УДК 004.891

В. В. Подиновский, Ж. М. Раббот

Анализ экспертных оценок методами теории важности критериев

На примере анализа ранжировок описывается процедура последовательного агрегирования экспертных оценок, позволяющая корректно использовать как качественные, так и количественные оценки компетентности экспертов.

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время метод экспертных оценок широко используется для анализа получаемой от специалистов информации с целью подготовки и выбора рациональных решений [1]. Создан богатый инструментарий логико-математических процедур, ориентированных на сбор и обработку экспертных оценок различных видов, а также пакеты прикладных программ, обеспечивающие анализ на компьютерах [2].

Однако при решении практических задач анализа экспертных оценок возникает сложность с обоснованным выбором метода их анализа. Исключение составляют, пожалуй, лишь задачи анализа экспертных оценок качества продукции, методы решения которых установлены ГОСТом [3].

Одна из причин такой сложности состоит в том, что для каждого вида экспертных оценок существует, как правило, несколько методов их агрегирования (особенно много таких методов придумано для парных сравнений), и под каждый из них подведена своя, зачастую весьма солидная, теоретическая база. Но научно обоснованных рекомендаций по выбору одного метода из многих имеющихся, к сожалению, нет: каждый, как правило, имеет свои достоинства и свои недостатки. И поэтому пользователь (исследователь, аналитик, консультант,...) выбирает метод, исходя из личного вкуса и опыта с учетом наличия подходящих компьютерных программ. Но разные методы очень часто приводят к несовпадающим результатам, а в итоге оказываются разными и рекомендации.

Один из возможных подходов к анализу экспертных оценок, позволяющий преодолеть указанную трудность, основан на теории важности критериев, разработанной для анализа задач принятия решений при многих критериях [4–6]. Этот подход предполагает не полное, а лишь частичное поэтапно пополняемое агрегирование значений экспертных оценок, основанное на применении сначала более простых и потому весьма надежных решающих правил, и лишь затем, при необходимости, привлекаются правила более сложные, но и менее надежные. В рамках такого подхода возможно также корректное использование как качественных (нечисловых), так и количественных оценок компетентности экспертов, что отмечалось еще в [4].

В данной статье указанный подход разбирается применительно к одному из наиболее распространенных видов экспертных оценок — ранжировкам.

2. АНАЛИЗ РАНЖИРОВОК

Полной ранжировкой называется ряд объектов, упорядоченный по убыванию предпочтительности или уменьшению выраженности (интенсивности) некоторого признака. Сам процесс такого упорядочения называют ранжированием. Если в ранжировке имеются равноценные объекты, то она называется нестрогой, а при отсутствии таковых — строгой. Рангом объекта называется его номер в строгой ранжировке или среднее арифметическое мест его и всех равноценных ему объектов в нестрогой ранжировке. Например, если эксперт, сравнивая четыре объекта, указал, что наиболее предпочтителен объект O_3, далее идут одинаковые по предпочтительности объекты O_2 и O_4, а наименее предпочтителен объект O_1, то тем самым он построил нестрогую ранжировку $\langle O_3, O_2 - O_4, O_1 \rangle$. При этом ранг объекта O_3 равен 1, каждый из объектов O_2 и O_4 имеет ранг (2+3)/2=2,5, а ранг объекта O_1 равен 4. Понятно, что вектор рангов восстанавливает исходную ранжировку. В нашем примере этот вектор имеет вид (4; 2,5; 1; 2,5).

Пусть m экспертов ранжировали n объектов. Полученные значения экспертных оценок можно свести в матрицу

$$\begin{Vmatrix} x_{11} & \dots & x_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ x_{m1} & \dots & x_{mn} \end{Vmatrix}, \qquad (1)$$

в которой первая строка представляет вектор рангов объектов в ранжировке первого эксперта, вторая — второго, и т. д. В общем, x_{ij} — ранг объекта O_j в ранжировке эксперта $Э_i$.

Как известно, порядок анализа экспертных оценок, и в том числе ранжировок, такой. Сначала оценивается согласованность суждений экспертов. Если согласованность достаточно высока, то экспертные оценки агрегируются — строится обобщенная (групповая) ранжировка. Если согласованность недостаточна, то либо выделяются оригинальные эксперты (суждения которых резко отличаются среди остальных), либо группа разбивается на подгруппы экспертов с близкими суждениями, и для полученной группы или подгрупп анализ повторяется.

Для оценки согласованности экспертов вычисляется выбранный критерий согласия и оценивается его значимость. При этом в качестве нулевой выдвигается гипотеза, согласно которой каждый эксперт указывает оценки случайным образом: появление любой из $n!$ возможных ранжировок равновероятно. Следовательно, на этом этапе проблемы учета компетентности экспертов не возникает: все они по нулевой гипотезе "равнонекомпетентны".

Если согласованность экспертной группы оказалась достаточной, то можно приступать к агрегированию исходных ранжировок в одну обобщенную (групповую), не требуя, однако, чтобы она сразу была полной ранжировкой, т. е. допуская неполную упорядоченность объектов. Частичные ранжировки удобно представлять при помощи бинарных отношений нестрогого предпочтения R, строгого предпочтения P и безразличия I:

$O_j R O_k$ означает, что объект O_j не менее предпочтителен, чем объект O_k (и потому в частичной ранжировке O_j стоит не дальше, чем O_k);

$O_j P O_k$ означает, что объект O_j предпочтительнее объекта O_k (и потому в частичной ранжировке O_j стоит перед O_k);

$O_j I O_k$ означает, что объекты O_j и O_k одинаковы по предпочтительности (в частичной ранжировке они стоят "вместе" и ранги у них одинаковы).

Каждый объект O_j характеризуется вектором $x^j = (x_{1j}, \dots x_{mj})$ рангов, выставленных ему экспертами. Этот вектор представлен в матрице (1) j-м столбцом. Самое простое и надежное решающее правило вводит отношение Парето R^0:

$$O_j R^0 O_k \Leftrightarrow x_{ij} \le x_{ik}, \; i = 1, \dots, m, \qquad (2)$$

при этом если все нестрогие неравенства в (2) выполняются как равенства, то $O_j I^0 O_k$, а если среди них хотя бы одно строгое, — то $O_j P^0 O_k$. Смысл отношения (2) прост: если объект O_j в ранжировке каждого эксперта стоит не далее объекта O_k, то такое же взаимное расположение должно сохраниться для этих объектов и в обобщенной ранжировке. Если, по мнению всех экспертов, они одинаковы по предпочтительности, то так же должно быть в обобщенной ранжировке. А если хотя бы один эксперт предпочитает объект O_j объекту O_k, то в обобщенной ранжировке первый из них должен стоять раньше второго.

Далее можно привлечь качественную информацию о компетентности экспертов, выраженную ранжировкой, в которой эксперты расположены по убыванию их компетентности, и представляемую вектором рангов

$$r = (r_1, \dots, r_m). \qquad (3)$$

Пусть $y = (y_1, \dots, y_q)$ — числовой вектор. Обозначим через $y_\uparrow = (y_{(1)}, \dots, y_{(q)})$, где $y_{(1)} \le y_{(2)} \le \dots \le y_{(q)}$, перестановку вектора y по неубыванию. Например, если y=(2, 7, 3, 0, 2), то $y_\uparrow$=(0, 2, 2, 3, 7), и, скажем, $y_{(4)} = 3$.

Пусть $G = \{g_1, \dots, g_h\}$ — перенумерованные в порядке возрастания все возможные значения x_{ij} в матрице (1). В частности, если все эксперты указали только строгие ранжировки, то $G = \{1, \dots, n\}$. Для каждого $l = 1, \dots, h$ введем в рассмотрение векторы $r^{jl} = (r_l^{jl}, \dots, r_m^{jl})$, где:

$$r_i^{jl} = \begin{cases} r_i, & x_{ij} \le g_i, \\ M, & x_{ij} > g_l, \end{cases} \qquad (4)$$

а M — произвольное число, которое больше наибольшего из чисел x_{ij} в матрице (1) (например, годится $M = n + 1$).

Решающее правило, задающее отношение R^r на основе качественной информации о компетентности экспертов, представленной ранжировкой (3), таково:

$$O_j R^r O_k \Leftrightarrow r_{(i)}^{jl} \le r_{(i)}^{kl}, \; i = 1, ..., m, \; l = 1, ..., h, \quad (5)$$

при этом если все нестрогие неравенства выполняются как равенства, то $O_j I^r O_k$, а если хотя бы одно из них строгое, то $O_j P^r O_k$. В том частном случае, когда все эксперты равнокомпетентны: $r_1 = ... = r_m = (1 + ... + m)/m = (m+1)/2$, решающее правило (5) для соответствующего отношения, которое обозначим R^E, можно представить в совсем простом виде:

$$O_j R^E O_k \Leftrightarrow x_{(i)j} \le x_{(i)k} \; i = 1, ..., m. \qquad (6)$$

Пусть теперь имеется количественная информация о компетентности экспертов, представленная, например, коэффициентами компетентности λ_i, образующими вектор

$$\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_m) \qquad (7)$$

и равными в сумме 1. Понято, что количественная информация о компетентности (7) должна уточнять (дополнять) качественную информацию (3), так что выполняются условия:

$$r_i < r_j \Rightarrow \lambda_j > \lambda_j, r_i = r_j \Rightarrow \lambda_i = \lambda_j.$$

Для каждого объекта O_j для $l = 1, ..., h$-1 подсчитаем суммы Λ^{jl} коэффициентов λ_i, соответствующие i, таким, что $x_{ij} \le g_l$ (если таких компонент x_{ij} нет, то $\Lambda^{jl} = 0$). Решающее правило, задающее отношение R^λ на основе количественной информации о компетентности экспертов, представленной вектором коэффициентов компетентности (7), выглядит так:

$$O_j R^\lambda O_k \Leftrightarrow \Lambda^{jl} \ge \Lambda^{kl}, \; l = 1, ..., h\text{-}1, \qquad (8)$$

при этом если все нестрогие неравенства выполняются как равенства, то $O_j I^\lambda O_k$, а если хотя бы одно из них строгое, — то $O_j P^\lambda O_k$.

Отношения R^0, R^r и R^λ вложены одно в другое, т. е. справедливы включения:

$$R^0 \subseteq R^r \subseteq R^\lambda; \; P^0 \subseteq P^r \subseteq P^\lambda; \; I^0 \subseteq I^r \subseteq I^\lambda. \quad (9)$$

Это означает, что каждая из соответствующих им ранжировок непротиворечиво продолжает предыдущую (например, если объект O_j стоит в ранжировке, соответствующей R^0, после объекта O_k, то такое же их взаимное расположение сохраняется и в двух других ранжировках, соответствующих R^r и R^λ).

Для решения практических задач частичной ранжировки, соответствующей R^λ или даже R^r, может оказаться достаточно. В противном случае придется провести полное агрегирование — построить полную ранжировку всех объектов, например, с помощью отношения R^s, определяемого сравнением взвешенных сумм рангов

$$s^j = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_{ij} \qquad (10)$$

следующим образом:

$$O_j R^s O_k \Leftrightarrow s^j \leq s^k. \qquad (11)$$

При этом если нестрогое неравенство в (11) выполняется как равенство, то $O_j I^s O_k$, а если как строгое, — то $O_j P^s O_k$.

Важно подчеркнуть, что R^λ также будет вложено в R^s. Понятно, что в обобщенной ранжировке, соответствующей R^s, будут упорядочены все объекты. И в результате будет известно также, какие пары объектов оказались упорядоченными на основании R^0, какие — на основании R^r или же R^λ, и, наконец, какие пары оказались упорядоченными только после полного агрегирования, надежность которого, естественно, меньше всех предыдущих частичных агрегирований.

3. ПРИМЕР

Для иллюстрации работы с техникой, описанной выше, разберем простой иллюстративный пример. Пусть три эксперта строго ранжировали по предпочтительности шесть объектов, и полученные при этом ранги объектов, образующие матрицу (1), даны в табл. 1.

Таблица 1

Ранги объектов x_{ij}

	O_1	O_2	O_3	O_4	O_5	O_6
$Э_1$	1	2	3	4	5	6
$Э_2$	2	1	3	5	6	4
$Э_3$	2	1	5	3	6	4

Для проверки согласованности суждений группы экспертов вычислим статистику Фридмана X^2 [3]:

$$X^2_{\text{набл}} = \frac{12}{mn(n+1)} \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \right)^2 - 3m(n+1) =$$

$$= \frac{12}{3 \cdot 6 \cdot 7}(5^2+4^2+11^2+12^2+17^2+14^2) - 3 \cdot 3 \cdot 7 = 12,3.$$

Для самого высокого (из общепринятых) уровня значимости α=0,01 по таблице приложения 7 из работы ([3]) находим: $X^2_{0,01} = 11,5$. Поскольку 12,3>11,5, то нулевая гипотеза о "равнонекомпетентности" экспертов отвергается. Поскольку значение коэффициента конкордации Кендэла

$$W = X^2_{\text{набл}} / [m(n-1)] = 12/15 = 0,82$$

близко к его возможному максимуму — единице, то полагаем, что согласованность суждений всех экспертов достаточно высокая, и переходим к построению обобщенного (группового) суждения.

Векторы x^j рангов объектов здесь такие:

$$x^1 = (1,2,2),\ x^2 = (2,1,1),\ x^3 = (3,3,5),$$

$$x^4 = (4,5,3),\ x^5 = (5,6,6),\ x^6 = (6,4,4).$$

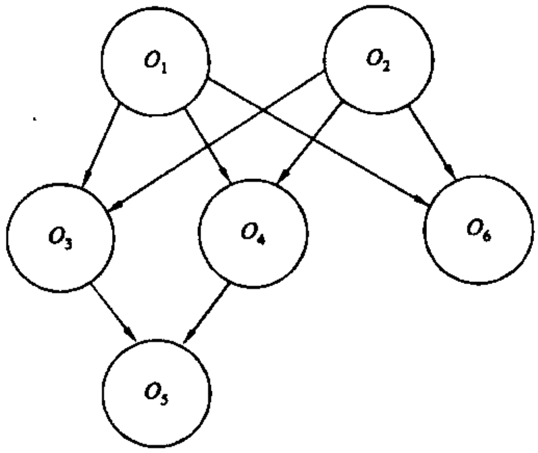

Рис. 1. Частичная ранжировка согласно R^0

Частичная ранжировка объектов, соответствующая отношению Парето R^0, представлена на рис. 1. Он показывает, например, что объект O_1 предпочтительнее объекта O_3, который, в свою очередь, предпочтительнее объекта O_5 (на это указывают стрелки), и поэтому объект O_1 предпочтительнее объекта O_5 (для "разгрузки" рисунка стрелка от O_1 к O_5 не показана). А, скажем, объекты O_5 и O_6 несравнимы. Действительно, для объектов O_1 и O_3, согласно (2), имеем:

$$x^1_1 = 1 < x^3_1 = 3;\ x^1_2 = 2 < x^3_2 = 3;\ x^1_3 = 2 < x^3_3 = 5;$$

а вот для O_5 и O_6 получаем:

$$x^5_1 = 5 < x^6_1 = 6;\ x^5_2 = 6 > x^6_2 = 4;\ x^5_3 = 6 > x^6_3 = 4.$$

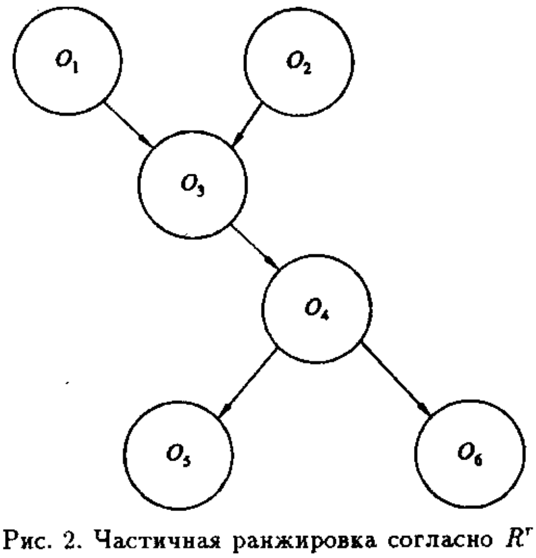

Рис. 2. Частичная ранжировка согласно R^r

Привлечем теперь качественную информацию о компетентности экспертов: эксперт $Э_1$ компетентнее эксперта $Э_2$, который, в свою очередь, компетентнее эксперта $Э_3$, так что вектор рангов (3) есть $r = (1,2,3)$. Частичная ранжировка, соответствующая отношению R^r, представлена на рис. 2. Действительно, здесь $G = \{1,2,3,4,5,6\}$, и поэтому, например, для объектов $O_1 - O_4$ имеем (приняв $M = 7$):

$$r^{11} = (1,7,7);\ r^{12} = ... = r^{16} = (1,2,3);$$

$$r^{21} = (7,2,3);\ r^{22} = ... = r^{26} = (1,2,3);$$

$$r^{31} = r^{32} = (7,7,7);\ r^{33} = r^{34} = (1,2,7);\ r^{35} = \\ = r^{36} = (1,2,3);$$

$$r^{41} = r^{42} = (7,7,7);\ r^{43} = (7,7,3);\ r^{44} = (1,7,3); \\ r^{45} = r^{46} = (1,2,3),$$

и потому:

$$r_{\uparrow}^{11} = (1,7,7);\ r_{\uparrow}^{12} = r_{\uparrow}^{16} = (1,2,3);$$

$$r_{\uparrow}^{21} = (2,3,7); r_{\uparrow}^{22} = ... = r_{\uparrow}^{26} = (1,2,3);$$

$$r_{\uparrow}^{31} = r_{\uparrow}^{32} = (7,7,7);\ r_{\uparrow}^{33} = r_{\uparrow}^{34} = (1,2,7);\ r_{\uparrow}^{35} = \\ = r_{\uparrow}^{36} = (1,2,3);$$

$$r_{\uparrow}^{41} = r_{\uparrow}^{42} = (7,7,7);\ r_{\uparrow}^{43} = (3,7,7);\ r_{\uparrow}^{44} = (1,3,7); \\ r_{\uparrow}^{45} = r_{\uparrow}^{46} = (1,2,3).$$

Следовательно, для объектов O_3 и O_4 выполняются неравенства из правой части (5):

$$7 = 7 \text{ (при } i = 1,2,3 \text{ для } l = 1,2);$$

$$1 < 3,\ 2 < 7,\ 7 = 7 \text{ (для } l = 3);$$

$$1 = 1,\ 2 < 3,\ 7 = 7 \text{ (для } l = 4);$$

$$1 = 1,\ 2 = 3,\ 3 = 3 \text{ (для } l = 5,6),$$

и поэтому $O_3 P^r O_4$. А вот объекты O_1 и O_2 остаются несравнимыми:

$$1 < 2,\ 7 > 3,\ 7 = 7 \text{ для } l = 1$$

(для остальных l=2, ..., 6 проверять неравенства из (5) уже не требуется).

Используем теперь количественную информацию о компетентности экспертов: эксперт $Э_1$ в два раза компетентнее эксперта $Э_2$, который, в свою очередь, в два раза компетентнее эксперта $Э_3$, так что коэффициенты компетентности составляют вектор

$$\lambda = (4/7), 2/7, 1/7). \qquad (12)$$

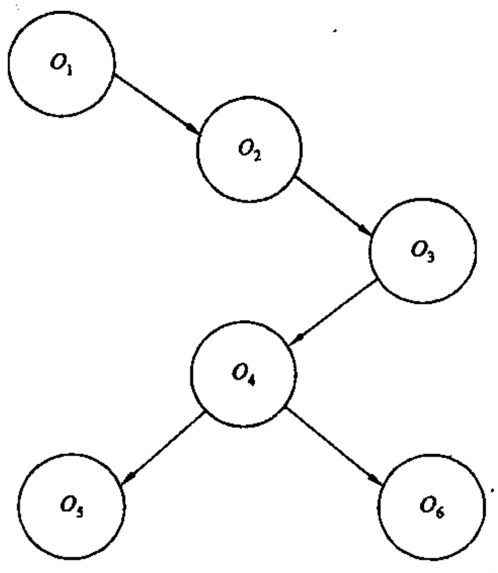

Рис. 3. Частичная ранжировка согласно R^{λ}

Частичная ранжировка объектов, соответствующая отношению R^{λ}, представлена на рис. 3. Для объектов O_1, O_2, O_5 и O_6 имеем следующие суммы Λ^{jl}:

$$\Lambda^{11} = 4/7,\ \Lambda^{12} = ... = \Lambda^{16} = 1;$$

$$\Lambda^{21} = 3/7,\ \Lambda^{22} = ... = \Lambda^{26} = 1;$$

$$\Lambda^{51} = ... = \Lambda^{54} = 0,\ \Lambda^{55} = 4/7,\ \Lambda^{56} = 1;$$

$$\Lambda^{61} = \Lambda^{62} = \Lambda^{63} = 0,\ \Lambda^{64} = \Lambda^{65} = 3/7,\ \Lambda^{66} = 1.$$

Для объектов O_1 и O_2 пять неравенств из (8) имеют вид:

$$4/7 > 3/7, 1 = 1, ...,\ 1 = 1,$$

так что действительно $O_1 P^{\lambda} O_2$. Для объектов O_5 и O_6 соответственно имеем:

$$0 = 0,\ 0 = 0,\ 0 = 0,\ 0 < 3/7,\ 4/7 > 3/7,$$

и потому эти объекты остались несравнимыми.

Согласно базовой идее формализации понятия количественной важности [5, 6], идее позволившей построить решающее правило, на основе которого и было записано правило (8), информацию о компетентности экспертов (12) можно наглядным образом использовать так: повторить оценки эксперта $Э_1$ четыре раза, а эксперта $Э_2$ — дважды, т. е. перейти от табл. 1 к табл. 2; для нее все "абстрактные эксперты" $Э_1^1$, $Э_1^2$, $Э_1^3$, $Э_1^4$, $Э_2^1$, $Э_2^2$, $Э_3^1$ считаются равнокомпетентными.

Таблица 2

Ранги объектов y_{ij}

	O_1	O_2	O_3	O_4	O_5	O_6
$Э_1^1$	1	2	3	4	5	6
$Э_1^2$	1	2	3	4	5	6
$Э_1^3$	1	2	3	4	5	6
$Э_1^4$	1	2	3	4	5	6
$Э_2^1$	2	1	3	5	6	4
$Э_2^2$	2	1	3	5	6	4
$Э_3^1$	2	1	5	3	6	4

При таком подходе каждый объект O_j характеризуется вектором рангов $y^j = (y_{1j}, ..., y_{7j})$, упорядоченным по возрастанию:

$y_{\uparrow}^1 = (1,1,1,1,2,2,2);$
$y_{\uparrow}^2 = (1,1,1,2,2,2,2);$
$y_{\uparrow}^3 = (3,3,3,3,3,3,5);$
$y_{\uparrow}^4 = (3,4,4,4,4,5,5);$
$y_{\uparrow}^5 = (5,5,5,5,6,6,6);$
$y_{\uparrow}^6 = (4,4,4,6,6,6,6).$

Применяя к этим векторам решающее правило (6), легко убедиться, что оно приводит к ранее построенной частичной ранжировке, представленной на рис. 3.