случае, когда в $\mathfrak{A}$ истинно универсальное замыкание формулы A.

Доказательство. Такое же, как для классической логики первого порядка.

3.26. Предложение. Пусть Γ — множество формул сигнатуры σ, A — формула сигнатуры σ. Тогда $\Gamma \vdash A$ в том и только в том случае, когда из множества формул Γ в исчислении **TGQ** выводимо универсальное замыкание формулы A.

Доказательство. Такое же, как для классической логики первого порядка.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Mostowski A. On a generalization of quantifiers // Fundamenta mathematicae, 44, 1957.— P. 12–36.
2. Model-theoretic logics / Ed. J. Barwise, S. Feferman.— N. Y.: Springer Verlag, 1985.
3. Гаек П., Гавранек Т. Автоматическое образование гипотез.— М.: Наука, 1984.— 280 с.
4. Финн В. К. Правдоподобные выводы и правдоподобные рассуждения // Итоги науки и техники. Сер. Теория вероятностей. Матем. статистика. Теоретическая кибернетика. Т. 28.— М.: ВИНИТИ, 1988.— С. 3–84.
5. Финн В. К. Правдоподобные рассуждения в интеллектуальных системах типа ДСМ // Итоги науки и техники. Сер. Информатика. Т. 15.— М.: ВИНИТИ, 1991.— 54–101.
6. Финн В. К. Об интеллектуальных системах автоматизированной поддержки научных исследований // НТИ. Сер. 2.— 1996.— № 5–6.— С. 1–2.
7. Григорьев П. А. Об одном методе автоматического порождения гипотез, схожем с ДСМ-методом: применение статистических соображений // НТИ. Сер. 2.— 1996.— № 5–6.— С. 52–55.
8. Григорьев П. А. Sword-системы или ДСМ-системы для цепочек, использующие статистические соображения // НТИ. Сер. 2.— 1996.— № 5–6.— С. 45–51.
9. Григорьев П. А. О перспективах компьютерного прогнозирования рецидива аденомы гипофиза // НТИ. Сер. 2.— 1999.— № 1–2.— С. 83–88.
10. Benthem van J., Alechina N. Modal quantification over structured domains // Advances in Intensional logic / Ed. de M. Rijke.— Dordrecht: Kluwer, 1993.
11. Alechina N., Lambalgen van M. Correspondence and completeness for generalized quantifiers // Bulletin of the Interest Group in Pure and Applied Logic.— 1995.— № 3.— P. 167–190.
12. Alechina N. Modal quantifiers / ILLC Dissertation series 1995–20.— Amsterdam.— 126 p.

Материал поступил в редакцию 14.07.00.

УДК 004.81:510.64; 004.82:16

Посвящается Лене Зильберквит

Д. В. Виноградов

Формализация правдоподобных рассуждений в логике предикатов

Цель настоящей работы — исследование выразимости схем абдукции, индуктивного обобщения и аналогии в логике предикатов первого порядка. Мы наглядно представим эти схемы на примере нахождения достаточных условий на выпуклый многоугольник, чтобы вокруг него можно было описать окружность.

ВВЕДЕНИЕ

У современного понятия правдоподобных рассуждений [2], основанных на сходстве, существовало несколько предшественников. Это индуктивная логика Ф. Бэкона и Д. С. Милля [3], в честь которого современный подход и получил название ДСМ-метода. Это абдукция Ч. С. Пирса. Наконец, сам термин *правдоподобные рассуждения* ввел, по-видимому, Д. Пойа [4]. Он же выделил дополнительные схемы: специализация, обобщение, аналогия.

Однако все эти подходы к правдоподобным рассуждениям свелись к некоторой форме теории субъективных вероятностей. Современный подход основан на вычислимой бинарной операции сходства. Степень доверия к результатам выражается через конструктивно приписываемое истинностное значение.

План изложения следующий. В § 1 мы рассмотрим пример нахождения таких достаточных условий на выпуклый многоугольник, чтобы вокруг него можно было описать окружность. Этот пример из школьной математики идейно близок книге [4] Д. Пойа. Он достаточно нагляден, чтобы основные идеи правдоподобных рассуждений были выпукло представлены. В § 2 мы формально опишем язык, модели и аксиомы для операции сходства. Затем мы сформулируем основные результаты. В § 3 описываются открывающиеся возможности формализации правдоподобных рассуждений в многозначной логике предикатов первого порядка.

§ 1. ПРИМЕР

Рассмотрим задачу нахождения условий, когда вокруг выпуклого многоугольника можно описать окружность.

Мы выбираем некоторое множество (классов) многоугольников (правильный треугольник, равнобедренный и прямоугольный треугольники, квадрат, прямоугольник, ромб, параллелограмм, рав-

---

* Работа частично финансировалась по гранту РФФИ (Проект 99-01-01257).

нобедренную и прямоугольную трапеции). Указываем, вокруг каких многоугольников можно описать окружность. Многоугольники, обладающие этим свойством, будем называть положительными примерами, остальные — отрицательными. Теперь надо выбрать признаки, принимаемые во внимание. Они включают количество углов, наличие равных сторон, параллельных сторон, прямых углов, равенство смежных углов. После этого мы заменяем каждую фигуру множеством признаков, которыми она обладает. При приписывании признаков мы считаем, что фигура является соответствующим многоугольником самого общего вида. Получившиеся данные представлены в таблице. После этого о геометрическом смысле объектов нужно забыть.

№	Многоугольники	?	a	b	c	d	e	f	g	h	i
0	Правильный треугольник	+	+	−	−	+	+	+	−	+	+
1	Равнобедренный треугольник	+	+	−	−	+	+	−	−	+	+
2	Прямоугольный треугольник	+	+	−	+	−	+	−	−	+	−
3	Квадрат	+	−	+	+	+	+	+	+	+	+
4	Прямоугольник	+	−	+	+	+	+	−	+	+	+
5	Ромб	−	−	+	−	+	+	+	+	+	−
6	Параллелограмм	−	−	+	−	+	+	−	+	+	−
7	Равнобедренная трапеция	+	−	+	−	+	−	−	+	−	+
8	Прямоугольная трапеция	−	−	+	+	−	−	−	+	−	+
9	Прямоугольная трапеция с малым основанием, равным боковой стороне	−	−	+	+	+	−	−	+	−	+
10	Прямоугольная трапеция с большим основанием, равным боковой стороне	−	−	+	+	+	−	−	+	−	+

?	можно описать окружность
a	3 угла
b	4 угла
c	есть прямой угол
d	некоторая пара сторон равна
e	все пары несмежных сторон равны
f	все стороны равны
g	некоторая пара сторон параллельна
h	все пары несмежных сторон параллельны
i	некоторая пара смежных углов равна

Индуктивное обобщение. Общая часть описания примеров служит причиной их общих свойств. Мы приведем лишь некоторые сходства положительных примеров.

Сходство правильного треугольника и квадрата (их общие признаки) дают гипотезу о том, что *вокруг любого правильного многоугольника можно описать окружность:*

$$0 \cap 3 = \{d, e, f, h, i\}.$$

Сходство правильного и прямоугольного треугольников порождает гипотезу, о том, что *вокруг любого треугольника можно описать окружность:*

$$0 \cap 2 = 0 \cap 1 \cap 2 = \{a, e, h\}.$$

Сходство же квадрата, прямоугольника и равнобедренной трапеции доставляет гипотезу, что *вокруг четырехугольника, у которого две стороны равны, две стороны параллельны и два смежных угла равны, можно описать окружность:*

$$3 \cap 4 \cap 7 = \{b, d, g, i\}.$$

Однако у этой гипотезы есть контрпримеры: прямоугольные трапеции, у которой боковая сторона равна малому или большому основанию!

Отрицательные примеры 9 и 10, содержат в себе сходство $3 \cap 4 \cap 7$.

Это обстоятельство указывает лишь на правдоподобный характер получающихся гипотез. Они могут оказаться опровергнутыми после получения дополнительной информации.

При добавлении примера 9 или 10 гипотеза о причине будет отвергнута.

Аналогия. Мы переносим свойства на новый объект по аналогии с известными объектами, если сходство известных объектов вкладывается в новый пример.

Если бы свойство возможности описать окружность вокруг равнобедренного треугольника было бы неизвестно, то, так как $0 \cap 2 = \{a, e, h\} \subseteq 1$, мы могли бы правдоподобно предположить, что оно верно для него по аналогии со случаями правильного и прямоугольного треугольников.

Абдукция. Мы пытаемся на основании порожденных гипотез объяснить исходные примеры.

Каждый положительный пример входит хотя бы в одно сходство. Без 9-го и 10-го примеров никакой отрицательный пример ни в какое сходство не входит, после их добавления отрицательные примеры 8, 9 и 10 объясняются общим сходством $8 \cap 9 \cap 10 = \{b, c, d, g, i\}$. Отрицательные примеры 5 и 6 не могут быть объяснены никаким сходством, не имеющим контрпримеров, так как сами объекты 5 и 6 вкладываются в пример 3.

§ 2. ОПРЕДЕЛЕНИЯ И РЕЗУЛЬТАТЫ

Исследуем вопрос об определимости в логике первого порядка основных фигур правдоподобных рассуждений. Хотя соответствующие результаты верны для общего случая, здесь мы приведем формулировки лишь для единственного исследуемого свойства.

Опишем сигнатуру языка. Как ясно из примера в § 1 все наши схемы правдоподобных рассуждений основаны на бинарной операции сходства. Для ее представления в языке будем использовать бинарную функциональную константу $\wedge$. Для выделения объектов, используемых для индукции, аналогии и абдукции, задействуем унарную предикатную константу $J_+(x)$. Тривиальное сходство представим индивидной константой $\perp$. Введем также индивидную константу $\mathbf{q}$, обозначающую гипотетическое сходство или объект, для которого необходимо провести рассуждение по аналогии.

Аксиомы, описывающие свойства операции сходства, — это известные аксиомы нижней полурешетки с наименьшим элементом $\perp$:

$$\forall x[x = x \wedge x];$$

$$\forall x \forall y[x \wedge y = y \wedge x];$$

$$\forall x \forall y \forall z[(x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z)];$$

$$\forall x[\perp = x \wedge \perp].$$

Замечание 1. Известно (и легко проверить), что формула $x \wedge z = z$ определяет (нестрогий) частичный порядок $z \leq x$.

ЗАДАЧА АБДУКЦИИ. Для всякого ли объекта x найдется нетривиальное сходство некоторых объектов $z_1, \ldots, z_n$ $(n > 1)$, которое содержится в x?

$$\forall x\{J_+(x) \to \exists n > 1 \exists z_1 \ldots \exists z_n \exists v_1 \ldots \exists v_{n-1}[J_+(z_1)\times$$

$$\times\& \ldots \& J_+(z_n)\&v_1 = z_1 \wedge z_2 \& v_2 = v_1 \wedge z_3 \& \ldots \& v_{n-1} =$$

$$= v_{n-2} \wedge z_n \& v_{n-1} \neq \perp \& v_{n-1} \leq x]\}.$$

Предложение 1. *Задача абдукции задается формулой первого порядка:*

$$\forall x\{J_+(x) \to \exists z[J_+(z)\&z \neq x \& \exists v(v = x \wedge z \& v \neq \perp]\}.$$

Доказательство. Возьмем в качестве z некоторый объект z_j, отличный от x. После этого доказательство этой формулы в эквациональной теории нижней полурешетки с $\perp$ совсем не сложно.

Замечание 2. На этом факте основано то замечательное обстоятельство, что при ложности аксиомы полноты правдоподобного вывода достаточно к каждому необъясненному объекту добавить единственный объект, имеющий нетривиальное сходство с ним.

ЗАДАЧА ИНДУКЦИИ. Является ли $\mathbf{q}$ сходством некоторых объектов $z_1, \ldots, z_n$ $(n > 1)$?

$$\exists n > 1 \exists z_1 \ldots \exists z_n \exists v_1 \ldots \exists v_{n-1}[J_+(z_1)\& \ldots$$

$$\ldots \& J_+(z_n)\&v_1 = z_1 \wedge z_2 \& v_2 = v_1 \wedge z_3 \& \ldots \& v_{n-1} =$$

$$= v_{n-2} \wedge z_n \& v_{n-1} = \mathbf{q}].$$

Теорема 1. *На конечных моделях задача индукции задается формулой первого порядка:*

$$\neg\exists z[\mathbf{q} \leq z \& z \neq \mathbf{q} \& \forall x(J_+(x)\&\mathbf{q} \leq x \to z \leq x)].$$

Доказательство. Пусть $\neg\exists z[\mathbf{q} \leq z\&z \neq \mathbf{q}\&\forall x(J_+(x)\&\mathbf{q} \leq x \to z \leq x)]$ и $\mathbf{q}$ является сходством v_{n-1} некоторых объектов $z_1, \ldots, z_n$ $(n > 1)$. Легко проверяется, что тогда $\mathbf{q} \leq z_j$ для всех j. По определению z получим $z \leq z_j$ для всех j. Но теперь $z \leq \mathbf{q} = z_1 \wedge z_2 \wedge \ldots \wedge z_n$, что невозможно. Наоборот, если $\mathbf{q}$ не является сходством какого-либо множества объектов $z_1, \ldots, z_n$ $(n > 1)$, то возьмем все такие объекты $y_1, \ldots, y_k$, что $J_+(y_j)\&\mathbf{q} \leq y_j$, и возьмем в качестве z их сходство. Легко проверить, что $\mathbf{q} \leq z$ и $z \neq \mathbf{q}$. Всякий x, который удовлетворяет условию $J_+(x)\&\mathbf{q} \leq x$, является одним из $y_1, \ldots, y_k$. Поэтому каждый такой x удовлетворяет и условию $z = y_1 \wedge y_2 \wedge \ldots \wedge y_k \leq x$.

Обозначим формулы первого порядка

$$\exists z_1 \ldots \exists z_n \exists v_1 \ldots \exists v_{n-1}[J_+(z_1)\& \ldots \& J_+(z_n)\&v_1 =$$

$$= z_1 \wedge z_2 \& v_2 = v_1 \wedge z_3 \& \ldots \& v_{n-1} = v_{n-2} \wedge z_n \& y = v_{n-1}]$$

через $\Phi_n(y)$, а формулу слабой логики второго порядка из определения задачи индукции через — $\Phi(y)$.

Теорема 2. *Не существует такой формулы ϑ первого порядка, что для произвольной модели M теории сходства $M \models \exists x(\neg\Phi(x)\&x \neq \perp]$ тогда и только тогда, когда $M \models \vartheta$.*

Доказательство. Рассмотрим модель $\mathbf{C} = \langle \mathbf{P}_{\mathrm{cofin}}\omega \cup \{\emptyset\}, J_+(\cdot), \cap, \emptyset\rangle$, где $\mathbf{P}_{\mathrm{cofin}}\omega$ — множество подмножеств ω, дополнения которых конечны, и $J_+(x) \leftrightarrow \exists k \in \omega(x = \omega\backslash\{k\})$. Легко проверить, что $\mathbf{C}$ — модель теории сходства и $\mathbf{C} \models \neg\exists x(\neg\Phi(x)\&x \neq \perp)$. Добавим в сигнатуру новый константный символ $\mathbf{d}$. Рассмотрим теорию $\mathbf{Th}(\mathbf{C}) \cup \{\neg\Phi_n(\mathbf{d})\&\mathbf{d} \neq \perp | n > 1\}$. Здесь $\mathbf{Th}(\mathbf{C}) = \{\psi | \psi$ — формула первого порядка и $\mathbf{C} \models \psi\}$. Докажем, что эта теория совместна. Иначе по теореме компактности найдется конечная подтеория $\mathbf{T} \subseteq \mathbf{Th}(\mathbf{C})$ и $k > 1$, для которой $\mathbf{T} \cup \{\neg\Phi_n(\mathbf{d})\&\mathbf{d} \neq \perp | n < k\}$ не выполнима. Рассмотрим $v = \omega\backslash\{1, 2, \ldots, k\}$ и оценим $\mathbf{d}$ в $\mathbf{C}$ как v, а остальные константы — как элементы, именами которых они являются. Тогда $\mathbf{C} \models \mathbf{T} \cup \{\neg\Phi_n(\mathbf{d})\&\mathbf{d} \neq \perp | n < k\}$, что противоречит ее невыполнимости. Тогда найдется такая модель $\mathbf{D}$ теории сходства, что $\mathbf{D} \models \mathbf{Th}(\mathbf{C}) \cup \{\neg\Phi_n(\mathbf{d})\&\mathbf{d} \neq \perp | n > 1\}$. Ясно, что $\mathbf{D} \models \exists x(\neg\Phi(x)\&x \neq \perp)$. Пусть теперь найдется такая формула ϑ первого порядка, что для произвольной модели $\mathbf{M}$ теории сходства $\mathbf{M} \models \exists x(\neg\Phi(x)\&x \neq \perp)$ тогда и только тогда, когда $\mathbf{M} \models \vartheta$. Тогда $\mathbf{D} \models \vartheta$ и $\mathbf{C} \models \neg\vartheta$. Так как $\neg\vartheta \in \mathbf{Th}(\mathbf{C})$ и $\mathbf{D} \models \mathbf{Th}(\mathbf{C})$, то $\mathbf{D} \models \neg\vartheta$. Противоречие.

ЗАДАЧА АНАЛОГИИ. Найдется ли нетривиальное сходство некоторых объектов $z_1, \ldots, z_n$ $(n > 1)$, которое содержится в $\mathbf{q}$?

$$\exists n > 1 \exists z_1 \ldots \exists z_n \exists v_1 \ldots \exists v_{n-1}[J_+(z_1)\& \ldots$$

$$\ldots \& J_+(z_n)\&v_1 = z_1 \wedge z_2 \& v_2 = v_1 \wedge z_3 \& \ldots \& v_{n-1} =$$

$$= v_{n-2} \wedge z_n \& v_{n-1} \neq \perp \& v_{n-1} \leq \mathbf{q}].$$

Следствие 1. *На конечных моделях задача аналогии выражается формулой первого порядка.*

Доказательство. Легко видеть, что задача аналогии записывается в виде $\exists v(\Phi(v)\&v \neq \perp \& v \leq \mathbf{q})$. Теперь остается применить теорему 1.

§ 3. МНОГОЗНАЧНЫЕ ЛОГИКИ

Так как исходная база данных содержит неполную информацию о свойствах изучаемых объектов, приходится вводить дополнительные истинностные значения. В итоге получаем следующие внутренние (расщепляемые в случае итерации) истинностные значения: $(+1)$ — фактическая истина, (-1) — фактическая ложь, (0) — фактическое противоречие, (τ) — неопределенность. Кроме того, имеются стандартные внешние истинностные значения $\mathbf{t}$ (логическая истина — выделенное значение) и $\mathbf{f}$ (логическая ложь). Для каждого внутреннего истинностного значения вводятся соответствующие характеристические J-операторы Россера—Тьюркетта: $J_\nu(\lambda) = \mathbf{t}$, если $\lambda = \nu$, и $J_\nu(\lambda) = \mathbf{f}$, если $\lambda \neq \nu$. Здесь λ и ν пробегают внутренние истинностные значения.

Формулы вида $J_\nu(\Phi)$, где Φ — произвольная формула, а ν — внутреннее истинностное значение, назовем J-формулами. J-формулы вида $J_\nu(\Phi)$, где Φ — атомарная формула, назовем J-атомарными. Формулы, построенные из J-формул с помощью обычных логических связок логики первого порядка, назовем внешними. Внешние формулы, содержащие только J-атомарные J-формулы, назовем нормальными.

На внутренних истинностных значениях можно определить связки и кванторы. Нужно только позаботиться о том, чтобы для любой внешней формулы существовала эквивалентная ей нормальная формула. Такие многозначные логики называются J-определимыми. Критерий J-определимости и теорема об аксиоматизируемости многозначных (бесконечнозначных с конечным числом типов истинностных значений) логик были установлены О. М. Аншаковым, Д. П. Скворцовым и В. К. Финном [5].