

Корректные логические программы для правдоподобных рассуждений

Настоящая статья является дополнением к статье [1], в которой было предложено использовать логику стратифицированных логических программ для формализации правдоподобных рассуждений. Сформулируем и докажем теоремы корректности для логических программ, соответствующих различным стратегиям правдоподобных рассуждений.

ВВЕДЕНИЕ

Мы пользуемся формализмом [2] стратифицированных логических программ. Этот подход имеет несколько преимуществ:

- Каждая программа имеет каноническую модель, являющуюся итерированной неподвижной точкой соответствующего оператора;
- декларативные знания легко записываются в этом языке;
- существующие PROLOG-машины могут быть встроены как дедуктивная компонента;
- синтаксис языка известен как специалистам по искусственному интеллекту, так и экспертам-прикладникам.

За строгими определениями стратифицированной логической программы и описанием ее канонической модели отошлем читателя к работам [1, 2].

1. СТРАТЕГИИ ПРАВДОПОДОБНЫХ РАССУЖДЕНИЙ

В случае правдоподобных рассуждений типа ДСМ исходная сигнатура σ содержит следующие предикатные и индивидуальные константы:

тернарная предикатная константа $V = X_1 \wedge X_2$, представляющая бинарную операцию локального сходства;

индивидуальная константа \perp выделяет тривиальное сходство;

бинарные предикатные константы $J_{\langle +1,0 \rangle}(X \Rightarrow_1 W)$, $J_{\langle -1,0 \rangle}(X \Rightarrow_1 W)$ и $J_{\langle \tau,0 \rangle}(X \Rightarrow_1 W)$ описывают, какие свойства объект X проявляет, какие — нет, а проявление каких — неизвестно.

Опишем простую стратегию для одного свойства $W = \{p\}$.

Сначала находятся глобальные сходства положительных и отрицательных примеров, т. е. на объектах V устанавливается истинность или ложность предикатов $M_a^+(V, \{p\})$ положительного и $M_a^-(V, \{p\})$ отрицательного сходства. Выпишем основной предикат первого рода $M_a^+(V, \{p\})$:

$$V \neq \perp \& \exists k > 1 \exists x_1 \dots \exists x_k \exists v_1 \dots \exists v_{k-1} [J_+(x_1 \Rightarrow_1 \{p\}) \& \dots \& J_+(x_k \Rightarrow_1 \{p\}) \& v_1 = x_1 \wedge x_2 \& v_2 = v_1 \wedge x_3 \& \dots \& v_{k-1} = v_{k-2} \wedge x_k \& v_{k-1} = V].$$

Затем применяются правила правдоподобного вывода первого рода. Они соответствуют импликациям:

$$M_a^+(V, \{p\}) \& M_a^-(V, \{p\}) \supset J_{\langle 0,1 \rangle}(V \Rightarrow_2 \{p\});$$

$$M_a^+(V, \{p\}) \& \neg M_a^-(V, \{p\}) \supset J_{\langle +1,1 \rangle}(V \Rightarrow_2 \{p\});$$

$$\neg M_a^+(V, \{p\}) \& M_a^-(V, \{p\}) \supset J_{\langle -1,1 \rangle}(V \Rightarrow_2 \{p\}).$$

Потом на объектах X устанавливается истинность или ложность предикатов $\Pi_a^+(X, \{p\})$, $\Pi_a^-(X, \{p\})$ второго рода:

$$\exists v [J_{\langle +1,1 \rangle}(V \Rightarrow_2 \{p\}) \& v = X \wedge v];$$

$$\exists v [J_{\langle -1,1 \rangle}(V \Rightarrow_2 \{p\}) \& v = X \wedge v].$$

Наконец, применяются правила правдоподобного вывода второго рода. Они соответствуют эквивалентностям:

$$J_{\langle \tau,0 \rangle}(X \Rightarrow_1 \{p\}) \& \Pi_a^+(X, \{p\}) \& \Pi_a^-(X, \{p\}) \equiv \\ \equiv J_{\langle 0,1 \rangle}(X \Rightarrow_1 \{p\});$$

$$J_{\langle \tau,0 \rangle}(X \Rightarrow_1 \{p\}) \& \Pi_a^+(X, \{p\}) \& \neg \Pi_a^-(X, \{p\}) \equiv \\ \equiv J_{\langle +1,1 \rangle}(X \Rightarrow_1 \{p\});$$

$$J_{\langle \tau,0 \rangle}(X \Rightarrow_1 \{p\}) \& \neg \Pi_a^+(X, \{p\}) \& \Pi_a^-(X, \{p\}) \equiv \\ \equiv J_{\langle -1,1 \rangle}(X \Rightarrow_1 \{p\});$$

$$J_{\langle \tau,0 \rangle}(X \Rightarrow_1 \{p\}) \& \neg \Pi_a^+(X, \{p\}) \& \neg \Pi_a^-(X, \{p\}) \equiv \\ \equiv J_{\langle \tau,1 \rangle}(X \Rightarrow_1 \{p\}).$$

Несимметричная стратегия отличается предикатами первого и второго рода.

Выпишем основной предикат первого рода $F_g^+(V, \mathfrak{X}, \{p\})$:

$$V \neq \perp \& \exists k > 1 \exists x_1 \dots \exists x_k \exists v_1 \dots \exists v_{k-1} [J_+(x_1 \Rightarrow_1 \{p\})$$

$$\& \dots \& J_+(x_k \Rightarrow_1 \{p\}) \& v_1 = x_1 \wedge x_2 \& v_2 = v_1 \wedge x_3$$

$$\& \dots \& v_{k-1} = v_{k-2} \wedge x_k \& v_{k-1} = V]$$

$$\& \forall v [v \in \mathfrak{X} \supset V = v \wedge V \& V \neq v]$$

$$\& \forall v [v \in \mathfrak{X} \supset \exists s > 1 \exists z_1 \dots \exists z_s \exists w_1 \dots \exists w_{s-1} [J_-(z_1 \Rightarrow_1 \{p\})$$

$$\& \dots \& J_-(z_s \Rightarrow_1 \{p\}) \& w_1 = z_1 \wedge z_2 \& w_2 = w_1 \wedge z_3$$

$$\& \dots \& w_{s-1} = w_{s-2} \wedge z_s \& w_{s-1} = v] \& \forall v [V = v \wedge V \& V \neq v \&$$

$$\exists s > 1 \exists z_1 \dots \exists z_s \exists w_1 \dots \exists w_{s-1} [J_-(z_1 \Rightarrow_1 \{p\})$$

$$\& \dots \& J_-(z_s \Rightarrow_1 \{p\}) \& w_1 = z_1 \wedge z_2 \& w_2 = w_1 \wedge z_3$$

$$\& \dots \& w_{s-1} = w_{s-2} \wedge z_s \& w_{s-1} = v] \supset v \in \mathfrak{X}]$$

$$\& \exists r > 0 \exists V_1 \dots \exists V_r [V_1 \in \mathfrak{X} \& \dots \& V_r \in \mathfrak{X} \&$$

$$\forall v [v \in \mathfrak{X} \supset V_1 = v \vee \dots \vee V_r = v]].$$

Легко показать, что выписанный основной предикат сходства эквивалентен "классическому" [4, с. 38–40], если из последнего удалить требование минимальности препятствий:

$$\forall v[v \in \mathfrak{X} \supset \neg \exists w[w = w \wedge v \& w \neq v \& w \in \mathfrak{X}]].$$

Нам кажется такое требование излишним, потому что его проверка требует дополнительных вычислений, а при применении правил второго рода оба предиката доставляют одинаковые результаты. Если такое требование необходимо, то в приводимую ниже программу после пятого правила нужно добавить правила:

$$H_+(Z, V, W) \leftarrow A_+(Z, V, W), A_+(Z_1, V, W),$$

$$Z_1 = Z_1 \wedge Z, Z_1 \neq Z;$$

$$G_+(Z, V, W) \leftarrow A_+(Z, V, W), \neg H_+(Z, V, W).$$

Для доказательства эквивалентности нужно лишь вынести кванторы наружу и воспользоваться тем фактом, что конечное объединение конечных множеств конечно.

Условие $\exists r > 0 \exists V_1 \dots \exists V_r [V_1 \in \mathfrak{X} \& \dots \& V_r \in \mathfrak{X} \& \forall v[v \in \mathfrak{X} \supset V_1 = v \vee \dots \vee V_r = v]]$ утверждает только, что $\mathfrak{X} = \{V_1, \dots, V_r\}$.

Предикат $\Pi_g^+(X, \{p\})$ второго рода выражается следующим образом:

$$\exists v[\exists o[J_{<+1,1>}(T_2(v, o, \{p\})) \& v = X \wedge v]$$

$$\& \forall o[J_{<+1,1>}((T_2(v, o, \{p\})) \supset o \neq X \wedge o)];$$

Правила правдоподобного вывода второго рода соответствуют эквивалентностям:

$$J_{<+,0>}(X \Rightarrow_1 \{p\}) \& \Pi_g^+(X, \{p\}) \equiv J_{<+1,1>}(X \Rightarrow_1 \{p\});$$

$$J_{<+,0>}(X \Rightarrow_1 \{p\}) \& \neg \Pi_g^+(X, \{p\}) \equiv J_{<-1,1>}(X \Rightarrow_1 \{p\}).$$

2. ЛОГИЧЕСКИЕ ПРОГРАММЫ

Для представления простой (симметричной без проверки существования контрпримеров) стратегии добавим следующие предикатные переменные:

бинарные предикатные переменные $I_+(V, W)$ и $I_-(V, W)$ служат для нахождения всех пересечений;

бинарные предикатные переменные $J_{<+1,1>}(V \Rightarrow_2 W)$, $J_{<-1,1>}(V \Rightarrow_2 W)$ и $J_{<0,1>}(V \Rightarrow_2 W)$ представляют гипотезы о причинах проявления свойств, причинах отсутствия свойств и противоречивые гипотезы;

$E_{<+1,1>}(X \Rightarrow_1 W)$ и $E_{<-1,1>}(X \Rightarrow_1 W)$ — бинарные предикатные переменные, соответствующие проверке критерия достаточного основания правдоподобного вывода;

$J_{<+1,1>}(X \Rightarrow_1 W)$, $J_{<-1,1>}(X \Rightarrow_1 W)$, $J_{<0,1>}(X \Rightarrow_1 W)$ и $J_{<+,1>}(X \Rightarrow_1 W)$ — бинарные реляционные переменные, описывающие положительное и отрицательное предсказание, противоречивый прогноз и отказ от прогноза.

Простая стратегия правдоподобных рассуждений типа ДСМ с одним свойством $W = \{p\}$ может быть записана как логическая программа:

$$I_+(V, W) \leftarrow J_{<+1,0>}(X_1 \Rightarrow_1 W),$$

$$J_{<+1,0>}(X_2 \Rightarrow_1 W), V = X_1 \wedge X_2, V \neq \perp;$$

$$I_+(V, W) \leftarrow J_{<+1,0>}(X \Rightarrow_1 W),$$

$$I_+(V_1, W), V = X \wedge V_1, V \neq \perp;$$

$$I_-(V, W) \leftarrow J_{<-1,0>}(X_1 \Rightarrow_1 W),$$

$$J_{<-1,0>}(X_2 \Rightarrow_1 W), V = X_1 \wedge X_2, V \neq \perp;$$

$$I_-(V, W) \leftarrow J_{<-1,0>}(X \Rightarrow_1 W),$$

$$I_-(V_1, W), V = X \wedge V_1, V \neq \perp;$$

$$J_{<0,1>}(V \Rightarrow_2 W) \leftarrow I_+(V, W), I_-(V, W);$$

$$J_{<+1,1>}(V \Rightarrow_2 W) \leftarrow I_+(V, W), \neg J_{<0,1>}(V \Rightarrow_2 W);$$

$$J_{<-1,1>}(V \Rightarrow_2 W) \leftarrow I_-(V, W), \neg J_{<0,1>}(V \Rightarrow_2 W);$$

$$J_{<0,1>}(X \Rightarrow_1 W) \leftarrow J_{<+,0>}(X \Rightarrow_1 W),$$

$$J_{<+1,1>}(V_1 \Rightarrow_2 W), J_{<-1,1>}(V_2 \Rightarrow_2 W),$$

$$V_1 = X \wedge V_1, V_2 = X \wedge V_2;$$

$$E_{<+1,1>}(X \Rightarrow_1 W) \leftarrow J_{<+1,0>}(X \Rightarrow_1 W),$$

$$J_{<+1,1>}(V \Rightarrow_2 W), V = X \wedge V;$$

$$E_{<-1,1>}(X \Rightarrow_1 W) \leftarrow J_{<-1,0>}(X \Rightarrow_1 W),$$

$$J_{<-1,1>}(V \Rightarrow_2 W), V = X \wedge V;$$

$$J_{<+1,1>}(X \Rightarrow_1 W) \leftarrow J_{<+,0>}(X \Rightarrow_1 W),$$

$$J_{<+1,1>}(V \Rightarrow_2 W), V = X \wedge V, \neg J_{<0,1>}(X \Rightarrow_1 W);$$

$$J_{<-1,1>}(X \Rightarrow_1 W) \leftarrow J_{<-,0>}(X \Rightarrow_1 W),$$

$$J_{<-1,1>}(V \Rightarrow_2 W), V = X \wedge V, \neg J_{<0,1>}(X \Rightarrow_1 W);$$

$$J_{<+,1>}(X \Rightarrow_1 W) \leftarrow J_{<+,0>}(X \Rightarrow_1 W),$$

$$\neg J_{<+1,1>}(X \Rightarrow_1 W), \neg J_{<-1,1>}(X \Rightarrow_1 W),$$

$$\neg J_{<0,1>}(X \Rightarrow_1 W).$$

Описанную программу полезно сравнить с классическим описанием простой стратегии, занимающим три страницы [3, с. 40–42]! Наши обозначения кажутся громоздкими, но мы используем их для удобства сравнения нашего изложения с классическим. Так как $W = \{p\}$, то все встречающиеся в приведенной выше программе предикатные переменные и константы являются на самом деле унарными.

Для описания несимметричной стратегии правдоподобных рассуждений стратифицированной логической программой введем следующие реляционные переменные:

бинарная реляционная переменная $A_+(Z, V, W)$ служит для вычисления всех препятствий гипотезы $V \Rightarrow_2 W$;

переменная $B_+(X, V, W)$ — для определения заблокированных примеров противоположного знака;

$C_+(V, W)$ — для наличия контрпримеров;

$D_+(X, V, W)$ и $F_+(X, W)$ — переменные, служащие для проверки наличия незаблокированной причины.

Остальные переменные и константы обозначают то же, что и для простой стратегии.

Несимметричная стратегия запишется следующим образом:

$$I_+(V, W) \leftarrow J_{<+1,0>}(X_1 \Rightarrow_1 W),$$

$$J_{<+1,0>}(X_2 \Rightarrow_1 W), V = X_1 \wedge X_2, V \neq \perp;$$

$$I_+(V, W) \leftarrow J_{<+1,0>}(X \Rightarrow_1 W),$$

$$I_+(V, W), V = X \wedge V_1, V \neq \perp;$$

$$A_+(Z, V, W) \leftarrow I_+(V, W), J_{(-1,0)}(X_1 \Rightarrow_1 W), \\ V = X_1 \wedge V, J_{(-1,0)}(X_2 \Rightarrow_1 W), V = X_2 \wedge V, \\ Z = X_1 \wedge X_2, Z \neq V;$$

$$A_+(Z, V, W) \leftarrow A_+(Z_1, V, W), J_{(-1,0)}(X \Rightarrow_1 W), \\ V = X \wedge V, Z = X \wedge Z_1, Z \neq V; \\ B_+(X, V, W) \leftarrow A_+(Z, V, W), \\ J_{(-1,0)}(X \Rightarrow_1 W), Z = X \wedge Z;$$

$$C_+(V, W) \leftarrow I_+(V, W), J_{(-1,0)}(X \Rightarrow_1 W), \\ V = X \wedge V, \neg B_+(X, V, W);$$

$$J_{(+1,1)}(V \Rightarrow_2 W) \leftarrow I_+(V, W), \neg C_+(V, W);$$

$$D_+(X, V, W) \leftarrow J_{(+1,1)}(V \Rightarrow_2 W),$$

$$A_+(Z, V, W), Z = X \wedge Z;$$

$$F_+(X, W) \leftarrow J_{(+1,1)}(V \Rightarrow_2 W),$$

$$V = X \wedge V, \neg D_+(X, V, W);$$

$$E_{(+1,1)}(X \Rightarrow_1 W) \leftarrow J_{(+1,0)}(X \Rightarrow_1 W), F_+(X, W);$$

$$E_{(-1,1)}(X \Rightarrow_1 W) \leftarrow J_{(-1,0)}(X \Rightarrow_1 W), \neg F_+(X, W);$$

$$J_{(+1,1)}(X \Rightarrow_1 W) \leftarrow J_{(\tau,0)}(X \Rightarrow_1 W), F_+(X, W);$$

$$J_{(-1,1)}(X \Rightarrow_1 W) \leftarrow J_{(\tau,0)}(X \Rightarrow_1 W), \neg F_+(X, W).$$

Мы отказались от введения тернарного оператора $T(X, X, W)$, где X — множество всех минимальных Z с $A_+(Z, V, W)$, что можно сделать путем незначительного усложнения программы. Такой тернарный предикат возник при описании (симметричной) обобщенной стратегии правдоподобных рассуждений.

3. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Пусть задана конечная реляционная структура \mathfrak{A} для исходной сигнатуры $\sigma = \{\cdot \wedge \cdot, \perp, J_{(+1,0)}(\cdot \Rightarrow_1 \{p\}), J_{(-1,0)}(\cdot \Rightarrow_1 \{p\}), J_{(\tau,0)}(\cdot \Rightarrow_1 \{p\})\}$, причем предикат $\cdot = \cdot \wedge \cdot$ удовлетворяет аксиомам нижней полурешетки с наименьшим элементом \perp :

$$\forall x \forall y \exists z [x \wedge y = z];$$

$$\forall x \forall y \forall u \forall v [x \wedge y = u \wedge x \wedge y = v \supset u = v];$$

$$\forall x [x \wedge x = x];$$

$$\forall x \forall y \forall z [x \wedge y = z \supset y \wedge x = z];$$

$$\forall x \forall y \forall z \forall u \forall v \forall w [x \wedge y = u \wedge u \wedge z = v \wedge$$

$$y \wedge z = w \supset x \wedge w = v];$$

$$\forall x [\perp = \perp \wedge x].$$

Построим каноническую модель \mathfrak{M} программы для простой стратегии.

Теорема 1. В модели \mathfrak{M} предикаты $J_{(+1,1)}(X \Rightarrow_1 \{p\})$ и $J_{(-1,1)}(X \Rightarrow_1 \{p\})$ истинны на тех и только тех объектах X , для которых они истинны согласно простой (симметричной) стратегии правдоподобных рассуждений.

Доказательство. Рассмотрим наименьшую неподвижную точку Θ_1^∞ первой страты нашей логической программы для сигнатуры $\sigma_1 = \sigma \cup \{I_+(\cdot, \{p\}), I_-(\cdot, \{p\}), J_{(0,1)}(\cdot \Rightarrow_2 \{p\})\}$. Докажем, что в ней предикаты

$I_+(V, \{p\}), I_-(V, \{p\}), J_{(0,1)}(X \Rightarrow_2 \{p\})$ истинны тогда и только тогда, когда на этих же самых элементах простая стратегия устанавливает истинность предикатов $M_a^+(V, \{p\}), M_a^-(V, \{p\}), J_{(0,1)}(X \Rightarrow_2 \{p\})$.

(\Leftarrow). Рассмотрим случай $M_a^+(V, \{p\})$. Обозначим через $\Phi_k(V)$ формулу $V \neq \perp \wedge \exists x_1 \dots \exists x_k \exists v_1 \dots \exists v_{k-1} [J_+(x_1 \Rightarrow_1 \{p\}) \wedge \dots \wedge J_+(x_k \Rightarrow_1 \{p\}) \wedge v_1 = x_1 \wedge x_2 \wedge v_2 = v_1 \wedge x_3 \wedge \dots \wedge v_{k-1} = v_{k-2} \wedge x_k \wedge v_{k-1} = V]$.

Докажем индукций по k , что если формула $\Phi_k(V)$ истинна, то $I_+(V, \{p\}) \in \Theta_1^{k-1}$. Формула $\Phi_2(V)$, равная $V \neq \perp \wedge \exists x_1 \exists x_2 \exists v_1 [J_+(x_1 \Rightarrow_1 \{p\}) \wedge J_+(x_2 \Rightarrow_1 \{p\}) \wedge v_1 = x_1 \wedge x_2 \wedge v_1 = V]$, эквивалентна формуле $\exists x_1 \exists x_2 [J_+(x_1 \Rightarrow_1 \{p\}) \wedge J_+(x_2 \Rightarrow_1 \{p\}) \wedge V = x_1 \wedge x_2 \wedge V \neq \perp]$. Поэтому на элементах V , удовлетворяющих $\Phi_2(V)$, $I_+(V, \{p\})$ будет принадлежать Θ_1^1 по первому правилу нашей программы.

Для $k > 2$ формула $\Phi_k(V)$ эквивалентна формуле $V \neq \perp \wedge \exists v \exists x_k \exists v_{k-1} [J_+(x_k \Rightarrow_1 \{p\}) \wedge \Phi_{k-1}(v) \wedge v_{k-1} = v \wedge x_k \wedge v_{k-1} = V]$. Если формула $\Phi_k(V)$ истинна, то найдется элемент V_1 , на котором истинна $\Phi_{k-1}(V_1)$, и $\exists x_k \exists v_{k-1} [J_+(x_k \Rightarrow_1 \{p\}) \wedge v_{k-1} = V_1 \wedge x_k \wedge v_{k-1} = V]$. Последняя формула эквивалентна $\exists x_k [J_+(x_k \Rightarrow_1 \{p\}) \wedge V = V_1 \wedge x_k]$. По предположению индукции, $I_+(V_1, \{p\}) \in \Theta_1^{k-2}$. Тогда, по второму правилу нашей программы, $I_+(V, \{p\}) \in \Theta_1^{k-1}$.

Случай $M_a^-(V, \{p\})$ и $J_{(0,1)}(X \Rightarrow_2 \{p\})$ рассматриваются аналогично.

(\Leftarrow). Снова рассмотрим случай $M_a^+(V, \{p\})$. Индукцией по k покажем, что если $I_+(V, \{p\}) \in \Theta_1^k$, то $\Phi_{k+1}(V)$. Если $I_+(V, \{p\}) \in \Theta_1^1 = \Theta_1(\emptyset)$, то возможно применение только первого правила. Поэтому $\exists x_1 \exists x_2 [J_+(x_1 \Rightarrow_1 \{p\}) \wedge J_+(x_2 \Rightarrow_1 \{p\}) \wedge V = x_1 \wedge x_2 \wedge V \neq \perp]$, что влечет $\Phi_2(V)$. Если же $I_+(V, \{p\}) \in \Theta_1^{k+1} = \Theta_1(\Theta_1^k)$, то применимо лишь второе правило. Т. е. найдется такой элемент V_1 , что $I_+(V_1, \{p\}) \in \Theta_1^k$ и $V \neq \perp \wedge \exists x_k [J_+(x_k \Rightarrow_1 \{p\}) \wedge V = V_1 \wedge x_k]$. По предположению индукции, $\Phi_{k+1}(V_1)$, поэтому $V \neq \perp \wedge \exists x_k [J_+(x_k \Rightarrow_1 \{p\}) \wedge V = V_1 \wedge x_k]$ становится эквивалентной $\Phi_{k+2}(V)$. Очевидно, что для любого k $\Phi_k(V)$ влечет $M_a^+(V, \{p\})$.

Случай $M_a^-(V, \{p\})$ и $J_{(0,1)}(X \Rightarrow_2 \{p\})$ рассматриваются аналогично.

Теперь доказательство теоремы переходит к правилам следующих страт. Для них доказательство не представляет никаких трудностей.

Рассмотрим каноническую модель \mathfrak{H} программы для несимметричной стратегии.

Теорема 2. В модели \mathfrak{H} предикаты $J_{(+1,1)}(X \Rightarrow_1 \{p\})$ и $J_{(-1,1)}(X \Rightarrow_1 \{p\})$ истинны на тех и только тех объектах X , для которых они истинны согласно несимметричной стратегии правдоподобных рассуждений.

Доказательство. Доказательство аналогично доказательству теоремы корректности программы для простой стратегии, так что мы ограничимся лишь некоторыми указаниями.

Для первых двух правил нашей программы аналогично рассуждениям из теоремы предыдущего параграфа устанавливается, что в неподвижной точке Θ_1^∞ для правил первой страты предикат