УДК 62-50:519.7

А. С. Бурый

Декомпозиция распределенных отказоустойчивых информационно-измерительных систем

На основе теории категорий рассмотрена декомпозиция сложных информационных систем и их информативность в условиях отказов.

I. ВВЕДЕНИЕ

При синтезе технических систем управления сложными динамическими объектами (СДО), например, летательными аппаратами (ЛА), анализируются большие информационные потоки в различных контурах управления (информация об инерциальном, техническом состоянии, технологические данные и т. д.). Информационно-измерительные системы (ИИС) при управлении ЛА характеризуются пространственно-временной распределенностью [1], и одним из путей анализа их структурных свойств является декомпозиция процессов переработки информации. Используемые вероятностные модели для описания происходящих в ИИС процессов не всегда отвечают действительности из-за неадекватности вероятностных распределений при описании неопределенностей. Так, для результатов оценивания состояния ЛА часто важна максимальная возможная погрешность, а не средняя. Аппарат теории категорий [2, 3], построенный на абстрактно-алгебраической основе, позволяет с единых позиций рассматривать преобразователи информации (ПИ) различного класса (в зависимости от вида сигналов, от места использования в аппаратуре, от особенностей построения ИС со взаимосвязанными преобразователями информации и т. д.) и устанавливать связь между ними. К достоинствам данного подхода можно отнести геометричность основных понятий и результатов. В общем случае под *преобразователями информации* будем понимать аппаратные и программные средства, осуществляющие переработку данных (измерение, передачу, обработку, отображение) в ИИС.

Цель настоящей работы — рассмотрение возможностей применения аппарата теории категорий к описанию ИИС и тех ее подсистем, в которых осуществляется последовательно-параллельная переработка данных, а также к оценке структур ИИС, формируемых в результате декомпозиции и агрегирования в условиях отказов.

II. ДЕКОМПОЗИЦИЯ ЗАДАЧ ПЕРЕРАБОТКИ ИНФОРМАЦИИ В ИИС

Проблема сравнения информативности отдельных подсистем ИИС приводит к понятию нормального относительного эквивалента, в некотором смысле представляющего максимальную по объему информацию, которая может быть извлечена из измерительных данных (эксперимента). Понятие нормального эквивалента обеспечивает простой критерий сравнения информативности различных однотипных (и необязательно) подсистем [4]. Это понятие оказывается весьма удобным при описании частично упорядоченного семейства, например, последовательности этапов оценивания [5] (классов эквивалентной информативности).

На примере многоэтапного оценивания измерительной информации рассмотрим процесс переработки данных в виде следующего преобразования

$$\hat{x}_{i_m} = \mathbf{Q}_{i_m}(\hat{x}_{i-1}) + \mu_{i_m}, \qquad (1)$$

где $\hat{x}_{i_m} \in \hat{X}_{i_m}$ — результат оценивания m-й системы на i-м этапе преобразования данных ($i = \overline{1, M}$); $\mu_{i_m} \in \hat{X}_{i_m}$ — шумы преобразования с нулевым средним и заданным корреляционным оператором $\mathcal{M}_m : \hat{X}_{i_m} \to \hat{X}_{i_m}$; нелинейную функцию (1) будем интерпретировать как отображение $\mathbf{Q}_{i_m} : \hat{X}_{i_m} \to \hat{X}_{i_m}$. Будем считать, что функции $q_{i_m} \in \mathbf{Q}_{i_m}$ однозначны, непрерывны и дифференцируемы по всем своим аргументам. Математическая модель ПИ (1) задается парой операторов $[\mathbf{Q}_m, \mathcal{M}_m]$. В [6] показана взаимная однозначность нелинейного отображения в выпуклой и прямоугольной областях.

При решении задач оценивания исследуется наблюдаемость динамической системы, для чего формируется матрица наблюдаемости, которая при нелинейности (1) принимает вид

$$N_i = \left[\frac{\partial Q_i^{(0)}}{\partial \hat{x}_{i-1}^T} \frac{\partial Q_i^{(1)}}{\partial \hat{x}_{i-1}^T} \cdots \frac{\partial Q_i^{(m)}}{\partial \hat{x}_{i-1}^T} \right], \qquad (2)$$

где $\partial Q_i^{(\cdot)} / \partial \hat{x}_{i-1}^T$ — коэффициенты ряда Тейлора от функции q_i. Здесь для простоты номер системы опущен. Тогда для обеспечения, например, в некоторой точке $\hat{x}^* \in \hat{X}_i$ условия локальной наблюдаемости достаточно выполнения равенства [6]

$$\operatorname{rank} N_i(\hat{x}^*) = n_i,$$

где n_i — размерность вектора оценок состояния на i-м этапе.

Для построения категорий требуется некоторый класс объектов и некоторый класс морфизмов между ними [2]. В качестве объектов можно взять системы, т. е. отношения на подходящим образом определенных множествах. При анализе структур систем в качестве морфизмов используются гомоморфизмы отношений [3].

Рассмотрим структурные свойства ПИ, так как при синтезе ИИС актуальным является представление их в виде более простых элементов, которые в дальнейшем используются для построения новых систем с заданными требованиями. Оценим взаимосвязь двух различных систем i-го этапа преобразования (оценивания) информации m и n с помощью взаимной корреляции случайных векторов μ_m и μ_n:

$$\mathcal{M}_{mn_i} : \hat{X}_{i_n} \to \hat{X}_{i_m}, \forall x \in \hat{X}_{i_n} \mathcal{M}_{mn_i} x = \mathbf{E}(\mu_n, x)\mu_m.$$

Операция математического ожидания $\mathbf{E}$ берется по совместному распределению векторов μ_m и μ_n.

В соответствии с [4] определим категорию линейного преобразователя информации (ЛПИ), которая включает морфизмы (преобразователи информации) m, n, r, характеризуемые следующими свойствами.

Для каждого морфизма m_i характерны следующие объекты: $\hat{X}_{i-1_m}$ — область определения, $\hat{X}_{i_m}$ — область значений для каждого i-го ($i=\overline{1, M}$) этапа преобразования данных, т. е. $m_i : \hat{X}_{i-1_m} \to \hat{X}_{i_m}$, а также линейные отображения q_{i_m} (рис. 1) с областью определения

$$\{\hat{x}_{i-1_m} \in \hat{X}_{i-1_m} | \exists \hat{x}_{i_m} \in \hat{X}_{i_m} \langle \hat{x}_{i_m}, \hat{x}_{i-1_m} \rangle \in q_{i_m}\}$$

и областью значений вида

$$\{\hat{x}_{i_m} \in \hat{X}_{i_m} | \exists \hat{x}_{i-1_m} \in \hat{X}_{i-1_m} \langle \hat{x}_{i_m}, \hat{x}_{i-1_m} \rangle \in q_{i_m}\},$$

что соответствует параллельному функционированию ПИ; для пары морфизмов m и n справедливо

$$\mathcal{M}_{mn_i} : \hat{X}_{i_n} \to \hat{X}_{i_m}.$$

Таким образом, в формализованном виде преобразователь информации в многоэтапных распределенных системах представим, как

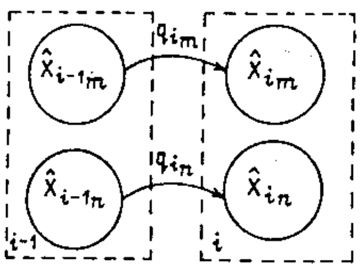

Рис. 1. Параллельное взаимодействие ПИ m и n

Определение 1. ПИ на i-м этапе — есть четверка $\prod_i = \langle Q, \hat{X}_{i-1}, \hat{X}_i, \mathcal{M} \rangle$ и справедливы следующие аксиомы:

a) равенства:

$$\forall n; n(m = n \Leftrightarrow (\hat{X}_{i-1_m} = \hat{X}_{i-1_n} \,\&\, \hat{X}_{i_m} = \\ = \hat{X}_{i_n} \,\&\, Q_{i_m} = Q_{i_n} \,\&\, \forall r \mathcal{M}_{mr} = \mathcal{M}_{nr})); \qquad (3)$$

b) композиции:

если m и n произвольные преобразователи информации, такие, что $\hat{X}_{i_m} = \hat{X}_{i_n}$, т. е. $\hat{X}_{i-1_m} \xrightarrow{m} \hat{X}_{i_m} \xrightarrow{n} \hat{X}_{i+1_n}$, то для композиции (рис. 2) $n \circ m$ требуется, чтобы

$$\hat{X}_{i_{nom}} = \hat{X}_{i-1_m}, \hat{X}_{i+1_{nom}} = \hat{X}_{i+1_n}, Q_{i_{nom}} = Q_{i_n} Q_{i_m},$$
$$\forall d \mathcal{M}_{nom,d} = \mathcal{M}_{nd} + A_n \mathcal{M}_{md}. \qquad (4)$$

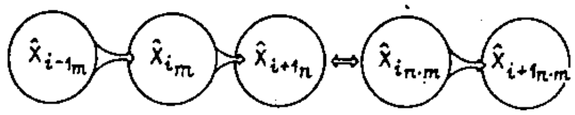

Рис. 2. Композиция преобразователей информации (внешняя декомпозиция)

Если рассматривать последовательное преобразование идентичными подсистемами, то $\hat{x}_i = \mathbf{Q}_i(\hat{x}_{i-1}) + \mu_i$ и $\hat{x}_{i+1} = \mathbf{Q}_{i+1}(\hat{x}_i) + \mu_{i+1}$, причем результат последнего преобразования представим, как

$$\hat{x}_{i+1} = \mathbf{Q}_{i+1}(\mathbf{Q}_i(\hat{x}_{i-1}) + \mu_i) + \mu_{i+1} =$$
$$= \mathbf{Q}_{i+1}\mathbf{Q}_i(\hat{x}_{i-1}) + (\mathbf{Q}_{i+1}\mu_i + \mu_{i+1}).$$

Применительно к конкретному этапу переработки данных введем понятие произведения преобразователей информации m и n, действующих из одного и того же пространства ($\hat{X}_{i-1_m} = \hat{X}_{i-1_n}$), характерного, например, для ПИ в резервируемых подсистемах. Для преобразователя $m * n$, можно записать (рис. 3)

$$\forall m, n : \hat{X}_{i-1_m} = \hat{X}_{i-1_n} \exists m * n : \hat{X}_{i-1_m} \to \hat{X}_{i_m} \times \hat{X}_{i_n},$$

$$\mathbf{Q}_{m*n} = \begin{pmatrix} \mathbf{Q}_m \\ \mathbf{Q}_n \end{pmatrix} : \hat{X}_{i-1} \to \hat{X}_{i_m} \times \hat{X}_{i_n} \,\&\, \forall d \mathcal{M}_{m*n,d} =$$
$$= \begin{pmatrix} \mathcal{M}_{i_{md}} \\ \mathcal{M}_{i_{nd}} \end{pmatrix} : \hat{X}_{i_d} \to \hat{X}_{i_m} \times \hat{X}_{i_n}. \qquad (5)$$

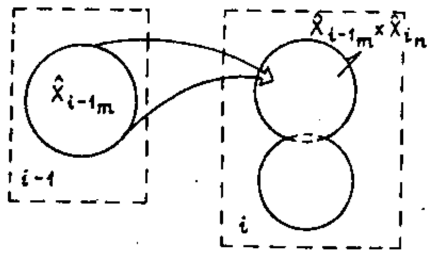

Рис. 3. Объединение ПИ вида $m * n$ (внутренняя декомпозиция)

Произведением пространств $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ в категории ЛПИ будет их обычное произведение $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ как евклидовых пространств. Произведением (в теоретико-категорийном смысле) преобразователей данных m и n, таких, что $\hat{X}_{i_m} = \hat{X}_{i_n}$, является $m * n$.

Будем делить декомпозицию ИИС на внешнюю (по этапам переработки информации в системе) и внутреннюю (на отдельные элементы — (алгоритмы, преобразователи — на этапе). Если считать, что на $(i-1)$-м этапе работает ПИ m, а на i-м — n, то внешняя композиция характеризуется операцией $m \circ n$, а внутренняя — $m_j \times n$ (здесь m_j — подэлемент преобразователя m).

Декомпозицию сложных ПИ, осуществляющих переработку разнообразных по составу данных, целесообразно проводить на подэлементы.

Определение 2. Подэлементом ПИ m будем называть преобразователь m_j с областью определения $\hat{X}^{(j)}_{i-1_m} \subset \hat{X}_{i-1_m}$ и областью значений $\hat{X}^{(j)}_{i_m} \subset \hat{X}_{i_m}$.

Зачастую для упрощения анализа систем используют агрегирование ее подсистем, поэтому с учетом [4] введем понятие параллельного произведения преобразователей информации для двух подэлементов m_1 и m_2

$$m_1 \times m_2 : \hat{X}^{(1)}_{i-1_m} \times \hat{X}^{(2)}_{i-1_m} \to \hat{X}^{(1)}_{i_m} \times \hat{X}^{(2)}_{i_m},$$

т. е.

$$\mathbf{Q}_{m_1 \times m_2} = \begin{pmatrix} \mathbf{Q}^{(1)}_m & 0 \\ 0 & \mathbf{Q}^{(2)}_m \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{M}_{m_1 \times m_{2,r}} = \begin{pmatrix} \mathcal{M}_{m_1 r} \\ \mathcal{M}_{m_2 r} \end{pmatrix}.$$

При этом пара преобразователей представляется одним — агрегированным

$$\hat{x}^{(1)}_{i_m} = \mathbf{Q}^{(1)}_{i_m} \hat{x}^{(1)}_{i-1_m} + \mu^{(1)}_{i_m}, \; \hat{x}^{(2)}_{i_m} = \mathbf{Q}^{(2)}_{i_m} \hat{x}^{(2)}_{i-1_m} + \mu^{2}_{i_m},$$

$$\begin{pmatrix} \hat{x}^{(1)}_{i_m} \\ \hat{x}^{(2)}_{i_m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{Q}^{(1)}_{i_m} & 0 \\ 0 & \mathbf{Q}^{(2)}_{i_m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x}^{(1)}_{i-1_m} \\ \hat{x}^{(2)}_{i-1_n} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mu^{(1)}_{i_m} \\ \mu^{(2)}_{i_n} \end{pmatrix}.$$

Для формализации конструкций ПИ из различных подэлементов считаем, что приоритет композиции $\circ$ выше, чем произведения $*$, поэтому при работе с одинаковыми данными имеет место равенство (рис. 4,a)

$$(m_1 * m_2) \circ n = m_1 \circ n * m_2 \circ n;$$

а в случае внутренней композиции (рис. 4,b)

$$(m_1 \times m_2) \circ (n_1 \times n_2) = m_1 \circ n_1 \times m_2 \circ n_2.$$

Более сложное взаимодействие подэлементов ПИ формализуется с помощью введенных отношений. Так, для структуры, представленной на рис. 5, справедлива формула

$$(m_1 \times m_2 \circ [(n_1 * n_2) \times n_2] = m_1 \circ (n_1 * n_2) \times m_2 \circ n_2,$$

что соответствует смешанной композиции (как на этапах, так и между ними).

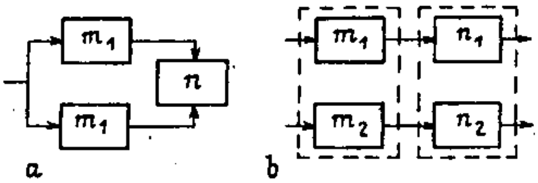

Рис. 4. Внутренняя — a и внешняя — b декомпозиции ПИ на подэлементы

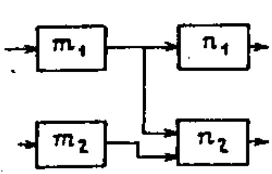

Рис. 5. Смешанная декомпозиция подэлементов ПИ

Применительно к внутренней композиции справедливо следующее

Утверждение 1. Для структуры из двух преобразователей информации, когда $m_1 : \hat{X}_{i-1_1} \to \hat{X}_{i_1}$, а $m_2 : \hat{X}_{i-1_2} \times \hat{X}_{i_1} \to \hat{X}_{i_2}$ (рис. 6) справедливо следующее соотношение

$$m_1 \bowtie m_2 = m_1 \times m_1 \circ m_2 \times m_2. \tag{6}$$

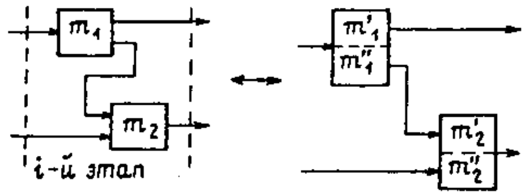

Рис. 6. Трансформация преобразователей информации на подэлементы

Доказательство. Декомпозируем ПИ m_1 и m_2 на m'_1, m''_1 и m'_2, m''_2 с соответствующими областями определений и значений так, что существует последовательная трансформация отображений

$$\hat{X}_{i-l_1} \times \hat{X}_{i-l_2} \to \hat{X}_{i_1} \times \hat{X}_{i_2} \Longrightarrow \hat{X}_{i-l_1} \times \hat{X}_{i-l_2} \to$$

$$\to \hat{X}'_{i_1} \times \hat{X}''_{i_1} \times \hat{X}_{i_2},$$

т. е. в сущности область значений $\hat{X}'_{i_1} = \hat{X}_{i_1}$. Для второго подэлемента ПИ m_2 имеем $\hat{X}''_{i_1} \times \hat{X}_{i-l_2} \to \hat{X}_{i_2}$. Таким образом, для структуры (см. рис. 6)

$$m_1 \bowtie m_2 : \hat{X}_{i-l_1} \times \hat{X}_{i-l_2} \to \hat{X}'_{i_1} \times \hat{X}'_{i_2}$$

или, через операции отношений, $m_1 \bowtie m_2 = m'_1 * [m''_1 \circ m'_2] \times m''_2$.

Если не учитывать возможную декомпозицию подэлементов m_1 и m_2, а частичное последовательное преобразование этими подэлементами представить, в соответствии с (4), как $m_1 \circ m_2 \times m_1 \times m_2$, т. е. имеет место выражение (6).

Определение 3. Преобразователи m и n *независимы* ($m \perp n$), если корреляционный оператор $\mathcal{M}_{mn} = 0$.

Определение 4. Преобразователи информации m и n *подобны* ($m \simeq n$), если

$$\hat{X}_{i_m} = \hat{X}_{i_n}, \; \hat{X}_{i+1_m} = \hat{X}_{i+1_n}, \; \mathbf{Q}_{i_m} = \mathbf{Q}_{i_n},$$

$$\mathcal{M}_{i_m} = \mathcal{M}_{i_n}. \tag{7}$$

Класс эквивалентности ПИ m, порождаемый отношением эквивалентности $\simeq$, будет обозначать $\mathrm{m} = [m] = [\mathbf{Q}_m, \mathcal{M}_m]$. Для технически реализуемых систем с изменяемой в результате различных факторов структурой введем понятие копии (резерва) ПИ:

$$\forall m \, \exists n (n \simeq m \& n \perp m). \tag{8}$$

Определение 5. Комплексный преобразователь информации (КПИ) $m^k = \cup_j^k m_j$ есть объединение k подобных ПИ вида (8), у которых $\hat{X}^j_{i-1_m} = \hat{X}_{i-1}$, $\hat{X}^j_{i_m} = \hat{X}_i$ для $\forall j = \overline{1,k}$. При этом величина k является кратностью резервирования, тогда $P(k) = \prod_j^k p_j = p^k$ — вероятность отказа КПИ для случая равнонадежных ПИ с вероятностями отказов — p.

Отношения независимости и подобия связаны с алгеброй преобразователей информации и вполне могут быть применены к анализу отказоустойчивости систем переработки информации. Так с учетом [4] можно записать, что

1) $r \perp m, n \Rightarrow r \perp m \circ n$, $r \perp m, n \Longleftrightarrow r \perp m * n$, $r \perp m, n \Longleftrightarrow r \perp m \times n$;

2) если $m \simeq n$, $r \simeq d$, $m \perp r$, $n \perp d$, то $m o r \simeq n o d$, $m \times r \simeq n \times d$.

III. ПОНЯТИЯ ИНФОРМАТИВНОСТИ В ИИС

Для сравнения ПИ введем отношение информативности, тогда для двух преобразователей, m и n, действующих из одного и того же пространства, когда $\hat{X}_i = \hat{X}_{i_m} = \hat{X}_{i_n}$, справедливо (4)

Определение 6. ПИ m *информативнее* n, если существует ПИ r, независимый от m, такой, что $r \circ m$ подобен n. Или

$$m \succ n \overset{\Delta}{\Longleftrightarrow} \exists r \perp m : r \circ m \simeq n.$$

Отношение $\succ$ является отношением частного порядка, порождающим отношение эквивалентности $\sim$ следующим образом: $m \sim n \overset{\Delta}{\Longleftrightarrow} m \succ n \& n \succ m$.

В категории преобразователей информации случайные элементы (СЭ) определяются как ПИ специального вида [4]. При этом под случайным элементом $\mathcal{S}$ понимается ПИ f, действующий из нульмерного пространства $\mathcal{Z} = \{0\}$, т. е. $f : \mathcal{Z} \to \mathcal{S}$.

Таким образом, в категории ЛПИ случайному элементу f отвечает нулевой оператор $\mathbf{Q}_f = 0 : \mathcal{Z}_i \to \hat{X}_{i+1_f}$, с корреляционным оператором $\mathcal{M}_{f_m}$. Классы эквивалентности относительно отношения подобности для случайных элементов назовем *распределениями*. Распределение f в пространстве $\mathcal{S}$ взаимно-однозначно определяется линейным оператором $\mathcal{M}_f : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$, $\mathcal{M}_f \geq 0$.

Если f — некоторый случайный элемент и m — преобразователь информации, действующий из $\hat{X}_{i_f}$, такой, что $m \perp f$, то будем говорить, что m переводит f в случайный элемент $g = m \circ f$ или, что g несет некоторую информацию об f.

Распределение $[f * g]$ будем называть *совместным* распределением случайных элементов f и g. Очевидно *маргинальные распределения*, получающиеся из $[f * g]$ проектированием i-го этапа переработки данных в ИИС на $\hat{X}_{i+1_f}$ и $\hat{X}_{i+1_g}$, совпадают с распределениями $[f]$ и $[g]$, т. е. $[f] = \mathrm{p} \circ [f * g]$, $[g] = \mathrm{p}' \circ [f * g]$. Здесь p и p' — проекции соответственно на первую и вторую компоненты совместного распределения. Для информации, циркулирующей в однотипных ПИ, запишем:

Определение 7. Случайные элементы g и h подобны относительно f (f-подобны), если совместные распределения $[f * g]$ и $[f * h]$ совпадают, т. е. $g \simeq_f h \overset{\Delta}{\Longleftrightarrow} f * g \simeq f * h$.

Кроме того, $g \simeq_f h$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{M}_g = \mathcal{M}_h$ и $\mathcal{M}_{fg} = \mathcal{M}_{fh}$.

Для произвольного морфизма $r \in$ ЛПИ

$$m \simeq_r n \overset{\Delta}{\Longleftrightarrow} r \times m \simeq r \times n,$$

или, что то же самое

$$m \simeq_r n \overset{\Delta}{\Longleftrightarrow} \mathbf{Q}_m = \mathbf{Q}_n \;\&\; \mathcal{M}_m = \mathcal{M}_n \;\&\; \mathcal{M}_{rm} = \mathcal{M}_{rn}.$$

Определение 8. Случайный элемент g *информативнее*, чем h, относительно f (или f-информативнее), если существует преобразователь информации r, независимый одновременно от f и от g, такой, что $r \circ g$ и h подобны относительно f, т. е.

$$g \overset{\bullet}{\succ}_f h \overset{\Delta}{\Longleftrightarrow} \exists r \perp g, f : r \circ g \simeq_f h \tag{9}$$

или $g \overset{\bullet}{\succ}_f h \overset{\Delta}{\Longleftrightarrow} \exists r \perp g, f : f * r \circ g \simeq f * h$, причем отношение предпорядка $\overset{\bullet}{\succ}_f$ определено не на распределениях, а на совместных распределениях вида $[f * h]$, где f — фиксированный случайный элемент [4]. Это справедливо для ПИ, в которых в результате действия ряда мешающих факторов возможна потеря части данных [5]. Тогда справедливо рассматривать любой морфизм r как некоторое преобразование данных оператором, состоящем из нулей и единиц в зависимости от того, пропадает или нет сигнал в соответствующем канале преобразования. Тогда справедливо соотношение (9), из которого следует, что входная информация, в общем случае, информативнее выходной.

Отношение эквивалентности, порожденное отношением предпорядка $\overset{\bullet}{\succ}_f$, будем обозначать $\overset{\bullet}{\sim}_f$:

$$g \overset{\bullet}{\sim}_f h \overset{\Delta}{\Longleftrightarrow} g \overset{\bullet}{\succ}_f h \;\&\; h \overset{\bullet}{\succ}_f g.$$

Факт существования отношения $g \overset{\bullet}{\succ}_f r \circ g$ будем рассматривать информационным отказом, стоимость которого можно характеризовать вероятностью отказа — p_r.

Определение 9. Пусть для преобразователей информации m_1 и m_2, при одинаково действующих на них мешающих факторах и для случайного элемента f выполнено $\hat{X}^{(1)}_{i_m} = \hat{X}^{(2)}_{i_m} = \hat{X}_{i+1_f}$ и $m_1, m_2 \perp f$. ПИ m_1 *информационно устойчивее*, чем ПИ m_2 относительно f, если случайный элемент $m_1 \circ f$ более информативен относительно f, чем $m_2 \circ f : m_1 \succ_f m_2 \overset{\Delta}{\Longleftrightarrow} m_1 \circ f \overset{\bullet}{\succ}_f m_2 \circ f$.

Соответственно, для таких преобразователей $p_{m_1} > p_{m_2}$.

Определение 10. Комплексный преобразователь информации M^k перерабатывает информацию (случайный элемент f) в случайный элемент g, если

$$\mathrm{M}^k \perp f, \; g \simeq_f \mathrm{M}^k \circ f.$$

Здесь $\mathrm{M}^k \perp f \Longleftrightarrow m_1, m_2, \ldots, m_k \perp f$, а по (9) $f \overset{\bullet}{\sim} g$. В этом случае ПИ M^k будем называть *условным* преобразователем информации для случайного элемента g относительно f. Из данного определения следует, что g можно рассматривать, как результат переработки f.

Обозначим через g/f условный для g относительно f преобразователь информации, независимый от f, т. е.

$$g/f \perp f, \quad g \simeq_f (g/f) \circ f.$$

Из [4] известно, что для случайных элементов f, g и h

$$g \overset{\bullet}{\succ}_f h \Longleftrightarrow g/f \succ_f h/f.$$

Поэтому можно утверждать, что в информационно-устойчивой системе отображение из пространства $\mathcal{F}$ в $\mathcal{S}$ производится морфизмами m_j, если $f : \mathcal{Z} \to \mathcal{F}$, $\mathrm{M}^k : \mathcal{F} \to \mathcal{S}$ и $\mathrm{M}^k \perp f$ (рис. 7), тогда

$$\mathrm{Q}_m^{(k)} \circ f \overset{\bullet}{\sim}_{m^k \circ f} f. \qquad (10)$$

Таким образом, относительно $\mathrm{M}^k \circ f$ случайный элемент f также информативен, как и $\mathrm{Q}_m^{(k)} \circ f$, что мотивируется возможностью использования "резервных" (дополнительных) морфизмов для повышения информационной устойчивости.

Рис. 7. Отображение пространств в информационно-устойчивой системе

Для сравнения информативности двух случайных элементов введем понятие f-нормального эквивалента для СЭ g.

Для случайных элементов f и g будем называть случайный элемент $f_g = \mathrm{Q}_{f/g}^{(k)} \circ g : \mathcal{Z}_i \to \hat{X}_{i+1}$, *нормальным относительно* f эквивалентом для g, при этом f_g и g должны были одинаково f-информативны [4].

Утверждение 2. Пусть f и g — два случайных элемента, то для систем с k-кратной информационной устойчивостью $f_g = \mathrm{Q}_{f/g}^{(k)} \circ g$. Тогда $f_g \overset{\bullet}{\sim}_f g$.

Доказательство. Возьмем $\mathrm{M}^k \simeq f/g$, $\mathrm{M}^k \perp g$. Тогда из выражения (10) получаем $f_g = \mathrm{Q}_m^{(k)} \circ g \overset{\bullet}{\sim}_{m^k \circ g} g$.

В задачах оценивания требуется для одного случайного элемента (объекта испытаний, измерительных данных) так построить другой случайный элемент (решение, оценку) из данного класса, чтобы качество такого решения было в определенном смысле максимально высоким [1, 2]. При этом удобно распределение исходного СЭ интерпретировать как априорную информацию о нем.

В нашем случае это два пространства $\hat{X}_i$ и $\hat{X}_{i+1}$, так как на любом $(i+1)$-м этапе производится оценивание данных, полученных на предыдущем этапе. Тогда под оценками для случайного элемента $f : \mathcal{Z} \to \hat{X}_i$ на $(i+1)$-м этапе обработки данных будем понимать любой СЭ $h : \mathcal{Z} \to \hat{X}_{i+1}$. Для сравнения различных решений (оценок) на классах f-подобных СЭ в $\hat{X}_{i+1}$ зададим некоторый предпорядок $\gg_f$ — критерий качества [4].

Этому предпорядку отвечает предпорядок $\gg$ на СЭ в $\hat{X}_i \times \hat{X}_{i+1}$, т. е. $f * h \gg f' * h' \overset{\Delta}{\Longleftrightarrow} f = f' \,\&\, h \gg_f h'$. Этот предпорядок определен на распределениях в $\hat{X}_i \times \hat{X}_{i+1}$. Отношение $\gg$ первично и удовлетворяет условию

$$f * h \gg f' * h' \Longrightarrow f \simeq f'.$$

Таким образом, предпорядок $\gg$ определен на распределениях $\mathbf{y} : \mathcal{Z} \to \hat{X}_i \times \hat{X}_{i+1}$ и удовлетворяет условию $\mathbf{y} \gg \mathbf{y}' \Longrightarrow \mathbf{p} \circ \mathbf{y} = \mathbf{p} \circ \mathbf{y}'$, где $\mathbf{p} : X_i \times \hat{X}_{i+1} \to \hat{X}_i$ — проекция на первую компоненту.

Рассмотрим для примера идеальный линейный преобразователь информации $q_i : \hat{X}_i \to \hat{X}_{i+1}$. Погрешность оценивания случайного элемента $q_i \circ f$ определим случайным элементом h в $\hat{X}_{i+1}$ как

$$\theta(f * h) = \mathrm{tr}(\mathcal{M}_h - q_i \mathcal{M}_{fh} - \mathcal{M}_{hf} q_i^* + q_i \mathcal{M}_f q_i^*) =$$

$$= \mathrm{tr}\mathcal{H}(f * h),$$

где $\forall \mathbf{y} : \mathcal{Z} \to \hat{X}_i \times \hat{X}_{i+1}$.

Здесь $\mathcal{H}(f * h)$, а следовательно, и $\theta(f * h)$ определяются лишь классами подобия элемента $f * h$, т. е. $\theta(f * h) = \mathbf{E}\|h - q_i \circ f\|^2$, если h и f интерпретируются как "обычные" случайные векторы, т. е. это не что иное, как погрешность оценки случайного вектора $q_i \circ f$ случайным вектором g. Для данного примера $h \gg_f h' \overset{\Delta}{\Longleftrightarrow} \theta(f * h) \leq \theta(f * h')$, т. е. оценки h по точности предпочтительнее h'.

В общем случае для решения задачи информационно-устойчивого оценивания при отказах в аппаратно-программных средствах требуется по заданным СЭ f и g, а также по вероятностям отказов, построить оптимальное решение для f на основании g, т. е. такой ПИ $\mathrm{M}^k : \hat{X}_{i_g} \to \hat{X}_{i+1}$, чтобы случайный элемент $h = \mathrm{M}^k \circ g$ был f-оптимален среди всех СЭ вида $n \circ g$. При этом предполагается, что m_j, $m \perp g$, f, т. е. строится класс подобия $\mathbf{m} = [m]$.

Данный анализ приводит к необходимости определения семантической f-информативности случайного элемента. Предпорядок $\gg_f$ очевидным образом индуцирует предпорядок $\overset{\circ}{\gg}_f$ — отношение семантической f-информативности на совокупности всех случайных элементов:

$$g \overset{\circ}{\gg}_f g' \overset{\Delta}{\Longleftrightarrow} \forall m' : \hat{X}_{i_{g'}} \to \hat{X}_{i+1} m' \perp g', \ f$$

$$\exists \mathrm{M}^k : \hat{X}_{i_g} \to \hat{X}_{i+1} \ \mathrm{M}^k \perp g : \mathrm{M}^k \circ g \gg_f m' \circ g'.$$

Эквивалентность, отвечающую этому предпорядку, обозначим $\overset{\circ}{\approx}_f$.

Естественно, что если случайный вектор g информативнее, чем g' относительно f (когда пропадает, например, части информации в результате отказов), то g будет "лучше" g' в любой задаче оценивания с априорной информацией f, т. е. при худших результатах измерений и прочих равных условиях (алгоритмах обработки, характеристиках мешающих воздействий и т. д.) практически невозможно получить лучшие результаты оценивания.

Представим задачу оптимального оценивания СЭ f по СЭ g относительно критерия $\gg_f$ как задачу построения множества $\mathcal{O}_f(g)$ оптимальных ПИ ρ из $\hat{X}_{i-1_g}$ в $\hat{X}_i$, таких, что преобразователи информации $\rho \circ g$ являются $\gg_f$-максимальными элементами. Чтобы решить задачу оценивания достаточно для каждого класса эквивалентности ПИ из $\mathcal{O}_f(g)$ выбрать хотя бы один элемент при обеспечении необходимого уровня информационной устойчивости за счет, например, организации резервных аппаратно-программных средств.