УДК 81'371:004.8

И 9 8-11

Л. Л. Эсакиа

Диссидент как отношение достижимости в семантике возможных миров

рер

В этой заметке, посвященной моему коллеге и другу Виктору Константиновичу Финну, мне хочется поделиться с читателями своими впечатлениями о некой "экзотической" модальной системе, которую будем обозначать через DL (=Dissident Logic). Происхождение этой системы таково: К. Сегерберг определил систему, модальный оператор ◊ которой означает "somewhere else": "Professor Georg Henrik von Wright seems to have been the first to notice the fact, overlooked by everyone else, that "somewhere else" has an interesting logic of its own, distinct from that of the S5-operaror "somewhere""[1, с. 61][1]

Таким образом, модальность ◊ системы DL означает "где-либо в другом месте" (somewhere else) в отличие от модальности ◊ классической системы Льюиса S5, которая понимается как "где-либо" (somewhere). Точнее, адекватная семантика системы DL определяется фреймами Крипке (W, R), в которых отношение достижимости R является отрицанием отношения равенства (= Dissident Relation), т. е. xRy означает $x \neq y$. Заметим, что термин *неравенство* ассоциируется в научной литературе скорее с отношением порядка $\leq$, нежели с отрицанием равенства $x \neq y$.

Забегая вперед, отметим, что модальная система DL (= Dissident Logic) является нормальным расширением модальной системы wK4, которая представляет, с нашей точки зрения, самостоятельный интерес.

СЛАБАЯ ТРАНЗИТИВНОСТЬ И МОДАЛЬНАЯ СИСТЕМА WK4

Как известно, адекватная семантика модальной системы K4 определяется в терминах фреймов Крипке (X, R) с транзитивным отношением достижимости R. Вспомним, что почти полстолетия тому назад понятие транзитивности было предметом любопытной дискуссии в среде логиков (с участием Артура Прайора), материалы которой нашли отражение в печати и прореферированы Алонзо Черчем [2]; приведу цитату из заключительной части этого реферата: "This is continuation of the discussion initiated in the XXIV 185 (1,2). In spite disagreements on this way, the polemic ends with all parties agreeing that notion of weak-transitivity of a relation R, characterized by $x \neq z$ & xRy & yRz⇒xRz must be distinguished from that of strongtransitivity, characterized by xRy & yRz⇒xRz (x=z!)"[2]. Достигнутый консенсус позволяет нам, наряду с "обычной" транзитивностью, пользоваться и слабой транзитивностью (=weak-transitivity); более того, мы отметим некоторые достоинства слабой транзитивности и покажем, что фреймы Крипке (X, R) со слаботранзитивным отношением достижимости характеризуют модальную систему wK4. Воспроизведем кратко основные синтаксические и семантические черты этой системы, отослав читателя за подробностями к работе [3].

Итак, используя терминологию членов дискуссии, будем говорить, что бинарное отношение R — слаботранзитивно, если из $x \neq z$, xRy и yRz следует xRz.

Пусть R — произвольное отношение на множестве X; определим (подобно Бертрану Расселу) отношение родства (=ancestral) R^*.

Определение. $xR^*y \Leftrightarrow$ (xRy или ($x \neq y$ и существует путь $\langle x_1, x_2, \dots, x_n, y\rangle$ (n>0), ведущий из x в y, т. е. $xRx_1Rx_2,\dots,x_nRy$.

Замечание. Путь $\langle x_1, x_2, \dots, x_n, y\rangle$ из x в y назовем

(a) безвозвратным, если при любом i ($i \leq n$) $x \neq x_i$ и

(b) бесповоротным, если для любых i и j, из $i \neq j$ следует $x_i \neq x_j$.

Несложно убедиться, что мы можем ограничиться в Определении безвозвратными и бесповторными путями. Кроме того, для любого отношения R, отношение родства R^* является наименьшим, слаботранзитивным отношением, содержащим R.

Таким образом, как и в обычном, транзитивном случае, мы вправе называть R^* — слаботранзитивным замыканием отношения R.

[1] Профессор Г. Х. фон Вригт, по-видимому, был первым, кто отметил тот факт (ускользнувший от внимания других), что оператор ◊ "где-либо в другом месте" имеет собственную интересную логику, отличную от оператора ◊ "где-либо" логики S5.

[2] Это продолжение дискуссии, начатой в XXIV 185(1,2). Несмотря на разногласия, все стороны в результате согласились с тем, что понятие слабой транзитивности отношения R, характеризуемой как $x \neq z$&xRy&yRz⇒xRz следует отличать от сильной транзитивности, характеризуемой как xRy&yRz⇒xRz (x=z!)

Простая проверка показывает, что если бинарное отношение R — симметрично, то его слаботранзитивное замыкание R^* — также симметрично.

Пример. Пусть X — произвольное множество с по крайней мере двумя элементами и R — отношение "неравенства" (dissident relation), т. е. $xRy \Leftrightarrow x \neq y$. Легко увидеть, что R — слаботранзитивно (и даже симметрично), но не транзитивно.

Пусть K — известная базисная нормальная модальная система с единственной аксиомной схемой $\Box(p \to q) \to (\Box p \to \Box q)$ и с обычными правилами вывода, включая правило Геделя $p/\Box p$.

Определение. Модальная система wK4 получается из K постулированием в качестве дополнительной аксиомы формулы

$$(w)(p \wedge \Box p) \to \Box\Box p,$$

символически, wK4=K+(w).

Заметим здесь же, что в терминах оператора $\Diamond$ эту аксиому можно записать в виде

$$(w')\Diamond\Diamond p \to (p \vee \Diamond p).$$

Легко заметить, что формула (w) доказуема в системе $K4=K + \Box p \to \Box\Box p$ и, следовательно, система wK4 является промежуточной между K и K4.

Утверждение. Пусть (X, R) — произвольный Крипке фрейм, т. е. R — произвольное бинарное отношение на X. Следующие условия равносильны:

1. Фрейм (X, R) является wK4-фреймом, т. е. аксиома (w) — общезначима в нем.
2. Отношение R — слаботранзитивно.

Рассмотрим канонический (дескриптивный) фрейм (X, R) модальной системы wK4, т. е. семейство X всех максимальных, непротиворечивых множеств формул, содержащих все теоремы системы wK4, со стандартно определенным отношением R, а именно: $xRy \Leftrightarrow (\Box p \in x \Rightarrow p \in y)$ для любой формулы p.

Утверждение. Канонический фрейм (X, R) — слаботранзитивен и, следовательно, является wK4-фреймом.

Следствие. Семантическая полнота системы wK4: модальная система wK4 характеризуется классом всех слаботранзитивных Крипке фреймов.

Известно, что транзитивное замыкание наименьшей фильтрации может не быть фильтрацией, однако, если исходная модель — транзитивна, то транзитивное замыкание наименьшей фильтрации является фильтрацией. Адаптация метода фильтрации Сегерберга к системе wK4, позволяет показать, что

если исходная модель слаботранзитивна, то слаботранзитивное замыкание R^* является наименьшей фильтрацией.

Следствие. Модальная система wK4 — финитно аппроксимируема и характеризуется конечными, слаботранзитивными фреймам.

Начнем с некоторых эвристических соображений. Пусть (X, R) — произвольный S4-фрейм, т. е. произвольное квазиупорядоченное множество, и $X_0 \subseteq X$. Определим на том же множестве X отношение R_0 следующим образом:

$$\text{если } x \neq y, \text{ то } xRy \Leftrightarrow xR_0y \qquad (1)$$

и

$$xR_0x \Leftrightarrow x \notin X_0. \qquad (2)$$

Допуская вольность речи, можно это определение перефразировать следующим образом: отношение R_0 получается из R "удалением" рефлексивных петель в точках из предписанного множества X_0 (сохраняя остальные R-связи нетронутыми). Заметим, что когда $X_0=X$, мы получаем иррефлексивное, слаботранзитивное отношение R_0. Отметим также, что исходный фрейм (X, R) однозначно получается из (X, R_0) восстановлением удаленных рефлексивных петель, т. е. положив $xRy \Leftrightarrow x=y$ или xR_0y. Нетрудно убедиться, что любое слаботранзитивное отношение R_0 на множестве X получается из своего релексивного компаньона R удалением рефлексивных петель в подходящих точках множества X. Эти "семантические" связи между wK4- и S4-фреймами позволяют установить следующую простую "дедуктивную" связь системы S4 с wK4. Вспомним известное (по крайней мере в контексте доказуемостной логики) "расщепляющее" преобразование $\sharp$ формул p, состоящее в замене каждой подформулы формулы p вида $\Box q$ на $q \wedge \Box q$. Заметим, что преобразование $\sharp$ аксиомы "транзитивности" $\Box p \to \Box\Box p$ системы S4 дает нам формулу, равносильную аксиоме (w) системы wK4.

Утверждение.

$$(a)\ \ S4 \vdash p \Leftrightarrow wK4 \vdash \sharp(p);$$

(b) wK4 является наименьшим нормальным расширением системы K, в которое погружаема система S4 преобразованием $\sharp$.

В заключительной части своей фундаментальной работы, посвященной алгебрам с замыканием (=алгебраической семантике модальной системы S4) Мак-Кинси и Тарский замечают: "Like the topological operation of closure other topological operation can also be treated in an algebraic way. This may be especially interesting in regard to those operation which are not definable in terms of closure... An especially important notion is that of the derivative of a point set..."[3] [4, p. 182]. Далее приведено

Определение (Мак-Кинси-Тарский). Булева алгебра с оператором (B, $\wedge, \vee, \neg$, d) называется алгеброй с деривацией, если оператор d удовлетворяет условиям: (1) d0=0, (2) $d(a \vee b)=da \vee db$ и

$$dda \leq da, \ \text{для любых}\ a, b \in B. \qquad (3)$$

В современной "модальной" литературе эти алгебры именуются K4-алгебрами и образуют алгебраическую семантику модальной системы K4, когда модальный оператор $\Diamond$ интерпретируется с помощью оператор деривации d.

Вспомним, что точка x топологического пространства X называется предельной точкой (или точкой накопления) множества A, если любая

[3] Подобно топологической операции замыкания, другие топологические операции также могут быть проинтерпретированы алгебраически. Это может быть особенно интересно по отношению к тем операциям, которые не определимы в терминах замыкания... Особенно важно понятие производного от точечного множества (прим. — множества предельных точек).

окрестность точки x содержит по крайней мере одну точку множества A, отличную от x. Обозначим через dA — множество всех предельных точек множества A. Вспомним, что топологическое замыкание cA множества A равно A∪dA.

Учитывая эту, подразумеваемую, топологическую интерпретацию оператора d, нам представляется целесообразным несколько ослабить требования, наложенные на оператор деривации в приведенном выше определении, а именно, заменить условие (3′) на несколько более слабое. Итак примем $dda \leq a \vee da$ (3′).

Определение. Булева алгебра с оператором $(B, \wedge, \vee, \neg, d)$ называется ***алгеброй с деривацией***, если выполнены условия (1), (2) и (3′).

Класс алгебр с деривацией образует алгебраическую семантику модальной системы wK4 (сравни условие (3′) с аксиомой (w′) системы wK4). Оправдание предложенной нами модификации основано на следующих простых наблюдениях.

Основная аксиома (и, следовательно, любая теорема) системы wK4 — топологически общезначима. Действительно, несложно убедиться, что аксиома (w′)$\Diamond\Diamond p \rightarrow (p \vee \Diamond p)$ или теоретико-множественное включение $ddA \subseteq A \cup dA$ справедливо в любом топологическом пространстве X для произвольного подмножества A. Однако характерная аксиома K4 $\Diamond\Diamond p \rightarrow \Diamond p$ или соответствующее ей включение $ddA \subseteq dA$ не во всех пространствах верны: пусть, например, множество X (по крайней мере с двумя элементами) снабжено антидискретной топологией (т. е. открытыми множествами являются только пустое множество и само пространство X). Легко проверить, что условие $ddA \subseteq dA$ ложно для любого синглетона $A=\{x\}$; действительно, в этом случае dA содержит все точки, кроме точки x; однако $x \in ddA$.

Пусть (X, R) — произвольный фрейм; обозначим через $(X, R)^+$ булеву алгебру (всех подмножеств множества X) с опретором d: $dA=\{x \in X: \exists x\ (xRy\ \&\ y \in A)\}$ или, короче, $dA=R^{-1}(A)$ для любого множества A. Мы уже знаем, что алгебра $(X, R)^+$ — является wK4-алгеброй, если и только если (X, R) — слаботранзитивный фрейм. Учитывая, что система wK4 — финитно аппроксимируема (или, алгебраически говоря, что многообразие алгебр с деривацией порождается своими конечными алгебрами) специально выделим конечный случай.

Утверждение. Каждая конечная алгебра с деривацией (B, d) представима (с точностью до изоморфизма) в виде алгебры $(X, R)^+$ для подходящего слаботранзитивного фрейма (X, R).

Пусть вновь (X, R) — произвольный слаботранзитивный фрейм и $(X, R)^+=(B, d)$ — соответствующая алгебра с деривацией; определим (используя d) на множестве X новую опрецию c, положив: $cA=A \cup dA$ для любого множества $A \subseteq X$. Легко видеть, что оператор c удовлетворяет всем аксиомам Куратовского и, следовательно, являясь оператором топологического замыкания, индуцирует на множестве X топологию; пусть для любого множества A d′A — множество предельных точек множества A (в этой топологии!). Опреторы d′ и d — не всегда совпадают, хотя топология на X и была индуцирована оператором d! В этом легко убедиться, рассмотрев, скажем, случай, когда отношение R — рефлексивно; действительно, в этих условиях $cA=dA$, так как $A \subseteq dA$, и "настоящий" оператор перехода к пределу d′ не может совпадать с опретором замыкания c, хотя бы потому, что $x \notin d(\{x\})$, в то время как $x \in c(\{x\})$. Справедливо простое (но ключевое) наблюдение.

Утверждение. *Если* $(X, R)^+=(B, d)$ *и* R — *слаботранзитивно, то* d *является оператором предела в топологии, индуцированной опретором замыкания (порожденным* d*), если и только если отношение* R — *иррефлексивно.*

Для доказательства достаточно вспомнить, что в любом топологическом пространстве X оператор предела d удовлетворяет условию: $x \in d(A) \Leftrightarrow x \in c(A - \{x\})$, из которого следует $x \notin d(\{x\})$, т. е. "иррефлексивность" оператора d.

Итак, образно говоря, возникает такая картина: рассмотрим на множестве X семейство всех слаботранзитивных отношений R_0, рефлексивные замыкания которых совпадают (соответственно, семейство операторов деривации d, дающих один и тот же опретор замыкания по схеме $aA=A \cup dA$); все эти отношения R_0 отличаются друг от друга лишь множеством X_0 своих иррефлексивных точек. Один из крайних случаев, когда $X_0=X$, т. е. "удалены" все петли, дает иррефлексивное отношение, которое и соответствует "настоящему" топологическому оператору предела !

Справедливо следующее, имеющее и самостоятельное значение

Утверждение. Топологии на конечном множестве X находятся в одно-однозначном соответствии с иррефлексивными, слаботранзитивными отношениями на X.

Финитная аппроксимируемость модальной системы wK4 говорит нам о том, что wK4 характеризуется конечными, слаботранзитивными фреймами (X, R), из чего еще не следует, что для опровержимости недоказуемых формул можно ограничиться "запасом" конечных, иррефлексивных фреймов. Однако для любого слаботранзитивного фрейма (X, R) существует иррефлексивный фрейм (X′, R′) и сюръективное отображение $f: X \rightarrow X'$, являющееся p-морфизмом (т. е. такое, что $fR'(x)=R\,f(x)$). Построение фрейма (X′, R′) проще объяснить "на пальцах", чем дать формальное описание. Каждую R-рефлексивную точку, т. е. каждую точку x, нарушающую иррефлексивность отношения R, заменим на две разные точки x_1 и x_2 и положим: $x_1R'x_2$ и $x_2R'x_1$ (таким образом точка x заменяется на двухточечный иррефлексивный сгусток), оставив все остальные связи прежними, т. е. $xR'y \Leftrightarrow xRy$, когда $x \neq y$. Отображение f определим следующим образом: f — тождественно на всех иррефлексивных точках и $f(x_1)=f(x_2)=x$. Легко убедиться, что f — действительно p-морфизм; тем самым справедливо

Утверждение. Модальная система wK4 характеризуется классом конечных иррефлексивных, слаботранзитивных фреймов

Привилегированное (в топологическом отношении) положение модальной системы wK4 выражает

Следствие. Модальная система wK4 является логикой топологических пространств, другими словами, для любой формулы p wK4 $|\!-p \Leftrightarrow p$ — общезначима в любом топологическом пространстве.

А что можно сказать, с топологической точки зрения, о модальной системе K4? Вспомним аксиому отделимости T_d, введенную в работу [5]: по определению, топологической пространство X удовлетворяет *аксиоме отделимости* T_d, если для каждой точки $x \in X$ найдутся замкнутое множество A и открытое множество B, такие, что $\{x\}=A\cap B$. Известно, что класс T_d — пространств является строго промежуточным между классами T_0- и T_1 — пространств, т. е. $T_1 \subset T_d \subset T_0$.

Утверждение. Модальная система K4 характеризуется классом T_d-пространств, т. е. формула p — общезначима в любом T_d-пространстве, если и только если $K4 \vdash p$.

МОДАЛЬНАЯ СИСТЕМА DL

Модальная система DL получается из wK4 постулированием формулы $p \to \Box\Diamond p$ в качестве дополнительной аксиомы.

Определение. Отношение R на множестве X назовем *слабой эквивалентностью*, если R — слаботранзитивно и, кроме того, симметрично.

Ясно, что слабая эквивалентность отличается от "обычной" только рефлексиями: все точки отношения эквивалентности — рефлексивны, в то время как слабая эквивалентность допускает наличие любого множества $X_0 (\subseteq X)$ — иррефлексивных точек. Крайний случай, когда $X_0=X$, т. е. когда отношение "полностью" иррефлексивно, также возможен! Фрейм (X, R), в котором отношение R является слабой эквивалентностью, назовем *сгустком*, если для любых двух различных точек x и y x R y. Сгусток называется *иррефлексивным*, если все его точки — иррефлексивны.

Алгебраическую семантику модальной системы DL образуют слабомонадические алгебры; булеву алгебру с опретором (B, d) назовем *слабомонадической*, если (1) (B, d) — wK4-алгебра и (2) $a \wedge d \neg d\ a=0$ для любого элемента $a \in B$. Многообразие wMA слабомонадических алгебр обладает рядом "приятных" черт; как и многообразие монадических алгебр Халмоша [6], многообразие wMA — локально конечно. Пусть $(B, d)=(X, R)^+$ — конечная, слабомонадическая алгебра; тогда (B, d) — неразложима в подпрямое произведение, если и только если (X, R) — сгусток. Каждая конечная неразложимая алгебра (B′, d′) вложима в неразложимую алгебру $(B, d)=(X, R)^+$, у которой (X, R) является иррефлексивным сгустком, т. е. $x\ R\ y \Leftrightarrow x \neq y$. Такие алгебры назовем *шаблонными*. Внутреннее описание шаблонных алгебр (B, d) таково: (0) $d0=0$, (1) если a — атом булевой алгебры B, то $d\ a=\neg a$, (2) $d\ a=1$, в остальных случаях. Многообразие wMA слабомонадических алгебр порождается своими шаблонными алгебрами. Справедлива следующая усиленная версия известного результата Скрогса: модальная система DL — *наследственно* финитно аппроксимируема и является наименьшим "нерефлексивным компаньеном" системы S5; каждое нормальное расширение системы DL характеризуется подходящим классом сгустков; в частности система DL характеризуется иррефлексивными сгустками.

Утверждение. Модальная система DL (Dissident Logic) является логикой "диссидентов", т. е. формула p доказуема в системе DL, если и только если формула p общезначима во фреймах Крипке, отношение достижимости которых является dissident relation.

Позволим себе проиллюстрировать отношение "инакомыслия" (dissident relation) следующей картинкой без слов:

В последнее время, система DL была "переоткрыта" в контексте компьютерной логики и вновь привлекла внимание логиков (смотри, например, работу [7] и цитированную в ней литературу).

В заключение, отметим, что основные наблюдения, относящиеся к слабой транзитивности и топологической семантике модальной системы wK4, были получены автором в 70-е гг. минувшего столетия и частично воспроизведены в работе [3]. В тот же период в диссертационной работе В. Месхи был детально исследован класс wK4-алгебр, удовлетворяющих дополнительному условию $d1=1$, которому в топологической семантике соответствует класс плотных в себе пространств. Совсем недавно, в своей магистерской работе, Л. Уридия показал, что число не эквивалентных формул одной переменной в системе DL равно 4096, в то время как в ее рефлексивном компаньене, системе S5, таких формул всего — 16. Им же было показано, что система DL обладает континуальным числом нормальных расширений, что контрастирует с известным фактом о счетности нормальных расширений системы S5.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Segerberg K. Somewhere else and some other time // Wright and W rong: mini-essay in honor of G. H. von Wright. Publ. the group in logic and methodology of Real Finland, 1976. — P. 61–64.

2. Church A. J. Symb. Logic. — 1960. — № 25. — P. 263–264.

3. Эсакиа Л. Л. Слабая транзитивность — реституция. Логические исследования. — М.: Наука, 2001. — Вып. 8. — С. 244–255.

4. MacKinsey J., Tarski A. The algebra of topology // Annals of Math. — 1944. — № 45. — P. 141–191.

5. Aull C. E., Thron W. J. Separaction axioms between T_0 and T_1 // Indag. Math. — 1962. — № 24. — P. 26–37.

6. Halmos P. Algebraic logic. Monadic Boolean algebras // Composit. math. — 1955. — № 12. — P. 217–249.

7. de Rijke M. The Model logic of inequality // J. Symb. Logic. — 1992. — № 57. —P. 566–587.

Материал поступил в редакцию 05.09.03.