РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

ВСЕРОССИЙСКИЙ ИНСТИТУТ НАУЧНОЙ И ТЕХНИЧЕСКОЙ ИНФОРМАЦИИ
(ВИНИТИ)

НАУЧНО · ТЕХНИЧЕСКАЯ ИНФОРМАЦИЯ

Серия 2. ИНФОРМАЦИОННЫЕ ПРОЦЕССЫ И СИСТЕМЫ

ЕЖЕМЕСЯЧНЫЙ НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ СБОРНИК

Издается с 1961 г. | № 5 | Москва 2006

ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ

УДК 001.8

Д. В. Виноградов

Еще один вариант логики аргументации

*Предложен новый вариант логики аргументации, отличающийся от классического тем, что функции "аргументации" заданы на множестве высказываний, а не на множестве переменных. Используя теорему Бялыницкого-Бирули и Расевой, охарактеризуем пары формул, принимающих одинаковые значения для произвольных функций аргументации, как пары формул, чья эквивалентность доказуема в теории квазибулевых алгебр**

1. ВВЕДЕНИЕ

Мы будем применять стандартные обозначения для истинностных значений в логике Белнапа DM4 вместо используемых В. К. Финном [1]. Вместо +1 будем использовать t (как сокращение от true), вместо -1 используем f (как сокращение от false), вместо 0 используем $\top$ и вместо τ используем $\bot$.

Классическая логика аргументации [1] основывается на паре функций "аргументации": $g^+ : \mathrm{Vars} \to \mathrm{Power}(A)$ (аргументов pro) и $g^- : \mathrm{Vars} \to \mathrm{Power}(A)$ (аргументов contra), которые отображают множества всех пропозициональных переменных во множество подмножеств некоторого (конечного) множества A аргументов.

С помощью функций g^+ и g^- вычисляется оценка переменных по правилам:

$v[p] = t$ тогда и только тогда, когда $g^+(p) \neq \emptyset$ и $g^-(p) = \emptyset$;

$v[p] = f$ тогда и только тогда, когда $g^+(p) = \emptyset$ и $g^-(p) \neq \emptyset$;

$v[p] = \top$ тогда и только тогда, когда $g^+(p) \neq \emptyset$ и $g^-(p) \neq \emptyset$;

$v[p] = \bot$ тогда и только тогда, когда $g^+(p) = \emptyset$ и $g^-(p) = \emptyset$.

После этого используются истинностные таблицы из [1] для связок &, $\vee$, $\supset$ и $\neg$ для того, чтобы вычислить значение сложной пропозициональной формулы.

Единственным выделенным истинностным значением в классической логике аргументации является t.

* Работа выполнена при финансовой поддержке Российского гуманитарного научного фонда (проект № 05-03-03319а).

Новый вариант пропозициональной логики аргументации использует пару функций "аргументации" g^+ : Props $\to$ Power(A) и g^- : Props $\to$ Power(A), заданных на множестве всех пропозициональных формул, на которые накладываются дополнительные ограничения:

$g^+(\varphi \wedge \psi) = g^+(\varphi) \cap g^+(\psi)$ и $g^-(\varphi \wedge \psi) = g^-(\varphi) \cup g^-(\psi)$

$g^+(\varphi \vee \psi) = g^+(\varphi) \cup g^+(\psi)$ и $g^-(\varphi \vee \psi) = g^-(\varphi) \cap g^-(\psi)$

$g^+(\neg\varphi) = g^-(\varphi)$ и $g^-(\neg\varphi) = g^+(\varphi)$

Теперь, используя только функции g^+ и g^-, можно вычислить оценку произвольной формулы по правилу:

$v[\varphi] = t$ тогда и только тогда, когда $g^+(\varphi) \neq \emptyset$ и $g^-(\varphi) = \emptyset$;

$v[\varphi] = f$ тогда и только тогда, когда $g^+(\varphi) = \emptyset$ и $g^-(\varphi) \neq \emptyset$;

$v[\varphi] = \top$ тогда и только тогда, когда $g^+(\varphi) \neq \emptyset$ и $g^-(\varphi) \neq \emptyset$;

$v[\varphi] = \bot$ тогда и только тогда, когда $g^+(\varphi) = \emptyset$ и $g^-(\varphi) = \emptyset$.

Снова единственным выделенным значением будет t.

Квазибулева алгебра — это алгебра $\mathbf{D} = \langle D;\ \vee,\ \wedge,\ \neg,\ 0,\ 1\rangle$, удовлетворяющая условиям:

(идемпотентность)	$x \vee x = x$;
	$x \wedge x = x$;
(коммутативность)	$x \vee y = y \vee x$;
	$x \wedge y = y \wedge x$;
(ассоциативность)	$x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$;
	$x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$;
(дистрибутивность)	$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$;
	$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$;
(поглощение)	$x \vee (x \wedge y) = x$;
	$x \wedge (x \vee y) = x$;
(грани)	$1 \vee x = 1$;
	$0 \wedge x = 0$;
(законы де Моргана)	$\neg(x \vee y) = (\neg x) \wedge (\neg y)$;
	$\neg(x \wedge y) = (\neg x) \vee (\neg y)$;
(элементы 0 и 1)	$\neg 1 = 0$;
	$\neg 0 = 1$;
(инволюция)	$\neg(\neg x) = x$.

Примером квазибулевой алгебры является алгебра DM4=$\langle \{t, \top, \bot, f\};\ \vee,\ \wedge,\ \neg,\ f,\ t\rangle$, где связки заданы таблицами:

$\vee$	t	$\top$	$\bot$	f
t	t	t	t	t
$\top$	t	$\top$	t	$\top$
$\bot$	t	t	$\bot$	$\bot$
f	t	$\top$	$\bot$	f

$\wedge$	t	$\top$	$\bot$	f
t	t	$\top$	$\bot$	f
$\top$	$\top$	$\top$	f	f
$\bot$	$\bot$	f	$\bot$	f
f	f	f	f	f

	$\neg$
t	f
$\top$	$\top$
$\bot$	$\bot$
f	t

2. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Утверждение. Новый вариант логики аргументации не сводится к классическому подходу к логике аргументации ни для каких истинностных таблиц.

Доказательство. Достаточно найти такое множество A аргументов и такие функции аргументации g_1^+ : Vars $\to$ Power(A), g_1^- : Vars $\to$ Power(A), g_2^+ : Vars $\to$ Power(A), g_2^- : Vars $\to$ Power(A), что $v_1[p] = v_1[q] = v_2[p] = v_2[q]$, но $v_1[p \wedge q] \neq v_2[p \wedge q]$. Пусть $A = \{a_1,\ a_2\}$, $g_1^+(p) = \{a_1\}$, $g_1^-(p) = \{a_2\}$, $g_1^+(q) = \{a_2\}$, $g_1^-(q) = \{a_1\}$, $g_2^+(p) = \{a_1\}$, $g_1^-(p) = \{a_2\}, g_1^+(q) = \{a_1\}$, $g_1^-(q) = \{a_2\}$. Легко проверить, что $v_1[p] = v_1[q] = v_2[p] = v_2[q] = \top$. Но $g_1^+(p \wedge q) = g_1^+(p) \cap g_1^+(\Phi_2) = \varnothing$ и $g_1^-(p \wedge q) = g_1^-(p) \cup g_1^-(q) = A$, т. е. $v_1[p \wedge q] = f$. А с другой стороны, $g_2^+(p \wedge q) = g_2^+(p) \cap g_2^+(\Phi_2) = \{a_1\}$ и $g_2^-(p \wedge q) = g_2^-(p) \cup g_2^-(q) = \{a_2\}$, т. е. $v_2[p \wedge q] = \top$.

Теорема [2]. Всякая квазибулева алгебра является подрешеткой прямого произведения $(DM4)^A$ решеток DM4 для некоторого множества A.

Доказательство этой теоремы можно найти в книге [3].

Две пропозициональные формулы (в языке $\vee$, $\wedge$, $\neg$) называются **DM4-эквивалентными**, если при любой оценке переменных θ : Vars $\to$ DM4 они принимают одинаковое значение.

Следствие. Две формулы DM4-эквивалентны тогда и только тогда, когда их равенство доказуемо в эквациональной теории квазибулевых алгебр.

Две пропозициональные формулы (в языке $\vee$, $\wedge$, $\neg$) называются **аргументно-эквивалентными**, если при любых функциях аргументации g^+:Props$\to$Power(A) и g^-:Props$\to$Power(A) они принимают одинаковое значение оценки v, порожденное по этим функциям аргументации.

Теорема 1. Две формулы аргументно-эквивалентны тогда и только тогда, когда их равенство доказуемо в эквациональной теории квазибулевых алгебр.

Доказательство. Закодируем (взаимно-однозначно) обе функции "аргументации" g^+:Props$\to$Power(A) и g^-:Props$\to$Power(A) одной функцией g:Props$\to(DM4)^A$ правилом: для каждого аргумента $a \in A$

$a \in g^+$ и $a \in g^-$ тогда и только тогда, когда $g(a) = \top$;

$a \in g^+$ и $a \notin g^-$ тогда и только тогда, когда $g(a) = t$;

$a \notin g^+$ и $a \in g^-$ тогда и только тогда, когда $g(a) = f$;

$a \notin g^+$ и $a \notin g^-$ тогда и только тогда, когда $g(a) = \bot$.

Легко проверить, что g:Props$\to(DM4)^A$ удовлетворяет условиям:

$g(\varphi \wedge \psi) = g(\varphi) \wedge g(\psi)$,
$g(\varphi \vee \psi) = g(\varphi) \vee g(\psi)$,
$g(\neg\varphi) = \neg g(\varphi)$,

где операции $\vee$, $\wedge$, $\neg$ в $(DM4)^A$ вычисляются покоординатно.

Например, условие $g(\varphi)(a) = \top \& g(\psi)(a) = t$ эквивалентно $a \in g^+(\psi) \&\ a \in g^-(\varphi) \&\ a \in g^+(\psi) \&\ a \notin g^-(\psi)$, что влечет $a \in g^+(\varphi \wedge \psi) = g^+(\varphi) \cap g^+(\psi) \&\ a \in g^-(\varphi \wedge \psi) = g^-(\varphi) \cup g^-(\psi)$, которое эквивалентно $g(\varphi \wedge \psi)(a) = \top$. Остальные случаи равенства $g(\varphi \wedge \psi) = g(\varphi) \wedge g(\psi)$ проверяются аналогично. Условие $g(\varphi)(a) = \top \& g(\psi)(a) = \bot$, эквивалентное $a \in g^+(\varphi) \&\ a \in g^-(\varphi) \&\ a \notin g^+(\psi) \&\ a \notin g^-(\psi)$, влечет $a \in g^+(\varphi \vee \psi) = g^+(\varphi) \cup g^+(\psi) \&\ a \notin g^-(\varphi \vee \psi) = g^-(\varphi) \cap g^-(\psi)$, что эквивалентно $g(\varphi \vee \psi)(a) = t$. Остальные случаи равенства $g(\varphi \vee \psi) = g(\varphi) \vee g(\psi)$ проверяются аналогично. Случай $g(\neg\varphi) = \neg g(\varphi)$ — еще проще.

Легко проверить, что истинностная оценка $v[\varphi] = \cup\{g(\varphi)(a) : a \in A\}$, где $\cup$ задается таблицей:

$\cup$	$\top$	t	f	$\perp$
$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$
t	$\top$	t	$\top$	t
f	$\top$	$\top$	f	f
$\perp$	$\top$	t	f	$\perp$

Для доказательства теоремы достаточно проверить, что две формулы аргументно-эквивалентны тогда и только тогда, когда они DM4-эквивалентны. Пусть φ и ψ DM4-эквивалентны. Тогда для каждого $a \in A$ $g(\varphi)(a) = g(\psi)(a)$, так как $g(\varphi)(a)$ значение формулы φ в решетке DM4, соответствующей множителю $a \in A$. Значит, и $v[\varphi] = \cup\{g(\varphi)(a) : a \in A\} = \cup\{g(\psi)(a) : a \in A\} = v[\psi]$. Пусть φ и ψ не являются DM4-эквивалентными. Тогда берем одноэлементное множество $A = \{a\}$, в нем $v[\varphi] = g(\varphi)(a)$. Поэтому φ и ψ не являются аргументно-эквивалентными. Осталось применить предыдущее следствие.

Исследуем теперь вопрос о расширении языка некоторыми вариантами импликации.

Рассмотрим в дистрибутивной решетке DM4 **относительное псевдодополнение** $\Rightarrow$ заданное условием: $x \le (y \Rightarrow z)$ тогда и только тогда, когда $(x \wedge y) \le z$.

Лемма 1. Относительное псевдодополнение $\Rightarrow$ в DM4 имеет истинностную таблицу:

$\Rightarrow$	t	$\top$	$\perp$	f
t	t	$\top$	$\perp$	f
$\top$	t	t	$\perp$	$\perp$
$\perp$	t	$\top$	t	$\top$
f	t	t	t	t

	$\sim$
t	f
$\top$	$\perp$
$\perp$	$\top$
f	t

которая превращает DM4 в четырехэлементную булеву алгебру. Операция отрицания $\sim x$, определяемая формулой $x \Rightarrow f$, является дополнением.

Доказательство. Легко проверить, что $x \le y$ тогда и только тогда, когда $(x \wedge y) = t$. Также легко установить, что $(t \Rightarrow y) = y$. Осталось вычислить $(\top \Rightarrow \perp)$, $(\perp \Rightarrow \top)$, $(\top \Rightarrow f)$ и $(\perp \Rightarrow f)$. По определению $x \le (\top \Rightarrow \perp)$ тогда и только тогда, когда $(x \wedge \top) \le \perp$, что возможно, если и только если $(x \wedge \top) = f$, т. е. $x = f$ или $x = \perp$, последнее эквивалентно $x \le \perp$. Значит, $(\top \Rightarrow \perp) = \perp$ Аналогично, $x \le (\top \Rightarrow f)$ тогда и только тогда, когда $(x \wedge \top) \le f$, что возможно, если и только если $(x \wedge \top) = f$, что опять эквивалентно $x \le \perp$. Поэтому $(\top \Rightarrow t) = \perp$. Остальное аналогично. Ясно, что $\sim x$ определяет дополнение на DM4, что превращает DM4 в булеву алгебру. Более того, $x \Rightarrow y$ эквивалентно формуле $\sim x \vee y$, т. е. является относительным дополнением.

Пропозициональную формулу φ (в языке $\vee$, $\wedge$, $\supset$, $\neg$) назовем **тавтологией логики аргументации**, если $v[\varphi] = t$ для любого множества A и произвольной функции "аргументации" g:Props$\to$(DM4)^A, удовлетворяющей условиям:

$g(\varphi \wedge \psi) = g(\varphi) \wedge g(\psi)$,
$g(\varphi \vee \psi) = g(\varphi) \vee g(\psi)$,
$g(\neg \varphi) =\sim g(\varphi)$,
$g(\varphi \supset \psi) = g(\varphi) \Rightarrow g(\psi)$

Теорема 2. Формула является тавтологией логики аргументации тогда и только тогда, когда она тавтология логики высказываний.

Доказательство. Для доказательства теоремы достаточно проверить, что формула есть тавтология логики аргументации тогда и только тогда, когда она принимает значение t при любой оценке переменных в DM4. Если последнее верно, то для каждого $a \in A$ $g(\varphi)(a) = t$, так как $g(\varphi)(a)$ значение формулы φ в решетке DM4, соответствующей множителю $a \in A$. Значит, и $v[\varphi] = \cup\{g(\varphi)(a) : a \in A\} = \cup\{t : a \in A\} = t$. Пусть найдется такая оценка переменных в DM4, что $g(\varphi) \neq t$. Тогда берем одноэлементное множество $A = \{a\}$, в нем $v[\varphi] = g(\varphi)(a) = g(\varphi) \neq t$. Значит, φ не является тавтологией логики аргументации.

К сожалению, эта красивая теорема не имеет большого значения, так как при переводе на язык g^+ и g^- получаем условия $g^+(\sim \varphi) = A \backslash g^+(\varphi)$ и $g^-(\sim \varphi) = A \backslash g^-(\varphi)$, смысл которых выглядит неестественным.

Можно рассмотреть импликацию $\supset$, удовлетворяющую условиям

$$g^+(\Phi_1 \supset \Phi_2) = g^-(\Phi_1) \cup g^+(\Phi_2) \text{ и } g^-(\Phi_1 \supset \Phi_2) = \\ = g^+(\Phi_1) \cap g^-(\Phi_2).$$

Лемма 2. Импликация $\supset$ в DM4 имеет истинностную таблицу:

$\supset$	t	$\top$	$\perp$	f
t	t	$\top$	$\perp$	f
$\top$	t	$\top$	t	$\top$
$\perp$	t	t	$\perp$	$\perp$
f	t	t	t	t

Доказательство. Легко видеть, что $x \supset y$ эквивалентно формуле $\neg x \vee y$, что позволяет сразу вычислить ее истинностную таблицу.

Замечание. Вопрос о тавтологиях для логики аргументации (в языке $\vee$, $\wedge$, $\supset$, $\neg$) тривиален, поскольку все связки сохраняют значение $\top$ и сохраняют значение $\perp$. Пары аргументно-эквивалентных формул в расширенном $\supset$ языке могут быть получены с помощью теоремы 1, так как $x \supset y$ эквивалентно формуле $\neg x \vee y$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Настоящая работа является попыткой автора переосмыслить оригинальный подход В. К. Финна [1] к логике аргументации. Проф. Jon Michael Dunn в обзорном докладе на конференции "Trends in Logic III· in memoriam A. Mostowski, H. Rasiowa and