26. Korolkiewicz M. Many sorted quotient algebra // J. of Formalized Mathematics.— 1994.— № 6.— http://mizar.org./JFM/Vol6/msualg_4.html

27. Madras B. Products of many sorted algebras // J. of Formalised Mathematics.— 1994.— № 6.— http://mizar.org./JFM/Vol6/pralg_2.html

28. Astesiano E., Cerioli M. Free objects and equational deduction for partial conditional specifications // Theoretical Computer Science.— 1995.— Vol 152, N 1, 11.— P. 91–138.

29. Артамонов В. А., Салий В. Н., Скорняков Л. А., Шеврин Л. Н., Шульгейфер Е. Г. Общая алгебра, Т. 2.— М.: Наука, 1991.— 480 с.

30. Mostowski A. On a generalization of quantifiers // Fundamenta mathematicae.— 1957.— Vol. 44.— P. 12–36.

31. Скворцов Д. П. О некоторых способах построения логических языков с кванторами по кортежам // Семиотика и информатика.— 1983.— Вып. 20.— С. 102–126.

32. Keisler H. J. Probability quantifiers // Model-Theoretic Logics / Ed. J. Barwise, S. Feferman.— N. Y.: Springer-Verlag, 1985.

УДК 004.81:510.64

Д. В. Виноградов

Об одной модели вероятностных алгоритмов*

Вероятностные алгоритмы описаны как цепи Маркова на топологических моделях λ-исчисления. Особое внимание будет уделено графиковой модели, которая имеет непосредственную связь с классическим определением рекурсивно-перечислимого множества натуральных чисел, ее топологическая структура наиболее проста. Предложенный подход позволяет использовать аппарат цепей Маркова, теории восстановления и теории потенциала для изучения различных свойств вероятностных алгоритмов.

ВВЕДЕНИЕ

Хотя алгоритмы были известны еще в античные времена (вспомним алгоритм Евклида нахождения наибольшего общего делителя), строгое определение алгоритма сформировалось в начале 30-х гг. XX в. сразу в нескольких различных, но, как оказалось впоследствии, эквивалентных формах. В Европе основными стилями формализации были системы рекурсивных уравнений Эрбрана и К. Геделя, машины А. Тьюринга и нормальные алгорифмы А. А. Маркова; а в Америке — комбинаторная логика М. Шейнфинкеля и Х. Карри, ее вариант без констант — λ-исчисление А. Черча, С. К. Клини и Россера и машины Э. Поста (см. книгу Катленда [1]). Впоследствии, наиболее широкое распространение получил формализм (детерминированных) машин Тьюринга (ДМТ) и некоторые их модификации, наиболее пригодные к исследованию вопросов вычислительной сложности алгоритмических проблем. В конце 60-х гг. сформировалось понятие недетерминированной машины Тьюринга (НМТ), легкой модификацией которой явилось первое строгое определение вероятностного алгоритма. Вероятностная машина Тьюринга (ВМТ) тоже может иметь несколько инструкций, применимых в текущей конфигурации. Какую инструкцию применять — это будет определяться случайным выбором одной из применимых с учетом весов, приписанных соответствующим инструкциям. Этот подход оказался плодотворным для исследования сложностных характеристик вероятностных алгоритмов (см. книгу Ахо, Хопкрофта и Ульмана [2]). Однако он оставляет за бортом обширную математическую технику, развитую в теории случайных процессов. Очевидно, что конфигурации вероятностного алгоритма являются состояниями цепи Маркова при условии, что мы полагаем каждый переход вероятностного алгоритма выполняющимся за один такт времени. Можно надеяться, что удастся применить технику теории потенциала, теории восстановления и цепей Маркова к изучению свойств вероятностных алгоритмов.

Так как одним из краеугольных камней теории потенциала является понятие полунепрерывности (а, значит, и топологии [3]), то естественно обратиться к моделям алгоритмов, в которых имеются естественные топологии. Такими моделями являются разработанные Д. Скоттом [4] и др. топологические модели λ-исчисления. Наиболее простой является графиковая модель, предложенная в 1972 г. Плоткиным [5] и исследованная Д. Скоттом в статьях 1975–76 гг. [6, 7]. Она имеет еще то преимущество, что легко устанавливаются связи с понятием рекурсивной перечислимости, так как ее носителем являются подмножества натуральных чисел.

Настоящая статья организована следующим образом. В первом параграфе мы представим необходимое описание графиковой модели для λ-исчисления. Второй параграф посвящен основным понятиям теории цепей Маркова. Для лучшего понимания материала этого параграфа полезно знакомство с основами теории вероятностей в объеме книги Невё [8]. В третьем параграфе мы введем

* Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 97-06-80191).

основные понятия теории потенциала. Четвертый параграф посвящен некоторым результатам о измеримости и полярных множествах в графиковой модели.

Настоящая работа является первой из серии статей. Она содержит в основном стандартный материал о моделях λ-исчисления, цепей Маркова и теории потенциала. В последующей статье мы представим приложения нового подхода к описанию вероятностных алгоритмов, в частности, для моделей правдоподобных рассуждений, основанных на вероятностном нахождении сходств объектов из обучающей выборки.

1. ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ λ-ИСЧИСЛЕНИЯ

Черч задумывал λ-исчисление как часть общей системы функций, которая должна стать основанием математики. Это исчисление было введено в начале 1930-х гг. как исчисление определимых функций. Исходная система Черча оказалась противоречивой (парадокс Клини и Россера). Впоследствии Черчу и Россеру удалось выделить из нее непротиворечивую теорию [9]. Эту систему мы и будем обсуждать. При этом подходе функции мыслятся как правила перехода от аргумента к значению, задаваемые некоторыми определениями. Можно представлять себе такие определения как программы для вычислительных машин, которые могут применяться к таким же программам. В этом случае нам приходится иметь дело с бестиповой алгебраической системой, где элемент может рассматриваться и как функция, и как аргумент. В частности, функция может применяться к самой себе. Для обычного понятия функции, вводимому через график (т. е. множество упорядоченных пар, состоящих из аргумента и значения), это невозможно (из-за аксиомы фундированности теории множеств ZF).

Исходной операцией λ-исчисления является операция аппликации (применения функции к аргументу). Поэтому моделями λ-исчисления будут аппликативные алгебры — множества с бинарной операцией$\cdot$, где $(fa) = (f \cdot a) = \cdot(f, a)$ обозначает результат применения функции f к аргументу a. (Внешние скобки мы обычно будем опускать).

Шейнфинкель заметил, что не обязательно вводить функции более чем одной переменной. Действительно, для функции, скажем двух переменных, $f(x, y)$ мы можем рассмотреть g_x с соотношением $g_x(y) = f(x, y)$, а затем h с соотношением $h(x) = g_x$. Отсюда $(hx)y = f(x, y)$. Поэтому в удобной записи $hx_1 \ldots x_n = (\ldots(hx_1)\ldots x_n)$ (группировка влево) приведенный выше пример принимает вид $hxy = f(x, y)$.

Но не в каждой аппликативной алгебре свободные переменные могут быть вынесены наружу из любой суперпозиции алгебраических термов. Мы хотели бы, чтобы правила вычисления функций были замкнуты относительно композиции. Аппликативная алгебра $\mathbf{A}$ называется комбинаторной алгеброй, если для всякого алгебраического терма T со свободными переменными $x_1, \ldots, x_n$ найдется такой элемент $f \in \mathbf{A}$, что для любых элементов $a_1, \ldots, a_n \in \mathbf{A} fa_1 \ldots a_n = T[x_1/a_1, \ldots, x_n/a_n]$.

Следующее утверждение (см. [10, 5.1.15]) показывает, что комбинаторные алгебры имеют непривычную структуру:

Предложение 1.1. Нетривиальные комбинаторные алгебры

(i) некоммутативны,

(ii) неассоциативны,

(iii) неконечны,

(iv) нерекурсивны.

Формула $\exists f \forall x_1 \ldots \forall x_n [fx_1 \ldots x_n = T]$, выражающая комбинаторную полноту, может быть превращена в универсальную формулу введением сколемовской функции $f = \lambda x_1 \ldots x_n.T$ (абстракция). Однако, следуя идее Шейнфинкеля, можно одновременную абстракцию заменить многократной: $\lambda x_1 \ldots x_n.T = (\lambda x_1 \ldots (\lambda x_n.T) \ldots)$. Тогда комбинаторная полнота следует из правила β-конверсии: $\lambda x.M)N = M[x/N]$.

Выше мы использовали обозначение $M[x/N]$ для результата подстановки выражения N вместо каждого свободного вхождения переменной x в выражение M. Вхождение x в M называется связанным, если оно содержится в области действия оператора λx, в противном случае оно называется свободным. (Оператор абстракции λ имеет те же связывающие свойства, что и кванторы в логике предикатов). При подстановке терма N вместо переменной x в терм M некоторая переменная y, содержащаяся в N, может стать связанной в $M[x/N]$ — произойдет коллизия переменной y. Для избежания этого нужно переименовывать некоторые связанные переменные в M (применять правило α-конверсии).

Чистое λ-исчисление содержит только переменные, бинарный символ аппликации и символ абстракции λ. Аксиомами λ-исчисления являются правило β-конверсии, рефлексивность, симметричность и транзитивность равенства термов и правила замены равных внутри аппликации и абстракции. Д. Скотт [7] расширил λ-исчисление до языка LAMBDA, замкнутые термы которого соответствуют рекурсивно-перечислимым множествам в графиковой модели $\mathcal{P}\omega$.

Терм, который не содержит подтерма вида $(\lambda x.M)N$ (β-редекса), находится в нормальной форме (н.ф.). Если отождествить применение правила β-редукции к $(\lambda x.M)N$ с вычислением значения $M[x/N]$ функции M на аргументе N, то терм в н.ф. не допускает дальнейшего вычисления. Черч использовал λ-терм в н.ф. $\mathbf{n} = \lambda fx.f^n x$($f^0 x = x$ и $f^{n+1} x = f(f^n x)$) для представления натурального числа n. Тогда λ-терм, применение которого к каждому натуральному числу или не имеет нормальной формы (не может последовательностью β-редукций приведен к терму в н.ф.), или имеет нормальной формой некоторое натуральное число, задает λ-определимую числовую функцию. Класс (частичных) λ-определимых числовых функций совпадает с классом частично рекурсивных функций [11, § 2]. Аналогично, функции, вычислимые на машинах Тьюринга, — это в точности λ-определимые функции. Таким образом, λ-исчисление можно рассматривать как один из подходов к описанию понятия алгоритма, причем это отождествление сохраняет процесс вычисления (тезис Черча).

λ-исчисление играло центральную роль в первых исследованиях по теории рекурсивных функций. Первой (найденной Черчем) алгоритмически неразрешимой проблемой было: определить имеет ли терм λ-исчисления нормальную форму? В первом определении рекурсивных ординалов, предложенным Черчем и Клини, тоже использовалось λ-исчисление. Реализация идеи Шейнфинкеля в теории рекурсии привела к s-m-n-теореме. Теорема о неподвижной точке для λ-исчисления вдохновила Клини на теорему рекурсии. Однако, в дальнейшем, другие стили формализации (машины Тьюринга, равнодоступная адресная машина [12]) оказались более подходящими для исследования вопросов вычислительной сложности алгоритмов.

Из-за парадокса самоприменимости подхода было неясно, как строить модели λ-исчисления. Нам хотелось бы иметь множество X, в которое можно вложить его пространство функций $X \to X$, но это противоречит теореме Кантора. Эту трудность преодолел Скотт в 1969 г. с помощью построения модели D_∞ путем ограничения множества $X \to X$ непрерывными функциями на X (вместе с надлежащей топологией). Непрерывность играет существенную роль также и в графиковой модели $\mathcal{P}\omega$.

Область $\mathcal{P}\omega = \{x | x \subseteq \omega\}$ всех подмножеств множества ω натуральных чисел — полная Булева алгебра относительно обычных операций $\cup$, $\cap$ и $\sim$ объединения, пересечения и дополнения подмножеств ($\sim x = \{n | n \notin x\}$). Мы будем использовать соглашение, что такие переменные как i, j, k, l, m, n интерпретируются как числа из ω, а u, v, w, x, y, z — как подмножества ω.

Область $\mathcal{P}\omega$ может быть превращена в топологическое пространство многими способами. Обычный подход — отождествить каждое $x \subseteq \omega$ с соответствующей характеристической функцией в $\{0,\ 1\}^\omega$ и взять индуцированную топологию произведения. Таким способом $\mathcal{P}\omega$ превращается в тотально несвязное компактное Хаусдорфово пространство, гомеоморфное множеству Кантора "выкинутая треть". Однако эта (тонкая) топология делает функцию $\sim x$ непрерывной. Нам нужна более слабая топология: топология позитивной "информации", имеющая то преимущество, что все непрерывные функции обладают неподвижными точками. (Равенство $x = \sim x$ невозможно.)

Введем стандартный пересчет $\{e_n | n \in \omega\}$ всех конечных подмножеств ω. Для этого положим $e_n = \{k_0,\ k_1,\ \ldots,\ k_{m-1}\}$, предполагая, что $k_0 < k_1 < \ldots < k_{m-1}$ и $n = \Sigma_{i<m} 2^{k_i}$. Поэтому n — кодовый номер для e_n, и элементы e_n — номера ненулевых разрядов в двоичном разложении числа n. Это — взаимно-однозначный пересчет конечных подмножеств, где $k \in e_n$ всегда влечет $k < n$, функция $\max(e_n)$ (примитивно) рекурсивна в n, и отношения $k \in e_n$, $e_m \subseteq e_n$, $e_n = e_m \cup e_k$ — (примитивно) рекурсивны в k, m, n.

Конечные множества e_n плотны в пространстве $\mathcal{P}\omega$, т. е. каждое $x \in \mathcal{P}\omega$ есть "предел" своих конечных подмножеств в том смысле, что $x = \cup\{e_n | e_n \subseteq x\}$.

Определение. Базис окрестностей в $\mathcal{P}\omega$ состоит из множеств вида $\{x \in \mathcal{P}\omega | e_n \subseteq x\}$ для всех конечных e_n. Произвольное открытое множество есть тогда объединение базисных окрестностей.

Открытое подмножество $U \subseteq \mathcal{P}\omega$ — это в точности множество "конечного характера"; т. е. такое множество, что для всех $x \in \mathcal{P}\omega$ мы имеем $x \in U$, если и только если некоторое конечное подмножество x также принадлежит U.

Лемма 1.2. (монотонность) Для всякого открытого множества U и всех $x, y \in \mathcal{P}\omega$, если $x \in U$ и $x \subseteq y$, то $y \in U$.

Определение. Функция $f : \mathcal{P}\omega \to \mathcal{P}\omega$ называется непрерывной, если и только если для всех $x \in \mathcal{P}\omega$ мы имеем: $f(x) = \cup\{f(e_n) \mid e_n \subseteq x\}$.

Функция непрерывна в смысле предыдущего определения, если и только если она непрерывна в обычном топологическом смысле (именно: прообразы открытых множеств открыты).

Следующая теорема дает ε-δ формулировку непрерывности.

Теорема 1.3. (теорема характеризации) Функция $f : \mathcal{P}\omega \to \mathcal{P}\omega$ непрерывна, если и только если для всех $x \in \mathcal{P}\omega$ и всех e_m мы имеем: $e_m \subseteq f(x)$ тогда и только тогда, когда $\exists e_n \subseteq x.\ e_m \subseteq f(e_n)$.

Лемма 1.4. (монотонность) Если функция $f : \mathcal{P}\omega \to \mathcal{P}\omega$ непрерывна, то для всех $x \in \mathcal{P}\omega$ и $y \in \mathcal{P}\omega$ из $x \subseteq y$ следует, что $f(x) \subseteq f(y)$.

Это свойство и есть точное выражение позитивного характера нашей топологии. Отметим, однако, что открытость и непрерывность означают нечто большее, чем просто монотонность. В частности, непрерывная функция полностью определяется парами чисел, такими, что $m \in f(e_n)$, как можно увидеть из определения. (Следовательно, существует только континуум непрерывных функций, но более континуума монотонных). Это приводит нас к определению графика непрерывной функции.

Для этого введем стандартный пересчет $(n,\ m)$ всех пар натуральных чисел. Положим $(n,\ m) = 1/2\,(m+n)(m+n+1)+m$. Это — пересчет вдоль малой диагонали слева направо, т. е. (0,0), (1,0), (0,1), (2,0), (1,1), (0,2), (3,0), (2,1), ... Отметим, что $n \le (n,\ m)$ и $m \le (n,\ m)$ с равенством только в случаях (0,0) и (0,1). Это — взаимно-однозначное соответствие, и обратные функции — примитивно-рекурсивные.

Определение. График непрерывной функции $f : \mathcal{P}\omega \to \mathcal{P}\omega$ определяется следующим равенством: $\mathbf{graph}\ (f) = \{(n,\ m) \mid m \in f(e_n)\}$ — тогда как функция, задаваемая любым подмножеством $v \subseteq \omega$, определяется равенством: $\mathbf{fun}\ (v)(x) = \{m \mid \exists e_n \subseteq x.\ (n,\ m) \in v\}$.

Теорема 1.5. (теорема о графике) Каждая непрерывная функция однозначно определяется своим графиком, в том смысле, что $\mathbf{fun}\ (\mathbf{graph}\ (f)) = f$. Наоборот, каждое множество натуральных чисел определяет непрерывную функцию, и мы имеем: $v \subseteq \mathbf{graph}\ (\mathbf{fun}\ (v))$, где равенство выполнено в точности в том случае, когда v удовлетворяет: если $(k,\ m) \in v$ и $e_k \subseteq e_n$, то $(n,\ m) \in v$.

Функция нескольких переменных $f(x,\ y, \ldots)$ непрерывна, если и только если она непрерывна по каждой переменной x, y, ... в отдельности. Для нашей специальной позитивной топологии на $\mathcal{P}\omega$ последнее эквивалентно непрерывности на произведении (непрерывности по нескольким переменным совместно). В качестве следствия получаем.

Теорема 1.6. (теорема о подстановках) Непрерывные функции нескольких переменных на $\mathcal{P}\omega$ замкнуты относительно подстановок.

Другое полезное свойство непрерывных функций:

Теорема 1.7. (теорема о неподвижной точке) Каждая непрерывная функция $f : \mathcal{P}\omega \to \mathcal{P}\omega$ имеет наименьшую неподвижную точку, заданную формулой $\underline{\mathbf{fix}}\,(f) = \cup\{f^n(\varnothing) \mid n \in \omega\}$, где $\varnothing$ — пустое множество, и f^n – n-кратная композиция f самой с собой.

Фактически $\underline{\mathbf{fix}}$ — функционал, сам обладающий свойством непрерывности.

Приведем еще два общих утверждения о непрерывных функциях со значениями в $\mathcal{P}\omega$, которые указывают объем и общность нашего метода.

Теорема 1.8. (теорема о расширении) Пусть X и Y — абстрактные топологические пространства, где $X \subseteq Y$ как подпространство. Тогда каждая непрерывная функция $f : X \to \mathcal{P}\omega$ может быть расширена до непрерывной функции $\bar{f} : Y \to \mathcal{P}\omega$ по правилу:

$$\bar{f}(y) = \cup\{\cap\{f(x) | x \in X \cap U\} \mid y \in U\},$$

где $y \in Y$, и U пробегает все открытые подмножества Y.

Теорема 1.9. (теорема о вложении) Каждое $\mathbf{T_0}$-пространство X со счетной базой $\{U_n \mid n \in \omega\}$ для топологии может быть вложено в $\mathcal{P}\omega$ с помощью непрерывной функции $\varepsilon : X \to \mathcal{P}\omega$, определяемой равенством: $\varepsilon(x) = \{n \mid x \in U_n\}$.

Технически $\mathbf{T_0}$-гипотеза необходима лишь, чтобы показать, что отображение ε взаимно однозначно. Результат этих двух теорем — тот, что при поиске (осмысленных) топологических структур мы можем сосредоточить свое внимание на подпространствах $\mathcal{P}\omega$ и непрерывных функциях, определенных на <u>всем</u> $\mathcal{P}\omega$.

Для дальнейшего изучения моделей λ-исчисления можно рекомендовать книгу Барендрегта [10].

2. ЦЕПИ МАРКОВА И МОМЕНТЫ ОСТАНОВКИ

В настоящем параграфе мы приведем основные определения и факты о цепях Маркова, следуя изложению [13–15].

Пара $(E, \mathcal{E})$, где E — некоторое множество, а $\mathcal{E}$ является σ-алгеброй подмножеств E, называется <u>измеримым пространством</u>. Измеримое пространство $(E, \mathcal{E})$ называется <u>фазовым пространством</u>, если все одноточечные множества $\{x\} \in \mathcal{E}$. Точки множества E называются <u>состояниями</u>. Символ $\mathcal{E}$ будет также использоваться для обозначения класса всех <u>измеримых функций</u> (прообраз любого Борелевского множества принадлежит $\mathcal{E}$) на $(E, \mathcal{E})$ со значениями в расширенном множестве вещественных чисел. Символы $x, y, \ldots$ обозначают состояния, $A, B, \ldots$ — элементы σ-алгебры $\mathcal{E}$, а f, g — измеримые функции на $(E, \mathcal{E})$ со значениями на расширенной числовой прямой.

Обозначим через $\mathcal{M}$ класс всех знакопеременных мер на $(E, \mathcal{E})$. Символы $\mu, \nu, \ldots$ обозначают элементы множества $\mathcal{M}$. Для произвольного класса $\mathcal{A}$ функций или знакопеременных мер будем писать $\mathcal{A}_+$ (соответственно $b\mathcal{A}$) для обозначения неотрицательных (соответственно ограниченных) элементов $\mathcal{A}$. Везде далее мы будем называть элементы $\mathcal{M}$ просто мерами. Символом $\mathcal{M}^+$ обозначим класс положительных мер, т. е. $\mathcal{M}^+ = \{\mu \in \mathcal{M}_+ \mid \mu(E) > 0\}$. Элементы $b\mathcal{M}$ будут также называться конечными знакопеременными мерами.

Определение. <u>Переходной вероятностью</u> (<u>П.В.</u>) на пространстве $(E, \mathcal{E})$ называется отображение $P : E \times \mathcal{E} \to \mathbf{R}_+$, удовлетворяющее следующим условиям:

(i) для каждого фиксированного множества $A \in \mathcal{E}$ функция $P(\cdot, A)$ измерима;

(ii) для каждого фиксированного состояния $x \in E$ функция множеств $P(x, \cdot)$ является мерой на $(E, \mathcal{E})$;

(iii) $P(x, E) < 1$ для всех $x \in E$.

П.В. назовем <u>стохастической</u>, если $P(x, E) = 1$ для всех $x \in E$. <u>Ядром</u> на пространстве $(E, \mathcal{E})$ называется отображение $K : E \times \mathcal{E} \to \mathbf{R}_+$, удовлетворяющее условиям (i) и (ii).

Любое ядро K можно интерпретировать как неотрицательный оператор на конусе $\mathcal{E}_+$, положив $Kf(x) = \displaystyle\int K(x, dy)f(y)$, $f \in \mathcal{E}_+$ (интегрирование производится по всему пространству E). Аналогично, K действует как оператор на $\mathcal{M}_+$: $\mu K(A) = \displaystyle\int \mu(dx)K(x, A)$, $\mu \in \mathcal{M}_+$.

Если K_1 и K_2 — два ядра, то их композиция $K_1\ K_2$ определяется соотношением $K_1K_2(x, A) = \displaystyle\int K_1(x, dy)K_2(y, A)$. <u>Итерации</u> K^n, $n \geq 0$, ядра K определяются рекуррентно соотношением $K^n = KK^{n-1}$ для $n \geq 1$, где $K^0 = I$. Через I обозначено единичное ядро $I(x, A) = 1_A(x)$, $x \in E$, $A \in \mathcal{E}$.

Пусть $(\Omega, \mathcal{F})$ — измеримое пространство, которое будем называть <u>основным пространством</u>, а $\mathbf{P}$ — вероятностная мера на $(\Omega, \mathcal{F})$. Измеримое отображение ξ, определенное на $(\Omega, \mathcal{F})$ и принимающее значения в произвольном измеримом пространстве $(E, \mathcal{E})$, называется <u>случайным элементом</u> со значениями в E. Случайный элемент со значениями в $\mathbf{R}$ называется <u>случайной величиной</u>. Последовательность $(\xi_n;\ n \geq 0)$ случайных элементов со значениями в E называется <u>случайным процессом</u> со значениями в E.

Если ξ — случайный элемент со значениями в E, то $\mathfrak{L}(\xi)$ будет обозначать распределение ξ, т. е. $\mathfrak{L}(\xi)(A) = \mathbf{P}(\xi \in A)$, $A \in \mathcal{E}$. Аналогичное обозначение будет использоваться для условных распределений.

Пусть $\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}_1 \subseteq \ldots \subseteq \mathcal{F}_n \subseteq \ldots$ — неубывающая последовательность под-σ-алгебр $\mathcal{F}$, называемая <u>потоком</u>. Говорят, что случайный процесс (ξ_n) <u>согласован с потоком</u> $(\mathcal{F}_n)$, если ξ_n является $\mathcal{F}_n$-измеримым для каждого $n \geq 0$. Отметим, что случайный процесс (ξ_n) всегда согласован с потоком $\mathcal{F}_n^\xi = \sigma(\xi_0, \ldots, \xi_n)^*$, $n \geq 0$, который называют <u>ассоциированным с</u> (ξ_n).

Определение. Случайный процесс $(X_n;\ n \geq 0)$ со значениями в E называется <u>цепью Маркова с переходной вероятностью</u> P, если

$$\mathfrak{L}(X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n^X) = \mathfrak{L}(X_{n+1} \mid X_n) = P(X_n, \cdot)$$

* Здесь $\sigma(\xi_0, \ldots, \xi_n)$ обозначает σ-алгебру, порожденную случайными элементами $\xi_0, \ldots, \xi_n$, т. е. минимальную σ-алгебру, содержащую все события вида $\{\xi_k \in A'\}$, $A' \in \mathcal{F}'$, $k = 0, \ldots, n$.

$$\text{для всех } n \geq 0. \tag{2.1}$$

(Мы будем опускать слова почти наверное, когда речь идет о равенствах, содержащих условные распределения).

Говорят, что цепь Маркова (X_n) обладает марковским свойством относительно потока $(\mathcal{F}_n)$, если она согласована с $(\mathcal{F}_n)$ и равенство (2.1) верно при замене $(\mathcal{F}_n^X)$ на $(\mathcal{F}_n)$, т. е.

$$\mathfrak{L}(X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) = \mathfrak{L}(X_{n+1} \mid X_n) = P(X_n, \cdot)$$
$$\text{для всех } n \geq 0. \tag{2.2}$$

Иногда, для того чтобы подчеркнуть, что марковское свойство (X_n) имеет место относительно общего потока $(\mathcal{F}_n)$, мы будем говорить о цепи Маркова $(X_n, \mathcal{F}_n)$.

Распределение $\mathfrak{L}(X_0)$ для X_0 называют начальным распределением цепи Маркова (X_n). Если $\mathfrak{L}(X_0) = \xi_x$, т. е. $P\{X_0 = x\} = 1$ для некоторого состояния x, то x называют начальным состоянием цепи.

Если (X_n) — цепь Маркова с начальным распределением $\mathfrak{L}(X_0)=\mu$ и переходной вероятностью P, то

$$\mathbf{P}\{X_0 \in A_0, ..., X_n \in A_n\} = \int_{A_0} \mu(dx_0)$$
$$\int_{A_1} P(x_0, dx_1) \ldots \int_{A_n} P(x, dx_n) \tag{2.3}$$

для всех $n \geq 0$, $A_0 \in \mathcal{E}, ..., A_n \in \mathcal{E}$. В частности, $\mathfrak{L}(X_n) = \mu P^n$. Обратно, если случайный процесс (X_n) со значениями в E удовлетворяет равенству (2.3) для всех $n \geq 0$, $A_0 \in \mathcal{E}, ..., A_n \in \mathcal{E}$, то это цепь Маркова с начальным распределением μ и П. В. P.

Задавшись вероятностной мерой μ и стохастической переходной вероятностью P на $(E, \mathcal{E})$ всегда можно построить цепь Маркова с начальным распределением μ и переходной вероятностью P. Положим $\Omega = E^{\times\infty}$, $\mathcal{F} = \mathcal{E}^{\otimes\infty}$ и определим $X_n(\omega) = \omega_n$, как $(n+1)$-ю координату $\omega = (\omega_0, \omega_1, ...) \in \Omega$. На цилиндрических множествах вида $A_0 \times ... \times A_n \times E \times ... \in \mathcal{F}$ зададим вероятностную меру $\mathbf{P}$ посредством (2.3) и продолжим ее на $\mathcal{F}$, чтобы получить искомую цепь Маркова. Построенную таким образом цепь Маркова назовем канонической цепью Маркова, отвечающей начальному распределению μ и стохастической переходной вероятности P. Детали этой конструкции могут быть найдены в [8] и [13].

Если переходная вероятность P не является стохастической, поступим следующим образом. Выберем некоторую точку Δ, не входящую во множество E, и присоединим ее к E, получая расширенное фазовое пространство $(E_\Delta, \mathcal{E}_\Delta) = (E \cup \{\Delta\}, \sigma(\mathcal{E}, \{\Delta\}))$. Продолжим меру μ на $(E_\Delta, \mathcal{E}_\Delta)$, полагая $\mu(\{\Delta\})=0$. Переходную вероятность P продолжим на $(E_\Delta, \mathcal{E}_\Delta)$, полагая $P(x, \{\Delta\}) = 1 - P(x, E)$, $x \in E$, $P(\Delta, \{\Delta\}) = 1$.

Ясно, что продолженная таким способом П. В. P является стохастической на $(E_\Delta, \mathcal{E}_\Delta)$. Точку Δ назовем обрывом цепи Маркова (X_n).

В дальнейшем мы будем использовать обозначение $\mathbf{P}_\mu$ (соответственно $\mathbf{P}_x$) вместо $\mathbf{P}$, чтобы указать конкретное начальное распределение μ (соответственно начальное состояние x) цепи. Более общим образом, если $\nu \in \mathcal{M}_+$ — произвольная мера на $(E, \mathcal{E})$, запись $\mathbf{P}_\nu$ будет означать меру $\int \nu(dx)\mathbf{P}_x(\cdot)$ на $(\Omega, \mathcal{F})$. Символ $\mathbf{E}_\nu$ обозначает оператор математического ожидания, отвечающий вероятностной мере $\mathbf{P}_\nu$.

Измеримое отображение θ основного пространства $(\Omega, \mathcal{F})$ в себя называется оператором сдвига (для цепи Маркова (X_n)), если $X_n(\theta\,\omega) = X_{n+1}(\omega)$ для всех $\omega \in \Omega$, $n \geq 0$. Итерации θ_m, $m \geq 0$, оператора θ определим рекуррентно соотношением $\theta_m = \theta \circ \theta_{m-1}$ для $m \geq 1$, полагая $\theta_0 = I_\Omega$ — тождественный оператор на Ω.

Случайную величину ζ, измеримую относительно σ-алгебры $\mathcal{F}^X = \sigma(X_n;\ n \geq 0)$, т. е. имеющую вид $\zeta = \eta(X_0, X_1, ...)$, где η — некоторая $\mathcal{E}^{\otimes\infty}$-измеримая функция, назовем функционалом от цепи Маркова (X_n). Отметим, что для любого $n \geq 0$, если ζ есть функционал от цепи Маркова, то функционал $\zeta \circ \theta_n$ измерим относительно σ-алгебры $\sigma(X_n, X_{n+1}, ...)$, и обратно, если функционал ζ' измерим относительно $\sigma(X_n, X_{n+1}, ...)$, то $\zeta' = \zeta \circ \theta_n$ для некоторого функционала ζ.

Теорема 2.1. (Марковское свойство) Пусть $(X_n, \mathcal{F}_n)$ — цепь Маркова. Тогда для произвольного неотрицательного функционала ζ от цепи, любой меры $\nu \in \mathcal{M}_+$ и любого $n \geq 0$ равенство $\mathbf{E}_\nu[\zeta \circ \theta_n \mid \mathcal{F}_n] = \mathbf{E}_{X_n}[\zeta]$ верно $\mathbf{P}_\nu$—п. н. на множестве $\{X_n \neq \Delta\}$.

Отметим, что из теоремы 2.1 следует наличие регулярного варианта условного распределения $\mathfrak{L}(X_n, X_{n+1}, \ldots \mid \mathcal{F}_n)$, поскольку $\mathfrak{L}(X_n, X_{n+1}, \ldots \mid \mathcal{F}_n;\ X_n = x) = \mathfrak{L}(X_0, X_1, \ldots \mid X_0 = x)$=сужение $\mathbf{P}_x$ на $\mathcal{F}^X$.

Определение. Моментом остановки канонической цепи Маркова X называется случайная величина T, определенная на $(\Omega, \mathcal{F})$, принимающая значения из $\mathbf{N} \cup \{\infty\}$ и такая, что для любого целого n событие $\{T=n\}$ содержится в $\mathcal{F}_n$. Семейство $\mathcal{F}_T$ событий $A \in \mathcal{F}$, таких, что $\{T = n\} \cap A \in \mathcal{F}_n$ для любого n, называется σ-алгеброй, ассоциированной с T.

Легко проверить, что $\mathcal{F}_T$ в самом деле является под-σ-алгеброй σ-алгебры $\mathcal{F}$. Постоянные случайные величины являются моментами остановки, и если $T(\omega) = n$ для любого $\omega \in \Omega$, то $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}_n$. Таким образом, моменты остановки — это обобщения обыкновенных моментов времени.

Для $A \in \mathcal{E}$ будем называть первым моментом попадания во множество A случайную величину $T_A(\omega) = \inf\{n \geq 0 | X_n(\omega) \in A\}$, а первым моментом возвращения во множество A — случайную величину $S_A(\omega) = \inf\{n > 0 | X_n(\omega) \in A\}$, причем в обоих случаях под инфимумом пустого множества понимается $+\infty$. Легко проверить, что обе эти величины являются моментами остановки. Например, $\{T_A = n\} = \cap 0^{n-1}\{X_m \notin A\} \cap \{X_n \in A\}$. Аналогично, случайная величина $\zeta(\omega) = \inf\{n \geq 0 \mid X_n(\omega) = \Delta\}$ является моментом остановки, называемым моментом обрыва цепи X. Если П. В. P является стохастической, то ζ почти всюду равна $+\infty$.

Для каждого момента остановки T случайная величина X_T определяется соотношениями: $X_T(\omega) = X_n(\omega)$, если $T(\omega) = n$; $X_T(\omega) = \Delta$, если

$T(\omega) = +\infty$. Она определяет положение цепи в момент T, и читатель легко проверит, что $X_T(\omega) \in \mathcal{F}_T/\mathcal{E}_\Delta$. Для каждого момента остановки T точечное преобразование θ_T на Ω определяется соотношениями: $\theta_T(\omega) = \theta_n(\omega)$, если $T(\omega) = n$; $\theta_T(\omega) = \omega_\Delta$, если $T(\omega) = +\infty$, где ω_Δ — траектория вида $\{\Delta, \Delta, ..., \Delta, ...\}$ в Ω. Легко заметить, что $\theta_T \in \mathcal{F}/\mathcal{F}$ и что $X_n(\theta_T(\omega)) = X_{n+T}(\omega)$ на $\{T = m\}$; $X_n(\theta_T(\omega)) = \Delta$ на $\{T = \infty\}$.

Предложение 2.2. Пусть S и T — два момента остановки. Тогда отображение $S + T \circ \theta_S$: $\omega \to S(\omega) + T(\theta_S(\omega))$ также является моментом остановки.

Момент остановки интуитивно следует представлять себе как первый момент, когда произошло некоторое физическое явление, а $\mathcal{F}_T$ — как хранилище информации о цепи до момента T, когда произошло это явление. Момент $S + T \circ \theta_S$ является первым моментом, когда "событие T" происходит после того, как осуществилось "событие S". Например, если $A \in \mathcal{E}$, то $n + T_A \circ \theta_n$, является первым моментом попадания в множество A после момента n; в частности, $S_A = 1 + T_A$. Если $A, B \in \mathcal{E}$, то $T_A + T_B \circ \theta_{T_A}$ является первым моментом времени, когда цепь попадает в B после попадания в A.

Теорема 2.3. (строго марковское свойство) Для любой вещественной положительной случайной величины ξ на $(\Omega, \mathcal{F})$, начальной меры ν и момента остановки T $E_\nu[\xi \circ \theta_T \mid \mathcal{F}_T] = E_{X_T}[\xi]$ P_ν-п. н. По соглашению обе части этого равенства обращаются в нуль на множестве $\{X_T = \Delta\}$.

С каждым моментом остановки T мы свяжем новую переходную вероятность, которую будем обозначать P_T, положив для каждого $B \in \mathcal{E}$ $P_T(x, B) = P_x[X_T \in B]$. Легко проверить, что если $f \in \mathcal{E}_+$, то $P_T f(x) = E_x[f(X_T)]$. Напомним, что по нашему соглашению $f(X_T) = 0$ на $\{X_T = \Delta\}$. Отметим, далее, что если $T = n$ п. н., то $P_T = P_n$. Наконец, если $A \in \mathcal{E}$, мы пользуемся записью P_A вместо P_{T_A}; эта переходная вероятность называется оператором выметания, ассоциированным с A.

Определим I_A для $A \in \mathcal{E}$ как оператор умножения на 1_A, т. е. $I_A f(x) = f(x)$, если $x \in A$, $I_A f(x) = 0$, если $x \notin A$. Тогда имеет место следующее

Предложение 2.3. Для $A \in \mathcal{E}$ $P_A = \Sigma_{n \geq 0}(I_{A^c} P)^n I_A$.

Очевидно, что меры $P_A(x, \cdot)$ вырождаются вне A. Более того, если $x \in A$, то $P_A(x, \cdot) = \varepsilon_x$; в самом деле, если $x \in A$, то отсюда вытекает, что $P_x[X_0 = x] = 1$; следовательно, $T_A = 0$ P_x-п. н., и поэтому $X_{T_A} = x$ P_x-п. н. Аналогично, если $x \notin A$, то $T_A = S_A$ P_x-п. н. и $P_A(x, \cdot) = P_{S_A}(x, \cdot)$.

Если S и T — два момента остановки, то $X_T(\theta_S(\omega)) = X_{S + T \circ \theta_S}(\omega)$.

Предложение 2.4. Пусть S, T — два момента остановки; тогда $P_S P_T = P_{S + T \circ \theta_S}$.

3. ОСНОВЫ ТЕОРИИ ПОТЕНЦИАЛА

Связь между классической теорией потенциала и теорией процессов Маркова была установлена в серии статей Ханта [16].

Конечная функция из $\mathcal{E}$ будет называться гармонической, если $f(x) = Pf(x)$ для всех E. Функция f из $\mathcal{E}_+$ называется супергармонической, если $f \geq Pf$ всюду на E. Положительные гармонические функции являются супергармоническими. Функция 1 всегда супергармоническая; она будет гармонической, если П. В. P является стохастической.

Предложение 3.1. Множество супергармонических функций является левой решеткой и выпуклым конусом. Если $\{f_n\}_{n \geq 0}$ — последовательность супергармонических функций, то $\underline{\lim}_n f_n$ является супергармонической функцией.

Множество гармонических функций — векторное пространство. Множество ограниченных гармонических функций является банаховым подпространством пространства $b\mathcal{E}$.

В частности, если f, g — супергармонические функции и a, b принадлежат $\mathbf{R}_+$, то $af + bg$ и $f \wedge g$ являются супергармоническими.

Определение. Потенциальным ядром переходной вероятности P или цепи X называется ядро $G = \Sigma_0^\infty P_n = I + P + P_2 + ...$

Ядро G удовлетворяет тождеству

$$G = I + PG = I + GP. \tag{3.1}$$

С другой стороны, для $A \in \mathcal{E}$ имеем

$$G(x, A) = E_x[\Sigma_0^\infty 1_{\{X \in A\}}]. \tag{3.2}$$

Пусть f принадлежит $\mathcal{E}$; если функция Gf определена, то она будет называться потенциалом функции f. Если $f = 1_A$, то функция $Gf(x) = G(x, A)$ называется потенциалом множества A и, согласно равенству (3.2), представляется как среднее число попаданий цепи, начинающейся в точке x, во множество A. Легко видеть, что потенциалы положительных функций являются супергармоническими функциями, и мы получаем следующий результат.

Теорема 3.2. (Рисса о разложении) Конечная супергармоническая функция f имеет единственное представление в виде суммы $f = Gg + h$, где Gg — потенциал и h — гармоническая функция.

Следствие 3.3. Супергармоническая функция, доминируемая конечным потенциалом, является потенциалом. Положительная гармоническая функция, доминируемая конечным потенциалом, обращается в нуль тождественно.

Теорема 3.4. Функция f является супергармонической (ограниченной гармонической) тогда и только тогда, когда последовательность $\{f(X_n)\}$ случайных величин является супермартингалом (ограниченным мартингалом) относительно σ-алгебр $\mathcal{F}_n$ для любой вероятностной меры P_ν.

Если $f = Gg$ — конечный потенциал, то супермартингал $\{Gg(X_n)\}$ сходится к нулю почти всюду.

Теорема 3.5. Функция f является супергармонической тогда и только тогда, когда $P_S f \geq P_T f$ для любой пары (S, T) моментов остановки, таких, что $S \leq T$.

В § 2 мы видели, как с цепью X можно связать другую цепь Маркова, в частности, остановив X в момент времени T_A при $A \in \mathcal{E}$. Переходной вероятностью этой новой цепи будет $I_{A^c} P I_{A^c}$. Будем обозначать через G^A ее потенциальное ядро, т. е. $G^A = \Sigma_0^\infty I_{A^c}(P I_{A^c})^n = \Sigma_0^\infty (I_{A^c} P)^n I_{A^c}$. Имеем также $G^A f(x) = E_x[\Sigma_{n < T_A} f(X_n)]$; для функции $f = 1_B$ это выражение есть в точности среднее число попаданий цепи X во множество B до первого ее попадания во множество A.

Следующий результат обобщает формулу (3.1).

Предложение 3.6. Для любого $A \in \mathcal{E} G = G^A + P_A G$.

В частности, если g обращается в нуль на A^c, то $P_A G g = Gg$.

Теорема 3.7. (полный принцип максимума) Пусть функция f такова, что функция Gf корректно определена, функция g принадлежит $\mathcal{E}_+$ и a является такой неотрицательной константой, что $Gf(x) \leq Gg(x) + a$ для всех $x \in \{f > 0\}$. Тогда $Gf(x) \leq Gg(x) + a$ всюду на E.

Следствие 3.8. Ядро G удовлетворяет следующему усиленному принципу максимума: для любого $a \geq 0$ и любой пары (f, g) функций из $\mathcal{E}_+$, таких, что $Gf(x) \leq a + Gg(x) - g(x)$ для всех $x \in \{f > 0\}$, неравенство $Gf \leq a + Gg - g$ выполняется всюду.

Говорят, что ядро G (не обязательно потенциальное ядро цепи Маркова) удовлетворяет полному принципу максимума (усиленному принципу максимума), если оно удовлетворяет условию теоремы 3.7 (следствия 3.8). Если в теореме 3.7 мы заменим $Gg+a$ на Gg (на a), то будем говорить, что G удовлетворяет принципу доминирования (принципу максимума.)

4. МОДЕЛЬ ВЕРОЯТНОСТНЫХ АЛГОРИТМОВ

Для изучения этого параграфа полезно предварительное знакомство с работами [17] и [3].

Решеткой $\mathfrak{C}$ на множестве E называется семейство подмножеств, содержащее пустое множество, и замкнутое относительно конечных пересечений и объединений. Решетка $\mathfrak{C}$ называется компактной, если всякая убывающая последовательность непустых элементов решетки $\mathfrak{C}$ имеет непустое пересечение. Семейство компактных подмножеств отделимого топологического пространства является компактной решеткой. Мы будем использовать компактную решетку $\mathfrak{A}$ на $\mathcal{P}\omega$, состоящую из конечных объединений базисных открытых множеств.

Лемма 4.1. Семейство $\mathfrak{A}$ конечных объединений базисных открытых подмножеств и семейство $\mathfrak{O}$ открытых подмножеств $\mathcal{P}\omega$ образуют компактные решетки.

Не нужно путать компактность решетки (семейства подмножеств) и компактность подмножеств его образующих. Подмножество K топологического пространства $(E, \mathfrak{O})$ назовем компактным, если из любого покрытия $\cup_j U_j \supseteq K$ открытыми множествами $U_j \in \mathfrak{O}$ можно выделить конечное подпокрытие.

Лемма 4.2. Любое базисное открытое подмножество пространства $\mathcal{P}\omega$ компактно. Следовательно, любой элемент $\mathfrak{A}$ — компактное подмножество.

Лемма 4.3. Подмножество $\mathcal{P}\omega \setminus \{\varnothing\}$ пространства $\mathcal{P}\omega$ не компактно.

Лемма 4.4. Любое конечное подмножество пространства $\mathcal{P}\omega$ компактно.

Из леммы 4.4 следует, что не всякое компактное подмножество $\mathcal{P}\omega$ принадлежит нашим решеткам, а лемма 4.2 влечет, что все элементы решетки $\mathfrak{A}$ — компактные подмножества, что неверно по лемме 4.3, если рассматривать компактную решетку $\mathfrak{O}$ всех открытых подмножеств.

Пусть $(E, \mathfrak{C})$ — пространство с решеткой. Назовем $\bar{A} = \cap\{B \in \mathfrak{C} \cup \{E\} | A \subseteq B\}$ расширением A (относительно решетки $\mathfrak{C}$).

Теорема 4.5. Для любого подмножества A пространства $(\mathcal{P}\omega, \mathfrak{O})$ $\bar{A} = \{x \in \mathcal{P}\omega | \exists u \in A[u \subseteq x]\}$.

Доказательство. Пусть $x \in \mathcal{P}\omega$ таково, что $\exists u \in A[u \subseteq x]$. Если $U \in \mathfrak{O}$ и $A \subseteq U$, то $u \in U$. Но по лемме 1.2. так как $u \subseteq x$ и $u \in U$, то $x \in U$. Поэтому $x \in \bar{A}$. Наоборот, пусть $x \in \mathcal{P}\omega$ таково, что $\forall u \in A \neg[u \subseteq x]$. Рассмотрим $U_x = \{z \in \mathcal{P}\omega | \neg[z \subseteq x]\}$. Легко видеть, что $U_x \in \mathfrak{O}$ и $A \subseteq U_x$. Но $x \notin U_x$, поэтому $x \notin \bar{A}$.

Лемма 4.6. Монотонное подмножество $A \subseteq \mathcal{P}\omega$ допускает представление $A = \cap\{U_x | x \notin A\}$.

Доказательство. Пусть $z \notin A$. Тогда $z \notin U_z \supseteq \cap\{U_x | x \notin A\}$. Если $z \notin \cap\{U_x | x \notin A\}$, то найдется такое $x \notin A$, что $z, \notin U_x$, т. е. $z \subseteq x$. Монотонность A влечет, что $z \notin A$.

Подмножество A пространства $(E, \mathfrak{C})$ с решеткой называется $\mathfrak{C}$-огибающей убывающей последовательности (A_n) подмножеств из E, если существует такая убывающая последовательность (B_n) элементов $\mathfrak{C} \cup \{E\}$, что $A_n \subseteq B_n$ для всех n и $\cap_n B_n \subseteq A$.

Теорема 4.7. Подмножество A пространства $(\mathcal{P}\omega, \mathfrak{A})$ является $\mathfrak{A}$-огибающей убывающей последовательности (A_n) тогда и только тогда, когда $A \supseteq \cap_n \bar{A}_n$.

$\mathfrak{C}$-емкостью Шоке на E назовем отображение $I : \mathcal{P}E \to \bar{\mathbf{R}}_+$, обладающее следующими свойствами:

(a) I монотонно возрастает: если $A \subset B$, то $I(A) \leq I(B)$;

(b) если (A_n) — возрастающая последовательность подмножеств E, то $I(\cup_n A_n) = \sup_n I(A_n)$;

(c) I полунепрерывна сверху: если (F_n) — убывающая последовательность элементов $\mathfrak{C}$, то $I(\cup_n F_n) = \inf_n I(F_n)$.

Пусть $(E, \mathfrak{C})$ — пространство с покрытием и I — емкость на нем. Подмножество A пространства E называется I-измеримым, если $I(A) = \sup_{K \subseteq A} I(K)$, $K \in \mathfrak{C}_\delta$.

Мозаикой $\mathfrak{M}$ на множестве E называется семейство подмножеств, содержащее пустое множество, и замкнутое относительно счетных пересечений и объединений. Мозаикой $\mathfrak{M}_\mathfrak{C}$, порожденной решеткой $\mathfrak{C}$, называет наименьшую мозаику, содержащую $\mathfrak{C}$.

Теорема 4.8. Пусть $(E, \mathfrak{C})$ — пространство с покрытием и I — емкость на нем. Всякий элемент мозаики $\mathfrak{M}_\mathfrak{C}$, порожденной покрытием $\mathfrak{C}$, I-измерим.

Регулярной емкостью на пространстве E с покрытием $\mathfrak{C}$ назовем $\mathfrak{C}$-емкость $I : \mathcal{P}E \to \bar{\mathbf{R}}_+$, обладающая дополнительными свойствами:

(d) $I(\varnothing) = 0$;

(e) если $I(A) = 0$ и $I(B) = 0$, то и $I(A \cup B) = 0$;

(f) для любого $A \subseteq E I(A) = \inf_{F \supseteq A} I(F), F \in \mathfrak{M}_\mathfrak{C}$.

Условие (e) тривиально выполняется, если I субаддитивна ($I(A \cup B) \leq I(A) + I(B)$).

Для регулярной емкости I на $(E, \mathfrak{C})$ подмножество $A \subseteq E$ называется I-пренебрежимым, если $I(A) = 0$. Из условия (f) следует, что всякое пренебрежимое множество A содержится в некотором пренебрежимом элементе мозаики $\mathfrak{M}_\mathfrak{C}$. Условия (a), (b) и (e) влекут, что семейство пренебрежимых множеств наследственно и замкнуто относительно счетных пересечений.

Для $B \in \mathcal{E}$ положим $C(B) = P_\mu\{T_B < +\infty\}$.

Предложение 4.9. Функция $C(A) = \inf_{B \supseteq A} - C(B)(B \in \mathcal{E})$ является регулярной емкостью.

C-пренебрежимые множества называются полярными.

Исследуем полунепрерывные снизу функции.

Определение. Функция $f : \mathcal{P}\omega \to \mathbf{R}_+$ полунепрерывная снизу, если $\forall a \in \mathbf{R}_+$ множество