РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

ВСЕРОССИЙСКИЙ ИНСТИТУТ НАУЧНОЙ И ТЕХНИЧЕСКОЙ ИНФОРМАЦИИ
(ВИНИТИ)

НАУЧНО • ТЕХНИЧЕСКАЯ ИНФОРМАЦИЯ

Серия 2. ИНФОРМАЦИОННЫЕ ПРОЦЕССЫ И СИСТЕМЫ

ЕЖЕМЕСЯЧНЫЙ НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ СБОРНИК

Издается с 1961 г. № 11 Москва 2014

ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ

УДК 004.89 : 510.64

В.К. Финн

Дистрибутивные решетки индуктивных ДСМ-процедур*

Рассматривается множество М-предикатов, используемых для формализации индуктивных методов Д.С. Милля – методов сходства, различия, сходства-различия и их усилений посредством условия запрета на контрпримеры. Рассматриваются два частичных порядка на этом множестве посредством отношений логической выводимости и включения множеств порожденных гипотез.

Устанавливается, что эти частично упорядоченные множества М-предикатов образуют дистрибутивные решетки. Произведения этих дистрибутивных решеток образуют множество возможных стратегий правдоподобных ДСМ-рассуждений (они представляют правила индуктивных выводов).

Ключевые слова: *ДСМ-рассуждения, методы сходства, различия и сходства-различия, стратегии ДСМ-рассуждения, частично упорядоченные множества, дистрибутивные решетки, произведения решеток*

§1. ДСМ-МЕТОД АВТОМАТИЧЕСКОГО ПОРОЖДЕНИЯ ГИПОТЕЗ И ДСМ-РАССУЖДЕНИЯ

ДСМ-метод автоматического порождения гипотез (ДСМ-метод АПГ) является методологией, концепцией представления знаний и множеством процедур для анализа данных, предсказаний и объяснения полученных результатов [1, 2]. ДСМ-метод АПГ – это средство конструирования серий компьютерных интеллектуальных систем для различных предметных областей (прежде всего в науках о жизни и социальном поведении).

* Работа выполнена при поддержке проекта РФФ № 14-07-00856а и Программы фундаментальных исследований Президиума РАН П15 «Информационные, управляющие и интеллектуальные технологии и системы» на 2014 год.

ДСМ-метод АПГ имеет шесть компонент: (1) условия применимости, (2) ДСМ- рассуждения, (3) представление знаний в виде открытых квазиаксиоматических теорий (КАТ), (4) метатеоретические средства исследования корректности ДСМ-рассуждений и процедурная семантика, (5) средства распознавания и порождения эмпирических закономерностей (ЭЗК) в базах фактов (БФ), (6) интеллектуальные системы типа ДСМ (ИС-ДСМ) [3].

Из строения и содержания ДСМ-метода АПГ следует, что он является научным аппаратом и конструктивным средством реализации и поддержки научных исследований с использованием компьютерных интеллектуальных систем, имитирующих и усиливающих познавательный процесс получения нового знания из баз фактов (БФ) [3].

Для создания как средств представления знаний (компонента ДСМ-метода АПГ – (3)), так и средств формализации рассуждений (компонента ДСМ-метода АПГ – (2)) необходимо использовать формализованный язык, обладающий дескриптивной и аргументативными функциями[1].

Ниже сформулируем ДСМ-язык, посредством которого выражается сходство фактов (дескриптивная функция), представляются отношения «причина-следствие» и степени правдоподобия гипотез о причинах, используемых в качестве аргументов для предсказания изучаемых эффектов (аргументативная функция языка), представленных в БФ.

X, Z, V (быть может с нижними индексами) – переменные для объектов и подобъектов;

C, C_1, C_2, ... – константы (множества элементов), являющиеся значениями переменных для объектов и подобъектов;

Y, U, W (быть может с нижними индексами) – переменные для эффектов (множеств свойств);

Q, Q_1, Q_2, ... – константы (множества свойств), являющиеся значениями переменных Y, U, W и т.д.;

n, m, l, k, r, s (быть может с нижними индексами) – переменные, значениями которых являются натуральные числа ($n\in N$);

– (дополнение, разность), $\cap$, $\cup$ - операции алгебры множеств;

= - предикат равенства для приведенных выше трех сортов переменных;

$\le$, $\ge$ - предикаты для числовых переменных;

$\subseteq$ - предикаты включения для множеств (объектов, подобъектов и свойств);

$X\Rightarrow_1 Y$ – предикат «объект X имеет множество свойств Y»;

$V\Rightarrow_2 W$ – предикат «V есть причина W»;

$\neg$, &, $\vee$, $\to$ - логические связки двузначной логики;

$J_{\bar\nu}$ - J – операторы Россера-Тюркетта (J.B. Rosser – A.R. Turquette) [4], где $\bar\nu=\langle\nu,n\rangle$ или $\bar\nu=(\tau,n)$, $\nu\in\{1, -1, 0\}$, $n\in N$, а 1, –1, 0, τ – типы истинностных значений : «фактическая истина», «фактическая ложь», «фактическое противоречие» и «неопределенность», соответственно; а $\langle\nu,n\rangle$ - истинностное значение, где n – степень правдоподобия гипотез, выражающая число применений правил правдоподобного вывода; (τ, n) – множество истинностных значений, определяемых рекуррентным образом: $(\tau, n) = \{\langle 1, n+1\rangle, \langle -1, n+1\rangle, \langle 0, n+1\rangle\} \cup (\tau, n + 1)$;

$\forall$, $\exists$ - кванторы всеобщности и существования (соответственно, для приведенных выше трех сортов переменных).

Термы и формулы ДСМ-языка определяются стандартным образом, но с существенным добавлением формул, термов и кванторов по кортежам «переменной длины» [5, 6].

Дело в том, что при поиске эмпирических зависимостей в БФ требуется установить сходство или различие фактов на конечном, но заранее **неопределенном** множестве примеров. Число таких примеров k, следовательно, является переменной величиной (k называется параметром эмпирической индукции). Это обстоятельство вызывает расширение языка логики предикатов 1-го порядка, посредством введения формул «переменной длины» и кванторов по кортежам [6]. ДСМ-язык с кванторами по кортежам является языком слабой логики предикатов 2-го порядка, в котором выразимо транзитивное замыкание[2] [7].

В [8] было установлено, что исходные предикаты ДСМ-метода АПГ для конечных моделей выразимы в логике предикатов 1-го порядка, но для моделей произвольной мощности они выразимы в языке слабой логики предикатов 2-го порядка (ДСМ-языке с кванторами по кортежам)[3].

Формулами «переменной длины» ДСМ-языка с кванторами по кортежам являются формулы вида:

$$\exists k\ \exists X_0\ \exists X_1 \ldots \exists X_{k-1} \exists Y_0 \ldots \exists Y_{k-1}\ (\ldots \underset{i=0}{\overset{k-1}{\&}} J_{\bar\nu}(X\Rightarrow_r Y_i) \& \ldots),$$

$$T_1\cap\ldots\cap T_k=T,\ \bigvee_{i=1}^{k}(X=X_i),\ \bigvee_{i=1}^{k}(Y=Y_i),$$

где r=1,2, T_i, T – термы[4].

Рассматриваемая версия ДСМ-метода АПГ основана на процедурной семантике PrSem с булевской структурой данных для БФ [9].

Пусть $U^{(1)}$ и $U^{(2)}$ – исходные множества объектов и свойств, соответственно, $B_i=\langle 2^{U^{(i)}}, \varnothing, U^{(i)}, -, \cap, \cup\rangle$ - булевы алгебры (i = 1, 2), образующие структуру данных ДСМ-метода АПГ. Предикаты $X\Rightarrow_1 Y$ и $X\Rightarrow_2 Y$ определяются посредством отображений: $\Rightarrow_i$: $2^{U^{(1)}}\times 2^{U^{(2)}}\to V_{in}$, где i=1,2, а $V_{in} = \{\langle\nu, n\rangle \mid (\nu\in\{1, -1, 0\})\&(n\in N)\}\cup\{(\tau, n) \mid n\in N\}$, где N – множество натуральных чисел, 1, –1, 0, τ – типы истинностных

[1] Это – требование к языку научных исследований К.Р. Поппера.

[2] Подробная характеризация языка с кванторами по кортежам содержится в статье Д.П. Скворцова [6]. Её второе издание имеется в книге «ДСМ-метод автоматического порождения гипотез. Логические и эпистемологические основания». Часть I, Глава 3: Д.П. Скворцов «О некоторых способах построения логических языков с кванторами по кортежам». – М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2009. – С. 214-232.

[3] Статья Д.В. Виноградова [8] представлена также в книге «Автоматическое порождение гипотез: Логические и эпистемологические основания». – М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2009, Часть I, Глава 6. Формализация правдоподобных рассуждений в логике предикатов. – С. 287-293.

[4] Использование многоточия (…) эвристически удобно для представления формул с кванторами по кортежам.

значений, соответственно; $\langle \nu, n\rangle$ – истинностные значения (n – их степень правдоподобия, выражающая число применений правил правдоподобного вывода[5].

V_{in} – множество **внутренних** (фактических) истинностных значений в смысле Д.А. Бочвара [10]. Эти истинностные значения являются оценками фактов, если $n = 0$, и являются оценками гипотез, если $n > 0$.

Посредством t и f обозначим **внешние** истинностные значения двузначной логики «истина» и «ложь», соответственно. $V_{ex}= \{t, f\}$ - множество внешних истинностных значений в смысле Д.А. Бочвара.

Формулы $T_1 \Rightarrow_1 T_2$, $T_1 \Rightarrow_2 T_2$ будем называть **внутренними,** где T_1 и T_2 – термы, так как их истинностные значения принадлежат множеству $V_{ex.}$

$$J_{\bar{\nu}}(C \Rightarrow_j Q) = \begin{cases} t, \text{ если } V[C \Rightarrow_j Q] = \bar{\nu} \\ f, \text{ если } V[C \Rightarrow_j Q] \neq \bar{\nu}. \end{cases}$$

где V – функция оценки, j = 1, 2, а C, Q – соответствующие константы.

Определим также оператор $J_{(\nu,n)}\varphi = \bigvee_{i=0}^{n} J_{\langle\nu,i\rangle}\varphi$, где $\nu \in \{1, -1, 0\}$. Будем использовать также оператор $J_{(\tau,n)}$, где $(\tau,n) = \{\langle 1, n+1\rangle, \langle -1, n+1\rangle, \langle 0, n+1\rangle\} \cup (\tau, n+1)$.

Формулы $J_{\bar{\nu}}(T_1 \Rightarrow_j T_2)$ и формулы, построенные посредством термов булевых алгебр B_i (i = 1, 2) и отношений $\leq$, $\geq$ будем называть внешними формулами. Общее определение внешних формул строится индуктивно с использованием логических связок $\neg$, &, $\vee$, $\rightarrow$ и кванторов $\forall$, $\exists$. Очевидно, что множество $V_{ex} = \{t, f\}$ есть область значений внешних формул[6].

Первая компонента ДСМ-метода АПГ характеризует условия его применимости. Они состоят в следующем:

(1) возможность формализовать сходство фактов,

(2) существование в базе фактов, как позитивных фактов ((+)-фактов), так и негативных фактов ((-)-фактов);

(3) существование в БФ в неявном виде как позитивных причин ((+)-причин), так и негативных причин ((-)-причин) изучаемых эффектов.

Для порождения гипотез о (±)-причинах изучаемых эффектов, представленных в БФ ИС–ДСМ – компьютерной интеллектуальной системы, реализующей ДСМ-метод АПГ, определяются М-предикаты, посредством которых формулируются правила правдоподобного вывода 1-го рода (п.п.в.-1). Эти М-предикаты и правила правдоподобного вывода 1-го рода являются средствами формализации индукции – аналогов индуктивных методов (канонов) Д.С. Милля [12], идеи которых ранее формулировал Д.Гершель [13][7].

Первое правило индуктивного вывода Д.С. Милля[8], названное им методом **сходства** формализуется в ДСМ-языке посредством предикатов позитивного и негативного сходства – $M^{+}_{a,n}(V,W)$ и $M^{-}_{a,n}(V,W)$, соответственно [5].

Определение $M^{+}_{a,n}(V,W)$ содержит пять компонент, которые соответствуют условиям применимости ДСМ-метода АПГ, точнее – начальной его составляющей, которой является индукция (применение индукции для анализа данных предшествует последующему предсказанию). Этими компонентами являются: (ЭУ) – экзистенциальные условия (существование (+)– и (-)-примеров)[9];

(СХ) – условие сходства (σ)-примеров ($\sigma \in \{+, -\}$);

(ЭЗ)$^{+}$ – эмпирическая зависимость, представляющая причинное вынуждение (forcing) соответствующего следствия (изучаемого эффекта);

(УИ) – условие исчерпываемости множества сходных примеров, которые являются «родителями» гипотез о (σ)-причинах (оно гарантирует **максимальную** группировку этих примеров)

k – нижняя граница числа рассматриваемых (сходных) примеров ($k \geq 2$)[10].

$$(\text{ЭУ})^{+}: \ (J_{(1,n)}(Z_1 \Rightarrow_1 U_1) \ \& \ \ldots \ \& \ (J_{(1,n)}(Z_k \Rightarrow_1 U_k),$$

$$(\text{СХ}): \ (Z_1 \cap \ldots \cap Z_k = V) \ \& \ (V \neq \varnothing),$$

$$(\text{ЭЗ})^{+} \text{ и (УИ)}: \forall X \ \forall Y \ ((J_{(1,n)}(X \Rightarrow_1 Y) \ \& \ (V \subset X)) \rightarrow ((W \subseteq Y) \ \& \ (W \neq \varnothing) \ \& \ (\bigvee_{i=1}^{k} (X = Z_i)))),$$

где (УИ) есть $(\bigvee_{i=1}^{k} (X = Z_i))$

Определим теперь вспомогательный предикат $\tilde{M}^{+}_{x,n}(V,W,k)$ позитивного сходства, зависящий от параметра k и параметра n, выражающего число применений правил правдоподобного вывода ДСМ-рассуждения и представляющего степень правдоподобия порождаемых гипотез с истинностными значениями $\bar{\nu} = \langle \nu, n\rangle$ и множеством возможных истинностных значений (τ, n), где $\langle \nu, n\rangle$, где $\nu \in \{1, -1, 0\}$.

$$\tilde{M}^{+}_{a,n}(V,W,k) \rightleftharpoons \exists Z_1 \ldots \exists Z_k \exists U_1 \ldots \exists U_k ((J_{(1,n)}(Z_1 \Rightarrow_1 U_1) \& \\ \& \ldots \& (J_{(1,n)}(Z_k \Rightarrow_1 U_k) \ \& \ (Z_1 \cap \ldots \cap Z_k = V) \ \& \ (V \neq \varnothing) \ \& \\ \& \forall i \forall j (((i \neq j) \ \& \ (1 \leq i, \ j \leq k)) \rightarrow (Z_i \neq Z_j)) \ \& \\ \& \forall X \forall Y ((J_{(1,n)}(X \Rightarrow_1 Y) \ \& (V \subset X)) \rightarrow ((W \subseteq Y) \ \& \ (W \neq \varnothing) \ \& \\ \& \ (\bigvee_{i=1}^{k} (X = Z_i)))) \ \& \ (k \geq 2)).$$

Позитивный предикат сходства $M^{+}_{a,n}(V,W)$ определим следующим образом: $M^{+}_{a,n}(V,W) \rightleftharpoons \exists k \ \tilde{M}^{+}_{a,n}(V,W,k)$, где a – имя предиката сходства (a – начальная буква слова «agreement», которое использовал Д.С. Милль, хотя в настоящей статье естественней было бы использовать термин similarity). Имя предиката позитивного сходства будем обозначать также посредством a^{+}, чтобы отличить его от имени a^{-} предиката отрицательного сходства $M^{-}_{a,n}(V,W)$, который определим ниже.

[5] Чем больше n, тем меньше степень правдоподобия гипотез с истинностным значением $\bar{\nu} = \langle \nu, n\rangle$, где $n > 0$.

[6] ДСМ-язык является J – определимым языком [11].

[7] Фрагменты истории развития идей об индукции обсуждаются в [14].

[8] Формулировка Первого правила Д.С. Милля приведена в Приложении к данной статье.

[9] Примерами являются факты и гипотезы (результаты предсказаний).

[10] Параметр k является эмпирически определяемым в ходе препроцессинга.

$\mathrm{M}^{-}_{a,n}(\mathrm{V,W}) \rightleftharpoons \exists k\ \ \tilde{\mathrm{M}}^{-}_{a,n}(\mathrm{V,W},k)$, где $\tilde{\mathrm{M}}^{-}_{a,n}(\mathrm{V,W},k)$ определяется следующим образом:

$$\tilde{\mathrm{M}}^{-}_{a,n}(\mathrm{V,W},k) \rightleftharpoons \exists \mathrm{Z}_1\ldots\exists \mathrm{Z}_k \exists \mathrm{U}_1\ldots\exists \mathrm{U}_k ((J_{(-1,n)}(\mathrm{Z}_1 \Rightarrow_1 \mathrm{U}_1)\ \&$$

$$\&\ldots\& J_{(-1,n)}(\mathrm{Z}_k \Rightarrow_1 \mathrm{U}_k) \& (\mathrm{Z}_1 \cap \ldots \cap \mathrm{Z}_k = \mathrm{V})\ \&(\mathrm{V} \neq \varnothing)\ \&$$

$$\& \forall i \forall j (((i \neq j)\ \&\ (1 \leq i, j \leq k)) \rightarrow (\mathrm{Z}_i \neq \mathrm{Z}_j))\&$$

$$\& \forall \mathrm{X} \forall \mathrm{Y}\ ((J_{(-1,n)}(\mathrm{X} \Rightarrow_1 \mathrm{Y}) \& (\mathrm{W} \subseteq \mathrm{Y})) \rightarrow ((\mathrm{V} \subset \mathrm{X})\ \&$$

$$\&\ (\bigvee_{i=1}^{k}(\mathrm{X} = \mathrm{Z}_i))))\&\ (k \geq 2)).$$

(ЭЗ)$^-$ отлична от (ЭЗ)$^+$ и выражает условия **отсутствия эффекта W** такого, что $\mathrm{W} \subseteq \mathrm{Y}$. Это условие представимо посредством V такого, что $\mathrm{V} \subset \mathrm{X}$, если $J_{(-1,n)}(\mathrm{X} \Rightarrow_1 \mathrm{Y})$.

Таким образом, (ЭЗ)$^-$ представимо подформулой $\forall \mathrm{X} \forall \mathrm{Y}\ ((J_{(-1,n)}(\mathrm{X} \Rightarrow_1 \mathrm{Y}) \& (\mathrm{W} \subseteq \mathrm{Y})) \rightarrow ((\mathrm{V} \subset \mathrm{X})\ \&(\bigvee_{i=1}^{k}(\mathrm{X} = \mathrm{Z}_i))))$.

(ЭЗ)$^+$ и (ЭЗ)$^-$ выражают эмпирические зависимости причинно-следственного типа. Таким образом, в предикатах $\mathrm{M}^{+}_{a,n}(\mathrm{V,W})$ и $\mathrm{M}^{-}_{a,n}(\mathrm{V,W})$ отображены условия применимости ДСМ-метода АПГ – представление сходства фактов (примеров), существование в БФ (±) – фактов и существование в БФ эмпирических зависимостей причинно-следственного типа.

Предикаты $\mathrm{M}^{\sigma}_{a,n}(\mathrm{V,W})$ используются в правилах индуктивного вывода в качестве генераторов отношения «причина-следствие», представимого посредством предиката $\mathrm{V} \Rightarrow_2 \mathrm{W}$ («V есть причина W»).

Определяемые ниже правила индуктивного (правдоподобного) вывода (правила правдоподобного вывода первого рода – п.п.в.-1) являются формализацией и уточнением Первого правила индуктивного вывода Д.С. Милля [12] – метода сходства. Формализация метода сходства учитывает наличие (+)– и (–)-примеров и возможность существования конфликтов, в силу чего метод сходства представим четырьмя видами п.п.в.-1 (I)$^{\sigma}$, $\sigma \in \{+, -, 0, \tau\}$:

$$(\mathrm{I})^{+}_{a}\ \ \frac{J_{(\tau,n)}(\mathrm{V} \Rightarrow_2 \mathrm{W}), \mathrm{M}^{+}_{a,n}(\mathrm{V,W})\ \&\ \neg \mathrm{M}^{-}_{a,n}(\mathrm{V,W})}{J_{\langle 1,n+1\rangle}(\mathrm{V} \Rightarrow_2 \mathrm{W})},$$

$$(\mathrm{I})^{-}_{a}\ \ \frac{J_{(\tau,n)}(\mathrm{V} \Rightarrow_2 \mathrm{W}), \neg \mathrm{M}^{+}_{a,n}(\mathrm{V,W})\ \&\ \mathrm{M}^{-}_{a,n}(\mathrm{V,W})}{J_{\langle -1,n+1\rangle}(\mathrm{V} \Rightarrow_2 \mathrm{W})},$$

$$(\mathrm{I})^{0}_{a}\ \ \frac{J_{(\tau,n)}(\mathrm{V} \Rightarrow_2 \mathrm{W}), \mathrm{M}^{+}_{a,n}(\mathrm{V,W})\ \&\ \mathrm{M}^{-}_{a,n}(\mathrm{V,W})}{J_{\langle 0,n+1\rangle}(\mathrm{V} \Rightarrow_2 \mathrm{W})},$$

$$(\mathrm{I})^{\tau}_{a}\ \ \frac{J_{(\tau,n)}(\mathrm{V} \Rightarrow_2 \mathrm{W}), \neg \mathrm{M}^{+}_{a,n}(\mathrm{V,W})\ \&\ \neg \mathrm{M}^{-}_{a,n}(\mathrm{V,W})}{J_{(\tau,n+1)}(\mathrm{V} \Rightarrow_2 \mathrm{W})}.$$

Сформулированные п.п.в.-1 являются правилами правдоподобного **амплиативного** вывода [15]. Вывод называют амплиативным, если заключение явно не содержится в посылках, а извлекается из них посредством некоторых процедур, порождающих новое знание из посылок.

Выполнимость условий сходства (СХ) и эмпирической зависимости (ЭЗ) в предикатах $\mathrm{M}^{\sigma}_{a,n}(\mathrm{V,W})$ $(\sigma \in \{+, -\})$, извлекаемых из экзестенциального условия (ЭУ), делают индуктивный вывод (I)$^{\sigma}$, $\sigma \in \{+, -, 0\}$ **аплиативным**.

Заметим, что $\mathrm{M}^{\sigma}_{a,n}(\mathrm{V,W})$ являются **минимальными** предикатами, реализующими амплиативные выводы. Эти предикаты допускают усиления, которые порождают гипотезы о (±)-причинах более информативные в силу усложнения средств извлечения «причина – следствие», представимые предикатом $\mathrm{V} \Rightarrow_2 \mathrm{W}$.

Сформулируем усиление методов сходства посредством условий запрета на контрпримеры

$(\mathrm{b})^{+}\ \forall \mathrm{X} \forall \mathrm{Y}\ (((\mathrm{V} \subset \mathrm{X})\ \&$
$\&\ (\mathrm{W} \subseteq \mathrm{Y})) \rightarrow (J_{(1,n)}(\mathrm{X} \Rightarrow_1 \mathrm{Y}) \vee J_{(\tau,n)}(\mathrm{X} \Rightarrow_1 \mathrm{Y}))),$
$(\mathrm{b})^{-}\ \forall \mathrm{X} \forall \mathrm{Y}\ (((\mathrm{V} \subset \mathrm{X})\ \&$
$\&\ (\mathrm{W} \subseteq \mathrm{Y})) \rightarrow (J_{(-1,n)}(\mathrm{X} \Rightarrow_1 \mathrm{Y}) \vee J_{(\tau,n)}(\mathrm{X} \Rightarrow_1 \mathrm{Y}))).$

Условие (b)$^+$ означает, что порождаемая посредством п.п.в.-1 (I)$^+$ гипотеза $J_{\langle 1,\ n+1\rangle}(\mathrm{V} \Rightarrow_2 \mathrm{W})$ такова, что неверно, что $J_{(-1,n)}(\mathrm{X} \Rightarrow_1 \mathrm{Y})\ \&\ (\mathrm{V} \subset \mathrm{X})\ \&\ (\mathrm{W} \subseteq \mathrm{Y})$. Аналогичное условие имеет место для (b)$^-$.

Предикаты, усиленные посредством (b)$^+$ или (b)$^-$, определяются следующим образом:

$\mathrm{M}^{+}_{ab,n}(\mathrm{V,W}) \rightleftharpoons \mathrm{M}^{+}_{a,n}(\mathrm{V,W})\ \&\ (\mathrm{b})^{+},$

$\mathrm{M}^{-}_{ab,n}(\mathrm{V,W}) \rightleftharpoons \mathrm{M}^{-}_{a,n}(\mathrm{V,W})\ \&\ (\mathrm{b})^{-},$

Второе правило индуктивного вывода, выражающее метод различия, Д.С. Милль формулировал как правило, независимое от метода сходства [12].[11)]

Формализация же метода различия в ДСМ-методе состоит в усилении метода сходства посредством дополнительного условия, которое характеризует различие между (+)-фактами и (-)-фактами. Это дополнительное условие d_0 формулируется следующим образом:

$$(\mathrm{d}_0)^{+} \rightleftharpoons \forall \mathrm{X} \forall \mathrm{Y} \forall \mathrm{Z} \forall \mathrm{U}\ ((J_{(1,n)}(\mathrm{X} \Rightarrow_1 \mathrm{Y})\ \&\ (\mathrm{W} \subseteq \mathrm{Y})\ \&$$
$$\&\ (\mathrm{V} \subset \mathrm{X})\ \&\ ((\mathrm{X\text{-}V}) \subset \mathrm{Z})\ \&\ ((\mathrm{X\text{-}V}) \neq \varnothing)\ \&\ \neg(\mathrm{V} \subset \mathrm{Z})) \rightarrow$$
$$\rightarrow (\neg J_{(1,n)}(\mathrm{Z} \Rightarrow_1 \mathrm{U}) \vee \neg\ (\mathrm{W} \subseteq \mathrm{U}))),$$

$$(\mathrm{d}_0)^{-} \rightleftharpoons \forall \mathrm{X} \forall \mathrm{Y} \forall \mathrm{Z} \forall \mathrm{U}\ ((J_{(-1,n)}(\mathrm{X} \Rightarrow_1 \mathrm{Y})\ \&\ (\mathrm{W} \subseteq \mathrm{Y})\ \&$$
$$\&\ (\mathrm{V} \subset \mathrm{X})\ \&\ ((\mathrm{X\text{-}V}) \subset \mathrm{Z})\ \&\ ((\mathrm{X\text{-}V}) \neq \varnothing)\ \&\ \neg(\mathrm{V} \subset \mathrm{Z})) \rightarrow$$
$$\rightarrow (\neg J_{(-1,n)}(\mathrm{Z} \Rightarrow_1 \mathrm{U}) \vee \neg\ (\mathrm{W} \subseteq \mathrm{U}))).$$

Метод различия в ДСМ-рассуждениях определяется следующим образом:

$\mathrm{M}^{+}_{ad_0,n}(\mathrm{V,W}) \rightleftharpoons \mathrm{M}^{+}_{a,n}(\mathrm{V,W})\ \&\ (\mathrm{d}_0)^{+},$

$\mathrm{M}^{-}_{ad_0,n}(\mathrm{V,W}) \rightleftharpoons \mathrm{M}^{-}_{a,n}(\mathrm{V,W})\ \&\ (\mathrm{d}_0)^{-}.$

Посредством этих предикатов определяются правила правдоподобного вывода $(\mathrm{I})^{\sigma}_{ad_0}$, где $\sigma \in \{+, -, 0, \tau\}$ с посылками $\mathrm{M}^{+}_{ad_0,n}(\mathrm{V,W})\ \&\ \neg \mathrm{M}^{-}_{ad_0,n}(\mathrm{V,W}), \neg \mathrm{M}^{+}_{ad_0,n}(\mathrm{V,W})\ \&$ $\&\ \mathrm{M}^{-}_{ad_0,n}(\mathrm{V,W}), \mathrm{M}^{+}_{ad_0,n}(\mathrm{V,W})\ \&\ \mathrm{M}^{-}_{ad_0,n}(\mathrm{V,W}), \neg \mathrm{M}^{+}_{ad_0,n}(\mathrm{V,W})\ \&$ $\&\ \neg \mathrm{M}^{-}_{ad_0,n}(\mathrm{V,W})$, которым отвечают типы истинностных значений гипотез 1, - 1, 0, τ – соответственно. Таким образом,

$$(\mathrm{I})^{+}_{ad_0}\ \ \frac{J_{(\tau,n)}(\mathrm{V} \Rightarrow_2 \mathrm{W}), \mathrm{M}^{+}_{ad_0,n}(\mathrm{V,W})\ \&\ \neg \mathrm{M}^{-}_{ad_0,n}(\mathrm{V,W})}{J_{\langle 1,n+1\rangle}(\mathrm{V} \Rightarrow_2 \mathrm{W})},$$

Аналогично определяются $(\mathrm{I})^{\sigma}_{ad_0}$, где $\sigma \in \{-, 0, \tau\}$.

Третье правило индуктивного вывода Д.С. Милля представляет метод соединенного сходства – различия [12][12)].

---

[11] Формулировка Второго правила Д.С.Милля приведена в Приложении к данной статье

В [5] была предложена формализация метода сходства – различия посредством добавления к методу сходства условия d_2^+, определяемого ниже.

В [5] дополнительные условия, добавляемые к предикату сходства $M_{a,n}^+(V,W)$ (и $M_{a,n}^-(V,W)$), были названы неэлементарными или Миллевскими, если они содержат $(ЭУ)_2$, $(СХ)_2$, $(ЭЗ)_2$, $(УИ)_2$ и условие для нижней границы рассматриваемых примеров, аналогичные компонентам предиката сходства $M_{a,n}^+(V,W)$. Эти компоненты являются необходимыми инвариантами милевской индукции, определяемой в [5] (раздел III).

$(ЭУ)_2$ – экзистенциальное условие с неединственной причиной V для эффекта W определяется посредством трех подформул: $(\mathop{\&}\limits_{i=1}^{l}(\varphi(Z_i,U_i,X_i,Y_i,V,W)$, $(\mathop{\&}\limits_{j=1}^{s}\psi(V_j,W))$, $(\mathop{\&}\limits_{j=1}^{s}\chi(V_j,V,X_1,\ldots,X_l))$

$$\mathop{\&}\limits_{i=1}^{l}\varphi(Z_i,U_i,X_i,Y_i,V,W) \rightleftharpoons ((J_{(1,n)}(Z_1\Rightarrow_1 U_1)\ \&\ (V\subset Z_1)\ \&$$

$$\&\ (W\subseteq U_1)\ \&\ \ldots\ \&\ (J_{(1,n)}(Z_l\Rightarrow_1 U_l)\ \&\ (V\subset Z_l)\ \&\ (W\subseteq U_l))\ \&$$

$$\&\ (\neg((Z_1\text{-}V)=\varnothing)\ \&\ \ldots\ \&\ \neg((Z_l\text{-}V)=\varnothing)\ \&\ (((Z_1\text{-}V)\subset X_1)\ \&$$

$$\&\ldots\ \&\ ((Z_l\text{-}V)\subset X_l))\ \&\ \ldots\ \&\ (\neg(V\subset X_1)\ \&\ \ldots\ \&$$

$$\&\ \neg(V\subset X_l))\ \&\ (\mathop{\&}\limits_{i=1}^{l}(\neg J_{(1,n)}(X_i\Rightarrow_1 Y_i)\vee\neg(W\subseteq Y_i)))\ \&$$

$$\&\ \forall Z\forall U\ ((J_{(1,n)}(Z\Rightarrow_1 U)\ \&\ (V\subset Z)\ \&\ (W\subseteq U)\ \&$$

$$\&\neg((Z\text{-}V)=\varnothing))\to(\bigvee_{i=1}^{l}((Z=Z_i)\&(U=U_i)))).$$

Эта подформула представляет множество сходных примеров $J_{(1,n)}(Z_i\Rightarrow_1 U_i)$, $i=1,\ldots,l$ таких, что их сходство установлено посредством $M_{a,n}^+(V,W)$. Различие же представлено множеством примеров $\neg J_{(1,n)}(X_i\Rightarrow_1 Y_i)$, $i=1,\ldots,l$ Множества этих примеров, представляющих сходство и различие, максимально.

$$(\mathop{\&}\limits_{j=1}^{s}\psi(V_j,W)) \rightleftharpoons ((\mathop{\&}\limits_{j=1}^{s}M_{a,n}^+(V_j,W)\ \&\ \neg M_{a,n}^-(V_j,W)\ \&$$

$$\&\ J_{(\tau,n)}(V_j\Rightarrow_2 W))\ \&\ \forall Z((M_{a,n}^+(Z,W)\ \&\ \neg M_{a,n}^-(Z,W)\ \&$$

$$\&\ J_{(\tau,n)}(Z\Rightarrow_2 W))\to(\bigvee_{j=1}^{s}(Z=V_j))))$$

Эта подформула выражает тот факт, что V_j – причины W ($j=1,\ldots,s$), входящие в гипотезы $J_{\langle 1,n+1\rangle}(V_j\Rightarrow_2 W)$, порождаемые п.п.в.-1. Кроме того, эта подформула выражает идею Д.С. Милля [12] о том, что при применении метода различия следует учесть влияние других причин V_j, отличных от искомой причины V (для V_j имеет место условие их исчерпываемости – их множество максимально).

$$\mathop{\&}\limits_{j=1}^{s}\chi(V_j,V,X_1,\ldots,X_l) \rightleftharpoons (\mathop{\&}\limits_{j=1}^{s}((\neg(V_j\subset X_1)\ \&\ \ldots\ \&$$

$$\&\ \neg(V_j\subset X_l))\ \&\ \neg(V=V_j))).$$

Эта подформула в соответствии с идеей Д.С. Милля предохраняет эффект W от влияния причин $V_1,\ \ldots,\ V_s$, отличных от V.

[12] Формулировка Третьего правила Д.С.Милля приведена в Приложении к данной статье

Таким образом,

$$(ЭУ)_2^+ \rightleftharpoons (\mathop{\&}\limits_{i=1}^{l}(\varphi(Z_i,U_i,X_i,Y_i,V,W))\ \&\ (\mathop{\&}\limits_{j=1}^{s}\psi(V_j,W))\ \&$$

$$\&\ (\mathop{\&}\limits_{j=1}^{s}\chi(V_j,V,X_1,\ldots,X_l)),$$

$$(ЭЗ)_2^+ \rightleftharpoons \forall X\forall Y\forall X_0\forall Y_0\ ((J_{(1,n)}(X\Rightarrow_1 Y)\ \&\ (V\subset X)\ \&$$

$$\&\ (W\subseteq Y)\ \&\ ((X\text{-}V)\subset X_0)\ \&\ \neg((X\text{-}V)=\varnothing)\ \&\ \urcorner(V\subset X_0))\to$$

$$\to(\neg J_{(1,n)}(X_0\Rightarrow_1 Y_0)\ \vee\neg(W\subseteq Y_0))\ \&\ (\bigvee_{i=1}^{l}((X_0=X_i)\ \&$$

$$\&\ (Y_0=Y_i)))).$$

$(ЭЗ)_2$ выражает следующее условие: **отсутствие** установленной причины V влечет **отсутствие** соответствующего ей эффекта (следствия) W при условии отсутствия других причин V_j, отличных от причины V.

Таким образом, $(ЭЗ)_2$ является эмпирической зависимостью причинно-следственного типа, а метод сходства-различия определяется посредством предиката $M_{ad_2,n}^+(V,W)$.

$$M_{ad_2,n}^+(V,W) \rightleftharpoons$$

$$\rightleftharpoons\exists l\exists s\exists Z_1\ldots\exists Z_l\exists U_1\ldots\exists U_l\exists X_1\ldots\exists X_l\exists Y_1\ldots\exists Y_l\exists V_1\ldots\exists V_s((ЭУ)_2\ \&$$

$$\&\ (ЭЗ)_2\ \&\ (l\geq 2)\ \&\ (s\geq 2)\ \&\ M_{a,n}^+(V,W).$$

$M_{ad_2,n}^-(V,W)$ для (–)-фактов и гипотез о (–)-причинах определим, сделав замены в $\mathop{\&}\limits_{i=1}^{l}\varphi(Z_i,U_i,X_i,Y_i,V,W)$.

Эти замены в $(ЭУ)_2^+$ преобразуют его в экзистенциальное условие $(ЭУ)_2^-$. Эмпирическую зависимость $(ЭЗ)_2^-$ получим из $(ЭЗ)_2^+$ заменой вхождений $J_{(1,n)}(X\Rightarrow_1 Y)$ на $J_{(-1,n)}(X\Rightarrow_1 Y)$. Для предикатов $M_{ad_2,n}^+(V,W)$ и $M_{ad_2,n}^-(V,W)$ определим соответствующие п.п.в.-1 $(I)^\sigma$, $\sigma\in\{+,-,0,\tau\}$.[13]

Таким образом, мы определили исходные предикаты ДСМ-метода АПГ $M_{a,n}^\sigma(V,W)$, $M_{ab,n}^\sigma(V,W)$, $M_{ad_0,n}^\sigma(V,W)$, $M_{ad_2,n}^\sigma(V,W)$, где $\sigma\in\{+,-\}$ используемые при формализации, уточнении и расширении индуктивных методов Д.С. Милля посредством соответствующих правил правдоподобного вывода первого рода (п.п.в.-1). Эти предикаты будем называть М-предикатами.

§2. НЕКОТОРЫЕ ЗАВИСИМОСТИ МЕЖДУ М-ПРЕДИКАТАМИ

В этом разделе установим логическую зависимость и независимость рассмотренных выше исходных М-предикатов. Покажем, что метод различия есть следствие метода сходства-различия, а метод сходства с запретом на контрпримеры и методы различия и сходства-различия, соответственно, логически независимы. Эти утверждения являются результатом четвертой компоненты ДСМ-метода АПГ

[13] А.Ю. Волкова в [16] и [17] создала Решатель задач, реализующий ДСМ-рассуждения с предикатами $M_{z,n}^+(V,W)$, где $z\in\{a^\sigma, (ab)^\sigma, (ad_0)^\sigma, (ad_2)^\sigma\}$, $\sigma\in\{+,-\}$.

(метатеоретические исследования ДСМ-рассждений и процедурная семантика [9]).

Процедурная семантика ДСМ-метода АПГ ([9], Часть II, §3) PrSem = $\langle B_1, B_2, \Rightarrow_1, \{M^{+}_{x,n}\}_{x\in\Gamma^{+}}, \{M^{-}_{y,n}\}_{y\in\Gamma^{-}}, \Rightarrow_2, \Pi^{+}_{n}, \Pi^{-}_{n}, \Pi^{0}_{n}\rangle$, где $\Gamma^{\sigma}=\{a^{\sigma}, a^{\sigma}b^{\sigma}, a^{\sigma}d^{\sigma}_{0}, a^{\sigma}d^{\sigma}_{0}b^{\sigma}, a^{\sigma}d^{\sigma}_{2}, a^{\sigma}d^{\sigma}_{2}b^{\sigma}\}$, $\sigma\in\{+, -\}$, $B_i=\langle 2^{U^{(i)}}, \varnothing, U^{(i)}, -, \cap, \cup\rangle$ - булевы алгебры (i=1,2), а Π^{σ}_{n} - предикаты, используемые при формализации правил правдоподобного вывода второго рода (выводы по аналогии – п.п.в.-2) [5, 14].

Элементы множеств Γ^{+} и Γ^{-} являются сокращенным представлением соответствующих М-предикатов $M^{+}_{x,n}(V,W)$ и $M^{-}_{y,n}(V,W)$, где $x\in\Gamma^{+}$, а $y\in\Gamma^{-}$. Например, $a^{+}d^{+}_{0}b^{+}$ есть представление предиката $M^{+}_{ad_0b,n}(V,W)$. Для представлений М-предикатов используем следующие определения, где $x_i\in\Gamma^{+}$, $y_i\in\Gamma^{-}$ (i = 1,2): $x_1 x_2 \rightleftharpoons x_1 \,\&\, x_2$, $y_1 y_2 \rightleftharpoons y_1 \,\&\, y_2$.

Например, $M^{+}_{ad_0b,n}(V,W) \rightleftharpoons M^{+}_{a}(V,W) \,\&\, d^{+}_{0} \,\&\, b^{+}$, а $a^{+}d^{+}_{0}b^{+} \rightleftharpoons (a^{+} \,\&\, d^{+}_{0}) \,\&\, b^{+}$.

Имеет место следующее

Утверждение 1-2.

$\forall V\forall W(M^{+}_{ad_2,n}(V,W) \to M^{+}_{ad_0,n}(V,W))$

Так как $M^{+}_{ad_2,n}(V,W)$ и $M^{+}_{ad_0,n}(V,W)$ определяются посредством предиката $X\Rightarrow_1 Y$, а он определен на конечных множествах $2^{U^{(1)}}$ и $2^{U^{(2)}}$ ($U^{(1)}$, $U^{(2)}$ - конечные множества), а $\Rightarrow_1$: $2^{U^{(1)}} \times 2^{U^{(2)}} \to V_{in}$, то **Утверждение 1-2** эквивалентно конъюнкции импликаций $(M^{+}_{ad_2,n}(C_1,Q_1) \to$ $\to M^{+}_{ad_0,n}(C_1,Q_1)) \,\&\ldots\&\, (M^{+}_{ad_2,n}(C_{k_0}, Q_{k_0}) \to M^{+}_{ad_0,n}(C_{k_0}, Q_{k_0}))$, где C_i, Q_i, k_0 – константы (i = 1, …, k_0). Поэтому для доказательства **Утверждения 1-2** достаточно рассмотреть соответствующие импликации двузначной логики высказываний. Для этого $(ЭУ)_2$, $(ЭЗ)_2$, $(l \geq 2)$ & & $(s \geq 2)$ из определения $M^{+}_{ad_2,n}(V,W)$ обозначим посредством r, $(p \to (q \,\&\, j))$ и m, соответственно, где j обозначает условие исчерпываемости исходных примеров $(\bigvee_{i=1}^{l}((X_0=X_i) \,\&\, (Y_0=Y_i)))$. Условие же d^{+}_{0} из определения $M^{+}_{ad_0,n}(V,W)$ обозначим посредством $(p \to q)$.

Тогда для доказательства **Утверждения 1-2** необходимо доказать формулу логики высказываний (*) $(((r \,\&\, (p \to (q \,\&\, j)) \,\&\, m) \to (p \to q))$ посредством метода аналитических таблиц [18].

$$
\begin{array}{ccc}
\multicolumn{3}{c}{\neg(((r \,\&\, (p \to (q \,\&\, j)) \,\&\, m) \to (p \to q))} \\
\multicolumn{3}{c}{((r \,\&\, (p \to (q \,\&\, j)) \,\&\, m)} \\
\multicolumn{3}{c}{(r \,\&\, (p \to (q \,\&\, j))} \\
\multicolumn{3}{c}{m} \\
\multicolumn{3}{c}{\neg(p \to q)} \\
\multicolumn{3}{c}{r} \\
\multicolumn{3}{c}{(p \to (q \,\&\, j))} \\
\multicolumn{3}{c}{p} \\
\multicolumn{3}{c}{\neg q} \\
\neg p & \vline & (q \,\&\, j) \\
* & \vline & q \\
 & \vline & *
\end{array}
$$

Так как обе ветви аналитической таблицы замкнуты, то формула (*) доказуема.

Заметим, что $((r \,\&\, (p \to (q \,\&\, j)) \,\&\, m)$ представляет условие d^{+}_{2} из определения предиката $M^{+}_{ad_2,n}(V,W)$ индуктивного метода сходства-различия, а $(p \to q)$ представляет условие d^{+}_{0} из определения предиката $M^{+}_{ad_0,n}(V,W)$ индуктивного метода различия.

Теперь для доказательства **Утверждения 1-2** достаточно доказать формулу (**) $((d^{+}_{2} \to d^{+}_{0}) \to ((a^{+} \,\&\, d^{+}_{2}) \to (a^{+} \,\&\, d^{+}_{0})))$, где a^{+} представляет $M^{+}_{a,n}(V,W)$ – индуктивный метод сходства. Напомним, что $M^{+}_{ad_2,n}(V,W) \rightleftharpoons M^{+}_{a,n}(V,W) \,\&\, (d_2)^{+}$, а $M^{+}_{ad_0,n}(V,W) \rightleftharpoons M^{+}_{a,n}(V,W) \,\&\, (d_0)^{+}$.

Так как формула (*) $(d^{+}_{2} \to d^{+}_{0})$ доказуема, то доказуема и формула $((a^{+} \,\&\, d^{+}_{2}) \to (a^{+} \,\&\, d^{+}_{0}))$.

Применим метод аналитических таблиц

$$
\begin{array}{ccccc}
\multicolumn{5}{c}{\neg((d^{+}_{2} \to d^{+}_{0}) \to ((a^{+} \,\&\, d^{+}_{2}) \to (a^{+} \,\&\, d^{+}_{0})))} \\
\multicolumn{5}{c}{(d^{+}_{2} \to d^{+}_{0})} \\
\multicolumn{5}{c}{\neg((a^{+} \,\&\, d^{+}_{2}) \to (a^{+} \,\&\, d^{+}_{0}))} \\
\multicolumn{5}{c}{(a^{+} \,\&\, d^{+}_{2})} \\
\multicolumn{5}{c}{a^{+}} \\
\multicolumn{5}{c}{d^{+}_{2}} \\
\multicolumn{5}{c}{\neg(a^{+} \,\&\, d^{+}_{0})} \\
\neg a^{+} & \vline & \multicolumn{3}{c}{\neg d^{+}_{0}} \\
* & \vline & \neg d^{+}_{2} & \vline & d^{+}_{0} \\
 & \vline & * & \vline & *
\end{array}
$$

Заметим, что $a^+d_2^+ \rightleftharpoons a^+ \& d_2^+$, а $a^+d_0^+ \rightleftharpoons a^+ \& d_0^+$.

Таким образом, доказано **Утверждение 1-2**: $\forall V\forall W(M^+_{ad_2,n}(V,W) \to M^+_{ad_0,n}(V,W))$. Пусть $z_1, z_2 \in I^\sigma$, где $\sigma\in\{+, -\}$, будем говорить, что $M^\sigma_{z_1,n}(V,W)$ и $M^\sigma_{z_2,n}(V,W)$ **логически зависимы,** если имеет место утверждение

$$\forall V\forall W(M^+_{z_1,n}(V,W) \to M^+_{z_2,n}(V,W)) \vee$$
$$\vee \forall V\forall W(M^+_{z_2,n}(V,W) \to M^+_{z_1,n}(V,W)).$$

Будем говорить также, что $M^\sigma_{z_1,n}(V,W)$ и $M^\sigma_{z_2,n}(V,W)$ **логически независимы,** если имеет место утверждение

$$\exists V\exists W(M^+_{z_1,n}(V,W) \& \neg M^+_{z_2,n}(V,W)) \&$$
$$\& \exists V\exists W(M^+_{z_2,n}(V,W) \& \neg M^+_{z_1,n}(V,W)).$$

Из **Утверждения 1-2** следует, что предикаты $M^+_{ad_2,n}(V,W)$ и $M^+_{ad_0,n}(V,W)$ логически зависимы. Можно показать, что аналогично логически зависимы $M^-_{ad_2,n}(V,W)$ и $M^-_{ad_0,n}(V,W)$.

Покажем теперь, что предикаты $M^+_{ad_0,n}(V,W)$ и $M^+_{ab,n}(V,W)$ логически независимы. Логическую независимость предикатов $M^\sigma_{z_1,n}(V,W)$ и $M^\sigma_{z_2,n}(V,W)$ будем обозначать посредством символа «||»: $M^\sigma_{z_1,n}(V,W) \parallel M^\sigma_{z_2,n}(V,W)$.

Утверждение 2-2. Предикаты $M^+_{ad_0,n}(V,W)$ и $M^+_{ab,n}(V,W)$ являются логически независимыми: $\exists V\exists W(M^+_{ad_0,n}(V,W) \& \neg M^+_{ab,n}(V,W)) \& \exists V\exists W(M^+_{ab,n}(V,W) \& \neg M^+_{ad_0,n}(V,W))$.

Напомним, что $M^+_{ab,n}(V,W) \rightleftharpoons M^+_{a,n}(V,W) \& (b)^+$

$M^+_{ad_0,n}(V,W) \rightleftharpoons M^+_{a,n}(V,W) \& (d_0)^+$,

$(d_0)^+ \rightleftharpoons \forall X\forall Y\forall Z\forall U\ ((J_{\langle 1,n\rangle}(X\Rightarrow_1 Y) \& (W\subseteq Y) \& (V\subset X) \& ((X\text{-}V)\subset Z) \& ((X\text{-}V)\neq\varnothing) \& \neg (V\subset Z)) \to (\neg J_{\langle 1,n\rangle}(Z\Rightarrow_1 U) \vee \neg (W\subseteq U)))$,

$(b)^+ \rightleftharpoons \forall X\forall Y\ (((V\subset X) \& (W\subseteq Y)) \to (J_{\langle 1,n\rangle}(X\Rightarrow_1 Y) \vee J_{\langle\tau,n\rangle}(X\Rightarrow_1 Y)))$.

(1) Докажем, что $\exists V\exists W(M^+_{ab,n}(V,W) \& \neg M^+_{ad_0,n}(V,W))$.

Рассмотрим фрагмент процедурной семантики PrSem.

$F1PrSem = \langle B_1, B_2, \Rightarrow_1, \{M^+_{x,n}(V,W), M^-_{y,n}(V,W)\}\rangle$,

где $B_i=\langle 2^{U^{(i)}}, \varnothing, U^{(i)}, -, \cap, \cup\rangle$ - булевы алгебры (i=1,2).

Положим $U^{(1)}$={A,B,C,D,G,P,Q,H,K,L,M,S}, $U^{(2)}$={l,k,p,q}.

Определим $X\Rightarrow_1 Y$ посредством множества элементарных высказываний Ω_0 (диаграмма модели). Ради простоты записи множества элементов из $U^{(1)}$ и $U^{(2)}$ будем представлять словами. Например, вместо {A,B,C,D} и {l, k, p} будем писать ABCD и lkp, соответственно. Вместо операторов $J_{\langle\nu,0\rangle}$ ($\nu\in\{1,-1\}$) будем писать J_ν, а вместо $J_{(\tau,o)}$ – J_τ.

$\Omega_0 = \{J_{\langle 1,0\rangle}(ABCD\Rightarrow_1 lkp),\ J_{\langle 1,0\rangle}(ABMH\Rightarrow_1 lk),\ J_{\langle 1,0\rangle}(SPCD\Rightarrow_1 lk),\ J_{\langle -1,0\rangle}(GPM\Rightarrow_1 lkp),\ J_{\langle -1,0\rangle}(GPH\Rightarrow_1 lk)\}$.

Применяя правило индуктивного вывода $(I)^+$ получим множество гипотез Δ_1 [14]:

$\Delta_1 = \{J_{\langle 1,1\rangle}(AB\Rightarrow_2 lk),\ J_{\langle -1,1\rangle}(GP\Rightarrow_2 lk)\}$

Заметим, что Ω_0 представляет базу фактов, а Δ_1 – фрагмент базы знаний, порожденный применением процедуры индукции (п.п.в.-1).

Согласно определению $M^+_{ab,n}(V,W)$ для V = AB и W = lk получим:

$$M^+_{ab,0}(AB, lk) = (J_1(ABCD \Rightarrow_1 lkp) \&$$
$$\& J_1(ABMH \Rightarrow_1 lk) \& (ABCD \cap ABMH = AB) \&$$
$$\& (AB \neq \varnothing) \& ((J_1(ABCD \Rightarrow_1 lkp) \&$$
$$\& (AB\subset ABCD)) \to ((lk\subseteq lkp) \&$$
$$\& (ABCD = ABCD \vee ABCD = ABMH)) \&$$
$$\& ((J_1(ABMH \Rightarrow_1 lk) \& (AB\subset ABMH)) \to ((lk\subseteq lk) \&$$
$$\& (ABMH = ABMH \vee ABMH = ABCD))) \&$$
$$\& (((AB\subset ABCD) \& (lk\subseteq lkp)) \to$$
$$\to (J_1(ABCD \Rightarrow_1 lkp) \vee J_\tau(ABCD \Rightarrow_1 lkp))) \&$$
$$\& (((AB\subset ABMH) \& (lk\subseteq lk)) \to$$
$$\to (J_1(ABMH \Rightarrow_1 lk)) \vee J_\tau(ABMH \Rightarrow_1 lk))) = t.$$

Так как $M^+_{a,0}(AB,lk)$ истинно и условие запрета на контрпримеры $(b)^+$ истинно, то истинно $M^+_{ab,0}(AB, lk) = M^+_{a,0}(AB,lk) \& (b)^+$. Таким образом, $M^+_{ab,0}(AB, lk) = t$.

Покажем теперь, что $M^+_{ad_0,n}(V,W)$ – ложно:

$$M^+_{ad_0,0}(AB, lk) = (J_1(ABMH \Rightarrow_1 lk) \&$$
$$\& J_1(ABCD \Rightarrow_1 lkp) \& (ABCD \cap ABMH = AB) \&$$
$$\& (AB \neq \varnothing) \& ((J_1(ABCD \Rightarrow_1 lkp) \&$$
$$\& (AB\subset ABCD)) \to ((lk\subseteq lkp) \&$$
$$\& (ABCD = ABCD \vee ABCD = ABMH)) \&$$
$$\& ((J_1(ABMH \Rightarrow_1 lk) \& (AB\subset ABMH)) \to ((lk\subseteq lk) \&$$
$$\& (ABMH = ABMH \vee ABMH = ABCD)) \&$$
$$\& ((J_1(ABMH \Rightarrow_1 lk) \& (AB\subset ABMH) \& (lk\subseteq lk) \&$$
$$\& (ABMH - AB\subset GMH) \& (ABMH - AB \neq \varnothing)) \to$$
$$\to (\neg J_1(GMH \Rightarrow_1 lk) \vee \neg(lk\subseteq lk)) \&$$
$$\& ((J_1(ABCD \Rightarrow_1 lkp) \& (AB\subset ABCD) \& (lk\subseteq lkp) \&$$
$$\& (ABMH - AB \subset SPCD) \& (ABMH - AB \neq \varnothing)) \to$$
$$\to ((\neg J_1(SPCD \Rightarrow_1 lk) \vee \neg(lk\subseteq lk)) = f.$$

Так как $((\neg J_1(SPCD \Rightarrow_1 lk) \vee \neg(lk\subseteq lk))$ ложна, $(J_1(SPCD \Rightarrow_1 lk)\in\Omega_0)$, то ложна $d_0^+(AB, lk)$, а, следовательно, ложна $M^+_{ad_0,0}(AB,lk)$ и истинна $M^+_{ab,0}(AB,lk) \& \neg M^+_{ad_0,0}(AB,lk)$.

Таким образом, истинно утверждение

$\exists V\exists W(M^+_{ab,n}(V,W) \& \neg M^+_{ad_0,n}(V,W))$ для n=0.

Рассмотрим $\Omega_0 = \{J_1(ABCD\Rightarrow_1 lkp),\ J_1(ABMH\Rightarrow_1 lkp),\ J_{-1}(SPCD\Rightarrow_1 lkp),\ J_{-1}(GPM\Rightarrow_1 lkp),\ J_{-1}(ABSD\Rightarrow_1 lkp)\}$.

Применение п.п.в.-1 порождает множество гипотез $\Delta_1 = \{J_{\langle 1,1\rangle}(AB\Rightarrow_2 lkp),\ J_{\langle -1,1\rangle}(SD\Rightarrow_2 lkp)\}$.

$$M^+_{ab,0}(AB,lkp) = J_1(ABCD\Rightarrow_1 lkp) \& J_1(ABMH\Rightarrow_1 lkp) \&$$
$$\& (ABCD \cap ABMH = AB) \& (AB \neq \varnothing) \&$$
$$\& ((J_1(ABCD\Rightarrow_1 lkp) \& (AB\subset ABCD)) \to ((lk\subseteq lkp) \&$$

$$\& (ABCD = ABCD \vee ABCD = ABMH))) \&$$
$$\& ((J_1(ABMH \Rightarrow_1 lkp) \& (AB \subset ABMH)) \to ((lkp \subseteq lkp) \&$$
$$\& (ABMH = ABMH \vee ABMH = ABCD))) \&$$
$$\& ((AB \subset ABCD) \& (lkp \subseteq lkp)) \to$$
$$\to ((J_1(ABCD \Rightarrow_1 lkp) \vee J_\tau(ABCD \Rightarrow_1 lkp))) \&$$
$$\& (((AB \subset ABMH) \& (lkp \subseteq lkp)) \to$$
$$\to (J_1(ABMH \Rightarrow_1 lkp)) \vee J_\tau(ABMH \Rightarrow_1 lkp))) \&$$
$$\& ((AB \subset ABSD) \& (lkp \subseteq lkp)) \to$$
$$\to ((J_1(ABSD \Rightarrow_1 lkp) \vee J_\tau (ABSD \Rightarrow_1 lkp))) = f,$$

так как $J_{-1}(ABSD \Rightarrow_1 lkp) \in \Omega_0$, следовательно $(J_1(ABSD \Rightarrow_1 lkp) \vee J_\tau (ABSD \Rightarrow_1 lkp))$ ложно, $((AB \subset ABSD) \& (lkp \subseteq lkp))$ истинно, а поэтому $M^{+}_{ab,0}(AB,lkp) = f$.

Покажем теперь, что $M^{+}_{ad_0,0}(V,W)$ истинно для $V = AB$, $W = lkp$, а $n = 0$.

$$M^{+}_{ad_0,0}(AB, lkp) = (J_1(ABCD \Rightarrow_1 lkp) \&$$
$$\& J_1 (ABMH \Rightarrow_1 lkp) \& (ABCD \cap ABMH = AB) \&$$
$$\& (AB \neq \varnothing) \& (((J_1(ABCD \Rightarrow_1 lkp) \& (AB \subset ABCD)) \to$$
$$\to ((lkp \subseteq lkp) \& (ABCD = ABCD \vee ABCD = ABMH)) \&$$
$$\& (((J_1 (ABMH \Rightarrow_1 lkp) \& (AB \subset ABMH)) \to ((lkp \subseteq lkp) \&$$
$$\& (ABMH = ABMH \vee ABMH = ABCD)) \&$$
$$\& ((J_1(ABCD \Rightarrow_1 lkp) \& (lkp \subseteq lkp) \& (AB \subset ABCD) \&$$
$$\& (ABCD - AB \subset SPCD) \& (ABCD - AB \neq \varnothing) \&$$
$$\& \neg (AB \subset SPCD)) \to (\neg J_1 (SPCD \Rightarrow_1 lkp) \vee \neg(lkp \subseteq lkp)) \&$$
$$((J_1(ABMH \Rightarrow_1 lkp) \& (lkp \subseteq lkp) \& (AB \subset ABMH) \&$$
$$\& (ABMH - AB \subset GMH) \& (ABMH - AB \neq \varnothing) \&$$
$$\& \neg(AB \subset GMH)) \to ((\neg J_1 (GMH \Rightarrow_1 lkp) \vee \neg(lkp \subseteq lkp)) = t,$$

так как

$$\neg J_1 (GMH \Rightarrow_1 lkp) \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow J_{-1}(GMH \Rightarrow_1 lkp) \vee J_0(GMH \Rightarrow_1 lkp) \vee J_\tau(GMH \Rightarrow_1 lkp),$$
$$\text{а } J_{-1}(GMH \Rightarrow_1 lkp) \in \Omega_0.$$

Таким образом, $\neg M^{+}_{ab,0}(AB,lkp) \& M^{+}_{ad_0,n}(AB,lkp)$ истинно, так как $M^{+}_{ab,0}(AB,lkp) = f$. Следовательно, истинно утверждение $\exists V \exists W(M^{+}_{ab,n}(V,W) \& \neg M^{+}_{ad_0,n}(V,W))$ для n=0.

Так как истинна $\exists V \exists W(M^{+}_{ad_0,n}(V,W) \& \neg M^{+}_{ab,n}(V,W)) \& \& \exists V \exists W(M^{+}_{ab,n}(V,W) \& \neg M^{+}_{ad_0,n}(V,W))$, то доказано **Утверждение 2-2.** Предикаты $M^{+}_{ab,n}(V,W)$ и $M^{+}_{ad_0,n}(V,W)$ логически независимы.

Покажем также, что истинна формула

$$\exists V \exists W(M^{+}_{ad_0,n}(V,W) \& M^{+}_{ab,n}(V,W)).$$

Для доказательства этого утверждения достаточно рассмотреть диаграмму модели с $\Omega_0 = \{J_1(ABCD \Rightarrow_1 lkp), J_1(ABMH \Rightarrow_1 lkp), J_{-1}(GMH \Rightarrow_1 lkp), J_{-1}(SPCD \Rightarrow_1 lkp), J_{-1}(SQKD \Rightarrow_1 lkp)\}$ и $\Delta_1 = \{ J_{\langle 1,1 \rangle}(AB \Rightarrow_2 lk), J_{\langle -1,1 \rangle}(SP \Rightarrow_2 lk)\}$.

Для Ω_0 истинно утверждение $M^{+}_{ab,0}(AB,lkp)$ & $M^{+}_{ad_0,n}(AB,lkp)$, а, следовательно, истинно

$$\exists V \exists W(M^{+}_{ab,n}(V,W) \& M^{+}_{ad_0,n}(V,W)).$$

Утверждение 3-2.

Доказуема следующая формула

$$\exists V \exists W(M^{+}_{ab,n}(V,W) \vee M^{+}_{ad_0,n}(V,W)) \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow (\exists V_1 \exists W_1(M^{+}_{ab,n}(V_1,W_1) \& \neg M^{+}_{ad_0,n}(V_1,W_1)) \vee$$
$$\vee \exists V_2 \exists W_2(\neg M^{+}_{ab,n}(V_2,W_2) \& M^{+}_{ad_0,n}(V_2,W_2)) \vee$$
$$\vee \exists V_3 \exists W_3(M^{+}_{ab,n}(V_3,W_3) \& M^{+}_{ad_0,n}(V_3,W_3))).$$

Доказательство этой формулы сводится к доказательству двух импликаций, полученному посредством метода аналитических таблиц [18].

Заметим, что два первых дизъюнкта истинны в силу **Утверждения 2-2**, а дизъюнкт $\exists V_3 \exists W_3(M^{+}_{ab,n}(V_3,W_3) \& \& M^{+}_{ad_0,n}(V_3,W_3))$ также истинен, что было установлено посредством построенной выше диаграммы модели.

Для экономной записи заменим $M^{+}_{ab,n}(V,W)$ на $P (V, W)$, $M^{+}_{ad_0,n}(V,W)$ на $Q (V, W)$, соответственно.

Методом аналитических таблиц докажем прямую и обратную импликации представляющие **Утверждение 3-2.** Посредством символа * будем обозначать замкнутые ветви аналитических таблиц. Аналитические таблицы, представленные в табл. 1 и 2, соответственно, замкнуты, а, следовательно, **Утверждение 3-2** доказано.

Рассмотрим отрицание
$\exists V \exists W(M^{+}_{ab,n}(V,W) \vee M^{+}_{ad_0,n}(V,W))$:

$$\neg(\exists V \exists W(M^{+}_{ab,n}(V,W) \vee M^{+}_{ad_0,n}(V,W))) \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow \forall V \forall W(\neg M^{+}_{ab,n}(V,W) \& \neg M^{+}_{ad_0,n}(V,W)).$$

Используя **Утверждение 3-2,** получим условие ложности для $\exists V \exists W(M^{+}_{ab,n}(V,W) \vee M^{+}_{ad_0,n}(V,W))$:

$$\forall V \forall W(\neg M^{+}_{ab,n}(V,W) \& \neg M^{+}_{ad_0,n}(V,W)) \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow \forall V_1 \forall W_1 \forall V_2 \forall W_2 \forall V_3 \forall W_3((\neg M^{+}_{ab,n}(V_1,W_1) \vee$$
$$\vee M^{+}_{ad_0,n}(V_1,W_1)) \& (M^{+}_{ab,n}(V_2,W_2) \vee \neg M^{+}_{ad_0,n}(V_2,W_2)) \&$$
$$\& (\neg M^{+}_{ab,n}(V_3,W_3) \vee \neg M^{+}_{ad_0,n}(V_3,W_3)).$$

Эта эквивалентность выражает условие одновременной невыполнимости $M^{+}_{ab,n}(V,W)$ и $M^{+}_{ad_0,n}(V,W)$ – индуктивного метода сходства с запретом на контрпримеры и метода различия.

Установим также логическую независимость предикатов $M^{+}_{ad_2,n}(V,W)$ и $M^{+}_{ad_0 b,n}(V,W)$,

где $M^{+}_{ad_2,n}(V,W) \rightleftharpoons M^{+}_{a,n}(V,W) \& (d_2)^{+}$, $M^{+}_{ab,n}(V,W) \rightleftharpoons \rightleftharpoons M^{+}_{a,n}(V,W) \& (b)^{+}$, $M^{+}_{ad_0 b,n}(V,W) \rightleftharpoons M^{+}_{a,n}(V,W) \& \& (d_0)^{+} \& (b)^{+}$.

Утверждение 4-2.

Предикаты $M^{+}_{ad_2,n}(V,W)$ и $M^{+}_{ad_0 b,n}(V,W)$ логически независимы: $\exists V \exists W(M^{+}_{ad_2,n}(V,W) \& \neg M^{+}_{ad_0 b,n}(V,W)) \& \& \exists V \exists W(\neg M^{+}_{ad_2,n}(V,W) \& M^{+}_{ad_0 b,n}(V,W))$.

Таблица 1

$$\neg(\exists V\exists W(P(V,W) \vee Q(V,W)) \rightarrow \exists V_1\exists W_1(P(V_1,W_1) \,\&\, \neg Q(V_1,W_1)) \vee \exists V_2\exists W_2(\neg P(V_2,W_2) \,\&\, Q(V_2,W_2)) \vee$$
$$\exists V_3\exists W_3(P(V_3,W_3) \,\&\, Q(V_3,W_3))))$$
$$\exists V\exists W(P(V,W) \vee Q(V,W))$$
$$\neg(\exists V_1\exists W_1(P(V_1,W_1) \,\&\, \neg Q(V_1,W_1)) \vee \exists V_2\exists W_2(\neg P(V_2,W_2) \,\&\, Q(V_2,W_2)) \vee \exists V_3\exists W_3(P(V_3,W_3) \,\&\, Q(V_3,W_3)))$$
$$\neg(\exists V_1\exists W_1(P(V_1,W_1) \,\&\, \neg Q(V_1,W_1)) \vee \exists V_2\exists W_2(\neg P(V_2,W_2) \,\&\, Q(V_2,W_2)))$$
$$\neg\exists V_3\exists W_3(P(V_3,W_3) \,\&\, Q(V_3,W_3))$$
$$\neg\exists V_1\exists W_1(P(V_1,W_1) \,\&\, \neg Q(V_1,W_1))$$
$$\neg\exists V_2\exists W_2(\neg P(V_2,W_2) \,\&\, Q(V_2,W_2))$$
$$P(a,b) \vee Q(a,b)$$

$P(a,b)$			$Q(a,b)$		
$\neg(P(a,b) \,\&\, Q(a,b))$			$\neg(P(a,b) \,\&\, Q(a,b))$		
$\neg P(a,b)$	$\neg Q(a,b)$		$\neg P(a,b)$		$\neg Q(a,b)$
*	$\neg(P(a,b) \,\&\, \neg Q(a,b))$		$\neg(\neg P(a,b) \,\&\, Q(a,b))$		*
	$\neg P(a,b)$	$Q(a,b)$	$P(a,b)$	$\neg Q(a,b)$	
	*	*	*	*	

Таблица 2

$$\neg(\exists V_1\exists W_1(P(V_1,W_1) \,\&\, \neg Q(V_1,W_1)) \vee \exists V_2\exists W_2(\neg P(V_2,W_2) \,\&\, Q(V_2,W_2)) \vee \exists V_3\exists W_3(P(V_3,W_3) \,\&$$
$$\&\, Q(V_3,W_3))) \rightarrow \exists V\exists W(P(V,W) \vee Q(V,W)))$$
$$\exists V_1\exists W_1(P(V_1,W_1) \,\&\, \neg Q(V_1,W_1)) \vee \exists V_2\exists W_2(\neg P(V_2,W_2) \,\&\, Q(V_2,W_2)) \vee \exists V_3\exists W_3(P(V_3,W_3) \,\&\, Q(V_3,W_3))$$
$$\neg\exists V\exists W(P(V,W) \vee Q(V,W))$$

$\exists V_1\exists W_1(P(V_1,W_1) \,\&\, \neg Q(V_1,W_1)) \vee \exists V_2\exists W_2(\neg P(V_2,W_2) \,\&\, Q(V_2,W_2))$		$\exists V_3\exists W_3(P(V_3,W_3) \,\&\, Q(V_3,W_3))$
$\exists V_1\exists W_1(P(V_1,W_1) \,\&\, \neg Q(V_1,W_1))$	$\exists V_2\exists W_2(\neg P(V_2,W_2) \,\&\, Q(V_2,W_2))$	$P(a,b) \,\&\, Q(a,b)$
$P(c,d) \,\&\, \neg Q(c,d)$	$\neg P(e,g) \,\&\, Q(e,g)$	$P(a,b)$
$P(c,d)$	$\neg P(e,g)$	$Q(a,b)$
$\neg Q(c,d)$	$Q(e,g)$	$\neg(P(a,b) \vee Q(a,b))$
$\neg(P(c,d) \,\&\, Q(c,d))$	$\neg(P(e,g) \vee Q(e,g))$	$\neg P(a,b)$
$\neg P(c,d)$	$\neg P(e,g)$	$\neg Q(a,b)$
*	$\neg Q(e,g)$	*
	*	

Построим диаграмму модели $\Omega_0 = \{J_1(ABCD \Rightarrow_1 lkq)$, $J_1(ABEF \Rightarrow_1 lk)$, $J_{-1}(KLCD \Rightarrow_1 lkq)$, $J_{-1}(MNEF \Rightarrow_1 lkq)$, $J_1(PGH \Rightarrow_1 lk)$, $J_1(PQS \Rightarrow_1 lk)$, $J_{-1}(ABR \Rightarrow_1 lk)$, $J\tau(P \Rightarrow_1 lk)\}$, где $U^{(1)} = \{A, B, C, D, E, F, G, H, P, Q, R, S\}$, а $U^{(2)} = \{l,k,q\}$.

Покажем, что $\exists V\exists W(M^{+}_{ad_2,n}(V,W) \,\&\, \neg M^{+}_{ad_0b,n}(V,W))$.

Заметим, что истинны следующие высказывания: $AB \subset ABCD$, $AB \subset ABEF$, $lk \subseteq lkq$, $ABCD\text{-}AB \neq \varnothing$, $ABEF\text{-}AB \neq \varnothing$, $EF \subset MNEF$, $CD \subset KLCD$, $\neg(AB \subset KLCD)$, $\neg(AB \subset MNEF)$, $(lk \subseteq lkq)$, $lk \subseteq lk$.

Покажем, что $M^{+}_{ad_2,0}(V,W)(AB,lk) = t$, так как $J_{-1}(KLCD \Rightarrow_1 lkq)$, $J_{-1}(MNEF \Rightarrow_1 lkq) \in \Omega_0$, а, следовательно, они истинны. Заметим, что $n = 0$, а AB и lk – значения V и W, соответственно.

Очевидно, что $M^{+}_{a,0}(P,lk)$ и $\neg M^{-}_{a,0}(P,lk)$, $J_t(P \Rightarrow_2 lk)$ истинны, где $\tau = (\tau, 0)$.

Рассмотрим

$$M^{+}_{ad_2,0}(AB,lk) = ((J_1(ABCD \Rightarrow_1 lkq) \,\&\, (AB \subset ABCD) \,\&$$
$$\&\, (lk \subseteq lkq) \,\&\, \neg(ABCD\text{-}AB = \varnothing)) \rightarrow$$
$$\rightarrow (ABCD = ABCD \vee ABCD = ABEF)) \,\&$$
$$\&\, ((J_1(ABEF \Rightarrow_1 lkq) \,\&\, (AB \subset ABEF) \,\&\, (lk \subseteq lk) \,\&$$
$$\&\, \neg(ABEF\text{-}AB = \varnothing)) \rightarrow$$
$$\rightarrow (ABEF = ABEF \vee ABEF = ABCD)) \,\&\, ((M^{+}_{a,0}(P,lk) \,\&$$
$$\&\neg M^{-}_{a,0}(P,lk) \,\&\, J_\tau(P \Rightarrow_2 lk)) \rightarrow (P = P)) \,\&\, (\neg(P \subset KLCD) \,\&$$
$$\&\neg(P \subset MNEF) \,\&\, \neg(AB = P)) \,\&\, ((J_1(ABCD \Rightarrow_1 lkq) \,\&$$

$$\& (AB \subset ABCD) \& (lk \subseteq lkq) \& (ABCD - AB \subset KLCD) \&$$
$$\& \neg(ABCD - AB = \varnothing) \& \neg(AB \subset KLCD)) \to$$
$$\to (\neg J_1(KLCD \Rightarrow_1 lkq) \vee \neg(lk \subseteq lkq))) \& ((J_1(ABEF \Rightarrow_1 lk) \&$$
$$\& (AB \subset ABEF) \& (lk \subseteq lk) \& (ABEF - AB \subset MNEF) \&$$
$$\& \neg(ABEF - AB = \varnothing) \& \neg(AB \subset MNEF)) \to$$
$$\to (\neg J_1(MNEF \Rightarrow_1 lkq) \vee \neg(lk \subseteq lkq))) \&$$
$$\& (((KLCD = KLCD) \& (lkq = lkq)) \vee ((KLCD = MNEF) \&$$
$$(lkq = lkq))) \& (((MNEF = MNEF) \& (lkq = lkq)) \vee$$
$$((MNEF = KLCD) \& (lkq = lkq))).$$

Так как

$$\neg J_1(KLCD \Rightarrow_1 lkq) \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow (J_{-1}(KLCD \Rightarrow_1 lkq) \vee J_0(KLCD \Rightarrow_1 lkq) \vee J_\tau(KLCD \Rightarrow_1 lkq)),$$
$$\neg J_1(MNEF \Rightarrow_1 lkq) \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow (J_{-1}(MNEF \Rightarrow_1 lkq) \vee J_0(MNEF \Rightarrow_1 lkq) \vee J_\tau(MNEF \Rightarrow_1 lkq)),$$

то $M^{+}_{ad_2,0}(AB,lk) = t$.

Легко установить $M^{+}_{ad_0 b,0}(AB,lk) = f$ в силу $AB \subset ABR$ и $J_{-1}(ABR \Rightarrow_1 lkq) \in \Omega_0$, что означает ложность условия запрета на контрпримеры $(b)^{+}$, содержащееся в $M^{+}_{ad_0 b,n}(V,W)$.

Таким образом, $\exists V \exists W(M^{+}_{ad_2,n}(V,W) \& \neg M^{+}_{ad_0 b,n}(V,W))$.

Установим теперь истинность $\exists V \exists W(\neg M^{+}_{ad_2,n}(V,W) \& M^{+}_{ad_0 b,n}(V,W))$. Построим диаграмму модели с $\Omega_0 = \{J_1(ABCD \Rightarrow_1 lkq),\ J_1(ABEF \Rightarrow_1 lk),\ J_\tau(KLCD \Rightarrow_1 lkq),\ J_\tau(MNEF \Rightarrow_1 lkq),\ J_1(ABHL \Rightarrow_1 lk)\}$ и $\Delta_1 = \{ J_\tau(PHL \Rightarrow_2 lk),\ J_{\langle 1,1\rangle}(AB \Rightarrow_2 lk),\ J_\tau(AB \Rightarrow_2 lk)\}$.

Заметим, что $J_{(\tau,0)}(AB \Rightarrow_1 lk)$ и $J_{\langle 1,1\rangle}(AB \Rightarrow_2 lk)$ не образуют контрарную пару, так как $(\tau,0) = \{\langle 1, 1\rangle, \langle -1, 1\rangle, \langle 0, 1\rangle\} \cup (\tau, 1)$, а $J_{(\tau,0)}\varphi = J_{\langle 1,1\rangle}\varphi \vee J_{\langle -1,1\rangle}\varphi \vee J_{\langle 0,1\rangle}\varphi \vee J_{(\tau,1)}\varphi$.

Легко показать, что $M^{+}_{ad_0 b,0}(AB,lk) = t$, но $M^{+}_{ad_2,0}(AB,lk) = f$. Так как $\exists V \exists W M^{+}_{ad_2,n}(V,W)$ ложно в силу того, что не существует V_i и W из определения $M^{+}_{ad_2,n}$, таких, что $\neg(V_i = V)$ и $\neg(V_i \subset MNEF)$, $\neg(V_i \subset KLCD)$, $\neg(V_i \subset PHL)$, а, следовательно, не выполняется $M^{+}_{ad_2,n}(V,W)$.

Таким образом, $\exists V \exists W(\neg M^{+}_{ad_2,n}(V,W) \& M^{+}_{ad_0 b,n}(V,W))$, что завершает доказательство логической независимости предикатов $M^{+}_{ad_2,n}$ и $M^{+}_{ad_0 b,n}$.

Истинно также утверждение $\exists V \exists W(M^{+}_{ad_2,n}(V,W) \& M^{+}_{ad_0 b,n}(V,W))$.

Рассмотрим диаграмму модели $\Omega_0 \cup \Delta_0$[14], где $\Omega_0 = \{J_1(ABCD \Rightarrow_1 lkq),\ J_1(ABEF \Rightarrow_1 lk),\ J_\tau(KLCD \Rightarrow_1 lkq),\ J_\tau(MNEF \Rightarrow_1 lk),\ J_{-1}(PSF \Rightarrow_1 lk),\ J_{-1}(PQR \Rightarrow_1 lk),\ J_\tau(ABH \Rightarrow_1 lk),\ J_\tau(PSR \Rightarrow_1 lk)\}$, $\Delta_0 = \{ J_\tau(AB \Rightarrow_2 lk),\ J_\tau(P \Rightarrow_2 lk) \}$.

Применение правил правдоподобного вывода (п.п.в.-1 – индукции и п.п.в.-2 - аналогии) породит, соответственно, $\Delta_1 = \{J_{\langle 1,1\rangle}(AB \Rightarrow_2 lk),\ J_{\langle -1,1\rangle}(P \Rightarrow_2 lk)\}$, $\Omega_2 = \{ J_{\langle 1,2\rangle}(ABH \Rightarrow_1 lk),\ J_{\langle -1,2\rangle}(PSR \Rightarrow_1 lk)\}$.

Относительно Ω_0 установим истинность $M^{+}_{ad_2,0}(AB,lk)$ & $M^{+}_{ad_0 b,0}(AB,lk)$, а, следовательно, и, истинность $\exists V \exists W(M^{+}_{ad_2,n}(V,W) \& M^{+}_{ad_0 b,n}(V,W))$.

Аналогично **Утверждению 3-2** имеет место **Утверждение 5-2:**

Доказуема эквивалентность

$$\exists V \exists W(M^{+}_{ad_2,n}(V,W) \vee M^{+}_{ad_0 b,n}(V,W)) \leftrightarrow (\exists V_1 \exists W_1$$
$$(M^{+}_{ad_2,n}(V_1, W_1) \& \neg M^{+}_{ad_0 b,n}(V_1, W_1)) \vee$$
$$\exists V_2 \exists W_2(\neg M^{+}_{ad_2,n}(V_2, W_2) \& M^{+}_{ad_0 b,n}(V_2, W_2)) \vee$$
$$\exists V_3 \exists W_3(M^{+}_{ad_2,n}(V_3, W_3) \& M^{+}_{ad_0 b,n}(V_3, W_3))).$$

Получим также условие ложности для $\exists V \exists W(M^{+}_{ad_2,n}(V,W) \vee M^{+}_{ad_0 b,n}(V,W))$ посредством конъюнктивной нормальной формы

$$\forall V \forall W(\neg M^{+}_{ad_2,n}(V,W) \& \neg M^{+}_{ad_0 b,n}(V,W)) \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow \forall V_1 \forall W_1 \forall V_2 \forall W_2 \forall V_3 \forall W_3((\neg M^{+}_{ad_2,n}(V_1,W_1) \vee$$
$$\vee M^{+}_{ad_0 b,n}(V_1,W_1)) \& (M^{+}_{ad_2,n}(V_2,W_2) \vee \neg M^{+}_{ad_0 b,n}(V_2,W_2)) \&$$
$$\& (\neg M^{+}_{ad_2,n}(V_3,W_3) \vee \neg M^{+}_{ad_0 b,n}(V_3,W_3)).$$

Имеет место также **Утверждение 6-2.**

Предикаты $M^{+}_{ad_2,n}(V_3,W_3)$ и $M^{+}_{ab,n}(V_3,W_3)$ логически независимы: $\exists V \exists W(M^{+}_{ad_2,n}(V,W) \& \neg M^{+}_{ab,n}(V,W))$ & $\exists V \exists W(M^{+}_{ab,n}(V,W) \& \neg M^{+}_{ad_2,n}(V,W))$.

Доказательство логической независимости этих предикатов аналогично доказательству рассмотренных выше подобных утверждений. Условие ложности для $\exists V \exists W(M^{+}_{ad_2,n}(V,W) \vee M^{+}_{ab,n}(V,W))$ также устанавливается.

Замечание 1-2. Все утверждения данного параграфа статьи могут быть переформулированы для М-предикатов, применяемых к отрицательным примерам – (–)- примерам. Множеством таких (-)–предикатов $M = \{M^{-}_{a,n}(V,W), M^{-}_{ab,n}(V,W), M^{-}_{ad_0,n}(V,W), M^{-}_{ad_2,n}(V,W)\}$.

Замечание 2-2. Ранее было установлено, что имеет место **Утверждение**(*): $\forall V \forall W(M^{+}_{ab,n}(V,W) \to \neg M^{-}_{ab,n}(V,W)$, $\forall V \forall W(M^{-}_{ab,n}(V,W) \to \neg M^{+}_{ab,n}(V,W)$.

Из (*) следует упрощение правил индуктивного вывода

$$(I)^{+}_{a} \quad \frac{J_{(\tau,n)}(V \Rightarrow_2 W), M^{+}_{a,n}(V,W)}{J_{\langle 1,n+1\rangle}(V \Rightarrow_2 W)},$$

$$(I)^{-}_{a} \quad \frac{J_{(\tau,n)}(V \Rightarrow_2 W), M^{-}_{a,n}(V,W)}{J_{\langle -1,n+1\rangle}(V \Rightarrow_2 W)},$$

$$(I)^{\tau}_{a} \quad \frac{J_{(\tau,n)}(V \Rightarrow_2 W), \neg M^{+}_{a,n}(V,W) \& \neg M^{-}_{a,n}(V,W)}{J_{(\tau,n+1)}(V \Rightarrow_2 W)}.$$

Следовательно, для стратегии $Str_{ab,ab}$ с запретом на контрпримеры $(b)^{+}$ и $(b)^{-}$ гипотезы с истинностным значением $\langle 0, n+1\rangle$ (фактическое противоречие) **не порождаются.**

§ 3. РЕШЕТКИ ИНТЕНСИОНАЛОВ ДЛЯ М-ПРЕДИКАТОВ

В настоящем разделе будут использованы зависимости между М-предикатами, представляющими индуктивные процедуры. Эти зависимости были охарактеризованы в § 2.

Рассмотрим множества исходных М-предикатов $M^{\sigma} = \{M^{\sigma}_{a,n}(V,W),\ M^{\sigma}_{ab,n}(V,W),\ M^{\sigma}_{ad_0,n}(V,W),\ M^{\sigma}_{ad_2,n}(V,W)\}$, где $\sigma \in \{+, -\}$.

a^{σ}, $(ab)^{\sigma}$, $(ad_0)^{\sigma}$, $(ad_2)^{\sigma}$ будем называть **именами** или **представлениями** M^{σ}-предикатов. Положим, что $(ab)^{\sigma} = a^{\sigma} b^{\sigma}$, $(ad_0)^{\sigma} = a^{\sigma}d_0^{\sigma}$, $(ad_2)^{\sigma} = a^{\sigma}d_2^{\sigma}$. Напомним, что $M^{\sigma}_{ab,n}(V,W) \rightleftharpoons M^{\sigma}_{ab}(V,W)\ \&\ (b)^{\sigma}$, $M^{\sigma}_{ad_0,n}(V,W) \rightleftharpoons M^{\sigma}_{ad_0}(V,W)\ \&\ (d_0)^{\sigma}$, $M^{\sigma}_{ad_2,n}(V,W) \rightleftharpoons M^{\sigma}_{ad_2}(V,W)\ \&\ (d_2)^{\sigma}$ ради удобства записи будем заменять на $(ab)^{\sigma}$, $(ad_0)^{\sigma}$ и $(ad_2)^{\sigma}$, соответственно, где $\sigma \in \{+, -\}$, а «$\rightleftharpoons$» – символ «равенства по определению».

Посредством $I^{\sigma}=\{a^{\sigma}, (ab)^{\sigma}, (ad_0)^{\sigma}, (ad_2)^{\sigma}\}$ обозначим множества имен М-предикатов. Пусть $x \in I^{+}$, а $y \in I^{-}$, тогда $M^{+}_{x,n}(V,W)$ и $M^{-}_{y,n}(V,W)$, заданные посредством соответствующих определений, будем называть **интенсионалами** М-предикатов, представляющих индуктивные процедуры.

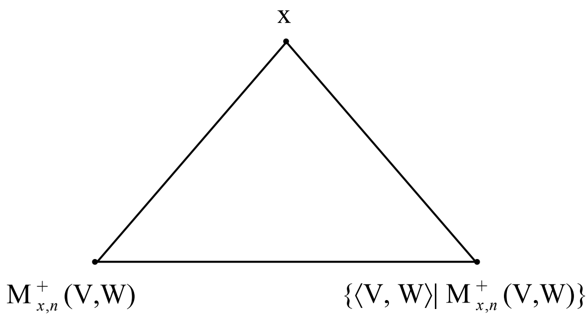
Заметим, что в определение M^{σ}-предикатов входит предикат $X \Rightarrow_1 Y$ такой, что $\Rightarrow_1$: $2^{U^{(1)}} \times 2^{U^{(2)}} \to V_{in}$, где $V_{in} = \{\langle \nu, n\rangle |\ (\nu \in \{1, -1, 0\})\ \&\ (n \in N)\} \cup \{\langle \tau, n\rangle |\ n \in N\}$, а множества $U^{(1)}$ и $U^{(2)}$ заданы. Если не фиксировать эти множества в определении предиката $X \Rightarrow_1 Y$, то интенсионалы М-предикатов будем называть **абстрактными интенсионалами** или просто **интенсионалами.** Если же фиксированы $U^{(1)}$ и $U^{(2)}$, то интенсионалы М-предикатов будем называть **реализациями** интенсионалов или **конкретными интенсионалами**. Таким образом, интенсионалу М-предиката соответствует множество их реализаций.

Посредством $\{\langle V, W\rangle |\ M^{+}_{x,n}(V,W)\}$ и $\{\langle V, W\rangle |\ M^{-}_{y,n}(V,W)\}$, где $x \in I^{+}$, $y \in I^{-}$, обозначим множество всех пар $\langle C, Q\rangle$, выполняющих эти предикаты.

Если $U^{(1)}$ и $U^{(2)}$ не заданы, а произвольны, то $\{\langle V, W\rangle |\ M^{+}_{x,n}(V,W)\}$ и $\{\langle V, W\rangle |\ M^{-}_{y,n}(V,W)\}$ будем называть **абстрактными экстенсионалами** или просто **экстенсионалами.** Если $U^{(1)}$ и $U^{(2)}$ заданы, то $\{\langle V, W\rangle |\ M^{+}_{x,n}(V,W)\}$ и $\{\langle V, W\rangle |\ M^{-}_{y,n}(V,W)\}$ будем называть **реализациями** экстенсионалов или **конкретными экстенсионалами.**

Имя M^{σ}-предикатов, их интенсионалы и экстенсионалы образуют треугольники Г. Фреге [19]. Эти треугольники соответствуют рассматриваемым **понятиям** индуктивных процедур. Заметим, что для процедурных понятий характерно наличие как абстрактных интенсионалов и экстенсионалов, так и их **реализаций –** конкретных интенсионалов и экстенсионалов.

Пусть $x \in I^{+}$, тогда треугольник Г. Фреге для предиката $M^{+}_{x,n}(V,W)$ имеет следующий вид:



Аналогичен треугольник Г. Фреге для предикатов $M^{-}_{y,n}(V,W)$

Рассмотрим множества $\mathbf{M}^{\sigma}$ и их подмножества $M^{\sigma}_1 = \{M^{\sigma}_{a,n},\ M^{\sigma}_{ad_0,n},\ M^{\sigma}_{ad_2,n}\}$ и $M^{\sigma}_2 = \{M^{\sigma}_{a,n},\ M^{\sigma}_{ab,n},\ M^{\sigma}_{ad_0,n}\}$, где $\sigma \in \{+, -\}$.

Покажем, что $\mathbf{M}^{\sigma}$ является **частично упорядоченным** множеством.

Для определенности рассмотрим множество $\mathbf{M}^{+}$ и взаимно-однозначно соответствующее ему множество $I^{+}=\{a^{+}, (ab)^{+}, (ad_0)^{+}, (ad_2)^{+}\}$. Определим на I^{+} отношение частичного порядка $\geq$ следующим образом $x_1 \geq x_2 \rightleftharpoons\ \forall V \forall W(M^{+}_{x_2,n}(V,W) \to M^{+}_{x_2,n}(V,W))$.

Очевидно, что

$\forall x\ (x \geq x)$,

$\forall x_1 \forall x_2\ (((x_1 \geq x_2)\ \&\ (x_2 \geq x_1)) \to (x_1 \leftrightarrow x_2))$

$\forall x_1 \forall x_2\ \forall x_3\ (((x_1 \geq x_2)\ \&\ (x_2 \geq x_3)) \to (x_1 \geq x_3))$

Заметим, что в силу **Утверждения 1-2** $\forall V \forall W(M^{+}_{ad_2,n}(V,W) \to M^{+}_{ad_0,n}(V,W))$, а, следовательно $(ad_2)^{+} \geq (ad_0)^{+}$. Очевидно также, что $\forall V \forall W(M^{+}_{ad_0,n}(V,W) \to$ $\to M^{+}_{a,n}(V,W))$, так как $M^{+}_{ad_0,n}(V,W) \rightleftharpoons M^{+}_{a}(V,W)\ \&$ $\&\ d^{+}_0(V,W)$.

Рассмотрим множество $I^{+}=\{a^{+}, (ad_0)^{+}, (ad_2)^{+}\}$ Так как $(a)^{+} \geq (ad_0)^{+} \geq (ad_2)^{+}$, то $R_1=\langle I^{+}_1, \geq\rangle$ есть линейный порядок, для которого определены $Inf(x_1, x_2)$ и $Sup(x_1, x_2)$ следующим образом:

$$\mathrm{Inf}(x_1, x_2) = \begin{cases} x_1, \text{ если } x_2 \geq x_1 \\ x_2, \text{ если } x_1 \geq x_2, \end{cases}$$

$$\mathrm{Sup}(x_1, x_2) = \begin{cases} x_1, \text{ если } x_1 \geq x_2 \\ x_2, \text{ если } x_2 \geq x_1, \end{cases}$$

Согласно определению решетки [20, 21] получим, что I^{+}_1 соответствует решетка $IntL^{+}_1 = \langle I^{+}, \circ, \wedge\rangle$, где $x_1 \circ x_2 = Inf(x_1, x_2)$, а $x_1 \wedge x_2 = Sup(x_1, x_2)$.

Аналогично определим решетку интенсионалов $IntL^{-}_1$ для $I^{-}=\{a^{-}, (ad_0)^{-}, (ad_2)^{-}\}$.

Для I_1^+ и I_1^- решетки интенсионалов M^σ-предикатов IntL_1^σ, где $\sigma \in \{+, -\}$, определяются посредством задания операций $\circ$ и $\wedge$ следующим образом:

$\circ$	a	ad_0	ad_2
a	a	a	a
ad_0	a	ad_0	ad_0
ad_2	a	ad_0	ad_2

$\wedge$	a	ad_0	ad_2
a	a	ad_0	ad_2
ad_0	ad_0	ad_0	ad_2
ad_2	ad_2	ad_2	ad_2

Так как решетки IntL_1^+ и IntL_1^- изоморфны, то операции $\circ$ и $\wedge$ изображаются без верхних индексов + и -. Решетки IntL_1^σ, где $\sigma \in \{+, -\}$, представлены на Рис. 1.

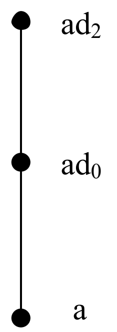


Рис. 1

Таким образом, интенсионалы индуктивных методов Д.С. Милля сходства, различия и сходства-различия **линейно упорядочены,** этот порядок выражает увеличение их «логической силы», что соответствует большему правдоподобию порождаемых гипотез.

Рассмотрим, далее, множество $\mathrm{I}_2^+ = \{a^+, (ab)^+, (ad_0)^+\}$. Согласно **Утверждению 2-2** предикаты $\mathrm{M}^+_{ab,n}(V,W)$ и $\mathrm{M}^+_{ad_0,n}(V,W)$ являются **логически независимыми:** $\mathrm{M}^+_{ab,n}(V,W) \parallel \mathrm{M}^+_{ad_0,n}(V,W)$. Аналогично: $\mathrm{M}^-_{ab,n}(V,W) \parallel \mathrm{M}^-_{ad_0,n}(V,W)$. Используя упрощенную запись для M^σ-предикатов получим $ad_0 \geq a$, $ab \geq a$, $ab \parallel ad_0$. Следовательно, множество элементов $\mathrm{I}_2^\sigma = \{a^\sigma, (ab)^\sigma, (ad_0)^\sigma\}$, где $\sigma \in \{+, -\}$, **порождающих** соответствующие решетки, является **частично упорядоченным:** $ab \geq a$, $ad_0 \geq a$, $ab \parallel ad_0$; $R_2^\sigma = \langle \mathrm{I}_2^\sigma, \geq \rangle$.

Решетки IntL_2^σ для $\mathrm{I}_2^\sigma = \{a^\sigma, (ab)^\sigma, (ad_0)^\sigma\}$ имеют множества элементов $\overline{\mathrm{I}}_2^\sigma = \{a^\sigma, (ab)^\sigma, (ad_0)^\sigma, (abd_0)^\sigma\}$, где $(ad_0b)^\sigma$ соответствуют предикаты $\mathrm{M}^\sigma_{ad_0b,n}(V,W) \rightleftharpoons$ $\rightleftharpoons \mathrm{M}^\sigma_a(V,W) \,\&\, (d_0)^\sigma \,\&\, (b)^\sigma$, $\sigma \in \{+, -\}$.

На $\overline{\mathrm{I}}^\sigma$ определимы Inf и Sup. Для определенности рассмотрим $\overline{\mathrm{I}}^+$,

$$\mathrm{Inf}(x_1, x_2) = \begin{cases} x_2, \text{ если } x_1 \geq x_2 \\ v, \text{ если } x_1 \parallel x_2, \end{cases} ,$$

где для v выполняется условие $(x_1 \geq v \,\&\, x_2 \geq v)\,\&$ $\&\, \forall z(\neg(z = v) \,\&\, (x_1 \geq z \,\&\, x_2 \geq z)) \to v \geq z)$. Следовательно, $\mathrm{Inf}(x_1, x_2)$ является **наибольшей нижней гранью.**

$$\mathrm{Sup}(x_1, x_2) = \begin{cases} x_1, \text{ если } x_1 \geq x_2 \\ v, \text{ если } x_1 \parallel x_2, \end{cases}$$

где для v выполняется условие $(v \geq x_1 \,\&\, v \geq x_2)\,\&$ $\&\, \forall z((z \geq x_1 \,\&\, z \geq x_2)) \to z \geq v)$. Следовательно, $\mathrm{Sup}(x_1, x_2)$ является **наименьшей верхней гранью**. Для решеток $\mathrm{IntL}_2^\sigma = \langle \overline{\mathrm{I}}_2^\sigma, \circ, \wedge \rangle$ определены операции $\circ$ и $\wedge$: $x_1 \circ x_2 = \mathrm{Inf}(x_1, x_2)$ и $x_1 \wedge x_2 = \mathrm{Sup}(x_1, x_2)$.

Таким образом, $\overline{R}_2 = \langle \overline{\mathrm{I}}_2^\sigma, \geq \rangle$ являются частично упорядоченными множествами такими, что для них определены $\mathrm{Inf}(x_1, x_2)$ и $\mathrm{Sup}(x_1, x_2)$.

Решетки IntL_2^σ, где $\sigma \in \{+, -\}$, представлены на Рис. 2:

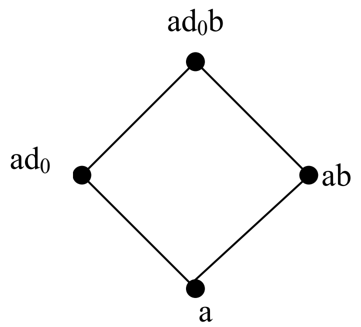


Рис. 2

Для $\overline{\mathrm{I}}_2^\sigma$ решетки интенсионалов M^σ–предикатов определяются посредством задания операций $\circ$ и $\wedge$:

$\circ$	a	ab	ad_0	ad_0b
a	a	a	a	a
ab	a	ab	a	ab
ad_0	a	a	ad_0	ad_0
ad_0b	a	ab	ad_0	ad_0b

$\wedge$	a	ab	ad_0	ad_0b
a	a	ab	ad_0	ad_0b
ab	ab	ab	ad_0b	ad_0b
ad_0	ad_0	ad_0b	ad_0	ad_0b
ad_0b	ad_0b	ad_0b	ad_0b	ad_0b

Обратим внимание на тот факт, что частичный порядок возникает из-за добавления условия запрета на контрпримеры, которое отсутствует в оригинальных правилах индуктивного вывода Д.С. Милля [12].

Рассмотрим частично упорядоченные множества $R_2^\sigma=\langle I^\sigma, \geq\rangle$, где $\sigma\in\{+, -\}$, $I^\sigma = \{a^\sigma, (ab)^\sigma, (ad_0)^\sigma, (ad_2)^\sigma\}$ $(ab)^\sigma \geq a^\sigma$, $(ad_0)^\sigma \geq a^\sigma$, $(ad_2)^\sigma \geq a^\sigma$, $(ad_2)^\sigma \geq (ad_0)^\sigma$, $(ab)^\sigma \parallel (ad_0)^\sigma$, $(ab)^\sigma \parallel (ad_2)^\sigma$. $(ab)^\sigma \parallel (ad_0)^\sigma$ согласно **Утверждению 2-2**, а $(ab)^\sigma \parallel (ad_2)^\sigma$ согласно **Утверждению 6-2**.

Множество $\overline{I}^\sigma = I^\sigma \cup \{(ad_0b)^\sigma, (ad_2b)^\sigma\}$, где $\sigma\in\{+, -\}$, а $M^\sigma_{ad_0b,n}(V,W) \rightleftharpoons M^\sigma_a(V,W)\ \&\ d^\sigma_0(V,W)\ \&\ b^\sigma(V,W)$, $M^\sigma_{ad_2b,n}(V,W) \rightleftharpoons M^\sigma_a(V,W)\ \&\ d^\sigma_2(V,W)\ \&\ b^\sigma(V,W)$ образуют решетки интенсионалов М-предикатов $IntL^\sigma = \langle \overline{I}^\sigma, \circ, \wedge\rangle$ с операциями $z_1\circ z_2 = Inf(z_1, z_2)$ и $z_1\wedge z_2 = Sup(z_1, z_2)$.

Решетки $IntL^\sigma$, где $\sigma\in\{+, -\}$, представлены на Рис. 3:

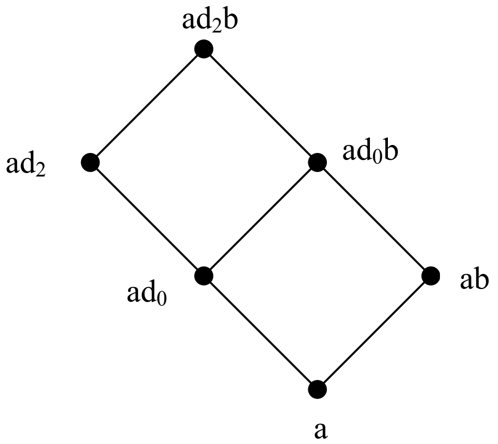


Рис. 3

Для $\overline{I}^\sigma$ решетки интенсионалов M^σ-предикатов определяются посредством задания операций $\circ$ и $\wedge$:

$\circ$	a	ab	ad_0	ad_0b	ad_2	ad_2b
a	a	a	a	a	a	a
ab	a	ab	a	ab	a	ab
ad_0	a	a	ad_0	ad_0	ad_0	ad_0
ad_0b	a	ab	ad_0	ad_0b	ad_0	ad_0b
ad_2	a	a	ad_0	ad_0	ad_2	ad_2
ad_2b	a	ab	ad_0	ad_0b	ad_2	ad_2b

$\wedge$	a	ab	ad_0	ad_0b	ad_2	ad_2b
a	a	ab	ad_0	ad_0b	ad_2	ad_2b
ab	ab	ab	ad_0b	ad_0b	ad_2b	ad_2b
ad_0	ad_0	ad_0b	ad_0	ad_0b	ad_2	ad_2b
ad_0b	ad_0b	ad_0b	ad_0b	ad_0b	ad_2b	ad_2b
ad_2	ad_2	ad_2b	ad_2	ad_2b	ad_2	ad_2b
ad_2b	ad_2b	ad_2b	ad_2b	ad_2b	ad_2b	ad_2b

Используя теорему, формулирующую критерий дистрибутивности решеток ([20, 21]), покажем, что рассмотренные выше решетки $IntL^\sigma$ являются **дистрибутивными,** т. е., имеют место аксиомы дистрибутивности

$$x \circ (y \wedge z) = (x \circ y) \wedge (x \circ z),$$
$$x \wedge (y \circ z) = (x \wedge y) \circ (x \wedge z).$$

Теорема. Решетка L является дистрибутивной, если и только если L не имеет подрешеток, изоморфных решеткам $\mathfrak{M}_5$ или $\mathfrak{N}_5$, представленных на Рис. 4 и рис. 5:

Операции $\circ$ и $\wedge$ (соответственно, Inf и Sup) определены следующим образом:

$\circ$	0	d	e	c	i
0	0	0	0	0	0
d	0	d	d	0	d
e	0	d	e	0	e
c	0	0	0	c	c
i	0	d	e	c	i

$\mathfrak{N}_5$

$\wedge$	0	d	e	c	i
0	0	d	e	c	i
d	0	d	e	i	i
e	e	e	e	i	i
c	c	i	i	c	i
i	i	i	i	i	i

$\circ$	0	d	e	c	i
0	0	0	0	0	0
d	0	d	0	0	d
e	0	0	e	0	e
c	0	0	0	c	c
i	0	d	e	c	i

$\mathfrak{M}_5$

$\wedge$	0	d	e	c	i
0	0	d	e	c	i
d	d	d	i	i	i
e	e	i	e	i	i
c	c	i	i	c	i
i	i	i	i	i	i

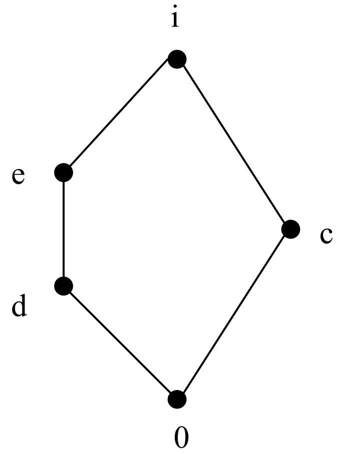
Докажем следующее

Утверждение 1-3. Решетки интенсионалов $IntL^\sigma_1$, $IntL^\sigma_2$ и $IntL^\sigma$ дистрибутивны, где $\sigma\in\{+, -\}$.

Так как $\mathfrak{N}_5$ («пентагон») и $\mathfrak{M}_5$ («диамант») имеют пять элементов, то $IntL^\sigma_1$ и $IntL^\sigma_2$ - дистрибутивные решетки ($IntL^\sigma_1$ и $IntL^\sigma_2$ имеют три и четыре элемента, соответственно).

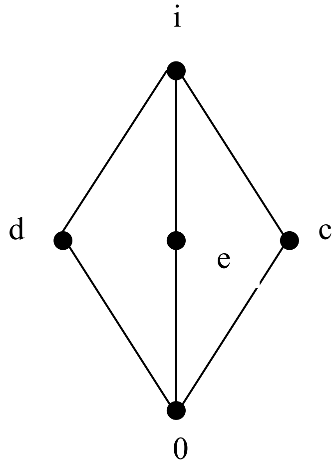
Рассмотрим $IntL^\sigma$ и установим, что они имеют две подрешетки, образованные пятью элементами.

$\mathfrak{N}_5$



(«петагон»)

Рис.4



$\mathfrak{M}_5$

(«диамант»)

Рис. 5

N_1

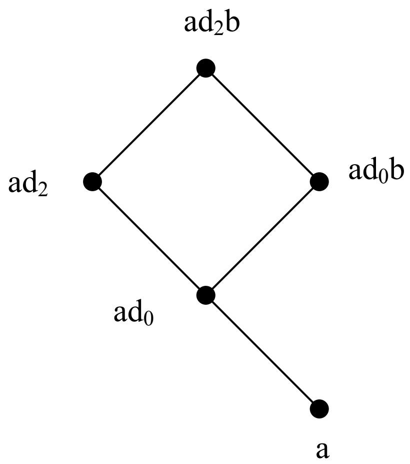


Рис. 6

N_2

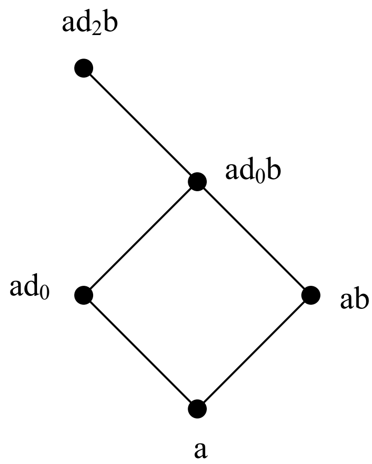


Рис. 7

N_1 - подрешетка $IntL^{\sigma}$ образована операциями $\circ$ и $\wedge$:

$\circ$	a	ad_0	ad_0b	ad_2	ad_2b
a	a	a	a	a	a
ad_0	a	ad_0	ad_0	ad_0	ad_0
ad_2	a	ad_0	ad_0	ad_2	ad_2
ad_0b	a	ad_0	ad_0b	ad_0	ad_0b
ad_2b	a	ad_0	ad_0b	ad_2	ad_2b

$\wedge$	a	ad_0	ad_0b	ad_2	ad_2b
a	a	ad_0	ad_0b	ad_2	ad_2b
ad_0	ad_0	ad_0	ad_0b	ad_2	ad_2b
ad_2	ad_2	ad_2	ad_2b	ad_2	ad_2b
ad_0b	ad_0b	ad_0b	ad_0b	ad_2b	ad_2b
ad_2b	ad_2b	ad_2b	ad_2b	ad_2b	ad_2b

N_2 - подрешетка $IntL^{\sigma}$ образована операциями $\circ$ и $\wedge$:

$\circ$	a	ab	ad_0	ad_0b	ad_2b
a	a	a	a	a	a
ab	a	ab	a	ab	ab
ad_0	a	a	ad_0	ad_0	ad_0
ad_0b	a	ab	ad_0	ad_0b	ad_0b
ad_2b	a	ab	ad_0	ad_0b	ad_2b

$\wedge$	a	ab	ad_0	ad_0b	ad_2b
a	a	ab	ad_0	ad_0b	ad_2b
ab	ab	ab	ad_0b	ad_0b	ad_2b
ad_0	ad_0	ad_0b	ad_0	ad_0b	ad_2b
ad_0b	ad_0b	ad_0b	ad_0b	ad_0b	ad_2b
ad_2b	ad_2b	ad_2b	ad_2b	ad_2b	ad_2b

Покажем, что N_1 и N_2 не являются изоморфными ни $\mathfrak{N}_5$, ни $\mathfrak{M}_5$.

Определим отображения ψ подрешетки N_1 на $\mathfrak{N}_5$.

(1) $\psi(ad_2b) = i, \psi(ad_2) = e, \psi(ad_0) = d, \psi(a) = 0$:

$$d = \psi(ad_0) = \psi(ad_0 \circ ad_0b) \neq \psi(ad_0) \circ \psi(ad_0b) = = d \circ c = 0,\ d \neq 0,\ ad_0 = ad_0 \circ ad_0b;$$

(2) $\psi(ad_2b) = i, \psi(ad_2) = c, \psi(ad_0b) = e, \psi(ad_0b) = =e, \psi(a) = 0$:

$$d = \psi(ad_0) = \psi(ad_0 \circ ad_0b) \neq \psi(ad_0) \circ \psi(ad_0b) = = d \circ c = 0,\ d \neq 0,\ ad_0 = ad_0 \circ ad_0b.$$

Следовательно, N_1 не изоморфна $\mathfrak{N}_5$.

Определим отображение ψ подрешетки N_1 на $\mathfrak{M}_5$.

(1) $\psi(ad_2b) = i, \psi(ad_2) = d, \psi(ad_0b) = c, \psi(ad_0) = = e, \psi(a) = 0$:

$$e = \psi(ad_0) = \psi(ad_0 \circ ad_0b) \neq \psi(ad_0) \circ \psi(ad_0b) = = e \circ c = 0,\ e \neq 0,\ ad_0 = ad_0 \circ ad_0b;$$

(2) $\psi(ad_2b) = i, \psi(ad_2) = c, \psi(ad_0b) = d, \psi(ad_0) = = e, \psi(a) = 0$:

$$e = \psi(ad_0) = \psi(ad_0 \circ ad_0b) \neq \psi(ad_0) \circ \psi(ad_0b) = = e \circ d = 0,\ e \neq 0,\ ad_0 = ad_0 \circ ad_0b.$$

Следовательно, N_1 не изоморфна $\mathfrak{M}_5$.

Определим отображение ψ подрешетки N_2 на $\mathfrak{N}_5$.

(1) $\psi(a) = 0, \psi(ad_0) = d, \psi(ab) = c, \psi(ad_0b) = = e, \psi(ad_2b) = i$:

$$e = \psi(ad_0b) = \psi(ab \wedge ad_0) \neq \psi(ab) \wedge \psi(ad_0) = = c \wedge d = i,\ e \neq i,\ ad_0b = ab \wedge ad_0;$$

(2) $\psi(a) = 0, \psi(ad_0) = c, \psi(ab) = d, \psi(ad_0b) = = e, \psi(ad_2b) = i$:

$$e = \psi(ad_0b) = \psi(ab \wedge ad_0) \neq \psi(ab) \wedge \psi(ad_0) = = d \wedge c = i,\ e \neq i,\ ad_0b = ab \wedge ad_0;$$

Следовательно, N_2 не изоморфна $\mathfrak{N}_5$.

Определим отображение ψ подрешетки N_2 на $\mathfrak{M}_5$.

(1) $\psi(a) = 0, \psi(ad_0) = d, \psi(ab) = c, \psi(ad_0b) = = e, \psi(ad_2b) = i$:

$$c = \psi(ab) = \psi(ab \circ ad_0b) \neq \psi(ab) \circ \psi(ad_0b) = = c \circ e = 0,\ c \neq 0,\ ab = ab \circ ad_0b;$$

(2) $\psi(a) = 0, \psi(ad_0) = c, \psi(ab) = d, \psi(ad_0b) = = e, \psi(ad_2b) = i$:

$$d = \psi(ab) = \psi(ab \circ ad_0b) \neq \psi(ab) \circ \psi(ad_0b) = = d \circ e = 0,\ d \neq 0,\ ab = ab \circ ad_0b;$$

(3) $\psi(a) = 0, \psi(ad_0) = d, \psi(ab) = e, \psi(ad_0b) = = c, \psi(ad_2b) = i$:

$$c = \psi(ad_0b) = \psi(ab \wedge ad_0) \neq \psi(ab) \wedge \psi(ad_0) = = e \wedge d = i,\ c \neq i,\ ad_0b = ab \wedge ad_0.$$

Следовательно, N_2 не изоморфна $\mathfrak{M}_5$. Так как $IntL^\sigma$ имеют только две подрешетки, состоящие из пяти элементов N_1 и N_2 такие, что они не изоморфны ни $\mathfrak{N}_5$, ни $\mathfrak{M}_5$, то $IntL^\sigma$ являются дистрибутивными решетками [20, 21].

Таким образом, решетки интенсионалов индуктивных процедур характеризуются аксиомами $x \circ x = x$, $x \wedge x = x$, $x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ z$, $x \wedge (y \wedge z) = = (x \wedge y) \wedge z$, $x \circ y = y \circ x$, $x \wedge y = y \wedge z$, $x \circ (x \wedge y) = = x$, $x \wedge (x \circ y) = x$, $x \circ (y \wedge z) = (x \circ y) \wedge (x \circ z)$, $x \wedge (y \circ z) = = (x \wedge y) \circ (x \wedge z)$.

Правила правдоподобного вывода в ДСМ-методе автоматического порождения гипотез, формализующие индукцию (п.п.в.-1), используют М-предикаты $M^+_{x,n}(V,W)$ и $M^-_{y,n}(V, W)$ с отрицанием $\neg$ или без него, где $x \in I^+$ и $y \in I^-$. Для того чтобы описать решетки для $\neg M^+_{x,n}(V,W)$ и $\neg M^-_{y,n}(V, W)$, введем следующие обозначения: $\neg I^\sigma = \{\neg a^\sigma, \neg(ab)^\sigma, \neg(ad_0)^\sigma, \neg(ad_0b)^\sigma, \neg(ad_2)^\sigma, \neg(ad_2b)^\sigma\}$, где $\sigma \in \{+, -\}$.

$\neg a^\sigma$, $\neg(ab)^\sigma$, $\neg(ad_0)^\sigma$, $\neg(ad_0b)^\sigma$, $\neg(ad_2)^\sigma$, $\neg(ad_2b)^\sigma$ являются обозначениями для $\neg M^+_{a,n}(V,W)$, $\neg M^+_{ab,n}(V,W)$, $\neg M^+_{ad_0,n}(V,W)$, $\neg M^+_{ad_0b,n}(V,W)$, $\neg M^+_{ad_2,n}(V,W)$, $\neg M^+_{ad_2b,n}(V,W)$ соответственно. Так как $M^+_{ab,n}(V,W) \rightleftharpoons M^+_{a,n}(V,W)\ \&\ \&\ b^+(V,W)$, то $\neg M^+_{ab,n}(V,W) \leftrightarrow \neg M^+_{a,n}(V,W) \vee \neg b^+(V,W)$. Аналогично имеет место

$$\neg M^+_{ad_0,n}(V,W) \leftrightarrow \neg M^+_{a,n}(V,W) \vee \neg d^+_0(V,W),$$

$$\neg M^+_{ad_2,n}(V,W) \leftrightarrow \neg M^+_{a,n}(V,W) \vee \neg d^+_2(V,W),$$

$$\neg M^+_{ad_0b,n}(V,W) \leftrightarrow (M^+_{a,n}(V,W) \vee \neg d^+_0(V,W) \vee \neg b^+(V,W)),$$

$$\neg M^+_{ad_2b,n} \leftrightarrow (M^+_{a,n}(V,W) \vee \neg d^+_2(V,W) \vee \neg b^+(V,W)).$$

В силу этого имеем следующие утверждения:

$$\neg(ab)^+ \leftrightarrow (\neg a^+ \vee \neg b^+),\ \neg(ad_0b)^+ \leftrightarrow (\neg a^+ \vee \neg d^+_0 \vee \neg b^+),$$

$$\neg(ad_0)^+ \leftrightarrow (\neg a^+ \vee \neg d^+_0),\ \neg(ad_2)^+ \leftrightarrow (\neg a^+ \vee \neg d^+_2),$$

$$\neg(ad_0b)^+ \leftrightarrow (\neg a^+ \vee \neg d^+_2 \vee \neg b^+).$$

Аналогичные эквивалентности для $\neg M^-_{y,n}(V, W)$, где $y \in I^-$.

Пусть $\neg I^\sigma_1 = \{\neg a^\sigma, \neg(ad_0)^\sigma, \neg(ad_2)^\sigma\}$ тогда получим решетку $Int(\neg L^\sigma_1)$, изоморфную решетке $IntL^\sigma_1$, где $Int(\neg L^\sigma_1) = \langle \neg I^\sigma_1, \circ, \wedge \rangle$.

$Int(\neg L^\sigma_1)$:

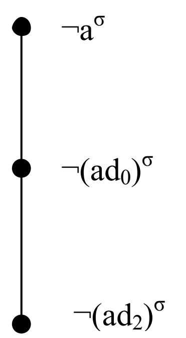


Рис. 8

Пусть $\neg I^{\sigma}_{2} = \{\neg a^{\sigma}, \neg(ab)^{\sigma}, \neg(ad_0)^{\sigma}, \neg(ad_2)^{\sigma}\}$, а $\neg\,\overline{I}_2 = \neg I^{\sigma}_{2} \cup \{\neg(ad_0b)^{\sigma}\}$, где $\sigma \in \{+, -\}$. Тогда получим решетку $Int(\neg L^{\sigma}_{2})$, изоморфную решетке $IntL^{\sigma}_{2}$, где $Int(\neg L^{\sigma}_{2}) = \langle \neg\,\overline{I}_2, \circ, \wedge\rangle$.

$IntL^{\sigma}_{2}$:

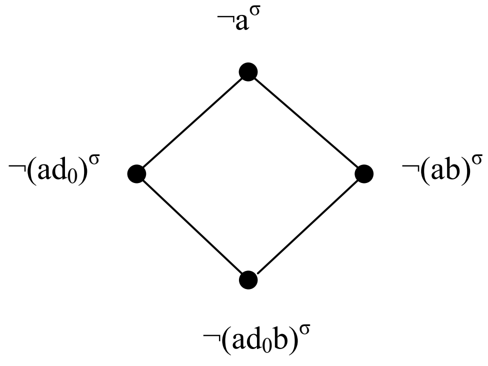


Рис. 9

$$\neg I^{\sigma} = \{\neg a^{\sigma}, \neg(ab)^{\sigma}, \neg(ad_0)^{\sigma}, \neg(ad_2)^{\sigma}\}, \text{ пусть } \neg\,\overline{I}^{\sigma} = \neg I^{\sigma} \cup \{\neg(ad_0b)^{\sigma}, \neg(ad_2b)^{\sigma}\}$$

Определим решетку $Int(\neg L^{\sigma})$, где $\circ$ и $\wedge$ – операции: $x_1 \circ x_2 = Inf\,(x_1, x_2)$, $x_1 \wedge x_2 = Sup\,(x_1, x_2)$.

$Int(\neg L^{\sigma})$:

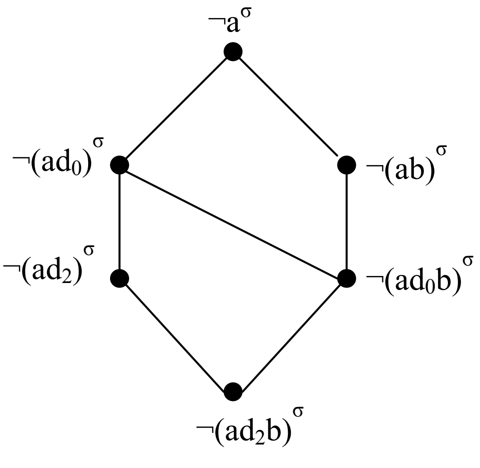


Рис. 10

Решетки $IntL^{\sigma}$, $IntL^{\sigma}_{1}$ и $IntL^{\sigma}_{2}$ изоморфны решеткам $Int(\neg L^{\sigma})$, $Int(\neg L^{\sigma}_{1})$, $Int(\neg L^{\sigma}_{2})$, соответственно, а потому эти решетки являются дистрибутивными.

Замечание 1-3. Из определения решеток $IntL^{+}$ и $IntL^{-}$ следует условие применимости ДСМ-метода АПГ: формула $\exists V \exists W(M^{+}_{a,n}(V,W) \vee M^{-}_{a,n}(V,W))$ должна быть истинной относительно диаграммы модели Ω_0, которая соответствует начальному состоянию базы фактов интеллектуальной системы ИС-ДСМ, реализующей ДСМ-рассуждение. Это означает, существование **реализаций** абстрактных интенсионалов, которыми являются **конкретные интенсионалы,** соответствующие нулям решеток $IntL^{+}$ или $IntL^{-}$ – $M^{+}_{a,n}(V,W)$ или $M^{-}_{a,n}(V,W)$.

Замечание 2-3. Следует обратить внимание на тот факт, что определения интенсионалов М-предикатов формулируется посредством логики предикатов с использованием ДСМ-языка. Определения же их реализаций использует также процедурную семантику и диаграмму модели.

Замечание 3-3. В решетках $IntL^{\sigma}$ имеются три антицепи [20] – $\{ad_2, ad_0b\}$, $\{ad_0, ab\}$ и $\{ad_2, ab\}$, так как $ad_2 \parallel ad_0b$, $ad_0 \parallel ab$ и $ad_2 \parallel ab$ (**Утверждения 4-2**, **2-2** и **6-2**, что представлено на Рис. 3 и Рис. 10). Поэтому естественно рассмотреть $M^{\sigma}_{ad_2,n}(V,W) \vee M^{\sigma}_{ad_0b,n}(V,W)$, $M^{\sigma}_{ad_0,n}(V,W) \vee M^{\sigma}_{ab,n}(V,W)$, $M^{\sigma}_{ad_2,n}(V,W) \vee M^{\sigma}_{ab,n}$.

В силу **Утверждения 1-2** $\forall V \forall W(M^{+}_{ad_2,n}(V,W) \to M^{+}_{ad_0,n}(V,W))$ и его аналога для M^{-}-предикатов и истинности импликации $\forall V \forall W(M^{\sigma}_{ad_0b,n}(V,W) \to M^{\sigma}_{ab,n}(V,W))$, где $\sigma \in \{+, -\}$, доказуема формула (2-3)

$$\forall V \forall W((M^{\sigma}_{ad_2,n}(V,W) \vee M^{\sigma}_{ad_0b,n}(V,W)) \to (M^{\sigma}_{ad_0,n}(V,W) \vee M^{\sigma}_{ab,n}(V,W))).$$

Для доказательства формулы (2-3) введем следующие обозначения (1-2) для $\forall V \forall W(M^{+}_{ad_0b,n}(V,W) \to M^{+}_{ab,n}(V,W))$, (1-3) для $\forall V \forall W(M^{\sigma}_{ad_0b,n}(V,W) \to M^{\sigma}_{ab,n}(V,W))$. Посредством $\vdash$ обозначим отношения выводимости. Тогда требуется показать, что (1-2), (1-3) $\vdash$ (2-3).

Ради удобства записи введем следующие обозначения: $P(V,W)$ вместо $M^{\sigma}_{ad_2,n}(V,W)$, $Q(V,W)$ вместо $M^{\sigma}_{ad_0,n}(V,W)$, $R(V,W)$ вместо $M^{\sigma}_{ad_0b,n}(V,W)$, $S(V,W)$ вместо $M^{\sigma}_{ab,n}(V,W)$. Тогда следует установить, что из

$$\forall V \forall W(P(V,W) \to Q(V,W)), \forall V \forall W(R(V,W) \to S(V,W)) \vdash \forall V \forall W((P(V,W) \vee R(V,W)) \to (Q(V,W) \vee S(V,W))).$$

Эту выводимость легко установить методом аналитических таблиц [18]. Следовательно, имеет место $\forall V \forall W\ ((P(V,W) \vee R(V,W)) \to (Q(V,W) \to S(V,W)))$, а потому доказуема формула (2-3). Следовательно, $ad_2 \geq ad_0$, $ad_0b \geq ab$ и $ad_2 \vee ad_0b \geq ad_0 \vee ab$.

Таким образом, наряду с сингулярными правилами индуктивного вывода, рассмотренными в §1, которые содержат M^{σ}-предикаты, можно применять сложные М-предикаты $M^{\sigma}_{ad_2} \vee M^{\sigma}_{ad_0b}$, $M^{\sigma}_{ad_0} \vee M^{\sigma}_{ab}$ и $M^{\sigma}_{ad_2} \vee M^{\sigma}_{ab}$, где $\sigma \in \{+, -\}$.

Введем следующие сокращения:

$M^{\sigma}_{1}(V,W)$ вместо $M^{\sigma}_{ad_2,n}(V,W) \vee M^{\sigma}_{ad_0b,n}(V,W)$,

$M^{\sigma}_{2}(V,W)$ вместо $M^{\sigma}_{ad_0,n}(V,W) \vee M^{\sigma}_{ab,n}(V,W)$ и

$M^{\sigma}_{3}(V,W)$ вместо $M^{\sigma}_{ad_2,n}(V,W) \vee M^{\sigma}_{ab,n}(V,W)$.

Легко показать, что $\forall V \forall W(M_1^\sigma(V,W) \to M_3^\sigma(V,W))$, $\forall V \forall W(M_3^\sigma(V,W) \to M_2^\sigma(V,W))$, а, следовательно, $M_1^\sigma(V,W) \ge M_3^\sigma(V,W) \ge M_2^\sigma(V,W)$.

В связи со сказанным возможны следующие стратегии ДСМ-метода АПГ с несингулярными М-предикатами:

(1) M_1^σ, M_1^σ; (2) M_1^σ, M_2^σ; (3) M_1^σ, M_3^σ; (4) M_2^σ, M_2^σ; (5) M_2^σ, M_1^σ; (6) M_2^σ, M_3^σ; (7) M_3^σ, M_3^σ; (8) M_3^σ, M_1^σ; (9) M_3^σ, M_2^σ .

Каждой из стратегий (1) - (9) соответствуют четыре правила индуктивного вывода (п.п.в.-1) $(I)^\sigma$, где $\sigma \in \{+, -, 0, \tau\}$ для гипотез с истинностными значениями $\langle 1, n+1\rangle$, $\langle -1, n+1\rangle$, $\langle 0, n+1\rangle$ и $(\tau, n+1)$ (множество возможных истинностных значений), соответственно.

Приведем пример с интересной стратегией (4) с M_2^+ и M_2^-:

$$(I)_a^+ \ \frac{J_{(\tau,n)}(V \Rightarrow_2 W), M_{2,n}^+(V,W) \ \& \ \neg M_{2,n}^-(V,W)}{J_{\langle 1,n+1\rangle}(V \Rightarrow_2 W)},$$

$$(I)_a^- \ \frac{J_{(\tau,n)}(V \Rightarrow_2 W), \neg M_{2,n}^+(V,W) \ \& \ M_{2,n}^-(V,W)}{J_{\langle -1,n+1\rangle}(V \Rightarrow_2 W)},$$

$$(I)_a^0 \ \frac{J_{(\tau,n)}(V \Rightarrow_2 W), M_{2,n}^+(V,W) \ \& \ M_{2,n}^-(V,W)}{J_{\langle 0,n+1\rangle}(V \Rightarrow_2 W)},$$

$$(I)_a^\tau \ \frac{J_{(\tau,n)}(V \Rightarrow_2 W), \neg M_{2,n}^+(V,W) \ \& \ \neg M_{2,n}^-(V,W)}{J_{(\tau,n+1)}(V \Rightarrow_2 W)}.$$

Возможен и другой вариант стратегии ДСМ-рассуждений такой, что в качестве (+)-предикатов берутся $M_{i,n}^+(V,W)$, где i=1,2, а в качестве (–)–предикатов берутся $M_{y,n}^-(V,W)$, где $y \in \Gamma$, а также стратегии с $M_{x,n}^+(V,W)$, где $x \in I^+$, и $M_{i,n}^-(V,W)$, где i=1, 2. Эти стратегии могут увеличить полноту предсказаний посредством (±)-гипотез о причинах рассматриваемых эффектов в базах фактов интеллектуальных систем (ИС-ДСМ).

§ 4. РЕШЕТКИ ЭКСТЕНСИОНАЛОВ ДЛЯ М–ПРЕДИКАТОВ

В § 3 было дано определение экстенсионалов М-предикатов. Напомним определение: посредством $\{\langle V,W\rangle | M_{x,n}^+(V,W)\}$ и $\{\langle V,W\rangle | M_{y,n}^-(V,W)\}$, где $x \in I^+$ и $y \in \Gamma$ понимаются множества всех пар $\langle C, Q\rangle$ таких, что они выполняют эти предикаты.

$S_x^+ = \{\langle V,W\rangle | M_{x,n}^+(V,W)\}$ и $S_y^- = \{\langle V,W\rangle | M_{y,n}^-(V,W)\}$ являются бинарными отношениями. Ради простоты записи вместо S_x^+ и S_y^- будем использовать {x} и {y}, соответственно.

Рассмотрим множества $\tilde{I}_1^\sigma$, $\tilde{I}_2^\sigma$, $\tilde{I}^\sigma$ где $\sigma \in \{+, -\}$ такие, что $\tilde{I}_1^\sigma = \{\{a^\sigma\}, \{(ad_0)^\sigma\}, \{(ad_2)^\sigma\}\}$, $\tilde{I}_2^\sigma = \{\{a^\sigma\}, \{(ab)^\sigma\}, \{(ad_0)^\sigma\}\}$, $\tilde{I}^\sigma = \{\{a^\sigma\}, \{(ab)^\sigma\}, \{(ad_0)^\sigma, \{(ad_2)^\sigma\}\}$.

Рассмотрим также множества $\overline{\tilde{I}}_2^\sigma$, $\overline{\tilde{I}}^\sigma$, такие, что

$\overline{\tilde{I}}_2^\sigma = \tilde{I}_2^\sigma \cup \{\{(ad_0b)^\sigma\}, \{(ad_0)^\sigma\} \cup \{(ab)^\sigma\}\}$,

$\overline{\tilde{I}}^\sigma = \tilde{I}^\sigma \cup \{\{(ad_0b)^\sigma\}, \{(ad_2b)^\sigma\}, \{(ad_0)^\sigma\} \cup \{(ab)^\sigma\}, \{(ad_2)^\sigma\} \cup \{(ab)^\sigma\}, \{(ad_2)^\sigma\} \cup \{(ad_0b)^\sigma\}\}$.

Очевидно, что $\tilde{I}_i^\sigma \subseteq \tilde{I}^\sigma$, где i = 1, 2; а $\overline{\tilde{I}}_2^\sigma \subseteq \overline{\tilde{I}}^\sigma$.

Положим, что $\{(ad_0b)^\sigma\} = \{(ad_0)^\sigma\} \cap \{(ab)^\sigma\}$, $\{(ad_2b)^\sigma\} = \{(ad_2)^\sigma\} \cap \{(ab)^\sigma\}$.

Согласно **Утверждению 2-2** $\{(ad_0)^\sigma\} \parallel \{(ab)^\sigma\}$, согласно **Утверждениям 6-2** и **4-2** – $\{(ad_2)^\sigma\} \parallel \{(ab)^\sigma\}$ и $\{(ad_2)^\sigma\} \parallel \{(ad_0b)^\sigma\}$, соответственно из-за несравнимости соответствующих интенсионалов. В силу же **Утверждения 1-2** $\{(ad_2)^\sigma\} \subseteq \{(ad_0)^\sigma\}$. Поэтому

$$\neg(\{(ad_0)^\sigma\} \subseteq \{(ab)^\sigma\}) \ \& \ \neg(\{(ab)^\sigma\} \subseteq \{(ad_0)^\sigma\}) \ \&$$
$$\& \neg(\{(ad_2)^\sigma\} \subseteq \{(ab)^\sigma\}) \ \& \ \neg(\{(ab)^\sigma\} \subseteq \{(ad_2)^\sigma\}),$$
$$\neg(\{(ad_2)^\sigma\} \subseteq \{(ad_0b)^\sigma\}) \ \& \ \neg(\{(ad_0b)^\sigma\} \subseteq \{(ad_2)^\sigma\}).$$

Для характеризации экстенсионалов рассмотрим булеву алгебру $B_e = \langle 2^{U^{(1)} \times U^{(2)}}, -, \cap, \cup\rangle$, для которой определено отношение $\subseteq$. Следовательно, определены $\mathrm{Inf}(Z_1, Z_2) = Z_1 \cap Z_2$, $\mathrm{Sup}(Z_1, Z_2) = Z_1 \cup Z_2$.

Используя операции $\cap$ и $\cup$, построим следующие решетки экстенсионалов М-предикатов:

$\mathrm{ExtL}_1^\sigma = \langle \tilde{I}_1^\sigma, \cap, \cup\rangle$, $\mathrm{ExtL}_2^\sigma = \langle \overline{\tilde{I}}_2^\sigma, \cap, \cup\rangle$, $\mathrm{ExtL}^\sigma = \langle \overline{\tilde{I}}^\sigma, \cap, \cup\rangle$.

Очевидно, что ExtL_i^σ, i =1, 2, являются подрешетками ExtL^σ.

В частично упорядоченном множестве $\overline{\tilde{I}}^\sigma$ имеются следующие антицепи $\{(ad_2)^\sigma\}$, $\{(ad_0b)^\sigma\}$ (из-за **Утверждения 4-2**); $\{(ad_0)^\sigma\}$, $\{(ab)^\sigma\}$ (из-за **Утверждения 2-2**); $\{(ad_2)^\sigma\}$, $\{(ab)^\sigma\}$ (из-за **Утверждения 6-2**).

Имеются также следующие антицепи $\{(ad_0)^\sigma\}$, $\{(ad_2)^\sigma \cup (ab)^\sigma\}$; $\{(ab)^\sigma\}$, $\{(ad_2)^\sigma \cup (ad_0b)^\sigma\}$. Так как $\{(ad_0)^\sigma\} \subseteq \{(ad_0)^\sigma\}$, $\{(ad_0)^\sigma\} \parallel \{(ab)^\sigma\}$, то

$$\neg(\{(ad_0)^\sigma\} \subseteq \{(ad_2)^\sigma\} \cup \{(ab)^\sigma\}) \ \& \ \neg(\{(ad_2)^\sigma\} \cup \{(ab)^\sigma\} \subseteq \{(ad_0)^\sigma\}),$$

следовательно, $\{(ad_0)^\sigma\} \parallel \{(ad_2)^\sigma\} \cup \{(ab)^\sigma\}$. Так как $\{(ad_2)^\sigma\} \parallel \{(ab)^\sigma\}$ и $\{(ad_2)^\sigma\} \parallel \{(ad_0b)^\sigma\}$, то

$$\neg(\{(ab)^\sigma\} \subseteq \{(ad_2)^\sigma\} \cup \{(ad_0b)^\sigma\}) \ \& \ \neg(\{(ad_2)^\sigma\} \cup \{(ad_0b)^\sigma\} \subseteq \{(ab)^\sigma\}),$$

следовательно, $\{(ab)^\sigma\} \parallel \{(ad_2)^\sigma\} \cup \{(ad_0b)^\sigma\}$.

Так как $\{(ad_2)^\sigma\} \subseteq \{(ad_0)^\sigma\} \subseteq \{(a)^\sigma\}$, то решетки $\mathrm{ExtL}_1^\sigma = \langle \tilde{I}_1^\sigma, \cap, \cup\rangle$ имеют вид[14]:

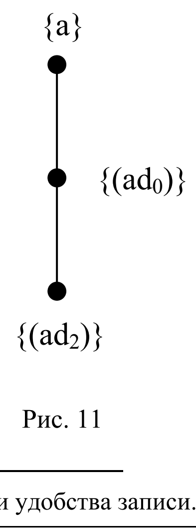


Рис. 11

[14] Индекс σ опущен ради удобства записи.

Так как $\{(ad_0b)^\sigma\} \subseteq \{(ad_0)^\sigma\} \subseteq \{(ad_0)^\sigma\} \cup \{(ab)^\sigma\} \subseteq \{(a)^\sigma\}$, $\{(ad_0b)^\sigma\} \subseteq \{(ab)^\sigma\} \subseteq \{(ad_0)^\sigma\} \cup \{(ab)^\sigma\} \subseteq \{(a)^\sigma\}$, то решетки $\mathrm{ExtL}_2^\sigma = \langle \tilde{\mathrm{I}}_2^\sigma, \cap, \cup\rangle$ имеют вид:

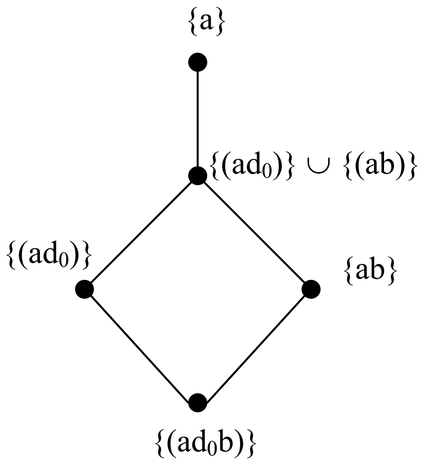


Рис. 12

Так как $\{(ad_2b)^\sigma\} \subseteq \{(ad_2)^\sigma\} \subseteq \{(ad_2)^\sigma\} \cup \{(ad_0b)^\sigma\} \subseteq \subseteq \{(ad_0)^\sigma\} \subseteq \{(ad_0)^\sigma\} \cup \{(ab)^\sigma\} \subseteq \{(a)^\sigma\}$, $\{(ad_2b)^\sigma\} \subseteq \subseteq \{(ad_0b)^\sigma\} \subseteq \{(ab)^\sigma\} \subseteq \{(ad_2)^\sigma\} \cup \{(ab)^\sigma\} \subseteq \{(ad_0)^\sigma\} \cup \cup \{(ab)^\sigma\} \subseteq \{(a)^\sigma\}$, $\{(ad_0b)^\sigma\} \subseteq \{(ad_2)^\sigma\} \cup \{(ad_0b)^\sigma\} \subseteq \subseteq \{(ad_2)^\sigma\} \cup \{(ab)^\sigma\}$, то решетки $\mathrm{ExtL}^\sigma = \langle \tilde{\mathrm{I}}^\sigma, \cap, \cup\rangle$ имеют вид:

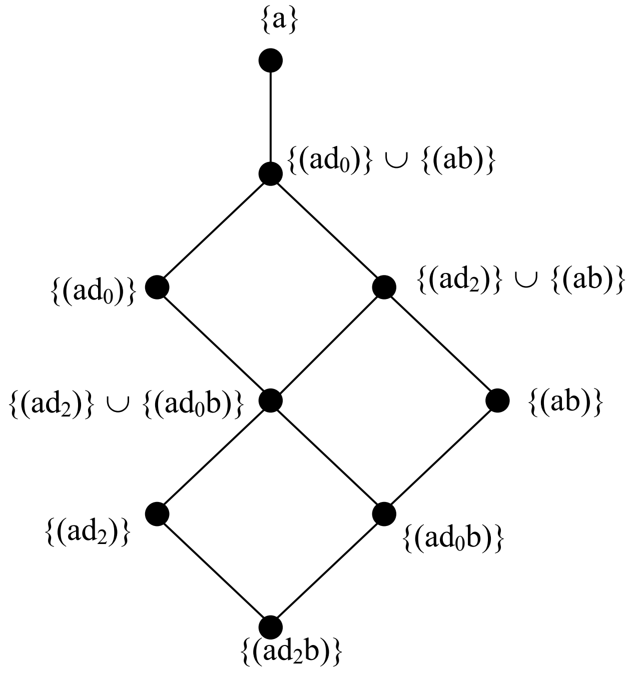


Рис. 13

Определим ниже операции $\cap$ и $\cup$ для $\mathrm{ExtL}_2^\sigma = \langle \tilde{\mathrm{I}}_2^\sigma, \cap, \cup\rangle$.

$\cap$	a	ab	ad_0	$ad_0\cup ab$	ad_0b	ad_2	$ad_2\cup ad_0b$	$ad_2\cup ab$	ad_2b
a	a	ab	ad_0	$ad_0\cup ab$	ad_0b	ad_2	$ad_2\cup ad_0b$	$ad_2\cup ab$	ad_2b
ab	ab	ab	ad_0b	ab	ad_0b	ad_2b	ad_0b	ab	ad_2b
ad_0	ad_0	ad_0b	ad_0	ad_0	ad_0b	ad_2	$ad_2\cup ad_0b$	$ad_2\cup ab$	ad_2b
$ad_0\cup ab$	$ad_0\cup ab$	ab	ad_0	$ad_0\cup ab$	ad_0b	ad_2	$ad_2\cup ad_0b$	$ad_2\cup ab$	ad_2b
ad_0b	ad_0b	ad_0b	ad_0b	ad_0b	ad_0b	ad_2b	ad_0b	ad_0b	ad_2b
ad_2	a	$ad_2\cup ad_0b$	ad_0	$ad_0\cup ab$	$ad_2\cup ad_0b$	ad_2	$ad_2\cup ad_0b$	$ad_2\cup ab$	ad_2b
$ad_2\cup ad_0b$	$ad_2\cup ad_0b$	ad_0b	$ad_2\cup ad_0b$	$ad_2\cup ad_0b$	$ad_2\cup ad_0b$	ad_2	$ad_2\cup ad_0b$	$ad_2\cup ab$	ad_2b
$ad_2\cup ab$	$ad_2\cup ab$	ab	$ad_2\cup ad_0b$	$ad_2\cup ab$	ad_0b	ad_2	$ad_2\cup ad_0b$	$ad_2\cup ab$	ad_2b
ad_2b	ad_2b	ad_2b	ad_2b	ad_2b	ad_2b	ad_2b	ad_2b	ad_2b	ad_2b

$\cup$	a	ab	ad_0	$ad_0\cup ab$	ad_0b	ad_2	$ad_2\cup ad_0b$	$ad_2\cup ab$	ad_2b
a	a	a	a	a	a	a	a	a	a
ab	a	ab	$ad_0\cup ab$	$ad_0\cup ab$	ab	$ad_2\cup ab$	$ad_2\cup ab$	$ad_2\cup ab$	ab
ad_0	a	$ad_0\cup ab$	ad_0	$ad_0\cup ab$	ad_0	ad_0	ad_0	$ad_0\cup ab$	ad_0
$ad_0\cup ab$	a	$ad_0\cup ab$	$ad_0\cup ab$	$ad_0\cup ab$	$ad_0\cup ab$	$ad_0\cup ab$	$ad_0\cup ab$	$ad_0\cup ab$	$ad_0\cup ab$
ad_0b	a	ab	ad_0	$ad_0\cup ab$	ad_0b	$ad_2\cup ad_0b$	$ad_2\cup ad_0b$	$ad_2\cup ab$	ad_0b
ad_2	a	$ad_2\cup ab$	ad_0	$ad_0\cup ab$	$ad_2\cup ad_0b$	ad_2	$ad_2\cup ad_0b$	$ad_2\cup ab$	ad_2
$ad_2\cup ad_0b$	a	$ad_2\cup ab$	ad_0	$ad_0\cup ab$	$ad_2\cup ad_0b$	$ad_2\cup ad_0b$	$ad_2\cup ad_0b$	$ad_2\cup ab$	$ad_2\cup ad_0b$
$ad_2\cup ab$	a	$ad_2\cup ad_0b$	$ad_0\cup ab$	$ad_2\cup ab$	$ad_2\cup ab$	$ad_2\cup ab$	$ad_2\cup ab$	$ad_2\cup ab$	$ad_2\cup ab$
ad_2b	a	ab	ad_0	$ad_0\cup ab$	ad_0b	ad_2	$ad_2\cup ad_0b$	$ad_2\cup ab$	ad_2b

Рассмотрим подрешетки ExtL_1^{σ} решетки ExtL^{σ}, где $\sigma \in \{+, -\}$.

Так как $\{(ad_2)^{\sigma}\} \subseteq \{(ad_0)^{\sigma}\} \subseteq \{(a)^{\sigma}\}$, то в $\mathrm{ExtL}_1^{\sigma} = \langle \tilde{\mathrm{I}}_1^{\sigma}, \cap, \cup \rangle$ операции $\cap$ и $\cup$ определяются следующим образом:

$\cap$	$\{(a)^{\sigma}\}$	$\{(ad_0)^{\sigma}\}$	$\{(ad_2)^{\sigma}\}$
$\{(a)^{\sigma}\}$	$\{(a)^{\sigma}\}$	$\{(ad_0)^{\sigma}\}$	$\{(ad_2)^{\sigma}\}$
$\{(ad_0)^{\sigma}\}$	$\{(ad_0)^{\sigma}\}$	$\{(ad_0)^{\sigma}\}$	$\{(ad_2)^{\sigma}\}$
$\{(ad_2)^{\sigma}\}$	$\{(ad_2)^{\sigma}\}$	$\{(ad_2)^{\sigma}\}$	$\{(ad_2)^{\sigma}\}$

$\cup$	$\{(a)^{\sigma}\}$	$\{(ad_0)^{\sigma}\}$	$\{(ad_2)^{\sigma}\}$
$\{(a)^{\sigma}\}$	$\{(a)^{\sigma}\}$	$\{(a)^{\sigma}\}$	$\{(a)^{\sigma}\}$
$\{(ad_0)^{\sigma}\}$	$\{(a)^{\sigma}\}$	$\{(ad_0)^{\sigma}\}$	$\{(ad_0)^{\sigma}\}$
$\{(ad_2)^{\sigma}\}$	$\{(a)^{\sigma}\}$	$\{(ad_0)^{\sigma}\}$	$\{(ad_2)^{\sigma}\}$

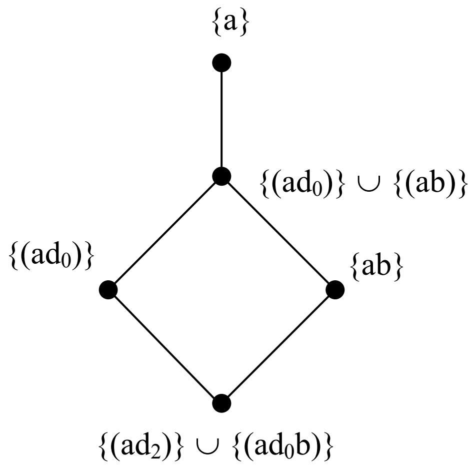
Подрешетки ExtL_2^{σ} решеток ExtL^{σ}, $\mathrm{ExtL}_2^{\sigma} = \langle \bar{\tilde{\mathrm{I}}}_2^{\sigma}, \cap, \cup \rangle$ имеют операции $\cap$ и $\cup$, которые содержатся в определении ExtL^{σ} для $\bar{\tilde{\mathrm{I}}}_2^{\sigma} = \{\{(a)^{\sigma}\}, \{(ab)^{\sigma}\}, \{(ad_0)^{\sigma}\}, \{(ad_0)^{\sigma}\} \cup \{(ab)^{\sigma}\}, \{(ad_0b)^{\sigma}\}\}$.

Решетки ExtL_1^{σ}, ExtL_2^{σ} и ExtL^{σ} являются дистрибутивными. Для доказательства дистрибутивности ExtL^{σ} достаточно установить, что все их подрешетки, образованные пятью элементами не являются изоморфными «пентагону» (рис. 4) и «диаманту» (рис. 5).

Подрешетками ExtL^{σ}, образованными пятью элементами, являются следующие четыре подрешетки $\mathrm{ExtL}_{3,j}^{\sigma}$, где $j = 1, 2, 3, 4$.

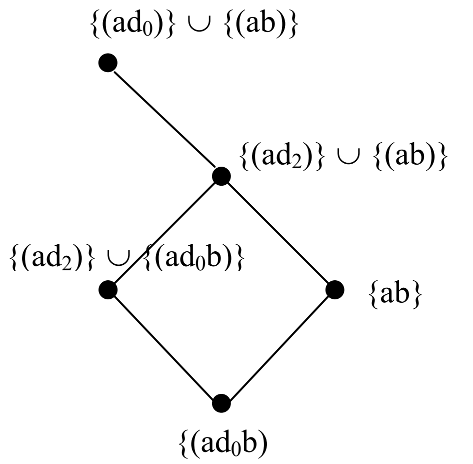
Рассуждения, аналогичные доказательству **Утверждения 1-3**, показывают, что подрешетки $\mathrm{ExtL}_{3,j}^{\sigma}$, где $j = 1,2,3, 4$, не являются изоморфными ни «пентагону», ни «диаманту».

Замечание 1-4. Решетки IntL_2^{σ} и ExtL_2^{σ}, IntL^{σ} и ExtL^{σ}, соответственно, не являются изоморфными.



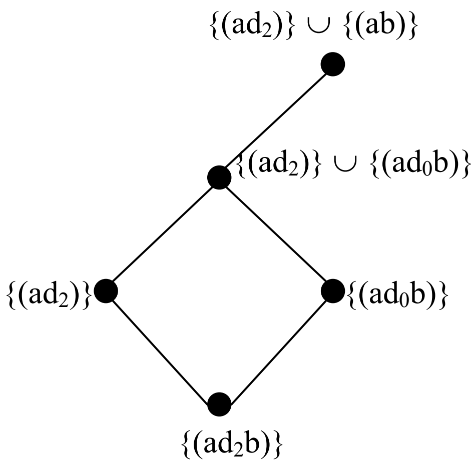
$\mathrm{ExtL}_{3,1}^{\sigma}$

Рис. 14



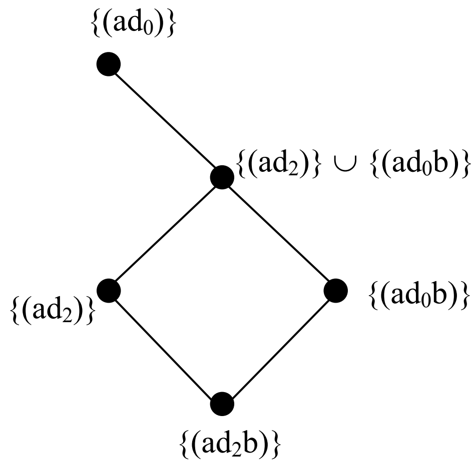
$\mathrm{ExtL}_{3,2}^{\sigma}$

Рис. 15



$\mathrm{ExtL}_{3,3}^{\sigma}$

Рис. 16



$\mathrm{ExtL}_{3,4}^{\sigma}$

Рис. 17

§ 5. РЕШЕТКИ ПРАВИЛ ИНДУКТИВНЫХ ВЫВОДОВ ДСМ-МЕТОДА АПГ

В §1 были сформулированы правила индуктивного вывода (п.п.в.-1), использующие М-предикаты $M^{+}_{a,n}(V,W)$ и $M^{-}_{a,n}(V,W)$ для индуктивного метода сходства [12]. Переформулируем эти п.п.в.-1 для М-предикатов $M^{+}_{x,n}(V,W)$ и $M^{-}_{y,n}(V,W)$, где $x \in \tilde{I}^{+}$, $y \in \tilde{I}^{-}$, а $IntL^{+} = \langle \tilde{I}^{+}, \circ, \wedge \rangle$ и $IntL^{-} = \langle \tilde{I}^{-}, \circ, \wedge \rangle$.

Таким образом, будем рассматривать М-предикаты, образующие решетки интенсионалов $IntL^{\sigma}$, где $\sigma \in \{+, -\}$.

$$(I)^{+}\ \frac{J_{(\tau,n)}(V \Rightarrow_2 W), M^{+}_{x,n}(V,W) \,\&\, \neg M^{-}_{y,n}(V,W)}{J_{\langle 1,n+1\rangle}(V \Rightarrow_2 W)},$$

$$(I)^{-}\ \frac{J_{(\tau,n)}(V \Rightarrow_2 W), \neg M^{+}_{x,n}(V,W) \,\&\, M^{-}_{y,n}(V,W)}{J_{\langle -1,n+1\rangle}(V \Rightarrow_2 W)},$$

$$(I)^{0}\ \frac{J_{(\tau,n)}(V \Rightarrow_2 W), M^{+}_{x,n}(V,W) \,\&\, M^{-}_{y,n}(V,W)}{J_{\langle 0,n+1\rangle}(V \Rightarrow_2 W)},$$

$$(I)^{\tau}\ \frac{J_{(\tau,n)}(V \Rightarrow_2 W), \neg M^{+}_{x,n}(V,W) \,\&\, \neg M^{-}_{y,n}(V,W)}{J_{(\tau,n+1)}(V \Rightarrow_2 W)}.$$

Следовательно, для характеризации индуктивных выводов п.п.в.-1 для $(I)^{\sigma}$, где $\sigma \in \{+, -, \tau, 0\}$, следует использовать как $\mathbf{M}^{\sigma}$, так и $\neg\mathbf{M}^{\sigma} = \{\neg M^{\sigma}_{a,n}(V,W), \neg M^{\sigma}_{ab,n}(V,W), \neg M^{\sigma}_{ad_0,n}(V,W), \neg M^{\sigma}_{ad_2,n}(V,W)\}$, а также $\overline{\mathbf{M}}^{\sigma} = \mathbf{M}^{\sigma} \cup \{M^{\sigma}_{ad_0b,n}(V,W), M^{\sigma}_{ad_2b,n}(V,W)\}$ и $\overline{\mathbf{M}}^{\sigma} = \neg\mathbf{M}^{\sigma} \cup \{\neg M^{\sigma}_{ad_0b,n}(V,W), \neg M^{\sigma}_{ad_2b,n}(V,W)\}$. Используя сокращенную запись для описания решеток М-предикатов и ¬М-предикатов, получим $\neg I^{\sigma} = \{\neg a^{\sigma}, \neg(ab)^{\sigma}, \neg(ad_0)^{\sigma}, \neg(ad_2)^{\sigma}\}$ и $\neg\overline{I}^{\sigma} = \neg I^{\sigma} \cup \{\neg(ad_0b)^{\sigma}, \neg(ad_2b)^{\sigma}\}$. $\neg R^{\sigma} = \langle \neg\overline{I}^{\sigma}, \geq \rangle$, где отношение $\geq$ определяется аналогично решеткам $IntL^{\sigma}$, является частично упорядоченным множеством таким, что для любых его элементов Z_1 и Z_2 определены $Inf(Z_1, Z_2) = Z_1 \circ Z_2$ и $Sup(Z_1, Z_2) = Z_1 \wedge Z_2$.

Это утверждение следует из определений $\geq$ и М-предикатов: $\neg a^{\sigma} \geq \neg(ab)^{\sigma} \geq \neg(ad_0b)^{\sigma} \geq \neg(ad_2b)^{\sigma}$, $\neg a^{\sigma} \geq \neg(ad_0)^{\sigma} \geq \neg(ad_2)^{\sigma} \geq \neg(ad_2b)^{\sigma}$, $\neg(ad_0)^{\sigma} \geq \neg(ad_0b)^{\sigma}$).

Из **Утверждения 1-2** следует, что $\neg(ad_0)^{\sigma} \geq \neg(ad_2)^{\sigma}$, а из **Утверждений 2-2**, **4-2** и 6-2 следует несравнимость $\neg(ab)^{\sigma}$ и $\neg(ad_0)^{\sigma}$, $\neg(ad_0b)^{\sigma}$ и $\neg(ad_2)^{\sigma}$, $\neg(ab)^{\sigma}$ и $\neg(ad_2)^{\sigma}$, соответственно. Таким образом: $\neg(ab)^{\sigma} \parallel \neg(ad_0)^{\sigma}$, $\neg(ad_0b)^{\sigma} \parallel \neg(ad_2)^{\sigma}$, $\neg(ab)^{\sigma} \parallel \neg(ad_2)^{\sigma}$.

Поэтому **стратегией** ДСМ-рассуждения ([9], Часть II, с. 16) будем теперь называть п.п.в.-1 $(I)^{\sigma}_{x,y}$, где $\sigma \in \{+, -, 0, \tau\}$ такие, что $x \in \overline{I}^{+}$ или $x \in \neg\overline{I}^{+}$, $y \in \overline{I}^{-}$ или $y \in \neg\overline{I}^{-}$, а $IntL^{+} = \langle \overline{I}^{+}, \circ, \wedge \rangle$, $Int(\neg L^{+}) = \langle \neg\overline{I}^{+}, \circ, \wedge \rangle$, $IntL^{-} = \langle \overline{I}^{-}, \circ, \wedge \rangle$, $Int(\neg L^{-}) = \langle \neg\overline{I}^{-}, \circ, \wedge \rangle$.

Определим и множество всех стратегий

$\overline{Str} = \{Str_{x,y} | ((x \in \overline{I}^{+}) \vee (x \in \neg\overline{I}^{+})) \,\&\, ((y \in \overline{I}^{-}) \vee (y \in \neg\overline{I}^{-}))\}$.

Заметим, что $\neg M^{\sigma}_{ad_0b,n}(V,W)$ эквивалентен $\neg M^{\sigma}_{a,n}(V,W) \vee \vee \neg d^{\sigma}(V,W) \vee \neg b^{\sigma}(V,W)$, аналогичное имеет место для $\neg M^{\sigma}_{ad_0,n}(V,W)$, $\neg M^{\sigma}_{ad_0,n}(V,W)$, $\neg M^{\sigma}_{ad_2,n}(V,W)$, $\neg M^{\sigma}_{ab,n}(V,W)$.

Получаем решетку интенсионалов для

$\neg\mathbf{M}^{\sigma}$ $Int(\neg L^{\sigma}) = \langle \neg\overline{I}^{\sigma}, \circ, \wedge \rangle$,

представленную на Рис. 10. Её подрешетки $Int(\neg L^{\sigma}_1)$ и $Int(\neg L^{\sigma}_2)$ представлены на Рис. 8 и Рис. 9.

Опишем решетки $Int(\neg L^{\sigma}_1)$ и $Int(\neg L^{\sigma}_2)$ посредством таблиц для операций $\circ$ и $\wedge$[15]:

$\circ$	$\neg(ad_2)$	$\neg(ad_0)$	$\neg a$
$\neg(ad_2)$	$\neg(ad_2)$	$\neg(ad_2)$	$\neg(ad_2)$
$\neg(ad_0)$	$\neg(ad_2)$	$\neg(ad_0)$	$\neg(ad_0)$
$\neg a$	$\neg(ad_2)$	$\neg(ad_0)$	$\neg a$

$\wedge$	$\neg(ad_2)$	$\neg(ad_0)$	$\neg a$
$\neg(ad_2)$	$\neg(ad_2)$	$\neg(ad_0)$	$\neg a$
$\neg(ad_0)$	$\neg(ad_0)$	$\neg(ad_0)$	$\neg a$
$\neg a$	$\neg a$	$\neg a$	$\neg a$

$Int(\neg L^{\sigma}_1) = \langle \neg I^{\sigma}_1, \circ, \wedge \rangle$

$\circ$	$\neg(ad_0b)$	$\neg(ab)$	$\neg(ad_0)$	$\neg a$
$\neg(ad_0b)$	$\neg(ad_0b)$	$\neg(ad_0b)$	$\neg(ad_0b)$	$\neg(ad_0b)$
$\neg(ab)$	$\neg(ad_0b)$	$\neg(ab)$	$\neg(ad_0b)$	$\neg(ab)$
$\neg(ad_0)$	$\neg(ad_0b)$	$\neg(ad_0b)$	$\neg(ad_0)$	$\neg(ad_0)$
$\neg a$	$\neg(ad_0b)$	$\neg(ab)$	$\neg(ad_0)$	$\neg a$

$\wedge$	$\neg(ad_0b)$	$\neg(ab)$	$\neg(ad_0)$	$\neg a$
$\neg(ad_0b)$	$\neg(ad_0b)$	$\neg(ab)$	$\neg(ad_0)$	$\neg a$
$\neg(ab)$	$\neg(ab)$	$\neg(ab)$	$\neg a$	$\neg a$
$\neg(ad_0)$	$\neg(ad_0)$	$\neg a$	$\neg(ad_0)$	$\neg a$
$\neg a$	$\neg a$	$\neg a$	$\neg a$	$\neg a$

$Int(\neg L^{\sigma}_2) = \langle \neg I^{\sigma}_2, \circ, \wedge \rangle$

Решетки $Int(\neg L^{\sigma})$ также могут быть описаны посредством таблиц для операций $\circ$ и $\wedge$ (Рис. 10).

[15] Индекс σ опущен ради удобства записи.

$\circ$	$\neg(ad_2b)$	$\neg(ad_2)$	$\neg(ad_0b)$	$\neg(ad_0)$	$\neg(ab)$	$\neg a$
$\neg(ad_2b)$	$\neg(ad_2b)$	$\neg(ad_2b)$	$\neg(ad_2b)$	$\neg(ad_2b)$	$\neg(ad_2b)$	$\neg(ad_2b)$
$\neg(ad_2)$	$\neg(ad_2b)$	$\neg(ad_2b)$	$\neg(ad_2b)$	$\neg(ad_2)$	$\neg(ad_0b)$	$\neg(ad_2)$
$\neg(ad_0b)$	$\neg(ad_2b)$	$\neg(ad_2b)$	$\neg(ad_0b)$	$\neg(ad_0b)$	$\neg(ad_0b)$	$\neg(ad_0b)$
$\neg(ad_0)$	$\neg(ad_2b)$	$\neg(ad_2)$	$\neg(ad_0b)$	$\neg(ad_0)$	$\neg(ab)$	$\neg(ad_0)$
$\neg(ab)$	$\neg(ad_2b)$	$\neg(ad_2b)$	$\neg(ad_0b)$	$\neg(ad_0b)$	$\neg(ab)$	$\neg(ab)$
$\neg a$	$\neg(ad_2b)$	$\neg(ad_2)$	$\neg(ad_0b)$	$\neg(ad_0)$	$\neg(ab)$	$\neg a$

$\wedge$	$\neg(ad_2b)$	$\neg(ad_2)$	$\neg(ad_0b)$	$\neg(ad_0)$	$\neg(ab)$	$\neg a$
$\neg(ad_2b)$	$\neg(ad_2b)$	$\neg(ad_2)$	$\neg(ad_0b)$	$\neg(ad_0)$	$\neg(ab)$	$\neg a$
$\neg(ad_2)$	$\neg(ad_2)$	$\neg(ad_2)$	$\neg(ad_0)$	$\neg(ad_0)$	$\neg a$	$\neg a$
$\neg(ad_0b)$	$\neg(ad_0b)$	$\neg(ad_0)$	$\neg(ad_0b)$	$\neg(ad_0)$	$\neg(ab)$	$\neg a$
$\neg(ad_0)$	$\neg(ad_0)$	$\neg(ad_0)$	$\neg(ad_0)$	$\neg(ad_0)$	$\neg a$	$\neg a$
$\neg(ab)$	$\neg(ab)$	$\neg a$	$\neg(ab)$	$\neg a$	$\neg(ab)$	$\neg a$
$\neg a$	$\neg a$	$\neg a$	$\neg a$	$\neg a$	$\neg a$	$\neg a$

$\mathrm{Int}(\neg L^{\sigma}) = \langle \neg\, \overline{I}^{\sigma}, \circ, \wedge \rangle$

Аналогично определяются решетки экстенсионалов $\mathrm{Ext}(\neg L^{\sigma})$ и их подрешетки $\mathrm{Ext}(\neg L_1^{\sigma})$ и $\mathrm{Ext}(\neg L_2^{\sigma})$, соответствующие $\neg M^{+}_{x,n}(V,W)$ и $\neg M^{-}_{y,n}(V,W)$.

Имеются четыре вида правил правдоподобного (индуктивного) вывода (п.п.в.-1), содержащих посылки $M^{+}_{x,n}(V,W)$ & $\neg M^{-}_{y,n}(V,W)$, $\neg M^{+}_{x,n}(V,W)$ & $M^{-}_{y,n}(V,W)$, $M^{+}_{x,n}(V,W)$ & $M^{-}_{y,n}(V,W)$, $\neg M^{+}_{x,n}(V,W)$ & $\neg M^{-}_{y,n}(V,W)$, а, следовательно, каждому виду п.п.в.-1 $(I)^{\sigma}$ соответствует пара решеток интенсионалов и экстенсионалов $(\sigma \in \{+, -, 0, \tau\})$, представляющих их произведение.

Таким образом, $(I)^{+}$ соответствует $\mathrm{Int}L^{+} \times \mathrm{Int}(\neg L^{-})$, $\mathrm{Ext}L^{+} \times \mathrm{Ext}(\neg L^{-})$;

$(I)^{-}$ соответствует $\mathrm{Int}(\neg L^{+}) \times \mathrm{Int}\,L^{-}$, $\mathrm{Ext}(\neg L^{+}) \times \mathrm{Ext}L^{-}$;

$(I)^{0}$ соответствуют $\mathrm{Int}L^{+} \times \mathrm{Int}L^{-}$, $\mathrm{Ext}L^{+} \times \mathrm{Ext}L^{-}$;

$(I)^{\tau}$ соответствуют $\mathrm{Int}(\neg L^{+}) \times \mathrm{Int}(\neg L^{-})$, $\mathrm{Ext}(\neg L^{+}) \times \mathrm{Ext}(\neg L^{-})$.

Так как произведение дистрибутивных решеток есть дистрибутивная решетка, то решетки, соответствующие п.п.в.-1, являются дистрибутивными. Аналогично определяются произведения подрешеток, указанных решеток интенсионалов и экстенсионалов, соответствующие п.п.в.-1 $(I)^{\sigma}$, где $\sigma \in \{+, -, 0, \tau\}$. Эти произведения решеток интенсионалов и экстенсионалов характеризуют множество всех стратегий ДСМ-рассуждений $\overline{\mathrm{Str}}$.

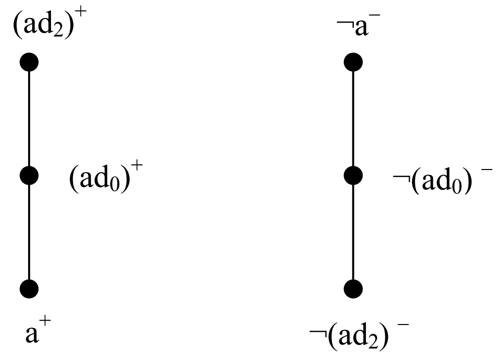
Отношения частичного порядка и несравнимости для произведения решеток определяются следующим образом:

$\langle Z_1, V_1\rangle \geq \langle Z_2, V_2\rangle$, если $Z_1 \geq Z_2$ и $V_1 \geq V_2$;

$\langle Z_1, V_1\rangle \parallel \langle Z_2, V_2\rangle$, если $\neg((Z_1 \geq Z_2) \,\&\, (V_1 \geq V_2))$ & & $\neg((Z_2 \geq Z_1) \,\&\, (V_2 \geq V_1))$.

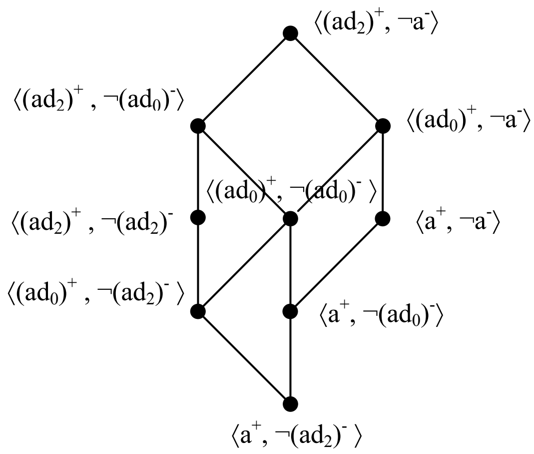
Рассмотрим решетки интенсионалов, характеризующие множество стратегий $\overline{\mathrm{Str}}$ для исходных предикатов $\mathbf{M}_1^{\sigma} = \{M^{\sigma}_{a,n}, M^{\sigma}_{ad_0,n}, M^{\sigma}_{ad_2,n}\}$ и $\neg\mathbf{M}_1^{\sigma} = \{\neg M^{\sigma}_{a,n}, \neg M^{\sigma}_{ad_0,n}, \neg M^{\sigma}_{ad_2,n}\}$, где $\sigma \in \{+, -\}$, и соответствующие их произведения для п.п.в.-1 $(I)^{\sigma}$, где $\sigma \in \{+, -, 0, \tau\}$. $(I)^{+}$ соответствует произведению решеток

$\mathrm{Int}L_1^{+} \times \mathrm{Int}(\neg L_1^{-}) = \{\langle a^{+}, \neg a^{-}\rangle, \langle a^{+}, \neg(ad_0)^{-}\rangle, \langle a^{+}, \neg(ad_2)^{-}\rangle, \langle (ad_0)^{+}, \neg a^{-}\rangle, \langle (ad_0)^{+}, \neg(ad_0)^{-}\rangle, \langle (ad_0)^{+}, \neg(ad_2)^{-}\rangle, \langle (ad_2)^{+}, \neg a^{-}\rangle, \langle (ad_2)^{+}, \neg(ad_0)^{-}\rangle, \langle (ad_2)^{+}, \neg(ad_2)^{-}\rangle\}$.



$\mathrm{Int}L_1^{+}$ $\quad$ $\mathrm{Int}(\neg L_1^{-})$

Рис. 18



$\mathrm{Int}L_1^{+} \times \mathrm{Int}(\neg L_1^{-})$

Рис. 19

В этой решетке имеются следующие антицепи: $\langle (ad_2)^+, \neg(ad_0)^- \rangle$, $\langle (ad_0)^+, \neg a^- \rangle$; $\langle (ad_2)^+, \neg(ad_0)^- \rangle$, $\langle a^+, \neg a^- \rangle$; $\langle (ad_2)^+, \neg(ad_2)^- \rangle$, $\langle (ad_0)^+, \neg(ad_0)^- \rangle$, $\langle a^+, \neg a^- \rangle$; $\langle (ad_0)^+, \neg(ad_2)^- \rangle$, $\langle a^+, \neg(ad_0)^- \rangle$. $\langle (ad_2)^+, \neg a^- \rangle$ представляют посылку п.п.в.-1 $(I)^+$ $M^+_{ad_2,n}(V,W)$ & $\neg M^-_{a,n}(V,W)$, которой соответствует наиболее правдоподобная гипотеза $J_{\langle 1,\ n+1\rangle}(V \Rightarrow_2 W)$. $\langle a^+, \neg(ad_2)^- \rangle$ представляет аналогичную посылку, которой соответствует наименее правдоподобная гипотеза $J_{\langle 1,\ n+1\rangle}(V \Rightarrow_2 W)$. $(I)^-$ соответствует произведение решеток

$\mathrm{Int}(\neg L_1^+) \times \mathrm{Int}L_1^- = \{ \langle \neg a^+, (ad_2)^- \rangle, \langle \neg a^+, (ad_0)^- \rangle, \langle \neg a^+, a^- \rangle, \langle \neg(ad_0)^+, (ad_2)^- \rangle, \langle \neg(ad_0)^+, (ad_0)^- \rangle, \langle \neg(ad_0)^+, a^- \rangle, \langle \neg(ad_2)^+, (ad_2)^- \rangle, \langle \neg(ad_2)^+, (ad_0)^- \rangle, \langle \neg(ad_2)^+, a^- \rangle \}$.

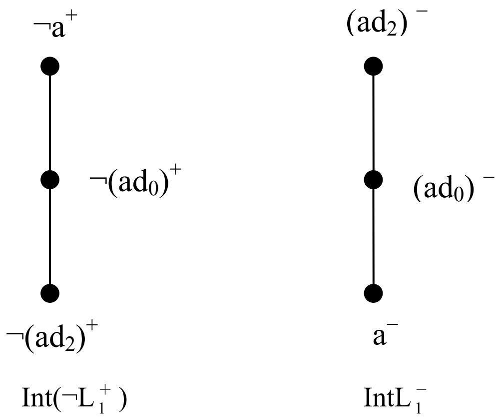


Рис. 20

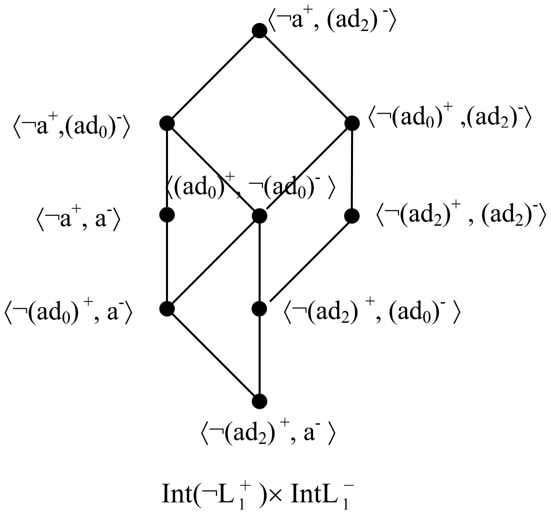


Рис. 21

В этой решетке имеются следующие антицепи: $\langle \neg a^+, (ad_0)^- \rangle$, $\langle \neg(ad_0)^+, (ad_2)^- \rangle$; $\langle \neg a^+, a^- \rangle$, $\langle \neg(ad_0)^+, (ad_0)^- \rangle$, $\langle \neg(ad_2)^+, (ad_2)^- \rangle$; $\langle \neg(ad_0)^+, a^- \rangle$, $\langle \neg(ad_2)^+, (ad_0)^- \rangle$.

$(I)^0$ соответствует произведение решеток

$\mathrm{Int}L_1^+ \times \mathrm{Int}L_1^- = \{ \langle (ad_2)^+, (ad_2)^- \rangle, \langle (ad_2)^+, (ad_0)^- \rangle, \langle (ad_2)^+, a^- \rangle, \langle (ad_0)^+, (ad_2)^- \rangle, \langle (ad_0)^+, (ad_0)^- \rangle, \langle (ad_0)^+, a^- \rangle, \langle a^+, (ad_2)^- \rangle, \langle a^+, (ad_0)^- \rangle, \langle a^+, a^- \rangle \}$:

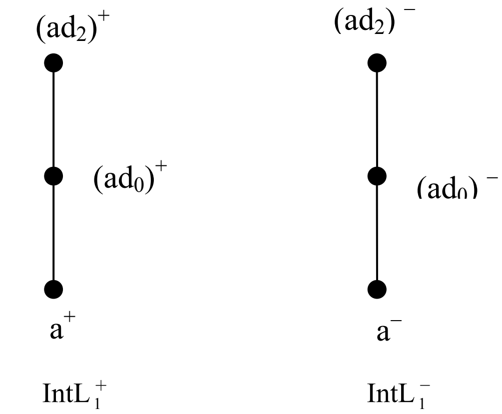


Рис. 22

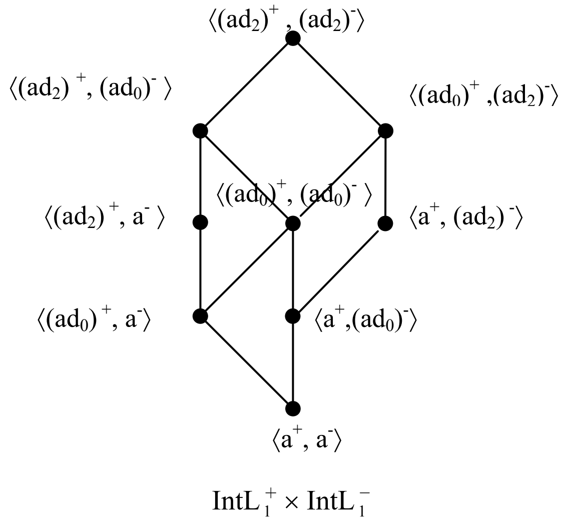


Рис. 23

В этой решетке имеются следующие антицепи: $\langle (ad_2)^+, (ad_0)^- \rangle$, $\langle (ad_0)^+, (ad_2)^- \rangle$; $\langle (ad_2)^+, a^- \rangle$, $\langle (ad_0)^+, (ad_0)^- \rangle$, $\langle a^+, (ad_2)^- \rangle$; $\langle (ad_2)^+, a^- \rangle$, $\langle a^+, (ad_0)^- \rangle$.

$(I)^\tau$ соответствует произведение решеток

$\mathrm{Int}(\neg L_1^+) \times \mathrm{Int}(\neg L_1^-) = \{ \langle \neg a^+, \neg a^- \rangle, \langle \neg a^+, \neg(ad_0)^- \rangle, \langle \neg a^+, \neg(ad_2)^- \rangle, \langle \neg(ad_0)^+, \neg a^- \rangle, \langle \neg(ad_0)^+, \neg(ad_0)^- \rangle, \langle \neg(ad_0)^+, \neg(ad_2)^- \rangle, \langle \neg(ad_2)^+, \neg a^- \rangle, \langle \neg(ad_2)^+, \neg(ad_0)^- \rangle, \langle \neg(ad_2)^+, \neg(ad_2)^- \rangle \}$:

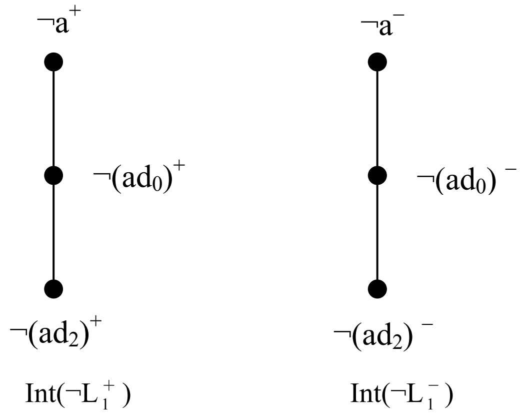
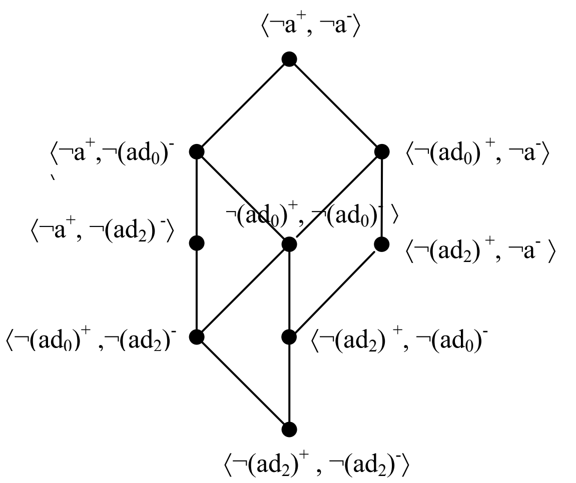


Рис. 24



$\mathrm{Int}(\neg L_1^+)\times \mathrm{Int}(\neg L_1^-)$

Рис. 25

В этой решетке имеются следующие антицепи: $\langle\neg a^+, \neg(ad_0)^-\rangle$, $\langle\neg(ad_0)^+, \neg a^-\rangle$; $\langle\neg a^+, \neg(ad_2)^-\rangle$, $\langle\neg(ad_0)^+, \neg(ad_0)^-\rangle$, $\langle\neg(ad_2)^+, \neg a^-\rangle$; $\langle\neg(ad_0)^+, \neg(ad_2)^-\rangle$, $\langle\neg(ad_2)^+, \neg(ad_0)^-\rangle$.

Аналогично формулируются описания решеток п.п.в.-1 для подрешеток IntL_2^σ и $\mathrm{Int}(\neg L_2^\sigma)$, где $\sigma\in\{+, -\}$.

Рассмотрим решетку, соответствующую п.п.в.-1 $(I)^0$, для посылок $M^+_{x,n}(V,W)$ & $M^-_{y,n}(V,W)$:

$\mathrm{IntL}_2^+\times\mathrm{IntL}_2^-$, $\mathrm{IntL}_2^+ = \langle \bar{I}_2^+, \circ, \wedge\rangle$, $\mathrm{IntL}_2^- = \langle \bar{I}_2^-, \circ, \wedge\rangle$, где $\bar{I}_2^\sigma = \{a^\sigma, (ab)^\sigma, (ad_0)^\sigma, (ad_0b)^\sigma\}$, а $\sigma\in\{+, -\}$.

$\mathrm{IntL}_2^+\times\mathrm{IntL}_2^- = \{\langle a^+, a^-\rangle, \langle a^+, (ab)^-\rangle, \langle a^+, (ad_0)^-\rangle, \langle a^+, (ad_0b)^-\rangle, \langle (ab)^+, a^-\rangle, \langle (ab)^+, (ab)^-\rangle, \langle (ab)^+, (ad_0)^-\rangle, \langle (ab)^+, (ad_0b)^-\rangle, \langle (ad_0)^+, a^-\rangle, \langle (ad_0)^+, (ab)^-\rangle, \langle (ad_0)^+, (ad_0)^-\rangle, \langle (ad_0)^+, (ad_0b)^-\rangle, \langle (ad_0b)^+, a^-\rangle, \langle (ad_0b)^+, (ab)^-\rangle, \langle (ad_0b)^+, (ad_0)^-\rangle, \langle (ad_0b)^+, (ad_0b)^-\rangle\}$.

Соответственно, формулируются описания решеток п.п.в.-1 для посылок $M^+_{x,n}(V,W)$ & $\neg M^-_{y,n}(V,W)$, $\neg M^+_{x,n}(V,W)$ & $M^-_{y,n}(V,W)$, $M^+_{x,n}(V,W)$ & $M^-_{y,n}(V,W)$, $\neg M^+_{x,n}(V,W)$ & $\neg M^-_{y,n}(V,W)$.

Решетки, соответствующие $\bar{I}^\sigma = \{a^\sigma, (ab)^\sigma, (ad_0)^\sigma, (ad_2)^\sigma\} \cup \{(ad_0b)^\sigma, (ad_2b)^\sigma\}$ и $\neg\bar{I}^\sigma = \{\neg a^\sigma, \neg(ab)^\sigma, \neg(ad_0)^\sigma, \neg(ad_2)^\sigma\} \cup \{\neg(ad_0b)^\sigma, \neg(ad_2b)^\sigma\}$, где $\sigma\in\{+, -\}$, $\mathrm{IntL}^+\times\mathrm{IntL}(\neg L^-)$, $\mathrm{Int}(\neg L^+)\times\mathrm{IntL}^-$, $\mathrm{IntL}^+\times\mathrm{IntL}^-$ и $\mathrm{IntL}(\neg L^+)\times\mathrm{IntL}(\neg L^-)$, характеризуют правила индуктивных выводов (п.п.в.-1) для индуктивных методов Д.С. Милля (методов сходства, различия и сходства-различия) [12] и их модификаций посредством условия запрета на контрпримеры $b^\sigma(V,W)$.

Рассмотрим решетку, соответствующую п.п.в.-1 $(I)^0$, для посылок $M^+_{x,n}(V,W)$ & $M^-_{y,n}(V,W)$,

$\mathrm{IntL}^+\times\mathrm{IntL}^-$, $\mathrm{IntL}^+ = \langle \bar{I}^+, \circ, \wedge\rangle$, $\mathrm{IntL}^- = \langle \bar{I}^-, \circ, \wedge\rangle$, где $\bar{I}^\sigma = \{a^\sigma, (ab)^\sigma, (ad_0)^\sigma, (ad_2)^\sigma\} \cup \{(ad_0b)^\sigma, (ad_2b)^\sigma\}$, а $\sigma\in\{+, -\}$.

$\mathrm{IntL}^+\times\mathrm{IntL}^- = \{\langle a^+, a^-\rangle, \langle a^+, (ab)^-\rangle, \langle a^+, (ad_0)^-\rangle, \langle a^+, (ad_2)^-\rangle, \langle a^+, (ad_0b)^-\rangle, \langle a^+, (ad_2b)^-\rangle, \langle (ab)^+, a^-\rangle, \langle (ab)^+, (ab)^-\rangle, \langle (ab)^+, (ad_0)^-\rangle, \langle (ab)^+, (ad_2)^-\rangle, \langle (ab)^+, (ad_0b)^-\rangle, \langle (ab)^+, (ad_2b)^-\rangle, \langle (ad_0)^+, a^-\rangle, \langle (ad_0)^+, (ab)^-\rangle, \langle (ad_0)^+, (ad_0)^-\rangle, \langle (ad_0)^+, (ad_2)^-\rangle, \langle (ad_0)^+, (ad_0b)^-\rangle, \langle (ad_0)^+, (ad_2b)^-\rangle, \langle (ad_2)^+, a^-\rangle, \langle (ad_2)^+, (ab)^-\rangle, \langle (ad_2)^+, (ad_0)^-\rangle, \langle (ad_2)^+, (ad_2)^-\rangle, \langle (ad_2)^+, (ad_0b)^-\rangle, \langle (ad_2)^+, (ad_2b)^-\rangle, \langle (ad_0b)^+, a^-\rangle, \langle (ad_0b)^+, (ab)^-\rangle, \langle (ad_0b)^+, (ad_0)^-\rangle, \langle (ad_0b)^+, (ad_2)^-\rangle, \langle (ad_0b)^+, (ad_0b)^-\rangle, \langle (ad_0b)^+, (ad_2b)^-\rangle, \langle (ad_2b)^+, a^-\rangle, \langle (ad_2b)^+, (ab)^-\rangle, \langle (ad_2b)^+, (ad_0)^-\rangle, \langle (ad_2b)^+, (ad_2)^-\rangle, \langle (ad_2b)^+, (ad_0b)^-\rangle, \langle (ad_2b)^+, (ad_2b)^-\rangle\}$.

Произведения решеток экстенсионалов ExtL^σ и $\mathrm{Ext}(\neg L^\sigma)$, где $\sigma\in\{+, -\}$, соответствующие п.п.в.-1, формулируются также для характеризации возможных стратегий ДСМ-метода АПГ.

ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

В § 5 были определены стратегии $\mathrm{Str}_{x,y}$ ДСМ-рассуждений, состоящие из п.п.в.-1 (правил индуктивного вывода) $(I)^\sigma_{x,y}$, где $\sigma\in\{+, -, 0, \tau\}$, а $x\in \bar{I}^+$ или $x\in\neg\bar{I}^+$, $y\in\bar{I}^-$ или $y\in\neg\bar{I}^-$; $\mathrm{Int}\lambda_1 L^+ = \langle \lambda_1 \bar{I}^+, \circ, \wedge\rangle$, $\mathrm{Int}\lambda_2 L^- = \langle \lambda_2 \bar{I}^-, \circ, \wedge\rangle$, где λ_1, λ_2 есть $\neg$ или отсутствие $\neg$.

$\mathrm{Str}_{x,y}$ будем называть **локальными** стратегиями. Будем рассматривать также $\overline{\mathrm{Str}}$. $\overline{\mathrm{Str}}$ – множество всех локальных стратегий, которые ранее были определены. $\overline{\mathrm{Str}}$ образовано посредством четырех пар интенсиональных решеток для $(I)^\sigma_{x,y}$, где $\sigma\in\{+, -\}$.

$(I)^+_{x,y}$ IntL^+, $\mathrm{Int}(\neg L^-)$;

$(I)^-_{x,y}$ $\mathrm{Int}(\neg L^+)$, IntL^-;

$(I)^0_{x,y}$ IntL^+, IntL^-;

$(I)^\tau_{x,y}$ $\mathrm{Int}(\neg L^+)$, $\mathrm{Int}(\neg L^-)$.

Применение п.п.в.-1 $(I)^\sigma_{x,y}$ для всех x и y из соответствующих пар решеток интенсионалов означает обход этих решеток в четырех возможных направлениях для всех x и y снизу вверх $\uparrow_x \uparrow_y$ (от нулей решеток к их единицам), сверху вниз $\downarrow^x \downarrow^y$ (от единиц решеток – к нулям); $\uparrow_x \downarrow^y$ – обход решеток в противоположных направлениях. Обходы пар (±)–решеток $\uparrow_x \uparrow_y$ и $\downarrow^x \downarrow^y$ будем называть **симметричными,** обходы же $\uparrow_x \downarrow^y$ и $\downarrow^x \uparrow_y$ будем называть **несимметричными.**

Каждый из этих четырех обходов четырех интенсионалов решеток $\mathrm{Int}\lambda_1 L^+ = \langle \lambda_1 \bar{I}^+, \circ, \wedge\rangle$, $\mathrm{Int}\lambda_2 L^- = \langle \lambda_2 \bar{I}^-, \circ, \wedge\rangle$, где λ_1, λ_2 есть $\neg$ или его отсутствие, будем называть **интегральной** стратегией ДСМ-метода АПГ.

Так как решетки $\mathrm{Int}\lambda_1 L^+$ и $\mathrm{Int}\lambda_2 L^-$ имеют максимально возможное множество исходных М-предикатов ДСМ-метода АПГ, то указанные интегральные стратегии будем называть **максимальными.** Немаксимальные интегральные стратегии образованы парами подрешеток $\mathrm{Int}\lambda_1 L^+$ и $\mathrm{Int}\lambda_2 L^-$. Таковыми являются $\mathrm{Int}\lambda_1 L_1^+$ и $\mathrm{Int}\,\lambda_2 L_1^-$, $\mathrm{Int}\lambda_1 L_2^+$ и $\mathrm{Int}\lambda_2 L_2^-$.

Каждую конечную решетку можно описать как множество всех максимальных цепей. Максимальной цепью решетки является цепь такая, что она соединяет нуль и единицу решетки (выше были представлены все цепи решетки $\mathrm{IntL}^{+}\times\mathrm{Int}(\neg\mathrm{L}^{-})$). Например, решетку $\mathrm{IntL}_1^{+}\times\mathrm{Int}\rceil\mathrm{L}$ можно представить как множество максимальных цепей

(1) $\langle(\mathrm{ad}_2)^{+}, \neg\, \mathrm{a}^{-}\rangle \geq \langle(\mathrm{ad}_2)^{+}, \neg\, (\mathrm{ad}_0)^{-}\rangle \geq$
$\geq \langle(\mathrm{ad}_2)^{+}, \neg\, (\mathrm{ad}_2)^{-}\rangle \geq \langle(\mathrm{ad}_0)^{+}, \neg\, (\mathrm{ad}_2)^{-}\rangle \geq \langle \mathrm{a}^{+}, \neg\, (\mathrm{ad}_2)^{-}\rangle$,

(2) $\langle(\mathrm{ad}_2)^{+}, \neg\, \mathrm{a}^{-}\rangle \geq \langle(\mathrm{ad}_2)^{+}, \neg\, (\mathrm{ad}_0{}^{-}\rangle \geq$
$\geq \langle(\mathrm{ad}_0)^{+}, \neg\, (\mathrm{ad}_0)^{-}\rangle \geq \langle(\mathrm{ad}_0)^{+}, \neg\, (\mathrm{ad}_2)^{-}\rangle \geq \langle \mathrm{a}^{+}, \neg\, (\mathrm{ad}_2)^{-}\rangle$,

(3) $\langle(\mathrm{ad}_2)^{+}, \neg\mathrm{a}^{-}\rangle \geq \langle(\mathrm{ad}_2)^{+}, \neg\, (\mathrm{ad}_0)^{-}\rangle \geq$
$\geq \langle(\mathrm{ad}_0)^{+}, \neg\, (\mathrm{ad}_0)^{-}\rangle \geq \langle \mathrm{a}^{+}, \neg\, (\mathrm{ad}_0)^{-}\rangle \geq \langle \mathrm{a}^{+}, \neg\, (\mathrm{ad}_2)^{-}\rangle$,

(4) $\langle(\mathrm{ad}_2)^{+}, \neg\, \mathrm{a}^{-}\rangle \geq \langle(\mathrm{ad}_0)^{+}, \neg\mathrm{a}^{-}\rangle \geq \langle(\mathrm{ad}_0)^{+}, \neg(\mathrm{ad}_0)^{-}\rangle \geq$
$\geq \langle \mathrm{a}^{+}, \neg\, (\mathrm{ad}_0)^{-}\rangle \geq \langle \mathrm{a}^{+}, \neg(\mathrm{ad}_2)^{-}\rangle$,

(5) $\langle(\mathrm{ad}_2)^{+}, \neg\, \mathrm{a}^{-}\rangle \geq \langle(\mathrm{ad}_0)^{+}, \neg\mathrm{a}^{-}\rangle \geq \langle \mathrm{a}^{+}, \neg\mathrm{a}^{-}\rangle \geq$
$\geq \langle \mathrm{a}^{+}, \neg(\mathrm{ad}_0)^{-}\rangle \geq \langle \mathrm{a}^{+}, \neg(\mathrm{ad}_2)^{-}\rangle$.

Интегральные стратегии для $\overline{\mathrm{Str}}$ могут быть определены и для $\mathrm{Int}\lambda_1\mathrm{L}^{+}$ и $\mathrm{Int}\lambda_2\mathrm{L}^{-}$, где λ_1, λ_2 есть $\neg$ или отсутствие $\neg$. Они могут быть определены и для их подрешеток – например, для $\mathrm{IntL}_1^{+}\times\mathrm{Int}(\neg\mathrm{L}_1^{-})$, представленной на Рис. 19. Очевидно, что интегральные стратегии для произведения решеток состоят из двух их обходов: от нуля решетки – к единице (↑), от единицы решетки – к нулю (↓). Эти обходы решеток (т. е., применение п.п.в.-1 к элементам решетки $\langle x, y\rangle$) состоят из последовательных движений по всем максимальным цепям решетки. Интегральные стратегии типов ↑ и ↓ для произведений решеток равносильны интегральным стратегиям типов $\uparrow_x \uparrow_y$, $\downarrow^x \downarrow^y$, $\uparrow_x \downarrow^y$, $\downarrow^x \uparrow_y$, определенных для $\mathrm{Int}\lambda_1\mathrm{L}^{+}$ и $\mathrm{Int}\lambda_2\mathrm{L}^{-}$. Интегральные стратегии могут быть аналогично определены и для решеток экстенсионалов.

Каждой интенсиональной решетке $\mathrm{Int}\lambda_i\mathrm{L}^{\sigma}$ соответствует экстенсиональная решетка $\mathrm{Ext}\lambda_i\mathrm{L}^{\sigma}$, где $i = 1, 2$, а $\sigma\in\{+, -\}$. Аналогично каждой интенсиональной подрешетке $\mathrm{Int}\lambda_i\mathrm{L}_j^{\sigma}$ соответствуют экстенсиональные подрешетки $\mathrm{Ext}\lambda_i\mathrm{L}_j^{\sigma}$, где $i = 1, 2, j = 1, 2$, а $\sigma\in\{+, -\}$. Это соответствие обусловлено тем, что интенсионалы предикатов $\mathrm{M}_{x,n}^{+}(\mathrm{V},\mathrm{W})$ и $\mathrm{M}_{y,n}^{-}(\mathrm{V},\mathrm{W})$ порождают соответствующие им экстенсионалы $\{\langle \mathrm{V},\mathrm{W}\rangle|\ \mathrm{M}_{x,n}^{+}(\mathrm{V},\mathrm{W})\}$ и $\{\langle \mathrm{V},\mathrm{W}\rangle|\mathrm{M}_{y,n}^{-}(\mathrm{V},\mathrm{W})\}$. Предикаты же $\mathrm{M}_{x,n}^{+}(\mathrm{V},\mathrm{W})$ и $\mathrm{M}_{y,n}^{-}(\mathrm{V},\mathrm{W})$ заданы своими определениями, выраженными формулами ДСМ-языка.

Указанное соответствие интенсионалов и экстенсионалов предикатов $\mathrm{M}_{x,n}^{+}(\mathrm{V},\mathrm{W})$ и $\mathrm{M}_{y,n}^{-}(\mathrm{V},\mathrm{W})$ согласуется с идеей А. Черча о том, что денотат имени есть функция смысла, что означает (в предположении, что речь идет о некотором фиксированном языке), что существует функция *F* такая, что денотат имени *N* = *F* (смысл имени *N*) для всех имеющих денотат имен *N* ([22], Введение: 03. Функции).

Для рассматриваемых решеток экстенсионалов и интенсионалов именами являются x и y, ¬x и ¬y, принадлежащие Γ^{+} и Γ^{-}, $\neg\Gamma^{+}$ и $\neg\Gamma^{-}$, соответственно, а функции F представлены определениями М-предикатов, а денотатами являются соответствующие экстенсионалы, которые являются бинарными отношениями (множествами пар ⟨C, Q⟩ выполняющими М-предикаты).

В **Замечании 1-4** из § 4 утверждалось, что решетки IntL_2^{σ} и ExtL_2^{σ}, IntL^{σ} и ExtL^{σ} не являются изоморфными, что обусловлено тем, что интенсионалы М-предикатов порождают их экстенсионалы, а, следовательно, они имеют разную природу. В частности, экстенсионалом М-предиката для заданных $\mathrm{U}^{(1)}$ и $\mathrm{U}^{(2)}$ может быть пустое отношение. Кроме того, интенсионалы М-предикатов могут быть различны, а их экстенсионалы могут быть равными (например, для $\mathrm{M}_{ab,n}^{+}(\mathrm{V},\mathrm{W})$ и $\mathrm{M}_{a,n}^{+}(\mathrm{V},\mathrm{W})$).

Решетки интенсионалов и экстенсионалов можно использовать для характеризации эмпирических закономерностей [23] и для представления оценок качества порождаемых гипотез ([9], Часть II).

Выше было отмечено, что любую конечную решетку можно описать посредством множества всех максимальных цепей. Эмпирическую закономерность [23] будем называть **устойчивой,** если существует максимальная цепь в соответствующей интенсиональной решетке такая, что эмпирическая закономерность **сохраняется** для всех элементов этой цепи. Эмпирическую закономерность (ЭЗК) будем называть **суперустойчивой,** если она сохраняется для всех максимальных цепей решетки $\mathrm{Int}\lambda_1\mathrm{L}^{+}\times\mathrm{Int}\lambda_2\mathrm{L}^{-}$.

Очевидно, что если некоторая ЭЗК является устойчивой в интенсиональной решетке, то соответствующая цепь в экстенсиональной решетке не имеет пустых элементов.

Как отмечалось в § 1 настоящей статьи, ДСМ-метод АПГ состоит из шести компонент: (1) условия применимости, (2) ДСМ-рассуждений, (3) представления знаний в виде квазиаксиоматических теорий, (4) метатеоретических средств исследований корректности ДСМ-рассуждений и их процедурной семантики, (5) средств распознавания и порождения эмпирических закономерностей в базах фактов, (6) интеллектуальных систем типа ДСМ.

Теперь следует шестой (6) компонентой рассматривать реализацию **интегральных** стратегий для $\overline{\mathrm{Str}}$, использующих интенсиональные и экстенсиональные решетки М-предикатов, которые могут быть, в том числе, использованы для обнаружения устойчивых эмпирических закономерностей. Тогда седьмой компонентой (7) будут интеллектуальные системы типа ДСМ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. ДСМ-метод автоматического порождения гипотез: логические и эпистемологические основания / под общей ред. О.М. Аншакова. – М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2009.
2. Финн В.К. Искусственный интеллект: методология, применения, философия. – М.: КРАСАНД, 2011.

3. Автоматическое порождение гипотез в интеллектуальных системах / под общей ред. В.К. Финна. – М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2009.
4. Rosser J.B., Turquette A.R. Many-Valued Logics. – North – Holland Publishing Company, Amsterdam, 1958.
5. Финн В.К. Индуктивные методы Д.С. Милля в системах искусственного интеллекта. Часть I. // Искусственный интеллект и принятие решений. – 2010. – № 3. – С. 3-21; Finn V.K. J.S. Mill's Inductive Methods in Artificial Intelligence Systems. Part I // Scientific and Technical Information Processing. – 2011. – Vol. 38, № 6. – P. 385-402.
6. Скворцов Д.П. О некоторых способах построения логических языков с кванторами по кортежам // Семиотика и информатика. – 1983. – Вып. 20. – С. 102-106.
7. Барвайс Д. Введение в логику первого порядка. Справочная книга по математической логике. Часть I. Теория моделей. – М.: Наука, 1982. – С. 51-52; Handbook of mathematical logic / ed. J. Barwise. – North – Holland Publishing Company, Amsterdam, New York, Oxford, 1977.
8. Виноградов Д.В. Формализация правдоподобных рассуждений в логике предикатов 1-го порядка // Научно-техническая информация. Сер. 2. – 2000. – № 11. – С. 17-20.
9. Финн В.К. Эпистемологические основания ДСМ-метода автоматического порождения гипотез. Часть I // Научно-техническая информация. Сер. 2. – 2013. – № 9. – С. 1-29; Finn V.K. Epistemological Foundations of the JSM Method for Automatic Hypothesis Generation // Automatic Documentation and Mathematical Linguistics. – 2014. – Vol. 48, № 2. – P. 96-148.
10. Бочвар Д.А. Об одном трехзначном исчислении и его применении к анализу парадоксов классического расширенного функционального исчисления // Математический сборник. – Т 4, Выпуск 2, 1938. – С. 287-308.
11. Anshakov O.M., Finn V.K., Skvortsov D.P. On axiomatization of many-valued logic associated with formalization of plausible reasoning // Studia Logica. – 1989. – Vol. XLVIII, № 4. – P. 423-447.
12. Милль Д.С. Система логики силлогистической и индуктивной. Издание пятое. – М.: ЛЕНАНД, 2011; Mill J.S. System of Logic Ratiocinative and Inductive, Being a Connected View of the Principles of Evidence and The Methods of Scientific Investigation. – London: Parker, Son and Bowin, 1843.
13. Гершель Дж. Философия естествознания. Издание второе. – М.: «ЛИБРОКОМ», 2011; Herschel J. F. W. Preliminary Discourse on the Study of Natural Philosophy. – London, 1851.
14. Финн В.К. Эпистемологические основания ДСМ-метода автоматического порождения гипотез. Часть I. // Научно-техническая информация. Сер. 2. – 2013. – № 9. – С. 1-29.
15. Fann K.T. Peirce's Theory of abduction // Martinus Nijhoff. – The Hague, 1970.
16. Волкова А.Ю. Алгоритмизация процедур ДСМ-метода автоматического порождения гипотез // Научно-техническая информация. Сер. 2. – 2011. – № 5. – С. 6-12; Volkova A.Y. Algoritmization Procedures of JSM Method for Automatic Hypothesis Generation // Automatic Documentation and Mathematical Linguistics. – 2011. – Vol. 45, № 3. – P. 113-120.
17. Волкова А.Ю. Анализ данных различных предметных областей с помощью процедур ДСМ-метода автоматического порождения гипотез // Научно-техническая информация. Сер. 2. – 2011. – № 6. – С. 9-18; Volkova A.Y. Analyzing the Data of Different Subject Fields Using the Procedures of JSM Method for Automatic Hypothesis Generation // Automatic Documentation and Mathematical Linguistics. – 2011. - Vol.45, № 3. – P.127-139.
18. Smullyan R.M. First-Order Logic. – New York: Springer-Verlag, 1968.
19. Фреге Г. О смысле и значении // В кн.: Готтлоб Фреге Логика и логическая семантика . – М.: АСПЕНТ ПРЕСС, 2000. – С. 215-229.
20. Гретцер Г. Общая теория решеток. – М.: «Мир», 1982; Grätzer G. General Lattice Theory. – Berlin: Academie-Verlag, 1978.
21. Grätzer G. General Lattice Theory. First concepts and Distributive Lattices. W.H. Freeman and Company, San Francisco, 1971.
22. Черч А. Введение в математическую логику. – М.: Изд-во иностранной литературы, 1960, Введение. 03. Функции. – С. 27; Church A. Introduction to Mathematical Logic. – New Jersey: Princeton University Press, 1956. Introduction. 03.Functions. – P. 19.
23. Финн В.К. Об определении эмпирических закономерностей посредством ДСМ-метода автоматического порождения гипотез // Искусственный интеллект и принятие решений. – 2010. – № 4. – С. 41-48; Finn V.K. On the Definition of Empirical Regularities by the JSM Method for the Automatic Generation of Hypotheses // Scientific and Technical Information Processing. – 2010. – Vol. 39, № 5. – P. 261-267.

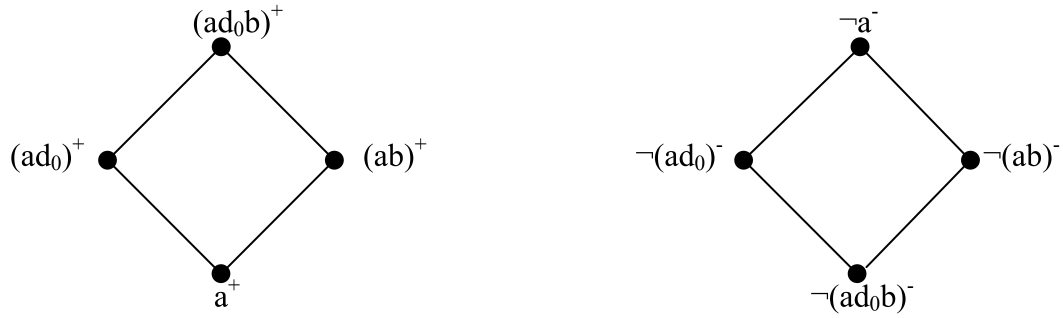
ПРИЛОЖЕНИЕ

1. Рассмотрим решетки интенсионалов правил индуктивного вывода (п.п.в.-1) $(\mathrm{I})^{\sigma}_{x,y}$, где $\sigma \in \{+, -, 0, \tau\}$, а $x \in \overline{\mathrm{I}}_2^{+}$, $y \in \overline{\mathrm{I}}_2^{-}$.

(1) п.п.в.-1 $(\mathrm{I})^{+}_{x,y}$:

$\mathrm{Int}L_2^{+} \times \mathrm{Int}(\neg L_2^{-}) = \{ \langle (ad_0b)^{+}, \neg a^{-}\rangle, \langle (ad_0b)^{+}, \neg(ad_0)^{-}\rangle, \langle (ad_0b)^{+}, \neg (ab)^{-}\rangle, \langle (ad_0b)^{+}, \neg (ad_0b)^{-}\rangle, \langle (ad_0)^{+}, \neg a^{-}\rangle, \langle (ad_0)^{+}, \neg (ad_0)^{-}\rangle, \langle (ad_0)^{+}, \neg (ab)^{-}\rangle, \langle (ad_0)^{+}, \neg (ad_0b)^{-}\rangle, \langle (ab)^{+}, \neg a^{-}\rangle, \langle (ab)^{+}, \neg (ad_0)^{-}\rangle, \langle (ab)^{+}, \neg(ab)^{-}\rangle, \langle (ab)^{+}, \neg(ad_0b)^{-}\rangle, \langle a^{+}, \neg a^{-}\rangle, \langle a^{+}, \neg(ad_0)^{-}\rangle, \langle a^{+}, \neg (ab)^{-}\rangle, \langle a^{+}, \neg (ad_0b)^{-}\rangle\}$.

Произведение решеток интенсионалов $\mathrm{Int}L_2^{+} \times \mathrm{Int}(\neg L_2^{-})$ представлено ниже на рис. 27. Очевидно, что $\mathrm{Int}L_2^{+} \times \mathrm{Int}(\neg L_2^{-})$ соответствует п.п.в.-1 $(\mathrm{I})^{+}_{x,y}$



$\mathrm{Int}L_2^+$ $\mathrm{Int}(\neg L_2^-)$

Рис. 26

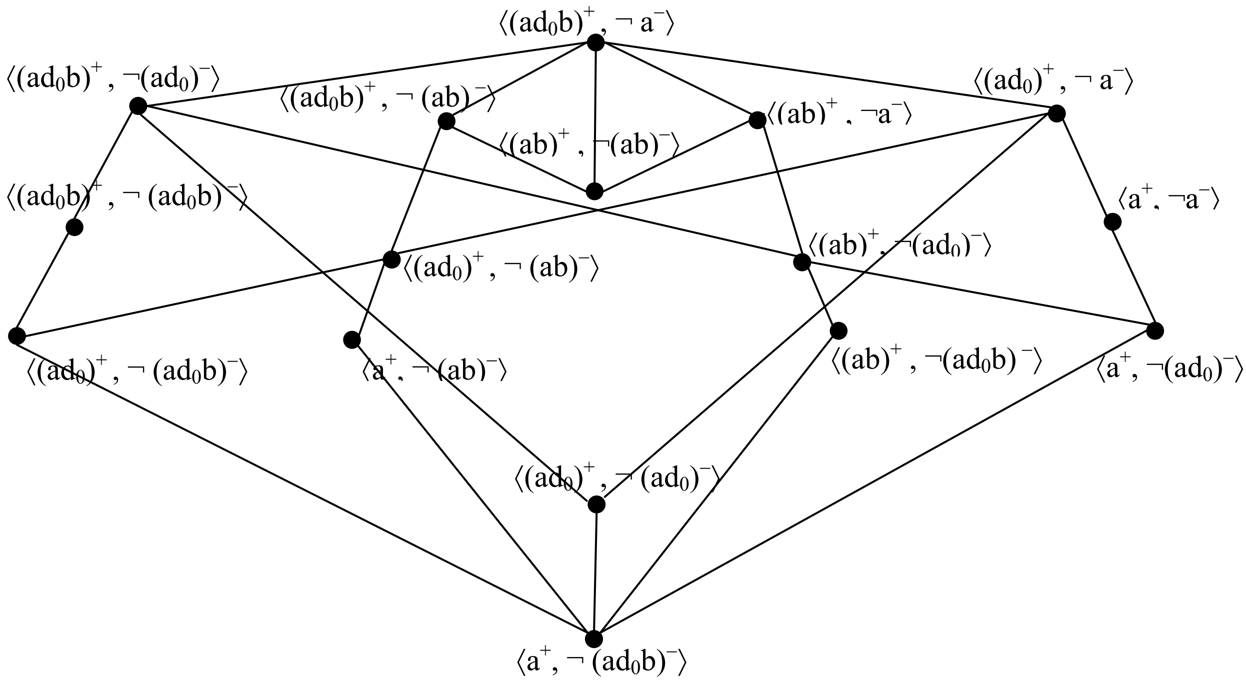
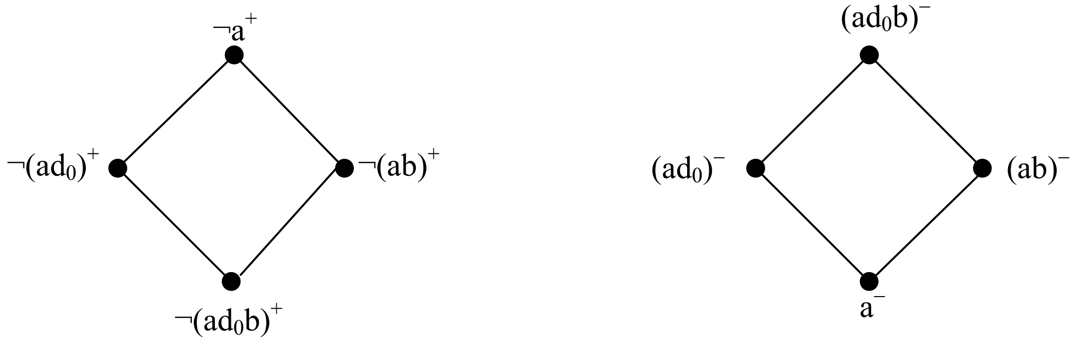


Рис. 27

$\mathrm{Int}L_2^+ \times \mathrm{Int}(\neg L_2^-)$

(2) п.п.в.-1 $(\mathrm{I})_{x,y}^-$:



$\mathrm{Int}(\neg L_2^+)$ $\mathrm{Int}L_2^-$

Рис. 28

$\mathrm{Int}(\neg L_2^+)\times\mathrm{Int}L_2^- = \{\langle\neg a^+, (ad_0b)^-\rangle, \langle\neg a^+, (ad_0)^-\rangle, \langle\neg a^+, (ab)^-\rangle, \langle\neg a^+, a^-\rangle, \langle\neg(ad_0)^+, (ad_0b)^-\rangle, \langle\neg(ad_0)^+, (ad_0)^-\rangle, \langle\neg(ad_0)^+, (ab)^-\rangle, \langle\neg(ad_0)^+, a^-\rangle, \langle\neg(ab)^+, (ad_0b)^-\rangle, \langle\neg(ab)^+, (ad_0)^-\rangle, \langle\neg(ab)^+, (ab)^-\rangle, \langle\neg(ab)^+, a^-\rangle, \langle\neg(ad_0b)^+, (ad_0b)^-\rangle, \langle\neg(ad_0b)^+, (ad_0)^-\rangle, \langle\neg(ad_0b)^+, (ab)^-\rangle, \langle\neg(ad_0b)^+, a^-\rangle\}$.

Произведение решеток интенсионалов $\mathrm{Int}(\neg L_2^+)\times\mathrm{Int}L_2^-$ представлено ниже на рис. 29. Очевидно, что $\mathrm{Int}(\neg L_2^+)\times\mathrm{Int}L_2^-$, соответствует п.п.в.-1 $(\mathrm{I})_{x,y}^-$.

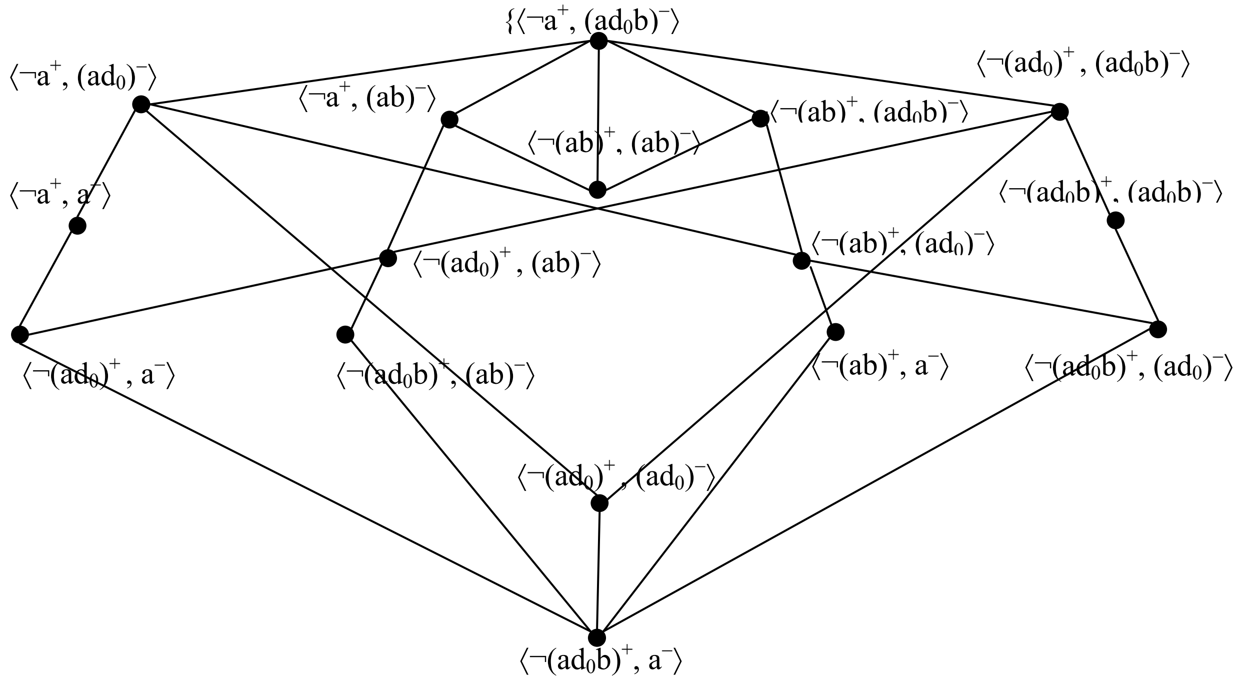
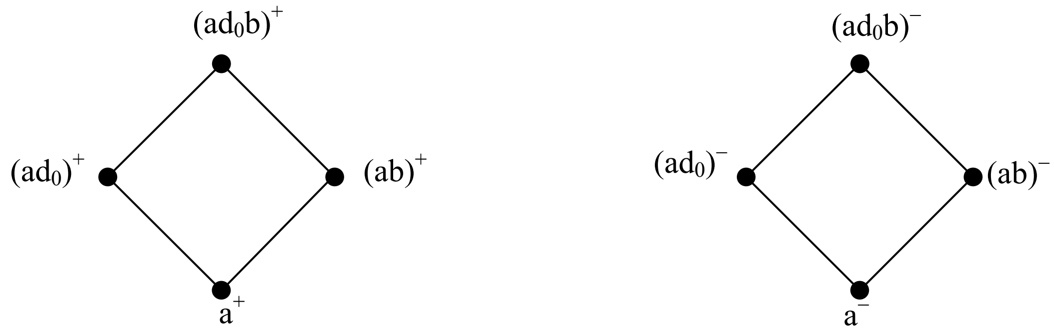


Рис. 29

$\mathrm{Int}(\neg L_2^+)\times \mathrm{IntL}_2^-$

(3) п.п.в.-1 $(\mathrm{I})^0_{x,y}$:



IntL_2^+ IntL_2^-

Рис. 30

$\mathrm{IntL}_2^+\times\mathrm{IntL}_2^- = \{\langle a^+, a^-\rangle, \langle a^+, (ab)^-\rangle, \langle a^+, (ad_0)^-\rangle, \langle a^+, (ad_0b)^-\rangle, \langle (ab)^+, a^-\rangle, \langle (ab)^+, (ab)^-\rangle, \langle (ab)^+, (ad_0)^-\rangle, \langle (ab)^+, (ad_0b)^-\rangle, \langle (ad_0)^+, a^-\rangle, \langle (ad_0)^+, (ab)^-\rangle, \langle (ad_0)^+, (ad_0)^-\rangle, \langle (ad_0)^+, (ad_0b)^-\rangle, \langle (ad_0b)^+, a^-\rangle, \langle (ad_0b)^+, (ab)^-\rangle, \langle (ad_0b)^+, (ad_0)^-\rangle, \langle (ad_0b)^+, (ad_0b)^-\rangle\}$.

Произведение решеток интенсионалов $\mathrm{IntL}_2^+\times\mathrm{IntL}_2^-$ представлено ниже на Рис. 31. Очевидно, что $\mathrm{IntL}_2^+\times\mathrm{IntL}_2^-$ соответствует п.п.в.-1 $(\mathrm{I})^0_{x,y}$.

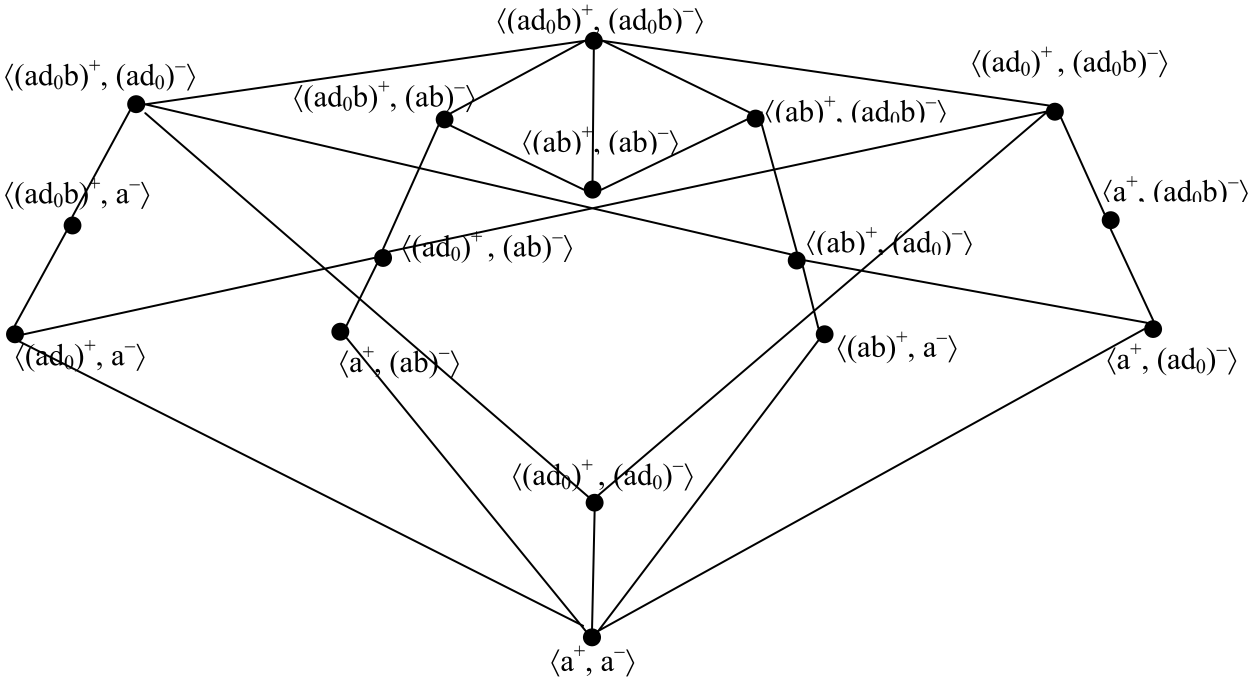
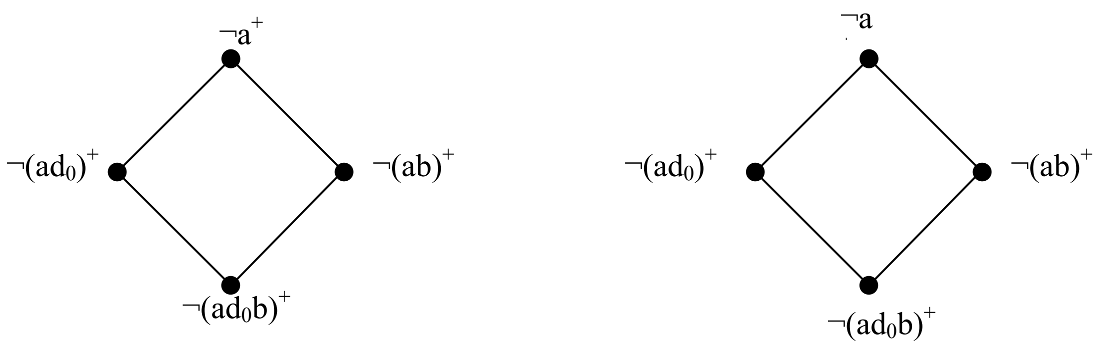


Рис. 31

$\mathrm{IntL}_2^+ \times \mathrm{IntL}_2^-$

(4) п.п.в.-1 $(\mathrm{I})^{\tau}_{x,y}$:



$\mathrm{Int}(\neg L_2^+)$ $\mathrm{Int}(\neg L_2^-)$

Рис. 32

$\mathrm{Int}(\neg L_2^+)\times\mathrm{Int}(\neg L_2^-) = \{\langle \neg a^+, \neg a^-\rangle, \langle \neg a^+, \neg(ad_0)^-\rangle, \langle \neg a^+, \neg(ab)^-\rangle, \langle \neg a^+, \neg(ad_0b)^-\rangle, \langle \neg(ad_0)^+, \neg a^-\rangle, \langle \neg(ad_0)^+, \neg(ad_0)^-\rangle, \langle \neg(ad_0)^+, \neg(ab)^-\rangle, \langle \neg(ad_0)^+, \neg(ad_0b)^-\rangle, \langle \neg(ab)^+, \neg a^-\rangle, \langle \neg(ab)^+, \neg(ad_0)^-\rangle, \langle \neg(ab)^+, \neg(ab)^-\rangle, \langle \neg(ab)^+, \neg(ad_0b)^-\rangle, \langle \neg(ad_0b)^+, \neg a^-\rangle, \langle \neg(ad_0b)^+, \neg(ad_0)^-\rangle, \langle \neg(ad_0b)^+, \neg(ab)^-\rangle, \langle \neg(ad_0b)^+, \neg(ad_0b)^-\rangle\}$.

Произведение решеток интенсионалов $\mathrm{Int}(\neg L_2^+)\times\mathrm{Int}(\neg L_2^-)$ представлено ниже на рис. 33. Очевидно, что $\mathrm{Int}(\neg L_2^+)\times\mathrm{Int}(\neg L_2^-)$ соответствует п.п.в.-1 $(\mathrm{I})^{\tau}_{x,y}$

$\mathrm{Int}(\neg L_2^+)\times\mathrm{Int}(\neg L_2^-)$

2. Рассмотрим решетки IntL^{σ}, представленные на Рис. 2. $\mathrm{IntL}_2^{\sigma} = \{a^{\sigma}, (ad_0)^{\sigma}, (ab)^{\sigma}, (ad_0b)^{\sigma}\}$, где $\sigma\in\{+, -\}$ являются подрешетками $\mathrm{IntL}^{\sigma} = \{a^{\sigma}, (ad_0)^{\sigma}, (ab)^{\sigma}, (ad_0b)^{\sigma}, (ad_2)^{\sigma}, (ad_2b)^{\sigma}\}$.

IntL_2^{σ} являются собственными идеалами IntL^{σ} [20, Глава I, § 3], так как для любых x и z $x\in\mathrm{IntL}_2^{\sigma}$ и $z\in\mathrm{IntL}^{\sigma}$ $x\circ z\in\mathrm{IntL}_2^{\sigma}$:

$ad_2\circ ad_0 = ad_0$, $ad_2\circ ad_0b = ad_0$, $ad_2\circ ab = a$, $ad_2\circ a = a$; $ad_2b\circ ad_0 = ad_0$, $ad_2b\circ ad_0b = ad_0b$, $ad_2b \circ ab = ab$, $ad_2b \circ a = a$, где $ad_2, ad_2b\in\mathrm{IntL}^{\sigma}$.

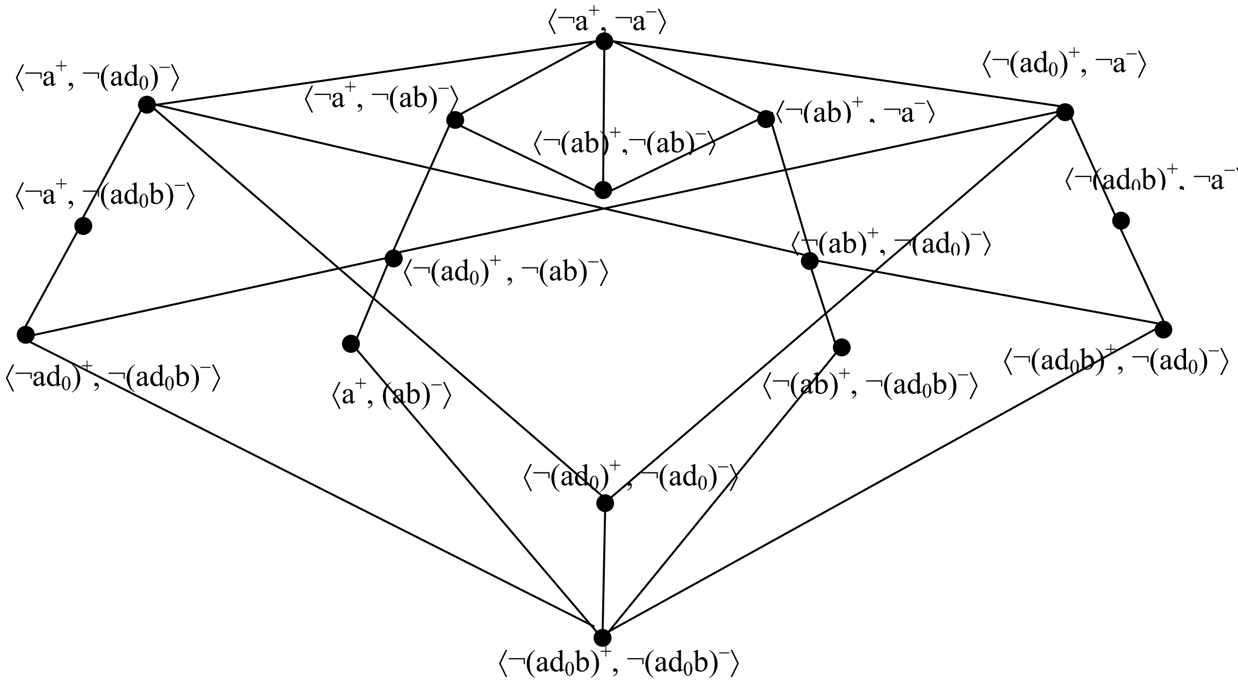
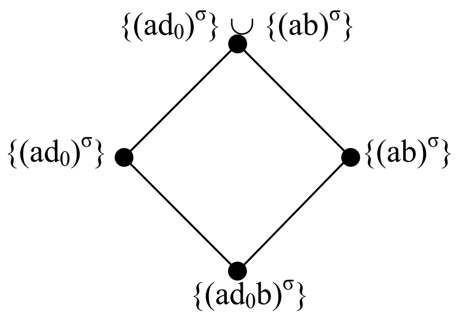


Рис. 33

3. Подрешетки $\mathrm{ExtL}^{\sigma}_{3,3}$ и $\mathrm{ExtL}^{\sigma}_{3,4}$ решеток ExtL^{σ}, рассмотренные в § 4 являются собственными идеалами ExtL^{σ}.

Решетки $\mathrm{ExtL}^{\sigma}_{2}$, представленные на Рис. 12, имеют подрешетки $\mathrm{ExtL}^{\sigma}_{0} = \{\{(ad_0)^{\sigma}\}, \{(ab)^{\sigma}\}, \{(ad_0b)^{\sigma}\}, \{(ad_0)^{\sigma}\} \cup \{(ab)^{\sigma}\}\}$, где $\sigma \in \{+, -\}$:



$\mathrm{ExtL}^{\sigma}_{0}$

Рис. 34

$\mathrm{ExtL}^{\sigma}_{0}$ является собственным идеалом $\mathrm{ExtL}^{\sigma}_{2}$, так как для любого элемента z решетки $\mathrm{ExtL}^{\sigma}_{0}$ имеет место $\{a^{\sigma}\} \cap z = z$.

4. В [12] (Книга III, Глава VIII) Д.С. Милль сформулировал правила индуктивного вывода, уточняя и развивая идеи Дж. Гершеля [13][16]. Приведем ниже три правила, формализация которых рассматривается в настоящей статье – первое правило (индуктивный метод сходства), второе правило (индуктивный метод различия), третье правило (индуктивный метод сходства-различия).

Первое правило.

Если два или более случаев подлежащего исследованию явления имеют общим лишь одно обстоятельство, то это обстоятельство – в котором только и согласуются все эти случаи – есть причина (или следствие) данного явления.

Второе правило.

Если случай, в котором исследуемое явление наступает, и случай в котором оно не наступает, сходны во всех обстоятельствах, кроме одного, встречающегося в первом случае, то это обстоятельство, в котором одном только и разнятся эти два случая, есть следствие или причина, или необходимая часть причины явления.

Как показала экспериментально А.Ю. Волкова в [17] буквальный перевод этого правила Д.С. Милля не дает осмысленных результатов, так как нарушается принцип сходства: сходство примеров порождает наличие (отсутствие) изучаемого эффекта и его повторяемость. Формализация же метода различия в ДСМ-методе АПГ посредством предикатов

[16] Идеи Дж. Гершеля представлены в [14]

$M^{\sigma}_{ad_0,n}(V,W)$ устраняет некорректность Второго правила Д. С. Милля, что подтверждается экспериментально в интеллектуальных системах, реализующих ДСМ-рассуждения.

Третье правило.

Если два и более случаев возникновения явления имеют общим лишь одно обстоятельство и два или более случаев невозникновения того же явления имеют общим только отсутствие того же самого обстоятельства, то это обстоятельство, в котором только и разнятся оба ряда случаев, есть или следствие, или причина или необходимая часть причины изучаемого явления.[17]

Логические зависимости между предикатами $M^{\sigma}_{a,n}(V,W)$, $M^{\sigma}_{ad_0,n}(V,W)$ и $M^{\sigma}_{ad_2,n}(V,W)$, которые используются для формализации методов сходства, различия и сходства различия, представлены в §2, а соответствующие им индуктивные правила вывода (локальные стратегии $Str_{x,y}$) ДСМ-рассуждений содержатся в §5.

Таким образом, в настоящей статье сформулирована алгебраическая характеризация (посредством дистрибутивных решеток) индуктивных методов Д. С. Милля и их модификаций.

Материал поступил в редакцию 31.07.14

Сведения об авторе

ФИНН Виктор Константинович – доктор технических наук, профессор, заслуженный деятель науки Российской Федерации, зав. сектором интеллектуальных информационных систем ВИНИТИ РАН, зав. Отделением интеллектуальных систем в гуманитарной сфере РГГУ, Москва.
e-mail: finn@viniti.ru

[17] Заметим, что это правило для **следствия** имеет специальную формализацию в ДСМ-методе АПГ [3] (Глава 3).

УДК 004.81:622.3

С. Г. Черный, В. А. Доровской

Информационная модель оптимизации нечетких процессов принятия решений (на примере диагностики оборудования добычи полезных ископаемых со дна моря)

Решается задача обобщенной оценки эффективности системы управления нечеткими моделями знаний информационно-управляющих систем морских информационных систем на основе учета неавтономности, нелинейности и дискретности объекта управления. Впервые разработана математическая модель процесса оценки знаний, включающая описание статического и динамического режимов взаимодействия.

Ключевые слова: *дискретность, объект управления, информационная система, эффективность*

Деятельность операторов морского добывающего оборудования представляет собой последовательность процедур принятия решений и их реализации. Несомненно, эти решения различаются по значимости, возможным последствиям, но независимо от этого, формально процесс принятия решений можно описать некоторой обобщенной процедурой. В теории принятия решений понятие неопределенности означает неопределенность абстрактной модели, на основе которой принимается решение. При прогнозировании и оценке совокупности гетерогенных (разнородных) показателей эффективности морских информационных систем, возникают трудности, связанные с необходимостью комплексной оценки частных критериев подобных морских систем различной степени сложности. Решение этой проблемы требует описания текущего состояния и динамики изменения уровня эффективности информационных систем, учитывая индивидуальные предпочтения экспертов (чаще всего применяются экспертные оценки и мнения экспертной группы).

Развитие комплексного понятия эффективности морских ИС подразумевает не только наличие технической системы, учитывающей предпочтения коллектива экспертов в установлении функциональной зависимости показателей от набора частных характеристик, но и носящих объективный характер: готовность, надежность, производительность, эффективность, пропускная способность, помехоустойчивость, экономичность и подобных.

Заметим, что эффективность морских ИС, как средство анализа, обработки информации и управления сложными объектами, требует изучения дополнительных свойств систем, имеющих связь с человеческим фактором, выраженную посредством визуализации (интерпретация состояний) и группировки (или комбинирование) элементов управления сложными объектами в рамках предпочтений лиц, принимающих решения (ЛПР).

Отметим, что тенденции изменений в парадигме прогнозирования и оценке эффективности морских ИС, прежде всего заключается в обосновании и установлении уровня приоритетов среди наборов трендов (направлений) их эффективности.

Учитывая, что морская информационно-управляющая глубоководная система добычи полезных ископаемых идентифицируется как неавтономный, нелинейный, дискретный объект, уравнение его состояния в общем случае можно представить как систему разностных уравнений

$$RX[n+1]=\gamma(RX[n],U[n],n);\,PX[n]= \\ =\Phi(RX[n],U[n]n)\ , \qquad (1)$$

где $RX[n]$ – m-мерный вектор состояний входных параметров rx_1, rx_2, ..., rx_m; $U[n]$ – L-мерный вектор управлений с компонентами u_1 , u_2, ..., u_l; $PX[n]$ – j-мерный вектор состояний выходных параметров px_1, px_2,..., px_j; γ – m-мерная вектор-функция с компонентами γ_1, γ_2, ..., γ_l; Φ – L-мерная вектор-функция с компонентами $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n$.

Наличие самостоятельного аргумента n в выражении (1) ориентирует на характерную зависимость от времени вектор-функций Φ, и в литературе данная группа факторов встречается под названием неавтономные. Физически «неавтоаномность» означает, что к объекту, помимо $U[n]$, приложены и другие внешние воздействия $F[n]$, а при отсутствии аргумента t систему называют автономной. Уравнения состояния удовлетворяют теореме существования и единственности решения для Φ. Визуализация, процесс идентификации a цели и задачи управления в общем виде представляется позиционированием системы координат в рассмотрение k-мерной системы, по осям которой откладываются величины $rx_1, rx_2, ..., rx_m$ и $px_1, px_2, ..., px_j$. При графическом представлении подобную систему можно визуализировать только при $m = j$ и k=1, 2, 3; в других случаях – не поддается геометрической интерпретации.

Процесс идентификации задачи управления нечеткими моделями знаний операторов морской ИС достаточно сложный, поскольку вектор начального и конечного состояния представлен посредством величин, которые имеют единую размерность $rx_i\ re_i$, где re_i – денежная оценка i-й партии входных параметров px_j, pe_j, и pe_j – финансовая составляющая оценки j-й партии выходных параметров на пространстве состояния.

Задачу управления нельзя считать сформулированной при условии, что характер движения системы не идентифицирован рамками (системой ограничений). В современных системах управления, можно представить систему вида:

$$|u_i(t)| \leq c_i,\ c_i = \text{const};\ i = \overline{1,m}. \qquad (2)$$

Набор ограничений, который описывает и формирует область допустимых значений являющих воздействий – Ω (U). Она называется областью допустимых управлений. Реально подаваемые на вход объекта управления (ОУ) управления должны принадлежать области допустимых управлений

$$\mathrm{U(t)} \in \Omega(U) \qquad (3)$$

Компоненты вектора финансового состояния (ФС) $re_1, re_2, \ldots, re_m$, тоже должны быть в области определенных ограничений, при условии, что $RE(t)$ не должен выходить за пределы некоторой области финансовых состояний (ФС) Q, называемой областью допустимых состояний

$$RE(t) \in Q(RE) \qquad (4)$$

Предположим, что в области финансовых состояний Q существует возможность идентификации подобласти Q_1 состояний ($Q_1 \subset Q$), тогда, цель управления нечеткими моделями знаний адаптивной системы заключается в ориентации (трансформации) объекта из начального ФС $RE(t_н)$, в котором показатель находится в момент $t_н$, в конечное $PE(t_k)$, которое принадлежит подобласти Q_1 области допустимых ФС $PE(t) \in Q_1$.

Чтобы поставленная цель управления была достигнута, на вход объекта необходимо подать соответствующее идентифицирующее возмущающее управление, суть такого потока – управление нечеткими моделями знаний области допустимых управлений $U(t) \in \Omega(U)$, при котором цель будет достигнута – ($U(t) \in \Omega\ U$)); в результате будет осуществлена параметрическая оценка на временном отрезке $[t_н,\ t_к]$ (где $t_к$ заранее неизвестно), при котором воздействие на объект управления при идентифицированном начальном состоянии и известном векторе $F(t)$ имеет решение $PE(t_K)$, удовлетворяющее ограничению $RE(t) \in Q(RE)$ при всех $t \in [t_н,\ t_k]$ и конечному условию $PE(t) \in Q_1$.

Задачу управления, сформулированную математически, можно представить, если цель управления сформулирована и определена через кортеж критериев качества управления. Идентифицированы ограничения первого вида, которые представляют собой системы дифференциальных или разностных уравнений, сковывающих возможные способы движения системы и определены ограничения второго вида, представляющие собой систему алгебраических уравнений или неравенств, выражающих ограниченность ресурсов или иных величин, используемых при управлении [1].

Для сложной системы существует бесконечное число допустимых управлений, которые переводят ее из начального ФС в конечное в рамках системы ограничений, тогда все виды модели управления, реализующие цель управления, являются равноценными критериями. На систему управления дополнительно можно наложить ряд ограничений в виде требований, которые не участвуют в формулировке задачи управления, но характеризуют успешность продвижения к цели.

Математическое выражение, дающее количественную оценку степени выполнения наложенных на способ управления требований, называют критерием качества управления. Наиболее предпочтительным или оптимальным будет такой критерий качества управления, при котором достигается минимальное (максимальное) значения [5].

Получение набора достоверных данных для принятия решений оператором информационно-управляющей системы в условиях неопределенности и риска соответствует набору требований для комплексного анализа методов и моделей неточности и неопределенности данных в ИУС. В литературе чаще всего предлагается использовать два средства представления неполноты данных – теория вероятностей и теория ошибок. Однако они обладают рядом ограничений.

Вероятностные модели плохо учитывают предельный случай полного нечеткого знания, поскольку в них всегда предполагается заданным множество взаимно независимых событий, которым в силу принципа максимума энтропии [3] приписываются равные вероятности (в конечном случае), тогда идентификация всех этих событий исключена и значения неопределенности, связанные с этими событиями, могут не зависеть от числа рассматриваемых альтернатив, как в случае вероятностей.

Заметим, что числа, которые назначены экспертами для вероятностного описания уровня их информированности, должны быть представлены как приближенные оценки, но теория субъективных вероятностей не затрагивает данный тип неточности и предполагает факт, что «рациональный индивидуум» должен задавать точные числа в результате процедур оценивания.

Теория ошибок отражает лишь неточность средств измерения, выраженную в интервальной форме, но математически определяется как образ отображения, аргументы которого являются сущностью подмножества.

В настоящее время вероятностная мера рассматривается только как частный случай более общего класса, называемого нечеткими мерами [4].

Любая мера ставит в соответствие подмножествам заданного множества какие-либо действительные числа, идентифицирующие количество некого свойства, связанного с каждым подмножеством.

В качестве примера можно рассмотреть множество событий, связанных с базой неточных и неопределенных знаний, идентифицируемых как подмножества универсального множества Ω, называемого достоверным событием, тогда $\varnothing$ отождествляется с невозможным событием. Определим, что каждому событию $A \subset \Omega$ можно поставить в соответствие действительное число $g(A)$, которое определяется субъектом – «хранителем» базы знаний. Элементы значения $g(A)$ оцениваются степенью определенности, которая содержится в отношении субъекта к событию A с учетом текущего уровня информированности. Величина $g(A)$, по определению, растет с увеличением определенности и расширениями границ достоверности и если A является достоверным событием, тогда можно сделать предположение, что $g(A) = 1$, а если A – невозможное событие, то полагают $g(A) = 0$.

Отсюда мера определяется функцией

$$g : P(\Omega) \to [0,1],$$

где $P(\Omega)$ – мощность множества Ω.

Чтобы функция являлась нечеткой мерой, она должна обладать следующими свойствами нечетких мер [6]:

1) $g(\varnothing) = 0$; $g(\Omega) = 1$ – ограниченность; (5)

2) если $A_1 \subseteq A_2$,

то $g(A_1) \le g(A_2)$ – монотонность; (6)

3) если $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots$ или $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \ldots$,

то $\lim\limits_{i\to\infty} g(A_i) = g \lim\limits_{i\to\infty}(A_i)$ – непрерывность. (7)

Требование 1) (ограниченность) – очевидно. Требование 2) (монотонность), не допускает, чтобы подмножество другого подмножества Ω обладало большей мерой, чем включающее подмножество. Согласно требованию 3) (непрерывность), предел мер бесконечной монотонной последовательности подмножеств Ω должен совпадать с мерой предела этой последовательности. К дискретным системам, в которых Ω всегда является конечным множеством, требование непрерывности, естественно, неприменимо.

Функции множества g были предложены Сугено для оценки неопределенности под названием нечеткие меры. Д. Дюбуа и А. Прад применяют название мера неопределенности [5]. В литературе описаны самые разные классы применения нечетких мер, имеющих разные свойства оптимизаций [5]. На рис. 1. приведена диаграмма, изображающая отношение включения для некоторых мер [4].

Класс вероятностных мер входит в класс мер правдоподобия и в класс мер доверия, но не пересекается с классами мер возможности или необходимости.

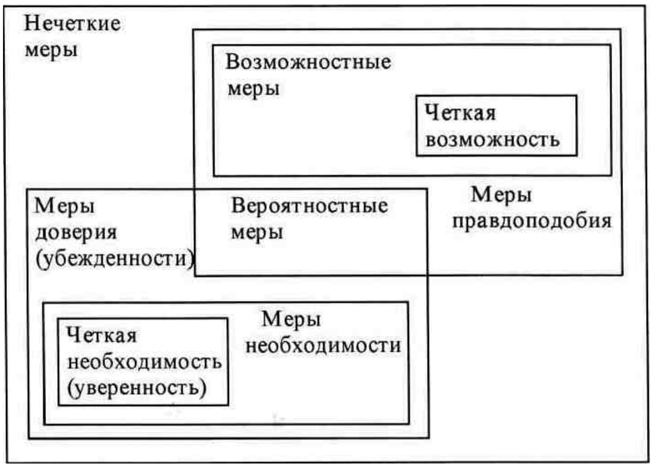


Рис. 1. Соотношения между нечеткими мерами

Неравенства (8) и (9) непосредственно вытекают из аксиомы монотонности (6) и характеризуют объединение $A \cup B$ или пересечение $A \cap B$ событий:

$$\forall A,\ B \subseteq \Omega,\ g(A \cup B) \ge \max(g(A),\ g(B)), \quad (8)$$

$$g(A \cap B) \le \min(g(A),\ g(B)). \quad (9)$$

Предельным случаем мер неопределенности оказываются функции множества П, представленные в виде:

$$\forall A,\ B,\ \Pi(A \cup B) = \max(\Pi(A),\ \Pi(B)). \quad (10)$$

Мерами возможности по Л. Заде [6-9] удовлетворяют представлению (из двух противоположных событий, одно – возможно):

$$\max(\Pi(A),\ \Pi(\overline{A})) = 1. \quad (11)$$

При условии, что множество Ω конечно, тогда всякую меру возможности П можно определить по ее значениям на одноточечных подмножествах П:

$$\Pi(A) = \sup\{\pi(\omega) \mid \omega \in A\}, \quad (12)$$

где $\pi(\omega) = \Pi(\{\omega\})$; π – есть отображение из Ω в [0, 1], называемое функцией распределения возможностей.

Среди граничных условий мер неопределенности при достижении равенства в формуле (8) определяется класс функций множества, называемых мерами необходимости и обозначаемых N, которые удовлетворяют аксиоме (9):

$$\forall A,\ B,\ N(A \cap B) \ge \min(N(A),\ N(B)). \quad (13)$$

Функцию распределения необходимости всегда можно построить исходя из функции распределения возможности с помощью формулы

$$N(A) = \inf\{1 - \pi(\omega) \mid \omega \notin A\}. \quad (14)$$

Меры необходимости удовлетворяют соотношению

$$\min(N(A),\ \mathrm{N}(\overline{A})) = 0, \quad (15)$$

исключающему одновременную необходимость двух противоположных событий.

Для наглядности описания представим систему управления морской ИС предприятия в виде двухуровневой системы, потому что в двухуровневых системах проявляются все существенные характеристики многоуровневых, а более сложные системы могут быть спроектированы (сформированы) из двухуровневых, как из модулей (рис.2). На верхнем уровне располагается целевой орган – система управления высшего уровня, а на нижнем – отдельные элементы структуры. Система управления высшего уровня C_0 выполняет функции управления и координации деятельности элементов нижнего уровня, а каждый из элементов низшего уровня обладает определенной функцией самостоятельности в организации собственной деятельности.

Состояние системы управления морской ИС предприятия описывается вектором p:

$$p = \{p_i \mid i = 0,...,n\},$$

а состояние каждого элемента – вектором p_i:

$$p_i = \{p_{ij} \mid i = 0,...,n, j = 1,2,...,m_i\}.$$

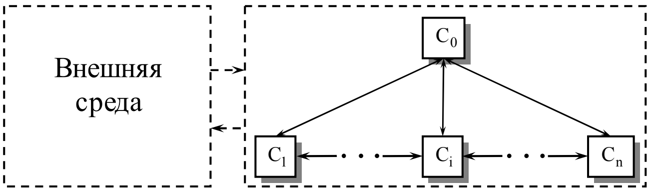


Рис.2. Укрупненная схема системы управления морской информационной системы

Элементы C_i взаимозависимы и взаимосвязаны, а их возможности по организации собственной деятельности ограничены взаимосвязями и взаимозависимостями с другими элементами, и контролируются системой управления высшего уровня C_0, которая разрабатывает общую стратегию, определяет плановые задания, распределяет ресурсы и т.п.

Вектор состояний i-го элемента:

$$p_i = (w_i, d_i^*, d_i),$$

где w_i – вектор расхода ресурсов; d_i^* – вектор результатов деятельности, определяемый системой C_0; d_i – вектор результатов, определяемый самим элементом.

Тогда $w_i \in W_i(d_i^*)$, где $W_i(d_i^*)$ – допустимое множество расходов ресурсов, $d_i \in D_i(w_i)$, где $D_i(\mathrm{w_i})$ – допустимое множество результирующих векторов при допустимом расходе ресурсов.

Исходя из изложенного, множество состояний i-го элемента будет представлено:

$$P_i = \{p_i(w_i, d_i^*, d_i) \mid w_i \in W_i(d_i^*) \cap W_i(d_i), d_i^* \in D_i^*, d_i \in D\}.$$

Влияние внешней среды вносит неопределенность информации и риск.

На рис.3 представлена обобщенная структура двухуровневой системы управления, в состав которой введена подсистема координации.

В схеме используются следующие обозначения: C_0 − вышестоящая управляющая система (координатор); $C_1,...,C_n$ − локальные системы управления нижнего уровня; $y \in Y$ − сигналы внешней среды (возмущающие воздействия, потоки ресурсов, и т.п.); $\gamma \in \Gamma$ − координирующий сигнал, $\gamma = (\gamma_1,...,\gamma_n)$, от системы управления высшего уровня (через подсистему координации); ψ_i − информационные сигналы от локальных управляющих систем, $\psi = (\psi_1,...,\psi_n)$, $\psi \in \Psi$ (в систему высшего уровня); $u_i \in U_i$ − управляющие сигналы i-й локальной управляющей системы, $U = U_1 \times \ldots \times U_n$; $\phi_i \in \vartheta_i$ − информационные сигналы, от объекта управления – процесса, $\vartheta = \vartheta_1 \times \ldots \times \vartheta_n$; $d \in D$ − выходные сигналы объекта управления.

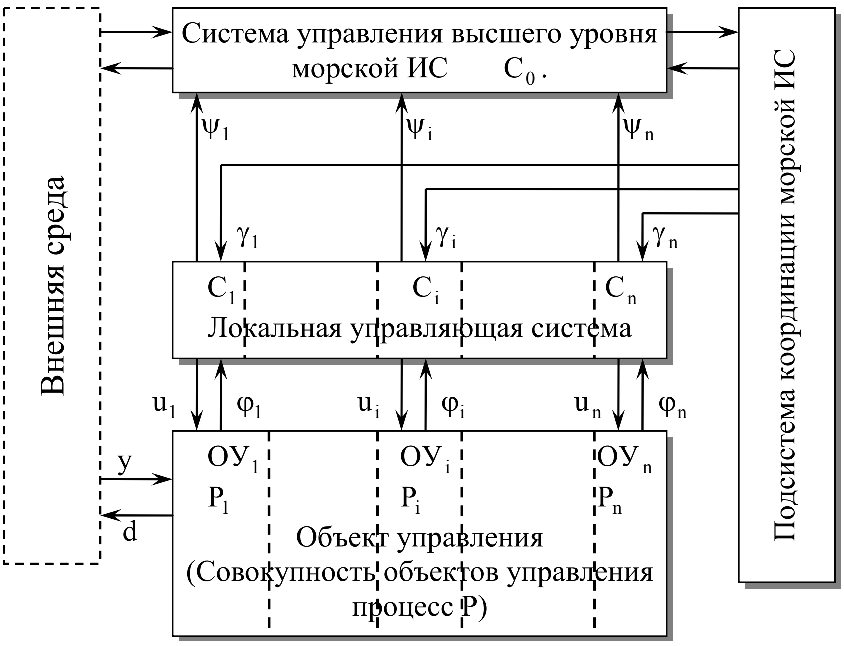


Рис.3. Обобщенная структура двухуровневой системы управления для морской информационной системы

На рис. 3 используются следующие обозначения: C_0 − вышестоящая управляющая система (координатор); $C_1,...,C_n$ − локальные системы управления нижнего уровня; $y \in Y$ − сигналы внешней среды (возмущающие воздействия, потоки ресурсов, и т.п.); $\gamma \in \Gamma$ − координирующий сигнал, $\gamma = (\gamma_1,...,\gamma_n)$, от системы управления высшего уровня (через подсистему координации); ψ_i − информационные сигналы от локальных управляющих систем, $\psi = (\psi_1,...,\psi_n)$, $\psi \in \Psi$ (в систему высшего уровня); $u_i \in U_i$ − управляющие сигналы i-й локальной управляющей системы, $U = U_1 \times \ldots \times U_n$; $\phi_i \in \vartheta_i$ − информационные сигналы, от объекта управления – процесса, $\vartheta = \vartheta_1 \times \ldots \times \vartheta_n$; $d \in D$ − выходные сигналы объекта управления.

Каждая подсистема выполняет определенные итерации [8-10]:

1) функции координирующей системы:
$C_0 : \Psi \to \Gamma$ − функция, служащая для координации работы подсистем нижних уровней;

2) функции локальных управляющих систем:
$C_i : \Gamma \times \vartheta_i \to U_i$ − функция управления;
$f_0 : \vartheta \times \Gamma \times U \to \Psi$ − функция оценки результата;

3) функции объекта управления:
$P : U \times Y \to D$ − функция производства;
$F_1 : U \times Y \times D \to \vartheta_i$ − функция предоставления отчетной информации.

Для представленной модели иерархической системы характерно упрощенное и схематичное отражение ее работы. При условии обобщения системы до k-уровневой иерархической, идентифицируем ключевые блоки:

- на нулевом уровне находится система управления высшего уровня, с 1 по $k-2$ − находятся уровни нижестоящих управляющих систем, $k-1$ − низший управляющий уровень. Объект управления находится на k-м уровне;
- каждый элемент системы может управлять несколькими нижестоящими подсистемами, но при этом сам является объектом управления только вышестоящей системы. Сигнал, который поступает из вышестоящей системы, представлен вектором, а каждая ℓ-я компонента – предназначается для управления ℓ-ой (в данной ветви иерархии) нижестоящей подсистемой. (Пример: сигнал, поступающий в вышестоящую систему, является вектором, который складывается из ℓ-х компонент сигналов нижестоящих элементов (в данной ветви иерархии). Так, например, сигнал обратной связи ψ_{ij}, поступающий в i-ю управляющую систему j-го уровня, можно представить в виде: $\psi_{ij} = (\psi^1_{i-\ell+1,j+1},\ldots,\psi^{\ell}_{i,j+1},\psi^{\ell+1}_{i+1,j+1},\ldots)$).

При рассмотрении понятия «возможность» и «вероятность» (при наличии информации о возникновении событий в форме измеренных частот элементарных событий), полученная мера неопределенности позиционируется форматом аксиомы аддитивности:

$$\forall A,\ B,\ A \cap B = \varnothing,\ P(A \cup B) = P(A) + P(B), \quad (16)$$

т.е. становится вероятностной мерой и является монотонной (для условия (6)). Формула (12) – вероятностный эквивалент аксиом (9) и(12).

Эквивалентность условий (11) и (13) для конечного случая записывается в виде

$$P(A) = \sum_{\omega \in A} p(\omega), \quad (17)$$

где $p(\omega) = P(\{\omega\})$.

Для представлений (12) и (16) удобна запись:

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1, \quad (18)$$

при условии, что

$$N(A) + N(\overline{A}) \le 1, \Pi(A) + \Pi(\overline{A}) \ge 1. \quad (19)$$

Из описанных моделей видно основное различие между возможностью и вероятностью, вероятность некоторого события полностью определяет вероятность противоположного события. Возможность (или необходимость) некоторого события и возможность (необходимость) противоположного ему события связаны слабее; в частности, для того чтобы охарактеризовать неопределенность по отношению к событию *A*, требуются два числа − $\Pi(A)$ и $N(A)$.

При моделировании субъективного суждения кажется естественным стремление не устанавливать жесткие связи между группой показателей, свидетельствующих в пользу некоторого события (степень необходимости и обоснованности), и показателями, которые свидетельствуют против него (степень возможности). Заметим, что понятие вероятности определяется менее гибким, чем для меры возможности.

Естественным образом вероятностные меры синтезируют базу точных и дифференцированных знаний, а меры возможности представляют отражение неточных связей для кортежа знаний. Функционал возможности в данном аспекте более естественен для представления меры неуверенности (от субъекта не ждут слишком точной информации, но желают услышать, по возможности, наиболее связную речь); точные, но флуктуирующие данные чаще всего получают из наблюдений физического явления.

Обобщенные показатели качества в общей теории оптимальных систем не конкретизируются и их выбор производится для каждой конкретной задачи индивидуально. Агрегированный показатель качества чаще всего представляет собой функционал, и для задачи управления нечеткими моделями знаний, представлен как интегральное соотношение:

$$E = \int_{t_H}^{t_k} \varphi(U(t), RE(t), PE(t), t)dt. \quad (20)$$

Рассмотрение внешнего контура управления ориентировано на обеспечение эффективности функционирования целостности системы; заданный (характерный) вид деятельности системы и ее тренд представлен единым для всех сложных управляемых систем.

Определение показателя эффективности имеет вид

$$E = \frac{AZR}{ZR}, \quad (21)$$

где AZR – абсолютное значение результатов управления НМЗ; ZR – затраты на реализацию управления нечеткой модели знаний.

Исходя из условий представления состояния системы (начального и конечного состояния системы исследования), выражение для идентификации показателя эффективности запишем как функционал:

$$E = \int_{t_H}^{t_k} \varphi(RE(t_H), PE(t_k), t)dt \; / \; / \int_{t_h}^{t_k} \varphi(RE(t_{H)}, PE(t_k), t)dt. \quad (22)$$

Выражение (7) определяет эффективность управления нечеткой моделью знаний с точки зрения класса формализации, где модель является линейным интегральным уравнением Вольтерра 1-го рода

$$\int_a^x K(x,s)\varphi(s)ds = f(x) \cdot$$

Этапы оценки эффективности управления нечеткими моделями знаний представлены в виде элемента дерева целей, где вначале для $\Omega(U)$ определяют допустимое управление $U(t)$, на котором показатель качества (7) при условиях $F(t)$, $X(t)$ достигаются максимальные значения

$$E = \max, \quad U(t)\Omega(U), \quad (23)$$

а объект управления формируется (структурируется) $RE(t_H) \rightarrow PE(t_K) \in Q_1$, оставаясь в области допустимых состояний $RE(t) \in Q(RE)$ при всех t е $[t_н, t_к]$.

Таким образом, в процессе нашего исследования установлено, что результаты управления зависят только от начального и конечного состояния адаптивной информационной системы и впервые разработана математическая модель процесса оценки знаний, включающая описание статического и динамического режимов взаимодействия. С точки зрения класса формализации эта модель является линейной интегральной функцией Вольтерра 1-го рода.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Белых А.А. Методологические основы прогнозирования и оценки эффективности информационных систем. Монография. – Пермь: ПНЦ УрО РАН, ПГСХА, 2010. – 137 с.
2. Белых А.А. Модели и методы синтеза противосбойных систем цифровой аппаратуры управления сложных технических комплексов. Препринт. – Пермь: Институт механики сплошных сред УрО РАН, 2000. – 76 с.
3. Белых А.А., Горлов Ю.Г., Калинин Н.П., Харитонов В.А. Отношение объективного и субъективного в моделях поддержки принятия решений / под науч. ред. В.А. Харитонова: Монография. – Пермь: ПГСХА, 2008. – 230 с.
4. Трахтенгерц Э.А. Неопределённость в математических моделях компьютерной оценки решений. – М.: Институт Проблем Управления, 1998. – С. 11-29.
5. Шаронова Н.В. Построение модели базы знаний в автоматизированной информационно-библиотечной системе // Вестник ХГТУ. – 1998. – № 2(4). – С. 105-110.
6. Бурков В.Н. Основы математической теории активных систем. – М.: Наука, 1974. – 225 с.
7. Месарович М., Мако Д., Такахара И. Теория иерархических многоуровневых систем. – М.: Мир, 1973. – 332 с.
8. Алиев Р.А., Либерзон М.И. Методы и алгоритмы координации в промышленных системах управления. – М.: Радио и связь, 1987. – 208 с.
9. Цвиркун А.Д. Основы синтеза структуры сложных систем. – М.: Наука, 1982. – 127 с.
10. Чёрный С.Г. Применение механизма информационных интеллектуальных моделей в системах автоматического управления // Вестник Херсонского национального технического университета. – 2012. – № 1(44). – С. 215-220.

Материал поступил в редакцию 02.09.14.

Сведения об авторах

ЧЕРНЫЙ Сергей Григорьевич – кандидат технических наук, доцент кафедры Электрооборудования судов и автоматизации производства Керченского государственного
морского технологического университета.
e-mail: sergiiblack@gmail.com

ДОРОВСКОЙ Владимир Алексеевич – доктор технических наук, профессор кафедры Электрооборудования судов и автоматизации производства Керченского государственного морского технологического университета
e-mail: dora1943@mail.ru