{R})$ функциями с нулевым ростком в точке 0. С другой стороны, всякую функцию y с нулевым ростком в точке 0 можно представить как элемент идеала $I_0^2[A]$ — для этого ее достаточно просто домножить на другую функцию с нулевым ростком в 0, но равную 1 на носителе y. Мы получаем, что x приближается в $\mathcal{E}(\mathbb{R})$ (а значит и в A) функциями из $I_0^2[A]$. □

Следующий пример, подсказанный автору М.Бахтольдом, показывает, что в лемме 6.29 инъективность отображения $\iota_t^{\mathbb{C}T^\star}$ существенна.

Пример 6.7. Если у гомоморфизма инволютивных стереотипных алгебр $\iota : A \to B$ в какой-то точке $t \in \operatorname{Spec}(B)$ соответствующий морфизм кокасательных пространств $\iota_t^{\mathbb{C}T^\star} : \mathbb{C}T^\star_{t\circ\iota}[A] \to \mathbb{C}T^\star_t[B]$ не инъективен:

$$\operatorname{Ker} \iota_t^{T^\star} \neq 0$$

то формула (6.4.3) не обязана выполняться:

$$\overline{I^2_{t\circ\iota}}[A] \neq \iota^{-1}\Big(\overline{I^2_t}[B]\Big).$$

Доказательство. Рассмотрим алгебру $\mathcal{E}(\mathbb{R})$ гладких функций на прямой $\mathbb{R}$ и в ней подалгебру A, (алгебраически) порожденную функциями x^2 и $x \cdot e^x$. Таким образом, A можно представлять себе как линейную оболочку в $\mathcal{E}(\mathbb{R})$ функций вида

$$x^{2p+q} \cdot e^{qx}, \qquad p, q \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, ...\}$$

(эти функции образуют алгебраический базис в A). Алгебра A разделяет точки прямой $\mathbb{R}$

$$s \neq t \in \mathbb{R} \qquad \Longrightarrow \qquad \exists a \in A \quad a(s) \neq a(t),$$

и касательные векторы алгебры $\mathcal{E}(\mathbb{R})$

$$\forall s \in \mathbb{R} \quad \forall \tau \in T_s[\mathcal{E}(\mathbb{R})] \quad \exists a \in A \quad \tau(a) \neq 0.$$

Отсюда следует по теореме Нахбина 4.26, что A плотна в $\mathcal{E}(\mathbb{R})$. Наделив A сильнейшей локально выпуклой топологией, мы превратим A в стереотипную алгебру (в силу примера 3.3), а естественное вложение в $\mathcal{E}(\mathbb{R})$ станет эпиморфизмом стереотипных алгебр $\iota : A \to \mathcal{E}(\mathbb{R})$. Рассмотрим идеал $I_0[A]$ функций в A, обращающихся в нуль в точке $0 \in \mathbb{R}$. Он будет линейной оболочкой функций

$$x^{2p+q} \cdot e^{qx}, \qquad p, q \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, ...\}, \qquad p + q \neq 0.$$

Его квадрат $I_0^2[A]$ будет линейной оболочкой функций

$$x^{2p+q} \cdot e^{qx}, \qquad p, q \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, ...\}, \qquad p > 0. \qquad q > 0.$$

В этом списке функций ровно на 2 меньше, чем в списке для $I_0[A]$ (в нем недостает x^2 и $x \cdot e^x$). Поэтому фактор-пространство $\mathbb{C}T_0^\star[A] = I_0[A]/I_0^2[A]$ имеет комплексную размерность 2. Значит его вещественная часть имеет вещественную рамерность 2:

$$\dim_{\mathbb{R}} T_0^\star[A] = 2.$$

Поэтому отображение кокасательных пространств $\iota_0^{T^\star} : T_0^\star[A] \to T_0^\star[\mathcal{E}(\mathbb{R})]$ не может быть инъективно. При этом функция x^2, лежащая в A и в $I_0^2[\mathcal{E}(\mathbb{R})]$ (и значит, лежащая в $\iota^{-1}\Big(\overline{I_t^2}[B]\Big)$), не лежит в $I_0^2[A]$. $\square$

6.4.2. Гладкая оболочка алгебры $k(G)$ на компактной группе Ли G. Вспомним алгебру $k(G)$ непрерывных по норме матричных элементов, определенную на с.93.

Теорема 6.34. *Гладкая оболочка алгебры $k(G)$ матричных элементов на компактной группе Ли G совпадает с алгеброй $\mathcal{E}(G)$ гладких функций на G:*

$$\mathsf{Env}_{\mathcal{E}}\, k(G) = \mathcal{E}(G). \tag{6.4.30}$$

Доказательство. Алгебра $k(G)$ вкладывается в $\mathcal{E}(G)$, причем их спектры совпадают, а по следствию 3.44, в каждой точке спектра касательные пространства тоже совпадают. Дальше работает теорема 6.27. $\square$

6.5. Гладкие оболочки групповых алгебр

6.5.1. Совпадение гладких оболочек алгебр $\mathcal{C}^\star(G)$ и $\mathcal{E}^\star(G)$. Выше на с.37 мы уже отмечали, что у вещественной группы Ли G можно рассматривать две групповые алгебры: алгебру $\mathcal{C}^\star(G)$ мер с компактным носителем и алгебру $\mathcal{E}^\star(G)$ распределений с компактным носителем (эти конструкции подробно описаны в [28]). Если обозначить естественное включение $\mathcal{E}(G) \subseteq \mathcal{C}(G)$ символом λ, то мы получим диаграмму

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C}^\star(G) \arrow[r, "\lambda^\star"] \arrow[d, "\mathsf{env}_{\mathcal{E}}\, \mathcal{C}^\star(G)"'] & \mathcal{E}^\star(G) \arrow[d, "\mathsf{env}_{\mathcal{E}}\, \mathcal{E}^\star(G)"] \\ \mathsf{Env}_{\mathcal{E}}\, \mathcal{C}^\star(G) \arrow[r, "\mathsf{Env}_{\mathcal{C}}(\lambda^\star)"] & \mathsf{Env}_{\mathcal{E}}\, \mathcal{E}^\star(G) \end{tikzcd} \tag{6.5.1}$$

По аналогии с теоремой 5.33 доказывается

Теорема 6.35. *Для всякой вещественной группы Ли G гладкие оболочки групповых алгебр $\mathcal{C}^\star(G)$ и $\mathcal{E}^\star(G)$ совпадают:*

$$\mathsf{Env}_{\mathcal{E}}\, \mathcal{C}^\star(G) = \mathsf{Env}_{\mathcal{E}}\, \mathcal{E}^\star(G). \tag{6.5.2}$$

6.5.2. Преобразование Фурье на коммутативной группе Ли. Вспомним преобразование Фурье на коммутативной локально компактной группе G, определенное выше формулой (5.4.1). Если G — компактно порожденная коммутативная группа Ли, то двойственная группа $\widehat{G}$ также будет (компактно порожденной) группой Ли. Поэтому в этом случае определены алгебры гладких функций $\mathcal{E}(G)$, $\mathcal{E}(\widehat{G})$ и распределений $\mathcal{E}^\star(G)$, $\mathcal{E}^\star(\widehat{G})$. Та же самая формула (5.4.1) будет определять отображение

$$\mathcal{F}_G : \mathcal{E}^\star(G) \to \mathcal{E}(\widehat{G}).$$

которое мы также будем называть *преобразованием Фурье* на группе G.

Лемма 6.36. *Для компактно порожденной коммутативной группы Ли G преобразование Фурье непрерывно переводит алгебру мер $\mathcal{C}^\star(G)$ и алгебру распределений $\mathcal{E}^\star(G)$ в алгебру $\mathcal{E}(\widehat{G})$ гладких функций на $\widehat{G}$.*

$$\mathcal{F}_G : \mathcal{C}^\star(G) \to \mathcal{E}(\widehat{G}), \qquad \mathcal{F}_G : \mathcal{E}^\star(G) \to \mathcal{E}(\widehat{G}).$$

Доказательство. Пусть $\alpha \in \mathcal{E}^\star(G)$. Всякий вещественный характер (непрерывный гомоморфизм) $r : G \to \mathbb{R}$ определяет однопараметрическую подгруппу (непрерывный гомоморфизм)

$$h : \mathbb{R} \to \widehat{G} \quad \Big| \quad h(t) = e^{itr},$$

и наоборот, всякая однопараметрическая подгруппа $h : \mathbb{R} \to \widehat{G}$ имеет такой вид [21, (24.43)]. Поэтому

$$\frac{\mathcal{F}_G(\alpha)(\chi \cdot h(t)) - \mathcal{F}_G(\alpha)(\chi)}{t} = \frac{\alpha(\chi \cdot e^{itr}) - \alpha(\chi)}{t} = \alpha\left(\frac{\chi \cdot e^{itr} - \chi}{t}\right) =$$
$$= \alpha\left(\chi \cdot \frac{e^{itr} - 1}{t}\right) \underset{t\to 0}{\longrightarrow} \alpha(\chi \cdot ir)$$

и из этого соотношения видно, что $\mathcal{F}_G(\alpha)$ непрерывно дифференцируема вдоль любой однопараметрической подгруппы в $\widehat{G}$. Точно так же проверяется непрерывная дифференцируемость любого порядка, и мы получаем $\mathcal{F}_G(\alpha) \in \mathcal{E}(\widehat{G})$, причем частные производные будут вычисляться по формулам

$$\partial_{h_k} ... \partial_{h_1} \mathcal{F}_G(\alpha)(\chi) = \alpha(\chi \cdot (ir_1) \cdot ... \cdot (ir_k)).$$

Далее, если $\alpha_\nu \to 0$ в $\mathcal{C}^\star(G)$, то для всякого компакта $K \subseteq \widehat{G}$ и любых $r_1, ..., r_k$ множество $\{\chi \cdot (ir_1) \cdot ... \cdot (ir_k);\ \chi \in K\}$ образует компакт в $\mathcal{C}(\widehat{G})$, поэтому

$$\partial_{h_k} ... \partial_{h_1} \mathcal{F}_G(\alpha_\nu)(\chi) = \alpha(\chi \cdot (ir_1) \cdot (ir_k)) \underset{\nu\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

равномерно по $\chi \in K$. Это значит, что $\partial_{h_k} ... \partial_{h_1} \mathcal{F}_G(\alpha_\nu) \to 0$ в пространстве $\mathcal{C}(\widehat{G})$. Поскольку это верно для любых $h_1, ..., h_k$, мы получаем, что $\mathcal{F}_G(\alpha_\nu) \to 0$ в пространстве $\mathcal{E}(\widehat{G})$. Точно так же рассматривается случай $\alpha \in \mathcal{C}^\star(G)$. ☐

Теорема 6.37. *Для компактно порожденной коммутативной группы Ли G оба преобразования Фурье*

$$\mathcal{F}_G : \mathcal{C}^\star(G) \to \mathcal{E}(\widehat{G}), \qquad \mathcal{F}_G : \mathcal{E}^\star(G) \to \mathcal{E}(\widehat{G}).$$

являются гладкими оболочками групповых алгебр:

$$\mathsf{Env}_{\mathcal{E}}\, \mathcal{C}^\star(G) = \mathsf{Env}_{\mathcal{E}}\, \mathcal{E}^\star(G) = \mathcal{E}(\widehat{G}). \tag{6.5.3}$$

Доказательство. В силу теоремы 6.35, достаточно рассмотреть случай $\mathcal{E}^\star(G)$. А для него надо просто проверить условия (i) и (ii) теоремы 6.27. Пусть $\delta : G \to \mathcal{E}^\star(G)$ — вложение группы G в групповую алгебру $\mathcal{E}^\star(G)$ в виде дельта-функций:

$$\delta_a(u) = u(a), \qquad u \in \mathcal{E}(G).$$

Тогда, во-первых, в силу [28, Theorem 10.12], формула

$$\chi = \varphi \circ \delta$$

задает биекцию между характерами $\varphi : \mathcal{E}^\star(G) \to \mathbb{C}$ на алгебре $\mathcal{E}^\star(G)$ и комплексными характерами $\chi : G \to \mathbb{C}^\times$ на группе G. При этом инволютивным характерам $\varphi : \mathcal{E}^\star(G) \to \mathbb{C}$ будут соответствовать обычные характеры $\chi : G \to \mathbb{T}$ (со значениями в окружности $\mathbb{T}$). Это соответствие $\varphi \leftrightarrow \chi$ непрерывно в обе стороны, поэтому задает изоморфизм

$$\mathsf{Spec}\, \mathcal{E}^\star(G) \cong \widehat{G}.$$

Это условие (i) теоремы 6.27.

Во-вторых, пусть $\tau : \mathcal{E}^\star(G) \to \mathbb{C}$ — касательный вектор в точке спектра $\varepsilon \in \mathsf{Spec}\Big(\mathcal{E}^\star(G)\Big)$, соответствующей единичному характеру $1(a) = 1$, $a \in G$. Тождество Лейбница (3.3.8) для него принимает вид

$$\tau(\alpha * \beta) = \tau(\alpha) \cdot \varepsilon(\beta) + \varepsilon(\alpha) \cdot \tau(\beta), \qquad \alpha, \beta \in \mathcal{E}^\star(G),$$

и если заменить α на δ_a, а β на δ_b, то мы получаем

$$\tau(\delta_{a\cdot b}) = \tau(\delta_a * \delta_b) = \tau(\delta_a) \cdot \varepsilon(\delta_b) + \varepsilon(\delta_a) \cdot \tau(\delta_b) = \tau(\delta_a) + \tau(\delta_b), \qquad a, b \in G.$$

Это значит, что отображение $a \mapsto \tau(\delta_a)$ является гомоморфизмом из G в аддитивную группу $\mathbb{C}$. Если вдобавок потребовать, чтобы τ был инволютивным касательным вектором, то числа $\tau(\delta_a)$ станут вещественными, поэтому отображение $a \mapsto \tau(\delta_a)$ превратится в (непрерывный) гомоморфизм групп $G \to \mathbb{R}$, то есть станет вещественным характером. Это устанавливает биекцию между касательным пространством $T_\varepsilon\Big(\mathcal{E}^\star(G)\Big)$ к алгебре $\mathcal{E}^\star(G)$ и группой $\mathsf{Hom}(G, \mathbb{R})$ вещественных характеров на G. Но $\mathsf{Hom}(G, \mathbb{R})$ изоморфна группе однопараметрических подгрупп в $\widehat{G}$, то есть группе $\mathsf{Hom}(\mathbb{R}, \widehat{G})$ (непрерывных) гомоморфизмов $\mathbb{R} \to \widehat{G}$ (см., например, [21, (24.42)]). Как следствие, $\mathsf{Hom}(G, \mathbb{R})$ изоморфна касательному пространству к группе $\widehat{G}$ в точке $1 \in \widehat{G}$, и мы получаем цепочку изоморфизмов

$$T_\varepsilon\Big(\mathcal{E}^\star(G)\Big) \cong \mathsf{Hom}(G, \mathbb{R}) \cong \mathsf{Hom}(\mathbb{R}, \widehat{G}) \cong T_1(\widehat{G}).$$

Если опустить промежуточные равенства, то точку 1 можно заменить на любую другую точку $\chi \in \widehat{G}$, поэтому мы получаем изоморфизм

$$T_\chi\Big(\mathcal{E}^\star(G)\Big) \cong T_\chi(\widehat{G}) \cong T_\chi\Big(\mathcal{E}(\widehat{G})\Big).$$

Это как раз условие (ii) теоремы 6.27. $\square$

6.5.3. Гладкая оболочка групповой алгебры компактной группы.

Теорема 6.38. *Для компактной группы K гладкой оболочкой ее групповой алгебры мер $\mathcal{C}^\star(K)$ является декартово произведение алгебр $\mathcal{B}(X_\pi)$, где π пробегает двойственный объект $\widehat{K}$, а X_π представляет собой пространство представления π:*

$$\mathsf{Env}_{\mathcal{E}}\, \mathcal{C}^\star(K) = \prod_{\pi \in \widehat{K}} \mathcal{B}(X_\pi). \tag{6.5.4}$$

Если вдобавок K — группа Ли, то та же алгебра будет гладкой оболочкой групповой алгебры распределений $\mathcal{E}^\star(K)$:

$$\mathsf{Env}_{\mathcal{E}}\, \mathcal{E}^\star(K) = \mathsf{Env}_{\mathcal{E}}\, \mathcal{C}^\star(K) = \prod_{\pi \in \widehat{K}} \mathcal{B}(X_\pi). \tag{6.5.5}$$

Лемма 6.39. *Если K — компактная группа, а B — C^*-алгебра, то в любой системе частных производных $D_k : \mathcal{C}^\star(K) \to B$, $k \in \mathbb{N}[m]$, только оператор D_0 может быть отличен от нуля:*

$$\forall k > 0 \qquad D_k = 0. \tag{6.5.6}$$

Доказательство. Рассмотрим отображения
$$\varphi_k = D_k \circ \delta : K \to B.$$
Нам нужно убедиться, что
$$\forall k \neq 0 \qquad \varphi_k = 0 \tag{6.5.7}$$
Для всякого $a \in K$ мы получаем
$$\varphi_0(a)^{-1} = \varphi_0(a^{-1}) = D_0(\delta^{a^{-1}}) = D_0((\delta^a)^\bullet) = D_0(\delta^a)^\bullet = \varphi_0(a)^\bullet,$$
то есть $\varphi_0(a)$ является унитарным элементом в B. Как следствие,
$$||\varphi_0(a)|| = 1, \qquad a \in K. \tag{6.5.8}$$
Пусть теперь k — мультииндекс порядка 1. Тогда во-первых,
$$\sup_{x \in K} \|\varphi_k(x)\| = C < \infty \tag{6.5.9}$$
(потому что $\varphi_k : K \to B$ — непрерывное отображение на компакте K). И, во-вторых,
$$\varphi_0(a) \cdot \varphi_k(b) = \varphi_k(b) \cdot \varphi_0(a), \qquad \varphi_k(a \cdot b) = \varphi_0(a) \cdot \varphi_k(b) + \varphi_k(a) \cdot \varphi_0(b), \qquad a, b \in K \tag{6.5.10}$$
$$\Downarrow$$
$$\varphi_k(a^p) = p \cdot \varphi_0(a)^{p-1} \cdot \varphi_k(a), \qquad a \in K, \quad p \in \mathbb{N}.$$
$$\Downarrow$$
$$\varphi_k(a) = \frac{1}{p} \cdot \varphi_0(a^{-1})^{p-1} \cdot \varphi_k(a^p), \qquad a \in K, \quad p \in \mathbb{N}.$$
$$\Downarrow$$
$$\|\varphi_k(a)\| = \frac{1}{p} \cdot \left\|\varphi_0(a^{-1})^{p-1} \cdot \varphi_k(a^p)\right\| \leqslant \frac{1}{p} \cdot \underbrace{\left\|\varphi_0(a^{-1})\right\|^{p-1}}_{\substack{(6.5.8)\ \| \\ 1}} \cdot \underbrace{\|\varphi_k(a^p)\|}_{\substack{(6.5.9)\ \wedge\!\!\!\backslash\backslash \\ C}} \leqslant \frac{1}{p} \cdot 1 \cdot C \underset{p \to \infty}{\longrightarrow} 0$$
$$\Downarrow$$
$$\varphi_k(a) = 0, \qquad a \in K.$$
Мы доказали (6.5.7) для мультииндексов k порядка 1. Если теперь $|k| = 2$, то мы получим
$$\varphi_k(a \cdot b) = \sum_{0 \leqslant l \leqslant k} \binom{k}{l} \cdot \varphi_{k-l}(a) \cdot \varphi_l(b) =$$
$$= \varphi_k(a) \cdot \varphi_0(b) + \sum_{|l|=1} \binom{k}{l} \cdot \varphi_{k-l}(a) \cdot \underbrace{\varphi_l(b)}_{\substack{\| \\ 0}} + \varphi_0(a) \cdot \varphi_k(b) = \varphi_k(a) \cdot \varphi_0(b) + \varphi_0(a) \cdot \varphi_k(b)$$
То есть φ_k удовлетворяет правому тождеству в (6.5.10) (а значит и обоим тождествам), и по тем же самым причинам $\varphi_k = 0$. В общем случае нужно провести индукцию по k. □

Доказательство теоремы 6.38. Здесь достаточно доказать (6.5.4), потому что (6.5.5) будет следовать из теоремы 6.35. Соотношение (6.5.6) означает, что при взятии гладкой оболочки у алгебры $\mathcal{C}^\star(G)$ класс тестовых морфизмов совпадает с классом морфизмов в C^*-алгебры. Это означает, что гладкая оболочка алгебры $\mathcal{C}^\star(G)$ совпадает с ее непрерывной оболочкой, и значит, по предложению 5.26,
$$\mathsf{Env}_{\mathcal{E}}\, \mathcal{C}^\star(K) = \prod_{\pi \in \widehat{K}} \mathcal{B}(X_\pi).$$
□

6.5.4. Гладкая оболочка групповой алгебры группы $C \times K$.

Теорема 6.40. *Пусть C — абелева компактно порожденная группа Ли, K — компактная группа. Тогда гладкой оболочкой групповой алгебры мер $\mathcal{C}^\star(C \times K)$ является алгебра $\mathcal{E}(\widehat{C}, \prod_{\sigma\in\widehat{K}} \mathcal{B}(X_\sigma))$ гладких отображений из двойственной по Понтрягину группы $\widehat{C}$ в декартово произведение алгебр $\mathcal{B}(X_\sigma)$, где σ пробегает двойственный объект $\widehat{K}$, а X_σ представляет собой пространство представления σ:*

$$\mathsf{Env}_{\mathcal{E}}\, \mathcal{C}^\star(C \times K) = \mathcal{E}\Big(\widehat{C}, \prod_{\sigma\in\widehat{K}} \mathcal{B}(X_\sigma)\Big) = \prod_{\sigma\in\widehat{K}} \mathcal{E}\big(\widehat{C}, \mathcal{B}(X_\sigma)\big) = \\ = \mathcal{E}(\widehat{C}) \odot \prod_{\sigma\in\widehat{K}} \mathcal{B}(X_\sigma) = \mathsf{Env}_{\mathcal{E}}\, \mathcal{C}^\star(C) \odot \mathsf{Env}_{\mathcal{E}}\, \mathcal{C}^\star(K). \quad (6.5.11)$$

Если вдобавок K — группа Ли, то та же алгебра будет гладкой оболочкой групповой алгебры распределений $\mathcal{E}^\star(C \times K)$:

$$\mathsf{Env}_{\mathcal{E}}\, \mathcal{C}^\star(C \times K) = \mathsf{Env}_{\mathcal{E}}\, \mathcal{E}^\star(C \times K) = \mathcal{E}\Big(\widehat{C}, \prod_{\sigma\in\widehat{K}} \mathcal{B}(X_\sigma)\Big) = \\ = \prod_{\sigma\in\widehat{K}} \mathcal{E}\big(\widehat{C}, \mathcal{B}(X_\sigma)\big) = \mathcal{E}(\widehat{C}) \odot \prod_{\sigma\in\widehat{K}} \mathcal{B}(X_\sigma) = \mathsf{Env}_{\mathcal{E}}\, \mathcal{E}^\star(C) \odot \mathsf{Env}_{\mathcal{E}}\, \mathcal{E}^\star(K). \quad (6.5.12)$$

Доказательство. Оба утверждения следуют из теорем 6.37 и 6.38. Например, для $\mathcal{E}^\star(C \times K)$ цепочка рассуждений выглядит так:

$$\mathsf{Env}_{\mathcal{E}}\, \mathcal{E}^\star(C \times K) = \mathsf{Env}_{\mathcal{E}} \Big(\mathcal{E}^\star(C) \circledast \mathcal{E}^\star(K)\Big) = [29,\ (1.129)] = \\ = \mathsf{Env}_{\mathcal{E}} \Big(\mathsf{Env}_{\mathcal{E}}\, \mathcal{E}^\star(C) \circledast \mathsf{Env}_{\mathcal{E}}\, \mathcal{E}^\star(K)\Big) = (6.5.3), (6.5.4) = \mathsf{Env}_{\mathcal{E}} \Big(\mathcal{E}(\widehat{C}) \circledast \prod_{\sigma\in\widehat{K}} \mathcal{B}(X_\sigma)\Big) = \\ = (6.3.1) = \mathcal{E}(\widehat{C}) \overset{\mathcal{E}}{\circledast} \prod_{\sigma\in\widehat{K}} \mathcal{B}(X_\sigma) = (6.3.10) = \mathcal{E}\Big(\widehat{C}, \prod_{\sigma\in\widehat{K}} \mathcal{B}(X_\sigma)\Big).$$

Это доказывает второе равенство в (6.5.12). Точно так же доказывается первое равенство в (6.5.11), и вместе эти равенства дают первое равенство в (6.5.12):

$$\mathsf{Env}_{\mathcal{E}}\, \mathcal{C}^\star(C \times K) = \mathcal{E}\Big(\widehat{C}, \prod_{\sigma\in\widehat{K}} \mathcal{B}(X_\sigma)\Big) = \mathsf{Env}_{\mathcal{E}}\, \mathcal{E}^\star(C \times K).$$

Третье равенство в (6.5.12) очевидно. Четвертое следует из [28, Theorem 8.9]. Наконец, последнее равенство в (6.5.12) следует из (6.5.3) и (6.5.4). □

6.6. Алгебра $\mathcal{K}_\infty(G)$

Для всякой группы Ли G ее групповая алгебра распределений $\mathcal{E}^\star(G)$ является инволютивной алгеброй Хопфа относительно проективного стереотипного тензорного произведения $\circledast$. Поэтому, по теоремам 6.18 и 6.19, ее гладкая оболочка $\mathsf{Env}_{\mathcal{E}}(\mathcal{E}^\star(G))$ должна быть коалгеброй с согласованными антиподом и инволюцией в категориях `E-Alg` гладких алгебр и $(\mathtt{Ste}, \odot)$ стереотипных пространств. Обозначим символом $\mathcal{K}_\infty(G)$ пространство, стереотипно сопряженное к $\mathsf{Env}_{\mathcal{E}}\, \mathcal{E}^\star(G)$:

$$\mathcal{K}_\infty(G) := \Big(\mathsf{Env}_{\mathcal{E}}\, \mathcal{E}^\star(G)\Big)^\star. \quad (6.6.1)$$

Это сопряженное пространство к коалгебре в $(\mathtt{Ste}, \odot)$ с согласованными антиподом и инволюцией, поэтому по свойству 4° на с.67, справедлива

Теорема 6.41. *Для всякой группы Ли G пространство $\mathcal{K}_\infty(G)$ является алгеброй в категории $(\mathtt{Ste}, \circledast)$ (то есть стереотипной алгеброй) с согласованными антиподом и инволюцией.*

По теореме 6.19(ii) морфизм

$$\big(\operatorname{\mathsf{env}}_{\mathcal{E}}\mathcal{E}^\star(G)\big)^\star:\mathcal{K}_\infty(G)=\Big(\operatorname{\mathsf{Env}}_{\mathcal{E}}\mathcal{E}^\star(G)\Big)^\star\to\mathcal{E}^\star(G)^\star=\mathcal{E}(G),$$

сопряженный к морфизму оболочки, является инволютивным гомоморфизмом алгебр. Те же соображения, что применялись на с.38 для алгебры $\mathcal{K}(G)$, показывают, что морфизм $\big(\operatorname{\mathsf{env}}_{\mathcal{E}}\mathcal{E}^\star(G)\big)^\star$ имеет нулевое ядро.

Как следствие, алгебру $\mathcal{K}_\infty(G)$ можно понимать как некую инволютивную подалгебру в $\mathcal{E}(G)$:

Теорема 6.42. *Отображение $u\mapsto u\circ\operatorname{\mathsf{env}}_{\mathcal{E}}\mathcal{E}^\star(G)\circ\delta$ совпадает с отображением $\big(\operatorname{\mathsf{env}}_{\mathcal{E}}\mathcal{E}^\star(G)\big)^\star$, сопряженным к $\operatorname{\mathsf{env}}_{\mathcal{E}}\mathcal{E}^\star(G)$:*

$$\operatorname{\mathsf{env}}_{\mathcal{E}}\mathcal{E}^\star(G)^\star(u)=u\circ\operatorname{\mathsf{env}}_{\mathcal{E}}\mathcal{E}^\star(G)\circ\delta \tag{6.6.2}$$

и инъективно вкладывает $\mathcal{K}_\infty(G)$ в $\mathcal{E}(G)$ в качестве инволютивной подалгебры (и поэтому операции сложения, умножения и инволюции в $\mathcal{K}_\infty(G)$ являются поточечными).

Следующее утверждение аналогично теореме 5.36:

Теорема 6.43. *Алгебра $\mathcal{K}_\infty(G)$ как стереотипное пространство представима в виде узлового кообраза (в категории стереотипных пространств)*

$$\mathcal{K}_\infty(G)=\operatorname{\mathsf{Coim}}_\infty\varphi^\star \tag{6.6.3}$$

отображения $\varphi^\star$, сопряженного к естественному морфизму стереотипных пространств

$$\varphi:\mathcal{E}^\star(G)\to\varprojlim_U\mathcal{E}^\star(G)/U.$$

где U пробегает систему дифференциальных окрестностей нуля в $\mathcal{E}^\star(G)$.

Вспомним диаграмму (6.5.1) и достроим ее до диаграммы

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}^\star(G) \arrow[rr, "\lambda^\star"] \arrow[d, dotted, "\operatorname{\mathsf{env}}_{\mathcal{E}}\mathcal{C}^\star(G)"] \arrow[dd, dotted, bend right=60, "\operatorname{\mathsf{env}}_{\mathcal{C}}\mathcal{C}^\star(G)"'] & & \mathcal{E}^\star(G) \arrow[d, dotted, "\operatorname{\mathsf{env}}_{\mathcal{E}}\mathcal{E}^\star(G)"'] \arrow[dd, dotted, bend left=60, "\operatorname{\mathsf{env}}_{\mathcal{C}}\mathcal{E}^\star(G)"] \\
\operatorname{\mathsf{Env}}_{\mathcal{E}}\mathcal{C}^\star(G) \arrow[rr, Rightarrow, "\operatorname{\mathsf{Env}}_{\mathcal{C}}(\lambda^\star)"] \arrow[d, dotted, "\zeta_{\mathcal{C}^\star(G)}"] & & \operatorname{\mathsf{Env}}_{\mathcal{E}}\mathcal{E}^\star(G) \arrow[d, dotted, "\zeta_{\mathcal{E}^\star(G)}"'] \\
\operatorname{\mathsf{Env}}_{\mathcal{C}}\mathcal{C}^\star(G) \arrow[rr, Rightarrow, "\operatorname{\mathsf{Env}}_{\mathcal{C}}(\lambda^\star)"] & & \operatorname{\mathsf{Env}}_{\mathcal{C}}\mathcal{E}^\star(G)
\end{tikzcd} \tag{6.6.4}$$

Здесь периметр — диаграмма (5.4.14), а треугольники по бокам — диаграммы (6.2.5). При этом верхняя ("сплошная") стрелка $\lambda^\star$ является плотной инъекцией, ниже две горизонтальные ("двойные") стрелки являются изоморфизмами силу (6.5.2) и (5.4.15), а остальные ("пунктирные") стрелки являются плотными морфизмами в силу определения оболочек.

Двойственная диаграмма будет выглядеть так:

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{C}(G) & \mathcal{E}(G) \arrow[l, hook', "\lambda"'] & \\
 & \Big(\operatorname{\mathsf{Env}}_{\mathcal{E}}\mathcal{C}^\star(G)\Big)^\star \arrow[u, dotted, hook] & \Big(\operatorname{\mathsf{Env}}_{\mathcal{E}}\mathcal{E}^\star(G)\Big)^\star \arrow[l, Leftarrow] \arrow[u, dotted, hook] \arrow[r, equal] & \mathcal{K}_\infty(G) \\
\mathcal{K}(G) \arrow[r, equal] & \Big(\operatorname{\mathsf{Env}}_{\mathcal{C}}\mathcal{C}^\star(G)\Big)^\star \arrow[u, dotted, hook] & \Big(\operatorname{\mathsf{Env}}_{\mathcal{C}}\mathcal{E}^\star(G)\Big)^\star \arrow[l, Leftarrow] \arrow[u, dotted, hook] &
\end{tikzcd} \tag{6.6.5}$$

и при этом верхняя стрелка λ является плотной инъекцией, две горизонтальные ("двойные") стрелки — изомофризмы, а остальные ("пунктирные") стрелки — инъекции. Мы можем заключить поэтому, что справедлива цепочка инъекций

$$\mathcal{K}(G) \subseteq \mathcal{K}_\infty(G) \subseteq \mathcal{E}(G) \subseteq \mathcal{C}(G).$$

Ее можно дополнить цепочкой (5.5.7), и мы получим следующее утверждение

Теорема 6.44. *Для всякой вещественной группы Ли справедлива цепочка теоретико-множественных включений*

$$\mathsf{Trig}(G) \subseteq k(G) \subseteq \mathcal{K}(G) \subseteq \mathcal{K}_\infty(G) \subseteq \mathcal{E}(G) \subseteq \mathcal{C}(G), \tag{6.6.6}$$

причем

(i) *всегда*

$$\overline{\mathsf{Trig}(G)} = \mathcal{K}(G), \qquad \overline{\mathcal{E}(G)} = \mathcal{C}(G)$$

(ii) *если $G = C \times K$, где C — абелева компактно порожденная группа Ли, а K — компактная группа Ли, то*

$$\overline{\mathcal{K}(G)} = \mathcal{K}_\infty(G), \tag{6.6.7}$$

(iii) *если G — SIN-группа, то*

$$\overline{\mathcal{K}(G)} = \mathcal{E}(G). \tag{6.6.8}$$

Нам понадобится

Лемма 6.45. *Если G — SIN-группа, являющаяся одновременно группой Ли, то касательное пространство к алгебре $\mathcal{K}(G)$ в любой точке $a \in G$ совпадает с касательным пространством к G в этой точке:*

$$T_a[\mathcal{K}(G)] = T_a(G). \tag{6.6.9}$$

Доказательство. 1. Пусть сначала G — абелева группа. Поскольку по теореме 5.40, $\mathcal{K}(G)$ инвариантна относительно сдвигов, a можно взять равным нулю: $a = 0 \in G$. Тогда

$$T_a[\mathcal{K}(G)] = T_0\Big[\big(\operatorname{\mathsf{Env}}_{\mathcal{C}}\mathcal{C}^\star(G)\big)^\star\Big] = (5.4.2) = T_0\Big[\big(\mathcal{C}(\widehat{G})\big)^\star\Big] =$$
$$= T_0\Big[\mathcal{C}^\star(\widehat{G})\Big] = \mathsf{Hom}(\widehat{G}, \mathbb{R}) = \mathsf{Hom}(\mathbb{R}, \widehat{\widehat{G}}) = \mathsf{Hom}(\mathbb{R}, G) = T_0(G) = T_a(G).$$

2. Пусть далее G — компактная группа. Тогда

$$T_a[\mathcal{K}(G)] = (5.5.9) = T_a[k(G)] = (3.5.22) = T_a(G).$$

3. Пусть $G = \mathbb{R}^n \times K$. Для любых $s \in \mathbb{R}^n$ и $t \in K$ мы по уже доказанному получим:

$$T_{s,t}[\mathcal{K}(\mathbb{R}^n \times K)] = (5.5.15) = T_{s,t}\Big[\mathcal{K}(\mathbb{R}^n) \circledast \mathcal{K}(K)\Big] = (3.3.24) =$$
$$= T_s[\mathcal{K}(\mathbb{R}^n)] \oplus T_t[\mathcal{K}(K)] = T_s(\mathbb{R}^n) \times T_t(K) = T_{s,t}(\mathbb{R}^n \times K).$$

4. Пусть, наконец, G — произвольная SIN-группа (и одновременно группа Ли). Представим G как дискретное расширение (3.5.2) некоторой группы $N=\mathbb{R}^n\times K$. Зафиксируем точку $a\in G$, выберем класс смежности L относительно подгруппы N, содержащий a, и рассмотрим алгебру $\mathcal{K}_L(G)$, определенную формулой (5.6.3). Тогда, если e — единица группы G, то

$$T_a[\mathcal{K}(G)]=T_a[\mathcal{K}_L(G)]=(\text{теорема } 5.40)=T_e[\mathcal{K}_N(G)]=(\text{лемма } 5.49)=\\ =T_e[\mathcal{K}(N)]=(\text{уже доказано})=T_e(N)=T_e(G)=T_a(G)$$

(равенства означают изоморфизмы при очевидных преобразованиях). □

Доказательство теоремы 6.44. 1. Первая формула в (i) уже доказана в теореме 5.37, а вторая — стандартное соотношение между пространствами гладких и непрерывных функций на гладком многообразии.

2. Если $G=C\times K$, то с одной стороны,

$$\mathsf{Env}_{\mathcal{C}}\,\mathcal{C}^\star(G)=\mathsf{Env}_{\mathcal{C}}\,\mathcal{C}^\star(C\times K)=(5.4.4)=\mathcal{C}\Big(\widehat{C},\prod_{\sigma\in\widehat{K}}\mathcal{B}(X_\sigma)\Big)$$

а с другой,

$$\mathsf{Env}_{\mathcal{E}}\,\mathcal{E}^\star(G)=\mathsf{Env}_{\mathcal{E}}\,\mathcal{E}^\star(C\times K)=(6.5.12)=\mathcal{E}\Big(\widehat{C},\prod_{\sigma\in\widehat{K}}\mathcal{B}(X_\sigma)\Big)$$

и поэтому второе пространство инъективно вкладывается в первое. Отсюда следует, что сопряженные пространства плотно отображаются одно на другое:

$$\overline{\mathcal{K}(G)}=\mathcal{K}_\infty(G).$$

3. Пусть G — SIN-группа. Представим ее как дискретное расширение (3.5.2) некоторой группы $N=\mathbb{R}^n\times K$. По лемме 5.49, ограничение пространства $\mathcal{K}(G)$ на N изоморфно $\mathcal{K}(N)$, а по лемме 5.46, спектр алгебры $\mathcal{K}(N)$ совпадает с N:

$$\mathsf{Spec}\,\mathcal{K}(N)=N.$$

Мы можем сделать вывод, что алгебра $\mathcal{K}(G)$ разделяет точки N. По теореме 5.40, сдвиги являются изоморфизмами $\mathcal{K}(G)$, поэтому $\mathcal{K}(G)$ разделяет точки каждого класса смежности $L\in G/N$. Кроме того, по лемме 5.47, характеристическая функция 1_L каждого такого класса L принадлежит $\mathcal{K}(G)$, и отсюда следует, что $\mathcal{K}(G)$ разделяет точки не только внутри каждого L, но и между любыми двумя классами $L,M\in G/N$. В итоге мы получаем, что $\mathcal{K}(G)$ разделяет точки на всей группе G.

С другой стороны, справедливо равенство (6.6.9). Вместе это означает, что $\mathcal{K}(G)$ удовлетворяет условиям теоремы Нахбина 4.26, поэтому алгебра $\mathcal{K}(G)$ плотна в $\mathcal{E}(G)$. □

6.6.1. Отображение $\mathcal{K}_\infty(G)\circledast\mathcal{K}_\infty(H)\to\mathcal{K}_\infty(G\times H)$. Пусть G и H — две группы Ли. По аналогии с отображением $\omega_{G,H}:\mathcal{K}(G)\circledast\mathcal{K}(H)\to\mathcal{K}(G\times H)$ (определенным выше на с.41) вводится отображение $\mathcal{K}_\infty(G)\circledast\mathcal{K}_\infty(H)\to\mathcal{K}_\infty(G\times H)$. И аналогично теореме 5.39 доказывается

Теорема 6.46. *Если C – абелева компактно порожденная локально компактная группа, а K – компактная группа, то отображение $\mathcal{K}_\infty(C)\circledast\mathcal{K}_\infty(K)\to\mathcal{K}_\infty(C\times K)$ является изоморфизмом:*

$$\mathcal{K}_\infty(C\times K)\cong\mathcal{K}_\infty(C)\circledast\mathcal{K}_\infty(K)\cong\mathcal{K}_\infty(C)\circledast\mathcal{K}(K)\tag{6.6.10}$$

Доказательство. Это следует из (6.5.12):

$$\mathcal{K}_\infty(C\times K)=\Big(\mathsf{Env}_{\mathcal{E}}\,\mathcal{E}^\star(C\times K)\Big)^\star\cong(6.5.12)\cong\Big(\mathsf{Env}_{\mathcal{E}}\,\mathcal{E}^\star(C)\odot\mathsf{Env}_{\mathcal{E}}\,\mathcal{E}^\star(K)\Big)^\star\cong\\ \cong\Big(\mathsf{Env}_{\mathcal{E}}\,\mathcal{E}^\star(C)\Big)^\star\circledast\Big(\mathsf{Env}_{\mathcal{E}}\,\mathcal{E}^\star(K)\Big)^\star\cong\mathcal{K}_\infty(C)\circledast\mathcal{K}_\infty(K)$$

□

6.7. Гладкая двойственность для групп $C \times K$

6.7.1. Гладкая оболочка алгебры $\mathcal{K}_\infty(C \times K)$.

Теорема 6.47. *Пусть C — абелева группа Ли, K — компактная группа Ли, и $G = C \times K$. Тогда*

(i) *спектр алгебры $\mathcal{K}_\infty(G)$ топологически изоморфен G:*

$$\mathsf{Spec}\,\mathcal{K}_\infty(G) = G \tag{6.7.1}$$

(ii) *в любой точке $a \in G$ касательные пространства у $\mathcal{K}_\infty(G)$ и G изоморфны:*

$$T_a[\mathcal{K}_\infty(G)] = T_a(G) \tag{6.7.2}$$

(iii) *гладкая оболочка алгебры $\mathcal{K}_\infty(G)$ совпадает с $\mathcal{E}(G)$:*

$$\mathsf{Env}_\mathcal{E}\,\mathcal{K}_\infty(G) = \mathcal{E}(G). \tag{6.7.3}$$

Доказательство. 1. Из цепочки (6.6.6) извлечем фрагмент

$$\mathcal{K}(G) \subseteq \mathcal{K}_\infty(G) \subseteq \mathcal{E}(G). \tag{6.7.4}$$

Из (6.6.7) и (6.6.8) следует, что это цепочка (непрерывных и) плотных инъекций. Поэтому переходя к спектрам мы получим цепочку (непрерывных) инъекций

$$G = \mathsf{Spec}\,\mathcal{K}(G) \leftarrow \mathsf{Spec}\,\mathcal{K}_\infty(G) \leftarrow \mathsf{Spec}\,\mathcal{E}(G) = G$$

(здесь первое равенство доказывается в теореме 5.42, а последнее очевидно). Понятно, что это должны быть гомеоморфизмы.

2. Из того, что инъекции в (6.7.4) плотны, следует также, что цепочка отображений касательных пространств состоит из инъекций

$$T_a(G) = (6.6.9) = T_a[\mathcal{K}(G)] \leftarrow T_a[\mathcal{K}_\infty(G)] \leftarrow T_a[\mathcal{E}(G)] = T_a(G),$$

Это доказывает (6.7.2).

3. Мы доказали (i) и (ii), и по теореме 6.27 из этого следует (6.7.3). □

6.7.2. Структура алгебр Хопфа на $\mathsf{Env}_\mathcal{E}\,\mathcal{E}^\star(G)$ и $\mathcal{K}_\infty(G)$ в случае $G = C \times K$.

Теорема 6.48. *Пусть C — абелева компактно порожденная группа Ли, K — компактная группа Ли, и $G = C \times K$. Тогда*

(i) *гладкая оболочка $\mathsf{Env}_\mathcal{E}\,\mathcal{E}^\star(G)$ групповой алгебры $\mathcal{E}^\star(G)$ является инволютивной алгеброй Хопфа в категории стереотипных пространств $(\mathtt{Ste}, \odot)$.*

(ii) *двойственная ей алгебра $\mathcal{K}_\infty(G)$ является инволютивной алгеброй Хопфа в категории стереотипных пространств $(\mathtt{Ste}, \circledast)$*

Доказательство. Здесь достаточно доказать (i). Прежде всего,

$$\mathsf{Env}_\mathcal{E}\,\mathcal{E}^\star(C) = (6.5.3) = \mathcal{E}(\widehat{C}),$$

и это будет алгебра Хопфа в категории $(\mathtt{Ste}, \odot)$, например, в силу [28, Example 10.25]. С другой стороны,

$$\mathsf{Env}_\mathcal{E}\,\mathcal{E}^\star(K) = (6.5.5) = \prod_{\pi \in \widehat{K}} \mathcal{B}(X_\pi) = (5.4.3) = \mathsf{Env}_\mathcal{C}\,\mathcal{C}^\star(K),$$

и это будет алгебра Хопфа в категории $(\mathtt{Ste}, \odot)$ по теореме 5.51. Отсюда пространство

$$\mathsf{Env}_\mathcal{E}\,\mathcal{E}^\star(C \times K) = (6.5.12) = \mathsf{Env}_\mathcal{E}\,\mathcal{E}^\star(C) \odot \mathsf{Env}_\mathcal{E}\,\mathcal{E}^\star(K). \tag{6.7.5}$$

должно быть алгеброй Хопфа в $(\mathtt{Ste}, \odot)$ как тензорное произведение алгебр Хопфа. □

6.7.3. Гладко рефлексивные алгебры Хопфа. Пусть H — инволютивная стереотипная алгебра Хопфа относительно тензорного произведения $\circledast$. Мы говорим, что H *гладко рефлексивна*, если она рефлексивна относительно гладкой оболочки $\mathsf{Env}_{\mathcal{E}}$ (в смысле определения на с.57).

Из теорем 6.47 и 6.48 следует

Теорема 6.49. *Пусть C — абелева компактно порожденная группа Ли, K — компактная группа Ли, и $G = C \times K$. Тогда алгебры $\mathcal{E}^\star(G)$ и $\mathcal{K}_\infty(G)$ гладко рефлексивны, а диаграмма рефлексивности для них принимает вид:*

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{E}^\star(G) \arrow[r, mapsto, "\mathsf{Env}_{\mathcal{E}}"] & \mathsf{Env}_{\mathcal{E}}\, \mathcal{E}^\star(G) \arrow[d, mapsto, "\star"] \\
\mathcal{E}(G) \arrow[u, mapsto, "\star"] & \mathcal{K}_\infty(G) \arrow[l, mapsto, "\mathsf{Env}_{\mathcal{E}}"']
\end{tikzcd} \tag{6.7.6}$$

Пример 6.8. Из теоремы 6.37 следует, что для компактно порожденных абелевых групп Ли C диаграмма рефлексивности принимает вид

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{E}^\star(C) \arrow[r, mapsto, "\mathcal{F}_C"] & \mathcal{E}(\widehat{C}) \arrow[d, mapsto, "\star"] \\
\mathcal{E}(C) \arrow[u, mapsto, "\star"] & \mathcal{E}^\star(\widehat{C}) \arrow[l, mapsto, "\mathcal{F}_{\widehat{C}}"']
\end{tikzcd} \tag{6.7.7}$$

(здесь $\widehat{C}$ — двойственная по Понтрягину группа к C, а $\mathcal{F}_C$ — преобразование Фурье, определенное формулой (5.4.1)).

Пример 6.9. Из теоремы 6.38 следует, что для компактных групп Ли K диаграмма рефлексивности становится такой:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{E}^\star(K) \arrow[r, mapsto, "\mathsf{Env}_{\mathcal{E}}"] & \prod_{\pi \in \widehat{K}} \mathcal{B}(X_\pi) \arrow[d, mapsto, "\star"] \\
\mathcal{E}(K) \arrow[u, mapsto, "\star"] & \mathsf{Trig}(K) \arrow[l, mapsto, "\mathsf{Env}_{\mathcal{E}}"']
\end{tikzcd}$$

6.7.4. Группы, различаемые C^*-алгебрами с присоединенными самосопряженными нильпотентами. По аналогии с определением на с.59, будем говорить, что локально компактная группа G *различается C^*-алгебрами с присоединенными самосопряженными нильпотентами*, если (непрерывные инволютивные) гомоморфизмы ее алгебры мер $\mathcal{C}^\star(G) \to B$ во всевозможные алгебры вида $B[m]$, где B — C^*-алгебра, а $m \in \mathbb{N}[n]$, различают элементы G (при вложении G в $\mathcal{C}^\star(G)$ дельта-функциями).

Теорема 6.50. *Если группа Ли G различается C^*-алгебрами с присоединенными самосопряженными нильпотентами, то G различается C^*-алгебрами (и поэтому является линейной группой в силу теоремы 5.55).*

Нам понадобится

Лемма 6.51. *Для всякой C^*-алгебры экспоненциальное отображение*

$$x \mapsto e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad : A \to A$$

инъективно на самосопряженных элементах:

$$x \neq y \in \mathsf{Re}\, A \quad \Longrightarrow \quad e^x \neq e^y.$$

Доказательство. Пусть $\mathsf{Re}_+ A$ обозначает множество положительных самосопряженных элементов в A. Для всякого $z \in \mathsf{Re}_+ A$ и любого $n \in \mathbb{N}$ однозначно определен корень $\sqrt[n]{z} \in \mathsf{Re}_+ A$ (это следует из спектральной теоремы [47]). С другой стороны, для всякого $x \in \mathsf{Re}\, A$ его экспонента e^x лежит в $\mathsf{Re}_+ A$, потому что

$$e^x = e^{\frac{x}{2}} \cdot e^{\frac{x}{2}} = e^{\frac{x}{2}} \cdot \left(e^{\frac{x}{2}}\right)^\bullet \geqslant 0.$$

Значит, однозначно определены корни $\sqrt[n]{e^x} = e^{\frac{x}{n}}$, и мы получаем

$$x = \lim_{n\to\infty} n\left(e^{\frac{x}{n}} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{e^x} - 1\right),$$

то есть x однозначно восстанавливается по e^x. $\square$

Доказательство теоремы 6.50. Предположим, что G не различается C^*-алгебрами, то есть у всех гомоморфизмов $\varphi : G \to B$ в различные C^* алгебры B имеется нетривиальное ядро N, $\{e\} \neq N \subseteq G$. Рассмотрим какой-нибудь гомоморфизм $D : G \to B[m]$. Для всякого мультииндекса $k \in \mathbb{N}[m]$ первого порядка, $|k| = 1$, и любых $x, y \in N$ мы получим:

$$D_k(x\cdot y) = C_k(x)\cdot \underbrace{D_0(y)}_{\underset{1}{\parallel}} + \underbrace{D_0(x)}_{\underset{1}{\parallel}} \cdot D_k(y) = D_k(x) + D_k(y).$$

То есть $D_k : N \to B$ — логарифм (отображение, переводящее умножение в N в сложение в B). Кроме того,

$$D_k(x)^\bullet = D_k(x^\bullet) = D_k(x^{-1}) = -D_k(x),$$

откуда следует, что всякий элемент $iD_k(x)$, $x \in N$, самосопряжен:

$$(iD_k(x))^\bullet = iD_k(x).$$

Рассмотрим отображение

$$\varphi(x) = e^{iD_k(x)} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{i^{|l|}}{l!}\cdot D_k(x)^l.$$

Оно является инволютивным гомоморфизмом, то есть представлением группы N в C^*-алгебре B. Можно рассмотреть его индуцированное представление $\psi : G \to \mathcal{B}(Z)$ в каком-то гильбертовом пространстве Z. Это будет гомоморфизм G в C^*-алгебру $\mathcal{B}(Z)$, поэтому на подгруппе N отображение ψ должно быть тривиально:

$$\psi(x) = 1, \qquad x \in N.$$

Из этого следует, что исходный гомоморфизм $\varphi : N \to B$ тоже должен быть тривиальным:

$$\varphi(x) = e^{iD_k(x)} = 1_B.$$

Поскольку всякий элемент $iD_k(x)$ самосопряжен, по лемме 6.51 это означает, что

$$D_k(x) = 0, \qquad x \in N.$$

Мы получили, что на подгруппе N все частные производные порядка 1 нулевые. Если теперь k — мультииндекс порядка 2, то для $x, y \in N$ мы получим

$$D_k(x\cdot y) = \sum_{0\leqslant l\leqslant k} \binom{k}{l}\cdot D_{k-l}(x)\cdot D_l(y) =$$

$$= \overbrace{D_k(x) \cdot \underbrace{D_0(y)}_{\substack{\parallel \\ 1}}}^{|l|=0} + \sum_{|l|=1} \binom{k}{l} \cdot D_{k-l}(x) \cdot \underbrace{D_l(y)}_{\substack{\parallel \\ 0}} + \overbrace{\underbrace{D_0(x)}_{\substack{\parallel \\ 1}} \cdot D_k(y)}^{|l|=2} = D_k(x) + D_k(y)$$

То есть D_k в этом случае тоже является логарифмом. По тем же самым причинам, что и раньше, $D_k = 0$ на N. И так далее. □

Errata

После отсылки статьи в редакцию журнала автор обнаружил, что гл. 5 содержит ошибку в доказательстве одного из утверждений, влекущую за собой пробелы в доказательствах нескольких последующих утверждений этого параграфа. Автор просит прощения у читателей за эту оплошность. Именно, в доказательстве свойства 1° (см. с. 34) соображение, что индуцированное представление сохраняет норму исходного, ошибочно. Автор благодарит Fan Zheng за следующий контрпример.

Пример. Пусть $G = S_3$ — группа перестановок из 3 элементов. Обозначим $x = (2\ 3\ 1)$ и $y = (2\ 1\ 3)$ и заметим, что

$$y \cdot x \cdot y^{-1} = x^{-1} = x^2.$$

Далее, пусть $N = A_3$ — подгруппа четных перестановок в $G = S_3$. (Группа $N = A_3$ состоит из трех перестановок, $(1\ 2\ 3)$, $(2\ 3\ 1)$ и $(3\ 1\ 2)$, и понятно, что $x \in A_3$, а $y \notin A_3$.) Пусть $\pi : N \to \mathbb{C}$ — действие группы N на $\mathbb{C}$, описываемое правилом

$$\pi(1)\lambda = \lambda, \quad \pi(x)\lambda = e^{\frac{2\pi i}{3}} \cdot \lambda, \quad \pi(x^2)\lambda = e^{-\frac{2\pi i}{3}} \cdot \lambda, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Рассмотрим элемент групповой алгебры $\mathcal{C}^\star(G)$

$$\alpha = \delta^1 + i \cdot \delta^x.$$

Под действием продолжения $\dot{\pi} : \mathcal{C}^\star(N) \to \mathbb{C}$ представления π на групповую алгебру он переходит в число

$$\dot{\pi}(\alpha) = 1 + i \cdot e^{\frac{2\pi i}{3}}$$

с нормой (модулем)

$$\|\dot{\pi}(\alpha)\| = \left|1 + i \cdot e^{\frac{2\pi i}{3}}\right| = \sqrt{2 - \sqrt{3}}.$$

Рассмотрим далее фактор-группу $F = G/N$; пусть $\varphi : G \to G/N = F$ — фактор-отображение, $\sigma : F \to G$ — его ретракция и $z = \varphi(y) \in F$. Рассмотрим индуцированное представление $\pi' : G \to \mathcal{B}(L_2(F))$ и его продолжение на групповую алгебру $\dot{\pi}' : \mathcal{C}^\star(G) \to \mathcal{B}(L_2(F))$. Пусть далее функция $\xi \in L_2(F)$ определена правилом

$$\xi(t) = \begin{cases} 1, & t = z \\ 0, & t = 1 \end{cases}.$$

Тогда

$$\pi'(x)(\xi)(z) = \pi(\sigma(z) \cdot x \cdot \sigma(z)^{-1})(\xi(z)) = \pi(y \cdot x \cdot y^{-1})(1) = \pi(x^2) \cdot 1 = e^{-\frac{2\pi i}{3}},$$

поэтому

$$\left\|\dot{\pi}'(\alpha)\right\| \geqslant \left\|\dot{\pi}'(\alpha)(\xi)\right\| = \left|\dot{\pi}'(\alpha)(\xi)(z)\right| = \left|1 + i \cdot e^{-\frac{2\pi i}{3}}\right| = \sqrt{2 + \sqrt{3}} > \sqrt{2 - \sqrt{3}} = \|\dot{\pi}(\alpha)\|\,.$$

Формально свойство 1° на с. 34 удается сохранить только для случая, когда подгруппа N выделяется прямым множителем в группе G:

Предложение. *Пусть $G = N \times D$, где N — локально компактная группа, а D — дискретная группа. Тогда всякая полунорма $p \in \mathcal{P}(N)$ продолжается до некоторой полунормы $q \in \mathcal{P}(G)$:*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C}^\star(N) \arrow[rr, "\theta"] \arrow[dr, "p"'] & & \mathcal{C}^\star(G) \arrow[dl, dashed, "q"] \\ & \mathbb{R}_+ & \end{tikzcd}$$

Доказательство. Пусть $p : \mathcal{C}^\star(N) \to \mathbb{R}_+$ — непрерывная C^*-полунорма. Она является нормой некоторого непрерывного по норме представления $\dot\pi : \mathcal{C}^\star(N) \to \mathcal{L}(X)$,

$$p(\alpha) = \|\dot\pi(\alpha)\| .$$

По теореме 3.38, индуцированное представление $\dot\pi' : \mathcal{C}^\star(G) \to \mathcal{L}(L_2(D, X))$ также непрерывно по норме. Значит, норма

$$q(\beta) = \left\|\dot\pi'(\beta)\right\|, \quad \beta \in \mathcal{C}^\star(G),$$

непрерывна на $\mathcal{C}^\star(G)$. Приглядимся к конструкции индуцированного представления (3.5.7). В нашем случае фактор-отображение $\varphi : G \to D$ будет просто проекцией на вторую компоненту:

$$\varphi(a, t) = t, \quad a \in N, \quad t \in D.$$

Обозначим символом $\rho(t)$ компоненту элемента $\sigma(t) \in G$ в группе N:

$$\sigma(t) = (\rho(t), t), \quad \rho(t) \in N, \quad t \in D.$$

Тогда для $a \in N$, $t \in D$ получим:

$$\pi'(a,1)(\xi)(t) = \pi(\sigma(t)\cdot(a,1)\cdot\sigma(t\cdot \underbrace{\varphi(a,1)}_{\substack{\| \\ 1}})^{-1})\Big(\xi(t\cdot \underbrace{\varphi(a,1)}_{\substack{\| \\ 1}})\Big) = \pi(\sigma(t)\cdot(a,1)\cdot\sigma(t)^{-1})(\xi(t)) =$$

$$= \pi\big((\rho(t),t)\cdot(a,1)\cdot(\rho(t),t)^{-1}\big)(\xi(t)) = \pi\big((\rho(t),t)\cdot(a,1)\cdot(\rho(t)^{-1},t^{-1})\big)(\xi(t)) =$$

$$= \pi\big((\rho(t)\cdot a\cdot\rho(t)^{-1}, t\cdot t^{-1})\big)(\xi(t)) = \pi\big(\underbrace{(\rho(t)\cdot a\cdot\rho(t)^{-1}, 1)}_{\substack{\Cap \\ N\times 1}}\big)(\xi(t)) = \pi(\rho(t)\cdot a\cdot\rho(t)^{-1})(\xi(t)) =$$

$$= \Big(\pi(\rho(t))\circ\pi(a)\circ\pi(\rho(t))^{-1}\Big)(\xi(t)).$$

Отсюда для $\alpha \in \mathcal{C}^\star(N)$ получаем:

$$\dot\pi'(\alpha)(\xi)(t) = \Big(\pi(\rho(t))\circ\dot\pi(\alpha)\circ\pi(\rho(t))^{-1}\Big)(\xi(t))$$

и, учитывая, что $\pi(\rho(t))$ — унитарный оператор,

$$\left\|\dot\pi'(\alpha)\right\|^2 = \sup_{\|\xi\|\leqslant 1}\left\|\dot\pi'(\alpha)(\xi)\right\|^2 = \sup_{\|\xi\|\leqslant 1}\sum_{t\in D}\left\|\dot\pi'(\alpha)(\xi)(t)\right\|^2 =$$

$$= \sup_{\|\xi\|\leqslant 1}\sum_{t\in D}\left\|\Big(\pi(\rho(t))\circ\dot\pi(\alpha)\circ\pi(\rho(t))^*\Big)(\xi(t))\right\|^2 = \sup_{\|\xi\|\leqslant 1}\sum_{t\in D}\|\dot\pi(\alpha)(\xi(t))\|^2 = \|\dot\pi(\alpha)\|^2 .$$

Предложение доказано. □

Непосредственное следствие из этих наблюдений состоит в том, что большую часть утверждений гл. 5, касающихся оболочек групповых алгебр SIN-групп, можно считать доказанной только для частного случая, когда группа G представима в виде декартова произведения евклидова пространства $\mathbb{R}^n$, компактной группы и дискретной группы. Точнее,

1) свойства 1°–4° на с. 34, лемма 5.29, предложение 5.30, предложение 5.31, предложение 5.32, теорема 5.37(ii), лемма 5.49(ii) доказаны для случая $G = \mathbb{R}^n \times K \times D$, где K — компактная, а D — дискретная группы;

2) теорема 5.42, теорема 5.50, теорема 5.51, лемма 5.53, теорема 5.54 доказаны для случая, когда группа Мура G представима в виде $G = \mathbb{R}^n \times K \times D$, где K — компактная группа, а D — дискретная группа Мура.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Акбаров С. С.* Голоморфные функции экспоненциального типа и двойственность для групп Штейна с алгебраической связной компонентой единицы// Фундам. прикл. мат. — 2008. — *14*, № 1. — С. 3–178; `http://arxiv.org/abs/0806.3205`.
2. *Алексеевский Д. В., Виноградов А. М., Лычагин В. В.* Основные идеи и понятия дифференциальной геометрии// Итоги науки и техн. Сер. Совр. пробл. мат. Фундам. напр. — М.: ВИНИТИ, 1988. — *28*. — С. 5–289.
3. *Аристов О. Ю.* О тензорных произведениях строгих C^*-алгебр// Фундам. прикл. мат. — 2000. — *6*, № 4. — С. 977–984.
4. *Артамонов В. А., Салий В. Н., Скорняков Л. А., Шеврин Л. Н., Шульгейфер Е. Г.* Общая алгебра. Т. 2. — М.: Наука, 1991.
5. *Барут А., Рончка Р.* Теория представлений групп и ее приложения. — М.: Мир, 1980.
6. *Бурбаки Н.* Топологические векторные пространства. — М.: ИЛ, 1959.
7. *Букур И., Деляну А.* Введение в теорию категорий и функторов. — М.: Мир, 1972.
8. *Винберг Э. Б., Онищик А. Л.* Семинар по группам Ли и алгебраическим группам. — М.: УРСС, 1995.
9. *Грауэрт Г., Реммерт Р.* Теория пространств Штейна. — М.: Наука, 1989.
10. *Гриффитс Ф., Харрис Дж.* Принципы алгебраической геометрии. Т. 1, 2. — М.: Мир, 1982.
11. *Диксмье Ж.* C^*-алгебры и их представления. — М.: Наука, 1974.
12. *Желобенко Д. П.* Основные структуры и методы теории представлений. — М.: МЦНМО, 2004.
13. *Келли Дж. Л.* Общая топология. — М.: Наука, 1981.
14. *Маклейн С.* Категории для работающего математика. — М.: Физматлит, 2004.
15. *Мерфи Дж.* C^*-Алгебры и теория операторов. — М.: Факториал, 1997.
16. *Петровский И. Г.* Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1964.
17. *Пирковский А. Ю.* Оболочки Аренса—Майкла, гомологические эпиморфизмы и относительно квазисвободные алгебры," *Tr. Mosk. Mat. Obshch.*, *69*. — С. 34–123.
18. *Пич А.* Ядерные локально выпуклые пространства. — М.: Мир, 1967.
19. *Постников М. М.* Группы и алгебры Ли. — М.: Наука, 1982.
20. *Хамфри Дж.* Линейные алгебраические группы, — М.: Наука, 1980.
21. *Хьюитт Э., Росс К.* Абстрактный гармонический анализ. Т. 1. — М.: Наука, 1975.
22. *Хьюитт Э., Росс К.* Абстрактный гармонический анализ. Т. 2. — М.: Наука, 1975.
23. *Цаленко М. Ш., Шульгейфер Е. Г.* Основы теории категорий, — М.: Наука, 1974.
24. *Шевалле К.* Теория групп Ли. I. — М.: ИЛ, 1948.
25. *Шефер Х.* Топологические векторные пространства. — М.: Мир, 1971.
26. *Энгелькинг Р.* Общая топология. — М.: Мир, 1986.
27. *Adámek J., Rosicky J.* Locally presentable and accessible categories. — Cambridge Univ. Press, 1994.
28. *Akbarov S. S.* Pontryagin duality in the theory of topological vector spaces and in topological algebra// J. Math. Sci. — 2003. — *113*, № 2. — С. 179–349.
29. *Akbarov S. S.* Envelopes and refinements in categories, with applications to functional analysis// Diss. math. — 2016. — *513*, № 1. — С. 1–188; `https://www.impan.pl/en/publishing-house/journals-and-series/dissertationes-mathematicae/all/513`; `http://arxiv.org/abs/1110.2013`.
30. *Aristov O. Yu.* Characterization of strict C^*-algebras// Stud. Math. — 1994. — *112*, № 1. — С. 51–58.
31. *Becker T.* A few remarks on the Dauns–Hofmann theorems for C^*-algabras// Arch. Math. — 1984. — *43*. — С. 265–269.
32. *Bochnak J., Coste M., Roy M.-F.* Real algebraic geometry. — Springer, 1998.
33. *Borceux F.* Handbook of categorical algebra. 1. Basic category theory. — Cambridge Univ. Press, 1994.
34. *Clifford A. H.* Representations induced in an invariant subgroup// Ann. Math. — 1937. — *38*, № 3. — С. 533-550.
35. *Connes A.* Noncommutative geometry. — Boston, MA: Academic Press, 1994.
36. *Cooper J. B.* Saks spaces and applications to functional analysis/ Math. Stud. — Elsevier, North Holland, 1987. — *139*.

37. *Dauns J., Hofmann K. H.* Representations of rings by continuous sections// Mem. Am. Math. Soc. — 1968. — *83.*
38. *Dupré M. J., Gillette R. M.* Banach bundles, Banach modules and automorphisms of C^*-algebras/ Res. Notes Math. — Boston, 1983. — *92.*
39. *Enock M., Schwartz J.-M.* Kac algebras and duality of locally compact groups. — Springer-Verlag, 1992.
40. *Eymard P.* L'algèbre de Fourier d'un groupe localement compact// Bull. Soc. Math. France. — 1964. — *92.* — С. 181–236.
41. *Fragoulopoulou M.* Topological algebras with involution. — North-Holland, 2005.
42. *Freudenthal H.* Einige Sätze über topologische Gruppen// Ann. Math. — 1936. — *37*, № 2. — С. 46-56.
43. *Grosser S., Moskowitz M.* On central topological groups// Trans. Am. Math. Soc. — 1967. — *127*, № 2. — С. 317–340.
44. *Grosser S., Moskowitz M.* Compactness conditions in topological groups// J. Reine Angew. Math. — 1971. — *246.* — С. 1–40.
45. *Hulanicki A.* Groups whose regular representation weakly contains all unitary representations// Stud. Math. — 1964. — *24.* — С. 37–59.
46. *Jarchow H.* Locally convex spaces. — Stuttgart: Teubner, 1981.
47. *Kadison R. V., Ringrose J. R.* Fundamentals of the theory of operator algebras. Vol. I. — Academic Press, 1986.
48. *Kadison R. V., Ringrose J. R.* Fundamentals of the theory of operator algebras. Vol. II. — Academic Press, 1986.
49. *Kowalski E.* Representation theory. — ETH Zürich, 2011.
50. *Kriegl A., Michor P. W.* The convenient setting of global analysis. — Am. Math. Soc., 1997.
51. *Kuznetsova J.* A duality for Moore groups// J. Oper. Theory. — 2013. — *69*, № 2. — С. 101–130; `http://arxiv.org/abs/0907.1409`.
52. *Llavona J. G.* Approximation of continuously differentiable functions. — North Holland, 1986.
53. *Luminet D., Valette A.* Faithful uniformly continuous representations of Lie groups// J. Lond. Math. Soc. — 1994. — *49*, № 2. — С. 100–108.
54. *Majid S.* Foundations of quantum group theory. — Cambridge Univ. Press, 1995.
55. *Michor P. W.* Topics in differential geometry/ Grad. Stud. Math. — Providence, New Jersey: Am. Math. Soc., 2008. — *93.*
56. *Nachbin L.* Sur les algèbres denses de fonctions différentiables sur une variété// C. R. Acad. Sci. Paris. — 1949. — *228.* — С. 1549–1551.
57. *Palmer T. W.* Banach algebras and the general theory of *-algebras. Vol. II. — Academic Press, 2001.
58. *Paterson A. L. T.* Amenability/ Math. Surv. Monogr. — 1988. — *29.*
59. *Renault J.* Fourier-algebra (2)// В кн.: Encyclopedia of Mathematics/ Ed. M. Hazewinkel. — Springer, 2001.
60. *Rossi H.* On envelops of holomorphy// Commun. Pure Appl. Math. — 1963. — *16.* — 9–17.
61. *Sebestyén Z.* Every C^*-seminorm is automatically submultiplicative// Period. Math. Hungar. — 1979. — *10.* — С. 1–8.
62. *Singer I. M.* Uniformly continuous representations of Lie groups// Ann. Math. (2). — 1952. — *56.* — С. 242–247.
63. *Sharpe R. W.* Differential geometry. Cartan's generalization of Klein's Erlangen program. — Springer, 1997.
64. *Shtern A. I.* Norm continuous representations of locally compact groups// Russ. J. Math. Phys. — 2008. — *15*, № 4. — С. 552–553.
65. *Taylor J. L.* Several complex variables with connections to algebraic geometry and Lie groups/ Grad. Stud. Math. — Providence, Rhode Island: Am. Math. Soc., 2002. — *46.*
66. *Taylor J. L.* Homology and cohomology for topological algebras// Adv. Math. — 1972. — *9.* — С. 137–182.

С. С. Акбаров
Всероссийский институт научной и технической информации (ВИНИТИ РАН)
E-mail: `sergei.akbarov@gmail.com`